Introduction

Les problèmes de contact avec ou sans frottement faisant inter-agir des corps déformables ou non interviennent de multiples façons au sien bien dans le domaine industriel que dans la vie de tous les jours. Compte tenu de l'importance de ces phénomènes, la mécanique du contact est vaste et aborde autant de sujets différents qui sont la modélisation, l'analyse mathématique ou l'application numérique des problèmes de contact.

Les problèmes de contact avec frottement ont étudiés par Duvaut, Cocu dans le cas de l'élasticité et par Ionescu, Sofonea, Shilor et Drabla dans le cas de la plasticité.

Il est connu dans le milieu scientifique que les équations aux dérivées partielles jouent un rôle très important dans le concept de modélisation des phénomènes physiques. La mécanique de contact s'articule autour d'un système dynamique modélisé par des équations aux dérivées partielles et renforcé par différents types de conditions aux limites.

L'analyse mathématique des problèmes de contact devient plus encore plus délicat si on considère la non linéarité de la loi constitutive.

L'objet de cette thèse est de proposer une contribution à l'étude mathématique de quelques problèmes de contact avec ou sans frottement. Nous considérons des lois de comportement élastiques non linéaires ou viscoplastiques avec paramètre (qui peut être la température ou l'humidité). Les conditions aux limites de contact considérées sont celles de Signorini (le cas sans frottement) ou Tresca (le cas avec frottement). Les résultats obtenus sont des résultats d'existence et d'unicité de la solution, dépendance de la solution par rapport au paramètre suivi par des résultats sur le comportement de la solution du problème pénalisé. En introduisant une expression des forces de rappel sur une partie de la frontière, nous généralisons quelques résultats obtenus antérieurement par d'autre auteurs.

Cette thèse se compose de quatre chapitres. Dans le premier chapitre, on rappelle les résultats essentiels de la mécanique continus. On présente les lois de comportement élastiques et viscoplastiques, les conditions aux limites de contact avec et sans frottement

qui conduisent à trois problèmes mécaniques:

- Problème élastique non linéaire avec paramètre soumis à des conditions aux limites de Signorini.

- Problème viscoplastique avec paramètre soumis à des conditions aux limites de contact avec frottement de Tresca.

- Problème viscoplastique à variable interne d"état soumis à des conditions aux limites de contact avec frottement de Tresca.

Dans le deuxième chapitre, on étudie le problème de contact sans frottement de Signorini d'un corps élastique non linéaire avec une fondation rigide sous conditions aux limites généralisant ceux de B. Teniou. On donne, après avoir formulé le problème mécanique, une formulation variationnelle (en déplacements). Ensuite, un résultat d'existence et d'unicité de la solution faible. Enfin, on s'intéresse à l'étude de quelques propriétés de la solution.

Dans le troisième chapitre, nous étudions le problème de contact bilatéral avec frottement d'un corps viscoplastique avec paramètre et une fondation rigide. La loi de frottement considérée est celle de Tresca. On donne une formulation variationnelle pour le problème mécanique. Ensuite, un résultat d'existence et d'unicité pour la formulation variationnelle et finalement les propriétés de la solution.

Dans le quatrième chapitre, s'intéresse à l'étude d'un problème de contact bilatéral avec frottement de Tresca d'un problème viscoplastique à variable interne d'état et une fondation rigide. Dans l'étude de ce problème, on suit les mêmes étapes énoncées dans le chapitre précédent: on donne une généralisation des résultats obtenus par Sofonea, Drabla et Shilor.

Dans l'étude de ces trois problèmes, on a utilisé des méthodes standards des inéquations variationnelles, des résultats de monotonie et une technique de point fixe dans les espaces de Banach.

On termine cette thèse par un annexe résumant les principaux outilles mathématiques utilisés.

Notations

Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^N (N = 1, 2, 3)$, on note par

$\overline{\Omega}$ l'adhérence de Ω.

Γ la frontière Ω de supposée régulière.

Γ_i $(i = \overline{1,3})$ une partie mesurable de la frontière Γ.

$mes\ \Gamma_1$ la mesure de Lebesgue $(N-1)$ dimentionnelle de Γ_1.

ν la normale unitaire sortante.

$v_\nu\ ,\ v_\tau$ les composantes normales et tangentielles du champ vectoriel v défiué sur Ω.

$C^1(\Omega)$ l'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur Ω.

ν^j (resp. τ^j) désigne la normale unitaire sortante (resp. la tangente unitaire dans le sens positif).

$D(\Omega)$ l'espace des fonctions réelles indéfiniment défférentiables et à support compact contenu dans Ω.

$D^{'}(\Omega)$ l'espace de distributions sur Ω.

$\mathcal{D} = \mathcal{D}(\Omega)_S^{d\times d}$. $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\Omega)_S^{d\times d}$.

$L^\infty(\Omega)$ espace des fonctions mesurables u sur Ω telles que $\exists\ c > 0$: $|u(x)| \leq c$, *p.p.sur* Ω.

H l'espace$(\mathbb{L}^2(\Omega))^d$.

$\mathcal{H}$ l'espace$(\mathbb{L}^2(\Omega))_S^{d\times d}$.

H_1 l'espace $H^1(\Omega)^d$.

$\mathcal{H}_1$ l'espace $H^1(\Omega)^{n\times n}$.

$H_0^1(\Omega)$ l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ l'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ.

H_Γ l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$.

$H^{-\ \frac{1}{2}}(\Gamma)$ l'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

H_Γ' l'espace dual de H_Γ.

$\gamma : H_1 \to H_\Gamma$ l'application trace pour les fonctions vectorielles.

Si H est un espace de Hilbert réel et $d \in \mathbb{N}^*$, on utilise les notations suivantes

$\langle ., . \rangle_H$	le produit scalaire de H.
$\|.\|_H$	la norme de H.
H'	l'epace dual de H.
$\langle ., . \rangle_{H'}$	le produit de dualité entre $H^{'}$ et H.
H^d	l'espace$\left\{x = (x_i) / \ x_i \in H, \ i = \overline{1,d}\right\}$
$H_S^{d\times d}$	l'espace$\left\{x = (x_{ij}) / \ x_{ij} = \ x_{ji} \in H, \ i,j = \overline{1,d}\right\}$.
$x_n \to x$	la convergence forte de la suite (x_n) vers l'élément x dans H.
$x_n \rightharpoonup x$	la convergence faible de la suite (x_n) vers l'élément x dans H
$\mathcal{R}$	l'ensemble des déplacements rigides.
$\mathcal{L}(H)$	l'espace des applications linéaires et continues de H dans H.

Pour une fonction f, on note par

$dom\ f$	le domaine de f.
$supp\ f$	le support de f.
$\partial_i f$	la dérivée partielle de f par rapport à la ième composante x_i.
∇f	le gradient de f.
$\varepsilon(f)$	la partie symétrique du gradient de $f = \frac{1}{2}\left(\nabla f + \nabla^T f\right)$
$Div\ f$	la divergence de f.
∂f	le sous différentiel (classique) de f.

Si H^1et H^2 sont deux espaces de Hilbert réels, on note par

$\mathcal{L}(H^1, H^2)$	l'espace des applications linéaires et continues de H^1 dans H^2.

$\|.\|_{\mathcal{L}(H^1,H^2)}$ la norme de $\mathcal{L}(H^1, H^2)$.

Autres notations:

$lim\ inf$	la limite inférieure.
S_N	l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{N\times N}_S$
I_N	le tenseur identité du second ordre sur $\mathbb{R}^N$.
2^X	l'ensemble des parties de X.
0	le zéro de $\mathbb{R}^N$ et celui de S_N.
C	une constante générique strictement positive.
$p.p.$	presque partout.

CHAPITRE 1

Modélisation et formulation des problèmes aux limites

Dans ce chapitre, nous présentons le système d'équations aux dérivées partielles qui fera l'objet de notre étude en précisant le cadre de celle-ci. Pour cela, nous rappelons les principaux résultats de la théorie des milieux continus. Ces rappels porteront sur le tenseur des contraintes, le tenseur des déformations, les équations de mouvement et les lois de comportement.

1.1. Contraintes et déformations

On considère un corps déformable occupant un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N = 1, 2, 3)$ avec une frontière régulière Γ. Nous étudions, dans un intervalle de temps $[0, T]$, l'évolution du corps matériel dûe à l'application de forces de volumes et de surfaces. Cette évolution est décrite par l'équation

(1.1.1) $$\rho \ddot{u} = Div\ \sigma + f \quad \text{dans} \ \ \Omega \times (0, T)\,,$$

où les inconnues du problème sont :

-le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^N$

-le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \to S_N$

Dans (1.1.1) $S_N = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ est l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^N$, $\ddot{u}$ représente l'accélération et $\dot{u}$ la vitesse du corps et $Div\ \sigma$ est la divergence du champ des contraintes. Les fonctions densité de masse $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_+$ et la densité des forces volumiques $f : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^N$ sont des données du problème.

Les processus d'évolution modelés par l'équation (1.1.1) s'appellent processus dynamiques. Dans certaines situations, cette équation peut encore se simplifier. Par exemple dans le cas où $\dot{u} = 0$, il s'agit d'un problème d'équilibre (processus statique), ou bien dans le cas où le champ des vitesses varie très lentement par rapport au temps, c'est à dire que le terme $\rho\ddot{u}$ devient négligeable (processus quasistatique). Dans ces deux cas l'équation (1.1.1) devient

(1.1.2) $$Div\ \sigma + f = 0 \quad \text{dans} \ \ \Omega \times (0, T)\,,$$

Dans la suite, on va considérer des solides élasto-viscoplastiques dans des *petites transformations*. Dans ce cas, on a besoin du *champ des déformations linéarisé* $\varepsilon : \Omega \times [0,T] \to S_N$ défini par:

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon(u) = \tfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \text{ dans } \Omega \times (0,T),$$

où ∂_k représente l'opérateur de dérivation partielle par rapport à la variable x_k. On précise en outre qu'on adopte la convention de l'indice muet. Souvent, pour marquer la dépendance du champ des déformations ε par rapport au champ des déplacements u, on va le noter $\varepsilon(u)$. Remarquons aussi que dans l'étude des processus statiques le temps n'intervient pas et par conséquent les égalités (1.1.1) et (1.1.2) sont satisfaites dans Ω au lieu de $\Omega \times [0,T]$.

