REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE FERHAT ABBAS-SETIF

MEMOIRE

Présenté à la Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Pour l'Obtention du Diplôme

MAGISTER

Option : Algèbre et Géométrie

Par

Mlle. Meriem HAMITOUCHE

THEME

Etude comparative des trois variétés de groupes 2-Engel, n-Levi et n- Bell

Soutenu le

08/07/2009

Devant le jury

Président :	Dr. N. BENSALEM	Prof. Université Ferhat Abbas	Setif
Rapporteur :	Dr. B. DAOUD	M.C Université Ferhat Abbas	Setif
Examinateurs :	Dr. A. BOUKAROUIRA	M.C Université Ferhat Abbas	Setif
	Dr. L. NOUI	Prof. Université Colonel Hadj Lakhdar	Batna

Remerciements

Je tiens à adresser mes remerciements les plus chaleureux et les plus sincères à Monsieur Bounabi Daoud qui a dirigé ce travail avec gentillesse et efficacité. Je le remercie aussi pour les corrections qu'il a apportées à ce mémoire et les précieux conseils qu'il m'a prodigués tout au long de ce travail.

Je remercie chaleureusement Monsieur Naceurdine Bensalem pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire.

J'adresse mes plus vifs remerciements à Messieurs Ali Boukaroura et Lemnouer Noui pour avoir bien voulu s'intéresser à mon travail et accepter de faire partie du jury.

Je remercie également mes parents qui m'ont encouragée à terminer ce mémoire.

ملخص .

هدف هذا العمل هو تعميم لزمرة غير منتهية G لنتيجتين و جدتا من طرف Corsi Tani و Bonafede حول بنية زمرة التماثلات الناطقة و القابلة للقلب لنفس الزمرة G ، عندما تكون هذه الزمرة عديمة القوة و الشرط الذي يجب أن تحققه زمرة ما كي يكون مجموع التشاكلات الداخلية لهذه الزمرة تشاكلا ناطقا و قابلا للقلب .

الكلمات و الجمل المهمة : تطبيقات ناطقة ، تماثلات ناطقة زمر n – آبلية و زمر 2 – أنڤل.

تصنيف أمريكي للمواضيع : 20E36 ؛ 20E45

Abstract .

The aim of this word is the generalization to an infinite group G of two results obtained by Corsi Tani and Bonafede about the structure of the invertible rational endomorphisms of G when G is nilpotent and the condition which must satisfy a group G for that the sum of inner automorphisms of this group is an invertible rational automosphism of G .

Key words and phrases : rational functions , rational endomorphisms , generalized n - abelian groups , 2 – Engel groups .

Mathematics Subject Classification : 20E36 ; 20E45 .

Résumé .

L'objet de ce travail est la généralisation à un groupe infini de deux résultats obtenus par Corsi Tani et Bonafede sur la structure du groupe des endomorphismes rationnels inversibles de G lorsque G est nilpotent et la condition que doit vérifier ce même groupe G pour qu'une somme d'automorphismes intérieur de ce groupe soit un automorphisme inversible de G .

Mots et Phrases Clés : Applications rationnelles , endomorphismes rationnels , groupes n – abéliens généralisés , groupes 2 – Engel .

Mathematics Subject Classification : 20E36 ; 20E45 .

Table des matières

Notations **2**

0.0.1 **Notations** 3

Introduction **4**

0.0.2 **Introduction** 4

1 Eléments de Théorie des Groupes **5**

1.1 **Introduction** 5

1.2 **Classes de groupes** 5

1.3 **Groupes libres** 7

1.3.1 **Groupes libres** 7

1.3.2 **Variété de groupes** 8

1.4 **Condition maximale** 9

1.5 **Groupes abéliens et n-abéliens** 11

1.5.1 **Groupes abéliens** 11

1.5.2 **Groupes n-abéliens** 11

1.6 **Groupes nilpotents et n-nilpotents** 13

1.6.1 **Groupes nilpotents** 13

1.6.2 **Groupes n-nilpotents** 17

1.7 **Groupes résolubles et n-résolubles** 17

1.7.1 **Groupes résolubles** 17

1.7.2 **Groupes n-résolubles** 19
1.8 **Groupes métabéliens** 19
1.9 **Groupes d'Engel** 21
1.9.1 **Groupes n-Engel** 21
1.9.2 **Eléments $2-$Engel à droite** 22
1.10 **Groupes n-Kappe** 31

2 Propriétés des groupes n-Bell et n-Levi **33**
2.1 **Introduction** 33
2.2 **Groupes n-Bell** 34
2.2.1 **Quelques propriétés** 34
2.2.2 **n-résolubilité des groupes n-Bell** 46
2.3 **Groupes n-Levi** 51
2.3.1 **Quelques proprietés** 51
2.3.2 **n-résolubilité des groupes n-Levi** 62

3 Etude comparative des trois variétés n-Bell, n-Levi et 2-Engel **65**
3.1 **Introduction** 65
3.2 **Systemes de Levi** 65
3.3 **Relation entre les groupes n-Levi et les groupes n-Bell** 72
3.3.1 **Groupes 2-Bell et 2-Levi** 72
3.3.2 **Groupes 3-Bell et 3-Levi** 72
3.3.3 **Groupes n-Bell et n-Levi pour $n \geq 4$** 77

Bibliographie **94**

0.0.1 Notations

Les notations utilisées sont standard. Le commutateur de n éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$ d'un groupe G est défini par récurrence comme suit :

$$[x_1] = x_1, [x_1, x_2] = x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2$$

et

$$[x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n] = [[x_1, \cdots, x_{n-1}], x_n] \ (n \geq 2).$$

Le $n^{ième}$ terme de la suite centrale descendante est noté $\gamma_n(G)$ avec $\gamma_1(G) = G$ et $\gamma_n(G) = \left[\gamma_{n-1}(G), G\right]$ $(n \geq 2)$ .On désigne par $\mathcal{Z}(G)$ le centre de G.

Le groupe dérivé de G est noté G'. On note $R_2(G)$ le groupe des éléments 2-Engel à droite de G. $R_2(G) = \{g \in G/\ [g,\ x,\ x] = 1$ pour tout $x \in G\}$.

$E_2(G) = \langle\{[x, y, y]\,;\ x, y \in G\}\rangle$.

$\xi(G) = \{n \in \mathbb{Z};\ (xy)^n = x^n y^n$ pour tous $x, y \in G\}$.

$\xi_0 = \{n \in \mathbb{Z};\ n \in \xi(G)$ et $G^n \leq Z(G)\}$.

$\mathcal{L}(G) = \{n \in \mathbb{Z};\ [x^n, y] = [x, y]^n$ pour tous $x, y \in G\}$.

$\mathcal{L}_0(G) = \{n \in \mathbb{Z};\ n \in \mathcal{L}(G)$ et $G^n \leq R_2(G)\}$.

$B(G) = \{n \in \mathbb{Z}; [x^n, y] = [x, y^n]$ *pour tous* $x, y \in G\}$.

$B_0 = \{n \in \mathbb{Z};\ n \in B(G)$ et $G^n \leq R_2(G)\}$.

$\left\langle x^G \right\rangle = \langle\{x^g;\ g \in G\}\rangle$ et $x^g = g^{-1}xg$.

0.0.2 Introduction

La théorie des groupes est l'un des aspects les plus attrayants des mathématiques. Ses applications dans les divers domaines scientifiques (mathématiques, physique, chimie etc...) prouvent que cette théorie est un outil très puissant dans le développement de la science.

Dans ce mémoire, on s'intéresse à certaines classes de groupes vérifiant une propriété donnée. Dans le premier chapitre, on donne les principales propriétés des groupes. La majorité de ces propriétés (résolubilité, nilpotence, condition maximale, groupes 2-Engel etc...) sont puisées du livre de base de Derek J. S. Robinson (A course in the theory of groups [22].

Le 2^{eme} chapitre est consacré aux propriétés des groupes n-Bell, n-Levi, à la n-résolubilité et à leur n-résolubilité et n-nilpotence.la n-nilpotence

Dans le 3^{eme} chapitre on compare les trois variétés de groupes 2-Engel, n-Levi et n-Bell.

Chapitre 1

Eléments de Théorie des Groupes

1.1 Introduction

Le premier chapitre est consacré uniquement aux propriétés classiques des groupes (groupes libres, variétés de groupes, groupes abéliens , groupes n-abéliens, nilpotence, résolubilité, n-nilpotence, n-résolubilité, condition maximale, groupes métabéliens, éléments 2-Engels à droite et groupes n-Kappe). La plupart des définitions, propositions et théorèmes ont été énoncés sans démonstration. Le lecteur curieux peut consulter l'excellent ouvrage de D. J. Robinson [22] et [23] où il trouve toutes les démonstrations détaillées.

1.2 Classes de groupes

Définition 1.2.1.

Une classe de groupes $\mathcal{X}$ est une classe dont les objets sont des groupes vérifiant les conditions suivantes :

- *$\mathcal{X}$ contient le groupe trivial*
- *Si $G \in \mathcal{X}$ et $G_1 \simeq G$ alors $G_1 \in \mathcal{X}$.*

Si $G \in \mathcal{X}$, on dit que G est un $\mathcal{X}$-groupe.

Exemples 1.2.2.

- *Les groupes finis forment une classe de groupe notée* $\mathcal{F}$.

- *Les groupes abéliens forment une classe de groupe notée* $\mathcal{A}$.

Définition 1.2.3.

Soient $\mathcal{X}_1$ *et* $\mathcal{X}_2$ *deux classes de groupes. Le produit* $\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2$ est la *classe de tous les groupes* G *admettant un sous-groupe normal* N *dans* G *tel que* $N \in \mathcal{X}_1$ *et* $\frac{G}{N} \in \mathcal{X}_2$

On dit aussi que $\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2$ *est la classe des groupes* $\mathcal{X}_1$ *par* $\mathcal{X}_2$.

Proposition 1.2.4.

(i) *Le produit de classes de groupes n'est ni commutatif ,ni associatif .*

(ii) *On a* $\mathcal{X}_1\left(\mathcal{X}_2\mathcal{X}_3\right) \leq \left(\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2\right)\mathcal{X}_3$ *pour toutes classes* $\mathcal{X}_1$,$\mathcal{X}_2$,$\mathcal{X}_3$.

Proposition 1.2.5.

(1) *Une classe de groupes* $\mathcal{X}$ *est dite* S*-fermée si tout sous-groupe d'un* $\mathcal{X}$*-groupe est un* $\mathcal{X}$*-groupe.*

(2) *Une classe de groupes* $\mathcal{X}$ *est dite* S_n*-fermée si tout sous-groupe normal d'un* $\mathcal{X}$*-groupe est un* $\mathcal{X}-$*groupe.*

(3) *Une classe de groupes* $\mathcal{X}$ *est dite* $H-$*fermée si tout quotient d'un* $\mathcal{X}-$*groupe est un* $\mathcal{X}$*-groupe.*

(4) *Une classe de groupes* $\mathcal{X}$ *est dite* P*-fermée si toute extension d'un* $\mathcal{X}$*-groupe par un* $\mathcal{X}$-groupe *est un* $\mathcal{X}$*-groupe , c.a.d.* si $\mathcal{X}^2 = \mathcal{X}$.

(5) *Une classe de groupes* $\mathcal{X}$ *est dite* R*-fermée si pour toute famille* $(N_\lambda)_{\lambda\in\Omega}$ *de sous-groupes normaux de* G ; $\frac{G}{N_\lambda} \in \mathcal{X}$ *implique* $\frac{G}{\bigcap\limits_{\lambda\in\Omega} N_\lambda} \in \mathcal{X}$.

(6) *Une classe de groupes* $\mathcal{X}$ *est dite* D*-fermée si tout produit sous-cartésien de* $\mathcal{X}$*-groupes est un* $\mathcal{X}$*-groupe.*

(7) $\mathcal{L}\mathcal{X}$ *est la classe des groupes* G *tels dont toute partie finie est contenue dans un* $\mathcal{X}-$*groupe.*

$\mathcal{L}\mathcal{X}$ *s'appelle la classe des groupes localement* $\mathcal{X}-$*groupes.*

1.3 Groupes libres

1.3.1 Groupes libres

Soit X un ensemble non vide ; notons $X^{-1} = \{x^{-1}/x \in X\}$ où x^{-1} n'est qu'un symbole.

Définition 1.3.1.1.

Un mot écrit en alphabet X est une suite finie d'éléments de $X \cup X^{-1}$noté $\omega = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} x_3^{\varepsilon_3} ....x_r^{\varepsilon_r}$ où $r \in \mathbb{N}^*, x_i \in X, \varepsilon_i = \pm 1$

r est *la longuer du mot ω* ; il est *noté long (w)*.

Définition 1.3.1.2.(groupe libre)

Soit F un groupe ; on dit que F est un groupe libre sur l'ensemble non vide X, s'il existe une application σ

$$\begin{aligned} \sigma : X &\to F \\ x &\to \sigma(x) \end{aligned}$$

vérifiant la propriété suivante : pour tout autre groupe G et toute application

$$\alpha : X \to G$$

Il existe un unique homomorphisme

$$\beta : F \to G$$

tel que

$$\beta.\sigma = \alpha i.$$

Théorème 1.3.1.3.

Soit X un ensemble non vide, alors il existe un groupe F et une application $\sigma : X \to F$ tel que (F, σ) soit libre sur X et $F = \langle \operatorname{Im} \sigma \rangle$.

1.3.2 Variété de groupes

Définition 1.3.2.1. (Sous-groupe verbal).

Soit $F(X)$ *un groupe libre sur un ensemble dénombrable* $X = \{x_1, x_2, ...\}$. Soit W *un sous-ensemble non vide de* $F(X)$; *ses éléments sont appelés "mots" . Soit* G *un groupe quelconque. Soit* $\omega = x_{i_1}^{l_1} x_{i_2}^{l_2} ... x_{i_{l_r}}^{l_r} \in W$ *et soient* $g_1, g_2, ..., g_r$ *r-éléments de* G. *On définit la valeur du mot* ω *sur les* r *éléments* $g_1, g_2, ..., g_r \in G$ *par* $\omega(g_1, g_2, ..., g_r) = g_1^{l_1} g_2^{l_2} ....g_r^{l_r}$. *Le sous-groupe engendré par toutes les valeurs dans* G *de tous les mots de* W *est appelé sous-groupe verbal de* G *déterminé par* W.

$$W(G) = \langle \omega(g_1, g_2, ...) ;\ g_i \in G,\ \omega \in W \rangle .$$

Par exemple, si $W = \{[x_1, x_2]\}$, *alors* $W(G) = G'$. *Si* $W = \{x_1^n\}$, *alors* $W(G) = G^n$.

Définition 1.3.2.2. (l'identité).

Un mot $\omega \in F(X)$ *est dit un identité sur le groupe* G, *si* pour tous $g_1, ..., g_r$ dans G; $\omega(g_1, g_2, ..., g_r) = 1_G$.

Définition 1.3.2.3. (Sous-groupe marginal).

Soit W *un ensemble de mots dans* $x_1, x_2, ...$*et soit* G un groupe quelconque. *Un sous-groupe normal* N *de* G *est dit* $W-$*marginal si pour tous*$1 \leq i \leq r$,$a \in N$ et $g_1, ..., g_r$ dans G on a $\omega(g_1, g_2, ..., g_{i-1}, ag_i, g_{i+1}, ..., g_r) = \omega(g_1, g_2, ..., g_{i-1}, g_i, g_{i+1}, ..., g_r)$ avec $\omega(x_1, x_2, ..., x_r) \in W$.

Le sous-groupe de G *engendré par tous les sous-groupes* W*-marginaux de* G *est appelé sous-groupe* W*-marginal; il est noté* $W^*(G)$; de plus $W^*(G)$ *est aussi* W*-marginal et normal dans* G. Par exemple, si $W = \{[x_1, x_2]\}$, *il est facile de vérifier que*

$$W^*(G) = Z(G) .$$

Proposition 1.3.2.4.

Soit W un ensemble non vide de mots dans $x_1, x_2, ...$ et soit G un groupe quelconque.

Alors $W(G) = 1$ si, et seulement si, $W^*(G) = G$.

Définition 1.3.2.5 (Variété de groupe).

Soit $\varnothing \neq W \subseteq F$; *on appelle variété de groupes, toute classe de groupes* G *telle que tout élément de* W *soit l'identité sur* G ; c.a.d $W(G) = 1$, ou $W^*(G) = G$

- *La variété définie par* W *est notée* $\mathcal{B}(W)$.

- $\mathcal{B}(W) = \{G \mid G$ *soit un groupe et* $\omega(g_1, ..., g_r) = 1, \forall \omega \in W, \forall g_i \in G\}$.

Autrement dit $(G \in B(W)) \Longleftrightarrow (\omega(g_1, ..., g_r) = 1, \forall \omega \in W, g_i \in G)$.

On dit aussi que W *est un ensemble de lois de la varieté* $\mathcal{B}(W)$

Proposition 1.3.2.6.

Toute variété est fermée par passage aux sous-groupes, quotients et produits sous-cartésiens $(SB = B; HB = B; DB = B)$.

Théorème 1.3.2.7 (Birkhoff).

Toute classe groupes $\mathcal{X}$ *qui est* S, H *et* D *fermée est une varieté.*

Théorème 1.3.2.8.

Soit $W \subseteq F(X)$; *alors pour tout groupe* G *les conditions suivantes sont équivalents :*

1) $G \in B(W)$.

2) $W(G) = 1$.

3) $W^*(G) = G$.

1.4 Condition maximale

Définition 1.4.1.

Soit $(E, \leq)$ *un ensemble ordonné et non vide ; alors les deux conditons suivants sont équivalentes :*

(i) *Tout sous-ensemble* A *de* E *admet un élément maximal.*

(ii) *Toute suite croissante de* E *est stationnaire.*

Dans ces conditions, on dit que E *satisfait à la condition* max *ou vérifie* max.

Définition 1.4.2.

Soit G un groupe.

-On dit que G vérifie la condition maximale si tout ensemble non vide de sous-groupes de G admet un élément maximal et on notera '$\max$*'.*

-On dit que G vérifie la condition maximale sur les sous-groupes normaux si tout ensemble non vide de sous-groupes normaux de G admet un élément maximal et on notera '$\max -n$*'.*

Proposition 1.4.3.

Si G est un groupe, G vérifie $\max$ ($\max -n$)si et seulement si toute chaîne ascendante $H_1 \leq H_2 \leq ... \leq H_i \leq ...$ de sous-groupes (sous-groupes normaux) est stationnaire i.e $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $H_n = H_m$ pour tout $m \geq n$.

Théorème 1.4.4.

Un groupe satisfait à $\max$ *si,et seulement si,tout sous-groupe est de type fini.*

Proposition 1.4.5.

(i) *Tout groupe cyclique vérifie* $\max$.

(ii) *Tout groupe polycyclique satisfait* $\max$.

Théorème 1.4.6.

Soit G un groupe ; G satisfait $\max -n$ *si et seulement si tout sous-groupe normal de G est la clôture normale d'une partie finie de G.*

Théorème 1.4.7.

