

**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

UNIVERSITE FERHAT ABBAS - SETIF 1

THÈSE

Présentée à la faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Option : Mathématiques Appliquées

Par

Ilyas Boukaroura

THÈME

**Théorie mathématique de quelques problemes en mécanique des solides
déformables**

soutenue le : 09 / 07 / 2019, devant le jury :

Président	Mr. A. MEROUANI	Pr.	Université de Sétif 1
Rapporteur	Mr. S. DJABI	Pr.	Université de Sétif 1
Examineurs	Mr. A. BERBOUCHA	Pr.	Université de Bejaia
	Mr. M. NADIR	Pr.	Université de M'sila
	Mr. T. SERRAR	MCA.	Université de Sétif 1
	Mr. B. GAGUI	MCA.	Université de M'sila

Table des matières

Notations	iv
Valorisation des travaux de thèse	vi
Introduction générale	viii
1 Modélisation et formulation des problèmes thermomécaniques	1
1.1 Lois de comportement	3
1.1.1 Lois de comportement purement mécaniques	3
1.1.2 Lois de comportement purement thermiques	6
1.1.3 Lois de comportement thermomécaniques	6
1.2 Phénomènes mécaniques et thermiques	7
1.2.1 L'endommagement	7
1.2.2 L'usure	7
1.2.3 La température	7
1.3 Lois de comportement thermomécaniques associables	8
1.3.1 Lois de comportement thermo-viscoélastiques avec endommagement . . .	8
1.3.2 Lois de comportement thermo-élastoviscoplastiques avec endommagement	8
1.4 Conditions aux limites	9
1.4.1 Conditions aux limites linéaires	9

1.4.2	Conditions aux limites non linéaires	10
1.4.3	Conditions aux limites thermiques	13
1.5	Formulation des problèmes thermomécaniques	13
1.5.1	Cadres physiques	13
1.5.2	Modèles mathématiques	17
2	Résolution des problèmes thermomécaniques quasistatiques	21
2.1	Le cas des matériaux thermoviscoélastiques avec endommagement et usure . . .	21
2.1.1	Formulation du problème mécanique- hypothèses	22
2.1.2	Formulation variationnelle	27
2.1.3	Existence et unicité de la solution	28
2.2	Le cas du contact entre deux corps thermoviscoélastiques avec endommagement et usure	43
2.2.1	Formulation du problème mécanique- hypothèses	43
2.2.2	Formulation variationnelle	51
2.2.3	Existence et unicité de la solution	52
3	Résolution du problème thermomécanique dynamique	67
3.1	Le cas des matériaux thermo-elastique-viscoélastiques avec endommagement . .	68
3.1.1	Formulation du problème mécanique- hypothèses	68
3.1.2	Formulation variationnelle	74
3.1.3	Existence et unicité de la solution	75
	Conclusions et perspectives	86
	Annexe	87
	Bibliographie	97

Notations

Si Ω est un domaine de $\mathbb{R}^N$ ($N = 1, 2, 3$), on note par :

Γ : la frontière de Ω supposée régulière.

$\varepsilon(\mathbf{u})$: tenseur des déformations linéaires.

$\mathbf{u}$: le vecteur déplacement.

$\dot{\mathbf{u}}$: le champ de la vitesse.

Div : l'opérateur de divergence.

θ : la température.

q : le flux de la chaleur.

$\langle \cdot, \cdot \rangle_X$: un produit scalaire sur X .

$|\cdot|_X$: la norme sur X .

$W^{K,p}(0, T; H)$: l'espace de Sobolev de paramètres k et p

$\|\cdot\|_{0,T,H}$: la norme de $C(0, T; H)$

H : l'espace $L^2(\Omega)^N$

$\mathcal{H}$: l'espace $L^2(\Omega)^{N \times N}$

$H_1 = \{u \in H / \varepsilon(u) \in \mathcal{H}\}$

$\mathcal{H}_1 = \{\sigma \in \mathcal{H} / Div \sigma \in H\}$

$\tilde{H}_1 = \{\theta \in \tilde{H} / \nabla(\theta) \in \tilde{\mathcal{H}}\}$

$\tilde{\mathcal{H}}_1 = \{q \in \tilde{\mathcal{H}} / Div q \in \tilde{H}\}$

$\gamma : H_1 \rightarrow H_\Gamma$: l'application trace associée à H_1 .

$Z : H_\Gamma \rightarrow H_1$: application inverse de γ .

$\gamma_v : \mathcal{H}_1 \rightarrow H'_\Gamma$: l'application trace associée à $\mathcal{H}_1$.

$Z_v : H'_\Gamma \rightarrow \mathcal{H}_1$: l'application inverse de γ_v .

$V = \{u \in H_1 / \gamma u = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$

$\mathcal{V} = \{\sigma \in \mathcal{H}_1 / \text{Div} \sigma = 0 \text{ dans } \Omega, \gamma_v \sigma = 0 \text{ sur } \Gamma_2\}$

$W = \{\sigma \in \mathcal{H} / \gamma_v \sigma = \sigma v = 0 \text{ sur } \Gamma_2\}$

$\tilde{V} = \left\{ \theta \in \tilde{H}_1 / \tilde{\gamma} \theta = 0 \text{ sur } S_1 \right\}$

$\tilde{\mathcal{V}} = \left\{ q \in \tilde{\mathcal{H}}_1 / qv = 0 \text{ sur } S_2 \right\}$

Valorisation des travaux de thèse

Les travaux de thèse ont fait l'objet de trois publications dans des revues internationales : *Malaya Journal of Matematik*, *Applicationes Mathematicae*, et *Studia Universitatis Babes-Bolyai Mathematica*

- I.Boukaroura and S. Djabi, *Analysis of a quasistatic contact problem with wear and damage for thermo-viscoelastic materials*. *Malaya Journal of Matematik* : Volume 6, Issue 2, 2018, Pages 299-309

-I.Boukaroura and S. Djabi, *Analysis of a frictional contact problem with wear and damage between two thermo-viscoelastic bodies*. *Applicationes Mathematicae* : Volume 45, 2018, Pages 129-150

-I.Boukaroura and S. Djabi, *A dynamic Tresca's frictional contact problem with damage for thermo elastic-viscoplastic bodies*. *Studia Universitatis Babes - Bolyai Mathematica* : accepté pour publication en Janvier 2019

De plus , les travaux de thèse ont fait aussi l'objet d'une communication nationale. Ilyas.Boukaroura , *Etude mathématique de quelques problèmes viscoélastiques*. JNMA'15 : Université Bordj Bou Arréridj, 29 Novembre 2015

Et une communication internationale. Ilyas.Boukaroura et Seddik Djabi, *Boundary problems for thermo-elastic and therm-elastic-viscoplastic bodies*. WEDP'2018 :

Setif, 25-26 Novembre 2018

Introduction générale

On se donne un solide déformable de forme initiale Ω_0 . On le soumet à des efforts extérieurs (chargement mécanique : *forces appliquées sur le corps*, chargement thermique : *variation de température*, chargement électrique,...) ; il en résulte un changement de son mouvement et de son état thermodynamique.

Conscient de la largeur du domaine, on se limite à l'étude des solides thermomécaniques. De plus on considère l'hypothèse des petites transformations (*H.P.T*).

La thermomécanique s'intéresse aux effets de la chaleur sur les contraintes et les déformations des corps mécaniques et vice-versa, c'est l'extension de la mécanique isotherme, cette extension est due au fait que les contraintes et les déformations proviennent non seulement des forces mécaniques mais également des variations de température.

Problématique : l'objet du problème du point de vue mécanique est d'étudier le nouvel état d'équilibre Ω_t ($t > 0$).

Les objectifs visés : sont

- Modélisation mathématique : établir le système d'**EDP** décrivant l'évolution du solide thermomécanique.

- Etude théorique (existence, unicité, propriétés) de la solution du modèle mathématique.

La thèse est divisée en trois chapitres et une annexe.

Dans le premier chapitre, après des rappels sur le formalisme des lois de comportement, des conditions aux limites et phénomènes mécaniques et thermiques, nous présentons les cadres

physiques et les modèles mathématiques qui feront l'objet de notre étude dans les deux autres chapitres.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons des méthodes de résolution des problèmes thermomécaniques quasistatiques. Pour les matériaux thermoviscoélastiques avec endommagement et usure, nous présentons des résultats d'existence et d'unicité de la solution faible. Cette partie contient des résultats originaux publiés en collaboration avec S.Djabi basés sur les inéquations paraboliques, équations différentielles et arguments du point fixe.

De même ce chapitre contient le cas du contact entre deux corps thermos viscoélastiques avec endommagement.

Le troisième chapitre de cette thèse, est consacré à la résolution des problèmes thermoviscoélastiques dynamiques. Des résultats d'existence et unicité de la solution faible ont été obtenus. Notre contribution originale dans ce chapitre est la suivante : Dans l'étude du problème dynamique associé à une loi de comportement thermo-élastique-viscoplastique avec endommagement, on donne un résultat d'existence et d'unicité de la solution faible. La méthode est basée sur des techniques d'analyse fonctionnelle et variationnelle.

A la fin de cette thèse, une annexe a été rajouté, en résumant les principaux outils mathématiques utilisés.

Chapitre 1

Modélisation et formulation des problèmes thermomécaniques

L'objet de ce premier chapitre est d'établir les modèles mathématiques décrivant l'évolution quasistatique ou dynamique d'un corps thermomécanique sous l'action des efforts extérieurs mécaniques et thermiques.

Du point de vue mathématique, les problèmes thermomécaniques sont gouvernés par des systèmes d'EDP.

Ces systèmes comprennent l'équation du mouvement mécanique et thermique du corps, la loi de comportement thermomécanique du matériau, les conditions aux limites mécaniques et thermiques, ainsi que les conditions initiales auxquelles il est soumis (mécanique et thermique). Pour cela nous rappelons les résultats essentiels dont nous aurons besoin, ces rappels porteront sur les lois de comportement, les phénomènes mécaniques et thermiques et les conditions aux limites.

A la fin de ce chapitre, on introduit les cadres physiques et mathématiques correspondants qui seront étudiés dans les chapitres suivants.

Introduction :

On se donne un solide déformable de forme initiale, Ω_0 on le soumet à des efforts extérieurs (chargement mécanique et thermomécanique), il en résulte un changement de son mouvement et de son état thermodynamique.

Position du problème :

On s'intéresse à l'état final du corps lorsque l'application des efforts extérieurs est terminée et le solide atteint son état d'équilibre, qui est modélisé par un système d'EDP.

Une étude complète d'un phénomène mécanique comprend généralement trois étapes :

- *La modélisation.*
- *L'analyse variationnelle des modèles.*
- *L'analyse numérique des modèles.*

-La modélisation comprend l'ensemble des hypothèses de nature mécanique, thermodynamique prises en considération dans la description du phénomène. On associe à tout processus un modèle mathématique représenté par un système d'EDP avec Conditions aux limites et Conditions initiales décrivant le processus.

-L'analyse variationnelle des modèles comprend la formulation variationnelle ainsi que des résultats d'existence et d'unicité de la solution et les propriétés liées au comportement de la solution (régularité, stabilité, comportement...).

-L'analyse numérique pour qu'on puisse trouver des solutions approchées.

commençons par la modélisation :

1.1 Lois de comportement

Ce sont des relations entre le vecteur déplacement $\mathbf{u}$, le tenseur des contraintes σ et le tenseur des déformations linéarisées ε et traduisent le comportement du matériau.

1.1.1 Lois de comportement purement mécaniques

Lois de comportement de base

Loi élastique

– *Lois de comportement élastiques linéaires en dimension 1.*

Elles sont de la forme :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (1.1)$$

où σ : la contrainte , E : le module de Young, ε : allongement relatif .

– *Lois de comportement élastique linéaires en dimension 3.*

Sont les lois de la forme

$$\sigma = \xi(\varepsilon(\mathbf{u})), \quad (1.2)$$

où σ : est le tenseur de contrainte, ε : est le tenseur de déformation, ξ : est le tenseur d'élasticité.

Lois de comportement visqueuses

– *Lois de comportement visqueuses en dimension 1.*

Elles sont de la forme :

$$\sigma = \eta \cdot \dot{\varepsilon} \quad (1.3)$$

où σ : contrainte, η : la viscosité du matériau, $\dot{\varepsilon}$: la dérivée de ε par rapport au temps.

- *Lois de comportement visqueuses en dimension 3.*

Elles sont de la forme

$$\sigma = \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{\mathbf{u}})), \quad (1.4)$$

où $\mathcal{A}$ est un opérateur.

Lois de comportement associables

Sont obtenues par association des lois de base utilisant les modèles mécaniques analogiques et en les associant en série ou en parallèle. Ces modèles sont :

- *L'élasticité linéaire* symbolisée par ressort.
- *La viscosité* symbolisée par amortisseur.
- *La plasticité* symbolisée par patin.

Les types d'associations

L'association en série est

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ \sigma = \sigma_1 = \sigma_2 \end{cases}$$

L'association en parallèle est

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \\ \sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \end{cases}$$

- L'association de deux éléments donne par exemple : viscoélastique, viscoplastique, élasto-plastique.
- L'association de trois éléments donne par exemple : élasto-viscoplastique

Dans cette thèse, on présente des lois de comportement de trois catégories

Lois de comportement viscoélastiques La loi viscoélastique de *Kelvin-Voigt* s'écrit comme suit

$$\sigma(t) = \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t))) + \mathcal{G}(\varepsilon(\mathbf{u}(t))), \quad (1.5)$$

où

σ : est le tenseur de contrainte, ε : est le tenseur de déformation linéarisée.

$\mathcal{A}$ et $\mathcal{G}$ sont des fonctions constitutives non linéaires représentant respectivement, l'opérateur de viscosité et l'opérateur d'élasticité.

Lois de comportement viscoplastiques Elles sont de la forme

$$\dot{\sigma}(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{F}(\sigma(t), \varepsilon(\mathbf{u}(t))), \quad (1.6)$$

où

σ : est le tenseur de contrainte, ε : est le tenseur de déformation,.

$\mathcal{A}$ et $\mathcal{F}$ sont des fonctions constitutives non linéaires représentant, l'opérateur de viscosité et l'opérateur de plasticité.

Lois de comportement élasto-viscoplastiques Elles sont de la forme

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{G}(\varepsilon(\mathbf{u}(t))) + \int_0^t \mathcal{F}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(s)), \varepsilon(\mathbf{u}(s))) ds, \quad (1.7)$$

où

σ : est le tenseur de contrainte, ε : est le tenseur de déformation.

$\mathcal{A}$, $\mathcal{G}$ et $\mathcal{F}$ sont des fonctions constitutives non linéaires représentant respectivement, l'opérateur de viscosité et l'opérateur d'élasticité, et l'opérateur de viscoplasticité.

1.1.2 Lois de comportement purement thermiques

Loi de comportement de Fourier

La loi de comportement établie expérimentalement par Fourier s'écrit sous la forme :

$$k\nabla\theta = q \quad (1.8)$$

avec

θ : la température, q le flux de la chaleur.

1.1.3 Lois de comportement thermomécaniques

Lois de comportement thermo-viscoélastiques

Elles sont de la forme

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{G}(\varepsilon(\mathbf{u})) + \mathcal{F}(\theta) \quad (1.9)$$

$\mathcal{A}$, $\mathcal{G}$ et $\mathcal{F}$ sont des opérateurs non linéaires représentant respectivement l'opérateur de la viscosité, l'opérateur de l'élasticité, et l'opérateur thermique.

Lois de comportement thermo-élastoviscoplastiques

Elles sont de la forme

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{G}(\varepsilon(\mathbf{u})) + \int_0^t \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(s)), \varepsilon(\mathbf{u}(s))) ds - \mathcal{C}\theta \quad (1.10)$$

$\mathcal{A}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{C}$ sont des opérateurs non linéaires représentant respectivement, l'opérateur de la viscosité, l'opérateur de l'élasticité, l'opérateur de la viscoplasticité et le tenseur thermique.

Remarque : D'autres hypothèses sont prises en considération lors de la modélisation ; à savoir :

1.2 Phénomènes mécaniques et thermiques

1.2.1 L'endommagement

L'endommagement est un phénomène très important en mécanique car il affecte directement la structure des machines. La fonction d'endommagement β varie entre 0 et 1. Quand $\beta = 1$, le matériau est complètement endommagé. Quand $\beta = 0$, il n'y a pas d'endommagement dans le matériau. Quand $0 < \beta < 1$, l'endommagement est partiel.

L'évolution du champ d'endommagement élastique est décrite par

$$\dot{\beta} - k\Delta\beta + \partial\psi_K(\beta) \ni \phi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \beta), \quad (1.11)$$

où $k > 0$, $\partial\psi_K(\beta)$ est le sous-différentiel de la fonction indicatrice sur K définie par

$$K = \{\beta \in H^1(\Omega); 0 \leq \beta \leq 1, \text{ p.p dans } \Omega\}, \quad (1.12)$$

et ϕ est une fonction constitutive donnée qui décrit la source d'endommagement dans le système.

1.2.2 L'usure

L'usure est un problème majeur pour les matériaux. Lorsque deux corps entrent en contact avec frottement et glissement, les surfaces en contact s'en retrouvent usées, la surface la plus rigide use l'autre, les particules ainsi perdues des surfaces en contact forment alors une fine couche entre les deux corps.

1.2.3 La température

La conduction thermique est un mode de transfert de température ou de chaleur entre deux milieux en contact.

1.3 Lois de comportement thermomécaniques associables

1.3.1 Lois de comportement thermo-viscoélastiques avec endommagement

Elles sont de la forme

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{G}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \zeta) + \mathcal{F}(\theta, \zeta), \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (1.13)$$

$$\dot{\theta} - \kappa_0 \Delta \theta = \psi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}), \theta) + \mathbf{q}, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (1.14)$$

$$\dot{\zeta} - \kappa \Delta \zeta + \partial \psi_K(\zeta) \ni \phi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \zeta), \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (1.15)$$

où $\mathcal{A}$, $\mathcal{G}$ et $\mathcal{F}$ sont des opérateurs non linéaires représentant respectivement, l'opérateur de la viscosité l'opérateur de l'élasticité, et le tenseur thermique, dans lequel θ représente la température et ζ représente l'endommagement du matériau.

1.3.2 Lois de comportement thermo-élastoviscoplastiques avec endommagement

Elles sont de la forme

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{G}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \xi) + \int_0^t \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(s)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))) ds - C_e \theta \quad (1.16)$$

$$\dot{\theta} - \operatorname{div} K(\Delta \theta) = r(\dot{\mathbf{u}}, \xi) + \mathbf{q}, \quad \text{sur } \Omega \times (0, T), \quad (1.17)$$

$$\dot{\xi} - k_1 \Delta \xi + \partial \varphi_F(\xi) \ni S(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \xi), \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (1.18)$$

où $\mathcal{A}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$ et C sont des opérateurs non linéaires représentant respectivement l'opérateur de la viscosité, l'opérateur de l'élasticité, l'opérateur de la viscoplasticité et le tenseur thermique, dans lequel θ représente la température et ξ représente le champ d'endommagement du matériau.

Remarque : Afin de compléter le modèle mathématique qui décrit l'équilibre du corps, il faut donner les conditions aux limites :

1.4 Conditions aux limites

1.4.1 Conditions aux limites linéaires

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $\partial\Omega = \Gamma$ la frontière de Ω , $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$

Conditions aux limites mécaniques

Soit ν le vecteur normal unitaire extérieur à Γ

$$\begin{cases} \mathbf{u} = g, & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T) \\ \sigma\nu = h, & \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T) \end{cases} \quad (1.19)$$

où g est un déplacement donné, h une traction donnée.

Conditions aux limites thermiques

Soit ν le vecteur normal unitaire extérieur à Γ

$$\begin{cases} \theta = \alpha, & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T) \\ \sigma\nu = \beta, & \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T) \end{cases} \quad (1.20)$$

où α est une température donnée, β le flux de chaleur donné.

1.4.2 Conditions aux limites non linéaires

Conditions aux limites de contact sans frottement

Contact unilatéral (Conditions de contact de *Signorini*)

Avant l'application des forces extérieures la distance du point $x \in \Gamma_3$ dans la direction de la normale $\nu(x)$ est connue et notée par $s(x)$. Les conditions de contact de *Signorini* s'écrivent d'une manière combinée de la façon suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_\nu \leq s(x) \\ \sigma_\nu \leq 0, \quad \sigma_\tau = 0 \\ \sigma_\nu(\mathbf{u}_\nu - s(x)) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \end{cases} \quad (1.21)$$

Contact bilatéral

Nous parlons d'un contact bilatéral s'il n'y a pas de séparation entre le corps et la fondation, autrement dit le contact est maintenu tout au long du processus. Cette condition est exprimée par la relation suivante

$$\mathbf{u}_\nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (1.22)$$

Conditions aux limites de contact avec frottement

Contact avec compliance normale

Dans ce cas , la fondation est supposée déformable et la zone de contact n'est pas connue a priori, la contrainte σ_ν satisfait la condition dite de compliance normale

$$-\sigma_\nu = p_\nu(\mathbf{u}_\nu - g) \quad (1.23)$$

où $\mathbf{u}_\nu$ est le déplacement normal, g représente l'interstice entre le corps et la fondation et p_ν est une fonction positive donnée appelée *fonction de compliance normale*.

Cette condition indique que la fondation exerce une action sur le corps en fonction de sa pénétration $(\mathbf{u}_\nu - g)$. Si le corps repose sur la fondation, c'est-à-dire, l'interstice est nul $g = 0$.

Loi de frottement de type Tresca

Cas statique

Nous modélisons le frottement avec la variante statique de la loi Tresca. Par les conditions aux limites suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}_\nu &= 0, & |\boldsymbol{\sigma}_\tau| &\leq g \\ |\boldsymbol{\sigma}_\tau| < g &\implies u_\tau = 0, & \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \\ |\boldsymbol{\sigma}_\tau| = g &\implies \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que } \boldsymbol{\sigma}_\tau = -\lambda u_\tau \end{aligned} \right\} \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (1.24)$$

où

$g > 0$ est le seuil de glissement, que nous considérons fixé.

La condition $\mathbf{u}_\nu = 0$ traduit le fait que le contact est bilatéral et donc le corps ne décolle pas de la fondation .

L'inégalité $|\sigma_\tau| \leq g$ veut dire que la force de frottement σ_τ est bornée par une valeur g fixé .

Quand on a l'inégalité stricte $|\sigma_\tau| < g$, le glissement n'est pas possible et par conséquent les déplacements tangentiels sont nuls. Dans ces points le corps adhère à la fondation .

Lorsque $|\sigma_\tau| = g$ le glissement est possible. Dans ces points le corps peut glisser sur la fondation et la force de frottement s'oppose au glissement.

Cas dynamique

La version de la loi de Tresca dans le cas dynamique s'écrit de la manière suivante :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}_\nu &= 0, & |\boldsymbol{\sigma}_\tau| &\leq g \\ |\boldsymbol{\sigma}_\tau| < g &\implies \dot{\mathbf{u}}_\tau = 0, & \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \\ |\boldsymbol{\sigma}_\tau| = g &\implies \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que } \boldsymbol{\sigma}_\tau = -\lambda \dot{\mathbf{u}}_\tau \end{aligned} \right\} \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (1.25)$$

où

$g > 0$ est le seuil de glissement, que nous considérons fixé.

La condition $\mathbf{u}_\nu = 0$ traduit le fait que le contact est bilatéral et donc le corps ne décolle pas de la fondation .

L'inégalité $|\sigma_\tau| \leq g$ veut dire que la force de frottement σ_τ est bornée par une valeur g fixé .

Quand on a l'inégalité stricte $|\sigma_\tau| < g$, le glissement n'est pas possible et par conséquent les déplacements tangentiels sont nuls. Dans ces points le corps adhère à la fondation .

Lorsque $|\sigma_\tau| = g$ le glissement est possible. Dans ces points le corps peut glisser sur la fondation et la force de frottement s'oppose au glissement.

Conditions aux limites de contact bilatéral avec frottement et usure

Le corps est supposé entrer en contact avec une fondation rigide, se déplaçant à la vitesse $\mathbf{v}^*$. Ce contact est supposé toujours maintenu au cours de l'étude du phénomène. Décrivons la condition de contact entre la partie Γ_3 du corps et la Fondation régide.

Ici, la relation

$$\mathbf{u}_\nu = -w, \quad (1.26)$$

où w est la fonction d'usure $w : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ reste valide afin de représenter l'effet de l'usure sur la surface de contact Γ_3 . Cette dernière égalité montre que la position de contact dépend de l'usure.

On suppose que pendant l'évolution du phénomène, la surface de contact se réarrange de sorte que la vitesse tangentielle soit négligeable. La vitesse de glissement ne sera ainsi que la vitesse $v^* = \|\mathbf{v}^*\| > 0$. La relation (1.26) entraîne

$$\sigma_\nu = \alpha |\dot{\mathbf{u}}_\nu|, \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T] \quad (1.27)$$

où

$$\alpha = \frac{1}{k |v^*|}.$$

Le frottement suit la loi donnée par :

$$\sigma_\tau = -\lambda (\dot{\mathbf{u}}_\nu - \mathbf{v}^*), \lambda \geq 0, \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T] \quad (1.28)$$

Compte tenu de l'interprétation du problème physique et ayant glissement et frottement, on a la relation :

$$|\sigma_\tau| = -\mu \sigma_\nu, \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T] \quad (1.29)$$

Nous modélisons le contact de frottement entre le corps et la fondation avec compliance normale comme suit

$$\begin{cases} \sigma_\nu = p_\nu(\mathbf{u}_v - \omega - g), & \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \\ \sigma_\tau = -p_\tau(\mathbf{u}_v - \omega - g) \frac{\mathbf{v}^*}{\|\mathbf{v}^*\|}, & \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \end{cases} \quad (1.30)$$

1.4.3 Conditions aux limites thermiques

Elles traduisent les échanges de chaleur entre le corps et son environnement. Il existe différentes conditions aux limites thermiques. On considère la condition au bord suivante associée à la température dérivée de Fourier

$$k_1 \frac{\partial \theta}{\partial \nu} + B\theta = 0, \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T),$$

$\frac{\partial \theta}{\partial \nu}$ représente la dérivée normale de θ .

Passons maintenant à :

1.5 Formulation des problèmes thermomécaniques

Ce paragraphe introduit les cadres physiques et par suite mathématiques utilisés dans cette thèse :

1.5.1 Cadres physiques

Les phénomènes considérés dans cette thèse sont décrits par les trois cadres physiques suivants :

Cadre physique $n^\circ 1$ Soit un corps thermovisco-elastique qui occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) avec une surface frontière régulière, partitionnée en trois parties disjointes Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 , correspondant aux conditions aux limites mécaniques, d'une part, et en deux parties

$(S_1 = \Gamma_1, S_2 = \Gamma_2)$ correspondant aux conditions thermiques. On suppose que $mes \Gamma_1 > 0$. Le corps et l'obstacle rigide sont en contact bilatéral avec frottement le long de la partie Γ_3

Soit $T > 0$ et $[0, T]$ l'intervalle de temps considéré. On note par ν la normale unitaire sortante à Γ . Le corps est encastré sur Γ_1 dans une structure fixe. Sur Γ_2 agissent des tractions surfaciques de densité $\mathbf{f}_2$, dans Ω agissent des forces volumiques de densité $\mathbf{f}_0$. Et d'une source de chaleur externe possible appliquée dans $\Omega \times (0, T)$ donnée par les fonctions q . On suppose que $\mathbf{f}_2$ et $\mathbf{f}_0$ varient très lentement par rapport au temps. Le corps est en contact avec frottement et usure sur la partie Γ_3 . Nous prenons en considération les propriétés mécaniques du corps.