Les équations précédentes sont insuffisantes à elles seules pour décrire les mouvements des milieux continus. En effet, il reste à décrire ce qui est propre au matériau lui même. C'est l'objet des lois de comportement que nous décrivons dans la section suivante.

1.2. Lois de comportement

Les lois de comportement caractérisent le comportement de chaque type de milieu continu. Bien qu'elles doivent respecter certaines propriétés d'invariance, leur origine est souvent expérimentale et c'est toute une série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement. Nous présentons ci-dessous les lois de comportement élasto-visco-plastiques.

Dans la suite, nous envisageons d'étudier trois catégories particulières de matériaux.

a) Matériaux élastiques.

La loi de comportement est de la forme

$$\sigma = F(\varepsilon). \tag{1.2.1}$$

où F est une application linéaire ou non linéaire. Cette loi peut modeler quelques propriétés mises en évidence par les expériences de chargement monotone: linéarité de la courbe $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ (suivant que F soit monotone ou non). Par contre, ni le fluage, ni la relaxation ne peuvent être décrits par la loi (I.4). En effet, si par exemple à l'instant $t = 0$ on a $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$ et on maintient la déformation constante $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \ \forall \ t > 0$, il résulte $\sigma(t) = F(\varepsilon_0) \ \forall \ t > 0$. Par conséquent le modèle (1.2.1) ne peut pas décrire le phénomène de relaxation en évidence par les essais expérimentaux. De même, pour l'équation (1.2.1) les courbes charges-décharges $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ coïncident. Ce modèle ne peut donc pas décrire les déformations résiduelles ce qui justifie l'introduction d'autres lois constituves capables de modeler ces phénomènes.

b) Matériaux viscoplastiques.

La loi viscoplastique est de la forme

(1.2.2) $$\dot{\sigma} = \xi(\varepsilon(\dot{u})) + G(\sigma, \varepsilon)$$

où ξ est un tenseur d'ordre quatre et G est une fonction constituve. Les lois de comportement (1.2.2) s'appellent lois viscoplastiques semi-linéaires. On peut aussi envisager d'autres lois compliquées, par exemple des lois de la forme (1.2.2) où $\xi = \xi(\sigma, \varepsilon)$ (lois viscoplastiques quasi linéaires).

On suppose toujours que ξ est un tenseur inversible. Les tenseurs $\dot{\sigma}$ et $\dot{\varepsilon}$ jouent donc des rôles symétriques dans l'équation (1.2.2). Plus précisément (1.2.2) est équivalente à l'équation

(1.2.3) $$\dot{\varepsilon} = \tilde{\xi}(\dot{\sigma}) + \tilde{G}(\sigma, \varepsilon)$$

où $\tilde{\xi} = \xi^{-1}$ et $\tilde{G} = -\xi^{-1} \ G$.

Dans le cas où la fonction G est de la forme:

(1.2.4) $$G(\sigma, u) = -K(\sigma - F(\varepsilon))$$

où $K > 0$ est une constante dite constante de viscosité et F une fonction constituve, la loi de comportement (1.2.2) est dite viscoélastique.

Regardons quelques exemples de lois viscoplastiques ou viscoélastiques, dans le cas unidimensionnel. La loi de comportement (1.2.2) devient alors:

(1.2.5) $$\dot{\sigma} = E(\varepsilon(\dot{u})) + G(\sigma, \varepsilon)$$

où $E \succ 0$ est le module de Young, σ, $\varepsilon : IR_+ \longrightarrow IR$ et $G : IR^2 \longrightarrow IR$. En prenant une constante $\sigma(t) = \sigma_0$ pour tout $t \in [0, T]$, (1.2.5) implique

$\dot{\varepsilon}(t) = -\frac{1}{E} G(\sigma_0, \varepsilon(t))$. En supposant alors que $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$ et $G(\sigma_0, \varepsilon_0) < 0$, on obtient que la déformation ε croit dans un voisinage de $t = 0$.

Ceci implique qu'à l'état $(\sigma_0, \varepsilon_0)$, l'équation admet la propriété de fluage. En prenant maintenant un état $(\sigma_0, \varepsilon_0)$ tel que $G(\sigma_0, \varepsilon_0) < 0$ et une déformation constante $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$ pour tout $t \in [0, T]$, (1.2.5) implique $\dot{\sigma} = G(\sigma(t), \varepsilon_0)$. On obtient alors que la constante décroît dans un voisinage de $t = 0$. Ceci implique qu'à l'état $(\sigma_0, \varepsilon_0)$, l'équation (1.2.5) admet la propriété de relaxation.

Exemple 1.1. (modèle de Maxwell, 1867)
On prend $G(\sigma, \varepsilon) = -\sigma$, donc (1.2.5) devient

$$\dot{\sigma} = E(\varepsilon(\dot{u})) - \sigma.$$

C'est un modèle viscoélastique (il suffit de prendre dans (1.2.4) $K = 1$ et $F = 0$).

Exemple 1.2. (modèle de Sokolovski).

On prend dans (1.2.5)

$$G(\sigma,\varepsilon)=\begin{cases} 0 \text{ si } |\sigma|\leq\sigma_Y \\ (-\text{sgn }\sigma)F(|\sigma|-\sigma_Y) \text{ si } |\sigma|\geq\sigma_Y \end{cases}.$$

où σ_Y est une constante strictement positive appelée seuil de plasticité, sgn σ est le singne de σ et

$F: IR_+ \longrightarrow IR$ est une fonction régulière satisfaisant à $F(0)=0$ et $\grave{F}(r)>0\ \forall\ r\in IR_+$. D'habitude, on considère $F(r)=K\ E\ r$ où $K>0$ est un coefficient de viscosité et $E>0$ est le module de Young.

Exemple 1.3.(viscoplasticité du type Pype perzyna).

Dans (I.6), on prend $\tilde{G}: S_3 \longrightarrow S_3$ défini par:

$$\tilde{G}(\sigma,\varepsilon)=\tilde{G}(\sigma)=\frac{1}{2\mu}(\sigma-P_K\sigma).$$

où $\mu>0$ est un coefficient de viscosité, $K\subset S_3$ est un convexe fermé tel que $0_3\in K$ et $P_K: S_3\longrightarrow K$ est l'opérateur de projection sur K.

Comme $\sigma=P_K\sigma$ si et seulement si $\sigma\in K$, il résulte que les déformations viscoplastiques ne se manifestent que pour les états de contraintes qui n'appartiennent pas au convexe K. Ce convexe est d'habitude défini par

$$K=\{\sigma\in S_3 \mid F(\sigma)\leq 0\}.$$

où $F: S_3\longrightarrow K$ est une fonction convexe et continue telle que $F(0)<0$. L'équation $F(\sigma)=0$ définit *le critère de plasticité.* Des exemples classiques de critères de plasticité peuvent être obtenus en prenant

$$F(\sigma)=\frac{1}{2}\sigma^D.\sigma^D-K^2.$$

$$F(\sigma) = \max_{i,j=1,2,3} |\sigma_i \ - \sigma_j| - K^2.$$

$$F(\sigma) = \max(|2\sigma_1 \ - \sigma_2 - \sigma_3|, |2\sigma_2 \ - \sigma_1 - \sigma_3|, |2\sigma_3 \ - \sigma_1 - \sigma_2|) - K^2.$$

Dans ces trois égalités, les notations sont les suivantes:

- σ^D est déviateur de σ défini par $\sigma^D = \sigma - \frac{\text{tr } \sigma}{3} I_3$,où tr σ est la trace de σ et I_3 est la matrice identité de IR^3;

- σ_i sont les valeurs propres de σ, $i = 1, 2, 3$;

- K est une constante strictement positive (*limite de plasticité*).

c) Matériaux viscoplastiques à variable interne d'état.

Dans certaines situations, on peut prendre en considération des lois de comportement viscoplastiques plus générales que (1.2.2) . Ainsi, certains auteurs proposent des lois de comportement de la forme :

(1.2.6) $$\dot{\sigma} = \xi(\varepsilon(\dot{u})) + G(\sigma, u, k)$$

où k est un paramètre d'écrouissage, ou plus généralement *une varaible interne d'état.*

La prise en considération de ce type de lois de comportement est justifiée par les essais expérimentaux. D'habitude k est une fonction vectorielle à valeurs dans $IR^M (M \in IN)$.

On complète (1.2.6) par une équation de la forme :

(1.2.7) $$\dot{k} = \phi(\varepsilon(u), \sigma, k)$$

Dans (1.2.6) et (1.2.7) les fonctions G et ϕ sont définies comme suit:

$$G : \Omega \times S_N \times S_N \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{S}_M.$$

$$\phi : \Omega \times S_N \times S_N \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^M.$$

Un exemple classique de variable interne d'état est le paramètre d'écrouissage du type déformation défini par:

$\dot{k} = \phi(\left|\dot{\varepsilon}^{AN}\right|) = \phi(\left|\xi^{-1} G(\sigma, u, k)\right|)$

où $\phi : IR_+ \longrightarrow IR$. En particulier si $\phi(r) = \frac{2}{3}r$, k devient la déformation équivalente irréversible.