Les propriétés $\max$ *et* $\max -n$ *sont stables par extension ; c.a.d si $N \trianglelefteq G$ et $\frac{G}{N}$ vérifient l'une des deux propriétés précédentes, G vérifie lui-même cette propriété.*

Remarques 1.4.8.

(i) *La propriété* $\max$ *est stable par passage aux sous-groupes et images homomorphes (groupes quotients).*

(ii) *La propriété* $\max -n$ *n'est pas stable par passage aux sous-groupes.*

Proposition 1.4.9.

Soit G un groupe vérifiant $\max -n$ *et soit H un sous-groupe de G d'indice fini ; alors H vérifie aussi* $\max -n$.

1.5 Groupes abéliens et n-abéliens

1.5.1 Groupes abéliens

Proposition 1.5.1.1.

Soit G un groupe abélien ; l'ensemble des éléments de torsion de G est un sous-groupe de G, noté T, et $\frac{G}{T}$ est sans-torsion.

Proposition 1.5.1.2.

Soient G un groupe abélien et p un nombre premier ; l'ensemble des $p-$éléments de G est un sous-groupe de T, noté T_p.

Théorème 1.5.1.3.

Un groupe abélien est fini si, et seulement si, il est somme directe d'un nombre fini de groupes cycliques dont l'ordre de chacun est une puissance d'un nombre premier.

Proposition 1.5.1.4.

Si un groupe abélien est de type fini, il satisfait à $\max -n$.

Théorème 1.5.1.5.

(i) *Un groupe abélien de type fini est fini si, et seulement si, il est de torsion.*

(ii) *Un groupe abélien est de type fini si,et seulement si, il est somme directe d'un nombre fini de groupes cycliques dont l'ordre de chacun est ou bien infini ou bien fini d'ordre puissance d'un nombre premier.*

1.5.2 Groupes n-abéliens

Définition 1.5.2.1.

On dit que G est un groupe n-abélien ($n \in \mathbb{Z}$) si

$$(xy)^n = x^n y^n \quad \text{pour tous } x, y \in G$$

La classe des groupes n-abéliens est une variété définie par la loi

$$(xy)^n y^{-n} x^{-n} = 1$$

*donc elle est S-fermée, H-fermée D-*fermée *et R fermée.*

Remarques 1.5.2.2.

(*i*) *Tout groupe est* 0*-abélien et* 1*-abélien.*

(*ii*) *G est un groupe 2-abélien si, et seulement si, G est abélien.*

(*iii*) *Un sous-groupe d'un groupe n-abélien est n-abélien.*

(*iv*) *L'image homomorphe d'un groupe n-abélien est n-abélienne.*

(*v*) *Le produit direct fini de groupes n-abéliens est n-abélien.*

Lemme 1.5.2.3.

(*i*) *Si G est un groupe n-abélien, alors G est (1-n)-abélien.*

(*ii*) *Si G est un groupe n-abélien et m-abélien, alors G est* (nm)*-abélien.*

Lemme 1.5.2.4.

(*i*) *Tout groupe d'exposant fini divisant n est n-abélien.*

(*ii*) *Tout groupe d'exposant fini divisant* $(n-1)$ *est n-abélien.*

Proposition 1.5.2.5.

Si G est n-abélien et $(n+1)$*-abélien, alors* G^n *est abélien et contenu dans* $Z(G)$*.*

-Alpérin a établi le théorème suivant [4]

Théorème 1.5.2.6.

Un groupe G est n-abélien si, et seulement si, G est image homomorphe d'un sous-groupe du produit direct d'un groupe d'exposant divisant n, d'un groupe d'exposant divisant $(n-1)$ *et d'un groupe abélien.*

Lemme 1.5.2.7.(Abdollahi [1]).

Si G est $3-$*abélien, alors*

$$\left[x, y^{-1}\right]\left[y^{-2}, x^{-1}\right] = 1.$$

Qui est équivalent à

$$\begin{aligned} [x,y]\left[y^2,x^{-1}\right] &= 1 \\ [x,y] &= \left[x^{-1},y^2\right]. \end{aligned}$$

Définition 1.5.2.8. (le n-centre)

On appelle $n-$centre d'un groupe G l'ensemble $\{x \in G\,;(xy)^n = x^n y^n$, pour tout $y \in G\}$, il est noté $Z(G,n)$.

Proposition 1.5.2.9.

$Z(G,n)$ est un sous-groupe caractéristique de G.

Pour la démonstration, voir [18]

Proposition 1.5.2.10.

Soit G un groupe, alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(i) G est n-abélien.

(ii) $G = Z(G,n)$.

(iii) $\frac{G}{Z(G,n)}$ est localement cyclique.

Pour la démonstration voir [18].

Proposition 1.5.2.11.

Soit G un groupe ; alors $Z(G,3)$ est un sous-groupe de $Z_3(G)$ [18, Theorem 4.3].

1.6 Groupes nilpotents et n-nilpotents

1.6.1 Groupes nilpotents

Définition 1.6.1.1.

Un groupe G est dit nilpotent s'il admet une suite centrale finie, i.e une suite normale finie $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd .... \lhd G_n = G$ telle que $G_{i+1}/G_i \leq Z(G/G_i)$ pour tout i, $0 \leq i \leq n-1$. La longueur de la plus courte suite centrale de G est appelée " classe de nilpotence de G ".

Exemples 1.6.1.2.

(1) *Si* $G = 1$, *alors* G *est nilpotent de classe* 0.

(2) *Si* $G \neq 1$ *est abélien, alors* G *est nilpotent de classe* 1 *; car* $G/1 = Z(G/1)$ *; donc la suite* $1 = G_0 \lhd G_1 = G$ *est centrale.*

(3) *Si* $|G| = p^n$ *où* $n \in N$ *et* p *est premier, alors* G *est nilpotent. Cela s'établit par récurrence sur* $|G|$. *En effet,* G *est nilpotent pour* $n = 1$. *Supposons que tout* p*-groupe fini d'ordre strictement inférieur à* p^n *est nilpotent. Comme* $|G| = p^n$, *alors* $Z(G) \neq 1$ *; donc* $|G/Z(G)| < |G|$. *Par hypothèse de récurrence,* $G/Z(G)$ *est nilpotent et admet la suite centrale* $G/Z(G) = G_0/Z(G) \lhd G_1/Z(G) \lhd .... \lhd G_c/Z(G) = G/Z(G)$. *D'où* G *admet la suite centrale* $1 = G_1 \lhd ..... \lhd G_c = G$, *ce qui montre que* G est nilpotent.

Proposition 1.6.1.3.

La suite $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd .... \lhd G_n = G$ *d'un groupe* G *est centrale si, et seulement si,* $[G_{i+1}, G] \leq G_i$ *pour tout* i, $0 \leq i \leq n-1$.

Proposition 1.6.1.4.

Soit G *un groupe.*

(1) *On note :* $\gamma_1(G) = G$ *et* $\gamma_{i+1}(G) = [\gamma_i(G), G]$, $\forall\ i \in \mathbb{N}^*$. *Alors :*

– $\gamma_i(G)$ *est totalement invariant dans* G, $\forall\ i \in \mathbb{N}^*$.

– $\gamma_{i+1}(G) \leq \gamma_i(G)$, $\forall\ i \in \mathbb{N}^*$ *; donc* $G = \gamma_1(G) \geq \gamma_2(G) \geq \gamma_3(G) \geq .....$

– *S'il existe* $n \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $\gamma_n(G) = 1$, *alors* $G = \gamma_1(G) \geq \gamma_2(G) \geq ..... \geq \gamma_n(G) = 1$ *est une suite centrale appelée " suite centrale descendante de* G *".*

(2) *On note :* $Z_0(G) = 1$, $Z_1(G) = Z(G)$ *et* $Z(G/Z_i(G)) = Z_{i+1}(G)/Z_i(G)$, $\forall\ i \in \mathbb{N}^*$. *Alors :*

– $Z_i(G)$ *est caractéristique dans* G, $\forall\ i \in \mathbb{N}^*$.

– *On a* $1 = Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq Z_2(G) \leq .....$

– *S'il existe* $m \in \mathbb{N}$ *tel que* $Z_m(G) = G$, *alors* $1 = Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq ... \leq Z_m(G) = G$ *est une suite centrale appelée " suite centrale ascendante de* G *".*

Proposition 1.6.1.5.

Soit G un groupe nilpotent et soit $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd .... \lhd G_n = G$ une suite centrale de G. Alors $G_i \leq Z_i(G)$ et $\gamma_{i+1}(G) \leq G_{n-i}$ pour tout i, $0 \leq i \leq n$.

Théorème 1.6.1.6.

Soit G un groupe les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) G est un groupe nilpotent.

(ii) $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $Z_n(G) = G$ *(c'est-à-dire que la suite centrale ascendante de G se stabilise en G,après un nombre fini d'étapes.).*

(iii) $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\gamma_n(G) = 1$*(c'est-à-dire que la suite centrale descendante de G se stabilise en 1 après un nombre fini d'étapes.).*

Proposition 1.6.1.7.

(1) *G est nilpotent de classe $\leq c \iff Z_c(G) = G \iff \gamma_{c+1}(G) = 1$.*

(2) *Si $G \neq 1$ est nilpotent, alors $Z(G) \neq 1$.*

(3) *La classe de nilpotence d'un groupe nilpotent G est égale à $Inf\{n \mid Z_n(G) = G\}$ $= Inf\left\{n \mid \gamma_{n+1}(G) = 1\right\}$.*

Lemme 1.6.1.8.

Soient G un groupe, $x, y, z, x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n \in G$. Alors, on a :

(i) $[x,y]^{-1} = [y,x]$.

(ii) $[x^{-1},y] = \left([x,y]^{x^{-1}}\right)^{-1}$ et $[x,y^{-1}] = \left([x,y]^{y^{-1}}\right)^{-1}$.

(iii) $[x,y]^z = [x^z, y^z]$.

(iv) $[xy,z] = [x,z]^y [y,z] = [x,z][x,z,y][y,z]$.

(v) $[x,yz] = [x,z][x,y]^z = [x,z][x,y][x,y,z]$.

(vi) $[x,y,z^x][z,x,y^z][y,z,x^y] = 1$ (Identité de Jacobi).

(vii) $[x_1x_2...x_n, y] = [x_1,y]^{x_2...x_n}[x_2,y]^{x_3...x_n} ... [x_{n-1},y]^{x_n}[x_n,y]$.

$(viii)$ $[x, y_1y_2...y_n] = [x,y_n][x,y_{n-1}]^{y_n}[x,y_{n-2}]^{y_{n-1}y_n} ... [x,y_2]^{y_3...y_n}[x,y_1]^{y_2...y_n}$.

Proposition 1.6.1.9.

Soit G un groupe, $H \leq G$ et $N \lhd G$.

(1) *Si G est nilpotent, alors H* et $\frac{G}{N}$ *sont nilpotents .*

Théorème 1.6.1.10 (Fitting).

Soient H et *K deux sous-groupes normaux nilpotents de classe c et d respectivement d'un groupe G. Alors HK est nilpotent de classe au plus égale à $c+d$.*

Proposition 1.6.1.11

Si G est un groupe nilpotent et $1 \neq N \lhd G$, alors $N \cap Z(G) \neq 1$.

Lemme 1.6.1.12.

Soit A un sous-groupe normal abélien maximal d'un groupe nilpotent G, alors $C_G(A) = A$.

Proposition 1.6.1.13.

Tout groupe nilpotent non abélien contient un sous-groupe maximal normal abélien.

Théorème 1.6.1.14 (**P.Hall**)**.**

Soit G un groupe. Si $N \lhd G$ tel que N et G/N' soient nilpotents, alors G est nilpotent.

Théorème 1.6.1.15.

Soit G est *un groupe nilpotent de type fini ; alors tout sous-groupe de G est de type fini, c.a.d que tout groupe nilpotent de type fini verifie* max.

Théorème 1.6.1.16.

Si G est *un groupe nilpotent de type fini ; alors G possède une suite centrale dont les facteurs sont ou bien cycliques infinis ou bien finis d'ordre une puissance d'un nombre premier.*

Corollaire 1.6.1.17.

Si G est *un groupe nilpotent de type fini de torsion alors G est fini.*

Définition 1.6.1.18.

Un groupe G est dit localement nilpotent si tout sous-groupe de type fini est nilpotent.

Théorème 1.6.1.19. (**Hirsch**)**.**

Si H et K sont deux sous-groupes normaux et localement nilpotents d'un groupe G, alors HK est localement nilpotent.

1.6.2 Groupes n-nilpotents

Définition 1.6.2.1.

Un groupe G est dit n-nilpotent s'il admet une suite finie n-centrale ascendante ; c'est à dire s'il admet une suite normale finie $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd .... \lhd G_n = G$ telle que $G_{i+1}/G_i \leq Z(G/G_i n)$ pour tout i, $0 \leq i \leq n-1$. La longueur de la plus courte suite n-centrale de G est appelée " classe de n-nilpotence de G

Proposition 1.6.2.2.[5].

(i) un sous-groupe d'un groupe $n-$nilpotent est $n-$nilpotent.

(ii) L'image homomorphe d'un groupe n-nilpotent est $n-$nilpotente.

1.7 Groupes résolubles et n-résolubles

1.7.1 Groupes résolubles

Définition 1.7.1.1.

Un groupe G est dit résoluble s'il admet une suite finie abélienne, i.e une suite finie de sous groupes $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd .... \lhd G_n = G$ tels que G_{i+1}/G_i soit abélien *pour tout i, $0 \leq i \leq n-1$. La longueur de la plus courte suite de G est appelée "longuer de résolubilité ou longueur dérivée de G ".*

Exemples 1.7.1.2.

(1) *Si $G = 1$, alors G est résoluble de classe 0.*

(2) *Si $G \neq 1$ est abélien, alors G est résoluble de classe 1 ; car $G/1$ est abélien ; donc la série $1 = G_0 \lhd G_1 = G$ est abélienne.*

(3) *Si $G \neq 1$ est nilpotent, alors G est résoluble.*

Proposition 1.7.1.3.

Soit G un groupe.

(1) *On note : $G^{(0)} = G$, $G^{(1)} = [G, G] = G'$ (G'* est *appelé le sous groupe dérivé de G) et $G^{(i+1)} = G^{(i)\prime} = \left[G^{(i)}, G^{(i)}\right]$, $\forall\ i \in \mathbb{N}^*$ (le sous- groupe $G^{(i)}$ s'appelle le $i^{éme}$*

sous-groupe dérivé de G). *Alors :*

– $G^{(i)}$ *est totalement invariant dans* G, $\forall\ i \in \mathbb{N}^*$.

– $G^{(i+1)} \trianglelefteq G^{(i)}$ *et* $G^{(i+1)}/G^{(i)}$ *est abélien,* $\forall\ i \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 1.7.1.4.

Soit G un groupe résoluble et soit $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd .... \lhd G_n = G$ une suite abélienne de G. Alors $G^{(i)} \leq G_{\ n-i}$ pour tout i, $0 \leq i \leq n$. En particulier $G^{(n)} = 1$.

Théorème 1.7.1.5.

Soit G un groupe les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(i) G est un groupe résoluble.

(ii) $\exists d \in \mathbb{N}$ tel que $G^{(d)} = 1$.

(iii) $\exists m \in \mathbb{N}$ tel que $G^{(m)}$ soit abélien .

Corollaire 1.7.1.6.

Les groupes résolubles forment une classe de groupes notée $\mathcal{R}$.

Proposition 1.7.1.7.

Soit G un groupe, $H \leq G$ et $N \lhd G$.

(1) *Si G est résoluble, alors H est résoluble.*

(2) *Si G est résoluble, alors G/N est résoluble.*

(3) *Si N est résoluble et G/N est résoluble, alors G est résoluble ; c.a.d. que la classe $\mathcal{R}$ est stable par extension.*

Lemme 1.7.1.8.

Un groupe est résoluble simple si, et seulement si, il est fini d'ordre premier.

Corollaire 1.7.1.9.

pour $n \geq 5$, S_n n'est pas résoluble.

Théorème 1.7.1.10.

Tout groupe fini d'ordre p^n, p^nq, p^2q^2, pqr où p, q, r sont des nombres premiers, est un groupe résoluble.

Théorème 1.7.1.11.

Tout groupe périodique, résoluble et de type fini est fini.

Définition 1.7.1.12.

Un groupe G est dit localement résoluble si tout sous-groupe de type fini est résoluble.

Corollaire 1.7.1.13.

Les groupes localement résolubles forment une classe de groupe notée $\mathcal{LR}$.

Proposition 1.7.1.14.

Soient G un groupe, $H \leq G$ et $N \lhd G$.

(1) *Si G est localement résoluble, alors H* et $\frac{G}{N}$ *sont localement résolubles .*

(2) *Si N est localement résoluble et G/N est localement résoluble, alors G est localement résoluble, c.a.d que la classe $\mathcal{LR}$est stable par extension.*

1.7.2 Groupes n-résolubles

Définition 1.7.2.1.

Un groupe G est dit $n-$résoluble s'il admet une suite finie $n-$abélienne, i.e une suite finie de sous groupes $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd .... \lhd G_k = G$ tels que G_{i+1}/G_i soit $n-$abélien *pour tout i, $0 \leq i \leq k-1$.*

Un groupe est résoluble si,et seulement si, il est 1-résoluble.

Théorème 1.7.2.2 [5]

Si l'ordre d'un groupe $n-$résoluble G est produit de deux nombres premiers h et k tels que n ou bien $(1-n)$ soit premier avec un des nombres h et k, alors G est produit de deux sous-groupes d'ordre h et k respectivement.

Corollaire 1.7.2.3 [5]

Si l'ordre d'un groupe $n-$résoluble G est produit de deux nombres premiers h et k, et si $n(1-n)$ est premier avec h ou bien avec k, alors deux sous-groupes de G quelconques d'ordre h sont conjugués.

1.8 Groupes métabéliens

Définition 1.8.1.

Un groupe résoluble de longueur 2 est dit groupe métabélien donc G est métabélien si, et seulement si, G' est abélien.

Proposition 1.8.2.

Soit G un groupe métabélien, et soient $x, y \in G$ et $n \geq 1$, alors :

$$[x, y^n] = \prod_{i=1}^{n} [x,_i y]^{C_n^i} \qquad (*)$$

Proposition 1.8.3.

Si G est métabélien on a les formules ;

(i) $\forall x_1, x_2, ..., x_k \in G$, $[x_1, x_2, ..., x_k] = [x_2, x_1, x_3, ..., x_k]^{-1}$.

(ii) Pour toute permutation σ de l'ensemble $\{1, 2, ..., k\}$, pour tout $a \in G'$ et pour tous $x_1, x_2, ..., x_k \in G$ on a

$$[a, x_1, x_2, ..., x_k] = \left[a, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ..., x_{\sigma(k)}\right] .$$

En particulier si $k = 2$ on a $[a, x_1, x_2] = [a, x_2, x_1]$.

Proposition 1.8.4. [6].

Soit G un $p-$groupe métabélien satisfaisant l'identité $([x,_p y]\,[y,_p x])^{p^s} = 1$, alors $([x,_p y])^{p^s} = 1$.(p étant un nombre premier).

Lemme 1.8.5.