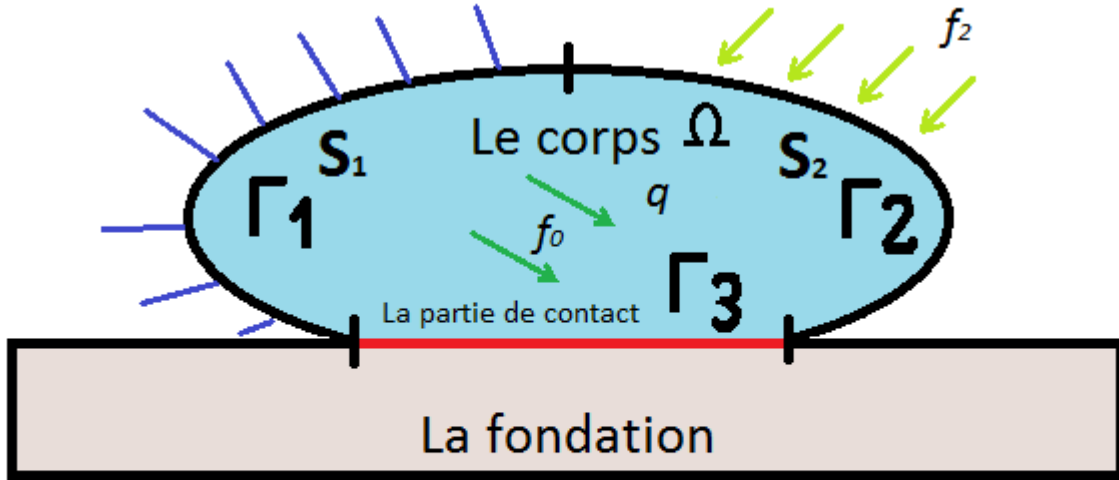


FIGURE 1.1 – Cadre physique 1

Cadre physique $n^{\circ}2$ Nous envisageons deux corps thermo-viscoélastiques qui occupent deux domaines bornés Ω^1, Ω^2 de l'espace $\mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$). Pour chaque domaine Ω^ℓ ($\ell = 1, 2$) la frontière Γ^ℓ est supposée être Lipschitzienne, partitionnée en trois parties disjointes $\Gamma_1^\ell, \Gamma_2^\ell$ et Γ_3 , correspondant aux conditions aux limites mécaniques, d'une part, et en deux parties ($S_1^\ell = \Gamma_1^\ell, S_2^\ell = \Gamma_2^\ell$) correspondant aux conditions thermiques. On suppose que $\text{mes } \Gamma_1^\ell > 0$. Les deux corps sont en contact bilatéral avec frottement le long de la partie Γ_3 . Soit $T > 0$ et $[0, T]$ l'intervalle de temps considéré. On note par ν la normale unitaire sortante à Γ^ℓ . Les corps Ω^ℓ sont encastrés sur Γ_1^ℓ dans une structure fixe. Sur Γ_2^ℓ agissent des tractions surfaciques de densité $\mathbf{f}_2^\ell$, dans Ω^ℓ agissent des forces volumiques de densité $\mathbf{f}_0^\ell$. Et d'une source de chaleur externe possible appliquée dans $\Omega^\ell \times (0, T)$ donnée par les fonctions q_ℓ . On suppose que $\mathbf{f}_2^\ell$ et $\mathbf{f}_0^\ell$ varient très lentement par rapport au temps. Les deux corps sont en contact avec frottement et usure sur la partie Γ_3 . Nous prenons en considération les propriétés mécaniques des corps.

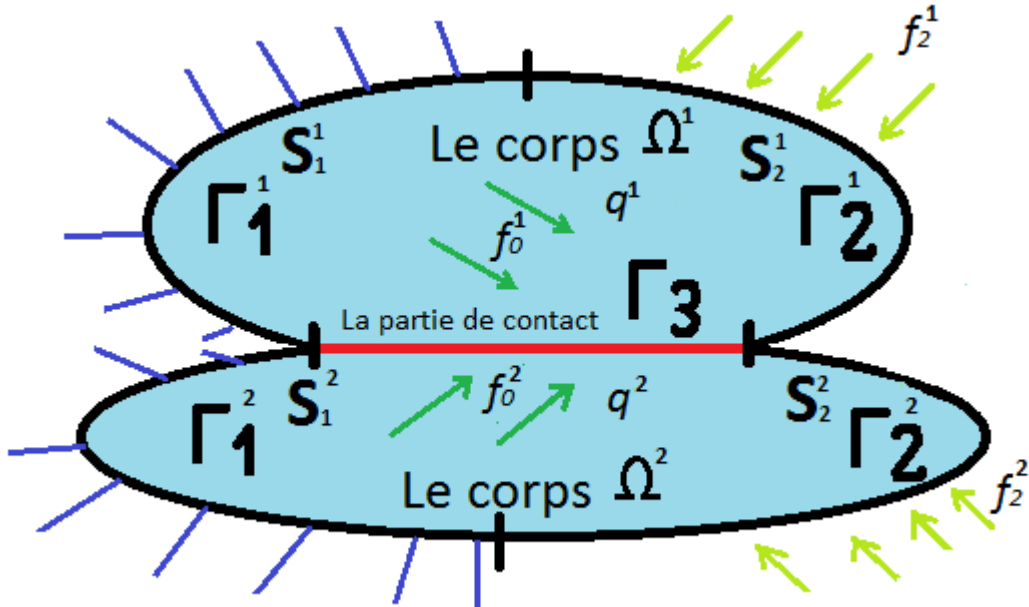


FIGURE 1.2 – Cadre physique 2

Cadre physique $n^\circ 3$ Soit un corps thermo-élastoviscoplastique qui occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) avec une surface frontière régulière, partitionnée en trois parties disjointes Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 , correspondant aux conditions aux limites mécaniques, d'une part, et en deux parties ($S_1 = \Gamma_1$, $S_2 = \Gamma_2$) correspondant aux conditions thermiques. On suppose que $\text{mes } \Gamma_1 > 0$. Le corps et l'obstacle rigide sont en contact bilatéral avec frottement le long de la partie Γ_3 .

Soit $T > 0$ et $[0, T]$ l'intervalle de temps considéré. On note par ν la normale unitaire sortante à Γ . Le corps est encastré sur Γ_1 dans une structure fixe. Sur Γ_2 agissent des tractions surfaciques de densité $\mathbf{f}_2$, dans Ω agissent des forces volumiques de densité $\mathbf{f}_0$. De plus, le processus est dynamique et les termes inertiels sont donc inclus dans l'équation du mouvement. Le corps est en contact avec frottement et endommagement sur la partie Γ_3 .

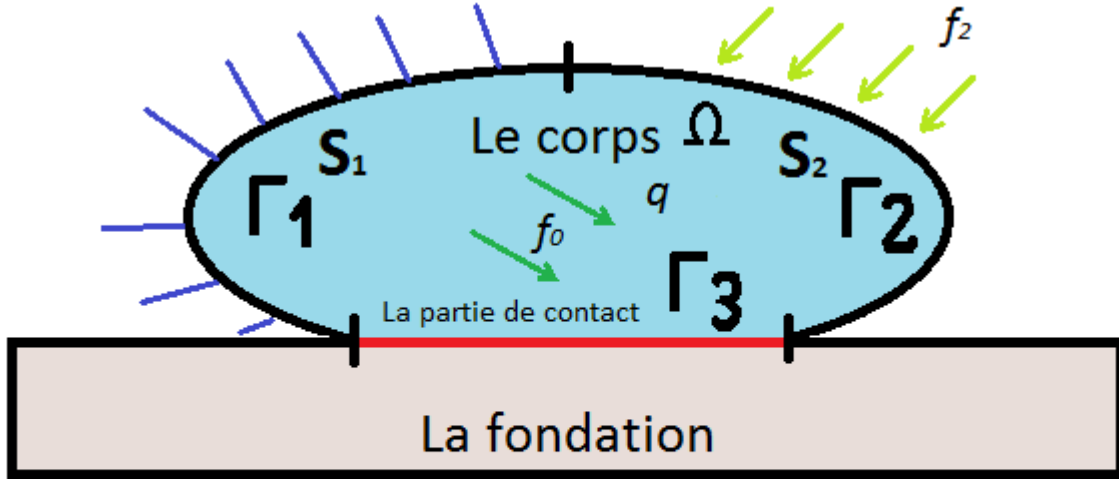


FIGURE 1.3 – Cadre physique 3

1.5.2 Modèles mathématiques

Modèle mathématique $n^\circ 1$

Problème $\mathbf{P}^1$ Trouver le champ des déplacements $\mathbf{u} : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{S}^d$, la temperature $\theta : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, l'endommagement $\zeta : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, et l'usure $\omega : \Gamma_3 \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^+$ tels que

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{G}(\varepsilon(\mathbf{u}), \zeta) + \mathcal{F}(\theta, \zeta), \text{ dans } \Omega \times (0, T)$$

$$\dot{\theta} - \kappa_0 \Delta \theta = \psi(\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}), \theta) + \mathbf{q}, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T),$$

$$\dot{\zeta} - \kappa \Delta \zeta + \partial \psi_K(\zeta) \ni \phi(\varepsilon(\mathbf{u}), \zeta), \text{ dans } \Omega \times (0, T)$$

$$\text{Div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T),$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T),$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T),$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\nu = p_\nu(\mathbf{u}_v - \omega - g) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T),$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau = -p_\tau(\mathbf{u}_v - \omega - g) \frac{\mathbf{v}^*}{\|\mathbf{v}^*\|}, \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T),$$

$$\dot{\omega} = -\kappa_\omega \alpha^* \boldsymbol{\sigma}_\nu = \kappa_\omega \alpha^* p_\nu(\mathbf{u}_v - \omega - g), \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T)$$

$$k_1 \frac{\partial \theta}{\partial \nu} + B\theta = 0, \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T),$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \nu} = 0, \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T),$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \theta(0) = \theta_0, \quad \zeta(0) = \zeta_0, \quad \text{dans } \Omega,$$

$$\omega(0) = \omega_0, \quad \text{sur } \Gamma_3$$

Modèle mathématique $n^{\circ}2$ **Problème P²**

Trouver le champ des déplacements $\mathbf{u}^\ell : \Omega^\ell \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma}^\ell : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{S}^d$, la température $\theta^\ell : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, l'endommagement $\zeta^\ell : \Omega^\ell \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, et l'usure $\omega : \Gamma_3 \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^+$ tels que

$$\boldsymbol{\sigma}^\ell = \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell) + \mathcal{G}^\ell(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell), \zeta^\ell) + \mathcal{F}^\ell(\theta^\ell, \zeta^\ell), \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T),$$

$$\dot{\theta}^\ell - \kappa_0 \Delta \theta^\ell = \psi^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell, \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell), \theta^\ell) + \mathbf{q}^\ell, \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T),$$

$$\dot{\zeta}^\ell - \kappa^\ell \Delta \zeta^\ell + \partial \psi_{K^\ell}(\zeta^\ell) \ni \phi^\ell(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell), \zeta^\ell) \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T),$$

$$\text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell + \mathbf{f}_0^\ell = 0 \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T),$$

$$\mathbf{u}^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\ell \times (0, T),$$

$$\boldsymbol{\sigma}^\ell \cdot \boldsymbol{\nu}^\ell = \mathbf{f}_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_2^\ell \times (0, T),$$

$$\left. \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma}_\nu^1 = \boldsymbol{\sigma}_\nu^2 \equiv \boldsymbol{\sigma}_\nu, \\ \boldsymbol{\sigma}_\nu = p_\nu(\mathbf{u}_v - \omega - g), \end{array} \right\} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T),$$

$$\left. \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma}_\tau^1 = -\boldsymbol{\sigma}_\tau^2 \equiv \boldsymbol{\sigma}_\tau, \\ \boldsymbol{\sigma}_\tau = -p_\tau(\mathbf{u}_v - \omega - g)_{\frac{\mathbf{v}^*}{\|\mathbf{v}^*\|}}, \end{array} \right\} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T),$$

$$\mathbf{u}_v^1 + \mathbf{u}_v^2 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T),$$

$$\dot{\omega} = -\kappa_\omega \alpha^* \boldsymbol{\sigma}_\nu = \kappa_\omega \alpha^* p_\nu(\mathbf{u}_v - \omega - g), \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T),$$

$$k_1 \frac{\partial \theta^\ell}{\partial \nu} + B^\ell \theta^\ell = 0, \quad \text{sur } \Gamma^\ell \times (0, T),$$

$$\frac{\partial \zeta^\ell}{\partial \nu^\ell} = 0, \quad \text{sur } \Gamma_1^\ell \times (0, T),$$

$$\mathbf{u}^\ell(0) = \mathbf{u}_0^\ell, \theta^\ell(0) = \theta_0^\ell, \quad \zeta^\ell(0) = \zeta_0^\ell, \quad \text{dans } \Omega^\ell,$$

$$\omega(0) = \omega_0, \quad \text{sur } \Gamma_3$$

Modèle mathématique n°3**Problème P³**

Trouver le champ des déplacements $\mathbf{u} : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{S}^d$, la température $\theta : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, et l'endommagement $\xi : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{G}(\varepsilon(\mathbf{u}), \xi) + \int_0^t \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(s)), \varepsilon(\mathbf{u}(s))) ds - C_e \theta$$

$$\dot{\theta} - \operatorname{div} K(\Delta \theta) = r(\dot{\mathbf{u}}, \xi) + \mathbf{q}, \quad \text{sur } \Omega \times (0, T),$$

$$\dot{\xi} - k_1 \Delta \xi + \partial \varphi_F(\xi) \ni S(\varepsilon(\mathbf{u}), \xi), \quad \text{dans } \Omega \times (0, T),$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad \text{dans } \Omega \times (0, T),$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T),$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T),$$

$$-k_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} n_j = k_e (\theta - \theta_R) + h_\tau (|\dot{\mathbf{u}}_\tau|), \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T),$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_\nu = 0, \quad |\boldsymbol{\sigma}_\tau| \leq g \\ |\boldsymbol{\sigma}_\tau| < g \Rightarrow \dot{\mathbf{u}}_\tau = 0, \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \\ |\boldsymbol{\sigma}_\tau| = g \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que } \boldsymbol{\sigma}_\tau = -\lambda \dot{\mathbf{u}}_\tau \end{array} \right.$$

$$\theta = 0, \quad \text{sur } (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \times (0, T),$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_0, \xi(0) = \xi_0, \theta(0) = \theta_0, \quad \text{dans } \Omega,$$

Passons à la deuxième étape, l'analyse variationnelle des modèles, elle comprend la formulation faible du modèle ainsi que les résultats d'existence et d'unicité de la solution. L'objectif est d'étudier les propriétés de la solution c'est le but des deuxième et troisième chapitres

Dans le deuxième chapitre expose la résolution des problèmes thermomécaniques quasistatiques.

Chapitre 2

Résolution des problèmes thermomécaniques quasistatiques

Cette partie est consacrée à l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution du problème aux limites de contact entre un corps thermoviscoélastique avec endommagement et usure et une base rigide, dans un processus quasistatique. De même pour le contact entre deux corps thermoviscoélastiques avec endommagement et usure.

La méthode utilisée est basée sur les inéquations variationnelles, les équations différentielles et des arguments du point fixe.

Commençons tout d'abord par le cas d'un corps thermodynamique en contact avec une base

2.1 Le cas des matériaux thermoviscoélastiques avec endommagement et usure

Dans le premier cas du deuxième chapitre, on considère un problème de contact quasistatique pour un corps thermoviscoélastique. Le contact est frictionnel et bilatéral, ce qui entraîne

l'usure et l'endommagement de la surface. L'évolution de la fonction d'usure est décrite par *la loi d'Archard*. L'évolution de l'endommagement est décrit par une inclusion de type parabolique. Nous établissons une formulation variationnelle pour le modèle puis on fait la démonstration de l'existence de la solution du problème. La preuve est basée sur le résultat classique d'existence et unicité sur les inégalités paraboliques, les équations différentielles et des arguments du point fixe.

2.1.1 Formulation du problème mécanique- hypothèses

Soit un corps thermovisco-elastique qui occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) avec une surface frontière régulière, partitionnée en trois parties disjointes Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 , correspondant aux conditions aux limites mécaniques, d'une part, et en deux parties ($S_1 = \Gamma_1$, $S_2 = \Gamma_2$) correspondant aux conditions thermiques. On suppose que $mes \Gamma_1 > 0$. Le corps et l'obstacle rigide sont en contact bilatéral avec frottement le long de la partie Γ_3 .

Soit $T > 0$ et $[0, T]$ l'intervalle de temps considéré. On note par ν la normale unitaire sortante à Γ . Le corps est encastré sur Γ_1 dans une structure fixe. Sur Γ_2 agissent des tractions surfaciques de densité $\mathbf{f}_2$, dans Ω agissent des forces volumiques de densité $\mathbf{f}_0$. Et d'une source de chaleur externe possible appliquée dans $\Omega \times (0, T)$ donnée par les fonctions q . On suppose que $\mathbf{f}_2$ et $\mathbf{f}_0$ varient très lentement par rapport au temps. Le corps est en contact avec frottement et usure sur la partie Γ_3 . Nous prenons en considération les propriétés mécaniques du corps.

Problème P^1

Trouver le champ des déplacements $\mathbf{u} : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{S}^d$, la température $\theta : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, l'endommagement $\zeta : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, et l'usure $\omega : \Gamma_3 \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^+$ tels que

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{G}(\varepsilon(\mathbf{u}), \zeta) + \mathcal{F}(\theta, \zeta), \text{ dans } \Omega \times (0, T) \quad (2.1)$$

$$\dot{\theta} - \kappa_0 \Delta \theta = \psi(\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}), \theta) + \mathbf{q}, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.2)$$

$$\dot{\zeta} - \kappa \Delta \zeta + \partial \psi_K(\zeta) \ni \phi(\varepsilon(\mathbf{u}), \zeta), \text{ dans } \Omega \times (0, T) \quad (2.3)$$

$$\text{Div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.4)$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (2.5)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (2.6)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\nu = p_\nu(\mathbf{u}_v - \omega - g) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (2.7)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau = -p_\tau(\mathbf{u}_v - \omega - g) \frac{\mathbf{v}^*}{\|\mathbf{v}^*\|}, \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (2.8)$$

$$\dot{\omega} = -\kappa_\omega \alpha^* \boldsymbol{\sigma}_\nu = \kappa_\omega \alpha^* p_\nu(\mathbf{u}_v - \omega - g), \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T) \quad (2.9)$$

$$k_1 \frac{\partial \theta}{\partial \nu} + B\theta = 0, \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T), \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \nu} = 0, \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (2.11)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \theta(0) = \theta_0, \quad \zeta(0) = \zeta_0, \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.12)$$

$$\omega(0) = \omega_0, \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (2.13)$$

Les équations (2.1) et (2.2) représentent la loi de comportement thermo-viscoélastique avec endommagement, l'évolution d'endommagement est donnée par l'inclusion parabolique dans (2.3). L'équation (2.4) est l'équation d'équilibre. Les équations (2.5) et (2.6) représentent les conditions aux limites déplacement-traction. Les équations (2.7) et (2.8) représente le contact bilatéral de frottement avec usure. Ensuite, l'équation (2.9) représente l'équation différentielle ordinaire qui décrit l'évolution de l'usure. Les équations (2.10) et (2.11) représentent respectivement, une condition aux limites de Fourier pour la température et une condition limite homogène de Neumann pour le dommage champ sur Γ . les fonctions $\mathbf{u}_0$, θ_0 , ζ_0 et w_0 dans (2.12) et (2.13) sont les données initiales.

Dans l'étude du problème $P1$, nous considérons les hypothèses suivantes :

L'opérateur de viscosité $\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_{\mathcal{A}} > 0 \text{ telle que} \\ \\ |\mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_1) - \mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_2)| \leq L_{\mathcal{A}} |\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2| \\ \\ \text{pour tout } \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(b) Il existe } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ telle que} \\ \\ (\mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_1) - \mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_2)) \cdot (\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2) \geq m_{\mathcal{A}} |\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2|^2 \\ \\ \text{pour tout } \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega, \\ \text{pour tout } \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(d) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \text{ est continue sur } \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \end{array} \right. \quad (2.14)$$

L'opérateur d'élasticité $\mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_{\mathcal{G}} > 0 \text{ telle que} \\ \\ |\mathcal{G}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_1, \zeta_1) - \mathcal{G}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_2, \zeta_2)| \leq L_{\mathcal{G}} (|\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2| + |\zeta_1 - \zeta_2|), \\ \\ \text{pour tout } \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ et pour tout } \zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(b) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{G}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \zeta) \text{ est Lebesgue mesurable sur} \\ \Omega, \text{ pour tout } \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^d, \text{ et pour tout } \zeta \in \mathbb{R}. \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{0}, 0) \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (2.15)$$

L'opérateur de dilatation thermique $\mathcal{F} : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_{\mathcal{F}} > 0 \text{ telle que } |\mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1, \zeta_1) - \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_2, \zeta_2)| \leq \\ L_{\mathcal{F}}(|\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\theta}_2| + |\zeta_1 - \zeta_2|), \text{ pour tout } \boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2 \in \mathbb{R}, \text{ et pour tout} \\ \zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(b) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, \zeta) \text{ est Lebesgue mesurable sur} \\ \Omega, \text{ pour tout } \boldsymbol{\theta}, \zeta \in \mathbb{R}. \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{0}, 0) \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (2.16)$$

La fonction source d'endommagement $\phi : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_{\phi} > 0 \text{ telle que } |\phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_1, \zeta_1) - \phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_2, \zeta_2)| \leq \\ L_{\phi}(|\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2| + |\zeta_1 - \zeta_2|), \text{ pour tout } \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in \mathbb{S}^d \text{ et } \zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{R} \\ \text{p.p. } \mathbf{x} \in \Omega, \\ \text{(b) L'application } \mathbf{x} \mapsto \phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \zeta) \text{ est Lebesgue mesurable sur} \\ \Omega, \text{ pour tout } \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^d \text{ et } \zeta \in \mathbb{R}, \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \mapsto \phi(\mathbf{x}, \mathbf{0}, 0) \text{ est dans } L^2(\Omega), \\ \text{(d) } \phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \zeta) \text{ est bornée pour tout } \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^d, \zeta \in \mathbb{R} \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \end{array} \right. \quad (2.17)$$

La fonction constitutive non linéaire $\psi : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_{\psi} > 0 \text{ telle que } |\psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\xi}_1, \theta_1) - \\ \psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\xi}_2, \theta_2)| \leq L_{\psi}(|\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2| + |\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2| + |\theta_1 - \theta_2|), \text{ pour} \\ \text{tout } \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in \mathbb{S}^d \text{ et } \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R} \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega, \\ \text{(b) L'application } \mathbf{x} \mapsto \psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}, \theta) \text{ est Lebesgue mesurable} \\ \text{sur } \Omega, \text{ pour tout } \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^d \text{ et } \theta \in \mathbb{R}, \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \mapsto \psi(\mathbf{x}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, 0) \text{ est dans } L^2(\Omega), \\ \text{(d) } \psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}, \theta) \text{ est bornée pour tout } \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^d, \theta \in \mathbb{R} \text{ p.p.} \\ \mathbf{x} \in \Omega. \end{array} \right. \quad (2.18)$$

La fonction de la compliance normale $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_\nu > 0 \text{ telle que } |p_\nu(\mathbf{x}, u_1) - p_\nu(\mathbf{x}, u_2)| \leq L_\nu |u_1 - u_2| \text{ pour tout } u_1, u_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(b) } (p_\nu(\mathbf{x}, u_1) - p_\nu(\mathbf{x}, u_2))(u_1 - u_2) \geq 0 \text{ pour tout } u_1, u_2 \in \mathbb{R}, \\ \text{p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \mapsto p_\nu(\mathbf{x}, u) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3 \\ \text{pour tout } u \in \mathbb{R}. \\ \text{(d) } p_\nu(\mathbf{x}, u) = 0 \text{ pour tout } u \leq 0, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (2.19)$$

La fonction du contact tangentiel $p_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_\tau > 0 \text{ telle que } |p_\tau(\mathbf{x}, u_1) - p_\tau(\mathbf{x}, u_2)| \leq L_\tau |u_1 - u_2| \text{ pour tout } u_1, u_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(b) L'application } \mathbf{x} \mapsto p_\tau(\mathbf{x}, u) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3 \\ \text{pour tout } u \in \mathbb{R}. \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \mapsto p_\tau(\mathbf{x}, 0) \text{ est dans } L^2(\Gamma_3). \end{array} \right. \quad (2.20)$$

De plus on suppose les régularités suivantes

$$\mathbf{f}_0 \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^d), \quad \mathbf{f}_2 \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2)^d), \quad (2.21)$$

$$\mathbf{q} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)),$$

$$\mathbf{u}_0 \in V, \quad (2.22)$$

$$\zeta_0 \in K, \quad (2.23)$$

$$\omega_0 \in L^2(\Gamma_3), \quad (2.24)$$

$$p_\nu(\cdot, u) \in L^2(\Gamma_3), p_\tau(\cdot, u) \in L^2(\Gamma_3), u \in \mathbb{R}, \quad (2.25)$$

$$g \in L^2(\Gamma_3), \quad g \geq 0, \text{ p.p. sur } \Gamma_3 \quad (2.26)$$

où K est l'ensemble des fonctions admissibles d'endommagement.

En utilisant le théorème de représentation de Riesz, nous définissons les applications linéaires $\mathbf{f} : [0, T] \rightarrow \mathbf{V}$ comme suit :

$$(\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_{\mathbf{V}} = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0(t) \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2(t) \cdot \mathbf{v} \, da \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad (2.27)$$

Ensuite, nous définissons les applications $a : E_1 \times E_1 \rightarrow \mathbb{R}$, la fonctionnelle d'usure $j : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \times L^2(\Gamma_3) \rightarrow \mathbb{R}$, respectivement par

$$a(\zeta, \xi) = \kappa \int_{\Omega} \nabla \zeta \cdot \nabla \xi \, dx, \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} j(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \omega) &= \\ &\int_{\Gamma_3} (p_{\nu}(\mathbf{u}_v - \omega - g) \mathbf{v}_{\nu}) \, da + \\ &\int_{\Gamma_3} (p_{\tau}(\mathbf{u}_v - \omega - g) \mathbf{v}_{\nu}) \|\mathbf{v}_{\tau} - \mathbf{v}^*\| \, da, \\ &\text{pour tout } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \omega \in L^2(\Gamma_3) \end{aligned} \quad (2.29)$$

La condition (2.24) implique

$$\mathbf{f} \in L^2(0, T; \mathbf{V}) \quad (2.30)$$

En utilisant la formule de Green, nous obtenons la formulation variationnelle du problème mécanique (2.1)-(2.13).

2.1.2 Formulation variationnelle

Probleme PV

Trouver le champ des déplacements $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow \mathbf{V}$, le champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma} : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$, la température $\theta : [0, T] \rightarrow V$, l'endommagement $\zeta : [0, T] \rightarrow E_1$, et l'usure $\omega : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$

tels que

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{G}(\varepsilon(\mathbf{u}), \zeta) + \mathcal{F}(\theta, \zeta), \text{ dans } \Omega \times (0, T) \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} & (\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{H}} + j(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}, \omega(t)) \\ & - j(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t), \omega(t)) \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_{\mathbf{V}} \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad \text{p.p. } t \in (0, T),$$

$$\begin{aligned} & (\dot{\theta}, \mathbf{v}) + a(\theta, \mathbf{v}) = (\psi(\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon(\mathbf{u}), \theta), \mathbf{v}) + (\mathbf{q}, \mathbf{v}) \\ & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} & (\dot{\zeta}(t), \xi - \zeta(t))_{L^2(\Omega)} + a(\zeta(t), \xi - \zeta(t)) \\ & \geq \left(\phi(\varepsilon(\mathbf{u}(t)), \zeta(t)), \xi - \zeta(t) \right)_{L^2(\Omega)}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\forall \xi \in K, \text{ p.p. } t \in (0, T),$$

$$\dot{\omega} = \kappa_{\omega} \alpha^* p_{\nu}(\mathbf{u}_v - \omega - g) \quad (2.35)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \theta(0) = \theta_0, \zeta(0) = \zeta_0, \quad (2.36)$$

$$\omega(0) = \omega_0, \quad (2.37)$$

on remarque que le problème variationnel PV est formulé en termes de champ de déplacement, de champ de contrainte, de température, d'endommagement et d'usure.