1.3. Conditions aux limites

Supposons maintenant que la frontière du domaine est constituée de trois parties disjointes deux à deux:

$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \Phi$ pour $i \neq j$. Soit v le vecteur unitaire extérieur à Γ. Pour simplifier, nous nous plaçons dans le cas statique et par conséquent le temps n'interviendra pas par la suite.

On considère les conditions aux limites suivantes:

(1.3.1) $$u = g \quad \text{sur } \Gamma_1$$

(1.3.2) $$\sigma\nu = h \quad \text{sur } \Gamma_2$$

La condition (1.3.1) est appelée *condition aux limites de déplacement.* Sa signification consiste en ce que le champ des déplacements est imposé sur la partie Γ_1, la fonction g étant donnée du problème (par exemple, si $g = 0$ le corps est encastré par la partie Γ_1).

La condition (1.3.2) est appelée condition aux limites de traction. Elle signifie que le vecteur des contraintes de Chauchy $\sigma\nu$ est imposé sur la partie Γ_2 de la frontière, h représentant la densité des forces appliquées de surface et constituant une donnée du problème.

Si $\Gamma_1 = \varnothing$ le problème aux limites est un problème de traction pure et si $\Gamma_2 = \varnothing$ le problème aux limites est un problème de déplacement pur. Si les parties Γ_1 et Γ_2 sont toutes les deux de mesure de Lesbegue $N-1$ dimensionnelle strictement positive, le problème considéré est un problème mixte de déplacement-traction.

On suppose maintenant que le corps est en contact avec une base rigide S par la partie de la frontière.

On note par v_ν et v_τ la composante normale et respectivement tangentielle du champ vectoriel $v = v_\nu\nu + \nu_\tau$ où $v_\nu = v.\nu$. De même, on définit de façon analogue les composantes normales et tangentielles de σ . Il vient : $\sigma_\nu = (\sigma\nu)_\nu$, $\sigma_\tau = (\sigma\nu)_\tau$ sur Γ_3. Nous considérons les conditions aux limites suivantes:

a) Conditions de contact sans frottement

On dit que le contact entre le corps et la base rigide S est sans frottement, si les mouvements tangentiels sont libres, ce qui se traduit par

(1.3.3) $$\sigma_\tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3.$$

Puisque S représente une base rigide, elle ne subira donc pas de déformations. Le corps ne pourra donc pas y pénétrer. Cette propriété se traduit mathématiquement par

l'inégalité:

(1.3.4) $$u_\nu = u.\nu \leq 0 \quad \text{sur } \Gamma_3.$$

Aux points de Γ_3 tels que $u_\nu < 0$, le corps déformable quitte la base rigide. Les contraintes normales y sont alors nulles. Par conséquent, on a

(1.3.5) $$u_\nu < 0 \Rightarrow \sigma_\nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3.$$

Aux points de Γ_3 tels que $u_\nu = 0$, on suppose que la base rigide S exerce une réaction inconnue suivant la direction de la normale et orientée vers Ω. On a:

(1.3.6) $$u_\nu = 0 \Rightarrow \sigma_\nu \leq 0 \quad \text{sur } \Gamma_3.$$

Pour résumer, les conditions de contact (1.11)-(1.14) s'écrivent d'une manière combinée de la façon suivante:

(1.3.7) $$u_\nu \leq 0,\ \sigma_\nu \leq 0, \sigma_\tau = 0,\ \sigma_\nu u_\nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3.$$

Les conditions aux limites de contact de la forme (1.3.7) sont aussi appelés *conditions de contact de Signorini*. Dans le cas quasistatique, ces conditions sont vérifiées sur $\Gamma_3 \times [0,T]$ où $[0,T]$ est l'intervalle de temps.

Les conditions de contact de Signorini (1.3.7) modélisent le contact d'un corps déformable avec une base rigide. On peut envisager donc des conditions de contact d'un corps déformable avec une base déformable. On va en citer un exemple qui se présente de Signorini (1.3.7). Plus précisément, sur les parties Γ_1 et Γ_2, on impose les conditions aux limites de déplacement-traction alors que sur la partie Γ_3, on suppose:

$$\textbf{(1.3.8)} \qquad \begin{cases} \sigma_\nu = 0 \text{ si } \ u_\nu < 0 \\ -h < \sigma_\nu < 0 \text{ si } \ u_\nu = 0,\ \sigma_\tau = 0 \\ \sigma_\nu = -h \text{ si } u_\nu > 0 \end{cases}$$

où $h > 0$ est un paramètre destiné à tendre vers l'infini. On remarque que les conditions aux limites (1.3.8) tendent formellement vers les conditions aux limites de *Signorini* (1.3.7) quand le paramètre h tend vers l'infini.

b) Conditions de contact avec frottement

Nous présentons dans ce qui suit quelques exemples de lois de frottement. Nous nous bornons au cas statique utilisé notamment en modélisation des processus de chargement monotone.

Exemple I.5. *Loi de TRESCA.*

On suppose que le contact entre le corps et la fondation se produit avec frottement bilatéral c'est-à-dire le

contact est maintenu pendant le mouvement. Cette propriété se traduit mathématiquement par:

$$u_\nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T)\,.$$

La loi de Tresca présente un seuil de frottement fixe g: lorsque le solide et la fondation sont en contact, la fondation exerce sur le solide un effort tangentiel qui ne dépasse pas un certain seuil:

$$|\sigma_\tau| \leq g \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0,T)\,.$$

Tant que la contrainte tangentielle n'a pas atteint le seuil, le milieu continu ne peut pas se déplacer par rapport à l'obstacle et il y a blocage, ce qui se traduit par:

$$|\sigma_\tau| < g \Rightarrow \ \dot{u}_\tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0,T)\,.$$

Lorsque ce seuil est atteint le solide peut se déplacer tangentiellement par rapport à la fondation et il y a alors glissement. La contrainte tangentielle s'oppose à la vitesse. Alors on a:

$$|\sigma_\tau| \leq g \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda\ \dot{u}_\tau \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0,T)\,.$$

En conclusion, les conditions aux limites de type frottement de Tresca s'écrivent alors comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\nu = 0 \\ |\sigma_\tau| \leq g \\ |\sigma_\tau| < g \Rightarrow \ \dot{u}_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau| = g \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda\ \dot{u}_\tau \end{array} \right\} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0,T)\,.$$

où $g > 0$ est le seuil de frottement.

Exemple I.6. *Loi de COULOMB.*

C'est une des lois les plus répandues et elle est plus réaliste que la loi de Tresca. Elle se caractérise par l'intervention de la contrainte normale et peut s'annoncer comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{l} |\sigma_\tau| \leq \mu\,|\sigma_\nu| \\ |\sigma_\tau| < \mu\,|\sigma_\nu| \Rightarrow \ \dot{u}_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau| = \mu\,|\sigma_\nu| \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda\ \dot{u}_\tau \end{array} \right\} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0,T)$$

où $\mu > 0$ est un coefficient de frottement. On peut compléter ces conditions par des conditions de contact unilatéral ou bilatéral. La loi de Coulomb est souvent utilisée pour les corps rigides ou élastiques. On remarque également qu'il s'agit d'une loi à seuil: " tant que le seuil n'est pas atteint, il n'y a pas de glissement". Ce seuil est variable et dépend de la contrainte normale ce qui représente une difficulté majeure pour l'étude mathématique de cette loi de frottement. C'est pourquoi on introduit :

Exemple I.7. *Loi de COULOMB avec seuil de type STROMBERG.*

Cette loi de frottement est une version de la loi de *COULOMB.* On peut supposer que le contact est bilatéral ou unilatéral. On remplace dans la loi présente le seuil de frottement $p = |\sigma_\nu|$ par le seuil du type $p(|\sigma_\nu|) = |\sigma_\nu|\,(1 - |\alpha\sigma_\nu|)_+$ où α est une constante positive liée à l'usure de la surface en contact. La considération de ce seuil de frottement est faite à partir des principes de la thermodynamique. Les essais expérimentaux donnent pour α des valeurs très petites.

En résumé, cette loi s'annonce comme suit:

$$\left\{\begin{array}{l} |\sigma_\tau| \leq \mu p\,|\sigma_\nu| \\ |\sigma_\tau| < \mu p\,|\sigma_\nu| \Rightarrow\ \dot{u}_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau| = \mu p\,|\sigma_\nu| \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda\ \dot{u}_\tau \end{array}\right\} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0,T)$$

1.4. Formulation des problèmes

L'évolution d'un corps déformable sous l'action des efforts extérieurs est modélisée mathématiquement par un système d'équations aux dérivées partielles posées sur un domaine de Ω de IR^N $(N = 1, 2, 3)$. Ce système comprend la loi de comportement du matériau, l'équation de mouvement ou d'équilibre du corps ainsi que les conditions initiales et aux limites au quelles il est soumis.

On se donne un corps élastique ou viscoplastique occupant un domaine $\Omega \subset IR^N$ $(N = 1, 2, 3)$ et de frontière

Γ, supposée suffisament régulière, est divisée en trois parties mesurables disjointes Γ_1, Γ_2 et Γ_3 telles que

mesure $\Gamma_1 \succ 0$.

Dans cette thèse on va étudier les trois problèmes aux limites suivants:

1.4.1 Problème élastique de contact sans frottement

Ce problème peut se formuler de la façon suivante.

Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \to \mathbb{R}^d$ et le tenseur des contraintes $\sigma : \Omega \to S_d$ tels que:

$$(P_1)\left\{\begin{array}{c} Div\sigma + f = 0 \qquad \text{dans } \Omega \\ \sigma = F(x, \varepsilon(u), \theta) \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \\ \sigma\nu + \Phi(x)u = h \text{ sur } \Gamma_2 \\ u_\nu \leq 0,\ \sigma_\nu \leq 0, \sigma_\tau = 0,\ \sigma_\nu u_\nu = 0 \quad sur\Gamma_3 \end{array}\right.$$

où $F : \Omega \times S_d \times \mathbb{R}^M \to S_d$ est une fonction constituve et $\theta \in IR^M$est un paramètre qui peut-être la température ou l'humidité. $\Phi : \Gamma_2 \to S_d$ présente les forces de rappels.

L'étude de ce problème fera l'objet du chapitre 1 de cette thèse.

1.4.2 Problème viscoplastique de contact avec frottement

On précise qu'on étudie le cas quasistatique et que le corps Ω est modélisé en utilisant une loi de comportement viscoplastique de la forme:

$$\dot{\sigma} = \xi(\varepsilon(\dot{u})) + G(\sigma, \varepsilon(u), \theta).$$

où θ est un paramètre (la température ou l'humidité).

Ce problème peut se formuler de la façon suivante.

Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \to \mathbb{R}^d$ et le tenseur des contraintes $\sigma : \Omega \to S_d$ tels que:

$$(P_2)\begin{cases} \dot{\sigma} = \xi(\varepsilon(\dot{u})) + G(\sigma, u, \theta) & dans\ \Omega \times [0,T] \\ Div\sigma + f_0 = 0 & dans \quad \Omega \times [0,T] \\ u = 0 & sur \quad \Gamma_1 \times [0,T] \\ \sigma\nu + \Phi(x)u = f_2 & sur \quad \Gamma_2 \times [0,T] \\ \left.\begin{array}{c} u_\nu = 0, \ \ \|\sigma_\tau\| \leq g, \\ \|\sigma_\tau\| < g \Rightarrow \dot{u}_\tau = 0, \\ \|\sigma_\tau\| = g \Rightarrow \exists\lambda \ > 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda\dot{u}_\tau \end{array}\right\} & sur\Gamma_3 \times [0,T] \\ u(0) = u_0, \ \sigma(0) = \ \sigma_0 & dans \quad \Omega \end{cases}$$

où $F : \Omega \times S_d \times \mathbb{R}^M \to S_d$ est une fonction constituve et $\theta \in IR^M$est un paramètre qui peut-être la température ou l'humidité. $\Phi : \Gamma_2 \to S_d$ présente les forces de rappels.

L'étude de ce problème fera l'objet du chapitre 3 de cette thèse.

1.4.3 Problème viscoplastique à variable interne avec loi de Tresca

Ce problème se formule de la manière suivante.

Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$, le tenseur des contraintes $\sigma : \Omega \times [0,T] \to S_d$ et la variable interne d'état $k : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}^M$
tels que:

$$(P_3)\begin{cases} \dot{\sigma} = \xi(\varepsilon(\dot{u})) + G(\sigma, u, k) & dans\ \Omega \times [0,T] \\ \dot{k} = \phi(\varepsilon(u), \sigma, k) & dans\ \ \Omega \times [0,T] \\ Div\sigma + f_0 = 0 & dans\ \ \ \Omega \times [0,T] \\ u = 0 & sur\ \ \ \Gamma_1 \times [0,T] \\ \sigma\nu + \Phi(x)u = f_2 & sur\ \ \ \Gamma_2 \times [0,T] \\ \left.\begin{array}{c} u_\nu = 0,\ \ \|\sigma_\tau\| \leq g, \\ \|\sigma_\tau\| < g \Rightarrow \dot{u}_\tau = 0, \\ \|\sigma_\tau\| = g \Rightarrow \exists\lambda\ > 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda\dot{u}_\tau \end{array}\right\} & sur\Gamma_3 \times [0,T] \\ u(0) = u_0,\ \sigma(0) = \ \sigma_0 & dans\ \ \ \ \Omega \end{cases}$$

où ξ ,ϕ et G sont des fonctions constituves et $\theta \in IR^M$est un paramètre qui peut-etre la température ou l'humidité et k la variable interne d'état. $\Phi : \Gamma_2 \rightarrow S_d$ présente les forces de rappels.

L'étude de ce problème fera l'objet du chapitre 4 de cette thèse.

.

CHAPITRE 2

PROBLEME ELASTIQUE NON LINEAIRE AVEC PARAMETRE SOUMIS A DES CONDITIONS AUX LIMITES DE SIGNORINI

Ce chapitre est consacré à l'étude du problème de contact sans frottement d'un corps élastique non linéaire avec une fondation rigide sous des conditions qui généralisent celles de Teniou [28] et Drabla [12]. Premièrement, on établit la formulation variationnelle de ce problème, puis on s'intéresse aux résultats d'existence et d'unicité. Deuxièment, on passe à l'étude de quelques propriétés de la solution. On commence par y montrer un résultat de dépendence de la solution par rapport au données, puis par rapport aux paramètre θ. Finalement, on s'intéresse à l'étude du problème mécanique de départ en introduisant une pénalisation portant sur les conditions aux limites de contact.

.

2.1. Formulation du problème mécanique et hypothèses

On considère un corps élastique auccupant un domaine ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ $(d = 1, 2, 3)$ et dont la frontière Γ, supposée suffisament régulière, est divisée en trois parties mesurables disjointes Γ_1, Γ_2 et Γ_3 $(mes\ \Gamma_1 > 0)$ qui portent respectivement la condition de déplacement, la condition de traction en présence des forces de rappels et la condition de contact sans frottement de Signorini. Bien entendu, on suppose ici que le corps Ω repose sur une fondation rigide, par la partie Γ_3 de sa frontière Γ et que ce contact s'effectue sans frottement c'est à dire les mouvements tangentiels sont complètement libres. On précise en outre qu'on étudie le cas statique et que le corps a une loi de comportement non linéaire de la forme $\sigma = F(\varepsilon(u), \theta)$ où θ est un paramètre (la température ou l'humidité). ν^j (resp. τ^j) désigne la normale unitaire sortante (resp. la tangente unitaire dans le sens positif) sur Γ_j $(j = 1, 2, 3)$. Sous ces considérations, le problème mécanique qu'on étudie peut se formuler de la manière suivante:

Problème (P) : Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \to \mathbb{R}^d$ et le tenseur des contraintes $\sigma : \Omega \to S_d$

tels que:

(2.1.1) $\quad Div\ \sigma + f = 0 \qquad dans\ \Omega$

(2.1.2) $\quad \sigma = F(x, \varepsilon(u), \theta) \quad dans\ \Omega$

(2.1.3) $\quad u = 0 \quad sur \quad \Gamma_1$

(2.1.4) $\quad \sigma\nu + \Phi(x)u = h\ sur\ \Gamma_2$

(2.1.5) $\quad u_\nu \leq 0,\ \sigma_\nu \leq 0, \sigma_\tau = 0,\ \sigma_\nu u_\nu = 0 \quad sur\ \Gamma_3$

Nous ferons les hypothèses suivantes: $\Phi : \Gamma_2 \to S_d$:

(2.1.6) $\quad \Phi(x)u.u \geq 0$ sur $\Gamma_2\ \forall u \in \mathbb{R}^d$.

(2.1.7) $\Phi_{km} \in L^{\infty}(\overline{\Gamma}_2)$ *pour* $k, m = 1, ..., d$

L'équation (2.1.1) représente l'équation d'équilibre où f est la densité des forces volumiques agissant sur le corps déformable. L'équation (2.1.2) représente la loi de comportement élastique. Les relations (2.1.3) et (2.1.4) sont des conditions aux limites déplacement-traction. (2.1.4) s'appelle les forces de rappels et signifie que le vecteur des contraintes de Cauchy est proportionnel au déplacement (c'est le cas des batiments construits anti-séisme et des matelats, ...). Les conditions aux limites (2.1.5) représentent les conditions de contact sans frottement de *Signorini* sur la partie Γ_3 de la frontière. Dans le cas où $\Phi(x) = 0$, le problème est déjà traité par B. Teniou [18]. Donc le problème (P) généralise ce dernier.

Dans l'étude du problème mécanique (P), on fait les hypothèses suivantes:

$F : \Omega \times S_d \times \mathbb{R}^M \to S_d$ est une application telle que,pour $i = 1, 2$, on a:

(2.1.8a) $\exists m > 0$ tel que

$$(F(x, \varepsilon_1, \theta) - F(x, \varepsilon_2, \theta)) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m \left|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right|^2 p.p.x \in \Omega, \forall \varepsilon_i \in S_d, \forall \theta \in \mathbb{R}^M$$

(2.1.8b) $\exists L_1, L_2 > 0$ tel que

$$|F(x, \varepsilon_1, \theta_1) - F(x, \varepsilon_2, \theta_2)| \leq L_1 \left|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right| + L_2 \left|\theta_1 - \theta_2\right| \ p.p.\ x \in \Omega, \forall \varepsilon_i \in S_d, \forall \theta_i \in \mathbb{R}^M$$

(2.1.8c) $x \to F(x, \varepsilon, \theta)$ est Lebesgue mesurable $p.\ p.\ x \in \Omega, \forall \varepsilon \in S_d, \forall \theta \in \mathbb{R}^M$

(2.1.8d) $F(x, 0_d, 0_M) = 0_d$.

de plus

(2.1.9) $f \in H = \mathbb{L}^2(\Omega)^d$, $h \in \mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d$,

(2.1.10) $\theta \in \mathbb{L}^2(\Omega)^M$.