Si G est métabélien et $x, y, z \in G$, alors l'identité de Jacobi devient

$$[x, y, z]\,[z, x, y]\,[y, z, x] = 1.$$

Proposition 1.8.6.

Dans un groupe métabélien, si $a \in G'$, alors $[a^n, x] = [a, x]^n$ pour tous $x \in G$ et $n \in \mathbb{Z}$.

Théorème 1.8.7.

Un groupe nilpotent de classe au plus 3 est métabélien.

Proposition 1.8.8.

Un groupe nilpotent de classe 4 *et engendré par deux éléments est métabélien.*

1.9 Groupes d'Engel

1.9.1 Groupes n-Engel

Définition 1.9.1.1.

(i) *Un élément* g *de* G *est dit élément d'Engel à droite de* G*, si pour tout* $x \in G$*, il existe un entier positif* $n = n(g,x)$ *tel que* $[g,_n x] = 1$ *(notons que la variable* x *est à droite).*

Si l'entier n *peut être choisi indépendamment de* x*, alors* g *est dit élément* $n-$*Engel à droite ou élément d'Engel borné à droite.*

L'ensemble des éléments d'Engel à droite (d'Engel borné à droite) sera noté $R(G)$ *(*$\overline{R}(G)$*).*

(ii) *Un élément* g *de* G *est dit élément d'Engel à gauche de* G*, si pour tout* $x \in G$*, il existe un entier positif* $n = n(g,x)$ *tel que* $[x,_n g] = 1$ *(notons que la variable* x *est à gauche).*

Si l'entier n *peut être choisi indépendamment de* x*, alors* g *est dit élément* $n-$*Engel à gauche ou élément d'Engel borné à gauche.*

L'ensemble des éléments d'Engel à gauche (d'Engel borné à gauche) sera noté $L(G)$ *(* $\overline{L}(G)$*).*

Proposition 1.9.1.2.

Soit G un groupe, alors $Z(G,4) \subseteq R_5(G)$ et $Z(G,4) \subseteq L_5(G)$. [18].

Définition 1.9.1.3.

Un groupe G *est dit groupe* $n-$*Engel si pour tous* $x, y \in G$; $[x,_n y] = 1$*, c.a.d; si* $G = R(G) = L(G)$*.*

G *est un groupe d'Engel s'il est un groupe* $n-$*Engel pour un certain* n*.*

Théorème 1.9.1.4 .[15].

Soit G un groupe ; Alors les trois proprietés suivantes sont équivalentes :

(i) G est un groupe $3-$Engel.

(ii) La clôture normale $\left\langle x^G \right\rangle$ de x dans G est $2-$Engel pour tout $x \in G$.

(iii) La clôture normale $\left\langle x^G \right\rangle$ de x dans G est nilpotente de classe au plus 2 pour tout $x \in G$.

Proposition 1.9.1.5.[16, Lemma 2 p.106].

Soit G un groupe $4-$Engel de classe nilpotence 5 satisfisant l'identité $[x, y^3, y] = 1$, alors

$$[x, y, y]^3 = 1 \text{ pour tous } x, y \in G.$$

Théorème 1.9.1.6.

(i) Tout groupe 3-Engel est localement nilpotent.

(ii) Tout groupe 4-Engel est localement nilpotent.([11])

1.9.2 Eléments $2-$Engel à droite

Théorème 1.9.2.1 (Kappe).

*L'ensemble des éléments $2-$Engel à droite d'un groupe G, forme un sous-groupe caractéristique dans G.*Il est *noté $R_2(G)$.*

Proposition 1.9.2.2

Soit G un groupe 2-Engel, si l'application

$$\begin{aligned} \varphi \quad &: \quad G \to G \\ x \quad &\to \quad x^n \end{aligned}$$

avec $n \neq 0, 1$ est un endomorphisme de G , alors

$$\exp(G') \text{ est fini et divise } \frac{n(n-1)}{2}.$$

Théorème 1.9.2.3.[22, 12.3.6].

Soit G un groupe 2-Engel et soient x, y, z,t quatre éléments de G, alors :

(i) $\left\langle x^G \right\rangle$ *est abélien.*

(ii) $[x,y,z] = [z,x,y] = [x,y,z]^{-1}$.

(iii) $[x,y,z]^3 = 1 \Longleftrightarrow (\gamma_3(G))^3 = 1$.

(iv) $[x,y,z,t] = 1$, *donc G est nilpotent de classe ≤ 3 et métabélien.*

- On peut généraliser le théorème 1.9.2.3 pour un élément a de $R_2(G)$.

Lemme 1.9.2.4.[22, 12.3.6]

Soit a un élément 2-Engel à droite et soient x, y et z des éléments d'un groupe G, alors :

(i) *la clôture normale a^G de a dans G est abélienne.*

(ii) $[a,x,y] = [a,y,x]^{-1}$.

(iii) $[a,[x,y]] = [a,x,y]^2$.

(iv) $[a,x,y,z]^2 = 1$.

(v) $[a,[x,y],z] = 1$.

Lemme 1.9.2.5.

Soit G un groupe quelconque et soient $x \in G$ et $a \in R_2(G)$, alors :

(i) $[a,x,a] = [a,x,a^{-1}] = 1$.

(ii) $\{[a,x],[a,x,y],[a,x,y,z]\} \subset R_2(G)$.

(iii) $a^2 \in Z_3(G)$ *et* $[a,x]^k = \left[a^k, x\right]$ *pour tout* $k \in \mathbb{Z}$.

(iv) *Si a est d'ordre impair il apartient à $Z_3(G)$.*

(v) $(ay)^n = a^n y^n [y,a]^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Preuve de lemme 1.9.2.5.

Soit G un groupe et soient $x \in G, a \in R_2(G)$ donc

(i) On a $[a,y] = a^{-1}a^y \in a^G$ et $a, a^{-1} \in a^G$ donc

$$\left[a^{-1}a^y, a\right] = 1 \text{ et } \left[a^{-1}a^y, a^{-1}\right] = 1 \text{ (car } \langle a^G \rangle \text{ est abélien).}$$

D'où

$$[a,y,a] = \left[a,y,a^{-1}\right] = 1.$$

(ii) $R_2(G)$ est un sous-groupe normal de G et $\langle a^G \rangle$ est le plus petit sous-groupe normal contenant a donc $\langle a^G \rangle \leq R_2(G)$ (car $a \in R_2(G)$).

Et comme $[a,x] = a^{-1}a^x \in a^G$ donc $[a,x] \in R_2(G)$, aussi $[a,x,y] = [a,x]^{-1}[a,x]^y \in \langle a^G \rangle \leq R_2(G)$ et $[a,x,y,z] = [a,x,y]^{-1}[a,x,y]^z \in \langle a^G \rangle \leq R_2(G)$.

D'où

$$\{[a,x],[a,x,y],[a,x,y,z]\} \subset R_2(G).$$

(iii) On a :

$$\begin{aligned} \left[a^2,x\right] &= [a,x]^a [a,x] \\ &= [a,x][a,x,a][a,x] \\ &= [a,x]^2 \ \text{(d'après } (i)\ ;\ [a,x,a]=1). \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \left[a^2,x,y\right] &= \left[\left[a^2,x\right],y\right] \\ &= \left[[a,x]^2,y\right] \\ &= [a,x,y]^2 \ \ (\text{car } [a,x] \in R_2(G)\,). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \left[a^2,x,y,z\right] &= \left[\left[a^2,x,y\right],z\right] \\ &= \left[[a,x,y]^2,z\right] \\ &= [a,x,y,z]^2. \end{aligned}$$

Mais d'après (iv) de lemme 1.9.2.4, on a $[a,x,y,z]=1$.

Donc

$$\left[a^2,x,y,z\right] = 1.$$

Et par suite $a^2 \in Z_3(G)$.

-Pour montrer la relation $\left[a^k, x\right] = [a, x]^k$ on raisonne par récurrence sur k ; en supposant d'abord $k \geq 0$.

*Pour $k = 1$ on a $[a^1, x] = [a, x]^1$.

*Supposons que $[a, x]^k = \left[a^k, x\right]$ et montrons que $[a, x]^{k+1} = \left[a^{k+1}, x\right]$

$$\begin{aligned}
[a, x]^{k+1} &= [a, x]^k [a, x] \\
&= \left[a^k, x\right] [a, x] \\
&= a^{-k} x^{-1} a^k x a^{-1} x^{-1} a x \\
&= a^{-k} a^{-1} x^{-1} a^k x x^{-1} a x \text{ (car } \langle a^G \rangle \text{ est abélien)} \\
&= a^{-(k+1)} x^{-1} a^{k+1} x \\
&= \left[a^{k+1}, x\right] .
\end{aligned}$$

- Si k est négatif, posons $l = -k$

$$\begin{aligned}
\left[a^k, x\right] &= \left[a^{-l}, x\right] \\
&= \left[\left(a^l\right)^{-1}, x\right] \\
&= \left(\left[a^l, x\right]^{\left(a^l\right)^{-1}}\right)^{-1} \\
&= \left(\left([a, x]^l\right)^{a^{-l}}\right)^{-1} \\
&= \left([a, x]^{-l}\right)^{a^{-l}} \\
&= [a, x]^k \left[a^k, x^k, a^k\right] \\
&= [a, x]^k .
\end{aligned}$$

Donc

$$[a, x]^k = \left[a^k, x\right] \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}.$$

(iv) Soit $(2n+1)$ l'ordre de a , alors $a^{2n+1} = 1$

$$1 = \left(a^2\right)^n a \Longrightarrow a = \left(a^{-2}\right)^n \in Z_3(G) \text{ (d'après } (iii)\text{).}$$

(v) - Si $n \geq 0$, on montre la propriété par récurence sur n;

$*$ Pour $n = 0, 1$ la propriété est vraie.

$*$ Supposons la propriété vraie pour n et montrons la pour $(n+1)$;

$$\begin{aligned}
(ay)^{n+1} &= (ay)^n ay \\
&= a^n y^n [y,a]^{\frac{n(n-1)}{2}} ay \\
&= a^n y^n a [y,a]^{\frac{n(n-1)}{2}} y \\
&= a^{n+1} a^{-1} y^n a [y,a]^{\frac{n(n-1)}{2}} y \\
&= a^{n+1} (y^n)^a [y,a]^{\frac{n(n-1)}{2}} y \\
&= a^{n+1} (y^a)^n [y,a]^{\frac{n(n-1)}{2}} y \\
&= a^{n+1} y^n [y^n,a] y [y,a]^{\frac{n(n-1)}{2}} \text{ (car } y \text{ commute avec } [y,a] \text{ comme } a \in R_2(G)\text{)} \\
&= a^{n+1} y^n [y,a]^n y [y,a]^{\frac{n(n-1)}{2}} \\
&= a^{n+1} y^n y [y,a]^{n+\frac{n(n-1)}{2}} \\
&= a^{n+1} y^{n+1} [y,a]^{\frac{(n+1)n}{2}} .
\end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie pour $n \geq 0$.

- Si $n \leq 0$, alors $m = -n \geq 0$ donc

$$\begin{aligned}
(ay)^n &= (ay)^{-m} \\
&= \left(y^{-1}a^{-1}\right)^m \\
&= \left(y^{-1}\right)^m \left(a^{-1}\right)^m \left[a^{-1}, y^{-1}\right]^{\frac{m(m-1)}{2}} \\
&= y^{-m}a^{-m}\left[a, y\right]^{\frac{m(m-1)}{2}} \\
&= y^n a^n \left[a, y\right]^{\frac{n(n+1)}{2}} \\
&= a^n a^{-n} y^n a^n \left(\left[y, a\right]^{-1}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} \\
&= a^n \left(y^n\right)^{a^n} \left[y, a\right]^{-\frac{n(n+1)}{2}} \\
&= a^n y^n \left[y^n, a^n\right] \left[y, a\right]^{-\frac{n(n+1)}{2}} \\
&= a^n y^n \left[y, a\right]^{n^2} \left[y, a\right]^{-\frac{n(n+1)}{2}} \\
&= a^n y^n \left[y, a\right]^{n^2 - \frac{n(n+1)}{2}} \\
&= a^n y^n \left[y, a\right]^{\frac{n(n-1)}{2}}.
\end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie aussi pour $n \leq 0$. □

Proposition 1.9.2.6.

Tout groupe $2-$*Engel sons éléments d'ordre* 3 *est nilpotent de classe au plus* 2.

Proposition 1.9.2.7.

Un groupe d'exposant 3 est un groupe 2-Engel .

Preuve

Soit G un groupe d'exposant 3 et soient x et y dans G, alors $\left(xy^{-1}\right)^3 = 1$

Donc

$$\begin{aligned}
\left(xy^{-1}\right)^2 &= \left(xy^{-1}\right)^{-1} \\
&= yx^{-1}.
\end{aligned}$$

multiplier par y^2 on trouve

$$\begin{aligned}\left(xy^{-1}\right)^2 y^2 &= yx^{-1}y^2 \\ &= y^{-3}yx^{-1}y^2y^{-3} \\ &= y^{-2}x^{-1}y^{-1} \\ &= y^{-1}\left(y^{-1}x^{-1}y^{-1}\right) \\ &= y^{-1}x\left(x^{-1}y^{-1}\right)^2.\end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned}x\left(y^{-1}xy\right) &= y^{-1}x\left(x^{-1}y^{-1}\right)^{-1} \\ &= \left(y^{-1}xy\right)x.\end{aligned}$$

Donc

$$xx^y = x^yx.$$

Et

$$\begin{aligned}x^{-y}x &= y^{-1}x^{-1}yx \\ &= [y,x] \\ &= xx^{-y}.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
[y,x,x] &= x^{-[y,x]}x \\
&= x^{-x^{-y}x}x \\
&= x^{-xx^{-y}}x \\
&= x^{-x^{-y}}x \\
&= x^{y}x^{-1}x^{-y}x \\
&= 1.
\end{aligned}$$

D'où

$$G \text{ est 2-Engel}$$

. □

Théorème 1.9.2.8 (Levi).

Un groupe G est 3-abélien si, et seulement si, G est 2-Engel et $\exp(G')$ *divise 3.*

Preuve

- Soient G un groupe 3-abélien et $x, y \in G$, alors

$$\begin{aligned}
[x,y,y] &= [y,x]\,y^{-1}\,[x,y]\,y \\
&= [y,x]\,y^{-1}x^{-1}y^{-1}xy^{2} \\
&= [y,x]\,xx^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}xy^{2} \\
&= [y,x]\,x\left(x^{-1}y^{-1}\right)^{2}xy^{2} \\
&= [y,x]\,xy^{-2}x^{-2}xy^{2} \\
&= [y,x]\left[x^{-1},y^{2}\right] \\
&= [y,x]\,[x,y] \quad \text{(d'après le lemme d'Abdollahe 1.5.2.7)} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Donc G est 2-Engel et d'après le lemme 1.9.2.5. on a

$$(xy)^3 = x^3y^3\,[y,x]^{\frac{3(3-1)}{2}}\,.$$

D'où

$$[x,y]^3 = 1.$$

- Si G est 2-Engel et $\exp\left(G'\right)$ divise 3 on a toujours

$$(xy)^3 = x^3y^3\,[y,x]^{\frac{3(3-1)}{2}}\,.$$

et comme $[x,y]^3 = 1$, alors

$$(xy)^3 = x^3y^3,$$

c.a.d G est 3-abélien. □

Lemme 1.9.2.9.

Soit G un groupe et soient $x, y, z \in G$, $a \in R_2(G)$, alors :

(i) $[x,y]^{[a,z]^m} = [x,y]$ pour tout entier m.

(ii) $[a,x,y]^z = [a,x,y]\,[a,x,z,y]$.

Preuve

(i) D'après (iii) de lemme 1.9.2.5, on a $[a,z]^m = [a^m,y]$

Donc

$$\begin{aligned}
[x,y]^{[a,z]^m} &= [x,y]^{[a^m,z]} \\
&= [x,y]\,[x,y,[a^m,z]] \\
&= [x,y]\,[a^m,z,[x,y]]^{-1} \\
&= [x,y]\,[a^m,[x,y],z] \quad (\text{car } a^m \in R_2(G)) \\
&= [x,y]\,.
\end{aligned}$$

Alors

$$[x,y]^{[a,z]^m} = [x,y]\,.$$

(ii) D'après (iv) du lemme 1.9.2.4, on a ; $[a,x,y,z]^2 = 1$, alors ; $[a,x,y,z] = [a,x,y,z]^{-1}$.

De plus

$$\begin{aligned} [a,x,y,z]^{-1} &= [[a,x]\,,y,z]^{-1} \\ &= [a,x,z,y] \quad (\text{comme } [a,x] \in R_2(G)\,). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} [a,x,y]^z &= [a,x,y]\,[a,x,y,z] \\ &= [a,x,y]\,[a,x,z,y]\,. \end{aligned}$$

. □

1.10 Groupes n-Kappe

Définition 1.10.1.

Un groupe G est dit $n-$Kappe si $\exp\left(\frac{G}{R_2(G)}\right)$ *divise n .*

Proposition 1.10.2.

Un groupe G est $n-$Kappe si, et seulement si, $[x^n,y,y]=1$ pour tous $x,y \in G$.

Preuve

On a

$$\begin{aligned} G \text{ est } n-\text{Kappe} &\iff x^n \in R_2(G) \text{ pour tout } x \in G \\ &\iff [x^n,y,y]=1 \text{ pour tous } x,y \in G \end{aligned}$$

. □

Lemme 1.10.3.

Si G est un groupe $n-$Kappe, alors $[x^n, y] \in Z(\langle x, y\rangle)$.

Preuve

Soient $x, y \in G$ alors $[x^n, xy, xy] = 1$ et

$$\begin{aligned} [x^n, xy] &= [x^n, y]\,[x^n, x]^y \\ &= [x^n, y]\,. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} 1 &= [x^n, xy, xy] \\ &= [[x^n, y], xy] \\ &= [x^n, y, y]\,[x^n, y, x]^y \\ &= [x^n, y, x]\,[x^n, y, x, y] \\ &= [x^n, y, x]\,. \end{aligned}$$

Donc $[x^n, y]$ commute avec x et d'autre part $[x^n, y]$ commute avec y puisque G est $n-$Kappe.

D'où

$$[x^n, y] \in Z(\langle x, y\rangle)\,.\square$$

Chapitre 2

Propriétés des groupes n-Bell et n-Levi

2.1 Introduction

Soit n un entier rationnel. Un groupe G est dit n-Bell si $[x^n, y] = [x, y^n]$ pour tous $x, y \in G$; la classe des groupes n-Bell forme une variété définie par la loi $[x^n, y]\,[y^n, x] = 1$.

Un groupe G est dit n-Levi si $[x^n, y] = [x, y]^n$ pour tous $x, y \in G$. La classe des groupes n-Levi forme aussi une variété définie par la loi $[x^n, y]\,[y, x]^n = 1$.

On montre que tout groupe 2-Engel est n-Levi et que tout groupe n-Levi est n-Bell.

Les groupes 2-Engel sont pour les groupes n-Levi comme les groupes abéliens le sont pour les groupes n-abéliens. En effet les groupes 2-Levi sont exactement les groupes 2-Engel et les groupes 2-abéliens sont exactement les groupes abéliens. Les groupes n-Engel et les groupes n-Levi constituent deux généralisations différentes des groupes 2-Engel.