L'existence de la solution unique du problème PV est énoncée et prouvée dans la section suivante.

2.1.3 Existence et unicité de la solution

Le résultat principal de cette section est le suivant :

Théorème 2.1.1 (voir [6]) *Supposons que (2.14)–(2.26) sont satisfaites, alors il existe une*

solution unique du problème PV qui vérifie :

$$\mathbf{u} \in C^1(0, T; \mathbf{V}), \quad (2.38)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \in C(0, T; \mathcal{H}_1), \quad (2.39)$$

$$\theta \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; V), \quad (2.40)$$

$$\zeta \in H^1(0, T; E_0) \cap L^2(0, T; E_1), \quad (2.41)$$

$$\omega \in C^1(0, T; L^2(\Gamma_3)), \quad (2.42)$$

Les fonctions $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\sigma}$, θ , ζ et ω sont appelées la solution faible du problème de contact $\mathbf{P}$. On conclut que sous les hypothèses (2.14)-(2.26) le problème (2.1)–(2.13) possède une solution faible unique satisfaisant (2.38) (2.42) .

La démonstration du théorème 2.1.1 se fait en plusieurs étapes et est basée sur des résultats classiques des inéquations quasivariationnelles elliptiques, équations et inéquations variationnelles paraboliques et des arguments du point fixe de Banach. Nous supposons dans ce qui suit que (2.14) (2.26) sont vérifiées, et que C est une constante positive qui dépend de Ω , Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 , p_ν , p_τ , $\mathcal{A}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$, ψ , ϕ , κ mais ne dépend pas de t .

Afin de prouver le théorème, nous considérons pour $\omega \in \mathcal{C}^1(0, T; \mathcal{L}^2(\Gamma_3))$; $\eta \in \mathcal{C}(0, T; \mathcal{H})$; $h \in \mathcal{C}(0, T; \mathbf{V})$; $\mu \in \mathcal{C}(0, T; V')$ et $\chi \in \mathcal{C}(0, T; \mathcal{L}^2(\Gamma_3))$, les quatre problèmes auxiliaires suivants

La première étape

Soient $\omega \in \mathcal{C}^1(0, T; \mathcal{L}^2(\Gamma_3))$, $\eta \in \mathcal{C}(0, T; \mathcal{H})$ et $h \in \mathcal{C}(0, T; V)$ on considère le problème variationnel suivant :

Probleme $PV_{\omega\eta h}$

Posons $\mathbf{v}_{\omega\eta h} = \dot{\mathbf{u}}_{\omega\eta h}$, trouver la vitesse $\mathbf{v}_{\omega\eta h} : [0, T] \rightarrow \mathbf{V}$, le champ des contraintes $\sigma_{\omega\eta h} : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$ tels que

$$\sigma_{\omega\eta h} = \mathcal{A}\varepsilon(\mathbf{v}_{\omega\eta h}(t)) + \eta(t) \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} & (\sigma_{\omega\eta h}(t), \varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\mathbf{v}_{\omega\eta h}(t)))_{\mathcal{H}} + \\ & j(h(t), \mathbf{v}, \omega(t)) - j(h(t), \mathbf{v}_{\omega\eta h}, \omega(t)) \\ & \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\omega\eta h}(t))_{\mathbf{V}} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, t \in (0, T), \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\mathbf{u}_{\omega\eta h}(0) = \mathbf{u}_0$$

On a les résultats suivants pour le problème $\mathbf{PV}_{\omega\eta h}$.

Lemme 2.1.1 (voir [6]) *$PV_{\omega\eta h}$ possède une solution faible unique telle que $\mathbf{v}_{\omega\eta h} \in C(0, T; \mathbf{V})$, et $\sigma_{\omega\eta h} \in C(0, T; \mathcal{H}_1)$.*

Démonstration Nous définissons l'opérateur $A : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ tel que :

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{V}} = (\mathcal{A}\varepsilon(\mathbf{u}), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}}, \quad (2.45)$$

de (2.14)(a) et (2.45) on a :

$$\|A\mathbf{u} - A\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \leq L_A \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \quad (2.46)$$

Ce qui montre que $A : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ est Lipschitzien. Maintenant de (2.14)(b) et (2.45) on trouve que :

$$(A\mathbf{u} - A\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v})_{\mathbf{V}} \geq m_A \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}^2 \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \quad (2.47)$$

Ce qui montre que $A : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ est un opérateur fortement monotone sur $\mathbf{V}$. De plus, en utilisant le théorème de représentation de Riesz, nous pouvons définir les fonctions $\mathbf{F}_\eta : [0, T] \rightarrow \mathbf{V}$ par

$$\mathbf{F}_\eta(t) = \mathbf{f}(t) - \boldsymbol{\eta}(t) \quad \forall t \in [0, T],$$

Puisque A est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz sur $\mathbf{V}$ et $j(h(t), \mathbf{v}, \omega(t))$ est une fonctionnelle semi continue inférieurement, alors d'après un résultat classique sur les inéquations elliptiques (voir [13]), il existe une fonction unique $\mathbf{v}_{\omega\eta h}(t) \in \mathbf{V}$ telle que

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}\varepsilon(\mathbf{v}_{\omega\eta h}(t)), \varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\mathbf{v}_{\omega\eta h}(t)))_{\mathcal{H}} + \\ & j(h(t), \mathbf{v}, \omega(t)) - j(h(t), \mathbf{v}_{\omega\eta h}(t), \omega(t)) \\ & \geq (\mathbf{F}_\eta(t), \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\omega\eta h}(t))_{\mathbf{V}} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, t \in (0, T), \end{aligned} \quad (2.48)$$

Nous utilisons la relation (2.43), Les hypothèses (2.14), on obtient

$$\sigma_{\omega\eta h}(t) \in \mathcal{H}$$

On utilise (2.27) pour $\mathbf{f}$, on déduit

$$Div \sigma_{\omega\eta h}(t) + \mathbf{f}_0(t) = 0 \quad (2.49)$$

Avec l'hypothèse de régularité (2.21) on a

$$Div \sigma_{\omega\eta h}(t) \in H \quad \text{donc} \quad \sigma_{\omega\eta h}(t) \in \mathcal{H}_1$$

Soit maintenant $t_1, t_2 \in [0, T]$, notons $\eta(t_i) = \eta_i$, $\mathbf{f}(t_i) = \mathbf{f}_i$, $h(t_i) = h_i$, $\mathbf{v}_{\omega\eta h}(t_i) = \mathbf{v}_i$, $\sigma_{\omega\eta h}(t_i) = \sigma_i$, pour tout $i = 1, 2$. En utilisant la relation (2.48) nous trouvons que

$$\begin{aligned} & (A\mathbf{v}_1 - A\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_{\mathbf{V}} \leq (\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_{\mathbf{V}} + \\ & (\eta_2 - \eta_1, \varepsilon(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2))_{\mathcal{H}} + j(h_1, \mathbf{v}_2, \omega) - \\ & j(h_1, \mathbf{v}_1, \omega) + j(h_2, \mathbf{v}_1, \omega) - j(h_2, \mathbf{v}_2, \omega) \end{aligned} \quad (2.50)$$

De la définition de la fonctionnelle j donnée par (2.29) on a

$$\begin{aligned} & j(h_1, \mathbf{v}_2, \omega) - j(h_1, \mathbf{v}_1, \omega) + j(h_2, \mathbf{v}_1, \omega) - j(h_2, \mathbf{v}_2, \omega) \\ & = \int_{\Gamma_3} \{p_\nu(h_{1\nu} - \omega - g) - p_\nu(h_{2\nu} - \omega - g)\} (v_{2\nu} - v_{1\nu}) da \\ & + \int_{\Gamma_3} \{p_\tau(h_{1\tau} - \omega - g) - p_\tau(h_{2\tau} - \omega - g)\} (\|v_{2\tau} - v^*\| - \|v_{1\tau} - v^*\|) da \end{aligned}$$

Nous utilisons (2.19), (2.20) pour déduire que

$$\begin{aligned} j(h_1, \mathbf{v}_2, \omega) - j(h_1, \mathbf{v}_1, \omega) + j(h_2, \mathbf{v}_1, \omega) \\ - j(h_2, \mathbf{v}_2, \omega) \leq C \|h_1 - h_2\|_{\mathbf{V}} \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_{\mathbf{V}} \end{aligned} \quad (2.51)$$

L'estimation (2.47) et l'inégalité (2.51) combinées avec (2.50) nous donnent

$$m_A \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_{\mathbf{V}} \leq C (\|\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2\|_{\mathbf{V}} + \|\eta_1 - \eta_2\|_{\mathcal{H}} + \|h_1 - h_2\|_{\mathbf{V}}) \quad (2.52)$$

L'inégalité (2.52) et la régularité des fonctions $\mathbf{f}$, h et η montrent que

$$\mathbf{v}_{\omega\eta h} \in C(0, T; \mathbf{V})$$

De l'hypothèse (2.14) et la relation (2.43) nous avons

$$\|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\mathcal{H}} \leq C (\|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_{\mathbf{V}} + \|\eta_1 - \eta_2\|_{\mathcal{H}}) \quad (2.53)$$

et de (2.49) nous avons.

$$\text{Div} \sigma(t_i) + \mathbf{f}_0(t) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.54)$$

La régularité des fonctions η , $\mathbf{v}$, $\mathbf{f}_0$ et les relations (2.53), (2.54) montrent que

$$\sigma_{\omega\eta h} \in C(0, T; \mathcal{H}_1)$$

Soient $\omega \in C(0, T; \mathbf{L}^2(\Gamma_3))$, $h \in C(0, T; \mathbf{V})$ et soit $\eta \in C(0, T; \mathcal{H})$. Nous considérons l'opérateur suivant

$$\Lambda_{\omega\eta} : C(0, T; \mathbf{V}) \rightarrow C(0, T; \mathbf{V})$$

Défini par

$$\Lambda_{\omega\eta} h = \mathbf{u}_0 + \int_0^t \mathbf{v}_{\omega\eta h}(s) ds \quad \forall h \in C(0, T; \mathbf{V}) \quad (2.55)$$

Lemme 2.1.2 (voir [6]) *Supposons que les hypothèses (2.14)-(2.26) sont vérifiées. Alors l'opérateur $\Lambda_{\omega\eta}$ a un point fixe unique $h_{\omega\eta} \in C(0, T; \mathbf{V})$,*

Démonstration Soient $h_1, h_2 \in C(0, T; V)$ et soit $\eta \in C(0, T; \mathcal{H})$, on utilise la relation $\mathbf{v}_{\omega\eta h_i} = \mathbf{v}_i$ et $\sigma_{\omega\eta h_i} = \sigma_i$ pour $i = 1, 2$.

En utilisant des arguments similaires à ceux utilisés dans (2.52), nous trouvons que

$$m_{\mathcal{A}} \|\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)\|_{\mathbf{V}} \leq C \|h_1(t) - h_2(t)\|_{\mathbf{V}} \quad \forall t \in [0, T] \quad (2.56)$$

De (2.55) et (2.56) on a

$$\|\Lambda_{\omega\eta} h_1 - \Lambda_{\omega\eta} h_2\|_{\mathbf{V}} \leq C \int_0^t \|h_1(s) - h_2(s)\|_{\mathbf{V}} ds \quad \forall t \in [0, T] \quad (2.57)$$

Réitérant cette inégalité m fois, on obtient

$$\|\Lambda_{\omega\eta} h_1 - \Lambda_{\omega\eta} h_2\|_{C(0, T; \mathbf{V})} \leq \frac{C^m T^m}{m!} \|h_1 - h_2\|_{C(0, T; \mathbf{V})} \quad \forall t \in [0, T]$$

Ceci montre que pour m assez grand, l'opérateur $\Lambda_{\omega\eta}^m$ est une contraction dans l'espace de Banach. Ainsi, d'après le théorème du point fixe de Banach, l'opérateur $\Lambda_{\omega\eta}$ a un point fixe unique $h_{\omega\eta}^* \in C(0, T; \mathbf{V})$.

Pour $\eta \in \mathcal{C}(0, T; \mathcal{H})$, soit $h_{\omega\eta}^*$ le point fixe donné par le lemme ci-dessus, on pose $h_{\omega\eta}^* = \mathbf{v}_{\omega\eta^* h}$.

Dans ce qui suit, on note $(\mathbf{v}_{\omega\eta}, \sigma_{\omega\eta}) \in \mathcal{C}(0, T; \mathbf{V}) \times \mathcal{C}(0, T; \mathcal{H}_1)$ la solution unique du problème $\mathbf{P}\mathbf{V}_{\omega\eta h}$, i.e. $\mathbf{v}_{\omega\eta} = \mathbf{v}_{\omega\eta^* h}$, $\sigma_{\omega\eta} = \sigma_{\omega\eta^* h}$. Notons $\mathbf{u}_{\omega\eta} : [0, T] \rightarrow \mathbf{V}$ la fonction définie par

$$\mathbf{u}_{\omega\eta}(t) = \int_0^t \mathbf{v}(s) ds + \mathbf{u}_0, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.58)$$

Du lemme 2.1.1 en déduit que

$$\mathbf{u}_{\omega\eta} \in C^1(0, T; \mathbf{V})$$

Maintenant, considérons le problème suivant

Problème $\mathbf{P}\mathbf{V}_{\omega\eta}$

Trouver le champ de déplacement $\mathbf{u}_{\omega\eta} : [0, T] \rightarrow \mathbf{V}$ tel que pour tout $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned}
& (A\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_{\omega\eta}(t)), \varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_{\omega\eta}(t)))_{\mathcal{H}} + j(\mathbf{u}_{\omega\eta}(t), \mathbf{v}, \omega(t)) - \\
& j(\mathbf{u}_{\omega\eta}(t), \dot{\mathbf{u}}_{\omega\eta}(t), \omega(t)) + (\eta(t), \varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_{\omega\eta}(t)))_{\mathcal{H}} \\
& \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_{\omega\eta}(t))_{\mathbf{V}}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad t \in (0, T),
\end{aligned} \tag{2.59}$$

$$u_{\omega\eta}(0) = \mathbf{u}_0 \tag{2.60}$$

Nous avons le résultat suivant pour le problème $\mathbf{PV}_{\omega\eta}$.

Lemme 2.1.3 (voir [6]) *$PV_{\omega\eta}$ a une solution faible unique satisfaisant la régularité (2.1.1).*

Démonstration Pour chaque $\omega \in C(0, T; L^2(\Gamma_3))$ et $\eta \in C(0, T; \mathcal{H})$, on note $h_{\omega\eta} \in C(0, T; \mathbf{V})$ le point fixe obtenu dans le lemme 2.1.2 et soit $\mathbf{u}_{\omega\eta}$ la fonction définie par

$$\mathbf{u}_{\omega\eta}(t) = \mathbf{u}_0 + \int_0^t \mathbf{v}_{\omega\eta h_{\omega\eta}}(s) ds \quad \forall t \in [0, T] \tag{2.61}$$

Nous avons $\Lambda_{\omega\eta} h_{\omega\eta} = h_{\omega\eta}$ de (2.55) et (2.61) donc

$$\mathbf{u}_{\omega\eta} = h_{\omega\eta} \tag{2.62}$$

Par conséquent, en prenant $h = h_{\omega\eta}$ dans (2.44) et en utilisant (2.43), (2.61) et (2.62) nous voyons que $\mathbf{u}_{\omega\eta}$ est la solution unique au problème $\mathbf{PV}_{\omega\eta}$ satisfaisant la régularité (2.38).

La deuxième étape

Dans la deuxième étape, nous utilisons le champ de déplacement $\mathbf{u}_{\omega\eta}$ obtenu dans le lemme 2.1.3

soit $\mu \in \mathcal{C}(0, T; V')$, considérons le problème variationnel suivant.

Problème $\mathbf{PV}_{\omega\mu}$

Trouver la température $\theta_{\omega\mu} : [0, T] \rightarrow V$ qui est la solution du problème variationnel suivant

$$\begin{aligned}
& \left(\dot{\theta}_{\omega\mu}, \mathbf{v} \right) + a(\theta_{\omega\mu}, \mathbf{v}) = (\mu(t) + \mathbf{q}(t), \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V \\
& \theta_{\omega\mu}(0) = 0
\end{aligned} \tag{2.63}$$

Nous avons les résultats suivants.

Lemme 2.1.4 (voir [6]) *$PV_{\omega\mu}$ a une solution unique $\theta_{\omega\mu}$ qui satisfait la régularité (2.40).*

Démonstration En appliquant l'inégalité de Friedrichs-Poincaré, on peut trouver une constante $\beta' > 0$ telle que

$$\int_{\Omega} \|\xi\|^2 dx + \frac{\beta}{k_0} \int_{\Gamma} \|\xi\|^2 d\gamma \geq \beta' \int_{\Omega} \|\xi\|^2 dx, \quad \forall \xi \in \mathbf{V}. \quad (2.64)$$

Ainsi, nous obtenons

$$a_0(\xi, \xi) \geq c_1 \|\xi\|_V^2, \quad \forall \xi \in \mathbf{V}. \quad (2.65)$$

Où $c_1 = k_0 \min(1, \beta')/2$, ce qui implique que a_0 est V -elliptique. En conséquence, basée sur des arguments classiques d'analyse fonctionnelle concernant les équations paraboliques, l'équation variationnelle (2.63) a une solution unique $\theta_{\omega\mu}$ qui vérifie (2.40).

La troisième étape

Dans la troisième étape, nous utilisons le champ de déplacement $\mathbf{u}_{\omega\eta}$ obtenu dans le lemme 2.1.3

Nous considérons le problème suivant.

Problème $\mathbf{PV}_{\omega\chi}$

Trouver l'endommagement $\zeta_{\omega\chi} : [0, T] \rightarrow H^1(\Omega)$ tel que $\zeta_{\omega\chi}(t) \in K$ et

$$\begin{aligned} & (\dot{\zeta}_{\omega\chi}(t), \xi - \zeta_{\omega\chi}(t))_{L^2(\Omega)} + a(\zeta_{\omega\chi}(t), \xi - \zeta_{\omega\chi}(t)) \\ & \geq (\chi(t), \xi - \zeta_{\omega\chi}(t))_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \xi \in K, \quad a.e. t \in (0, T), \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$\zeta_{\omega\chi}(0) = 0 \quad (2.67)$$

Pour résoudre le problème $\mathbf{PV}_{\omega\chi}$, nous rappelons le résultat abstrait suivant pour les inégalités variationnelles paraboliques

Lemme 2.1.5 (voir [6]) *Il existe une solution unique $\zeta_{\omega\chi}$ du Problème $PV_{\omega\chi}$ et elle satisfait*

$$\zeta_{\omega\chi} \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)).$$

Démonstration On utilise (2.28), (2.31) et un résultat d'existence et d'unicité classiques sur les équations paraboliques (voir [3, P 124])

La quatrième étape

Dans la quatrième étape, nous utilisons le champ de déplacement $\mathbf{u}_{\omega\eta}$ obtenu dans le lemme 2.1.3

Nous considérons le problème de valeur initiale suivant.

Probleme $\mathbf{PV}_\omega$

Trouver l'usure $\omega \in \mathcal{C}^1(0, T; \mathcal{L}^2(\Gamma_3))$ telle que

$$\dot{\omega} = \kappa_\omega \alpha^* p_\nu(\mathbf{u}_v - \omega - g) \quad (2.68)$$

$$\omega(0) = \omega_0, \quad (2.69)$$

Considérons maintenant l'opérateur $\mathcal{L} : \mathcal{C}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \rightarrow \mathcal{C}(0, T; L^2(\Gamma_3))$ défini par

$$\mathcal{L}\omega(t) = -k_1 \mathbf{v}^* \int_0^t (\sigma_\omega)_V(s) ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.70)$$

Lemme 2.1.6 (voir [6]) *L'opérateur $\mathcal{L}$ a un point fixe unique ω^* qui satisfait*

$$\omega^* \in C(0, T; L^2(\Gamma_3))$$

Démonstration Soient $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{C}(0, T; L^2(\Gamma_3))$, et $t \in [0, T]$. Pour $i = 1, 2$; On note $(\mathbf{u}_i, \boldsymbol{\sigma}_i, \theta_i, \zeta_i)$, la solution au problème $\mathbf{PV}_\omega$

Utilisant la notation $\mathbf{u}_{\omega_i} = \mathbf{u}_i$, $\dot{\mathbf{u}}_{\omega_i} = \mathbf{v}_{\omega_i} = \mathbf{v}_i$, $\zeta_{\omega_i} = \zeta_i$, $\theta_{\omega_i} = \theta_i$ et $\sigma_{\omega_i} = \sigma_i$, où $\mathbf{u}_i = (\mathbf{u}_i^1, \mathbf{u}_i^2)$, $\zeta_i = (\zeta_i^1, \zeta_i^2)$.

De plus, nous notons dans la suite C diverses constantes positives pouvant dépendre de k_1 et de $\mathbf{v}^*$. En utilisant des arguments similaires à ceux utilisés dans le lemme 2.1.2, pour trouver que

$$\begin{aligned} & \int_0^t \|\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)\|_V^2 ds \\ & \leq C \left(\int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V^2 ds + \int_0^t \|\omega_1(s) - \omega_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 ds \right) \end{aligned} \quad (2.71)$$

Puisque $\mathbf{u}_1(0) = \mathbf{u}_2(0) = \mathbf{u}_0$ et on utilise (2.71) on obtient

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_V^2 &\leq C \int_0^t \|\omega_1(s) - \omega_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 ds \\ &\leq C \left(\int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V^2 ds + C \int_0^t \|\omega_1(s) - \omega_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 ds \right) \end{aligned} \quad (2.72)$$

En appliquant l'inégalité de Gronwall, on en déduit que

$$\|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_V^2 \leq C \int_0^t \|\omega_1(s) - \omega_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 ds \quad (2.73)$$

Donc, par (2.71), (2.73), on trouve que

$$\int_0^t \|\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)\|_V^2 ds \leq C \int_0^t \|\omega_1(s) - \omega_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 ds \quad (2.74)$$

D'autre part puisque

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_i) + \mathcal{G}(\varepsilon(\mathbf{u}_i), \zeta_i) + \mathcal{F}(\theta, \zeta_i) \quad (2.75)$$

Pour $i = 1, 2$ on utilise l'hypothèse (2.14)(b), (2.15), (2.16) et (2.17) pour obtenir pour $s \in [0, T]$

$$\|\sigma_1(s) - \sigma_2(s)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C \left(\|\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)\|_V^2 + \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V^2 \right) \quad (2.76)$$

Nous intégrons l'inégalité précédente par rapport au temps pour en déduire que

$$\begin{aligned} \int_0^t \|\sigma_1(s) - \sigma_2(s)\|_{\mathcal{H}}^2 ds \\ \leq C \left(\int_0^t \|\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)\|_V^2 ds + \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V^2 ds \right) \end{aligned} \quad (2.77)$$

Nous substituons (2.73) et (2.74) dans l'inégalité précédente pour trouver

$$\int_0^t \|\sigma_1(s) - \sigma_2(s)\|_{\mathcal{H}}^2 ds \leq C \int_0^t \|\omega_1(s) - \omega_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 ds \quad (2.78)$$

La définition de l'opérateur $\mathcal{L}$ donnée par (2.70) et l'estimation (2.74) nous donne

$$\|\mathcal{L}\omega_1(t) - \mathcal{L}\omega_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \leq C \int_0^t \|\omega_1(s) - \omega_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 ds \quad (2.79)$$

Réitérer cette inégalité n fois on trouve

$$\|\mathcal{L}^n \omega_1 - \mathcal{L}^n \omega_2\|_{\mathcal{C}(0,T;L^2(\Gamma_3))}^2 \leq \frac{C^n T^n}{n!} \|\omega_1(s) - \omega_2(s)\|_{\mathcal{C}(0,T;L^2(\Gamma_3))}^2 \quad (2.80)$$

Donc, pour n assez grand, $\mathcal{L}^n$ est un opérateur contractif sur l'espace de Banach $\mathcal{C}(0, T; L^2(\Gamma_3))$.
L'opérateur $\mathcal{L}$ a un point fixe unique $\omega^* \in \mathcal{C}(0, T; L^2(\Gamma_3))$.

Nous avons maintenant tous les arguments pour prouver le théorème 2.1.1

Démonstration En prenant en compte les résultats ci-dessus et les propriétés des opérateurs $\mathcal{G}$ et $\mathcal{F}$ des fonctions ψ et ϕ on peut considérer l'opérateur

$$\Lambda : \mathcal{C}(0, T; \mathcal{H} \times V' \times L^2(\Omega)) \rightarrow \mathcal{C}(0, T; \mathcal{H} \times V' \times L^2(\Omega))$$

$$\Lambda(\eta, \mu, \chi)(t) = (\Lambda_1(\eta, \mu, \chi)(t), \Lambda_2(\eta, \mu, \chi)(t), \Lambda_3(\eta, \mu, \chi)(t)), \quad (2.81)$$

Défini par

$$\Lambda_1(\eta, \mu, \chi)(t) = \mathcal{G}(\varepsilon(\mathbf{u}_{\omega\eta}), \zeta_{\omega\chi}) + \mathcal{F}(\theta_{\omega\mu}, \zeta_{\omega\chi}), \quad (2.82)$$

$$\Lambda_2(\eta, \mu, \chi)(t) = (\psi(\sigma_{\omega\eta}, \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_{\omega\eta}), \theta_{\omega\mu})), \quad (2.83)$$

$$\Lambda_3(\eta, \mu, \chi)(t) = 56(\phi(\varepsilon(\mathbf{u}_{\omega\eta}), \zeta_{\omega\chi})), \quad (2.84)$$

Ici pour tout $(\eta, \mu, \chi) \in \mathcal{C}(0, T; \mathcal{H} \times V' \times L^2(\Omega))$, $\mathbf{u}_\eta$, θ_μ , ζ_χ et ω représente le déplacement, la température, l'endommagement et l'usure obtenus dans le lemme2.1.3, le lemme2.1.4, le lemme2.1.5 et dans le lemme2.1.6 respectivement

$$\sigma_\omega = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_\omega) + \mathcal{G}(\varepsilon(\mathbf{u}_\omega), \zeta_\omega) + \mathcal{F}(\theta_\omega, \zeta_\omega) \quad (2.85)$$

Nous avons les résultats suivants.

Lemme 2.1.7 (voir [6]) *Supposons (2.40) vérifié. alors pour $(\eta, \mu, \chi) \in \mathcal{C}(0, T; \mathcal{H} \times V' \times L^2(\Omega))$, l'application*

$$\Lambda(\eta, \mu, \chi) : [0, T] \rightarrow \mathcal{H} \times V' \times L^2(\Omega)$$

a un élément unique

$$(\eta^*, \mu^*, \chi^*) \in \mathcal{C}(0, T; \mathcal{H} \times V' \times L^2(\Omega))$$

tel que $\Lambda(\eta^, \mu^*, \chi^*) = (\eta^*, \mu^*, \chi^*)$.*

Démonstration Soient $(\boldsymbol{\eta}_1, \mu_1, \chi_1), (\boldsymbol{\eta}_2, \mu_2, \chi_2) \in \mathcal{C}(0, T; \mathcal{H} \times V' \times L^2(\Omega))$, et $t \in [0, T]$. Nous utilisons les notations $\mathbf{u}_{\omega\eta_i} = \mathbf{u}_i, \dot{\mathbf{u}}_{\omega\eta_i} = \mathbf{v}_{\omega\eta_i} = \mathbf{v}_i, \zeta_{\omega\chi_i} = \zeta_i, \theta_{\omega\mu_i} = \theta_i$ et $\boldsymbol{\sigma}_{\omega\eta_i} = \boldsymbol{\sigma}_i$, pour $i = 1, 2$.