Remarque 2.1.1. Les hypothèses (2.1.8)-(2.1.10) permettent de considérer l'opérateur $\tilde{F}(.,\theta) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$

$$\varepsilon \mapsto \tilde{F}(\varepsilon,\theta)$$

où $\tilde{F}(\varepsilon,\theta)(x) = F(x,\varepsilon(x),\theta(x))$ $p.p\ dans\ \Omega$ $\forall \varepsilon \in \mathcal{H}$.
La même chose pour l'opérateur Φ, où $\widetilde{\Phi}u(x) = \widetilde{\Phi}(x)u(x)$.
En effet; si $\varepsilon \in \mathcal{H}$ la fonction $x \to \varepsilon(x) : \Omega \to S_d$ est mesurable et comme d'après (2.1.8b) $\tilde{F}(.,\theta)$ est une application continue il vient $x \to \tilde{F}(\varepsilon,\theta)(x) : \Omega \to S_d$ est une fonction mesurable. Ensuite, en utilisant (2.1.8b) et (2.1.8d) il vient:

$$\int_\Omega \left|\tilde{F}(\varepsilon,\theta)\right|^2 dx \leq L_1^2 \int_\Omega |\varepsilon(x)|^2 dx + L_2^2 \int_\Omega |\theta(x)|^2 dx < +\infty\ si\ \theta \in \mathbb{L}^2(\Omega)^M$$

donc $\tilde{F}(\varepsilon,\theta) \in \mathcal{H}$.
Pour simplifier, on note dans la suite cet opérateur par F. On remarque également que d'après (2.1.8a) et (2.1.8b) l'opérateur $F : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est un opérateur de Lipschitz et fortement monotone

(2.1.11) $\exists L_1 > 0 : |F(\varepsilon_1,\theta) - F(\varepsilon_2,\theta)|_{\mathcal{H}} \leq L_1 |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|_{\mathcal{H}} \quad \forall \varepsilon_1,\varepsilon_2 \in \mathcal{H}, \forall \theta \in \mathbb{L}^2(\Omega)^M.$

(2.1.12) $\langle F(\varepsilon_1,\theta) - F(\varepsilon_2,\theta), \varepsilon_1 - \varepsilon_2\rangle_{\mathcal{H}} \geq m |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2_{\mathcal{H}} \quad \forall \varepsilon_1,\varepsilon_2 \in \mathcal{H}, \forall \theta \in \mathbb{L}^2(\Omega)^M.$

L'inégalité (2.1.11) est un cas particulier de

(2.1.13) $\exists L_1, L_2 > 0 : |F(\varepsilon_1,\theta_1) - F(\varepsilon_2,\theta_2)|_{\mathcal{H}} \leq L_1 |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|_{\mathcal{H}} + L_2 |\theta_1 - \theta_2|_{\mathbb{L}^2(\Omega)^M}$

$\forall \varepsilon_1,\varepsilon_2 \in \mathcal{H}, \forall \theta_1,\theta_2 \in \mathbb{L}^2(\Omega)^M.$

On définit le sous-espace fermé V de H_1 par:

$$V = \{\, v \in H_1 / \gamma v = 0\ sur\ \Gamma_1\}$$

et on le munit du produit scalaire suivant

$\langle u, v\rangle_V = \langle \varepsilon(u), \varepsilon(v)\rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in V.$

La fonctionnelle $v \to \langle f, v\rangle_H + \langle h, \gamma v\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d} \forall v \in V$, est une fonctionnelle linéaire et continue sur V, il résulte grâce au théorème de représentation de Riez-Fréchet qu'il existe un élément unique $q \in V$ tel que

(2.1.14) $\langle q, v\rangle_V = \langle f, v\rangle_H + \langle h, \gamma v\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d} \ \forall v \in V.$

2.2 Formulation variationnelle

Avant d'établir la formulation variationnelle du problème mécanique *(2.1.1)-(2.1.5)* on définit l'ensemble des déplacements admissibles suivant:

(2.2.1) $U_{ad} = \{v \in H_1 / \ v = 0 \quad sur \quad \Gamma_1, \ v_\nu \leq 0 \ sur \ \Gamma_3\}.$

Théorème 2.2.1. *Si* $(u, \sigma) \in H_1 \times \mathcal{H}_1$ *est solution régulière du problème (2.1.1)-(2.1.5) alors*

(2.2.2) $u \in U_{ad} : \langle F(\varepsilon(u), \theta), \varepsilon(v) - \varepsilon(u)\rangle_{\mathcal{H}} + \langle \Phi u, v - u\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d} \geq \langle q, v - u\rangle_V, \forall v \in U_{ad}.$

Démonstration

L'appartenance de u à U_{ad} résulte de (2.1.3) et (2.1.5), soit $v \in U_{ad}$, on a:

$$\begin{aligned}\langle \sigma\nu, \gamma(v-u)\rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} &= \int_\Gamma \sigma\nu(v-u)ds = \sum_{j=1}^{3} \int_{\Gamma_j} \sigma\nu^j(v-u)ds \\ &= \int_{\Gamma_2} h(v-u)ds + \int_{\Gamma_3} \sigma\nu^j(v-u)ds - \int_{\Gamma_2} \Phi(x)u(v-u)ds\end{aligned}$$

Soient $(u_\nu, u_\tau), (v_\nu, v_\tau)$ et $(\sigma_\nu, \sigma_\tau)$ les composantes des vecteurs u, v et $\sigma\nu$ dans le système orthonormè (ν, τ).

De (2.1.5) et (2.2.1) il résulte:

$$\begin{aligned}\sigma\nu(v-u) &= \sigma_\nu(v_\nu-u_\nu)+\sigma_\tau(v_\tau-u_\tau)\\ &= \sigma_\nu(v_\nu-u_\nu)\\ &= \sigma_\nu(v_\nu)-\sigma_\nu(u_\nu)\\ &= \sigma_\nu(v_\nu)\geq 0, \quad sur\ \Gamma_3\end{aligned}$$

d'où

(2.2.3) $\langle\sigma\nu,\gamma v-\gamma u\rangle_{H'_\Gamma\times H_\Gamma}\geq\int\limits_{\Gamma_2}h(v-u)ds-\int\limits_{\Gamma_2}\Phi u(v-u)ds$

Mais

$$\langle\sigma,\varepsilon(v)-\varepsilon(u)\rangle_{\mathcal{H}}=\langle\sigma\nu,\gamma(v-u)\rangle_{H'_\Gamma\times H_\Gamma}+\langle Div\ \sigma,v-u\rangle_H$$

d'où de (2.2.3) il vient:

$$\langle\sigma,\varepsilon(v)-\varepsilon(u)\rangle_{\mathcal{H}}\geq\int\limits_{\Gamma_2}h(v-u)ds-\int\limits_{\Gamma_2}\Phi u(v-u)ds+\langle f,v-u\rangle_H$$

Donc

$$\langle\sigma,\varepsilon(v-u)\rangle_{\mathcal{H}}+\langle\Phi u,v-u\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d}\geq\langle h,\gamma(v-u)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d}+\langle f,v-u\rangle_H$$

Une formulation variationnelle pour le problème mécanique (2.1.1)-(2.1.5) est donc:
Trouver $u:\Omega\to H_1,\ \sigma:\Omega\to\mathcal{H}_1$ *tels que*

(2.2.4) $\sigma=F(\varepsilon(u),\theta)$

(2.2.5) $u\in U_{ad},\langle F(\varepsilon(u),\theta),\varepsilon(v)-\varepsilon(u)\rangle_{\mathcal{H}}+\langle\Phi u,v-u\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d}\geq\langle q,v-u\rangle_V\ \forall v\in U_{ad}$

d'où la remarque suivante:

Remarque 2.2.1. Grâce au théorème 2.2.1, si (u,σ) est solution régulière du problème

(2.1.1)-(2.1.5), alors (u,σ) est solution du problème (2.2.4)-(2.2.5). De plus, on peut montrer que toute solution du problème (2.2.4)-(2.2.5) vérifie (2.1.1)-(2.1.5).

En effet; Soit (u,σ) une solution du problème (2.2.4)-(2.2.5) il suffit donc de prouver que (u,σ) satisfait (2.1.3)-(2.1.5) (mécanique).
En prenant $v = u \pm \varphi \in U_{ad}$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)^d$dans (2.2.5)et moyennant l'égalité

$$\langle \varepsilon(\varphi), \sigma \rangle_{\mathcal{H}} + \langle \varphi, Div\sigma \rangle_{\mathcal{H}} = 0 \ \forall \sigma \in \mathcal{H}_1, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)^d$$

il vient $Div\sigma + f = 0$ dans H.
En utilisant (2.2.5) et l'égalité

$$\langle \sigma\nu, \gamma v \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \langle \sigma, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle Div\sigma, u \rangle_{\mathcal{H}} \, \forall u \in H_1, \sigma \in \mathcal{H}_1$$

on obtient

$$\begin{aligned} \langle \sigma, \varepsilon(v-u) \rangle_{\mathcal{H}} &= \langle \sigma\nu, \gamma(v-u) \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} - \langle Div\sigma, v-u \rangle_{\mathcal{H}} \\ &\geq \langle q, v-u \rangle_V - \langle \Phi u, v-u \rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d} \end{aligned}$$

donc:

(2.2.6) $\langle \sigma\nu, \gamma(v-u) \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} \geq \langle h, \gamma(v-u) \rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d} - \langle \Phi u, v-u \rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d}$

En prenant $v = u \pm w \in U_{ad}$ pour tout $w \in H_1$ tel que $w = 0$ sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_3$ dans (2.2.6) il résulte.

(2.2.7) $\sigma\nu = h - \Phi u$ sur Γ_2.