C. Delizia, M. R. Moghaddam et A. Rhemtulla ont montré dans [8]. que si G est un groupe n-Bell alors $\exp\left(\frac{G}{R_2(G)}\right)$ est majoré par une certaine fonction ne dépendant que de n. A. Tortora a amélioré cette borne [24].

2.2 Groupes n-Bell

2.2.1 Quelques propriétés

lemme 2.2.1.1

Soit G un groupe ; posons $B(G) = \{n \in \mathbb{Z}; [x^n, y] = [x, y^n]$ pour tous $x, y \in G\}$ alors :

(i) $0, 1 \in B(G)$ et si $n, m \in B(G)$ alors $nm \in B(G)$.

(ii) Si $n \in B(G)$ alors $(1-n) \in B(G)$.

(iii) Si $n \in B(G)$ alors $n(1-n) \in B(G)$.

Preuve

Soient G un groupe et $x, y \in G$

(i) Si $n \in B(G)$ et $m \in B(G)$ on a

$$\begin{aligned} [x^{nm}, y] &= [(x^n)^m, y] \\ &= [x^n, y^m] \\ &= [x, (y^m)^n] \\ &= [x, y^{nm}]. \end{aligned}$$

alors : $nm \in B(G)$.

(ii) Posons : $A = \left[(y^{-1})^n, x^{-1}\right]$ et $B = \left[y^{-1}, (x^{-1})^n\right]$.

On a $A = B$ car $n \in B(G)$ alors

$$\begin{aligned} x^{-1}y^{-1}Axy &= x^{-1}y^{-1}Bxy \\ x^{-1}y^{-1}\left(y^n x y^{-n} x^{-1}\right)xy &= x^{-1}y^{-1}\left(y x^n y^{-1} x^{-n}\right)xy \\ x^{-1}y^{n-1}xy^{1-n} &= x^{n-1}y^{-1}x^{1-n}y \\ \left[x, y^{1-n}\right] &= \left[x^{1-n}, y\right]. \end{aligned}$$

D'où

$$(1-n) \in B(G).$$

(iii) On a $n \in B(G)$, alors $(1-n) \in B(G)$ d'après (ii).

On a $n \in B(G)$ et $(1-n) \in B(G)$ d'après (i) ; $n(1-n) \in B(G)$. $\square$

Lemme 2.2.1.2.

Soit G un groupe.

Si $n, (n+1) \in B(G)$, alors $G^n \leq R_2(G)$ c.a.d pour tous $x, y \in G$; $[y^n, x, x] = 1$ donc si G est n et $(n+1)$-Bell alors G est n-Kappe.

Preuve

Supposons $n, (n+1) \in B(G)$ donc on a

$$[x^n, y] = [x, y^n] \text{ et } \left[x^{n+1}, y\right] = \left[x, y^{n+1}\right].$$

Posons

$$\begin{aligned} A &= \left[x^{n+1}, y\right] \\ &= [x^n x, y] \\ &= [x^n, y]^x [x, y]. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} B &= \left[x, y^{n+1}\right] \\ &= [x, y^n y] \\ &= [x, y] [x, y^n]^y. \end{aligned}$$

Puisque $A = B$ on a

$$\begin{aligned}
[x^n, y]^x [x, y] &= [x, y] [x, y^n]^y \\
[x^n, y]^{x[x,y]} &= [x, y^n]^y \\
[x^n, y]^{x[x,y]y^{-1}} &= [x^n, y] \\
[x^n, y]^{y^{-1}x} &= [x^n, y] \\
[x^n, y] \left[x^n, y, y^{-1}x\right] &= [x^n, y] .
\end{aligned}$$

Donc

$$\left[x^n, y, y^{-1}x\right] = 1.$$

Remplaçons x par yx on obtient

$$\begin{aligned}
\left[(yx)^n, y, y^{-1}(yx)\right] &= 1 \\
[yx, y^n, x] &= 1.
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
[yx, y^n] &= [y, y^n]^x [x, y^n] \\
&= [x, y^n] .
\end{aligned}$$

Alors :

$$[x, y^n, x] = 1.$$

Donc x commute avec $[x, y^n]$ alors x commute aussi avec $[y^n, x]$ c.a.d

$$[y^n, x, x] = 1 \text{ et } G^n \leq R_2(G) .$$

□

Lemme 2.2.1.3.

Soit $n \in B(G)$ *alors ;*

(i) $[y^n, x, x] = 1$ *pour tout* $y \in G$ *est équivalent à* $x^n \in Z\left(\left\langle x^G \right\rangle\right)$.

(ii) $[x^n, y, x^{1-n}] = 1$ *pour tous* $x, y \in G$.

(iii) $x^{n-n^2} \in Z\left(\left\langle x^G \right\rangle\right)$.

Preuve

(i) Puisque $\langle x^G \rangle$ est engendré par $\{x^g; g \in G\}$, il suffit de montrer que x^n commute avec cette partie ; $x^n \in Z\left(\left\langle x^G \right\rangle\right)$ est équivalent à $[x^n, x^y] = 1$ pour tout $y \in G$ qui équivalent à

$$\begin{aligned} [x, (x^y)^n] &= 1 \\ [x, (x^n)^y] &= 1, \end{aligned}$$

mais

$$(x^n)^y = x^n [x^n, y],$$

d'où

$$\begin{aligned} [x, (x^n)^y] &= [x, x^n [x^n, y]] = 1 \\ [x, [x^n, y]] [x, x^n]^{[x^n, y]} &= 1 \\ [x, [x^n, y]] &= 1 \\ [x, [x, y^n]] &= 1. \end{aligned}$$

Donc $[y^n, x]$ commute avec x, c.a.d

$$[y^n, x, x] = 1.$$

(ii) Posons

$$A = \left[x^{-1}, y\right].$$

Alors

$$\begin{aligned} A &= \left[\left(x^{-1}\right)^n, y\right] \\ &= \left[x^{-1}, y^n\right] \\ &= \left([x, y^n]^{x^{-1}}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} A &= \left[(x^n)^{-1}, y\right] \\ &= \left([x^n, y]^{(x^n)^{-1}}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Donc

$$[x, y^n]^{x^{-1}} = [x^n, y]^{x^{-n}}.$$

D'où

$$\begin{aligned} [x, y^n] &= [x^n, y]^{x^{-n}x} \\ &= [x^n, y]^{x^{1-n}} \\ &= [x, y^n]^{x^{1-n}} \\ &= [x, y^n]\left[x, y^n, x^{1-n}\right], \end{aligned}$$

ce qui donne

$$1 = \left[x, y^n, x^{1-n}\right].$$

Alors

$$\left[x^n, y, x^{1-n}\right] = 1\ .$$

(*iii*) Pour prouver que $x^{n-n^2} \in Z\left(\left\langle x^G \right\rangle\right)$ il suffit de prouver que x^{n-n^2} commute avec les éléments générateurs de $\left\langle x^G \right\rangle$.

Utilisons l'identité de Jacobi

$$[a,b,c^a]\,[c,a,b^c]\,\left[b,c,a^b\right]=1,$$

avec $a=x^n, b=y$ et $c=x^{1-n}$; on obtient

$$\begin{aligned}
1 &= \left[x^n,y,\left(x^{1-n}\right)^{x^n}\right]\left[x^{1-n},x^n,y^{x^{1-n}}\right]\left[y,x^{1-n},(x^n)^y\right]\\
&= \left[x^n,y,x^{1-n}\right]\left[x^{1-n},x^n,y^{x^{1-n}}\right]\left[y,x^{1-n},(x^y)^n\right]\\
&= \left[y,x^{1-n},(x^y)^n\right]\\
&= \left[\left[y,x^{1-n}\right],(x^y)^n\right]\\
&= \left[\left(x^{n-1}\right)^y x^{1-n},(x^y)^n\right]\\
&= \left[\left(x^{n-1}\right)^y,(x^y)^n\right]^{x^{1-n}}\left[x^{1-n},(x^y)^n\right]\\
&= \left[(x^y)^{n-1},(x^y)^n\right]^{x^{1-n}}\left[x^{n(1-n)},x^y\right]\\
&= \left[x^{n(1-n)},x^y\right].
\end{aligned}$$

1. Donc

$$x^{n(1-n)}\in Z\left(\left\langle x^G\right\rangle\right).\square$$

Corollaire 2.2.1.4

Soit G un groupe.

Si $n\in B(G)$; alors $y^{n(1-n)}\in R_2(G)$ pour tout $y\in G$

Preuve

Soient x et y deux éléments de G

Posons $m=n(1-n)$; on sait que $m\in B(G)$ (d'après le lemme 2.2.1.1), et d'après (iii) du lemme 2.2.1.3, on a $x^m\in Z\left(\left\langle x^G\right\rangle\right)$ qui est équivalent à

$$[y^m,x,x]=1 \ \text{ (d'après } (i) \text{ du lemme 2.2.1.3).}$$

Ce qui prouve que

$$y^{n(1-n)} \in R_2(G).\square$$

Lemme 2.2.1.5

Tout groupe $n-Bell$ est aussi $n(n-1)-Bell$.

Preuve

Soient G un groupe et $x, y \in G$; posons $m = n(n-1)$

- Si G est n-Bell alors G est (-m)-Bell, d'après (iii) du lemme 2.2.1.1 et d'après le corollaire2.2.1.4 ; $x^m, y^m \in R_2(G)$

Donc

$$\begin{aligned}
[x^m, y] &= \left[\left(x^{-m}\right)^{-1}, y\right] \\
&= \left[x^{-m}, y\right]^{-x^m} \\
&= \left[x^{-m}, y\right]^{-1} \\
&= \left[x, y^{-m}\right]^{-1} \\
&= \left[x, (y^m)^{-1}\right]^{-1} \\
&= \left[x, y^m\right]^{y^{-m}} \\
&= \left[x, y^m\right].
\end{aligned}$$

D'où G est m-Bell groupe . $\square$

Théorème 2.2.1.6

Si G est un groupe n-Bell, alors $(G/R_2(G))$ est d'exposant fini divisant $n(n-1)$.

Preuve

Soit $g \in G$ on a

$$\begin{aligned}
(gR_2(G))^{n(n-1)} &= g^{n(n-1)} R_2(G) \\
&= R_2(G),
\end{aligned}$$

car $(g^{-1})^{n(1-n)} \in R_2(G)$ d'après le corollaire 2.2.1.4. □

Proposition 2.2.1.7

Tout groupe n-Bell est un groupe $n(n-1)$-Kappe.

Preuve

Si G est un groupe n-Bell alors $\left[x^{n(n-1)}, y, y\right] = 1$ pour tous x et y dans G (d'après le corollaire 2.2.1.4) donc G est $n(n-1)$-Kappe. □

Théorème 2.2.1.8.

Tout groupe n-Kappe est un groupe n^2-Bell.

Preuve

Comme G est un groupe n-Kappe alors

$$[x^n, y] \in Z(\langle x, y\rangle).$$

Donc

$$\begin{aligned}
[x^n, y^n] &= [x^n, y...y] \\
&= [x^n, y]\,[x^n, y]^y\,[x^n, y]^{y^2} \ldots. [x^n, y]^{y^{n-1}} \\
&= [x^n, y]\,[x^n, y]\,[x^n, y] \ldots. [x^n, y] \\
&= [x^n, y]^n.
\end{aligned}$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned}
[y^n, x^n] &= [y^n, x]^n \\
&= [x, y^n]^{-n}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}[x^n, y^n] &= [y^n, x^n]^{-1} \\ &= \left([x, y^n]^{-n}\right)^{-1} \\ &= [x, y^n]^n .\end{aligned}$$

Alors

$$[x^n, y]^n = [x, y^n]^n .$$

De plus

$$\begin{aligned}\left[x^{n^2}, y\right] &= \left[(x^n)^n, y\right] \\ &= [x^n, y]^{x^{n-1}} [x^n, y]^{x^{n-2}} .... [x^n, y]^x [x^n, y] \\ &= [x^n, y] [x^n, y] ..... [x^n, y] [x^n, y] \\ &= [x^n, y]^n .\end{aligned}$$

Et aussi

$$\begin{aligned}\left[x, y^{n^2}\right] &= \left[x, (y^n)^n\right] \\ &= [x, y^n]^n .\end{aligned}$$

D'où

$$\left[x^{n^2}, y\right] = \left[x, y^{n^2}\right] .$$

Donc G est un groupe n^2-Bell . □

Théorème 2.2.1.9

Si G est un groupe n-Bell, alors $(G/Z_2(G))$ est d'exposant fini divisant $\frac{3n^2(n-1)^2}{2}$.

Preuve

Posons $m = n(n-1)$ et soient $x, y, z \in G$

Si G est n-Bell, alors $x^m \in R_2(G)$

Posons : $a = x^m$ on a

$$(ay)^n = a^n y^n [a,y]^{\frac{-n(n-1)}{2}} \quad \text{(d'après } (v) \text{ du lemme 1.9.2.5.)}$$

On utilise les lemme 1.9.2.4. et 1.9.2.9. on obtient

$$\begin{aligned}
[(ay)^n, z] &= \left[a^n y^n [a,y]^{-\frac{m}{2}}, z\right] \\
&= [a^n y^n, z]^{[a,y]^{-\frac{m}{2}}} \left[[a,y]^{-\frac{m}{2}}, z\right] \\
&= ([a^n,z][a^n,z,y^n][y^n,z^n])^{[a,y]^{-\frac{m}{2}}} \left[[a,y]^{-\frac{m}{2}}, z\right] \\
&= [a^n,z]^{[a,y]^{-\frac{m}{2}}} [a^n,z,y^n]^{[a,y]^{-\frac{m}{2}}} [y^n,z^n]^{[a,y]^{-\frac{m}{2}}} [a,y,z]^{-\frac{m}{2}} \\
&= [a^n,z][a^n,z,y^n][y^n,z^n][a,z,y]^{\frac{m}{2}}.
\end{aligned}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}
[(ay)^n, z] &= [ay, z^n] \\
&= [a,z^n][a,z^n,y][y,z^n].
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
[a^n,z][a^n,z,y^n][y^n,z][a,z,y]^{\frac{m}{2}} &= [a,z^n][a,z^n,y][y,z^n] \\
&= [a^n,z][a,z^n,y][y^n,z].
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
[a^n,z,y^n][y^n,z][a,z,y]^{\frac{m}{2}}[y^n,z]^{-1} &= [a,z^n,y] \\
[a,z^n,y] &= [a^n,z,y^n]\left([a,z,y]^{[y^n,z]}\right)^{\frac{m}{2}} \\
&= [a,z,y]^{n^2}[a,z,y]^{\frac{m}{2}}.
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} 1 &= [a,z,y]^{-n^2}[a,z,y]^{n}[a,z,y]^{-\frac{m}{2}} \\ &= [a,z,y]^{-n^2+n-\frac{m}{2}} \\ &= [a,z,y]^{\left(-m-\frac{m}{2}\right)} \\ &= [a,y,z]^{\frac{3m}{2}} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} [x^m,y,z]^{\frac{3m}{2}} &= 1 \\ \left[x^{\frac{3m^2}{2}},y,z\right] &= 1. \end{aligned}$$

Donc

$$\left[x^{\frac{3n^2(n-1)^2}{2}},y,z\right]=1.$$

D'où $G/Z_2(G)$ est d'exposant fini divisant $\frac{3n^2(n-1)^2}{2}$. □

Corollaire 2.2.1.10

Soit G un groupe n-Bell ; si 4 ne divise pas $n(n-1)$, alors $G/Z_3(G)$ est d'exposant fini divisant $n(n-1)$.

Preuve

Soit G un groupe n-Bell tel que 4 ne divise pas $n(n-1)$ et soit $g \in G; g^{n(n-1)} \in R_2(G)$ donc $g^{2n(n-1)} \in Z_3(G)$.

Prouvons que $g^{n(n-1)} \in Z_3(G)$.

Soient $x,y,z \in G$, posons

$$A = \left[g^{n(n-1)},x,y,z\right].$$

On a

$$\begin{aligned} A^2 &= \left[g^{n(n-1)}, x, y, z\right]^2 \\ &= \left[g^{2n(n-1)}, x, y, z\right] \\ &= 1 \ \ (\text{car } g^{n(n-1)} \in R_2(G)). \end{aligned}$$

Donc

$$A^2 = 1.$$

D'autre part

$$\begin{aligned} A^{\frac{3n(n-1)}{2}} &= \left[g^{n(n-1)}, x, y, z\right]^{\frac{3n(n-1)}{2}} \\ &= \left[g^{\frac{3n^2(n-1)^2}{2}}, x, y, z\right] \\ &= 1 \ \ \left(\text{car } \left[g^{\frac{3n^2(n-1)^2}{2}}, x, y\right] = 1 \text{ d'après le théorème 2.2.1.9}\right) \end{aligned}$$

et comme 4 ne divise pas $n(n-1)$ alors 2 ne divise pas $\frac{3n(n-1)}{2}$.

Donc

$$\frac{3n(n-1)}{2} \text{ est impair pour tout } n \in N^*.$$

A est d'ordre 2 et d'ordre impair alors

$$A = 1.$$

D'où

$$g^{n(n-1)} \in Z_3(G).$$

c.a.d

$$G/Z_3(G) \text{ est d'exposant fini divisant } n(n-1). \square$$

2.2.2 n-résolubilité des groupes n-Bell

Proposition 2.2.2.1

Si G est un groupe $(n-1)-Kappe$ et $n-Bell$, alors G est aussi un groupe $(n-1)$-Bell.

Preuve

Soient $x, y \in G$

Comme G est un groupe $(n-1)$-Kappe, alors

$$x^{n-1} \in R_2(G).$$

Donc

$$\begin{aligned} 1 &= \left[x^{n-1}, y, \left(x^{n-1}\right)^{-1}\right] \\ &= \left[x^{n-1}, y, x^{1-n}\right]. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \left[x^{1-n}, y\right] &= \left[\left(x^{n-1}\right)^{-1}, y\right] \\ &= \left(\left[x^{n-1}, y\right]^{\left(x^{n-1}\right)^{-1}}\right)^{-1} \\ &= \left(\left[x^{n-1}, y\right]\left[x^{n-1}, y, x^{1-n}\right]\right)^{-1} \\ &= \left[x^{n-1}, y\right]^{-1}. \end{aligned}$$

Donc

$$\left[x^{1-n}, y\right] = \left[y, x^{n-1}\right] \quad \text{..... (1)}$$

De la même façon

$$\begin{aligned}\left[x, y^{1-n}\right] &= \left[y^{1-n}, x\right]^{-1} \\ &= \left[x, y^{n-1}\right]^{-1} \\ &= \left[y^{n-1}, x\right] \quad \text{..... (2)}\end{aligned}$$

D'autre part G est un groupe n-Bell, donc d'après (ii) du lemme 2.2.1.1 ; G est $(1-n) - Bell$.