On utilise les relations (2.15)-(2.16), on obtient

$$\begin{aligned}
& \|\Lambda(\eta_1, \mu_1, \chi_1)(t) - \Lambda(\eta_2, \mu_2, \chi_2)(t)\|_{\mathcal{H} \times V' \times L^2(\Omega)} \\
& \leq L_{\mathcal{G}} \left(\|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_V + \|\zeta_1(t) - \zeta_2(t)\|_{L^2(\Omega)} \right) \\
& + L_{\mathcal{F}} \int_0^t \left(\|\boldsymbol{\sigma}_1(s) - \boldsymbol{\sigma}_2(s)\|_{\mathcal{H}} + L_{\mathcal{A}} \|\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)\|_V \right. \\
& \left. + \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V + \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{L^2(\Omega)} \right) ds \\
& + M_{\phi} \left(\|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_V + \|\zeta_1(t) - \zeta_2(t)\|_{L^2(\Omega)} \right) \\
& + L_{\psi} \left(\|\boldsymbol{\sigma}_1(t) - \boldsymbol{\sigma}_2(t)\|_{\mathcal{H}} + \|\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)\|_V + \right. \\
& \left. \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{L^2(\Omega)} \right)
\end{aligned} \tag{2.86}$$

Puisque

$$\mathbf{u}_i(t) = \int_0^t \mathbf{v}_i(s) ds + \mathbf{u}_0, \forall t \in [0, T], \tag{2.87}$$

on a

$$\|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_V \leq \int_0^t \|\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)\|_V ds, \tag{2.88}$$

En appliquant les inégalités de Young et de Hölder, (2.86) devient, de (2.88),

$$\begin{aligned}
& \|\Lambda(\eta_1, \mu_1, \chi_1)(t) - \Lambda(\eta_2, \mu_2, \chi_2)(t)\|_{\mathcal{H} \times V' \times L^2(\Omega)} \\
& \leq C \left(\|\zeta_1(t) - \zeta_2(t)\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^t (\|\boldsymbol{\sigma}_1(s) - \boldsymbol{\sigma}_2(s)\|_{\mathcal{H}} \right. \\
& \left. + \|\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)\|_V + \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V \right. \\
& \left. + \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{L^2(\Omega)}) ds \right).
\end{aligned} \tag{2.89}$$

Considérant que

$$\boldsymbol{\sigma}_i(t) = \mathcal{A}(\varepsilon(\mathbf{v}_i(t))) + \boldsymbol{\eta}_i(t), \forall t \in [0, T]. \tag{2.90}$$

donc

$$\begin{aligned}
& (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_*(t)), \varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_*(t)))_{\mathcal{H}} \\
& \leq j(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \omega) + j(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1, \omega) - j(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1, \omega) - j(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2, \omega)
\end{aligned} \tag{2.91}$$

Donc, en utilisant (2.14), (2.28), on en déduit

$$\begin{aligned}
& m_{\mathcal{A}} \|\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)\|_V^2 \\
& \leq C_0^2 \|\alpha\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \left(\|\lambda\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1 \right) \|\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)\|_V^2 \\
& + \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)\|_V^2
\end{aligned} \tag{2.92}$$

L'inégalité de Gronwall, implique

$$\|\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)\|_V^2 \leq C \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{\mathcal{H}}^2 \tag{2.93}$$

ensuite

$$\begin{aligned}
\int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V ds & \leq C \int_0^t \int_0^s \|\eta_1(r) - \eta_2(r)\|_{\mathcal{H}} dr ds \\
& \leq \int_0^T \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{\mathcal{H}} ds
\end{aligned} \tag{2.94}$$

Pour la température, si on prend la substitution $\mu = \mu_1$, $\mu = \mu_2$ dans (2.63) et en soustrayant les deux équations obtenues, on en déduit en choisissant $\mathbf{v} = \theta_1 - \theta_2$ comme fonction test

$$\begin{aligned}
& \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_1 \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_V^2 ds \\
& \leq \int_0^t \|\mu_1(s) - \mu_2(s)\|_{V'} \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_V ds, \forall t \in [0, T],
\end{aligned} \tag{2.95}$$

En utilisant les inégalités de Hölder et de Young, on en déduit que

$$\begin{aligned}
& \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_V^2 ds \\
& \leq C \int_0^t \|\mu_1(s) - \mu_2(s)\|_{V'}^2 ds, \forall t \in [0, T].
\end{aligned} \tag{2.96}$$

On utilise l'inclusion $L^2(\Omega) \subset V$, on obtient

$$\begin{aligned}
& \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\
& \leq C \int_0^t \|\mu_1(s) - \mu_2(s)\|_{V'}^2 ds, \forall t \in [0, T].
\end{aligned} \tag{2.97}$$

De cette inégalité, combinée à l'inégalité de Gronwall, on en déduit que

$$\|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^t \|\mu_1(s) - \mu_2(s)\|_{V'}^2 ds \tag{2.98}$$

Pour l'endommagement, de (2.66) on déduit que

$$\begin{aligned} & (\dot{\zeta}_1 - \dot{\zeta}_2, \zeta_1 - \zeta_2)_{L^2(\Omega)} + \mathbf{a}_1(\zeta_1 - \zeta_2, \zeta_1 - \zeta_2) \\ & \leq (\chi_1 - \chi_2, \zeta_1 - \zeta_2)_{L^2(\Omega)} \end{aligned} \quad (2.99)$$

On intègre l'inégalité précédente par rapport au temps, en utilisant les conditions initiales $\zeta_1(0) = \zeta_2(0) = \zeta_0$ et l'inégalité $\mathbf{a}_1(\zeta_1 - \zeta_2, \zeta_1 - \zeta_2) \geq 0$ pour trouver

$$\frac{1}{2} \|\zeta_1(t) - \zeta_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_0^t (\chi_1(s) - \chi_2(s), \zeta_1(s) - \zeta_2(s))_{L^2(\Omega)} ds, \quad (2.100)$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} & \|\zeta_1(t) - \zeta_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\ & \int_0^t \|\chi_1(s) - \chi_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \int_0^t \|\zeta_1(s) - \zeta_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds. \end{aligned} \quad (2.101)$$

Cette inégalité, combinée à l'inégalité de Gronwall, conduit à

$$\|\zeta_1(t) - \zeta_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^t \|\chi_1(s) - \chi_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.102)$$

En appliquant les inégalités précédentes, les estimations (2.98) et (2.102), nous substituons (2.89) pour obtenir

$$\begin{aligned} & \|\Lambda(\eta_1, \mu_1, \chi_1)(t) - \Lambda(\eta_2, \mu_2, \chi_2)(t)\|_{V \times L^2(\Omega)}^2 \leq \\ & C \int_0^T \|(\eta_1, \mu_1, \chi_1)(s) - (\eta_2, \mu_2, \chi_2)(s)\|_{V \times L^2(\Omega)}^2 ds. \end{aligned} \quad (2.103)$$

Ainsi, pour m suffisamment grand, Λ^m est une contraction sur $\mathcal{C}(0, T; V \times L^2(\Omega))$, et donc Λ a un point fixe unique dans cet espace de Banach.

Existence Soit $(\boldsymbol{\eta}^*, \mu^*, \chi^*) \in \mathcal{C}(0, T; \mathcal{H} \times V' \times L^2(\Omega))$ le point fixe de Λ défini par (2.81)-(2.84) et soit $h^* = h_{\eta^*}^*$ le point fixe de l'opérateur Λ_{η^*} donné par le lemme 2.1.1. notons

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_* &= \mathbf{u}_{\omega\eta^*}, \theta_* = \theta_{\omega\mu^*}, \zeta_* = \zeta_{\omega\chi^*}. \\ \boldsymbol{\sigma}_* &= \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_*) + \mathcal{G}(\varepsilon(\mathbf{u}_*), \zeta_*) + \mathcal{F}(\theta_*, \zeta_*) \end{aligned}$$

$\Lambda_1(\boldsymbol{\eta}^*, \mu^*, \chi^*) = \boldsymbol{\eta}^*$, $\Lambda_2(\boldsymbol{\eta}^*, \mu^*, \chi^*) = \mu^*$ et $\Lambda_3(\boldsymbol{\eta}^*, \mu^*, \chi^*) = \chi^*$, les définitions (2.81)-(2.84) montrent que (2.31)-(2.37) sont satisfaites. Ensuite, dans les lemmes 2.1.1, 2.1.3, 2.1.4, 2.1.5 et 2.1.6, les conditions de la régularité (2.38)-(2.42) suivent.

Unicité Soit ω^* le point fixe de l'opérateur $\mathcal{L}$ donné par (2.70). La solution unique $(\mathbf{u}_*, \boldsymbol{\sigma}_*, \theta_*, \zeta_*, \omega^*)$ est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ défini par (2.81)-(2.84) et la solution unique des problèmes $\mathbf{PV}_{\omega\eta h}$, $\mathbf{PV}_{\omega\mu}$, $\mathbf{PV}_{\omega\chi}$ et $\mathbf{PV}_{\omega}$ qui complète la preuve du théorème.

2.2 Le cas du contact entre deux corps thermoviscoélastiques avec endommagement et usure

Dans le deuxième cas de ce chapitre on considère un problème de contact quasistatique pour deux corps thermoviscoélastique. Le contact est frictionnel et bilatéral, ce qui entraîne l'usure et l'endommagement des deux surfaces. L'évolution de la fonction d'usure est décrite par *la loi d'Archard*. L'évolution de l'endommagement est décrit par une *inclusion de type parabolique*. Nous établissons une formulation variationnelle pour le modèle, puis on fait la démonstration de l'existence de la solution du problème.

La preuve est basée sur le résultat classique d'existence et unicité, sur les inégalités paraboliques, les équations différentielles et des arguments du point fixe.

2.2.1 Formulation du problème mécanique- hypothèses

Considérons deux corps thermo-viscoélastiques qui occupent deux domaines bornés Ω^1, Ω^2 de l'espace $\mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$). Pour chaque domaine Ω^ℓ ($\ell = 1, 2$) la frontière Γ^ℓ est supposée Lipschitzienne, partitionnée en trois parties disjointes $\Gamma_1^\ell, \Gamma_2^\ell$ et Γ_3 , correspondant aux conditions aux limites mécaniques, d'une part, et en deux parties ($S_1^\ell = \Gamma_1^\ell, S_2^\ell = \Gamma_2^\ell$) correspondant aux conditions thermiques. On suppose que $mes \Gamma_1^\ell > 0$. Les deux corps sont en contact bilatéral avec frottement le long de la partie Γ_3 .

Soit $T > 0$ et $[0, T]$ l'intervalle de temps considéré. On note par ν la normale unitaire sortante à Γ^ℓ . Les corps Ω^ℓ sont encastrés sur Γ_1^ℓ dans une structure fixe. Sur Γ_2^ℓ agissent des tractions surfaciques de densité $\mathbf{f}_2^\ell$, dans Ω^ℓ agissent des forces volumiques de densité $\mathbf{f}_0^\ell$. Et d'une source de chaleur externe possible appliquée dans $\Omega^\ell \times (0, T)$ donnée par les fonctions q_ℓ . On suppose que $\mathbf{f}_2^\ell$ et $\mathbf{f}_0^\ell$ varient très lentement par rapport au temps. Les deux corps sont en contact avec frottement et usure sur la partie Γ_3 . Nous prenons en considération les propriétés mécaniques des corps. On note par $\mathbf{u}^\ell$ les vecteurs du déplacement, et par σ^ℓ le tenseur des contraintes et

par ε^ℓ le tenseur des déformations

Problème P² Trouver le champ des déplacements $\mathbf{u} = (\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2) : [0, T] \rightarrow \mathbf{V}$, le champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma} = (\boldsymbol{\sigma}^1, \boldsymbol{\sigma}^2) : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$, la température $\theta = (\theta^1, \theta^2) : [0, T] \rightarrow V$, l'endommagement $\zeta = (\zeta^1, \zeta^2) : [0, T] \rightarrow E_1$, et l'usure $\omega : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ tels que

$$\boldsymbol{\sigma}^\ell = \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell) + \mathcal{G}^\ell(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell), \zeta^\ell) + \mathcal{F}^\ell(\theta^\ell, \zeta^\ell), \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \quad (2.104)$$

$$\dot{\theta}^\ell - \kappa_0 \Delta \theta^\ell = \psi^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell, \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell), \theta^\ell) + \mathbf{q}^\ell, \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \quad (2.105)$$

$$\dot{\zeta}^\ell - \kappa^\ell \Delta \zeta^\ell + \partial \psi_{K^\ell}(\zeta^\ell) \ni \phi^\ell(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell), \zeta^\ell) \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \quad (2.106)$$

$$\text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell + \mathbf{f}_0^\ell = 0 \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \quad (2.107)$$

$$\mathbf{u}^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\ell \times (0, T), \quad (2.108)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^\ell \cdot \boldsymbol{\nu}^\ell = \mathbf{f}_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_2^\ell \times (0, T), \quad (2.109)$$

$$\left. \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma}_\nu^1 = \boldsymbol{\sigma}_\nu^2 \equiv \boldsymbol{\sigma}_\nu, \\ \boldsymbol{\sigma}_\nu = p_\nu(\mathbf{u}_v - \omega - g), \end{array} \right\} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (2.110)$$

$$\left. \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma}_\tau^1 = -\boldsymbol{\sigma}_\tau^2 \equiv \boldsymbol{\sigma}_\tau, \\ \boldsymbol{\sigma}_\tau = -p_\tau(\mathbf{u}_v - \omega - g) \frac{\mathbf{v}^*}{\|\mathbf{v}^*\|}, \end{array} \right\} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (2.111)$$

$$\mathbf{u}_v^1 + \mathbf{u}_v^2 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (2.112)$$

$$\dot{\omega} = -\kappa_\omega \alpha^* \boldsymbol{\sigma}_\nu = \kappa_\omega \alpha^* p_\nu(\mathbf{u}_v - \omega - g), \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (2.113)$$

$$k_1 \frac{\partial \theta^\ell}{\partial \nu} + B^\ell \theta^\ell = 0, \quad \text{sur } \Gamma^\ell \times (0, T), \quad (2.114)$$

$$\frac{\partial \zeta^\ell}{\partial \nu^\ell} = 0, \quad \text{sur } \Gamma_1^\ell \times (0, T), \quad (2.115)$$

$$\mathbf{u}^\ell(0) = \mathbf{u}_0^\ell, \theta^\ell(0) = \theta_0^\ell, \quad \zeta^\ell(0) = \zeta_0^\ell, \quad \text{dans } \Omega^\ell, \quad (2.116)$$

$$\omega(0) = \omega_0, \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (2.117)$$

Les équations (2.104) et (2.105) représentent la loi de comportement thermo-viscoélastique, l'évolution d'endommagement est donnée par l'inclusion parabolique dans (2.106). L'équation

(2.107) est l'équation d'équilibre. Les équations (2.108) et (2.109) représentent les conditions aux limites déplacement-traction. Les équations (2.110) et (2.111) représente le contact bilatéral de frottement avec usure. Ensuite, l'équation (2.113) représente l'équation différentielle ordinaire qui décrit l'évolution de l'usure. Les équations (2.114) et (2.115) représentent respectivement, une condition aux limites de Fourier pour la température et une condition aux limites homogène de Neumann pour l'endommagement sur Γ^ℓ . les fonctions $\mathbf{u}_0^\ell$, θ_0^ℓ , ζ_0^ℓ et w_0^ℓ dans (2.116) et (2.117) sont les données initiales.

Pour obtenir la formulation variationnelle du problème (2.104)-(2.117) nous avons besoin d'introduire quelques notations et hypothèses supplémentaires. Ici et ci-dessous, $\mathbb{S}^d$ représente l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^d$. Nous rappelons que les produits internes et les normes correspondantes sur $\mathbb{S}^d$ et $\mathbb{R}^d$ sont donnés par

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell &= u_i^\ell \cdot v_i^\ell, & |\mathbf{v}^\ell| &= (\mathbf{v}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell)^{\frac{1}{2}}, & \forall \mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell \in \mathbb{R}^d, \\ \boldsymbol{\sigma}^\ell \cdot \boldsymbol{\tau}^\ell &= \sigma_{ij}^\ell \cdot \tau_{ij}^\ell, & |\boldsymbol{\tau}^\ell| &= (\boldsymbol{\tau}^\ell \cdot \boldsymbol{\tau}^\ell)^{\frac{1}{2}}, & \forall \boldsymbol{\sigma}^\ell, \boldsymbol{\tau}^\ell \in \mathbb{S}^d.\end{aligned}$$

Ici et ci-dessous, les indices i et j sont compris entre 1 et d . Maintenant, pour passer à la formulation variationnelle, nous avons besoin des espaces de fonction suivants :

$$\begin{aligned}H^\ell &= \{\mathbf{v}^\ell = (v_i^\ell); v_i^\ell \in L^2(\Omega^\ell)\}, & H_1^\ell &= \{\mathbf{v}^\ell = (v_i^\ell); v_i^\ell \in H^1(\Omega^\ell)\}, \\ \mathcal{H}^\ell &= \{\boldsymbol{\tau}^\ell = (\tau_{ij}^\ell); \tau_{ij}^\ell = \tau_{ji}^\ell \in L^2(\Omega^\ell)\}, & \mathcal{H}_1^\ell &= \{\boldsymbol{\tau}^\ell = (\tau_{ij}^\ell) \in \mathcal{H}^\ell; \text{div} \boldsymbol{\tau}^\ell \in H^\ell\}.\end{aligned}$$

Les espaces H^ℓ , H_1^ℓ , $\mathcal{H}^\ell$ et $\mathcal{H}_1^\ell$ sont de espaces réels de Hilbert donnés par

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{H^\ell} &= \int_{\Omega^\ell} \mathbf{u}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell dx, & (\mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{H_1^\ell} &= \int_{\Omega^\ell} \mathbf{u}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell dx + \int_{\Omega^\ell} \nabla \mathbf{u}^\ell \cdot \nabla \mathbf{v}^\ell dx, \\ (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \boldsymbol{\tau}^\ell)_{\mathcal{H}^\ell} &= \int_{\Omega^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \cdot \boldsymbol{\tau}^\ell dx, & (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \boldsymbol{\tau}^\ell)_{\mathcal{H}_1^\ell} &= \int_{\Omega^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \cdot \boldsymbol{\tau}^\ell dx + \int_{\Omega^\ell} \text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell \cdot \text{div} \boldsymbol{\tau}^\ell dx\end{aligned}$$

et les normes associées $\|\cdot\|_{H^\ell}$, $\|\cdot\|_{H_1^\ell}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^\ell}$, et $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_1^\ell}$ respectivement. Ici et ci-dessous nous

utilisons les notations

$$\begin{aligned}\nabla \mathbf{u}^\ell &= (u_{i,j}^\ell), \quad \varepsilon(\mathbf{u}^\ell) = (\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}^\ell)), \quad \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}^\ell) = \frac{1}{2}(u_{i,j}^\ell + u_{j,i}^\ell), \quad \forall \mathbf{u}^\ell \in H_1^\ell, \\ \text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell &= (\sigma_{ij,j}^\ell), \quad \forall \boldsymbol{\sigma}^\ell \in \mathcal{H}_1^\ell.\end{aligned}$$

Pour chaque élément $\mathbf{v}^\ell \in H_1^\ell$, nous utilisons aussi la notation $\mathbf{v}^\ell$ pour la trace de $\mathbf{v}^\ell$ sur Γ^ℓ et nous notons par v_ν^ℓ et $\mathbf{v}_\tau^\ell$ les composantes normales et tangentielles de $\mathbf{v}^\ell$ sur la frontière Γ^ℓ donné par

$$v_\nu^\ell = \mathbf{v}^\ell \cdot \boldsymbol{\nu}^\ell, \quad \mathbf{v}_\tau^\ell = \mathbf{v}^\ell - v_\nu^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell.$$

Soit H'_{Γ^ℓ} le dual de $H_{\Gamma^\ell} = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)^d$. Pour chaque élément $\boldsymbol{\sigma}^\ell \in \mathcal{H}_1^\ell$ soit $\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell$ l'élément de H'_{Γ^ℓ} donné par

$$(\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma^\ell} = (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + (\text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{H^\ell} \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in H_1^\ell.$$

Notons σ_ν^ℓ et $\boldsymbol{\sigma}_\tau^\ell$ les traces normales et tangentielles de $\boldsymbol{\sigma}^\ell \in \mathcal{H}_1^\ell$, respectivement. Si $\boldsymbol{\sigma}^\ell$ est continuellement différentiable sur $\Omega^\ell \cup \Gamma^\ell$, alors

$$\begin{aligned}\sigma_\nu^\ell &= (\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell) \cdot \boldsymbol{\nu}^\ell, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau^\ell = \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell - \sigma_\nu^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell, \\ (\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma^\ell} &= \int_{\Gamma^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell da\end{aligned}$$

pour tout $\mathbf{v}^\ell \in H_1^\ell$, où da est l'élément de mesure de surface.

Soit V^ℓ le sous-espace fermé de H_1^ℓ défini

$$V^\ell = \{\mathbf{v}^\ell \in H_1^\ell; \mathbf{v}^\ell = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\ell\}.$$

et soient

$$\begin{aligned}E_0^\ell &= L^2(\Omega^\ell), \\ E_1^\ell &= H^1(\Omega^\ell),\end{aligned}$$

Pour simplifier la notation, nous définissons les espaces produits

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= V^1 \times V^2, \\ H &= H^1 \times H^2, \quad H_1 = H_1^1 \times H_1^2, \\ \mathcal{H} &= \mathcal{H}^1 \times \mathcal{H}^2, \quad \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1^1 \times \mathcal{H}_1^2, \\ E_0 &= E_0^1 \times E_0^2, \quad E_1 = E_1^1 \times E_1^2,\end{aligned}$$

Les espaces $\mathbf{V}$, E_1 sont des espaces réels de Hilbert.

Dans l'étude du problème **P2**, nous considérons les hypothèses suivantes :

Les opérateurs de viscosité $\mathcal{A}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfont les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_{\mathcal{A}^\ell} > 0 \text{ telle que} \\ \quad |\mathcal{A}^\ell(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_1) - \mathcal{A}^\ell(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_2)| \leq L_{\mathcal{A}^\ell} |\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2| \\ \text{pour tout } \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega^\ell. \\ \text{(b) Il existe } m_{\mathcal{A}^\ell} > 0 \text{ telle que} \\ \quad (\mathcal{A}^\ell(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_1) - \mathcal{A}^\ell(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_2)) \cdot (\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2) \geq m_{\mathcal{A}^\ell} |\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2|^2 \\ \text{pour tout } \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega^\ell. \\ \text{(c) Les applications } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{A}^\ell(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \text{ sont lebesgue mesurables sur } \Omega^\ell, \\ \text{pour tout } \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(d) Les applications } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{A}^\ell(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \text{ sont continues sur } \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \\ \Omega^\ell. \end{array} \right. \quad (2.118)$$

Les opérateurs d'élasticité $\mathcal{G}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfont les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_{\mathcal{G}^\ell} > 0 \text{ telle que} \\ \\ |\mathcal{G}^\ell(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_1, \zeta_1) - \mathcal{G}^\ell(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_2, \zeta_2)| \leq L_{\mathcal{G}^\ell} (|\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2| + |\zeta_1 - \zeta_2|) \\ \\ \text{pour tout } \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ et pour tout } \zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega^\ell. \\ \\ \text{(b) Les applications } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{G}^\ell(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \zeta) \text{ sont Lebesgue mesurables sur} \\ \Omega^\ell, \text{ pour tout } \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^d, \text{ et pour tout } \zeta \in \mathbb{R}. \\ \\ \text{(c) Les applications } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{G}^\ell(\mathbf{x}, \mathbf{0}, 0) \text{ sont dans } \mathcal{H}^\ell. \end{array} \right. \quad (2.119)$$

Les opérateurs de la dilatation thermique $\mathcal{F}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_{\mathcal{F}^\ell} > 0 \text{ telle que} \\ \\ |\mathcal{F}^\ell(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1, \zeta_1) - \mathcal{F}^\ell(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_2, \zeta_2)| \leq L_{\mathcal{F}^\ell} (|\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\theta}_2| + |\zeta_1 - \zeta_2|) \\ \\ \text{pour tout } \boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2 \in \mathbb{R}, \text{ et pour tout } \zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega^\ell. \\ \\ \text{(b) Les applications } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{F}^\ell(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, \zeta) \text{ sont Lebesgue mesurables sur} \\ \Omega^\ell, \text{ pour tout } \boldsymbol{\theta}, \zeta \in \mathbb{R}. \\ \\ \text{(c) Les applications } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{F}^\ell(\mathbf{x}, \mathbf{0}, 0) \text{ sont dans } \mathcal{H}^\ell. \end{array} \right. \quad (2.120)$$

La fonctions sources d'endommagement $\phi^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfont

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_{\phi^\ell} > 0 \text{ telle que} \\ \\ |\phi^\ell(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_1, \zeta_1) - \phi^\ell(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_2, \zeta_2)| \leq L_{\phi^\ell} (|\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2| + |\zeta_1 - \zeta_2|) \\ \\ \text{pour tout } \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in \mathbb{S}^d \text{ et } \zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{R} \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega^\ell, \\ \\ \text{(b) Les applications } \mathbf{x} \mapsto \phi^\ell(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \zeta) \text{ sont Lebesgue mesurable sur} \\ \Omega^\ell, \text{ pour tout } \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^d \text{ et } \zeta \in \mathbb{R}, \\ \\ \text{(c) Les applications } \mathbf{x} \mapsto \phi^\ell(\mathbf{x}, \mathbf{0}, 0) \text{ sont dans } L^2(\Omega^\ell), \\ \\ \text{(d) } \phi^\ell(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \zeta) \text{ sont bornées pour tout } \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^d, \zeta \in \mathbb{R} \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega^\ell. \end{array} \right. \quad (2.121)$$

Les fonctions constitutives non linéaires $\psi^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_{\psi^\ell} > 0 \text{ telle que} \\ | \psi^\ell(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\xi}_1, \theta_1) - \psi^\ell(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\xi}_2, \theta_2) | \leq L_{\psi^\ell} (|\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2| + |\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2| + |\theta_1 - \theta_2|) \\ \text{pour tout } \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in \mathbb{S}^d \text{ et } \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R} \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega^\ell, \\ \text{(b) Les applications } \mathbf{x} \mapsto \psi^\ell(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}, \theta) \text{ sont Lebesgue mesurables sur } \Omega^\ell \\ \text{pour tout } \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^d \text{ et } \theta \in \mathbb{R}, \\ \text{(c) Les applications } \mathbf{x} \mapsto \psi^\ell(\mathbf{x}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, 0) \text{ sont dans } L^2(\Omega^\ell), \\ \text{(d) } \psi^\ell(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}, \theta) \text{ sont bornées pour tout } \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^d, \theta \in \mathbb{R} \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega^\ell. \end{array} \right. \quad (2.122)$$

La fonction de la compliance normale $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_\nu > 0 \text{ telle que} \\ |p_\nu(\mathbf{x}, u_1) - p_\nu(\mathbf{x}, u_2)| \leq L_\nu |u_1 - u_2| \\ \text{pour tout } u_1, u_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(b) } (p_\nu(\mathbf{x}, u_1) - p_\nu(\mathbf{x}, u_2))(u_1 - u_2) \geq 0 \text{ pour tout } u_1, u_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \mapsto p_\nu(\mathbf{x}, u) \text{ sont Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3 \text{ pour tout} \\ u \in \mathbb{R}. \\ \text{(d) } p_\nu(\mathbf{x}, u) = 0 \text{ pour tout } u \leq 0, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (2.123)$$

La fonction du contact tangentiel $p_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_\tau > 0 \text{ telle que} \\ |p_\tau(\mathbf{x}, u_1) - p_\tau(\mathbf{x}, u_2)| \leq L_\tau |u_1 - u_2| \\ \text{pour tout } u_1, u_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega^\ell. \\ \text{(b) L'application } \mathbf{x} \mapsto p_\tau(\mathbf{x}, u) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3 \text{ pour tout} \\ u \in \mathbb{R}. \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \mapsto p_\tau(\mathbf{x}, 0) \text{ est dans } L^2(\Gamma_3). \end{array} \right. \quad (2.124)$$

De plus on suppose les régularités suivantes

$$\mathbf{f}_0^\ell \in L^2(0, T; L^2(\Omega^\ell)^d), \quad \mathbf{f}_2^\ell \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2^\ell)^d), \quad (2.125)$$

$$\mathbf{q} \in L^2(0, T; L^2(\Omega^\ell)),$$

$$\mathbf{u}_0^\ell \in V^\ell, \quad (2.126)$$

$$\zeta_0^\ell \in K^\ell, \quad (2.127)$$

$$\omega_0 \in L^2(\Gamma_3), \quad (2.128)$$

$$p_\nu(\cdot, u) \in L^2(\Gamma_3), p_\tau(\cdot, u) \in L^2(\Gamma_3), u \in \mathbb{R}, \quad (2.129)$$

$$g \in L^2(\Gamma_3), \quad g \geq 0, \text{ p.p. sur } \Gamma_3 \quad (2.130)$$

où K^ℓ est l'ensemble des fonctions admissibles d'endommagement.