En prenant maintenant $v = u \pm w \in U_{ad}$ pour tout $w \in H_1$ tel que $w = 0$ sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ et $w_\nu = 0$ sur Γ_3 dans (2.2.6), il résulte moyennant (2.2.7) et (A-2-30) que

(2.2.8) $\sigma_\tau = 0$ sur Γ_3,

En prenant cette fois-ci, $v = u + w \in U_{ad}$ pour tout $w \in H_1$ tel que $w = 0$ sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ et

$$\begin{cases} w_\tau = 0 \ sur \ \Gamma_3 \\ w_\nu \leq 0 \ sur \ \Gamma_3 \end{cases}$$

dans (2.2.6), il résulte, en utilisant (2.2.7) et (2.2.8) et (A-2-29) :

(2.2.9) $\sigma_\nu \leq 0 \ sur \ \Gamma_3$,

on a: $\begin{cases} \sigma_\nu \leq 0 \\ \\ u_\nu \leq 0 \end{cases} sur \ \Gamma_3,$

donc $\sigma_\nu u_\nu \geq 0$ sur Γ_3.

En prenant dans (2.2.6) $v \in U_{ad}$ tel que $v/_{\Gamma_1} = 0$ et $v_\nu = 0$ *sur* Γ_3 et moyennant (2.2.7)-(2.2.8) et (2.2.9) ainsi du fait que $u \in U_{ad}$, on déduit que:

$$\int_{\Gamma_3} \sigma\nu.(v-u)ds \geq 0$$

Alors $\int_{\Gamma_3} \sigma_\nu(v_\nu - u_\nu)ds + \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau(v_\tau - u_\tau)ds = -\int_{\Gamma_3} \sigma_\nu u_\nu ds \geq 0.$
Donc $\int_{\Gamma_3} \sigma_\nu u_\nu ds \leq 0$
On déduit alors que $\sigma_\nu \ u_\nu = 0$ sur Γ_3.

2.3. Théorème d'existence et d'unicité

Théorème 2.3.1. *Sous les hypothèses (2.1.6)-(2.1.7) et (2.1.9)-(2.1.13), le problème variationnel (2.2.2) admet une solution unique* $u \in H_1$.

Démonstration.

(2.3.1) U_{ad} est un ensemble convexe fermé et non vide de H_1.

Pour tout w fixé dans V et pour tout θ fixé dans $\mathbb{L}^2(\Omega)^M$, la fonctionnelle définie sur V par: $v \to \langle F\varepsilon(w), \theta), \varepsilon(v)\rangle_{\mathcal{H}} + \langle \Phi w, v\rangle_H$ est une fonctionnelle linéaire continue sur V. Donc d'aprés le théorème de Riesz-Fréchet il existe un élément $A_\theta w \in V$ tel que:

(2.3.2) $\langle A_\theta w, v\rangle_V = \langle F\varepsilon(w), \theta), \varepsilon(v)\rangle_{\mathcal{H}} + \langle \Phi w, v\rangle_{H'_{\Gamma_2}\times H_{\Gamma_2}} \ \forall v \in V$

En utilisant l'hypothèse (2.1.6) et (2.1.12) et l'inégalité de Korn, on obtient:

(2.3.3) $\langle A_\theta w_1 - A_\theta w_2, w_1 - w_2\rangle_V \geq c\,|w_1 - w_2|_V^2 \quad \forall w_1, w_2 \in V$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et (2.1.13) on obtient:

(2.3.4) $|A_\theta w_1 - A_\theta w_2|_V \leq L\,|w_1 - w_2|_V \ \forall w_1, w_2 \in V$

D'après le théorème A.1.15, les relations (2.3.1)-(2.3.4) entrainent l'existence d'un élément unique u tel que: $\quad u \in U_{ad}, \quad \langle A_\theta u, v - u\rangle_V \geq \langle q, v - u\rangle_V \quad \forall v \in U_{ad},$
ce qui achève la démonstration.

2.4. La dépendance de solution par rapport au paramètre

Théorème 2.4.1. *Sous les hypothèses (2.1.6)-(2.1.7) et (2.1.9)-(2.1.13), soit* $(u_i, \sigma_i), (i = 1, 2)$ *la solution variationnelle du problème* (P) *associée au paramètre* θ_i *tel que* $\theta_i \in \mathbb{L}^2(\Omega)^M$, *alors il existe une constante positive* C *qui ne dépend que de* $\Omega, \Gamma_1 et\ \Gamma$ *telle que:*

$$|u_1 - u_2|_{H_1} + |\sigma_1 - \sigma_2|_{H_1} \leq C\,|\theta_1 - \theta_2|_{IL^2(\Omega)^M}$$

Démonstration.
Soient $(u_i, \sigma_i), (i = 1, 2)$ solutions variationnelles du problème (P).

$$\langle \sigma_i, \varepsilon(v - u_i)\rangle_{\mathcal{H}} + \langle \Phi u_1, v - u_i\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d} \succeq \langle q, v - u_i\rangle_V$$

où $v = u_2$ pour $i = 1$, et $v = u_1$ pour $i = 2$.

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_1, \varepsilon(u_2 - u_1)\rangle_{\mathcal{H}} + \langle \Phi u_1, u_2 - u_1\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d} &\succeq \langle q, u_2 - u_1\rangle_V \\
\langle \sigma_2, \varepsilon(u_1 - u_2)\rangle_{\mathcal{H}} + \langle \Phi u_2, u_1 - u_2\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d} &\succeq \langle q, u_1 - u_2\rangle_V
\end{aligned}$$

il vient :

$$\langle \sigma_1 - \sigma_2, \varepsilon(u_2 - u_1)\rangle_{\mathcal{H}} + \langle \Phi(u_1 - u_2), u_2 - u_1\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d} \succeq 0$$

Donc

$$\langle \sigma_1 - \sigma_2, \varepsilon(u_2) - \varepsilon(u_1) \rangle_{\mathcal{H}} \succeq \langle \Phi(u_2 - u_1), u_2 - u_1 \rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d} \succeq 0$$

il résulte:

$$\langle \sigma_1 - F(\varepsilon(u_2), \theta_1), \varepsilon(u_2 - u_1) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle F(\varepsilon(u_2), \theta_1) - \sigma_2, \varepsilon(u_2 - u_1) \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0$$

d'où

$$|\langle \sigma_1 - F(\varepsilon(u_2), \theta_1), \varepsilon(u_2 - u_1) \rangle_{\mathcal{H}}| \leq |\langle F(\varepsilon(u_2), \theta_1) - \sigma_2, \varepsilon(u_2 - u_1) \rangle_{\mathcal{H}}|$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et (2.1.13) dans le membre droit de cette dernière inégalité puis (2.1.12) et l'inégalité de Korn dans son membre gauche on obtient:

$$cm \, |u_1 - u_2|_{H_1} \leq L_2 \, |\theta_1 - \theta_2|_{\mathbb{L}^2(\Omega)^M}$$

D'où

(2.4.1) $|u_1 - u_2|_{H_1} \leq C \, |\theta_1 - \theta_2|_{\mathbb{L}^2(\Omega)^M}$

D'autre part on a:

$$|\sigma_1 - \sigma_2|_{\mathcal{H}_1} = |\sigma_1 - \sigma_2|_{\mathcal{H}} = |F(\varepsilon(u_1), \theta_1) - F(\varepsilon(u_2), \theta_2)|_{\mathcal{H}}$$

En appliquant (2.1.13) et (2.4.1), on obtient:

(2.4.2) $|\sigma_1 - \sigma_2|_{\mathcal{H}_1} \leq c \, |\theta_1 - \theta_2|_{\mathbb{L}^2(\Omega)^M}$

L'inégalité cherchée est maintenant une conséquence de (2.4.1) et (2.4.2).
Ce théorème montre bien la dépendance de la solution par rapport au paramètre θ. Le résultat de ce théorème est important du point de vue mécanique car il montre que les petites perturbations dans le paramètre θ n'entrainent que des petites perturbations dans la solution (u, σ) de problème de contact sans frottement.

2.5. Un résultat de pénalisation

Dans sette section, on va étudier le problème pénalisé du problème (P) c'est-à-dire, on va remplacer les conditions aux limites de Signorini (2.1.5), par les conditions aux limites suivantes, valables sur Γ_3 :

$$\begin{cases} \sigma_\nu^\beta = 0 \quad si \quad u_\nu^\beta < 0 \\ -\beta < \sigma_\nu^\beta < 0,\ \sigma_\tau^\beta = 0 \quad si \quad u_\nu^\beta = 0 \\ \sigma_\nu^\beta = -\beta \quad si \quad u_\nu^\beta > 0 \end{cases}$$

où β est un paramètre destiné à tendre vers ∞. Nous considérons le problème mécanique suivant:

Probléme($\mathbf{P}^\beta$). trouver $u^\beta : \Omega \to \mathbb{R}^d, \sigma^\beta : \Omega \to S_d$ tels

(2.5.1) $\quad Div\ \sigma^\beta + f = 0 \qquad dans\ \Omega$

(2.5.2) $\quad \sigma^\beta = F(x, \varepsilon(u^\beta), \theta) \quad dans\ \Omega$

(2.5.3) $\quad u^\beta = 0 \quad sur \quad \Gamma_1$

(2.5.4) $\quad \gamma(\sigma(u)\nu + \Phi(x)u) = h \quad sur\ \Gamma_2$

(2.5.5) $$\left.\begin{array}{c} \sigma_\nu^\beta = 0 \quad si \quad u_\nu^\beta < 0 \\ -\beta < \sigma_\nu^\beta < 0,\ \sigma_\tau^\beta = 0 \quad si \quad u_\nu^\beta = 0 \\ \sigma_\nu^\beta = -\beta \quad si \quad u_\nu^\beta > 0 \end{array}\right\} \quad sur\ \Gamma_3$$

Du point de vue mécanique, les conditions aux limites (2.5.5) peuvent être interprétées comme des conditions de contact sans frottement d'un corps élastique avec une base déformable, alors que pour les conditions de Signorini (2.1.5), il s'agit d'un contact sans frottement d'un corps élastique avec une base rigide. Plus précisément, l'interprétation mécanique des conditions aux limites (2.5.5) est la suivante:

Le corps élastique occupant le domaine Ω, ne peut pénétrer la base que lorsqu'un seuil β est atteint par la réaction normale. Le paramètre β peut être interprété comme

"*seuil d'effondrement*" de la base déformable.