Alors

$$\left[x^{1-n}, y\right] = \left[x, y^{1-n}\right] \quad \text{..... (3)}$$

D'après (1), (2) et (3) on trouve que

$$\left[y^{n-1}, x\right] = \left[y, x^{n-1}\right] \quad \text{pour tous } x \text{ et } y \text{ dans } G.$$

D'où

$$G \text{ est un groupe } (n-1)\text{-Bell. } \square$$

Proposition 2.2.2.2

Soit G un groupe n-Bell, alors les sous-groupes G^{n-1} et G^n sont respectivement des groupes n-Kappe et $(n-1)$-Kappe.

Preuve

Soit $x = g_1^{n-1} g_2^{n-1} ... g_s^{n-1}$ un élément dans G^{n-1}, on prouve par récurrence sur (s) que x^n est un élément 2-Engel dans$G$

- Si : $s = 1$, alors

$$x^n = g^{n(n-1)} \text{ est un élément } 2 - Engel \text{ (car } G \text{ est } n - Bell \text{).}$$

- Posons : $y = g_1^{n-1}...g_{s-1}^{n-1}$, alors $x = yg_s^{n-1}$ et pour tout $z \in G$ on a :

$$\begin{aligned}
[x^n, z, z] &= [x, z^n, z] \\
&= \left[yg_s^{n-1}, z^n, z\right] \\
&= \left[\left[y, z^n\right]^{g_s^{n-1}} \left[g_s^{n-1}, z^n\right], z\right] \\
&= \left[\left[y, z^n\right]^{g_s^{n-1}} \left[g_s^{n(n-1)}, z\right], z\right] \quad (\text{ car } G \text{ est } n - Bell \text{ }) \\
&= \left[\left[y^n, z\right]^{g_s^{n-1}}, z\right]^{\left[g_s^{n(n-1)}, z\right]} \left[g_s^{n(n-1)}, z, z\right] \\
&= \left[y^n, z, z^{g_s^{1-n}}\right]^{g_s^{n-1}\left[g_s^{n(n-1)}, z\right]}.
\end{aligned}$$

Comme $y^n \in R_2(G)$ (par hypothèse) on trouve que :

$$\begin{aligned}
\left[y^n, z, z^{g_s^{1-n}}\right] &= \left[y^n, z, g_s^{n-1} z g_s^{1-n}\right] \\
&= \left[y^n, z, g_s^{1-n}\right] \left[y^n, z, g_s^{n-1} z\right]^{g_s^{1-n}} \\
&= \left[y^n, z, g_s^{1-n}\right] \left(\left[y^n, z, z\right] \left[y^n, z, g_s^{n-1}\right]^z\right)^{g_s^{1-n}} \\
&= \left[y^n, z, g_s^{1-n}\right] \left[y^n, z, g_s^{n-1}\right]^{zg_s^{1-n}}.
\end{aligned}$$

Et d'après (ii) du lemme 1.9.2.9. on a

$$\begin{aligned}
\left[y^n, z, g_s^{n-1}\right]^z &= \left[y^n, z, g_s^{n-1}\right] \left[y^n, z, z, g_s^{n-1}\right] \\
&= \left[y^n, z, g_s^{n-1}\right] \left[\left[y^n, z, z\right], g_s^{n-1}\right] \\
&= \left[y^n, z, g_s^{n-1}\right] \left[1, g_s^{n-1}\right] \\
&= \left[y^n, z, g_s^{n-1}\right].
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\left[y^n, z, g_s^{1-n}\right]\left[y^n, z, g_s^{n-1}\right]^{zg_s^{1-n}} &= \left[\left[y^n, z\right], \left(g_s^{n-1}\right)^{-1}\right]\left[y^n, z, g_s^{n-1}\right]^{g_s^{1-n}} \\ &= \left[y^n, z, g_s^{n-1}\right]^{-g_s^{-(n-1)}}\left[y^n, z, g_s^{n-1}\right]^{g_s^{1-n}} \\ &= \left[y^n, z, g_s^{n-1}\right]^{-g_s^{1-n}}\left[y^n, z, g_s^{n-1}\right]^{g_s^{1-n}} \\ &= 1.\end{aligned}$$

D'où

$$[x^n, z, z] = 1.$$

Donc

$$G^{n-1}\text{est un groupe } n-\text{Kappe. } \square$$

- De la même façon, on prouve que G^n est groupe $(n-1)$-Kappe.

Théorème 2.2.2.3

Soit G un groupe n-Bell, alors $G/R_2(G)$ est un groupe n-abélien.

En particulier G est un groupe n-résoluble.

Preuve

Soit l'application :

$$\begin{aligned}\varphi &: G \to \frac{G}{G^n} \times \frac{G}{G^{n-1}} \\ x &\to \left(xG^n, xG^{n-1}\right)\end{aligned}$$

Il est clair que φ est un homomorphisme de groupes dont le noyau $\ker(\varphi)$ est

$$\begin{aligned}\ker(\varphi) &= \left\{x \in G; xG^n = G^n \text{ et } xG^{n-1} = G^{n-1}\right\} \\ &= G^n \cap G^{n-1}.\end{aligned}$$

Et comme $\frac{G}{G^n}$ et $\frac{G}{G^{n-1}}$ sont respectivement d'exposants divisant n et $(n-1)$, alors

$$\frac{G}{G^n} \text{ et } \frac{G}{G^{n-1}} \text{ sont des groupes n-abéliens.}$$

Et

$$\frac{G}{G^n} \times \frac{G}{G^{n-1}} \text{ est n-abélien .}$$

Donc

$$\frac{G}{\ker(\varphi)} \simeq \frac{G}{G^n \cap G^{n-1}} \text{ est n-abélien.}$$

Mais

$$G^n \cap G^{n-1} \leq R_2(G) \quad \text{(d'après la proposition 2.2.2.2).}$$

Alors

$$\frac{\frac{G}{G^n \cap G^{n-1}}}{\frac{R_2(G)}{G^n \cap G^{n-1}}} \simeq \frac{G}{R_2(G)} \text{ est n-abélien.}$$

Puisque $R_2(G)$ est métabélien, alors on a la suite suivante

$$1 \leq R_2'(G) \leq R_2(G) \leq G$$

Avec

$$\begin{aligned} & \frac{G}{R_2(G)} \text{ est n-abélien} \\ & \frac{R_2(G)}{R_2'(G)} \text{ est n-abélien (car } \frac{R_2(G)}{R_2'(G)} \text{ est abélien)} \\ \frac{R_2'(G)}{1} \simeq\ & R_2'(G) \text{ est n-abélien (car } R_2'(G) \text{ est abélien).} \end{aligned}$$

D'où

$$G \text{ est un groupe n-résoluble de longueur dérivée } \leq 3.$$

□

Proposition 2.2.2.4

Si G est un groupe n-Bell satisfaisant $\max -ab$*, alors G est n-nilpotent du classe au plus $(k+1)$ où k est le plus petit entier vérifant*

$$R_2(G) \leq Z_k(G) \text{ (voir [23, theorem 7.21 p.52]).}$$

Preuve

Soient G un groupe n-Bell satisfaisant $\max -ab$ et Σ la suite définie ci-dessous où $Z_i(G)$ est le $i$ème centre de G.

$$\Sigma : 1 \leq Z(G) \leq Z_2(G) \leq .... \leq Z_i(G) \leq Z_{i+1}(G) \leq ... \leq Z_k(G) \leq G$$

G est n-Bell donc $\frac{G}{R_2(G)}$ est n-abélien (d'après le théorème 2.2.2.3).

Mais

$$\frac{\frac{G}{R_2(G)}}{\frac{Z_k(G)}{R_2(G)}} \simeq \frac{G}{Z_k(G)}.$$

Et

$$\frac{Z_{i+1}(G)}{Z_i(G)} = Z\left(\frac{G}{Z_i(G)}\right) \leq Z\left(\frac{G}{Z_i(G)}, n\right).$$

Donc

$$\Sigma \text{ est } n\text{-centrale.}$$

D'où

$$G \text{ est n-nilpotent du classe au plus } (k+1).$$

□

2.3 Groupes n-Levi

2.3.1 Quelques proprietés

Lemme 2.3.1.1

Soit G un groupe ; posons $\mathcal{L}(G) = \{n \in Z; [x^n, y] = [x, y]^n$ pour tous $x, y \in G\}$ alors :

(i) $0, 1 \in \mathcal{L}(G)$ et si $n, m \in \mathcal{L}(G)$ alors $nm \in \mathcal{L}(G)$.

(ii) Si $n \in \mathcal{L}(G)$ alors $(1-n) \in \mathcal{L}(G)$.

(iii) Si $n \in \mathcal{L}(G)$ alors $n(1-n) \in \mathcal{L}(G)$.

Preuve

Soient G un groupe et $x, y \in G$.

(i) Si $n \in \mathcal{L}(G)$ et $m \in \mathcal{L}(G)$ on a

$$\begin{aligned} [x^{nm}, y] &= [(x^n)^m, y] \\ &= [x^n, y]^m \\ &= ([x, y]^m)^n \\ &= [x, y]^{nm}. \end{aligned}$$

alors : $nm \in \mathcal{L}(G)$.

(ii) Posons : $A = \left[(y^{-1})^n, x^{-1}\right]$ et $B = [y^{-1}, x^{-1}]^n$.

On a $A = B$ car $n \in \mathcal{L}(G)$ alors

$$\begin{aligned} x^{-1}y^{-1}Axy &= x^{-1}y^{-1}Bxy \\ x^{-1}y^{-1}\left(y^n x y^{-n} x^{-1}\right)xy &= x^{-1}y^{-1}\left(yxy^{-1}x^{-1}\right)^n xy \\ x^{-1}y^{n-1}xy^{1-n} &= x^{-1}y^{-1}(yxy^{-1}x^{-1})....(yxy^{-1}x^{-1})xy \\ \left[x, y^{1-n}\right] &= (x^{-1}y^{-1}yx)(y^{-1}x^{-1}yx).....(y^{-1}x^{-1}yx)(y^{-1}x^{-1}xy) \\ \left[x, y^{1-n}\right] &= [y, x]^{n-1} \\ \left[y^{1-n}, x\right] &= [y, x]^{1-n}. \end{aligned}$$

Donc $(1-n) \in \mathcal{L}(G)$.

(iii) On a $n \in L(G)$, alors $(1-n) \in L(G)$ d'après (ii).

$n \in \mathcal{L}(G)$ et $(1-n) \in \mathcal{L}(G)$ (d'après i)) $n(1-n) \in \mathcal{L}(G)$. □

Lemme 2.3.1.2.

Un groupe n-abélien est un groupe n-Levi .

Lemme 2.3.1.3.

Soit G un groupe ; si $n, (n+1) \in \mathcal{L}(G)$ alors $G^n \leq R_2(G)$ c.a.d pour tous $x, y \in G$; $[y^n, x, x] = 1$.

Donc G est n et $(n+1)$-Levi implique G est n-Kappe.

Preuve

Supposons $n, (n+1) \in \mathcal{L}(G)$ donc on a

$$[x^n, y] = [x, y]^n \text{ et } \left[x^{n+1}, y\right] = [x, y]^{n+1}.$$

Posons

$$\begin{aligned} A &= \left[x^{n+1}, y\right] \\ &= [x^n x, y] \\ &= [x^n, y]^x [x, y]. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} B &= [x, y]^{n+1} \\ &= [x, y]^n [x, y]. \end{aligned}$$

Puisque $A = B$ on a

$$\begin{aligned} [x^n, y]^x [x, y] &= [x, y]^n [x, y] \\ [x^n, y]^x &= [x, y]^n \\ [x^n, y]^x &= [x^n, y] \\ [x^n, y] [x^n, y, x] &= [x^n, y]. \end{aligned}$$

Donc

$$[x^n, y, x] = 1.$$

Donc x commute avec $[x^n, y]$ alors x commute aussi avec $[y^n, x]$ c.a.d

$$[y^n, x, x] = 1 \text{ et } G^n \leq R_2(G).\square$$

Lemme 2.3.1.4.

Soit $n \in \mathcal{L}(G)$ alors ;

(i) $[y^n, x, x] = 1$ pour tout $y \in G$ est équivalent à $x^n \in Z\left(\left\langle x^G \right\rangle\right)$.

(ii) $[x^n, y, x^{1-n}] = 1$ pour tous $x, y \in G$.

(iii) $x^{n-n^2} \in Z\left(\left\langle x^G \right\rangle\right)$.

Preuve .

(i) Puisque $\left\langle x^G \right\rangle$ est engendré par l'ensemble $S = \{x^g; g \in G\}$, il suffit de montrer que x^n commute avec S ; $x^n \in Z\left(\left\langle x^G \right\rangle\right)$ est équivalent à $[x^n, x^y] = 1$ pour tout $y \in G$ lequel est équivalent à $[x, x^y]^n = 1$.

Mais

$$x^y = x[x, y],$$

d'où

$$\begin{aligned}
[x, x^y]^n &= [x, x[x, y]]^n = 1 \\
([x, [x, y]][x, x]^{[x,y]})^n &= 1 \\
[x, [x, y]]^n &= 1 \\
[x, [x, y]]^{-n} &= 1 \\
[[x, y]^n, x] &= 1,
\end{aligned}$$

donc $[y, x]^n = [y^n, x]$ commute avec x c'est à dire

$$[y^n, x, x] = 1.$$

(ii) Posons

$$A = \left[x^{-n}, y\right] ;$$

alors

$$\begin{aligned} A &= \left[\left(x^{-1}\right)^n, y\right] \\ &= \left[x^{-1}, y\right]^n \\ &= \left(\left([x,y]^{x^{-1}}\right)^{-1}\right)^n \\ &= \left(\left([x,y]^{x^{-1}}\right)^n\right)^{-1} \\ &= \left(([x,y]^n)^{x^{-1}}\right)^{-1} \\ &= \left([x^n,y]^{x^{-1}}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} A &= \left[(x^n)^{-1}, y\right] \\ &= \left([x^n,y]^{(x^n)^{-1}}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Donc

$$[x^n,y]^{x^{-1}} = [x^n,y]^{x^{-n}} .$$

D'où

$$\begin{aligned} [x^n,y] &= [x^n,y]^{x^{-n}x} \\ &= [x^n,y]^{x^{1-n}} \\ &= [x^n,y]\left[x^n,y,x^{1-n}\right]. \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\left[x^n,y,x^{1-n}\right] = 1$$

(*iii*) Pour prouver que $x^{n-n^2} \in Z\left(\left\langle x^G \right\rangle\right)$ il suffit de prouver que x^{n-n^2} commute avec les éléments générateurs de $\left\langle x^G \right\rangle$.

1. Utilisons l'identité de Jacobi

$$[a,b,c^a]\,[c,a,b^c]\left[b,c,a^b\right] = 1,$$

avec $a = x^n, b = y$ et $c = x^{1-n}$; on obtient

$$\begin{aligned}
1 &= \left[x^n, y, \left(x^{1-n}\right)^{x^n}\right]\left[x^{1-n}, x^n, y^{x^{1-n}}\right]\left[y, x^{1-n}, (x^n)^y\right] \\
&= \left[x^n, y, x^{1-n}\right]\left[x^{1-n}, x^n, y^{x^{1-n}}\right]\left[y, x^{1-n}, (x^y)^n\right] \\
&= \left[y, x^{1-n}, (x^y)^n\right] \\
&= \left[\left[y, x^{1-n}\right], (x^y)^n\right] \\
&= \left[\left(x^{n-1}\right)^y x^{1-n}, (x^y)^n\right] \\
&= \left[\left(x^{n-1}\right)^y, (x^y)^n\right]^{x^{1-n}}\left[x^{1-n}, (x^y)^n\right] \\
&= \left[(x^y)^{n-1}, (x^y)^n\right]^{x^{1-n}}\left[x^{(1-n)}, (x^y)^n\right] \\
&= \left[x^{(1-n)}, (x^y)^n\right] \\
&= [x, (x^y)^n]^{(1-n)} \\
&= [x^y, x]^{-n(1-n)} \\
&= \left[x^{n(1-n)}, x^y\right].
\end{aligned}$$

Donc

$$x^{n(1-n)} \in Z\left(\left\langle x^G \right\rangle\right).\square$$

Corollaire 2.3.1.5

Soit G un groupe .

Si $n \in \mathcal{L}(G)$; alors $y^{n(1-n)} \in R_2(G)$ pour tout $y \in G$.

Preuve

Soient x et y deux éléments de G

Posons $m = n(1-n)$; on sait que $m \in \mathcal{L}(G)$ (d'après le lemme 2.3.1.1) et d'aprés (iii) du lemme 2.3.1.4, on a $x^m \in Z\left(\left\langle x^G \right\rangle\right)$ qui est équivalent à

$$[y^m, x, x] = 1 \quad \text{(d'aprés } (i) \text{ du lemme 2.3.1.4).}$$

Ce qui prouve que

$$y^{n(1-n)} \in R_2(G).\square$$

Lemme 2.3.1.6

Tout groupe n-Levi est aussi $n(n-1)$-Levi .

Preuve

Soient G un groupe et $x, y \in G$; posons $m = n(n-1)$

- Si G est n-Levi alors G est (-m)-Levi, d'après le lemme 2.3.1.1 et d'après le corollaire 2.2.1.5 ; $x^m, y^m \in R_2(G)$

Donc

$$\begin{aligned} [x^m, y] &= \left[\left(x^{-m}\right)^{-1}, y\right] \\ &= \left[x^{-m}, y\right]^{-x^m} \\ &= \left[x^{-m}, y\right]^{-1} \\ &= \left([x, y]^{-m}\right)^{-1} \\ &= [x, y]^m . \end{aligned}$$

D'où G est un groupe m-Levi. $\square$

Théorème 2.3.1.7

Si G est un groupe n-Levi alors $(G/R_2(G))$ est d'exposant fini divisant $n(n-1)$.

Preuve

Soit $g \in G$ on a

$$\begin{aligned} (gR_2(G))^{n(n-1)} &= g^{n(n-1)} R_2(G) \\ &= R_2(G) \end{aligned}$$

car $(g^{-1})^{n(1-n)} \in R_2(G)$ d'après le corollaire 2.3.1.5 . □

Proposition 2.3.1.8

Tout groupe n-Levi est un groupe $n(n-1)$-Kappe.

Preuve

Si G est un groupe n-Levi alors $\left[x^{n(n-1)}, y, y\right] = 1$ pour tous x et y dans G (d'après le corollaire 2.3.1.5) ; donc G est n(n-1)-Kappe . □

Théorème 2.3.1.9

Tout groupe 2-Engel est un groupe n-Levi .

Preuve

Soient G un groupe 2-Engel et $x, y \in G$.

Montrons par récurrence sur n la relation $[x^n, y] = [x, y]^n$;

- pour $n = 1$ on a

$$\left[x^1, y\right] = [x, y]^1 .$$

-supposons la relation vraie pour n et montrons la pour $n+1$.

Par hypothèse x commute avec $[x, y]$ (car G est 2-Engel)

Donc x^n commute avec $[x, y]$ c.a.d

$$[x, y, x^n] = 1.$$

Alors

$$\begin{aligned}\left[x^{n+1}, y\right] &= [xx^n, y] \\ &= [x, y]^{x^n} [x^n, y] \\ &= [x, y] [x, y, x^n] [x^n y] \\ &= [x, y] [x^n, y] \\ &= [x, y]^{n+1}.\end{aligned}$$

D'où

$$G \text{ est un groupe } n\text{-Levi pour tout } n \in \mathbb{Z}$$

. □

Théorème 2.3.1.10

Si G est un groupe n-Levi, alors $(G/Z_2(G))$ est d'exposant fini divisant $3n(n-1)$.