En utilisant le théorème de représentation de Riesz, nous définissons les applications linéaires $\mathbf{f} = (\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2) : [0, T] \rightarrow \mathbf{V}$ comme suit :

$$(\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_{\mathbf{V}} = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \mathbf{f}_0^\ell(t) \cdot \mathbf{v}^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} \mathbf{f}_2^\ell(t) \cdot \mathbf{v}^\ell da \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad (2.131)$$

Ensuite, nous définissons les applications $a : E_1 \times E_1 \rightarrow \mathbb{R}$, la fonctionnelle d'usure $j : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \times L^2(\Gamma_3) \rightarrow \mathbb{R}$, respectivement par

$$a(\zeta, \xi) = \sum_{\ell=1}^2 \kappa^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla \zeta^\ell \cdot \nabla \xi^\ell dx, \quad (2.132)$$

$$j(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \omega) = \int_{\Gamma_3} \left(p_\nu(\mathbf{u}_v - \omega - g) \mathbf{v}_\nu \right) da + \int_{\Gamma_3} \left(p_\tau(\mathbf{u}_v - \omega - g) \mathbf{v}_\nu \right) \|\mathbf{v}_\tau - \mathbf{v}^*\| da, \quad (2.133)$$

pour tout $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \omega \in L^2(\Gamma_3)$.

La condition (2.128) implique

$$\mathbf{f} \in L^2(0, T; \mathbf{V}) \quad (2.134)$$

En utilisant la formule de Green, nous obtenons la formulation variationnelle du problème mécanique (2.104)–(2.117).

2.2.2 Formulation variationnelle

Probleme PV

Trouver le champ des déplacement $\mathbf{u} = (\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2) : [0, T] \rightarrow \mathbf{V}$, le champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma} = (\boldsymbol{\sigma}^1, \boldsymbol{\sigma}^2) : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$, la temperature $\theta = (\theta^1, \theta^2) : [0, T] \rightarrow V$, l'endommagement $\zeta = (\zeta^1, \zeta^2) : [0, T] \rightarrow E_1$, et l'usure $\omega : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ tels que

$$\boldsymbol{\sigma}^\ell = \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell) + \mathcal{G}^\ell(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell), \zeta^\ell) + \mathcal{F}^\ell(\theta^\ell, \zeta^\ell), \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \quad (2.135)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} + j(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}, \omega(t)) \\ & - j(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t), \omega(t)) \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_{\mathbf{V}} \end{aligned} \quad (2.136)$$

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad \text{p.p. } t \in (0, T),$$

$$\sum_{\ell=1}^2 (\dot{\theta}^\ell, \mathbf{v}) + a(\theta, \mathbf{v}) = \sum_{\ell=1}^2 (\psi^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{u}^\ell), \theta^\ell), \mathbf{v}) \quad (2.137)$$

$$+ \sum_{\ell=1}^2 (\mathbf{q}^\ell, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V},$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 (\dot{\zeta}^\ell(t), \xi^\ell - \zeta^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} + a(\zeta(t), \xi - \zeta(t)) \\ & \geq \sum_{\ell=1}^2 \left(\phi^\ell(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell(t)), \zeta^\ell(t)), \xi^\ell - \zeta^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)}, \end{aligned} \quad (2.138)$$

$$\forall \xi \in K, \text{ p.p. } t \in (0, T),$$

$$\dot{\omega} = \kappa_\omega \alpha^* p_\nu(\mathbf{u}_v - \omega - g) \quad (2.139)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \theta(0) = \theta_0, \zeta(0) = \zeta_0, \quad (2.140)$$

$$\omega(0) = \omega_0, \quad (2.141)$$

On remarque que le problème variationnel **PV** est formulé en termes de champ de déplacement, de champ de contrainte, de température, d'endommagement et d'usure.

L'existence de la solution unique du problème **PV** est énoncée et prouvée dans la section suivante

2.2.3 Existence et unicité de la solution

Le résultat principal de cette section est le suivant :

Théorème 2.2.1 (voir[7]) *Supposons que (2.118)–(2.130) sont satisfaites, alors il existe une solution unique du problème PV.*

De plus, la solution satisfait

$$\mathbf{u} \in C^1(0, T; \mathbf{V}), \quad (2.142)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \in C(0, T; \mathcal{H}_1), \quad (2.143)$$

$$\theta \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; V), \quad (2.144)$$

$$\zeta \in H^1(0, T; E_0) \cap L^2(0, T; E_1), \quad (2.145)$$

$$\omega \in C^1(0, T; L^2(\Gamma_3)), \quad (2.146)$$

Les fonctions $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\sigma}$, θ , ζ et ω vérifiant (2.142)–(2.146) sont appelées la solution faible du problème de contact **P**. On conclut que sous les hypothèses (2.118)–(2.130), le problème (2.104)–(2.117) possède une solution faible unique satisfaisant (2.125)–(2.130).

La démonstration du théorème 2.2.1 se fait en plusieurs étapes et est basée sur des résultats classiques des inéquations quasivariationnelles elliptiques, équations et inéquations variationnelles paraboliques et des arguments du point fixe de Banach. Nous supposons dans ce qui suit que (2.118)–(2.130) sont vérifiées, et C est une constante positive qui dépend de Ω^ℓ , Γ_1^ℓ , Γ_1^ℓ , Γ_3 , p_ν , p_τ , $\mathcal{A}^\ell$, $\mathcal{G}^\ell$, $\mathcal{F}^\ell$, ψ^ℓ , ϕ^ℓ , κ^ℓ . Mais ne dépend pas de t .

Afin de prouver le théorème, nous considérons pour $\omega \in C^1(0, T; \mathcal{L}^2(\Gamma_3))$; $\eta \in C(0, T; \mathcal{H})$; $h \in C(0, T; \mathbf{V})$; $\mu \in C(0, T; V')$ et $\chi \in C(0, T; \mathcal{L}^2(\Gamma_3))$, les quatres problèmes auxiliaires suivants

La première étape

Soient $\omega \in \mathcal{C}^1(0, T; \mathcal{L}^2(\Gamma_3))$, $\eta \in \mathcal{C}(0, T; \mathcal{H})$ et $h \in \mathcal{C}(0, T; V)$

On considère le problème variationnel suivant :

Problème $\mathbf{PV}_{\omega\eta h}$

Posons $\mathbf{v}_{\omega\eta h} = \dot{\mathbf{u}}_{\omega\eta h}$ et $\mathbf{u}_{\omega\eta h} = (\mathbf{u}_{\omega\eta h}^1, \mathbf{u}_{\omega\eta h}^2)$, trouver la vitesse $\mathbf{v}_{\omega\eta h} : [0, T] \rightarrow \mathbf{V}$, le champ des contraintes $\sigma_{\omega\eta h} : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$ tels que

$$\sigma_{\omega\eta h}^\ell = \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{v}_{\omega\eta h}^\ell(t)) + \eta^\ell(t) \quad (2.147)$$

$$\sum_{\ell=1}^2 (\sigma_{\omega\eta h}^\ell(t), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\mathbf{v}_{\omega\eta h}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} + j(h(t), \mathbf{v}, \omega(t)) - j(h(t), \mathbf{v}_{\omega\eta h}, \omega(t)) \quad (2.148)$$

$$\geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\omega\eta h}(t))_{\mathbf{V}} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, t \in (0, T),$$

$$\mathbf{u}_{\omega\eta h}(0) = \mathbf{u}_0$$

On a les résultats suivants pour le problème $\mathbf{PV}_{\omega\eta h}$.

Lemme 2.2.1 (voir[7]) *$PV_{\omega\eta h}$ possède une solution faible unique telles que $\mathbf{v}_{\omega\eta h} \in C(0, T; \mathbf{V})$, et $\sigma_{\omega\eta h} \in C(0, T; \mathcal{H}_1)$.*

Démonstration Nous définissons les opérateurs $A : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ tels que :

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{V}} = \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell}, \quad (2.149)$$

de (2.118)(a) et (2.149) on a :

$$\|A\mathbf{u} - A\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \leq L_A \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \quad (2.150)$$

Ce qui montre que $A : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ est Lipschitzien.

Maintenant par (2.118)(b) et (2.149) on trouve que :

$$(A\mathbf{u} - A\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v})_{\mathbf{V}} \geq m_A \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}^2 \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \quad (2.151)$$

Ce qui montre que $A : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ est un opérateur fortement monotone sur $\mathbf{V}$.

De plus, en utilisant le théorème de représentation de Riesz, nous pouvons définir les fonctions $\mathbf{F}_\eta : [0, T] \rightarrow \mathbf{V}$ par

$$\mathbf{F}_\eta(t) = \mathbf{f}(t) - \boldsymbol{\eta}(t) \quad \forall t \in [0, T],$$

Puisque A est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz sur $\mathbf{V}$ et que $j(h(t), \mathbf{v}, \omega(t))$ est une fonctionnelle semi continue inférieurement, alors d'après un résultat classique sur les inéquations elliptiques (voir [13]), il existe une fonction unique $\mathbf{v}_{\omega\eta h}(t) \in \mathbf{V}$ telle que

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{v}_{\omega\eta h}^\ell(t)), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\mathbf{v}_{\omega\eta h}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} + j(h(t), \mathbf{v}, \omega(t)) - j(h(t), \mathbf{v}_{\omega\eta h}(t), \omega(t)) \\ & \geq (\mathbf{F}_\eta(t), \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\omega\eta h}(t))_{\mathbf{V}} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, t \in (0, T), \end{aligned} \quad (2.152)$$

Nous utilisons la relation (2.147), les hypothèses (2.118), on obtient

$$\sigma_{\omega\eta h}(t) \in \mathcal{H}$$

On utilise (2.131) pour $\mathbf{f}$, on déduit

$$\text{Div} \sigma_{\omega\eta h}(t) + \mathbf{f}_0(t) = 0 \quad (2.153)$$

Avec l'hypothèse de régularité (2.125) on obtient

$$\text{Div} \sigma_{\omega\eta h}(t) \in H \text{ donc } \sigma_{\omega\eta h}(t) \in \mathcal{H}_1$$

Soit maintenant $t_1, t_2 \in [0, T]$, et notons $\eta(t_i) = \eta_i$, $\mathbf{f}(t_i) = \mathbf{f}_i$, $h(t_i) = h_i$, $\mathbf{v}_{\omega\eta h}(t_i) = \mathbf{v}_i$, $\sigma_{\omega\eta h}(t_i) = \sigma_i$, pour $i = 1, 2$.

En utilisant la relation (2.152), on trouve que

$$\begin{aligned} & (A\mathbf{v}_1 - A\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_{\mathbf{V}} \\ & \leq (\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_{\mathbf{V}} + (\eta_2 - \eta_1, \varepsilon(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2))_{\mathcal{H}} \\ & + j(h_1, \mathbf{v}_2, \omega) - j(h_1, \mathbf{v}_1, \omega) + j(h_2, \mathbf{v}_1, \omega) - j(h_2, \mathbf{v}_2, \omega) \end{aligned} \quad (2.154)$$

De la définition de la fonctionnelle j donnée par (2.133) on a

$$\begin{aligned} & j(h_1, \mathbf{v}_2, \omega) - j(h_1, \mathbf{v}_1, \omega) + j(h_2, \mathbf{v}_1, \omega) - j(h_2, \mathbf{v}_2, \omega) \\ &= \int_{\Gamma_3} \{p_\nu(h_{1\nu} - \omega - g) - p_\nu(h_{2\nu} - \omega - g)\} (v_{2\nu} - v_{1\nu}) da \\ &+ \int_{\Gamma_3} \{p_\tau(h_{1\tau} - \omega - g) - p_\tau(h_{2\tau} - \omega - g)\} (\|v_{2\tau} - v^*\| - \|v_{1\tau} - v^*\|) da \end{aligned}$$

Nous utilisons (2.123), (2.124) pour déduire que

$$\begin{aligned} & j(h_1, \mathbf{v}_2, \omega) - j(h_1, \mathbf{v}_1, \omega) + j(h_2, \mathbf{v}_1, \omega) - j(h_2, \mathbf{v}_2, \omega) \\ & \leq C \|h_1 - h_2\|_{\mathbf{V}} \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_{\mathbf{V}} \end{aligned} \quad (2.155)$$

L'estimation (2.151) et l'inégalité (2.155) combinées avec (2.154) nous donnent

$$m_A \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_{\mathbf{V}} \leq C (\|\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2\|_{\mathbf{V}} + \|\eta_1 - \eta_2\|_{\mathcal{H}} + \|h_1 - h_2\|_{\mathbf{V}}) \quad (2.156)$$

L'inégalité (2.156) et la régularité des fonctions $\mathbf{f}$, h et η montrent que

$$\mathbf{v}_{\omega\eta h} \in C(0, T; \mathbf{V})$$

De l'hypothèse (2.118) et la relation (2.147) nous avons

$$\|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\mathcal{H}} \leq C (\|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_{\mathbf{V}} + \|\eta_1 - \eta_2\|_{\mathcal{H}}) \quad (2.157)$$

et de (2.153) nous avons..

$$Div \sigma(t_i) + \mathbf{f}_0(t) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.158)$$

La régularité des fonctions η , $\mathbf{v}$, $\mathbf{f}_0$ et les relations (2.157)-(2.158) montrent que

$$\sigma_{\omega\eta h} \in C(0, T; \mathcal{H}_1)$$

Soient $\omega \in C(0, T; \mathbf{L}^2(\Gamma_3))$, $h \in C(0, T; \mathbf{V})$ et soit $\eta \in C(0, T; \mathcal{H})$. Nous considérons l'opérateur suivant

$$\Lambda_{\omega\eta} : C(0, T; \mathbf{V}) \rightarrow C(0, T; \mathbf{V})$$

Défini par

$$\Lambda_{\omega\eta}h = \mathbf{u}_0 + \int_0^t \mathbf{v}_{\omega\eta h}(s)ds \quad \forall h \in C(0, T; \mathbf{V}) \quad (2.159)$$

Lemme 2.2.2 (voir[7]) *Supposons que les hypothèses (2.118)-(2.130) sont vérifiées. Alors l'opérateur $\Lambda_{\omega\eta}$ a un point fixe unique $h_{\omega\eta} \in C(0, T; \mathbf{V})$,*

Démonstration Soient $h_1, h_2 \in C(0, T; V)$ et soit $\eta \in C(0, T; \mathcal{H})$

On utilise la relation $\mathbf{v}_{\omega\eta h_i} = \mathbf{v}_i$ et $\sigma_{\omega\eta h_i} = \sigma_i$ pour $i = 1, 2$.

En utilisant des arguments similaires à ceux utilisés dans (2.156) nous trouvons que

$$m_{\mathcal{A}} \|\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)\|_{\mathbf{V}} \leq C \|h_1(t) - h_2(t)\|_{\mathbf{V}} \quad \forall t \in [0, T] \quad (2.160)$$

De (2.159) et (2.160) on a

$$\|\Lambda_{\omega\eta}h_1 - \Lambda_{\omega\eta}h_2\|_{\mathbf{V}} \leq C \int_0^t \|h_1(s) - h_2(s)\|_{\mathbf{V}} ds \quad \forall t \in [0, T] \quad (2.161)$$

Réitérant cette inégalité m fois, on obtient

$$\|\Lambda_{\omega\eta}h_1 - \Lambda_{\omega\eta}h_2\|_{C(0, T; \mathbf{V})} \leq \frac{C^m T^m}{m!} \|h_1 - h_2\|_{C(0, T; \mathbf{V})} \quad \forall t \in [0, T]$$

Ceci montre que pour m assez grand, l'opérateur $\Lambda_{\omega\eta}^m$ est une contraction dans l'espace de Banach. Ainsi, d'après le théorème à du point fixe de Banach, l'opérateur $\Lambda_{\omega\eta}$ a un point fixe unique $h_{\omega\eta}^* \in C(0, T; \mathbf{V})$.

Pour $\eta \in \mathcal{C}(0, T; \mathcal{H})$, soit $h_{\omega\eta}^*$ le point fixe donné par le lemme ci-dessus, soit $h_{\omega\eta}^* = \mathbf{v}_{\omega\eta^* h}$. Dans la suite, on note $(\mathbf{v}_{\omega\eta}, \sigma_{\omega\eta}) \in \mathcal{C}(0, T; \mathbf{V}) \times \mathcal{C}(0, T; \mathcal{H}_1)$ la solution unique du problème $\mathbf{P}\mathbf{V}_{\omega\eta h}$, i.e. $\mathbf{v}_{\omega\eta} = \mathbf{v}_{\omega\eta^* h}$, $\sigma_{\omega\eta} = \sigma_{\omega\eta^* h}$. Notons $\mathbf{u}_{\omega\eta} : [0, T] \rightarrow \mathbf{V}$ la fonction définie par

$$\mathbf{u}_{\omega\eta}(t) = \int_0^t \mathbf{v}(s)ds + \mathbf{u}_0, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.162)$$

Du lemme 2.2.1 On déduit que

$$\mathbf{u}_{\omega\eta} \in C^1(0, T; \mathbf{V})$$

Maintenant, considérons le problème suivant

Problème $\mathbf{PV}_{\omega\eta}$

Trouver le champ de déplacement $\mathbf{u}_{\omega\eta} : [0, T] \rightarrow \mathbf{V}$ tel que pour tout $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 (A^\ell \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_{\omega\eta}^\ell(t)), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_{\omega\eta}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} \\ & + j(\mathbf{u}_{\omega\eta}^\ell(t), \mathbf{v}, \omega(t)) - j(\mathbf{u}_{\omega\eta}^\ell(t), \dot{\mathbf{u}}_{\omega\eta}^\ell(t), \omega(t)) + (\eta(t)^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_{\omega\eta}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} \end{aligned} \quad (2.163)$$

$$\geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_{\omega\eta}^\ell(t))_{\mathbf{V}} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, t \in (0, T),$$

$$\mathbf{u}_{\omega\eta}(0) = \mathbf{u}_0 \quad (2.164)$$

Nous avons le résultat suivant pour le problème $\mathbf{PV}_{\omega\eta}$.

Lemme 2.2.3 (voir[7]) $PV_{\omega\eta}$ a une solution faible unique satisfaisant la régularité (2.142).

Démonstration Pour chaque $\omega \in C(0, T; L^2(\Gamma_3))$ et $\eta \in C(0, T; \mathcal{H})$, on note $h_{\omega\eta} \in C(0, T; \mathbf{V})$ le point fixe obtenu dans le lemme 2.2.2 et soit $\mathbf{u}_{\omega\eta}$ la fonction définie par

$$\mathbf{u}_{\omega\eta}(t) = \mathbf{u}_0 + \int_0^t \mathbf{v}_{\omega\eta h_{\omega\eta}}(s) ds \quad \forall t \in [0, T] \quad (2.165)$$

Nous avons $\Lambda_{\omega\eta} h_{\omega\eta} = h_{\omega\eta}$ de (2.159) et (2.165) donc

$$\mathbf{u}_{\omega\eta} = h_{\omega\eta} \quad (2.166)$$

Par conséquent, en prenant $h = h_{\omega\eta}$ dans (2.148) et en utilisant (2.147), (2.165) et (2.166) nous voyons que $\mathbf{u}_{\omega\eta}$ est la solution unique au problème $\mathbf{PV}_{\omega\eta}$ satisfaisant la régularité (2.142).

La deuxième étape

Dans la deuxième étape, nous utilisons le champ de déplacement $\mathbf{u}_{\omega\eta}$ obtenu dans le lemme 2.2.3

Soit $\mu \in \mathcal{C}(0, T; V')$, considérons le problème variationnel suivant.

Problème $PV_{\omega\mu}$

Trouver la température $\theta_{\omega\mu} : [0, T] \rightarrow V$ qui est la solution du problème variationnel suivant

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \left(\dot{\theta}_{\omega\mu}^\ell, \mathbf{v} \right) + a(\theta_{\omega\mu}, \mathbf{v}) &= \sum_{\ell=1}^2 (\mu^\ell(t) + \mathbf{q}^\ell(t), \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V \\ \theta_{\omega\mu}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.167)$$

Nous avons les résultats suivants.

Lemme 2.2.4 (voir[7]) $PV_{\omega\mu}$ a une solution unique $\theta_{\omega\mu}$ satisfaisant la régularité (2.144).

Démonstration Par une application de l'inégalité de Friedrichs-Poincaré, on peut trouver une constante $\beta' > 0$ telle que

$$\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \|\xi\|^2 dx + \frac{\beta}{k_0} \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma^\ell} \|\xi\|^2 d\gamma \geq \beta' \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \|\xi\|^2 dx, \quad \forall \xi \in \mathbf{V}. \quad (2.168)$$

Ainsi, nous obtenons

$$a_0(\xi, \xi) \geq c_1 \sum_{\ell=1}^2 \|\xi\|_V^2, \quad \forall \xi \in \mathbf{V}. \quad (2.169)$$

Où $c_1 = k_0 \min(1, \beta')/2$, ce qui implique que a_0 est V -elliptique. En conséquence, basée sur des arguments classiques d'analyse fonctionnelle concernant les équations paraboliques, l'équation variationnelle (2.167) a une solution unique $\theta_{\omega\mu}$ qui vérifie (2.144).

La troisième étape

Dans la troisième étape, nous utilisons le champ de déplacement $\mathbf{u}_{\omega\eta}$ obtenu dans le lemme 2.2.3, nous considérons le problème suivant.

Problème $PV_{\omega\chi}$

Trouver l'endommagement $\zeta_{\omega\chi} = (\zeta_{\omega\chi}^1, \zeta_{\omega\chi}^2) : [0, T] \rightarrow H^1(\Omega)$ tel que $\zeta_{\omega\chi}(t) \in K$ et

$$\begin{aligned} &\sum_{\ell=1}^2 (\dot{\zeta}_{\omega\chi}^\ell(t), \xi^\ell - \zeta_{\omega\chi}^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} + a(\zeta_{\omega\chi}(t), \xi - \zeta_{\omega\chi}(t)) \\ &\geq \sum_{\ell=1}^2 (\chi^\ell(t), \xi^\ell - \zeta_{\omega\chi}^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)}, \quad \forall \xi \in K, \quad a.e. t \in (0, T), \end{aligned} \quad (2.170)$$

$$\zeta_{\omega\chi}(0) = 0 \quad (2.171)$$

tel que $K = K^1 \times K^2$, Pour résoudre le problème $\mathbf{PV}_{\omega\chi}$, nous rappelons le résultat abstrait suivant pour les inégalités variationnelles paraboliques,

Lemme 2.2.5 (voir[7]) *Il existe une solution unique $\zeta_{\omega\chi}$ du problème $PV_{\omega\chi}$ et elle satisfait*

$$\zeta_{\omega\chi} \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)).$$

Démonstration On utilise (2.132), (2.135) et un résultat d'existence et d'unicité classiques sur les équations paraboliques (voir [3, P 124])

La quatrième étape

Dans la quatrième étape, nous utilisons le champ de déplacement $\mathbf{u}_{\omega\eta}$ obtenu dans le lemme 2.2.3 Nous considérons le problème de valeur initiale suivant.

Problème $\mathbf{PV}_{\omega}$

Trouver l'usure $\omega \in \mathcal{C}^1(0, T; \mathcal{L}^2(\Gamma_3))$ telle que

$$\dot{\omega} = \kappa_{\omega} \alpha^* p_{\nu}(\mathbf{u}_v - \omega - g) \quad (2.172)$$

$$\omega(0) = \omega_0, \quad (2.173)$$

Considérons maintenant l'opérateur $\mathcal{L} : \mathcal{C}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \rightarrow \mathcal{C}(0, T; L^2(\Gamma_3))$ défini par

$$\mathcal{L}\omega(t) = -k_1 \mathbf{v}^* \int_0^t (\sigma_{\omega})_V(s) ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.174)$$

Lemme 2.2.6 (voir[7]) *L'opérateur $\mathcal{L}$ a un point fixe unique ω^* et il satisfait*

$$\omega^* \in C(0, T; L^2(\Gamma_3))$$

Démonstration Soient $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{C}(0, T; L^2(\Gamma_3))$, et $t \in [0, T]$. Pour $i = 1, 2$. On note $(\mathbf{u}_i, \boldsymbol{\sigma}_i, \theta_i, \zeta_i)$, la solution du problème $\mathbf{PV}_{\omega}$.