Il s'agit donc ici d'étudier le comportement de la solution du problème de contact sans frottement d'un corps élastique avec une base déformable quand son seuil d'effrondrement β tend vers ∞. D'autre part, la solution de ce problème (P^β), dépend du paramètre $\beta > 0$ et on va la noter par la suite $\left(u^\beta, \sigma^\beta\right)$.

On considère deux fonctions : $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $J : H_1 \to \mathbb{R}$ définies par :

$$\textbf{(2.5.6)} \qquad \varphi(x) = \begin{cases} 0 \quad si \quad x \leq 0 \\ \\ x \quad si \quad x \succ 0 \end{cases} .$$

$$\textbf{(2.5.7)} \qquad J(v) = \int_{\Gamma_3} \varphi(v_\nu) ds \quad \forall v \in H_1.$$

Avant de commencer l'étude du problème pénalisé (P^β), on va donner quelques résultats préliminaires.

Remarque 2.5.1. La fonctionnelle J définié par (2.5.7) est une semi-norme continue sur H_1.

D'une manière analogue au théorème 2.2.1, on peut énoncer le lemme suivant:

Lemme 2.5.1. *Si le couple (u^β, σ^β) est une solution régulière du problème (P^β), alors:*

$$\textbf{(2.5.8)} \quad \begin{cases} u^\beta \in V, \left\langle \sigma^\beta, \varepsilon(v) - \varepsilon(u^\beta) \right\rangle_{\mathcal{H}} + \left\langle \Phi u^\beta, v - u^\beta \right\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d} + \\ \qquad +\beta J(v) - \beta J(u^\beta) \geq \left\langle q, v - u^\beta \right\rangle_V \quad \forall v \in V \end{cases}$$

Démonstration. Soit $v \in V$, en utilisant (2.1.1), (A.2.23) et (A.2.24), on obtient:

$$\left\langle \sigma^\beta, \varepsilon(v - u^\beta) \right\rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle f, v - u^\beta \right\rangle_H + \int_\Gamma \sigma^\beta \nu \, (v - u^\beta) ds.$$

d'où

$$\textbf{(2.5.9)} \quad \left\langle \sigma^\beta, \varepsilon(v - u^\beta) \right\rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle f, v - u^\beta \right\rangle + \int_{\Gamma_2} \left(h - \Phi u^\beta\right) (v - u^\beta) ds + \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu^\beta (v_\nu - u_\nu^\beta) ds.$$

De plus, il résulte de (2.5.5) et (2.5.6):

(2.5.10) $\sigma_\nu^\beta(v_\nu - u_\nu^\beta) \geq \beta\varphi(u_\nu^\beta) - \beta\varphi(v_\nu)$ *sur* Γ_3

L'inégalité (2.5.8) est à présent une conséquence de (2.5.9), (2.5.10) et (2.5.7).
Le lemme précédent nous permet donc de donner une formulation variationnelle pour le problème pénalisé (P^β):

Problème P_0^β: Trouver le champ des déplacements $u^\beta : \Omega \to H_1$ tel que

(2.5.11) $u^\beta \in V, \left\langle F(\varepsilon(u^\beta), \varepsilon(v) - \varepsilon(u^\beta)\right\rangle_{\mathcal{H}} + \left\langle \Phi u^\beta, v - u^\beta \right\rangle_H +$

$$+\beta j(v) - \beta j(u^\beta) \geq \left\langle q, v - u^\beta \right\rangle_V \ \forall v \in V.$$

De la même manière que pour le problème (P), on va établir pour le problème (P^β) un résultat d'existence et d'unicité relatif au formulation variationnelle (P_0^β).

Théorème 2.5.1. *Sous les sypothèses (2.1.6)-(2.1.7) et (2.1.9)-(2.1.13), le problème variationnel* (P_0^β) *admet une solution unique* $u^\beta \in V$.

Démonstration. La démonstration est une conséquence du théorème A.1.11 sur les inéquations variationnelles elliptiques de secondes espèce.

En effet, l'opérateur $A_\theta : V \to V$ défini par

$$\langle A_\theta w, v\rangle_V = \langle F(\varepsilon(w), \theta), \varepsilon(v)\rangle_{\mathcal{H}} + \langle \Phi w, v\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d} \ \forall v \in V$$

est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz sur V.
En outre la fonctionelle $j : H_1 \to \mathbb{R}$ définie par

$$j(v) = \int_{\Gamma 3} \varphi(v_\nu) ds$$

est une fonction convexe, propre et s.c.i. Alors le théorème A.1.11 entraine l'existence d'un élèment unique $u^B \in V$ tel que

$$\left\langle A_\theta u^\beta, v - u^\beta \right\rangle_V + \beta j(v) - \beta j(u^\beta) \geq \left\langle q, v - u^\beta \right\rangle_V \ \forall v \in V$$

ceci achève la démonstration du théorème.

Nous présentons dans la suite un résultat de convergence, qui représente le principal résultat de cette section.

Théorème 2.5.2. *Supposons que les hypothèses (2.1.6)-(2.1.7) et (2.1.9)-(2.1.13), sont vérifiées et que pour tout $\beta > 0$, u^β et σ^β vérifient:*

$$\sigma^\beta = F\left(\varepsilon\left(u^\beta\right), \theta\right) \in \mathcal{H}$$

Si pour tout $\beta > 0$, u^β est solution du problème $\left(P_0^\beta\right)$, alors u^β converge vers la solution u du problème (2.2.2) *dans H_1 quand β tend vers ∞.*

La démonstration de ce théorème est une conséquence des trois lemmes suivants

Lemme 2.5.2. *La suite $\left(u^\beta\right)$ est bornée dans V.*

Démonstration.

En prenant $v = 0$ dans (2.5.11) et en utilisant l'hypothèse (2.1.11) et l'inégalité de korn, on obtient

(2.5.12) $c\left|u^\beta\right|_V^2 + \beta j\left(u^\beta\right) \leq \left\langle q, u^\beta\right\rangle_V$

Mais d'après (1.3.6) et (1.3.7) la fonctionnelle J est positive, donc il résulte de (1.3.13) et de l'inégalité de Cauchy-Schwartz que

$$\left|u^\beta\right|_V \leq c$$

c'est-à-dire, la suite $\left(u^\beta\right)$ est bornée dans V.

Lemme 2.5.3. *La suite $\left(u^\beta\right)$ converge faiblement vers la solution u du problème (P).*

Démonstration. D'après le lemme 2.5.2, la suite $\left(u^\beta\right)$est bornée dans V. Alors le théorème A.1.2 entraine l'existence d'une sous-suite notée encore $\left(u^\beta\right)$ et d'un élément $\tilde{u} \in V$ tel que

(2.5.13) $u^\beta \to \tilde{u}$ dans H_1quand $\beta \to \infty$.

D'autre part, du fait que $\left(u^{\beta}\right)$ est bornée dans V, il résulte à partir de (2.5.12) l'existence d'une constante $c > 0$ telle que:

$$j\left(u^{\beta}\right) \leq \frac{1}{\beta} c \ \forall \beta \succ 0$$

Ceci implique, sachant que j est une fonctionnelle positive,

(2.5.14) $\liminf_{\beta \to \infty} j\left(u^{\beta}\right) = 0$

Comme j est semi-norme continue et convexe sur H_1, de (2.5.13) et (2.5.14) il résulte $j(\tilde{u}) = 0$ et en utilisant (2.5.6)et (2.5.7) on en déduit

(2.5.15) $\tilde{u} \in U_{ad}$

En prenant $v = \tilde{u}$ dans (2.5.11) on obtient:

$$\left\langle F\left(\varepsilon\left(u^{\beta}\right), \theta\right), \varepsilon(\tilde{u}) - \varepsilon\left(u^{\beta}\right)\right\rangle_{\mathcal{H}} + \left\langle \Phi u^{\beta}, \tilde{u} - u^{\beta}\right\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d} - \beta j\left(u^{\beta}\right) \geq \left\langle q, \tilde{u} - u^{\beta}\right\rangle_V$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \left\langle F\left(\varepsilon\left(u^{\beta}\right), \theta\right), \varepsilon\left(u^{\beta}\right) - \varepsilon(\tilde{u})\right\rangle_{\mathcal{H}} + \left\langle \Phi u^{\beta}, u^{\beta} - \tilde{u}\right\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d} &\leq -\beta j\left(u^{\beta}\right) - \left\langle q, \tilde{u} - u^{\beta}\right\rangle_V \\ &\leq -\left\langle q, \tilde{u} - u^{\beta}\right\rangle_V \end{aligned}$$

D'où

(2.5.16) $\limsup_{\beta \to \infty} \left\langle F\left(\varepsilon\left(u^{\beta}\right), \theta\right), \varepsilon\left(u^{\beta}\right) - \varepsilon(\tilde{u})\right\rangle_{\mathcal{H}} + \left\langle \Phi u^{\beta}, u^{\beta} - \tilde{u}\right\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d} \leq 0$