Preuve

Posons $m = n(n-1)$ et soient $x, y, z \in G$

Si G est n-Levi ; alors G est m-Levi (d'après le lemme 2.3.1.6) et $x^m \in R_2(G)$.

On a :

$$\begin{aligned}
[x^m, y, z] &= [x^m, z, y]^{-1} \\
&= [[x, z]^m, y]^{-1} \\
&= \left([x, z, y]^{-1}\right)^m \\
&= [y^m, [x, z]] \\
&= [y^m, x, z]^2 \\
&= [[y, x]^m, z]^2 \\
&= \left[[x^m, y]^{-1}, z\right]^2 \\
&= \left([x^m, y, z]^{-[y, x^m]}\right)^2 \\
&= [x^m, y, z]^{-2}.
\end{aligned}$$

Comme

$$[x^m, y, z] = [x^m, y, z]^{-2}.$$

Alors

$$[x^m, y, z]^3 = 1.$$

Donc

$$\left[x^{3m}, y, z\right] = 1,$$

c'est à dire

$$\left[x^{3n(n-1)}, y, z\right] = 1.$$

D'où

$$G/Z_2(G) \text{ est d'exposant fini divisant } 3n(n-1)$$

. □

Corollaire 2.3.1.11

Soit G un groupe n-Levi, alors $G/Z_3(G)$ est d'exposant fini divisant $n(n-1)$.

Preuve

Soit G un groupe n-Levi, et soit $g \in G; g^{n(n-1)} \in R_2(G)$ donc $g^{2n(n-1)} \in Z_3(G)$.

Prouvons que $g^{n(n-1)} \in Z_3(G)$.

Soient $x, y, z \in G$, posons

$$A = \left[g^{n(n-1)}, x, y, z\right].$$

On a

$$\begin{aligned} A^2 &= \left[g^{n(n-1)}, x, y, z\right]^2 \\ &= \left[g^{2n(n-1)}, x, y, z\right] \\ &= 1 \text{ (car } g^{n(n-1)} \in R_2(G) \text{).} \end{aligned}$$

Donc

$$A^2 = 1.$$

D'autre part

$$\begin{aligned} A^3 &= \left[g^{n(n-1)}, x, y, z\right]^3 \\ &= \left[g^{3n(n-1)}, x, y, z\right] \\ &= 1 \text{ (car } \left[g^{3n(n-1)}, x, y\right] = 1 \text{ d'après le théorème 2.3.1.10).} \end{aligned}$$

A est d'ordre 2 et d'ordre 3, alors

$$A = 1.$$

D'où

$$g^{n(n-1)} \in Z_3(G),$$

c'est à dire

$$G/Z_3(G) \text{ est d'exposant fini divisant } n(n-1).$$

□

2.3.2 n-résolubilité des groupes n-Levi

Proposition 2.3.2.1

Si G est un groupe $(n-1)$-Kappe et n-Levi, alors G est aussi un groupe $(n-1)$-Levi.

Preuve

Soient $x, y \in G$.

Comme G est un groupe $(n-1) - Kappe$, alors

$$x^{n-1} \in R_2(G).$$

Donc

$$\begin{aligned} 1 &= \left[x^{n-1}, y, \left(x^{n-1}\right)^{-1}\right] \\ &= \left[x^{n-1}, y, x^{1-n}\right]. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \left[x^{1-n}, y\right] &= \left[\left(x^{n-1}\right)^{-1}, y\right] \\ &= \left(\left[x^{n-1}, y\right]^{\left(x^{n-1}\right)^{-1}}\right)^{-1} \\ &= \left(\left[x^{n-1}, y\right]\left[x^{n-1}, y, x^{1-n}\right]\right)^{-1} \\ &= \left[x^{n-1}, y\right]^{-1}. \end{aligned}$$

Donc

$$\left[x^{1-n}, y\right] = \left[y, x^{n-1}\right] \quad \text{..... (1)}$$

D'autre part G est un groupe n-Levi donc d'après (ii) du lemme 2.3.1.1 G est $(1-n)$-Levi.

Alors

$$\begin{aligned} \left[x^{1-n}, y\right] &= [x,y]^{1-n} \\ &= [y,x]^{n-1} \quad \text{..... (2)} \end{aligned}$$

D'après (1) et (2) on trouve que

$$\left[y, x^{n-1}\right] = [y,x]^{n-1} \quad \text{pour tous } x \text{ et } y \text{ dans } G.$$

Donc

$$\begin{aligned} \left(\left[y, x^{n-1}\right]\right)^{-1} &= \left([y,x]^{n-1}\right)^{-1} \\ \left[x^{n-1}, y\right] &= \left([y,x]^{-1}\right)^{n-1} \\ \left[x^{n-1}, y\right] &= [x,y]^{n-1}. \end{aligned}$$

D'où

$$G \text{ est un groupe } (n-1)\text{-Levi}$$

. □

Théorème 2.3.2.2

Tout groupe n-Levi est un groupe n-Bell .

Preuve

Soient G un goupe n-Levi et $x, y \in G$, alors

$$\begin{aligned} [x^n, y] &= [x, y]^n \\ [x^n, y]^{-1} &= ([x, y]^n)^{-1} \\ [y, x^n] &= [y, x]^n \\ [y, x^n] &= [y^n, x]\,. \end{aligned}$$

Et comme x, y sont quelconques dans G, alors G est un goupe n-Bell. □

Remarque 2.3.2.3

Puisque tout groupe $n-$Levi est un groupe $n-$Bell alors les résultats suivants sont vrais :

Proposition 2.3.2.4

*Soit G un groupe n-*Levi*, alors les sous-groupes G^{n-1} et G^n sont des groupes n-*Kappe *et $(n-1)$-*Kappe *respectivement.*

Théorème 2.3.2.5

Soit G un groupe n-Levi, alors $G/R_2(G)$ est groupe n-abélien et G est un groupe n-résoluble.

Chapitre 3

Etude comparative des trois variétés n-Bell, n-Levi et 2-Engel

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on montre que pour $n = 2$, les trois variétés 2-Engel, 2-Levi et 2-Bell coincident, mais pour $n = 3$, les deux varietés 3-Levi et 3-Bell sont égales et contiennent strictement celle de 2-Engel. Enfin pour $n \geq 4$, L. C. Kappe a démontré qu'il existe des groupes n-Bell qui ne sont pas n-Levi. [14, 4. examples.p.0208] Mais si on ajoute des hypothèses supplémentaires sur le groupe G, un groupe G n-Bell est aussi n-Levi.[6].

3.2 Systemes de Levi

Définition 3.2.1

Un sous-ensemble W de $\mathbb{Z}$ est dit systeme de Levi s'il vérifie les cinq conditions suivantes :

(i) $n, m \in W$ *implique* $nm \in W$.

(ii) $n \in W$ *implique* $1 - n \in W$.

(iii) $0 \in W$.

(iv) *il existe* $n_0 \in W$, $n_0 \gneqq 0$ *tel que pour tout* $n \in W$ *on ait ;*

$$1)\ n^2 \equiv n \mod n_0$$

$$2)\ \overline{n}^{n_0} = n + n_0\mathbb{Z} \subseteq W$$

(v)

$$\left(\overline{n}^{n_0} = n + n_0\mathbb{Z} \subseteq W \text{ et } \overline{(n+1)}^{n_0} = n + 1 + n_0\mathbb{Z} \subseteq W\right) \Longrightarrow (\overline{n}^{n_0} = n_0\mathbb{Z})$$

c.a.d

$$n + n_0\mathbb{Z} = n_0\mathbb{Z}.$$

Remarque 3.2.2.

Les deux conditions (iv) *et* (v) *sont équivalentes respectivement à :*

$$1)\ n \in W \implies n\,(n-1) \in n_0\mathbb{Z}.$$

et

$$2)\ n\ ,\ n+1 \in W \Longrightarrow n \in n_0\mathbb{Z}.$$

Exemples 3.2.3

Soient les trois sous-ensembles suivants :

$$\xi\,(G) = \{n \in \mathbb{Z}\,;\ (xy)^n = x^n y^n \text{ pour tous } x, y \in G\}\,.$$

$$\mathcal{L}\,(G) = \{n \in \mathbb{Z}\,;\ [x^n, y] = [x, y]^n \text{ pour tous } x, y \in G\}\,.$$

$$B\,(G) = \{n \in \mathbb{Z}\,;\ [x^n, y] = [x, y^n] \text{ pour tous } x, y \in G\}\,.$$

$\{0,1\}$ est toujours inclus dans les trois ensembles précédents. On a déjà vu que les trois ensembles précédents, s'ils sont distincts de $\{0,1\}$, vérifient les cinq conditions précédentes ; donc ils sont tous des systèmes de Levi .

Théorème 3.2.4

$\xi_0(G) = \{n \in \mathbb{Z}\,;\, n \in \xi(G) \text{ et } G^n \leq Z(G)\}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$ engendré par n_1 avec

$$n^2 \equiv n \mod n_1 \text{ pour tout } n \in \xi(G).$$

et

$$n_1 = 0 \text{ si } \xi(G) = \{0,1\}.$$

sinon

$$n_1 = \min\{n \in \xi(G)\ ;\ n \geq 1 \text{ et } G^n \leq Z(G)\}$$

Preuve

Si $\xi(G) = \{0,1\}\,;\ \xi_0(G) = \{0\}$.

Supposons $\xi(G) \neq \{0,1\}$ et soit $n, m \in \xi_0(G)$, soient $x, y \in G$

$$\begin{aligned}(xy)^{n+m} &= (xy)^n (xy)^m \\ &= x^n y^n x^m y^m \\ &= x^{n+m} y^{n+m} \quad (\text{ car } G^n \leq Z(G) \text{ et } G^m \leq Z(G)\ )\end{aligned}$$

donc $n + m \in \xi_0(G)$.

$$\begin{aligned}(xy)^{-n} &= \left(y^{-1}x^{-1}\right)^n \\ &= y^{-n}x^{-n} \\ &= x^{-n}y^{-n}\end{aligned}$$

donc $(-n) \in \xi_0(G)$.

ξ_0 est le plus grand idéal de $\mathbb{Z}$ contenu dans $\xi(G)$; en effet ; soit $n\mathbb{Z} \subseteq \xi(G)$ et prouvons que $n\mathbb{Z} \subseteq \xi_0(G)$, il suffit de montrer que $n \in \xi_0(G)$.

$n \in \xi(G)$, par hypothèse, $2n \in \xi(G)$; prouvons que $2 \in \xi(G^n)$; soient g et h dans G

$$\begin{aligned}(g^n h^n)^2 &= ((gh)^n)^2 \\ &= (gh)^{2n} \\ &= g^{2n}h^{2n} \\ &= (g^n)^2 (h^n)^2\end{aligned}$$

donc $2 \in \xi(G^n)$, l'application

$$\begin{aligned}G^n &\longrightarrow G^n \\ x &\longmapsto x^2\end{aligned}$$

est un endomorphisme, ce qui signifie que G^n est abélien.

Il reste à prouver que $G^n \leq Z(G)$; soient g,$h \in G$

$$\begin{aligned}[g^n, h] &= g^{-n}h^{-1}g^n h \\ &= g^{-n}\left(g^h\right)^n \\ &= g^{-n}\left(h^{-1}gh\right)^n \\ &= g^{-n}h^{-n}g^n h^n \\ &= [g^n, h^n] \\ &= 1\end{aligned}$$

donc $G^n \leq Z(G)$ ce qui montre que $n \in \xi_0(G)$. □

Théorème 3.2.5.

$\mathcal{L}_0(G) = \{n \in \mathbb{Z}\,;\, n \in \mathcal{L}(G)$ et $G^n \leq R_2(G)\}$ *est un idéal de* $\mathbb{Z}$ *engendré par* $n_2 \geq 2$ si $\mathcal{L}(G) \neq \{0,1\}$ et $\mathcal{L}_0(G) + \mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(G)$.

Preuve

Soient n,$m \in \mathcal{L}_0(G)$; soient x,$y \in G$

$$\begin{aligned}\left[x^{n+m}, y\right] &= \left[x^n x^m, y\right] \\ &= \left[x^n, y\right]\left[x^n, y, x^m\right]\left[x^m, y\right],\end{aligned}$$

on a x^n,$x^m \in R_2(G)$; donc

$$\begin{aligned}\left[x^n, y, x^m\right] &= \left[x^n, x^m, y\right] \\ &= 1.\end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}\left[x^{n+m}, y\right] &= [x, y]^n [x, y]^m \\ &= [x, y]^{n+1}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\left[x^{-n}, y\right] &= \left[(x^n)^{-1}, y\right] \\ &= \left([x^n, y]^{(x^n)^{-1}}\right)^{-1} \\ &= \left(\left[x^n, y\right]\left[x^n, y, x^{-n}\right]\right)^{-1} \\ &= \left([x, y]^n\right)^{-1} \\ &= [x, y]^{-n}.\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{L}_0(G)$ est un idéal engendré par $n_2 \geq 1$, si $n_2 = 0$; $\mathcal{L}_0(G) = \mathbb{Z}$.

Prouvons que $\mathcal{L}_0(G) + \mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(G)$.

- Si $n \in \mathcal{L}(G)$, alors $n = (0 + n) \in \mathcal{L}_0(G) + \mathcal{L}(G)$.

- Soient $n_0 \in \mathcal{L}_0(G)$ et $m \in \mathcal{L}(G)$, alors

$$\begin{aligned}\left[x^{n_0+m}, y\right] &= [x^{n_0}, y]^{x^m} [x^m, y] \\ &= [x^{n_0}, y] [x^{n_0}, y, x^m] [x^m, y] \\ &= [x, y]^{n_0} [x^{n_0}, x^m, y] [x, y]^m \\ &= [x, y]^{n_0+m}\end{aligned}$$

donc

$$\mathcal{L}_0(G) + \mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(G). \square$$

Théorème 3.2.6.

$B_0(G) = \{n \in \mathbb{Z}\,;\, n \in B(G)$ et $G^n \leq R_2(G)\}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$ engendré par $n_3 \geq 2$ si $B(G) \neq \{0, 1\}$ et $B_0(G) + B(G) = B(G)$.

Preuve

Soient n,$m \in B_0(G)$; soient x,$y \in G$

$$\begin{aligned}\left[x^{n+m}, y\right] &= [x^n x^m, y] \\ &= [x^n, y] [x^n, y, x^m] [x^m, y]\end{aligned}$$

on a x^n,$x^m \in R_2(G)$; donc

$$\begin{aligned}[x^n, y, x^m] &= [x^n, x^m, y] \\ &= 1.\end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}
\left[x^{n+m}, y\right] &= [x, y^n]\,[x, y^m]\,[x^{mn}, y, y] \\
&= [x, y^n]\,[x, y^m]\,[x^m, y^n, y] \quad (\text{ car } n \in B(G) \ ) \\
&= [x, y^n]\,[x, y^m]\,[x^m, y, y^n] \quad (\text{ car } x^m \in R_2(G) \ ) \\
&= [x, y^n]\,[x, y^m]\,[x, y^m, y^n] \quad (\text{ car } m \in B(G) \ ) \\
&= \left[x, y^{n+m}\right]
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\left[x^{-n}, y\right] &= \left[(x^n)^{-1}, y\right] \\
&= \left(\left[x^n, \left(y^{-1}\right)^{-1}\right]^{(x^n)^{-1}}\right)^{-1} \\
&= \left(\left[x^n, \left(y^{-1}\right)^{-1}\right]\left[x^n, y, x^{-n}\right]\right)^{-1} \\
&= \left[x^n, y^{-1}\right]^y \\
&= \left[x, y^{-n}\right]\left[x^n, y^{-1}, y\right] \\
&= \left[x, y^{-n}\right].
\end{aligned}$$

Donc $B_0(G)$ est un idéal engendré par $n_3 \geq 2$, si $n_3 = 0, 1$; $B_0(G) = \mathbb{Z}$.

Montrons que $B_0(G) + B(G) = B(G)$

- Si $n \in B(G)$, alors $n = (0 + n) \in B_0(G) + B(G)$.

- Soient $n_0 \in B_0(G)$ et $m \in B(G)$, alors

$$\begin{aligned}
\left[x^{n_0+m}, y\right] &= [x^{n_0}, y]^{x^m}\,[x^m, y] \\
&= [x^{n_0}, y]\,[x^{n_0}, y, x^m]\,[x^m, y] \\
&= [x, y^{n_0}]\,[x^{n_0}, x^m, y]\,[x, y^m] \\
&= [x, y^{n_0}]\,[x, y^m]\,[x, y^m, y^{n_0}] \quad (\text{car } [y^{n_0}, x, y^m] = 1)
\end{aligned}$$

donc

$$B_0(G) + B(G) = B(G).\square$$

3.3 Relation entre les groupes n-Levi et les groupes n-Bell

3.3.1 Groupes 2-Bell et 2-Levi

Théorème 3.3.1.1

Soit G un groupe ; alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(i) G est 2-Engel

(ii) G est 2-Levi

(iii) G est 2-Bell

Preuve

Soient G un groupe et $x, y \in G$,Si G est 2-Engel, alors G est $2-$Levi d'après le théorème 2.3.1.9.Si G est $2-$Levi, alors il est $2-$Bell d'après le théorème 2.3.2.2.Donc il reste à prouver qu'un groupe $2-$Bell est un groupe $2-$Engel.Soit G un groupe 2-Bell, alors $2 \in B(G)$ et comme $1 \in B(G)$, on a d'après le lemme 2.2.1.2. $[y, x, x] = 1$. D'où G est $2-$Engel. $\square$

3.3.2 Groupes 3-Bell et 3-Levi

Lemme 3.3.2.1

Si G est un groupe 3-Bell, alors ;

$$\left[x^3, y, y\right] = \left[x, y^3, y\right] = 1 \quad \text{pour tous } x, y \in G.$$

Preuve

Si G est 3-Bell, alors

$$\left[x^3, y\right] = \left[x, y^3\right].$$

Donc

$$\left[x^3, y, y\right] = \left[x, y^3, y\right].$$

D'autre part on a : $3 \in B(G)$, donc $(1-3) = (-2) \in B(G)$, d'après (ii) du lemme 2.2.1.1.

D'ou $(-2)(-2) = 4 \in B(G)$, d'après (i) du lemme 2.2.1.1 et d'après le lemme 2.2.1.2 ; $x^3 \in R_2(G)$ (car 3 et $4 \in B(G)$).

Donc

$$\left[x^3, y, y\right] = \left[x, y^3, y\right] = 1.\square$$

Théorème 3.3.2.2

Soit G un groupe ; les quatre conditions suivantes sont équivalentes :

(i) G est 3-Engel satisfaisant l'identité $[x, y, y]^3 = 1$ pour tous $x, y \in G$.

(ii) La clôture normale $\left\langle x^G \right\rangle$ de x dans G est 3-abélienne.

(iii) G est 3-Levi.

(iv) G est 3-Bell.