Utilisant la notation $\mathbf{u}_{\omega_i} = \mathbf{u}_i$, $\dot{\mathbf{u}}_{\omega_i} = \mathbf{v}_{\omega_i} = \mathbf{v}_i$, $\zeta_{\omega_i} = \zeta_i$, $\theta_{\omega_i} = \theta_i$ et $\sigma_{\omega_i} = \sigma_i$, ou $\mathbf{u}_i = (\mathbf{u}_i^1, \mathbf{u}_i^2)$, $\zeta_i = (\zeta_i^1, \zeta_i^2)$. De plus, notons dans la suite C diverses constantes positives pouvant dépendre de k_1 et $\mathbf{v}^*$. En utilisant des arguments similaires à ceux utilisés dans le lemme 2.2.2, pour trouver que

$$\begin{aligned} & \int_0^t \|\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)\|_V^2 ds \\ & \leq C \left(\int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V^2 ds + \int_0^t \|\omega_1(s) - \omega_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 ds \right) \end{aligned} \quad (2.175)$$

puisque $\mathbf{u}_1(0) = \mathbf{u}_2(0) = \mathbf{u}_0$ et on utilise (2.175) on obtient

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_V^2 \leq C \int_0^t \|\omega_1(s) - \omega_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 ds \\ & \leq C \left(\int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V^2 ds + C \int_0^t \|\omega_1(s) - \omega_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 ds \right) \end{aligned} \quad (2.176)$$

Appliquant l'inégalité de Gronwall, on en déduit que

$$\|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_V^2 \leq C \int_0^t \|\omega_1(s) - \omega_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 ds \quad (2.177)$$

Donc, par (2.175), (2.177), on trouve que

$$\int_0^t \|\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)\|_V^2 ds \leq C \int_0^t \|\omega_1(s) - \omega_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 ds \quad (2.178)$$

D'autre part puisque

$$\boldsymbol{\sigma}^\ell = \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_i^\ell) + \mathcal{G}^\ell(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_i^\ell), \zeta_i^\ell) + \mathcal{F}^\ell(\theta^\ell, \zeta_i^\ell) \quad (2.179)$$

pour $i = 1, 2$ on utilise l'hypothèse (2.118)(b), (2.119), (2.121) pour obtenir pour $s \in [0, T]$

$$\|\sigma_1(s) - \sigma_2(s)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C \left(\|\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)\|_V^2 + \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V^2 \right) \quad (2.180)$$

Nous intégrons l'inégalité précédente par rapport au temps pour déduire que

$$\begin{aligned} & \int_0^t \|\sigma_1(s) - \sigma_2(s)\|_{\mathcal{H}}^2 ds \\ & \leq C \left(\int_0^t \|\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)\|_V^2 ds + \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V^2 ds \right) \end{aligned} \quad (2.181)$$

Nous substituons (2.177) et (2.178) dans l'inégalité précédente pour trouver

$$\int_0^t \|\sigma_1(s) - \sigma_2(s)\|_{\mathcal{H}}^2 ds \leq C \int_0^t \|\omega_1(s) - \omega_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 ds \quad (2.182)$$

La définition de l'opérateur $\mathcal{L}$ donnée par (2.174) et l'estimation (2.178) qui nous donne

$$\|\mathcal{L}\omega_1(t) - \mathcal{L}\omega_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \leq C \int_0^t \|\omega_1(s) - \omega_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 ds \quad (2.183)$$

En réitérant cette inégalité n fois on trouve

$$\|\mathcal{L}^n \omega_1 - \mathcal{L}^n \omega_2\|_{\mathcal{C}(0,T;L^2(\Gamma_3))}^2 \leq \frac{C^n T^n}{n!} \|\omega_1(s) - \omega_2(s)\|_{\mathcal{C}(0,T;L^2(\Gamma_3))}^2 \quad (2.184)$$

Donc, pour n assez grand, $\mathcal{L}^n$ est un opérateur contractif sur l'espace de Banach $\mathcal{C}(0, T; L^2(\Gamma_3))$.

L'opérateur $\mathcal{L}$ a un point fixe unique $\omega^* \in \mathcal{C}(0, T; L^2(\Gamma_3))$.

Nous avons maintenant tous les arguments pour prouver le théorème 2.2.1

Démonstration En prenant en compte les résultats ci-dessus et les propriétés des opérateurs $\mathcal{G}^\ell$ et $\mathcal{F}^\ell$ et des fonctions ψ^ℓ et ϕ^ℓ , on peut considérer l'opérateur

$$\Lambda : \mathcal{C}(0, T; \mathcal{H} \times V' \times L^2(\Omega)) \rightarrow \mathcal{C}(0, T; \mathcal{H} \times V' \times L^2(\Omega))$$

$$\Lambda(\eta, \mu, \chi)(t) = (\Lambda_1(\eta, \mu, \chi)(t), \Lambda_2(\eta, \mu, \chi)(t), \Lambda_3(\eta, \mu, \chi)(t)), \quad (2.185)$$

Défini par

$$\Lambda_1(\eta, \mu, \chi)(t) = \sum_{\ell=1}^2 \mathcal{G}^\ell(\varepsilon(\mathbf{u}_{\omega\eta}^\ell), \zeta_{\omega\chi}^\ell) + \mathcal{F}^\ell(\theta_{\omega\mu}^\ell, \zeta_{\omega\chi}^\ell), \quad (2.186)$$

$$\Lambda_2(\eta, \mu, \chi)(t) = (\psi^1(\sigma_{\omega\eta}^1, \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_{\omega\eta}^1), \theta_{\omega\mu}^1), \psi^2(\sigma_{\omega\eta}^2, \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_{\omega\eta}^2), \theta_{\omega\mu}^2)), \quad (2.187)$$

$$\Lambda_3(\eta, \mu, \chi)(t) = (\phi^1(\varepsilon(\mathbf{u}_{\omega\eta}^1), \zeta_{\omega\chi}^1), \phi^2(\varepsilon(\mathbf{u}_{\omega\eta}^2), \zeta_{\omega\chi}^2)), \quad (2.188)$$

Ici pour tout $(\eta, \mu, \chi) \in \mathcal{C}(0, T; \mathcal{H} \times V' \times L^2(\Omega))$, $\mathbf{u}_\eta$, θ_μ , ζ_χ et ω représente le déplacement, la température, l'endommagement et l'usure obtenus dans le lemme2.2.3, le lemme2.2.4, le lemme2.2.5 et le lemme2.2.6, respectivement et

$$\sigma_\omega^\ell = \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_\omega^\ell) + \mathcal{G}^\ell(\varepsilon(\mathbf{u}_\omega^\ell), \zeta_\omega^\ell) + \mathcal{F}^\ell(\theta_\omega^\ell, \zeta_\omega^\ell) \quad (2.189)$$

Nous avons les résultats suivants.

Lemme 2.2.7 (voir[7]) *Supposons (2.144) vérifié. Alors pour $(\boldsymbol{\eta}, \mu, \chi) \in \mathcal{C}(0, T; \mathcal{H} \times V' \times L^2(\Omega))$, l'application $\Lambda(\boldsymbol{\eta}, \mu, \chi) : [0, T] \rightarrow \mathcal{H} \times V' \times L^2(\Omega)$ a un élément unique $(\boldsymbol{\eta}^*, \mu^*, \chi^*) \in \mathcal{C}(0, T; \mathcal{H} \times V' \times L^2(\Omega))$ tel que $\Lambda(\boldsymbol{\eta}^*, \mu^*, \chi^*) = (\boldsymbol{\eta}^*, \mu^*, \chi^*)$.*

Démonstration Soient $(\boldsymbol{\eta}_1, \mu_1, \chi_1), (\boldsymbol{\eta}_2, \mu_2, \chi_2) \in \mathcal{C}(0, T; \mathcal{H} \times V' \times L^2(\Omega))$, et $t \in [0, T]$.

Nous utilisons la notation $\mathbf{u}_{\omega\eta_i} = \mathbf{u}_i, \dot{\mathbf{u}}_{\omega\eta_i} = \mathbf{v}_{\omega\eta_i} = \mathbf{v}_i, \zeta_{\omega\chi_i} = \zeta_i, \theta_{\omega\mu_i} = \theta_i$ et $\boldsymbol{\sigma}_{\omega\eta_i} = \boldsymbol{\sigma}_i$, pour $i = 1, 2$.

On utilise les relations (2.119)-(2.121), on obtient

$$\begin{aligned}
& \|\Lambda(\boldsymbol{\eta}_1, \mu_1, \chi_1)(t) - \Lambda(\boldsymbol{\eta}_2, \mu_2, \chi_2)(t)\|_{\mathcal{H} \times V' \times L^2(\Omega)} \\
& \leq L_{\mathcal{G}} \left(\|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_V + \|\zeta_1(t) - \zeta_2(t)\|_{L^2(\Omega)} \right) \\
& + L_{\mathcal{F}} \int_0^t \left(\|\boldsymbol{\sigma}_1(s) - \boldsymbol{\sigma}_2(s)\|_{\mathcal{H}} + L_{\mathcal{A}} \|\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)\|_V \right. \\
& \left. + \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V + \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{L^2(\Omega)} \right) ds \\
& + M_{\phi} \left(\|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_V + \|\zeta_1(t) - \zeta_2(t)\|_{L^2(\Omega)} \right) \\
& + L_{\psi} \left(\|\boldsymbol{\sigma}_1(t) - \boldsymbol{\sigma}_2(t)\|_{\mathcal{H}} + \|\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)\|_V + \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{L^2(\Omega)} \right)
\end{aligned} \tag{2.190}$$

Puisque

$$\mathbf{u}_i(t) = \int_0^t \mathbf{v}_i(s) ds + \mathbf{u}_0, \forall t \in [0, T], \tag{2.191}$$

on a

$$\|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_V \leq \int_0^t \|\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)\|_V ds, \tag{2.192}$$

Appliquant les inégalités de Young-Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
& \|\Lambda(\boldsymbol{\eta}_1, \mu_1, \chi_1)(t) - \Lambda(\boldsymbol{\eta}_2, \mu_2, \chi_2)(t)\|_{\mathcal{H} \times V' \times L^2(\Omega)} \\
& \leq C \left(\|\zeta_1(t) - \zeta_2(t)\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^t (\|\boldsymbol{\sigma}_1(s) - \boldsymbol{\sigma}_2(s)\|_{\mathcal{H}} \right. \\
& \left. + \|\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)\|_V + \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V \right. \\
& \left. + \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{L^2(\Omega)}) ds \right).
\end{aligned} \tag{2.193}$$

Puisque

$$\boldsymbol{\sigma}_i^\ell(t) = \mathcal{A}^\ell(\varepsilon(\mathbf{v}_i(t))) + \boldsymbol{\eta}_i^\ell(t), \forall t \in [0, T].$$

alors

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_*^\ell(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^\ell) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_*^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} \\ & \leq j(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \omega) + j(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1, \omega) - j(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1, \omega) - j(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2, \omega) \end{aligned}$$

Donc, en utilisant (2.118), (2.133), on déduit que

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{A}} \|\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)\|_V^2 & \leq C_0^2 \|\alpha\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \left(\|\lambda\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1 \right) \|\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)\|_V^2 \\ & \quad + \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)\|_V^2 \end{aligned}$$

L'inégalité de Gronwall, implique

$$\|\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)\|_V^2 \leq C \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{\mathcal{H}}^2$$

ensuite

$$\begin{aligned} \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V ds & \leq C \int_0^t \int_0^s \|\eta_1(r) - \eta_2(r)\|_{\mathcal{H}} dr ds \\ & \leq \int_0^T \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{\mathcal{H}} ds \end{aligned}$$

Pour la température, si on prend la substitution $\mu = \mu_1$, $\mu = \mu_2$ dans (2.167) et en soustrayant les deux équations obtenues, on déduit en choisissant $\mathbf{v} = \theta_1 - \theta_2$ comme fonction test

$$\begin{aligned} & \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_1 \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_V^2 ds \\ & \leq \int_0^t \|\mu_1(s) - \mu_2(s)\|_{V'} \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_V ds, \forall t \in [0, T], \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités de Hölder et de Young, on déduit que

$$\begin{aligned} & \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_V^2 ds \\ & \leq C \int_0^t \|\mu_1(s) - \mu_2(s)\|_{V'}^2 ds, \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

On utilise l'inclusion $L^2(\Omega) \subset V$, on obtient

$$\begin{aligned} & \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ & \leq C \int_0^t \|\mu_1(s) - \mu_2(s)\|_{V'}^2 ds, \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

De cette inégalité, combinée à l'inégalité de Gronwall, on déduit que

$$\|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^t \|\mu_1(s) - \mu_2(s)\|_V^2 ds \quad (2.194)$$

Pour l'endommagement, de (2.170) on déduit que

$$(\dot{\zeta}_1 - \dot{\zeta}_2, \zeta_1 - \zeta_2)_{L^2(\Omega)} + \mathbf{a}_1(\zeta_1 - \zeta_2, \zeta_1 - \zeta_2) \leq (\chi_1 - \chi_2, \zeta_1 - \zeta_2)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall t \in (0, T).$$

On intègre l'inégalité précédente par rapport au temps, en utilisant les conditions initiales $\zeta_1(0) = \zeta_2(0) = \zeta_0$ et l'inégalité $\mathbf{a}_1(\zeta_1 - \zeta_2, \zeta_1 - \zeta_2) \geq 0$ pour trouver

$$\frac{1}{2} \|\zeta_1(t) - \zeta_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_0^t (\chi_1(s) - \chi_2(s), \zeta_1(s) - \zeta_2(s))_{L^2(\Omega)} ds,$$

ce qui implique

$$\|\zeta_1(t) - \zeta_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_0^t \|\chi_1(s) - \chi_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \int_0^t \|\zeta_1(s) - \zeta_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds.$$

Cette inégalité, combinée à l'inégalité de Gronwall, conduit à

$$\|\zeta_1(t) - \zeta_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^t \|\chi_1(s) - \chi_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.195)$$

On substitue les estimations (2.194) et (2.195), dans (2.193) pour obtenir

$$\begin{aligned} & \|\Lambda(\eta_1, \mu_1, \chi_1)(t) - \Lambda(\eta_2, \mu_2, \chi_2)(t)\|_{V \times L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq C \int_0^T \|(\eta_1, \mu_1, \chi_1)(s) - (\eta_2, \mu_2, \chi_2)(s)\|_{V \times L^2(\Omega)}^2 ds. \end{aligned}$$

Ainsi, pour m suffisamment grand, Λ^m est une contraction sur $\mathcal{C}(0, T; V \times L^2(\Omega))$, et donc Λ a un point fixe unique dans cet espace de Banach.

Existence Soit $(\eta^*, \mu^*, \chi^*) \in \mathcal{C}(0, T; \mathcal{H} \times V' \times L^2(\Omega))$ le point fixe de Λ défini par (2.185)-(2.188) et soit $h^* = h_{\eta^*}^*$ le point fixe de l'opérateur Λ_{η^*} donné par le lemme 2.2.1. notons

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_* &= \mathbf{u}_{\omega\eta^*}, \theta_* = \theta_{\omega\mu^*}, \zeta_* = \zeta_{\omega\chi^*}. \\ \sigma_*^\ell &= \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_*^\ell) + \mathcal{G}^\ell(\varepsilon(\mathbf{u}_*^\ell), \zeta_*^\ell) + \mathcal{F}^\ell(\theta_*^\ell, \zeta_*^\ell) \end{aligned}$$

$\Lambda_1(\boldsymbol{\eta}^*, \mu^*, \chi^*) = \boldsymbol{\eta}^*$, $\Lambda_2(\boldsymbol{\eta}^*, \mu^*, \chi^*) = \mu^*$ et $\Lambda_3(\boldsymbol{\eta}^*, \mu^*, \chi^*) = \chi^*$, les définitions (2.186)-(2.188) montrent que (2.135)-(2.141) sont satisfaits. Ensuite, dans les lemmes 2.2.1, 2.2.3-2.2.6 les conditions de la régularité (2.142)-(2.146) sont vérifiées.

Unicité Soit ω^* le point fixe de l'opérateur $\mathcal{L}$ donné par (2.174). La solution unique $(\mathbf{u}_*, \boldsymbol{\sigma}_*, \theta_*, \zeta_*, \omega^*)$ est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ défini par (2.185)-(2.188) et la solution unique des problèmes $\mathbf{PV}_{\omega\eta h}$, $\mathbf{PV}_{\omega\mu}$, $\mathbf{PV}_{\omega\chi}$ et $\mathbf{PV}_{\omega}$ qui complète la preuve du théorème.

Chapitre 3

Résolution du problème thermomécanique dynamique

Cette partie est consacrée à l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution d'un problème de contact dynamique entre un corps élasto-viscoplastique et un obstacle rigide. Le contact est frictionnel et bilatéral, le frottement est modélisé avec *la loi de Tresca* avec échange de chaleur. Nous employons la loi de comportement élastique-viscoplastique avec endommagement pour le matériau. L'évolution de l'endommagement est décrite par une inclusion de type parabolique. Nous établissons une formulation variationnelle pour le modèle et nous prouvons l'existence d'une solution faible unique du problème. La preuve est basée sur un résultat d'existence et d'unicité d'inégalités paraboliques, d'équations différentielles et d'arguments du point fixe.

Ce chapitre est organisé comme suit.

D'abord, nous décrivons le modèle mathématique du problème, nous introduisons des notations, et nous listons les hypothèses sur les données du problème.

Puis on donnera le problème variationnel du modèle.

Enfin, nous énonçons notre résultat principal d'existence et d'unicité et nous donnons sa démonstration.

3.1 Le cas des matériaux thermo-elastique-viscoélastiques avec endommagement

3.1.1 Formulation du problème mécanique- hypothèses

Soit un corps elastoviscoplastique qui occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) avec une surface frontière régulière, partitionnée en trois parties disjointes Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 , correspondant aux conditions aux limites mécaniques, d'une part, et en deux parties ($S_1 = \Gamma_1$, $S_2 = \Gamma_2$) correspondant aux conditions thermiques. On suppose que $mes \Gamma_1 > 0$. Le corps et l'obstacle rigide sont en contact bilatéral avec frottement le long de la partie Γ_3 .

Soit $T > 0$ et $[0, T]$ l'intervalle de temps considéré. On note par ν la normale unitaire sortante à Γ . Le corps est encastré sur Γ_1 dans une structure fixe, le champ de déplacement disparaît là. Sur Γ_2 agissent des tractions surfaciques de densité $\mathbf{f}_2$, dans Ω agissent des forces volumiques de densité $\mathbf{f}_0$. De plus, le processus est dynamique et les termes inertiels sont donc inclus dans l'équation du mouvement. Le corps est en contact avec frottement et endommagement sur la partie Γ_3 . Nous prenons en considération les propriétés mécaniques du corps.

Problème P^3

Trouver le champ des déplacements $\mathbf{u} : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{S}^d$, la température $\theta : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, et l'endommagement $\xi : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{G}(\varepsilon(\mathbf{u}), \xi) + \int_0^t \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(s)), \varepsilon(\mathbf{u}(s))) ds - C_e \theta \quad (3.1)$$

$$\dot{\theta} - \operatorname{div} K(\Delta \theta) = r(\dot{\mathbf{u}}, \xi) + \mathbf{q}, \quad \text{sur } \Omega \times (0, T), \quad (3.2)$$

$$\dot{\xi} - k_1 \Delta \xi + \partial \varphi_F(\xi) \ni S(\varepsilon(\mathbf{u}), \xi), \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.3)$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.4)$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (3.5)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (3.6)$$

$$-k_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} n_j = k_e (\theta - \theta_R) + h_\tau (|\dot{\mathbf{u}}_\tau|), \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T), \quad (3.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_\nu = 0, \quad |\boldsymbol{\sigma}_\tau| \leq g \\ |\boldsymbol{\sigma}_\tau| < g \Rightarrow \dot{\mathbf{u}}_\tau = 0, \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \\ |\boldsymbol{\sigma}_\tau| = g \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que } \boldsymbol{\sigma}_\tau = -\lambda \dot{\mathbf{u}}_\tau \end{array} \right. \quad (3.9)$$

$$\theta = 0, \quad \text{sur } (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \times (0, T), \quad (3.10)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_0, \xi(0) = \xi_0, \theta(0) = \theta_0, \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.11)$$

Premièrement, les équations (3.1) (3.2) et (3.3) représentent la loi de comportement élasto-viscoplastique avec endommagement et effets thermiques, l'équation (3.4) représente l'équation du mouvement où ρ représente la masse volumique. Les équations (3.5), (3.6) représentent respectivement les conditions aux limites de déplacement et de traction. (3.7), (3.8) représentent respectivement les conditions aux limites de Fourier pour la température et une condition aux limites homogène de Neumann pour l'endommagement sur Γ . Dans (3.9) nous supposons que le contact est bilatéral, par conséquent, le déplacement normal $\mathbf{u}_\nu$ s'annule sur $\Gamma_3 \times (0, T)$. Nous donnons le processus de frottement avec la loi de frottement de *Tresca*, où la seuil de frottement est g , supposé ne dépendre que de chaque point de Γ_3 , $\dot{\mathbf{u}}_\tau$ désigne la vitesse tangentielle et $\boldsymbol{\sigma}_\tau$ représente la contrainte tangentielle. Pour simplifier les notations, nous n'indiquons pas explici-

tement la dépendance de diverses fonctions sur les variables $x \in \Omega \cup \Gamma$ et $t \in [0, T]$. L'équation (3.10) signifie que la température s'annule sur $(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \times (0, T)$. Les fonctions $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{v}_0$, ξ_0 et θ_0 dans (3.11) sont les données initiales.

Pour obtenir la formulation variationnelle du problème *P3* nous avons besoin d'introduire quelques notations et hypothèses supplémentaires

L'opérateur de viscosité $\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_{\mathcal{A}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad |\mathcal{A}(\mathbf{x}, \xi_1) - \mathcal{A}(\mathbf{x}, \xi_2)| \leq L_{\mathcal{A}} |\xi_1 - \xi_2| \\ \text{pour tout } \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(b) Il existe } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad (\mathcal{A}(\mathbf{x}, \xi_1) - \mathcal{A}(\mathbf{x}, \xi_2)) \cdot (\xi_1 - \xi_2) \geq m_{\mathcal{A}} |\xi_1 - \xi_2|^2 \\ \text{pour tout } \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{A}(\mathbf{x}, \xi) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega, \text{ pour tout} \\ \quad \xi \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(d) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \text{ est continue sur } \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \end{array} \right. \quad (3.12)$$

L'opérateur d'élasticité $\mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_{\mathcal{G}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad |\mathcal{G}(\mathbf{x}, \xi_1, \zeta_1) - \mathcal{G}(\mathbf{x}, \xi_2, \zeta_2)| \leq L_{\mathcal{G}} (|\xi_1 - \xi_2| + |\zeta_1 - \zeta_2|), \\ \text{pour tout } \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ et pour tout } \zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(b) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{G}(\mathbf{x}, \xi, \zeta) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega, \text{ pour} \\ \quad \text{tout } \xi \in \mathbb{S}^d, \text{ et pour tout } \zeta \in \mathbb{R}. \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \text{ est dans } \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (3.13)$$

L'opérateur de visco-plasticité $\mathcal{F} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_{\mathcal{F}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad |\mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}_1, \varepsilon_1) - \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}_2, \varepsilon_2)| \leq L_{\mathcal{F}}(|\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2| + |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|) \\ \text{pour tout } \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega, \\ \text{(b) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}, \varepsilon) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega, \text{ pour} \\ \text{chaque } \boldsymbol{\sigma}, \varepsilon \in \mathbb{S}^d \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \text{ est dans } \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (3.14)$$

La fonction source d'endommagement $S : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_S > 0 \text{ telle que} \\ \quad (S(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_1, \zeta_1) - S(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_2, \zeta_2)) \leq L_S(|\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2| + |\zeta_1 - \zeta_2|) \\ \text{pour tout } \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in \mathbb{S}^d \text{ et } \zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{R} \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega, \\ \text{(b) L'application } \mathbf{x} \mapsto S(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \zeta) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega, \text{ pour tout} \\ \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^d \text{ et } \zeta \in \mathbb{R}, \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \mapsto S(\mathbf{x}, \mathbf{0}, 0) \text{ est dans } L^2(\Omega), \\ \text{(d) } S(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \zeta) \text{ est bornée pour tout } \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^d, \zeta \in \mathbb{R} \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \end{array} \right. \quad (3.15)$$

L'opérateur de la dilatation thermique $C_e : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_{C_e} > 0 \text{ telle que} \\ \quad |C_e(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1) - C_e(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_2)| \leq L_{C_e}|\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\theta}_2| \\ \text{pour tout } \boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(b) } C_e = (c_{ij}), \quad c_{ij} = c_{ji} \in L^\infty(\Omega). \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \mapsto C_e(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega, \\ \text{pour chaque } \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}. \\ \text{(d) L'application } \mathbf{x} \mapsto C_e(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (3.16)$$

L'opérateur de la conductivité thermique $K : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_K > 0 \text{ telle que} \\ |K(\mathbf{x}, r_1) - K(\mathbf{x}, r_2)| \leq L_K |r_1 - r_2| \\ \text{, pour tout } r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(b) } k_{ij} = k_{ji} \in L^\infty(\Omega), \text{ } k_{ij} \alpha_i \alpha_j \leq c_k \alpha_i \alpha_j \text{ pour un } c_k > 0, \text{ pour tout} \\ (\alpha_i) \in \mathbb{R}. \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \mapsto k(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \text{ est dans } L^2(\Omega). \end{array} \right. \quad (3.17)$$

Nous supposons que la fonction tangentielle $h_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_\tau > 0 \text{ telle que} \\ |\tau(\mathbf{x}, r_1) - h_\tau(\mathbf{x}, r_2)| \leq L_\tau |r_1 - r_2| \\ \text{pour tout } r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(b) L'application } \mathbf{x} \mapsto h_\tau(\mathbf{x}, r) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3 \text{ pour tout} \\ r \in \mathbb{R}_+. \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \mapsto h_\tau(\mathbf{x}, 0) \text{ est dans } L^2(\Gamma_3). \end{array} \right. \quad (3.18)$$

Un exemple concret de fonction tangentielle h_τ est donné par

$$h_\tau(x, r) = \lambda(x) r, \quad \forall r \in \mathbb{R}_+, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3,$$

où $\lambda \in L^\infty(\Gamma_3, \mathbb{R}_+)$ représente un certain coefficient de taux pour le gradient de la température.

La densité de masse satisfait

$$\rho \in L^\infty(\Omega), \text{ il existe } \rho^* > 0 \text{ tel que } \rho(x) \geq \rho^*, \text{ p.p. } x \in \Omega \quad (3.19)$$

et

$$g \in L^\infty(\Gamma_3), \quad g \geq 0, \text{ p.p. sur } \Gamma_3 \quad (3.20)$$

Nous supposons aussi les régularités suivantes

$$\mathbf{f}_0 \in L^2(0, T; H), \quad \mathbf{f}_2 \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2)^d), \quad \mathbf{q} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (3.21)$$

Les données initiales satisfont

$$\mathbf{u}_0 \in V, \mathbf{v}_0 \in H \quad (3.22)$$

$$\xi_0 \in F \quad (3.23)$$

$$\theta_0 \in E \quad (3.24)$$

$$\theta_R \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_3)) \quad (3.25)$$

$$k_e \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}_+) \quad (3.26)$$

La fonction $r : V \rightarrow L^2(\Omega)$ vérifie qu'il existe une constante $L_r > 0$ telle que

$$|r(\mathbf{v}_1, \xi_1) - r(\mathbf{v}_2, \xi_2)|_{L^2(\Omega)} \leq L_r (|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_V + |\xi_1 - \xi_2|) \quad (3.27)$$

$$\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$$

Nous utilisons un produit interne modifié sur $H = L^2(\Omega)^d$ donné par

$$((\mathbf{u}, \mathbf{v}))_H = (\rho \mathbf{u}, \mathbf{v})_H, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H$$

c'est-à-dire qu'il est pondéré avec ρ . Soit $\|\cdot\|_H$ la norme associée, c'est-à-dire

$$\|\mathbf{v}\|_H = (\rho \mathbf{v}, \mathbf{v})_H^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \mathbf{v} \in H$$

La notation $(\cdot, \cdot)_{V' \times V}$ représente l'appariement de dualité entre V' et V . Ensuite, nous avons

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{V' \times V} = ((\mathbf{u}, \mathbf{v}))_H, \quad \forall \mathbf{u} \in H, \quad \forall \mathbf{v} \in V$$

Il découle de l'hypothèse (3.19) que $\|\cdot\|_H$ et $|\cdot|_H$ sont des normes équivalentes sur H , ainsi que le mappage d'inclusion de $(V, |\cdot|_V)$ en $(H, \|\cdot\|_H)$ est continu et dense. On note V' l'espace dual de V . En identifiant H avec son propre dual, on peut écrire le triple de Gelfand

$$V \subset H \subset V'.$$

De (3.21) nous définissons $\mathbf{f}(t) \in V$ pour $t \in (0, T)$ par

$$(\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_{V' \times V} = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0(t) \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2(t) \cdot \mathbf{v} \, da \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad (3.28)$$

notons que

$$\mathbf{f} \in L^2(0, T; V).$$

On définit la forme bilinéaire $j : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$

$$a(\varsigma, \zeta) = \kappa \int_{\Omega} \nabla \varsigma \cdot \nabla \zeta \, dx. \quad (3.29)$$

Ensuite nous définissons la fonctionnelle $j : V \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$j(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} g |\mathbf{v}_\tau| \, da, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}.$$

3.1.2 Formulation variationnelle

En utilisant un argument standard, nous obtenons la formulation variationnelle suivante du problème mécanique (3.1)–(3.11).

Problème PV

Trouvez le champ de déplacement $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow \mathbf{V}$, le champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma} : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$, la température $\theta : [0, T] \rightarrow E$, et l'endommagement $\xi : [0, T] \rightarrow E_1$, tels que pour $t \in (0, T)$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(t) &= \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{G}(\varepsilon(\mathbf{u}(t)), \xi(t)) \\ &+ \int_0^t \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(s)), \varepsilon(\mathbf{u}(s))) ds - C_e \theta(t) \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} &(\ddot{\mathbf{u}}(t), w - \dot{\mathbf{u}}(t))_{V' \times V} + (\boldsymbol{\sigma}(t), \varepsilon(w - \dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{H}} \\ &+ j(w) - j(\dot{\mathbf{u}}(t)) \geq (\mathbf{f}(t), w - \dot{\mathbf{u}}(t))_{V' \times V}, \quad \forall w \in V \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\dot{\theta}(t) + K\theta(t) = R\dot{\mathbf{u}}(t) + Q(t), \quad \text{dans } E' \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} &(\dot{\xi}(t), \zeta - \xi(t))_{L^2(\Omega)} + a(\xi(t), \zeta - \xi(t)) \\ &\geq (S(\varepsilon(\mathbf{u}(t)), \xi(t)), \zeta - \xi(t))_{L^2(\Omega)} \\ &\text{pour tout } \xi(t) \in F, \zeta \in F \text{ et } t \in (0, T) \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_0, \theta(0) = \theta_0, \xi(0) = \xi_0, \quad (3.34)$$

Où $Q : [0, T] \rightarrow E'$, $K : E \rightarrow E'$, et $\mathcal{R} : V \rightarrow E'$ sont donnés par

$$(Q(t), \eta)_{E' \times E} = \int_{\Gamma_3} k_e \theta_R(t) \eta da + \int_{\Omega} q(t) \eta dx, \quad (3.35)$$

$$(K\tau, \eta)_{E' \times E} = \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} k_{ij} \frac{\partial \tau}{\partial x_j} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma_3} k_e \tau \eta da, \quad (3.36)$$

$$(Rv, \eta)_{E' \times E} = \int_{\Omega} r(v) \eta dx + \int_{\Gamma_3} h_r(|v_r|) \eta da, \quad (3.37)$$

pour tout $v \in V, \eta, \tau \in E$.

Nous remarquons que le problème variationnel **PV** est formulé en termes de champ de déplacement, de champ de contraintes, de température et d'endommagement. L'existence de la solution unique du problème *PV* est énoncée et prouvée dans la section suivante.

3.1.3 Existence et unicité de la solution

Les principaux résultats sont énoncés par les théorèmes suivants

Théorème 3.1.1 (voir[8]) *Supposons que (3.12)–(3.27) sont vérifiées, alors il existe une solution unique $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \theta, \xi\}$ au problème PV. De plus, la solution a la régularité*

$$\mathbf{u} \in W^{1,2}(0, T; V) \cap C^1(0, T; H) \cap W^{2,2}(0, T; V'), \quad (3.38)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \in L^2(0, T; \mathcal{H}), \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \in L^2(0, T; V'), \quad (3.39)$$

$$\theta \in C(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; E) \cap W^{1,2}(0, T; E'), \quad (3.40)$$

$$\xi \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)). \quad (3.41)$$

Nous concluons que sous les hypothèses (3.12)–(3.29), le problème mécanique a une solution faible unique avec la régularité ci-dessus.

Soit $\boldsymbol{\eta} \in L^2(0, T; V')$ dans la première étape, nous considérons le problème variationnel suivant :

Problème $PV1_\eta$

Trouver le champ de déplacement $\mathbf{u}_\eta : [0, T] \rightarrow \mathbf{V}$, tel que

$$\begin{aligned} & (\ddot{\mathbf{u}}_\eta(t), w - \dot{\mathbf{u}}_\eta(t))_{V' \times V} + (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_\eta(t)), \varepsilon(w - \dot{\mathbf{u}}_\eta(t)))_{\mathcal{H}} + \\ & (\boldsymbol{\sigma}(t), \varepsilon(w - \dot{\mathbf{u}}_\eta(t)))_{\mathcal{H}} + j(w) - j(\dot{\mathbf{u}}_\eta(t)) + (\eta(t), w - \dot{\mathbf{u}}_\eta(t))_{V' \times V} \\ & \geq (\mathbf{f}(t), w - \dot{\mathbf{u}}_\eta(t))_{V' \times V}, \quad \forall w \in V \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\mathbf{u}_\eta(0) = \mathbf{u}_0, \dot{\mathbf{u}}_\eta(0) = \mathbf{v}_0 \quad (3.43)$$

Nous définissons $\mathbf{f}_\eta(t) \in V'$ pour $p.p.t \in [0, T]$ par

$$(\mathbf{f}_\eta(t), w)_{V' \times V} = (\mathbf{f}(t) - \eta(t), w)_{V' \times V}. \quad (3.44)$$

on en déduit

$$\mathbf{f}_\eta \in L^2(0, T; V'). \quad (3.45)$$

Nous définissons l'opérateur $\mathbf{A} : V \rightarrow V'$ par

$$(\mathbf{A}\mathbf{v}, w)_{V' \times V} = (\mathcal{A}\varepsilon(\mathbf{v}), \varepsilon(w))_{\mathcal{H}}, \quad \forall \mathbf{v}, w \in V. \quad (3.46)$$

Nous considérons l'inégalité variationnelle suivante.

Problème $\mathbf{QV}_\eta$

Trouver la vitesse $\mathbf{v}_\eta : [0, T] \rightarrow \mathbf{V}$, tel que

$$(\dot{\mathbf{v}}_\eta(t), w - \mathbf{v}_\eta(t))_{V' \times V} + (\mathcal{A}\mathbf{v}_\eta(t), w - \mathbf{v}_\eta(t))_{V' \times V} + j(w) - j(\mathbf{v}_\eta(t)) \quad (3.47)$$

$$\geq (\mathbf{f}_\eta(t), w - \mathbf{v}_\eta(t))_{V' \times V} \quad \forall w \in V, p.p.t \in [0, T],$$

$$\mathbf{v}_\eta(0) = \mathbf{v}_0. \quad (3.48)$$

Dans l'étude du problème $\mathbf{QV}_\eta$, nous avons le résultat suivant :

Lemme 3.1.1 (voir[8]) *Pour tous les $\eta \in L^2(0, T; V')$, $\mathbf{QV}_\eta$ a une solution unique avec la régularité*

$$\mathbf{v}_\eta \in \mathcal{C}(0, T; H) \cap L^2(0, T; V) \cap W^{1,2}(0, T; V'),$$

Démonstration Nous commençons par l'étape de la régularisation (voir[13]). Nous définissons

$$h(t) = \mathbf{f}_\eta(t), \quad t \in [0, T]$$

et pour tout $\varepsilon > 0$

$$j_\varepsilon(w) = \int_{\Gamma_3} g \sqrt{|w_r|^2 + \varepsilon^2} da, \quad \forall w \in V.$$

Après une certaine opérations algébriques, pour tout $\varepsilon > 0$, j_ε est convexe et $\mathcal{C}^1$ sur V , et sa dérivée au sens Frechet satisfait

$$\exists C > 0, \quad \forall w \in V, |j'_\varepsilon(w)|_V \leq C |g|_{L^2(\Gamma_3)}.$$

D'après (3.12) et la monotonie de j'_ε , il découle de l'équation classique de l'évolution du premier ordre que

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbf{v}_\eta^\varepsilon \in L^2(0, T; V) \cap W^{1,2}(0, T; V')$$

on a

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}}_\eta^\varepsilon(t) + (\mathcal{A}\mathbf{v}_\eta^\varepsilon(t) + j'_\varepsilon(\mathbf{v}_\eta^\varepsilon(t))) = h(t) \text{ dans } V', & p.p.t \in [0, T], \\ \mathbf{v}_\eta^\varepsilon(0) = 0 \end{cases} \quad (3.49)$$

Ensuite, on obtient

$$\begin{aligned} & (\dot{\mathbf{v}}_\eta^\varepsilon(t), w - \mathbf{v}_\eta^\varepsilon(t))_{V' \times V} + (\mathcal{A}\mathbf{v}_\eta^\varepsilon(t), w - \mathbf{v}_\eta^\varepsilon(t))_{V' \times V} + j_\varepsilon(w) - j_\varepsilon(\mathbf{v}_\eta^\varepsilon(t)) \\ & \geq (h(t), w - \mathbf{v}_\eta^\varepsilon(t))_{V' \times V}, \quad \forall w \in V, p.p.t \in [0, T] \end{aligned} \quad (3.50)$$

De (3.49), nous avons

$$\begin{aligned} & (\dot{\mathbf{v}}_\eta^\varepsilon(t), \mathbf{v}_\eta^\varepsilon(t))_{V' \times V} + (\mathcal{A}\mathbf{v}_\eta^\varepsilon(t), \mathbf{v}_\eta^\varepsilon(t))_{V' \times V} + (j_\varepsilon(\mathbf{v}_\eta^\varepsilon(t)), \mathbf{v}_\eta^\varepsilon(t))_{V' \times V} \\ & = (h(t), \mathbf{v}_\eta^\varepsilon(t))_{V' \times V}, \quad p.p.t \in [0, T] \end{aligned}$$

En utilisant (3.12), et la monotonie de j'_ε , on déduit que

$$\exists C > 0, \quad \forall t \in [0, T], \quad |\mathbf{v}_\eta^\varepsilon(t)|_H \leq C, \quad \int_0^T |\mathbf{v}_\eta^\varepsilon(t)|_V^2 dt \leq C, \quad \int_0^T |\dot{\mathbf{v}}_\eta^\varepsilon(t)|_V^2 dt \leq C.$$

Utiliser une sous suite pour trouver que

$$\begin{cases} \mathbf{v}_\eta^\varepsilon \rightarrow \mathbf{v}_\eta \text{ faiblement dans } L^2(0, T; V) \text{ et faiblement étoile dans } L^2(0, T; H), \\ \dot{\mathbf{v}}_\eta^\varepsilon \rightarrow \dot{\mathbf{v}}_\eta \text{ faiblement étoile dans } L^2(0, T; V'). \end{cases} \quad (3.51)$$

Il s'ensuit que

$$\mathbf{v}_\eta \in \mathcal{C}(0, T; H) \text{ et } \mathbf{v}_\eta^\varepsilon(t) \rightarrow \mathbf{v}_\eta(t) \text{ faiblement dans } H, \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.52)$$

En intégrant (3.50),

nous avons $\forall w \in L^2(0, T; V)$

$$\begin{aligned} & \int_0^T (\dot{\mathbf{v}}_\eta^\varepsilon, w)_{V' \times V} dt + \int_0^T (\mathcal{A}\mathbf{v}_\eta^\varepsilon, w)_{V' \times V} dt + \int_0^T j_\varepsilon(w) dt \\ & \geq \int_0^T (\dot{\mathbf{v}}_\eta^\varepsilon, \mathbf{v}_\eta^\varepsilon)_{V' \times V} dt + \int_0^T (\mathcal{A}\mathbf{v}_\eta^\varepsilon, \mathbf{v}_\eta^\varepsilon)_{V' \times V} dt + \int_0^T j_\varepsilon(\mathbf{v}_\eta^\varepsilon) dt + \int_0^T (h, w - \mathbf{v}_\eta^\varepsilon)_{V' \times V} dt \\ & \geq \frac{1}{2} |\mathbf{v}_\eta^\varepsilon(T)|_H^2 - \frac{1}{2} |\mathbf{v}_\eta^\varepsilon(0)|_H^2 + \int_0^T (\mathcal{A}\mathbf{v}_\eta^\varepsilon, \mathbf{v}_\eta^\varepsilon)_{V' \times V} dt \\ & \quad + \int_0^T j_\varepsilon(\mathbf{v}_\eta^\varepsilon) dt + \int_0^T (h, w - \mathbf{v}_\eta^\varepsilon)_{V' \times V} dt \end{aligned} \quad (3.53)$$

À partir de (3.51), (3.52) et de la semi-continuité faible inférieurement, nous obtenons que pour tout $w \in L^2(0, T; V)$:

$$\begin{aligned} & \int_0^T (\dot{\mathbf{v}}_\eta, w - \mathbf{v}_\eta)_{V' \times V} dt + \int_0^T (\mathcal{A}\mathbf{v}_\eta, w - \mathbf{v}_\eta)_{V' \times V} dt + \int_0^T j(w) - j(\mathbf{v}_\eta) dt \\ & \geq \int_0^T (h, w - \mathbf{v}_\eta)_{V' \times V} dt. \end{aligned}$$

L'inégalité précédente implique (voir [13]) que

$$\begin{aligned} & (\dot{\mathbf{v}}_\eta(t), w - \mathbf{v}_\eta(t))_{V' \times V} + (\mathcal{A}\mathbf{v}_\eta(t), w - \mathbf{v}_\eta(t))_{V' \times V} + j(w) - j(\mathbf{v}_\eta(t)) \\ & \geq (h(t), w - \mathbf{v}_\eta(t))_{V' \times V}, \quad \forall w \in V, p.p.t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Nous concluons que le problème $\mathbf{QV}_\eta$ a au moins une solution

$$\mathbf{v}_\eta \in \mathcal{C}(0, T; H) \cap L^2(0, T; V) \cap W^{1,2}(0, T; V')$$

Pour l'unicité, prenons $\mathbf{v}_\eta^1, \mathbf{v}_\eta^2$ deux solutions de $\mathbf{QV}_\eta$. Nous utilisons (3.47) pour obtenir pour $a.e.t \in [0, T]$,

$$(\dot{\mathbf{v}}_\eta^2(t) - \dot{\mathbf{v}}_\eta^1(t), \mathbf{v}_\eta^2(t) - \mathbf{v}_\eta^1(t))_{V' \times V} + (\mathcal{A}\mathbf{v}_\eta^2(t) - \mathcal{A}\mathbf{v}_\eta^1(t), \mathbf{v}_\eta^2(t) - \mathbf{v}_\eta^1(t))_{V' \times V} \leq 0$$

En intégrant l'inégalité précédente, en utilisant (3.12) et (3.46), nous trouvons

$$\frac{1}{2} |\mathbf{v}_\eta^2(t) - \mathbf{v}_\eta^1(t)|_H^2 + m_{\mathcal{A}} \int_0^t |\mathbf{v}_\eta^2(s) - \mathbf{v}_\eta^1(s)|_V^2 ds \leq 0$$

ce qui implique

$$\mathbf{v}_\eta^1 = \mathbf{v}_\eta^2.$$

Soit maintenant $\mathbf{u}_\eta : [0, T] \rightarrow V$ la fonction définie par

$$\mathbf{u}_\eta(t) = \int_0^t \mathbf{v}_\eta(s) ds + \mathbf{u}_0, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.54)$$

Dans l'étude du problème $\mathbf{PV}_\eta$, nous avons le résultat suivant :

Lemme 3.1.2 (voir[8]) $\mathbf{PV}_\eta$ a une solution unique satisfaisant la régularité exprimée dans (3.38)

Démonstration la preuve du Lemme 3.1.2 est une conséquence du lemme 3.1.1 et de la relation (3.54).

Dans la deuxième étape, nous utilisons le champ de déplacement $\mathbf{u}_\eta$ obtenu dans le lemme 3.1.2 pour étudier le problème variationnel suivant :

Problème $PV2_\eta$

Trouver la température $\theta_\eta : [0, T] \rightarrow \mathbf{E}$, telle que

$$\dot{\theta}_\eta(t) + K\theta_\eta(t) = R\dot{\mathbf{u}}_\eta(t) + Q(t), \quad \text{dans } E', \quad p.p.t \in [0, T] \quad (3.55)$$

$$\theta_\eta(0) = \theta_0 \quad (3.56)$$

Dans l'étude du problème $\mathbf{PV}2_\eta$, nous avons le résultat suivant :

Lemme 3.1.3 (voir[8]) $PV2_\eta$ a une solution unique qui satisfait :

$$\theta_\eta \in C(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; E) \cap W^{1,2}(0, T; E'). \quad (3.57)$$

De plus, $\exists C > 0$ tel que $\forall \eta_1, \eta_2 \in L^2(0, T; V')$

$$|\theta_{\eta_1}(t) - \theta_{\eta_2}(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_V^2 ds, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.58)$$

Démonstration Le résultat découle de l'équation classique d'évolution du premier ordre donnée dans [3].

Ici le triplet de Gelfand est donné par

$$E \subset L^2(\Omega) = (L^2(\Omega))' \subset E'.$$

L'opérateur K est linéaire et coercif. Par l'inégalité de Korn, nous avons

$$(K\tau, \tau)_{E' \times E} \geq C |\tau|_E^2.$$

Ici et ci-dessous, $C > 0$ désigne une constante générique dont la valeur peut varier d'une ligne à l'autre.

Soit $\eta \in \mathcal{C}(0, T; L^2(\Omega))$ et considérons le problème variationnel suivant pour l'endommagement

Problème $PV3_\eta$

Trouvez l'endommagement $\xi_\eta : [0, T] \rightarrow H^1(\Omega)$ tel que $\xi_\eta(t) \in F$ et

$$\begin{aligned} & (\dot{\xi}_\eta(t), \zeta - \xi_\eta(t))_{L^2(\Omega)} + a(\xi_\eta(t), \zeta - \xi_\eta(t)) \\ & \geq (S(\varepsilon(\mathbf{u}(t)), \xi_\eta(t)), \zeta - \xi_\eta(t))_{L^2(\Omega)} \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\xi_\eta(0) = \xi_0 \quad (3.60)$$

pour tout $\xi(t) \in F, \zeta \in F$ et $t \in (0, T)$

Notez que si $f \in H$ alors

$$(f, v)_{V' \times V} = (f, v)_H, \forall v \in H.$$

On applique le théorème 3.1.1 (voir annexe) pour résoudre le problème **PV3 $_\eta$** .

Lemme 3.1.4 (voir[8]) *Il existe une solution unique ξ_η au problème auxiliaire **PV3 $_\eta$** telle que :*

$$\xi_\eta \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)). \quad (3.61)$$

Le lemme ci-dessus découle d'un résultat standard pour les inégalités variationnelles paraboliques

Démonstration L'application d'inclusion de $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$ vers $(L^2(\Omega), \|\cdot\|_{L^2(\Omega)})$ est continue et son rang est dense. Nous notons par $(H^1(\Omega))'$ l'espace dual de $H^1(\Omega)$ et, en identifiant le dual de $L^2(\Omega)$ avec lui-même, nous pouvons écrire le triplet de Gelfand

$$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset (H^1(\Omega))'.$$

Nous utilisons la notation $(\cdot, \cdot)_{(H^1(\Omega))' \times H^1(\Omega)}$ pour représenter la dualité appariement entre $(H^1(\Omega))$ et $H^1(\Omega)$. Nous avons

$$(\xi, \beta)_{(H^1(\Omega))' \times H^1(\Omega)} = (\xi, \beta)_{L^2(\Omega)}, \forall \xi \in L^2(\Omega), \beta \in H^1(\Omega)$$

et nous notons que F est un ensemble convexe fermé dans $H^1(\Omega)$. Ensuite, en utilisant la définition (3.29) de la forme bilinéaire a , et le fait que $\xi_\eta \in F$.

Dans la quatrième étape, nous utilisons le champ de déplacement u_η obtenu dans le lemme 3.1.2, θ_η obtenu dans le lemme 3.1.3 et l'endommagement ξ_η obtenu dans le lemme 3.1.4 pour construire le problème de Cauchy suivant pour le champ de contraintes.

Problème $PV4_\eta$

Trouver le champ de contrainte $\sigma_\eta : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$ tel que

$$\begin{aligned} \sigma_\eta(t) &= \mathcal{G}(\varepsilon(\mathbf{u}_\eta(t), \xi_\eta(t))) + \int_0^t \mathcal{F}(\sigma_\eta(s), \varepsilon(\mathbf{u}_\eta(s))) ds - C_e \theta(t) \\ \forall t &\in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Dans l'étude du problème **PV4 $_\eta$** , nous avons le résultat suivant :

Lemme 3.1.5 (voir[8]) **PV4 $_\eta$** a une solution unique $\sigma_\eta \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{H})$. De plus, si $\sigma_i, \mathbf{u}_i, \theta_i$ et ξ_i représentent respectivement les solutions des problèmes $PV4_\eta$, $PV1_\eta$, $PV2_\eta$ et $PV3_\eta$ Pour $\eta_i \in L^2(0, T; V')$, $i = 1, 2$ alors il existe $C > 0$ tel que

$$\begin{aligned} |\sigma_1(\mathbf{t}) - \sigma_2(\mathbf{t})|_{\mathcal{H}}^2 &\leq C(|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 + |\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + \\ &|\xi_1(t) - \xi_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 ds) \quad \forall t \in [0, T] \end{aligned} \quad (3.63)$$

Démonstration Soit $\Lambda_\eta : L^2(0, T; \mathcal{H}) \rightarrow L^2(0, T; \mathcal{H})$ l'opérateur donné par

$$\Lambda_\eta \sigma(\mathbf{t}) = \mathcal{G}(\varepsilon(\mathbf{u}_\eta(t), \xi_\eta(t))) + \int_0^t \mathcal{F}(\sigma(s), \varepsilon(\mathbf{u}_\eta(s))) ds - C_e \theta(t) \quad (3.64)$$

pour tout $\sigma_\eta \in L^2(0, T; \mathcal{H})$ et $t \in [0, T]$. Pour $\sigma_1, \sigma_2 \in L^2(0, T; \mathcal{H})$, nous utilisons (3.64) et (3.14) pour obtenir pour tout $t \in [0, T]$:

$$|\Lambda_\eta \sigma_1(\mathbf{t}) - \Lambda_\eta \sigma_2(\mathbf{t})|_{\mathcal{H}} \leq L_{\mathcal{F}} |\sigma_1(s) - \sigma_2(s)|_{\mathcal{H}} ds.$$

Il découle de cette inégalité que pour p assez grand, l'opérateur Λ_η^p est une contraction de l'espace de Banach $L^2(0, T; \mathcal{H})$, et il existe donc un élément unique $\sigma_\eta \in L^2(0, T; \mathcal{H})$ tel que $\Lambda_\eta \sigma_\eta(t) = \sigma_\eta$. De plus,, σ_η est la solution unique du problème **PV4** $_\eta$, et en utilisant (3.62), la régularité de $\mathbf{u}_\eta$, la régularité de ξ_η , la régularité de θ_η , et les propriétés des opérateurs $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$, et C_e , il en résulte que $\sigma_\eta \in W^{1,2}(0, T; V')$.

Considérons maintenant $\eta_1, \eta_2 \in L^2(0, T; V')$ et pour $i = 1, 2$ on pose $\mathbf{u}_{\eta_i} = \mathbf{u}_i$, $\sigma_{\eta_i} = \sigma_i$, $\xi_{\eta_i} = \xi_i$ et $\theta_{\eta_i} = \theta_i$. Nous avons

$$\sigma_i(t) = \mathcal{G}(\varepsilon(\mathbf{u}_i(t)), \xi_i(t)) + \int_0^t \mathcal{F}(\sigma_i(s), \varepsilon(\mathbf{u}_i(s))) ds - C_e \theta_i(t)$$

et en utilisant les propriétés (3.14), (3.15), (3.16) de $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$ et C_e respectivement nous trouvons

$$\begin{aligned} |\sigma_1(t) - \sigma_2(t)|_{\mathcal{H}}^2 &\leq C(|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 + |\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + |\xi_1(t) - \xi_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &+ \int_0^t |\sigma_1(s) - \sigma_2(s)|_{\mathcal{H}}^2 ds) + \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 ds, \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Nous utilisons l'argument de Gronwall dans l'inégalité précédente pour déduire (3.63), ce qui achève la preuve du lemme 3.1.5.

Enfin, nous définissons l'opérateur

$$\Lambda : L^2(0, T; V') \rightarrow L^2(0, T; V')$$

par

$$\begin{aligned} (\Lambda \eta(t), w)_{V' \times V} &= (\mathcal{G}(\varepsilon(\mathbf{u}_\eta(t)), \xi_\eta(t)), \varepsilon(w))_{\mathcal{H}} \\ &+ \left(\int_0^t \mathcal{F}(\sigma_\eta(s), \varepsilon(\mathbf{u}_\eta(s))) ds - C_e \theta_\eta(t), \varepsilon(w) \right)_{\mathcal{H}}, \quad \forall t \in [0, T] \end{aligned} \quad (3.65)$$

Ici, pour tout $\eta \in L^2(0, T; V')$ $\mathbf{u}_\eta$, θ_η , ξ_η et σ_η représentent le champ de déplacement, la température, l'endommagement et le champ de contraintes obtenu dans les Lemmes 3.1.2, 3.1.3, 3.1.4 et 3.1.5 respectivement. Nous avons les résultats suivants :

Lemme 3.1.6 (voir[8]) *L'opérateur Λ a un point fixe unique $\eta \in L^2(0, T; V')$ tel que $\Lambda \eta = \eta$.*

Démonstration Soient maintenant $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2 \in L^2(0, T; V')$. Nous utilisons la notation $\mathbf{u}_{\eta_i} = \mathbf{u}_i$, $\dot{\mathbf{u}}_{\eta_i} = \mathbf{v}_{\eta_i} = \mathbf{v}_i$, $\sigma_{\eta_i} = \sigma_i$, $\xi_{\eta_i} = \xi_i$ et $\theta_{\eta_i} = \theta_i$, pour $i = 1, 2$. on utilisant (3.12), (3.14), (3.21), et (3.65) pour obtenir

$$\begin{aligned} |\Lambda \boldsymbol{\eta}_1(\mathbf{t}) - \Lambda \boldsymbol{\eta}_2(\mathbf{t})|_{V'}^2 &\leq C(|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 + |\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + |\xi_1(t) - \xi_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &+ \int_0^T |\boldsymbol{\sigma}_1(s) - \boldsymbol{\sigma}_2(s)|_{\mathcal{H}}^2 ds + \int_0^T |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 ds \end{aligned} \quad (3.66)$$

Nous utilisons l'estimation (3.63) pour obtenir

$$\begin{aligned} |\Lambda \boldsymbol{\eta}_1(\mathbf{t}) - \Lambda \boldsymbol{\eta}_2(\mathbf{t})|_{V'}^2 &\leq C(|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 + |\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + |\xi_1(t) - \xi_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &+ \int_0^T |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 + \int_0^T |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds \end{aligned} \quad (3.67)$$

De plus, de (3.47) on obtient

$$\begin{aligned} &(\dot{\mathbf{v}}_1 - \dot{\mathbf{v}}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_{V' \times V} + (\mathcal{A}\mathbf{v}_1 - \mathcal{A}\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_{V' \times V} \\ &\leq -(\eta_1 - \eta_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_{V' \times V} \end{aligned}$$

Nous intégrons cette inégalité dans le temps. Nous utilisons les conditions initiales $\mathbf{v}_1(0) = \mathbf{v}_2(0) = \mathbf{v}_0$, la relation (3.46) et (3.12) pour trouver que

$$m_{\mathcal{A}} \int_0^T |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V^2 ds \leq C \int_0^T |\boldsymbol{\eta}_1(\mathbf{t}) - \boldsymbol{\eta}_2(\mathbf{t})|_V |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V ds$$

Pour tout $t \in [0, T]$. Puis, en utilisant l'inégalité $2ab \leq \frac{a^2}{m_{\mathcal{A}}} + m_{\mathcal{A}}b^2$, nous obtenons

$$\int_0^T |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V^2 ds \leq C \int_0^T |\boldsymbol{\eta}_1(s) - \boldsymbol{\eta}_2(s)|_V ds, \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.68)$$

Puisque $\mathbf{u}_1(0) = \mathbf{u}_2(0) = \mathbf{u}_0$ nous avons

$$|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 \leq C \int_0^T |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V^2 ds$$

Nous utilisons l'inégalité précédente et (3.67) pour obtenir

$$\begin{aligned} |\Lambda \boldsymbol{\eta}_1(\mathbf{t}) - \Lambda \boldsymbol{\eta}_2(\mathbf{t})|_{V'}^2 &\leq C(\int_0^T |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V^2 ds + \\ &|\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + |\xi_1(t) - \xi_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds) \end{aligned}$$

Les estimations (3.68) et (3.58) impliquent que

$$|\Lambda \boldsymbol{\eta}_1(\mathbf{t}) - \Lambda \boldsymbol{\eta}_2(\mathbf{t})|_{V'}^2 \leq \int_0^T C |\boldsymbol{\eta}_1(\mathbf{s}) - \boldsymbol{\eta}_2(\mathbf{s})|_{V'}^2 ds$$

Réitérer cette inégalité m fois conduit à

$$|\Lambda^m \boldsymbol{\eta}_1 - \Lambda^m \boldsymbol{\eta}_2|_{L^2(0,T;V')}^2 \leq \frac{C^m T^m}{m!} |\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2|_{L^2(0,T;V')}^2$$

Pour m suffisamment grand, Λ^m est une contraction de l'espace de Banach $L^2(0, T; V')$, et donc Λ a un point fixe unique.