- Avant de prouver ce théorème on a les résultats suivants :

Théorème 3.3.2.3

Tout groupe 3-Bell est nilpotent de classe au plus 6 et satisfait l'identité $[x, y, y, z, z] = 1$ pour tous $x, y, z \in G$, et est un groupe 4-Engel.

Pour la démonstration, voir *[16, Theorem C, p. 105]*.

Lemme 3.3.2.4 [16, Lemma 3, p. 107].

Soit G un groupe 3-Bell de classe 5 ; alors G est 3-Engel.

Proposition 3.3.2.5.([16])

Soient $\mathcal{B}$ une variété de groupes et $\mathcal{U}$ une classe de groupes S-fermée (c'est à dire stable par passage aux sous-groupes) et H-fermée (c'est à dire stable par image homomorphe) ; soient $\mathcal{T}_f$ la classe des groupes de type fini, $\mathcal{F}$ celle des groupes finis et $\mathcal{RF}$

celle des groupes résiduellement finis. Alors ;

$$(\mathcal{T}_f \cap \mathcal{U} \subseteq \Re\mathcal{F} \text{ et } \mathcal{F} \cap \mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}) \Longrightarrow \mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}.$$

Preuve de théorème 3.3.2.2.

$(i) \Longrightarrow (ii)$;

Supposons que G est 3-Engel et satisfait l'identité :

$$[x, y, y]^3 = 1, \forall x, y \in G$$

Et soit $x \in G$, pour montrer que $\langle x^G \rangle$ est 3-abélien ; il suffit de démontrer que G est 3-abélien sur la partie génératrice de $\langle x^G \rangle$ qui est ;

$$\left\{x^{g_1}, x^{g_2}, ..., x^{g_n};\ \text{où } g_i \in G \text{ et } 1 \leq i \leq n\right\}.$$

Puisque G est 3-Engel, d'après le théorème 1.9.1.3**,** $\langle x^G \rangle$ est 2-Engel et nilpotent de classe au plus 2 ; d'après le théorème 1.9.2.8**,** il suffit de montrer que $\exp\langle x^G \rangle'$ divise 3 avec

$$\left(\langle x^G \rangle\right)' = \left\langle \left\{ [u, v] \,; u, v \in x^G \right\} \right\rangle.$$

Donc il suffit de prouver que les commutateurs de la forme $[x^g, x]^h$ où $g, h \in G$ sont d'exposant 3 pour arriver au résultat désiré.

$u, v \in \langle x^G \rangle$ impliquent l'existence de $g_1, ..., g_n, h_1, ..., h_m \in G$ tels que

$$u = (x^{g_1})^{\varepsilon_1} ... (x^{g_n})^{\varepsilon_n} \quad \text{et} \quad v = \left(x^{h_1}\right)^{\varepsilon'_1} ... \left(x^{h_m}\right)^{\varepsilon'_m} \quad \text{où } \varepsilon_i, \varepsilon'_j \in \{1, -1\} \text{ pour } i \in \{1, ..., n\} \text{ et } j \in \{1, ..., n$$

Remarquons que les signes ε_i et ε'_j n'influent pas car par exemple $[a, b]^3 = 1 \Longleftrightarrow [a^{-1}, b]^3 = 1$ avec $a, b \in G$.

$$[u, v] = \left[(x^{g_1})^{\varepsilon_1} ... (x^{g_n})^{\varepsilon_n}, \left(x^{h_1}\right)^{\varepsilon'_1} ... \left(x^{h_m}\right)^{\varepsilon'_m} \right]$$

$\langle x^G \rangle$ étant nilpotent de classe au plus 2 (donc métabélien), les commutateurs de poids au moins 3 sont triviaux et

$$\begin{aligned}
[u,v]^3 &= 1 \Longleftrightarrow \left(\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\left[\left(x^{g_i}\right)^{\varepsilon_i},\left(x^{h_j}\right)^{\varepsilon'_j}\right]\right)^3 = 1 \\
&\Longleftrightarrow \left(\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\left[x^{g_i},x^{h_j}\right]\right)^3 = 1 \\
&\Longleftrightarrow \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\left(\left[x^{g_i},x\right]^{-h_j}\right)^3 = 1 \\
&\Longleftrightarrow \prod_{i=1}^{n}\left[x,g_i,x\right]^3 = 1 \\
&\Longleftrightarrow \prod_{i=1}^{n}\left[g_i,x,x\right]^3 = 1 \text{ (car } \langle x^G \rangle \text{ est métabélien).}
\end{aligned}$$

Par hypothèse $[g_i,x,x]^3 = 1$ pour tout $i \in \{1,...n\}$.On en déduit que la clôture normale $\langle x^G \rangle$ est 3-abélienne .

$(ii) \Longrightarrow (iii)$: On va montrer cette implication dans le cas général avec n quelconque ; c'est à dire que si la clôture normale $\langle x^G \rangle$ est n-abélienne, alors G, est n-Levi. Soient donc x, y deux éléments quelconques de G.

$$\begin{aligned}
[x^n,y] &= x^{-n}\left(x^y\right)^n \\
&= \left(x^{-1}x^y\right)^n \\
&= [x,y]^n .
\end{aligned}$$

Donc G, est n-Levi ; en particulier l'implication est vraie pour $n = 3$.

$(iii) \Longrightarrow (iv)$: on a déjà vu que tout groupe n-Levi est n-Bell.

$(iv) \Longrightarrow (i)$: supposons le groupe G 3-Bell ; G est nilpotent.On peut supposer G de type fini ; en effet soient $x, y \in G$, a-t-on $[x,y,y,y] = 1$?. Soit $H = \langle x,y \rangle$; puisque la classe des groupes n-Bell est S-fermée, alors H est 3-Bell et de type fini pour tous $x, y \in H$. Donc soit G un groupe 3-Bell de type fini et comme G est nilpotent, il est résiduellement fini.

D'après la proposition 3.3.2.5, choisissons $\mathcal{U}$ la classe des groupes 3-Bell ; elle est S

et H fermée et soit $\mathcal{B}$ la variété des groupes 3-Engel vérifiant l'identité $[x,y,y]^3 = 1$.

Prouvons que $\mathcal{T}_f \cap \mathcal{U} \subseteq \Re\mathcal{F}$; en effet tout groupe 3-Bell de type fini est résiduellement fini car il est nilpotent.

Prouvons maintenant que $\mathcal{F} \cap \mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$; soit G un groupe 3-Bell fini ; d'après le lemme 3.3.2.1. on a :

$$\left[x^3, y, y\right] = \left[x, y^3, y\right] = 1.$$

- 1^{er} cas ; $|G| = n$ et $(n,3) = 1$:

Prouvons que G est 2-Engel, soient $x, y \in G$, il existe $\mu, \upsilon \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n\mu + 3\upsilon = 1.$$

Donc

$$\begin{aligned}
[x,y,y] &= \left[x^{n\mu+3\upsilon}, y, y\right] \\
&= \left[\left(x^n\right)^\mu \left(x^\upsilon\right)^3, y, y\right] \\
&= \left[\left(x^\upsilon\right)^3, y, y\right] \quad (\text{car } x^n = 1) \\
&= 1 \text{ (d'après le lemme 3.3.2.1).}
\end{aligned}$$

D'où

$$G \text{ est 2-Engel.}$$

Donc

$$G \in \mathcal{B}.$$

Par suite G vérifie (i).

- $2^{\hat{e}me}$ cas $|G| = 3^n$, comme G est nilpotent de classe au plus 6 (d'après le théorème 3.3.2.1) alors,

$$K = \frac{G}{Z(G)} \text{ est 3-Bell nilpotent de classe au plus 5.}$$

Donc

$$K \text{ est 3-Engel (d'après le lemme 3.3.2.2.).}$$

K étant un 3-groupe fini, on applique le résultat de Heineken ([12]).

Résultat de Heineken.

Soit G un 3-groupe fini de classe de nilpotence ≤ 5. Si G est 3-Engel, alors sa classe de nilpotence est ≤ 4.

Donc, K est nilpotent de classe au plus 4.

Donc G est lui-même un groupe 3-Bell nilpotent de classe au plus 5 ; donc d'après le lemme 3.3.2.2 ; G est 3-Engel et

$$\left[x, y^3, y\right] = 1 \text{ (d'après le lemme 3.3.2.1).}$$

D'où

$$[x, y, y]^3 = 1 \text{ (d'aprés lemme 1.9.1.4).}$$

ce qui prouve l'implication $(iv) \Longrightarrow (i)$. □

Remarque 3.3.2.6

L.C. Kappe a montré qu'un groupe $3-$Bell était nilpotent de classe ≤ 6 (voir le théorème 3.3.2.3) ; elle a amélioré la borne de la classe de nilpotence à 4. [16, Theorem 2, p. 105].

3.3.3 Groupes n-Bell et n-Levi pour $n \geq 4$

Proposition 3.3.3.1

Soit $n \geq 4$; un groupe $n-$Bell n'est pas nécessairement $n-$Levi.

Exemple 3.3.3.2

Soit $\mathcal{M}(2,5)$ l'anneau des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans le corps $\frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$; c'est un espace vectoriel de dimension 4 sur $\frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$; il est donc isomorphe à $\left(\frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}\right)^4$ et son cardinal est 5^4

Soit $GL(2,5)$ le groupe des éléments inversibles de l'anneau $\mathcal{M}(2,5)$, c.a.d le groupe des matrices carrées d'ordre 2 inversibles à coefficients dans le corps $\frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$, il est d'ordre 480.

Soit $G = SL(2,5)$ le sous-groupe de $GL(2,5)$ formé par l'ensemble des matrices carrées inversibles de déterminent $(+1)$; il est d'ordre 120.

Soient les matrices $g, h, u \in G$ définies par ;

$$g = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{4} & \overline{0} \end{pmatrix} \quad , \quad h = \begin{pmatrix} \overline{2} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{3} \end{pmatrix} \quad \text{et } u = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{2} & \overline{3} \end{pmatrix}$$

Considérons le sous-groupe H de G engendré par g, h, u et posons $Q = \langle g, h \rangle$

On a

$$\begin{aligned} g &= \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{4} & \overline{0} \end{pmatrix}, g^2 = \begin{pmatrix} \overline{4} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{4} \end{pmatrix}, g^3 = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{4} \\ \overline{1} & \overline{0} \end{pmatrix}, g^4 = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} \\ h &= \begin{pmatrix} \overline{2} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{3} \end{pmatrix}, h^2 = \begin{pmatrix} \overline{4} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{4} \end{pmatrix}, h^3 = \begin{pmatrix} \overline{3} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{2} \end{pmatrix}, h^4 = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc

$$|g| = |h| = 4.$$

Q est isomorphe au groupe des quaternions qui est non abélien et d'ordre 8 ;

$$Q = \left\{1, g, g^2, g^3, h, h^3, gh, hg\right\}$$

De plus Q est normal dans H ; en effet,

$$\begin{aligned} g^u &= u^{-1}gu \\ &= \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{2} & \overline{3} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{4} & \overline{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{2} & \overline{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \overline{2} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{3} \end{pmatrix} \\ &= h \in Q. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h^u &= u^{-1}hu \\ &= \begin{pmatrix} \overline{3} & \overline{4} \\ \overline{3} & \overline{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{2} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{2} & \overline{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{2} \\ \overline{2} & \overline{0} \end{pmatrix} \\ &= hg \in Q. \end{aligned}$$

Rappelons qu'un groupe G est produit semi-direct de deux de ses sous-groupes N et K si $N \lhd G$, $G = KN$ et $K \cap N = 1$.

Puisque $\langle u \rangle \cap Q = \{1\}$, H est produit semi-direct de $\langle u \rangle$ par Q ; H est d'ordre 24 et Q est l'unique 2-sous-groupe de Sylow.

Soit γ_u l'automorphisme intérieur de H induit par u

$$\begin{aligned} \gamma_u &: Q \to Q \\ x &\to x^n \end{aligned}$$

La restriction de u à Q est un automorphisme de Q d'ordre 3.

Puisque le centre de l'anneau $M(2,5)$ est l'ensemble des matrices scalaires ;

$$\left\{\begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{2} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{3} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{4} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{4} \end{pmatrix}\right\}$$

On vérifie facilement que le centre de $G = SL(2,5)$ est l'ensemble $\left\{\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{4} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{4} \end{pmatrix}\right\}$ or

$$\begin{pmatrix} \overline{4} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{4} \end{pmatrix} = g^2 = h^2 \in Q$$

Donc

$$Z(G) \leq Q \leq H \leq G$$

D'autre part, on vérifie facilement que les deux groupes quotients $\frac{H}{Z(G)}$ et $\frac{G}{Z(G)}$ sont respectivement isomorphes aux deux groupes alternés A_4 et A_5

Puisque $\exp(A_4) = 6$ et $\exp(A_5) = 30$; on a $\exp\left(\frac{H}{Z(G)}\right) = 6$ et $\exp\left(\frac{G}{Z(G)}\right) = 30$.

Donc on a

$$\text{pour tous } a \in H \text{ et } b \in G\,;\ (aZ(G))^6 = Z(G) \quad \text{et} \quad (bZ(G))^{30} = Z(G)\,,$$

c.a.d

$$\begin{aligned} a^6 &\in Z(G) \quad \text{et} \quad b^{30} \in Z(G) \\ H^6 &\leq Z(G) \quad \text{et} \quad G^{30} \leq Z(G)\,. \end{aligned}$$

Prouvons maintenant que 6 et 30 appartiennent respectivement à $B(H)$ et $B(G)$.

Soient a et $b \in H$, on a ;

$$\left[a^6, b\right] = \left[a, b^6\right] = 1$$

car $a^6, b^6 \in Z(G)$ et $Z(G) \leq Z(H)$, ce qui montre que H est 6-Bell.

Rappelons que $H = \langle g, h, u\rangle$; considérons les deux éléments u^g et u^6 de H.

On a :

$$\left[u^g, u^6\right] = 1$$

car $u^6 \in Z(G)$, or $\frac{H}{Q}$ est d'ordre 3 donc abélien ; par suite $H' \leq Q$

Mais Q est isomorphe au groupe des quaternions Q_8 ; on vérifie facilement que

$$\begin{aligned} [u^g, u] &= g^{-1}u^{-1}gu^{-1}g^{-1}ugu \\ &= \begin{pmatrix} \overline{2} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{3} \end{pmatrix} \\ &= h \in Q \leq H \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} [u^g, u]^6 &= h^6 \\ &= h^2 \\ &= \begin{pmatrix} \overline{4} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{4} \end{pmatrix} \\ &\neq \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D'autre part, on a vu que

$$\begin{aligned} \left[u^g, u^6\right] &= 1 \\ &\neq [u^g, u]^6. \end{aligned}$$

Donc

$$H \text{ n'est pas 6-Levi}$$

c.a.d.

$$6 \in B(H) \text{ et } 6 \notin \mathcal{L}(H).$$

On a aussi

$$\left[u^g, u^{30}\right] = 1 \text{ (car } G^{30} \leq Z(G) \text{).}$$

Mais

$$\begin{aligned}
[u^g, u]^{30} &= h^{30} \\
&= h^2 \text{ (car } h \text{ est d'ordre 4)} \\
&= \begin{pmatrix} \overline{4} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{4} \end{pmatrix} \\
&\neq \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Donc

$$30 \in B(G) \text{ et } 30 \notin \mathcal{L}(G).\square$$

Lemme 3.3.3.3

Soit G un p-groupe n-Bell avec $n \neq 0, 1$, alors il existe $t \in \mathbb{N}^*$ tel que p^t divise $n(n-1)$ et $\left[x^{p^t}, y, y\right] = 1$ avec

$$B(G) = B\left(p^t\right) = \left\{ip^t + \delta; i \in \mathbb{Z} \text{ et } \delta = 0, 1\right\}.$$

Preuve

$$B_0(G) = \{m \in \mathbb{Z} : m \in B(G) \text{ et } x^m \in R_2(G) \text{ pour tout } x \in G\}.$$

$B_0(G)$ est un idéal de $\mathbb{Z}$, il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que $B_0(G) = m_0\mathbb{Z}$

Soit

$$n(n-1) = jp^r \text{ avec } (j, p) = 1.$$

Montrons que $p^r \in B_0(G)$.

Soient $x, y \in G$ et $|x| = p^k$.

On a

$$\begin{aligned}(j,p) &= 1 \Longrightarrow \left(j,p^k\right)=1\\ &\Longrightarrow \exists \sigma,\tau\in\mathbb{Z}; 1=\sigma j+\tau p^k.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}x &= x^1\\ &= x^{\sigma j+\tau p^k}\\ &= x^{\sigma j} \text{ (car } x^{p^k}=1).\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}x^{\sigma n(n-1)} &= x^{\sigma j p^r}\\ &= \left(x^{\sigma j}\right)^{p^r}\\ &= x^{p^r}.\end{aligned}$$

Comme $n(n-1)\in B_0(G)$, donc $\sigma n(n-1)\in B_0(G)$ (car $B_0(G)$ est un idéal).

Donc

$$\left[x^{\sigma n(n-1)},y,y\right]=1.$$

D'où

$$\left[x^{p^r},y,y\right]=1.$$

Alors

$$B_0(G)=p^t\mathbb{Z}.$$

Si $t=0$, alors $B_0(G)=\mathbb{Z}$ et G est abélien.

Si $t\geq 1$, montrons que $B(G)=B(p^t)=\{ip^t+\delta; i\in\mathbb{Z} \text{ et } \delta=0,1\}$; soit $n\in B_0(G)$ prouvons que $n+1\in B(G)$.

Soient $x, y \in G$;

$$\begin{aligned}\left[x^{n+1}, y\right] &= \left[x^n, y\right]\left[x^n, y, x\right]\left[x, y\right] \\ &= \left[x, y^n\right]\left[x, y\right]\left[x, y^n, y\right] \quad (\text{car } \left[x^n, y, x\right] = 1 \text{ et } \left[x, y^n, y\right] = 1) \\ &= \left[x, y^{n+1}\right].\end{aligned}$$

donc $n+1 \in B(G)$, alors $B_0(G)+ \subseteq B(G)$.

Maintenant prouvons que $B(G) \subseteq B_0(G) + \delta$; où $\delta = 0$ ou .1 soit $n \in B(G)$, si $n \in B_0(G)$ alors $n = n + 0 \in B_0 + \delta$. Si $n \notin B_0(G)$, alors $(n, p^t) = 1$; puisque p^t divise $n(n-1)$ et est premier avec n, p^t divise $(n-1)$.

Donc $(n-1) \in B_0(G)$ et par suite $n = (n-1) + 1 \in B_0(G) + .\delta$

D'où

$$B(G) = B\left(p^t\right) = \left\{ip^t + \delta; i \in \mathbb{Z} \text{ et } \delta = 0, 1\right\}.\square$$

Théorème 3.3.3.4

Soit G un $p-$groupe métabélien, alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $[x^p, y] = [x, y]^p$.

(ii) $[x^p, x] = [x, y^p]$.

(iii) $(E_2(G))^p = \gamma_{p+1}(G) = 1$.

Preuve

Soit G un p-groupe métabélien ;

$(i) \Longrightarrow (ii)$ est évident car tout groupe $n-$Levi est un groupe $n-$Bell.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$; Soit G un groupe $p-$Bell :

- si $p = 2$, G est $2-$Engel et par suite G est nilpotent de classe au plus de 3, donc $\gamma_3(G) = 1$.