Maintenant, nous avons tous les ingrédients nécessaires pour prouver le théorème 3.1.1.

Démonstration Soit $\boldsymbol{\eta}^* \in L^2(0, T; V')$ le point fixe de Λ défini par (3.65) et notons

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\boldsymbol{\eta}^*}, \theta = \theta_{\boldsymbol{\eta}^*}, \xi = \xi_{\boldsymbol{\eta}^*}, \sigma = \sigma_{\boldsymbol{\eta}^*} \quad (3.69)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}) + \boldsymbol{\sigma}^* \quad (3.70)$$

Nous prouvons que $(\mathbf{u}, \sigma, \xi, \theta)$, satisfait (3.30)-(3.34) et (3.38)-(3.41). En effet, nous écrivons (3.62) pour $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}^*$ et utilisons (3.69)-(3.70), nous obtenons que (3.30) est satisfait. Nous considérons (3.42) pour $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}^*$ et utilisons la première égalité dans (3.69) pour trouver

$$\begin{aligned} & (\ddot{\mathbf{u}}(t), w - \dot{\mathbf{u}}(t))_{V' \times V} + (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}), \varepsilon(w - \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{t})))_{\mathcal{H}} + j(w) - j(\dot{\mathbf{u}}(t)) \\ & + (\eta^*(t), w - \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{t}))_{V' \times V} \geq (\mathbf{f}(t), w - \dot{\mathbf{u}}(t))_{V' \times V}, \quad \forall w \in V \end{aligned} \quad (3.71)$$

l'équation $\Lambda \boldsymbol{\eta}^* = \boldsymbol{\eta}^*$ combiné avec (3.65), (3.69) et (3.70) montre que

$$\begin{aligned} & (\eta^*(t), w)_{V' \times V} = \mathcal{G}(\varepsilon(\mathbf{u}(t)), \varepsilon(w))_{\mathcal{H}} + \\ & \left(\int_0^t \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(s)), \varepsilon(\mathbf{u}(s))) ds - C_e \theta(t), \varepsilon(w) \right) \quad \forall w \in V \end{aligned} \quad (3.72)$$

Nous substituons maintenant (3.72) dans (3.71) et utilisons (3.70) pour vérifier que (3.37) est satisfait. Nous écrivons (3.55) pour $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}^*$ et utilisons (3.69) pour trouver que (3.32) est satisfait. Ainsi, (3.34) est satisfait lorsque les régularités (3.38) et (3.41) découlent des Lemmes

3.1.2 et 3.1.3. La régularité $\boldsymbol{\sigma} \in L^2(0, T; \mathcal{H})$ découle des Lemmes 3.1.2 et 3.1.3, les suppositions (3.12) et (3.70). Enfin, (3.31) implique que

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0(t) = \rho \ddot{\mathbf{u}}(t) \quad \text{in } V', \quad p.p.t \in [0, T]$$

et donc par (3.19) et (3.21), nous trouvons $\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \in L^2(0, T; V')$. On en déduit que la régularité (3.40) est vérifiée, ce qui termine la partie existence du théorème 3.1.1. L'unicité de la solution du théorème 3.1.1 est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ défini par (3.65) et la solution unique des problèmes **PV1**_η, **PV2**_η, **PV3**_η et **PV4**_η.

Conclusions et perspectives

Conclusions

Conclusions théoriques

- *Résultat d'existence et unicité.*
- *L'analyse variationnelle des modèles* : la résolution d'un problème thermomécanique se ramène à un problème mécanique isotherme.

Conclusions mécaniques

- *Interprétation* contact, frottement, usure...
- *Modélisation thermomécanique* : les lois thermomécaniques peuvent-être obtenus en associant en parallèle les contraintes thermiques et mécaniques.

Perspectives

Cette thèse permet de trouver quelques problèmes ouverts dans la mécanique de contact et les méthodes de résolution de tels problèmes mécaniques.

- Formulation du problème (thermo électro-mécanique, thermo magnéto mécanique, ou multiphysiques).
- Les hypothèses sur les données (les différents opérateurs des lois de comportement, les lois de contact utilisées).

Annexe

Nous donnons ici quelques définitions et propriétés sur les espaces fonctionnels associées à l'étude des problèmes thermomécaniques, nous énonçons quelques théorèmes classiques d'existence et d'unicité. En outre, dans la rédaction de cet annexe, nous avons utilisé [5]. Pour plus de détails sur les espaces on renvoie par exemple à [28].

Rappels sur les espaces de Hilbert

Soit X un espace vectoriel et $\langle ., . \rangle_X$ un produit scalaire sur X c'est à dire

$$\langle ., . \rangle_X : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

est une application bilinéaire symétrique et définie positive .

On note par $|\cdot|_X$ l'application de X dans $\mathbb{R}_+$ définie par :

$$|u|_X = \langle u, u \rangle_X^{\frac{1}{2}}$$

$|\cdot|_X$ s'appelle la norme sur X . On dit que X est un espace de Hilbert.

$H, \mathcal{H}$ sont des espaces de Hilbert munis respectivement par les produits scalaires suivants :

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u_i v_i dx \quad \forall u, v \in H$$

$$\langle \sigma, \tau \rangle = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} dx \quad \forall \sigma, \tau \in \mathcal{H}$$

Définitions des espaces H et $\mathcal{H}$

De l'espace des fonctions mesurables de carré intégrables $L^2(\Omega)$; on a

$$H = [L^2(\Omega)]^3 \quad , \quad \mathcal{H} = [L^2(\Omega)]_s^{3 \times 3}.$$

Leurs normes sont définies comme suit :

$$|u|_H^2 = \int_{\Omega} |u|^2 dx \quad , \quad \forall u \in H \quad ; \quad |\sigma|_{\mathcal{H}}^2 = \int_{\Omega} |\sigma|^2 dx \quad , \quad \forall \sigma \in \mathcal{H}.$$

Espaces liés aux differents opérateurs étudiés :

Espace lié à l'opérateur de déformation ε :

Soit $\varepsilon : H \rightarrow \mathcal{H}$ on définit l'espace lié à cet opérateur par :

$$H_1 = \{u \in H / \varepsilon(u) \in \mathcal{H}\}.$$

est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle_{H_1} = \langle u, v \rangle_H + \langle \varepsilon(u), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}}.$$

et la norme associée est définie par :

$$|u|_{H_1}^2 = |u|_H^2 + |u|_{\mathcal{H}}^2 \quad \forall u \in H_1.$$

Espace lié à l'opérateur divergence Div

L'opérateur de divergence est défini par :

$$\text{Div} : \mathcal{H} \rightarrow H$$

tel que

$$\text{Div} \phi = (\partial_i \phi_{ij}), \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \forall \phi \in \mathcal{H}$$

L'espace lié à cet opérateur est définie par :

$$\mathcal{H}_1 = \{\sigma \in \mathcal{H} \ / \ Div\sigma \in H\}$$

c'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$\langle \sigma, \tau \rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle \sigma, \tau \rangle_{\mathcal{H}} + \langle Div(\sigma), Div(\tau) \rangle_H.$$

et la norme associée est définie par :

$$|\sigma|_{\mathcal{H}_1}^2 = |\sigma|_{\mathcal{H}}^2 + |Div\sigma|_H^2, \quad \forall \sigma \in \mathcal{H}_1$$

Espace lié à l'opérateur de la température θ :

Soit $\theta : \tilde{H} \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}$ on définit l'espace lié à cet opérateur par :

$$\tilde{H}_1 = \{\theta \in \tilde{H} / \nabla \theta \in \tilde{\mathcal{H}}\}.$$

est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$\langle \theta, \varphi \rangle_{\tilde{H}_1} = \langle \theta, \varphi \rangle_{\tilde{H}} + \langle \nabla \theta, \nabla \varphi \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}}.$$

et la norme associée est définie par :

$$|\theta|_{\tilde{H}_1}^2 = |\theta|_{\tilde{H}}^2 + |\nabla \theta|_{\tilde{\mathcal{H}}}^2 \quad \forall \theta \in \tilde{H}_1.$$

Espace lié à l'opérateur divergence div

L'opérateur de divergence est défini par :

$$\text{div} : \tilde{\mathcal{H}} \rightarrow \tilde{H}$$

tel que

$$\text{div} q = (\partial_i q_{ij}), \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \forall q \in \tilde{\mathcal{H}}$$

L'espace lié à cet opérateur est définie par :

$$\tilde{\mathcal{H}}_1 = \{q \in \tilde{\mathcal{H}} \ / \ \text{div} q \in \tilde{H}\}$$

est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$\langle q, p \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}_1} = \langle q, p \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}} + \langle \text{div}(q), \text{div}(p) \rangle_{\tilde{H}}.$$

et la norme associée est définie par :

$$|q|_{\tilde{\mathcal{H}}_1}^2 = |q|_{\tilde{\mathcal{H}}}^2 + |\text{div} q|_{\tilde{H}}^2, \quad \forall q \in \tilde{\mathcal{H}}_1$$

Quelques propriétés sur les espaces considérés

Pour un espace X de Hilbert nous avons les inégalités suivantes :

$$\langle f, g \rangle_X \leq |f|_X |g|_X, \quad \forall f, g \in X.$$

$$|f|_X - |g|_X \leq |f + g|_X \leq |f|_X + |g|_X, \quad \forall f, g \in X$$

Nous avons :

$$|u|_H \leq |u|_{H_1}, \quad |\varepsilon(u)|_{\mathcal{H}} \leq |u|_{H_1} \quad \forall u \in H_1.$$

$$|\sigma|_{\mathcal{H}} \leq |\sigma|_{\mathcal{H}_1}, \quad |\text{Div} \sigma|_H \leq |\sigma|_{\mathcal{H}_1} \quad \forall \sigma \in \mathcal{H}_1.$$

$$\langle \sigma, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_1} + \langle \text{Div} \sigma, u \rangle_{H_1 \times H_1} = 0, \quad \forall u \in H_1, \forall \sigma \in \mathcal{H}_1$$

Nous avons aussi :

$$|\theta|_{\tilde{H}} \leq |\theta|_{\tilde{H}_1}, \quad |\nabla \theta|_{\tilde{\mathcal{H}}} \leq |\theta|_{\tilde{H}_1} \quad \forall \theta \in \tilde{H}_1.$$

$$|q|_{\tilde{\mathcal{H}}} \leq |q|_{\tilde{\mathcal{H}}_1}, \quad |\text{div} q|_{\tilde{H}} \leq |q|_{\tilde{\mathcal{H}}_1} \quad \forall q \in \tilde{\mathcal{H}}_1.$$

$$\langle q, \nabla \theta \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}_1 \times \tilde{\mathcal{H}}_1} + \langle \text{div} q, \theta \rangle_{\tilde{H}_1 \times \tilde{H}_1} = 0, \quad \forall \theta \in \tilde{H}_1, \forall q \in \tilde{\mathcal{H}}_1$$

Les applications traces

Les applications traces pour les problèmes mécaniques

Application trace associée à H_1

Il existe une application linéaire , continue , surjective

$$\gamma : H_1 \rightarrow H_\Gamma = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

telle que $\gamma u = u/\Gamma \quad \forall u \in H_1$,

$$|\gamma u|_{H_\Gamma} \leq |u|_{H_1}$$

et une application inverse linéaire continue $Z : H_\Gamma \rightarrow H_1$ tel que :

$$\gamma(Z(\zeta)) = \zeta, \quad \forall \zeta \in H_\Gamma$$

$$|Z(\zeta)|_{H_1} \leq c|\zeta|_{H_\Gamma} \quad \forall \zeta \in H_\Gamma, \quad c > 0$$

Application trace associée à H_1

Il existe une application linéaire , continue , surjective

$$\gamma_v : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}'_\Gamma \quad \gamma_v \sigma = \sigma v \quad \forall \sigma \in \mathcal{H}_1$$

et une application inverse linéaire continue $Z_v : \mathcal{H}'_\Gamma \rightarrow H_1$ telle que

$$\gamma_v(Z_v(\zeta)) = \zeta, \quad \forall \zeta \in \mathcal{H}'_\Gamma$$

γ_v vérifie la formule de base :

$$\langle \gamma_v \sigma, \gamma u \rangle_{\dot{H}_\Gamma \times H_\Gamma} = \langle \sigma, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle \text{Div} \sigma, u \rangle_H, \quad \forall u \in H_1, \quad \sigma \in \mathcal{H}_1$$

On définit les espaces suivants :

$$V = \{u \in H_1 \mid \gamma u = 0 \text{ sur } \Gamma_1\},$$

$$\mathcal{V} = \{\sigma \in H_1 \mid \text{Div} \sigma = 0 \text{ dans } \Omega, \sigma v = 0 \text{ sur } \Gamma_2\}$$

$$W = \{\sigma \in \mathcal{H}_1 \mid \sigma v = 0 \text{ sur } \Gamma_2\}.$$

La formule de base devient :

$$\langle \sigma, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle \text{Div} \sigma, u \rangle_H = 0, \quad \forall u \in V, \quad \sigma \in W$$

$$\langle \sigma, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} = 0, \quad \forall u \in V, \quad \sigma \in \mathcal{V} \quad (\text{la formule d'orthogonalité})$$

Les applications traces pour les problèmes thermiques

Application trace associée à $\tilde{H}_1$

Il existe une application linéaire , continue , surjective

$$\tilde{\gamma} : \tilde{H}_1 \rightarrow \tilde{H}_\Gamma = \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

telle que $\tilde{\gamma}\theta = \theta/\Gamma \quad \forall \theta \in \tilde{H}_1$,

$$|\tilde{\gamma}\theta|_{\tilde{H}_\Gamma} \leq |\theta|_{\tilde{H}_1}$$

et une application inverse linéaire continue $\tilde{Z} : \tilde{H}_\Gamma \rightarrow \tilde{H}_1$ telle que :

$$\tilde{\gamma}(\tilde{Z}(\zeta)) = \zeta, \quad \forall \zeta \in \tilde{H}_\Gamma$$

$$|\tilde{Z}(\zeta)|_{\tilde{H}_1} \leq c|\zeta|_{\tilde{H}_\Gamma} \quad \forall \zeta \in \tilde{H}_\Gamma, \quad c > 0$$

Application trace associée à $\tilde{H}_1$

Il existe une application linéaire , continue , surjective

$$\tilde{\gamma}_v : \tilde{\mathcal{H}}_1 \rightarrow \tilde{H}' \quad \tilde{\gamma}_v q = qv \quad \forall q \in \tilde{\mathcal{H}}_1$$

et une application inverse linéaire continue $\tilde{Z}_v : \tilde{H}_\Gamma \rightarrow \tilde{H}_1$ telle que

$$\tilde{\gamma}_v(\tilde{Z}_v(\zeta)) = \zeta, \quad \forall \zeta \in \tilde{H}_\Gamma$$

$\tilde{\gamma}_v$ vérifie la formule de base :

$$\langle \tilde{\gamma}_v q, \tilde{\gamma} \theta \rangle_{\tilde{H}_\Gamma \times \tilde{H}_\Gamma} = \langle q, \nabla \theta \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}} + \langle \operatorname{div} q, \theta \rangle_{\tilde{H}}, \quad \forall \theta \in \tilde{H}_1, \quad q \in \tilde{\mathcal{H}}_1$$

On définit les espaces suivants :

$$\tilde{V} = \{ \theta \in \tilde{H}_1 \mid \tilde{\gamma} \theta = 0 \text{ sur } S_T \},$$

$$\tilde{\mathcal{V}} = \left\{ q \in \tilde{H}_1 \mid \operatorname{div} q = 0 \text{ dans } \Omega, \quad qv = 0 \text{ sur } S_\varphi \right\}$$

$$\tilde{W} = \{ q \in \tilde{\mathcal{H}}_1 \mid qv = 0 \text{ sur } S_\varphi \}.$$

La formule de base devient :

$$\langle q, \nabla \theta \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}} + \langle \operatorname{div} q, \theta \rangle_{\tilde{H}} = 0, \quad \forall \theta \in \tilde{V}, \quad q \in \tilde{W}$$

$$\langle q, \nabla \theta \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}} = 0, \quad \forall \theta \in \tilde{V}, \quad q \in \tilde{\mathcal{V}} \quad (\text{la formule d'orthogonalité})$$

Quelques théorèmes d'existence

Nous citons certains théorèmes utilisés dans cette thèse, pour avoir plus de détails sur les rappels figurant dans cette thèse, nous proposons de voir par exemple [4].

Théorème 3.1.2 (L'inégalité de Korn) *Supposons que $\operatorname{mes} \Gamma_1 > 0$, alors il existe une constante $C > 0$ qui dépend de Ω et Γ_1 telle que :*

$$|\varepsilon(u)|_{\mathcal{H}} \geq C |u|_{H_1}$$

Théorème 3.1.3 (Lax-Miligram) Soit X un espace de Hilbert, soit $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, continue et coercive. Alors

$$\forall f \in X, \exists ! u \in X \text{ tel que } a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in X.$$

Théorème 3.1.4 (Minty-Browder) Soit X un espace de Banach, et soit $A : X \rightarrow \dot{X}$ une application non linéaire fortement monotone et de Lipschitz c'est-à-dire qu'il existe des constantes M, m strictement positives telles que :

$$\langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2 \rangle_{\dot{X} \times X} \geq m|u_1 - u_2| \quad \forall u_1, u_2 \in X$$

$$|Au_1 - Au_2|_{\dot{X}} \leq M|u_1 - u_2|_X, \quad \forall u_1, u_2 \in X$$

Alors

pour tout $f \in \dot{X}$, il existe $u \in X$ unique tel que : $Au = f$.

Théorème 3.1.5 Si A est un opérateur linéaire, continue et définie positif et A est convexe fermé non vide de H , alors l'inéquation variationnel elliptique

$$u \in K, \langle Au, v - u \rangle_H \geq \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in H$$

possède une solution unique $u \in K$.

Lemmes de Gronwall

Lemme 3.1.7 Soient $m, n \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\phi \in C([0, T]; \mathbb{R})$ est une fonction telle que

$$\frac{1}{2}\phi^2(t) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^t m(s)\phi(s)ds + \int_0^t n(s)\phi^2(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\|\phi(t)\| \leq (a + \int_0^t m(s)ds) \exp(\int_0^t n(s)ds) \quad \forall t \in [0, T],$$

Dans le cas particulier $m = 0$, le lemme devient :

Lemme 3.1.8 *Soient $n \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telle que $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\phi \in C([0, T]; \mathbb{R})$ est une fonction telle que*

$$\frac{1}{2}\phi^2(t) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^t n(s)\phi^2(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\|\phi(t)\| \leq a \cdot \exp\left(\int_0^t n(s)ds\right) \quad \forall t \in [0, T],$$

le résultat suivant concerne l'existence et l'unicité de la solution d'une inéquation variationnelle figurant dans l'étude des problèmes de contact avec endommagement.

Théorème 3.1.6 *Soit $V \subset H \subset V'$ un triplet de Gelfand. Soit K un ensemble non vide fermé et convexe de V . Supposons que $\mathbf{a}(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire continue et symétrique telle que, pour certaines constantes, $\zeta > 0$ et c_0 ,*

$$\mathbf{a}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = c_0 \|\mathbf{v}\|_H^2 \geq \zeta \|\mathbf{v}\|_V^2, \quad \forall \mathbf{v} \in H$$

Alors, pour tout $\mathbf{u}_0 \in K$ et $f \in L^2(0, T; H)$, il existe une fonction unique $\mathbf{u} \in H^1(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$ telle que

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \mathbf{u}(t) \in K \quad \text{pour tout } t \in [0, T],$$

et pour tout $t \in (0, T)$,

$$(\dot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_{V' \times V} + \mathbf{a}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) \geq (f(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_H,$$

$\forall \mathbf{v} \in K$,

Bibliographie

Bibliographie

- [1] A. Azeb, S. Boutechebak, *Analysis of a dynamic thermo-elastic-viscoplastic contact problem*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., 2013, No. 71, 1–17.
- [2] A. Aissaoui, N. Hemici, *Bilateral contact problem with adhesion and damage*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., **2014**, No. 18, 1-16.
- [3] V. Barbu, *Optimal Control of Variational Inequalities*, Pitman, Boston, (1984). MR 0742624 Zbl 0574.49005
- [4] H. Brézis ; *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, Masson, (1987).
- [5] H. Brézis ; *Equations et Inéquations Non Linéaires dans les Espaces en Dualité*, Annale de l'Institut Fourier, Tome 18, n1, (1968), p. 115-175.
- [6] I. Boukaroura and S. Djabi, *Analysis of a quasistatic contact problem with wear and damage for thermo-viscoelastic materials*. Malaya Journal of Matematik : Volume 6, Issue 2, 2018, Pages 299-309
- [7] I. Boukaroura and S. Djabi, *Analysis of frictional contact problem with wear and damage between two thermo-viscoelastic bodies*. Applicationes mathematicae : Volume 45, 2018, Pages 129-150
- [8] I. Boukaroura and S. Djabi, *A dynamic Tresca's frictional contact problem with damage for thermo elastic-viscoplastic bodies*. Studia Univ. Babes Bolayai, Mathematica : accepted in January 2019.

- [9] A. Djabi and A. Merouani, *Bilateral contact problem with friction and wear for an elastic-viscoplastic materials with damage*, Taiwanese J. Math, (2015). DOI 10.11650/tjm.19.2015.5453
- [10] S. Djabi, *A monotony method in quasistatic processes for viscoplastic materials with internal state variables*, Revue Roumaine de Maths Pures et Appliquées, 42 (1997), 5-6, 401-408.
- [11] S. Djabi, *A monotony method in quasistatic processes for viscoplastic materials with $E = E(e(\dot{u}), k)$* , Mathematical Reports (SCM), vol. 2 (52), n ° 1.2000.
- [12] S. Djabi and M. Sofonea, *A fixed point method in quasistatic rate-type viscoplasticity*, Appl. Math. and Comp Sci. v.3, n ° 2, pp 269-279 (1993).
- [13] G. Duvaut, J.-L. Lions, *Les inéquations en mécanique et en physique.(in French) [The inequalities in mechanics and physics]* , Springer, Berlin,1976.
- [14] A. M. A. El-Sayed, Fatma. M. Gaafar, R. O. Abd-El-Rahman and M. M. El-Haddad , *Existence of solutions of q-functional integral equations with deviated argument*, Malaya Journal of Matematik, Volume 4, Issue 3, 2016, Pages :373-379.
- [15] C. Eck, J. Jarušek, M. Krbeč; *Unilateral Contact Problems : Variational Methods and Existence Theorems*, Pure and Applied Mathematics **270**, Chapman/CRC Press, New York, 2005.
- [16] M. Frémond and B. Nedjar; *Damage in concrete : the unilateral phenomenon*, Nuclear Engng. Design, 156, (1995), 323-335.
- [17] M. Frémond and B. Nedjar; *Damage, Gradient of Damage and Principle of Virtual Work*, Int. J. Solids Structures, 33 (8), 1083-1103. (1996).
- [18] T. Hadj Ammar; *Quasistatic contact problem between thermo-electroelastic bodies with long-term memory and adhesion*, Malaya Journal of Matematik, Volume 4, Issue 2, 2016, Pages :211-223,

- [19] T. Hadj Ammar, B. Benabderrahmane, S. Drabla, *Frictional contact problems for electro-viscoelastic materials with long-term memory, damage, and adhesion*, electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2014 (2014). No 222. pp 1-21
- [20] T. Hadj Ammar, B. Benabderrahmane, S. Drabla, *A dynamic contact problem between elasto-viscoplastic piezoelectric bodies*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations 2014, No. 49, 1-21.
- [21] W. Han, M. Sofonea; *Evolutionary Variational inequalities arising in viscoelastic contact problems*, SIAM Journal of Numerical Analysis **38** (2000), 556–579.
- [22] W. Han, M. Sofonea; *Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity*, Studies in Advanced Mathematics **30**, American Mathematical Society, Providence, RI - Intl. Press, Sommerville, MA, 2002.
- [23] P. Ireman , A. Klarbring, N. Strömberg, *A model of damage coupled to wear*, Int. J. Solids Structures, **40** (2003)2957–2974. DOI 10.1016/S0020-7683(03)00121-5.
- [24] J.J. Bickerman, *Thermodynamics, adhesion, and sliding friction*, J. Lube. Technol. **92**, 243-247 (1970). DOI 10.1115/1.3451372.
- [25] N. Lebri, S. Djabi and S. Boutchbek, *Bilateral contact with Tresca’s friction law and internal state variables*, Applied mathematical sciences, vol.2, 2008, N 10, 479-488.
- [26] A. Merouani, S. Djabi, *A monotony method in quasistatic processes for viscoplastic materials*, Studia Univ. Babes Bolayai, Mathematica, Volume III, Number 1, March 2008.
- [27] A. Merouani, F. Messelmi, *Dynamic evolution of damage in elastic-thermo-viscoplastic materials*, Electron. J.Differential Equations, Vol. (2010), No. **129**, pp. 1–15.
- [28] J. Nečas, I. Hlaváček; *Mathematical Theory of Elastic and Elasto-plastic Bodies*, An Introduction. Elsevier, Amsterdam, 1981.
- [29] M. Selmani, L. Selmani; *Analysis of frictionless Contact problem for elastic-viscoplastic materials*, Nonlinear Analysis, Modelling and control, 2012, Vol. 17, No. 1, 99-77.

- [30] M. Shillor, M. Sofonea, *A quasistatic viscoelastic contact problem with friction*, Int. J. Engng. Sci., 38, 14 (2000), 1517-1533. DOI 10. 1016/S0020-7225 (99) 00126-3
- [31] M. Shillor, M. Sofonea, J. J. Telega ; *Models and Analysis of Quasistatic Contact*, Lecture Notes in Physics 655, Springer, Berlin, 2004.
- [32] M. Sofonea, W. Han, M. Shillor ; *Analysis and Approximation of Contact Problems with Adhesion or Damage*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 276, Chapman, Hall/CRC Press, New york, 2006.
- [33] N. Strömberg, L. Johansson, A. Klarbring ; *Derivation and analysis of a generalized standard model for contact friction and wear*, Int. J. Solids Structures, **33** (1996), 1817–1836.
- [34] A. Touzaline , *Analysis of a viscoelastic unilateral and frictional contact problem with adhesion*, Studia Univ. Babes Bolyai, Mathematica,8 (2013), No. 2, 263â “278