Comme $[x, y, y] = 1$ pour tous x et y dans G, on en déduit que $E_2(G) = 1$;

donc

$$(E_2(G))^2 = \gamma_3(G) = 1.$$

- Supposons $p \geq 3$ et G non $2-$Engel ; alors dans l'idéal $B_0(G)$ de $\mathbb{Z}$ qui est engendré par p^t où $t \in \mathbb{N}$, on a nécessairement $t = 1$.

De plus si $t = 0$, $B_0(G) = \mathbb{Z}$ et G est $n-$Bell pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors les trois conditions précédentes sont satisfaites.

D'autre part, d'après le lemme 3.3.3.3, p^t divise $p(p-1)$ c.a.d :

$$p(p-1) = \lambda p^t \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{N}^*.$$

Alors

$$p - 1 = \lambda p^{t-1}.$$

ce qui est absurde ; alors $t = 1$ et toujors d'après le lemme 3.3.3.3

$$[x^p, y, y] = 1$$

et puisque G est métabélien

$$[x, y, y]^p = 1$$

ce qui implique que

$$(E_2(G))^p = 1$$

On a : $[x^p, y] = [x, y^p]$ est équivalent à

$$[x^p, y]\,[y^p, x] = 1$$

Utilisons l'identité $(*)$ valable dans tout groupe métabélien ; on obtient

$$\prod_{i=1}^{p} \left([x,_i y]\,[y,_i x]\right)^{\binom{i}{p}} = 1$$

$$[x, y]^p\,[y, x]^p \prod_{i=2}^{p} \left([x,_i y]\,[y,_i x]\right)^{\lambda_i p} = 1 \text{ où } \lambda_i \in \mathbb{N}^*$$

$$\prod_{i=2}^{p-1} \left([x,_i\, y]\, [y,_i\, x] \right)^{\lambda_i p} [x,_p\, y]\, [y,_p\, x] = 1$$

Puisque $(E_2(G))^p = 1$; on obtient

$$[x,_p\, y]\, [y,_p\, x] = 1$$

Donc G satisfait les hypothèses du lemme 1.8.4 avec $s = 0$, d'où

$$[x,_p\, y]^p = 1$$

ce qui prouve que G est $p-$Engel .

D'après le théorème de Kappe[13, Theorem 3], G est nilpotent de classe au plus p, c.a.d

$$\gamma_{p+1}(G) = 1$$

$(iii) \Longrightarrow (i)$ Soient $x, y \in G$, d'après l'identité $(*)$ valable dans un groupe métabélien, on a

$$\begin{aligned} [x, y^p] &= \prod_{i=1}^{p} [x,_i\, y]^{C_p^i} \\ &= [x, y]^p \prod_{i=2}^{p-1} [x,_i\, y]^{C_p^i} . \end{aligned}$$

On a :

$$(i!)\, C_p^i = p\,(p-1)\,(p-2)\,....\,(p-i+1)$$

ce qui montre que pour $1 \leq i \leq p-1$, p divise C_p^i, puisque p premier avec $i!$ donc

$$C_p^i = \lambda_i p \quad \text{où } \lambda_i \in \mathbb{N}^*$$

$$[x, y^p] = [x, y]^p \prod_{i=2}^{p-1} [x,_i\, y]^{\lambda_i p}\, [x,_p\, y] .$$

Par hypothèse $[x,_i y]^p = 1$ pour tout $i \geq 2$, et d'autre part $[x,_p y] = 1$ car $\gamma_{p+1}(G) = 1$.

Donc

$$[x, y^p] = [x, y]^p .\square$$

Lemme 3.3.3.5

Soit G un groupe $n-Bell$; si G est métabélien et $[x^n, y, y] = 1$, alors $[x, y, y]^n = 1$.

Preuve

Dans l'identité de Jacobi pour un groupe métabélien (lemme 1.8.5) remplaçons z par y^n, on trouve

$$\begin{aligned} 1 &= [x, y, y^n]\,[y^n, x, y]\,[y, y^n, x] \\ &= [x, y, y^n]\,[y, x^n, y] \ \ (\text{car } n \in B(G)\,). \end{aligned}$$

Et comme $[x^n, y]$ commute avec y par hypothèse donc $[y, x^n, y] = 1$.

Ce qui donne

$$\begin{aligned} 1 &= [x, y, y] \\ &= [[x, y]^n, y] \quad (\text{ car } n \in B(G)\,). \end{aligned}$$

G est métabélien et $[x, y] \in G'$, alors d'après la proposition 1.8.6.

$$[[x, y]^n, y] = [x, y, y]^n$$

D'où

$$[x, y, y]^n = 1.\square$$

Théorème 3.3.3.6

Soit G un $p-$groupe métabélien nilpotent de classe au plus p^2. Alors $\mathcal{L}(G) = B(G)$.

Preuve

Il suffit de prouver que $B(G) \subset \mathcal{L}(G)$ car pour tout G on a $\mathcal{L}(G) \subset B(G)$.

Soit $x \in B(G)$, puisque $0, 1 \in \mathcal{L}(G)$ on peut supposer $n \neq 0, 1$ et G non $2-$Engel ; G étant un $p-$groupe on peut appliquer le lemme 3.3.3.3 où

$$B(G) = B\left(p^t\right) = \left\{ip^t + \sigma; i \in \mathbb{Z}, \sigma = 0, 1\right\}.$$

Et

$$\left[x^{p^t}, y, y\right] = 1 \quad \text{où } t \in \mathbb{N}^*.$$

(pour $t = 0$, $B(G) = \mathbb{Z}$ et par suite G est $n-$Bell pour tout $n \in \mathbb{Z}$).

Puisque G est métabélien, le lemme 3.3.3.5 donne

$$[x, y, y]^{p^t} = 1 \quad \text{pour tous } x \text{ et } y \text{ dans } G$$

c.a.d

$$\left(E_2(G)\right)^{p^t} = 1 \qquad (**)$$

Prouvons que $p^t \in \mathcal{L}(G)$; $p^t \in B_0(G)$; c'est même un générateur de l'idéal $B_0(G)$, donc

$$\left[x^{p^t}, y\right] = \left[x, y^{p^t}\right]$$

ce qui donne

$$\left[x, y^{p^t}\right]\left[y, x^{p^t}\right] = 1$$

Développons le membre de gauche par l'identité $(*)$

$$\begin{aligned} 1 &= \left[x, y^{p^t}\right]\left[y, x^{p^t}\right] \\ &= \prod_{i=1}^{p^t} \left([x,_i y]\,[y,_i x]\right)^{C^i_{p^t}} \end{aligned}$$

- Si $t = 1$;

$$\begin{aligned} 1 &= \prod_{i=1}^{p} \left([x,_i\, y]\, [y,_i\, x] \right)^{C_p^i} \\ &= ([x,y]\,[y,x])^p \prod_{i=2}^{p-1} \left([x,_i\, y]\, [y,_i\, x] \right)^{C_p^i} \left([x,_p\, y]\, [y,_p\, x] \right). \end{aligned}$$

Remarquons que C_p^i est un multiple de p pour $(2 \leq i \leq p-1)$; d'après la relation $(**)$, $(E_2(G))^p = 1$ donc

$$\prod_{i=1}^{p-1} \left([x,_i\, y]\, [y,_i\, x] \right)^{C_p^i} = 1.$$

Il reste

$$1 = [x,_p\, y]\, [y,_p\, x]$$

et, d'après le lemme 1.8.4, en faisant $s = 0$; on obtient

$$[x,_p\, y] = 1$$

Développons

$$\begin{aligned} [x, y^p]\, [y,x]^p &= [x,y]^p \prod_{i=2}^{p-1} [x,_i\, y]^{C_p^i}\, [x,_p\, y]\, [y,x]^p \\ &= [x,y]^p\, [y,x]^p \\ &= 1. \end{aligned}$$

Donc

$$[x, y^p] = [x,y]^p .$$

- Supposons $t \geq 2$ donc $p^2 \leq p^t$ et en remarquant que la classe de nilpotence c est $\leq p^2$.

Après développement de : $\left[x, y^{p^t}\right] \left[y, x^{p^t}\right] = 1$; on obtient :

$$1 = S_1 \times \left([x,_p\, y]\, [y,_p\, x] \right)^{C_{p^t}^p} \times S_2$$

où

$$S_1 = \prod_{i=2}^{p-1} \left([x,_i\, y]\,[y,_i\, x]\right)^{C^i_{p^t}}$$

et

$$S_2 = \prod_{i=p+1}^{p^2-1} \left([x,_i\, y]\,[y,_i\, x]\right)^{C^i_{p^t}}$$

$S_1 = 1$ par $(**)$; car pour $2 \leq i \leq p-1$ on a

$$i!C^i_{p^t} = p^t\left(p^t-1\right)...\left(p^t-i+1\right) \quad \text{et} \quad \left(p^t, i!\right) = 1$$

Donc p^t divise $C^i_{p^t}$ c.a.d

$$\exists \lambda_i \in \mathbb{N}^*; C^i_{p^t} = \lambda_i p^t$$

Montrons que $S_2 = 1$; remarquons que $(p+1 \leq i \leq p^2-1)$, p^t est premier avec $i!$ car $p^2 \leq p^t$; donc dans la relation

$$i!C^i_{p^t} = p^t\left(p^t-1\right)...\left(p^t-i+1\right)$$

p^t divise $C^i_{p^t}$ et S_2 devient

$$S_2 = \prod_{i=p+1}^{p^2-1} \left([x,_i\, y]\,[y,_i\, x]\right)^{\lambda_i p^t} \quad \text{où} \quad \lambda_i \in \mathbb{N}^*$$

De la relation $(**)$ $\left(E_2\left(G\right)\right)^{p^t} = 1$, on en déduit que $S_2 = 1$

Il reste

$$1 = \left([x,_p\, y]\,[y,_p\, x]\right)^{C^p_{p^t}}$$

On a :

$$p!C^p_{p^t} = p^t\left(p^t-1\right)...\left(p^t-p+1\right)$$

$$(p-1)!C^p_{p^t} = p^{t-1}\left(p^t-1\right)...\left(p^t-p+1\right)$$

p^{t-1} étant premier avec $(p-1)!$, alors p^{t-1} divise $C_{p^t}^p$ et donc

$$1 = ([x,_p y]\,[y,_p x])^{p^{t-1}}$$

Dans le lemme 1.8.4, en faisant $s = t$ on obtient

$$[x,_p y]^{p^t} = 1$$

Développons maintenant $\left[x, y^{p^t}\right]$ par l'identité $(*)$

$$\begin{aligned}[x, y^p] &= \prod_{i=2}^{p-1} [x,_i y]^{C_{p^t}^i} \times [x,_p y]^{C_{p^t}^p} \times \prod_{i=p+1}^{p^2-1} [x,_i y]^{C_{p^t}^i} \\ &= [x, y]^p\end{aligned}$$

$$\prod_{i=2}^{p-1} [x,_i y]^{C_{p^t}^i} = 1 \quad \text{par} \quad (**)$$

$$\prod_{i=p+1}^{p^2-1} [x,_i y]^{C_{p^t}^i} = S_2 = 1$$

Donc

$$[x, y^p] = [x, y]^p$$

D'où

$$G \text{ est } p\text{-Levi. } \square$$

Remarque 3.3.3.7.

Si G est un groupe périodique n-Bell et non n-Levi, alors G admet un unique sous-groupe normal.

Preuve

Supposons qu'il existe deux sous-groupes normaux minimaux M et N de G .

Soit l'application φ définie par :

$$\begin{array}{rcl} \varphi & : & G \to \dfrac{G}{M} \times \dfrac{G}{N} \\ x & \longmapsto & \left(x^{-M}, y^{-N}\right) = (xM\ , xN) \end{array}$$

φ est un homomorphisme de groupes dont le noyau est $\ker(\varphi) = M \cap N$; donc $\frac{G}{M \cap N}$ est isomorphe à un sous-groupe de $\frac{G}{M} \times \frac{G}{N}$.

$\frac{G}{M}$ et $\frac{G}{N}$ n'étant pas triviaux sont n-Levi par minimalité , puisque leurs ordres sont strictement inférieurs à celui de G ; $\frac{G}{M} \times \frac{G}{N}$ est aussi n-Levi car le produit cartésien fini de groupes n-Levi est n-Levi ; donc $\frac{G}{M \cap N}$ est aussi n-Levi ; or $M \cap N$ est aussi normal dans G ; comme M et N sont minimaux $M \cap N = 1$, ceci implique G est n-Levi ; contradiction.

Donc G admet un unique sous-groupe non trivial . □

Corollaire 3.3.3.8.

Soit G un groupe métabélien, périodique et $n-Bell$; supposons $n(n-1)$ sans facteur carré, alors G est $n-Levi$.

Pour montrer ce corollaire, on utilise le théorème suivant qu'on admet sans démonstration *:*

Théorème 3.3.3.9.

Soit G un groupe métabélien fini et n-Bell ; si G admet un unique sous-groupe normal minimal, alors G satisfait l'une des trois conditions suivantes :

(i) $G^n = 1$,

(ii) $G^{n-1} = 1$,

(iii) G est un p-groupe.

Pour la démonstration, voir [6, Theorem B. p.789]

Preuve de corollaire 3.3.3.8.

Soient x et y deux éléments dans G et soit $H = \langle x, y \rangle$.

H est un sous-groupe fini de G, donc on peut supposer G fini .

Supposons qu'il existe des groupes finis vérifiant les hypothèses du corollaire et qui

ne sont pas $n-$Levi ; soit G un tel groupe choisi d'ordre minimal.

Puisque G admet un unique sous-groupe normal minimal, on peut appliquer le théorème 3.3.3.9 ; donc G satisfait l'une des trois conditions

Si $G^n = 1$; alors G est $n-$abélien donc $n-$Levi ; contradiction, puisque G n'est pas $n-$Levi.

Si $G^{n-1} = 1$; alors G est aussi $n-$abélien donc $n-$Levi ; contradiction.

Donc G est nécessairement un $p-$groupe ; soit

$$d = p \gcd\left(n\left(n-1\right), p\right)$$

Dans le lemme 3.3.3.3 on a :

$$B\left(G\right) = B\left(p^t\right) = \left\{ip^t + \sigma; i \in \mathbb{Z}, \sigma = 0, 1\right\}$$

et

$$B_0\left(G\right) = p^t\mathbb{Z}$$

Si $t = 0$; $B_0\left(G\right) = \mathbb{Z}$ et G est $n-$Levi pour tout n.

Si $t \geq 1$; p^t divise $n\left(n-1\right)$ donc nécessairement

$$d = p$$

Puisque $n\left(1-n\right)$ est sans facteur carré et appartient à $B_0\left(G\right) = p^t\mathbb{Z}$, p^t est un diviseur de $n\left(1-n\right)$; donc

$$t = 1 \text{ et } B_0\left(G\right) = p\mathbb{Z}$$

c.a.d

$$p \in B_0\left(G\right) \subseteq B\left(G\right).$$

Donc

$$\left[x^p, y\right] = \left[x, y^p\right].$$

D'après le théorème 3.3.3.5 ; G est $p-$Levi.

Puisque G est un $p-$groupe ; $p \in \mathcal{L}(G)$.

Comme $B_0(G) = p\mathbb{Z}$, on a :

$$\mathcal{L}(G) = B(G).\square$$

Remarque 3.3.3.10.

S. I. Adjen [3] a montré qu'il existe des groupes n-Bell qui ne sont pas m-Levi pour tout $m \neq 0, 1$, c.a.d $\mathcal{L} \subsetneqq B$. Mais Delizia, Moravec et Nicotera [9] ont prouvé que si G est un groupe localement gradué, alors les deux classes citées précédemment coincident.

Bibliographie

[1] A. Abdollahi, *A characterization of infinite 3-abelian groups,* Arch. Math. **73** (1999) 101-108).

[2] A. Abdollahi, B. Daoud et G. Endimioni, *Groupes n-abéliens généralisés*, Bull. Belg. Math. Soc. **13** (2006), 287-294.

[3] S. I. Adjan, *The Burnside problem and identities in groupes*, Springer Verlag, Berlin, 1979.

[4] J. L. Alperin, *A classification of n-abelien groups*, Canad. J. Math. **21** (1969), 1238-1244

[5] R. Baer, *Factorization of n-soluble and n-nilpotent groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 15-26.

[6] R. Brandl and L. C. Kappe, *On n-Bell groups*, Comm. Algebra **17** (1989), no. 4, 787-807.

[7] B. Daoud, *Applications et endomorphismes rationnels inversibles de certaines classes de groupes*, Thèse de doctorat d'état (2008).

[8] C. Delizia, M. R. R. Moghaddam and A. Rhemtulla, *The structure of Bell groups*, J. Group Theory **9** (2006), no. 1, 117-125.

[9] C. Delizia, P. Moravec and C. Nicotera, *Locally graded Bell groups*, Publ. Math. Debrecen **71/1-2** (2007), 1-9.

[10] K. W. Gruenberg, *Two theorems on Engel groups,* Proc. Cambridge Philos. Soc. **49** (1953), 377-380.

[11] G.Havas and M.R.Vaughen-Lee, 4-*Engel groups are locally nilpotent*, Int.J.Algebra Comput **15**, no 4, (2005), 649-652.

[12] H. Heinken, *Engelsche elemente der lange drei*, Illinois J. Math. **5**, 681-707 (1961).

[13] L. C. Kappe, *Engel margins in metabelien groups*, Comm. Algebra **11** (1983), 1965-1987.

[14] L. C. Kappe, *On n-Levi groups*, Arch. **47** (1986), 198-210.

[15] L. C. Kappe et W. P. Kappe, *On three-Engel groups*, *Bull. Austral. Math. Soc.* **7** (1972), 391-405.

[16] L.C. Kappe and R.F. Morse, *Groups with* 3*-abelian normal closures*, Arch. Math. Vol. 51, 104-110 (1988).

[17] L. C. Kappe and R. F. Morse, *Levi-properties in metabelian groups*, Contemporary Mathematics, **51** (1990), 59-72.

[18] L. C. Kappe and M. L. Newell, *On the n-centre of group*, Groups St. Andrews 1989, LMS Lecture Notes, **160** , 339-352.

[19] F. W. Levi, *Notes on group theory*. I, II, J. Indian Math. Soc. (N. S.) **8** (1944), 1-9.

[20] P. Moravec, *On power endomorphisms of n-central groups*, J. Group Theory **9** (2006), no. 4, 519-536.

[21] P. Moravec, *Some groups with n-central normal closures*,Publ. Mah. Debrecen **67** no. 3-4 (2005), 355-372.

[22] D. J. S. Robinson, *A course in the theory of groups*, Springer-Verlag, Berlin, (1996).

[23] D. J. S. Robinson, *Finiteness Conditions and generalized soluble groups*, Part I, II, "Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, (1972).

[24] A. Tortora, *Some properties of Bell groups*, à paraitre.

[25] G.Traustason, *Locally nilpotent* 4*-Engel groups are fitting groups*, J. Algebra **270** (10) (2003), 7-27.