Mais d'aprés (2.1.11) et (2.1.6) on a:

$$\begin{aligned} \left\langle F\left(\varepsilon\left(u^{\beta}\right), \theta\right) - F\left(\varepsilon\left(\tilde{u}\right), \theta\right), \varepsilon\left(u^{\beta}\right) - \varepsilon(\tilde{u})\right\rangle_{\mathcal{H}} &\geq 0 \\ \left\langle \Phi(u^{\beta} - \tilde{u}), u^{\beta} - \tilde{u}\right\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d} &\geq 0 \end{aligned}$$

Ceci entraîne que

$$\begin{aligned} \left\langle F\left(\varepsilon\left(u^{\beta}\right),\theta\right),\varepsilon\left(u^{\beta}\right)-\varepsilon(\tilde{u})\right\rangle_{\mathcal{H}} &\geq \left\langle F\left(\varepsilon\left(\tilde{u}\right),\theta\right),\varepsilon\left(u^{\beta}\right)-\varepsilon(\tilde{u})\right\rangle_{\mathcal{H}} \\ \left\langle \Phi u^{\beta},u^{\beta}-\tilde{u}\right\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d} &\geq \left\langle \Phi\tilde{u},u^{\beta}-\tilde{u}\right\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d} \end{aligned}$$

et comme $u^{\beta}\rightarrow\tilde{u}$ et $\varepsilon\left(u^{\beta}\right)\rightarrow\varepsilon(\tilde{u})$ alors on a:

$$\begin{cases} \liminf\limits_{\beta\rightarrow\infty}\left\langle F\left(\varepsilon\left(u^{\beta}\right),\theta\right),\varepsilon\left(u^{\beta}\right)-\varepsilon(\tilde{u})\right\rangle_{\mathcal{H}}+\left\langle \Phi u^{\beta},u^{\beta}-\tilde{u}\right\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d}\geq \\ \liminf\limits_{\beta\rightarrow\infty}\left\langle F\left(\varepsilon\left(\tilde{u}\right),\theta\right),\varepsilon\left(u^{\beta}\right)-\varepsilon(\tilde{u})\right\rangle_{\mathcal{H}}+\left\langle \Phi\tilde{u},u^{\beta}-\tilde{u}\right\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d}=0 \end{cases}$$

Donc

(2.5.17) $\liminf\limits_{\beta\rightarrow\infty}\left\langle F\left(\varepsilon\left(u^{\beta}\right),\theta\right),\varepsilon\left(u^{\beta}\right)-\varepsilon(\tilde{u})\right\rangle_{\mathcal{H}}+\left\langle \Phi u^{\beta},u^{\beta}-\tilde{u}\right\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d}\geq 0$

Les relations (2.5.16) et (2.5.17) entraînent que

$$\begin{cases} \limsup\limits_{\beta\rightarrow\infty}\left\langle F\left(\varepsilon\left(u^{\beta}\right),\theta\right),\varepsilon\left(u^{\beta}\right)-\varepsilon(\tilde{u})\right\rangle_{\mathcal{H}}+\left\langle \Phi u^{\beta},u^{\beta}-\tilde{u}\right\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d}\leq 0\leq \\ \liminf\limits_{\beta\rightarrow\infty}\left\langle F\left(\varepsilon\left(u^{\beta}\right),\theta\right),\varepsilon\left(u^{\beta}\right)-\varepsilon(\tilde{u})\right\rangle_{\mathcal{H}}+\left\langle \Phi u^{\beta},u^{\beta}-\tilde{u}\right\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d}\leq \\ \limsup\limits_{\beta\rightarrow\infty}\left\langle F\left(\varepsilon\left(u^{\beta}\right),\theta\right),\varepsilon\left(u^{\beta}\right)-\varepsilon(\tilde{u})\right\rangle_{\mathcal{H}}+\left\langle \Phi u^{\beta},u^{\beta}-\tilde{u}\right\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d} \end{cases}$$

c'est à dire

$$\begin{cases} 0=\limsup\limits_{\beta\rightarrow\infty}\left\langle F\left(\varepsilon\left(u^{\beta}\right),\theta\right),\varepsilon\left(u^{\beta}\right)-\varepsilon(\tilde{u})\right\rangle_{\mathcal{H}}+\left\langle \Phi u^{\beta},u^{\beta}-\tilde{u}\right\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d}=0 \\ \liminf\limits_{\beta\rightarrow\infty}\left\langle F\left(\varepsilon\left(u^{\beta}\right),\theta\right),\varepsilon\left(u^{\beta}\right)-\varepsilon(\tilde{u})\right\rangle_{\mathcal{H}}+\left\langle \Phi u^{\beta},u^{\beta}-\tilde{u}\right\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d} \end{cases}$$

Donc

(2.5.18) $\lim\limits_{\beta\rightarrow\infty}\left\langle F\left(\varepsilon\left(u^{\beta}\right),\theta\right),\varepsilon\left(u^{\beta}\right)-\varepsilon(\tilde{u})\right\rangle_{\mathcal{H}}+\left\langle \Phi u^{\beta},u^{\beta}-\tilde{u}\right\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d}=0.$

Soient $v \in V,\ \lambda \in]0,1[$ et $w = (1-\lambda)\tilde{u} + \lambda v \in V$. De (2.1.11) et de (2.1.6) on a

$$\begin{aligned} \left\langle F\left(\varepsilon\left(u^\beta\right),\theta\right) - F\left(\varepsilon\left(w\right),\theta\right), \varepsilon\left(u^\beta\right) - \varepsilon(w)\right\rangle_{\mathcal{H}} &\geq 0 \\ \left\langle \Phi(u^\beta - w), u^\beta - w\right\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d} &\geq 0 \end{aligned}$$

Comme $u^\beta - w = u^\beta - \tilde{u} + \lambda(\tilde{u} - v)$ et $\varepsilon(\tilde{u}) - \varepsilon(w) = \varepsilon\left(u^\beta\right) - \varepsilon(\tilde{u}) + \lambda\left(\varepsilon(\tilde{u}) - \varepsilon(v)\right)$ alors on a:

$$\begin{aligned} \left\langle F\left(\varepsilon\left(u^\beta\right),\theta\right) - F\left(\varepsilon\left(w\right),\theta\right), \varepsilon\left(u^\beta\right) - \varepsilon(\tilde{u}) + \lambda\left(\varepsilon(\tilde{u}) - \varepsilon(v)\right)\right\rangle_{\mathcal{H}} &\geq 0 \\ \left\langle \Phi(u^\beta - w), u^\beta - \tilde{u} + \lambda(\tilde{u} - v)\right\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d} &\geq 0 \end{aligned}$$

C'est à dire

$$\begin{aligned} & \left\langle F\left(\varepsilon\left(u^\beta\right),\theta\right), \varepsilon\left(u^\beta\right) - \varepsilon(\tilde{u})\right\rangle_{\mathcal{H}} - \lambda\left\langle F\left(\varepsilon\left(u^\beta\right),\theta\right), \varepsilon\left(v\right) - \varepsilon(\tilde{u})\right\rangle_{\mathcal{H}} \\ \geq\ & \left\langle F\left(\varepsilon\left(w\right),\theta\right), \varepsilon\left(u^\beta\right) - \varepsilon(\tilde{u})\right\rangle_{\mathcal{H}} - \lambda\left\langle F\left(\varepsilon\left(w\right),\theta\right), \varepsilon\left(v\right) - \varepsilon(\tilde{u})\right\rangle_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

$$\left\langle \Phi u^\beta, u^\beta - \tilde{u}\right\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d} - \lambda\left\langle \Phi u^\beta, v - \tilde{u}\right\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d} \geq \left\langle \Phi w, u^\beta - \tilde{u}\right\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d} - \lambda\left\langle \Phi w, v - \tilde{u}\right\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d}$$

En passant à la limite inférieure dans cette dernière inégalité on aura:

$$\begin{aligned} \textbf{(2.5.19)}\quad & \liminf_{\beta\to\infty} \left\langle F\left(\varepsilon\left(u^\beta\right),\theta\right), \varepsilon\left(\tilde{u}\right) - \varepsilon(v)\right\rangle_{\mathcal{H}} + \left\langle \Phi u^\beta, \tilde{u} - v\right\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d} \\ & \geq \left\langle F\left(\varepsilon\left(w\right),\theta\right), \varepsilon(\tilde{u}) - \varepsilon(v)\right\rangle_{\mathcal{H}} + \left\langle \Phi w, \tilde{u} - v\right\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d} \end{aligned}$$

Puisque

$$\begin{aligned} \left\langle F\left(\varepsilon\left(u^\beta\right),\theta\right), \varepsilon(\tilde{u}) - \varepsilon(v)\right\rangle_{\mathcal{H}} &= \left\langle F\left(\varepsilon\left(u^\beta\right),\theta\right), \varepsilon\left(\tilde{u}\right) - \varepsilon(u^\beta)\right\rangle_{\mathcal{H}} \\ &\quad + \left\langle F\left(\varepsilon\left(u^\beta\right),\theta\right), \varepsilon\left(u^\beta\right) - \varepsilon(v)\right\rangle_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

et $\left\langle \Phi u^\beta, \tilde{u} - v\right\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d} = \left\langle \Phi u^\beta, \tilde{u} - u^\beta\right\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d} + \left\langle \Phi u^\beta, u^\beta - v\right\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d}$.
En appliquant (2.5.18) et (2.5.19) dans cette dernière inégalité on obtient:

$$\textbf{(2.5.20)}\quad \liminf_{\beta\to\infty} \left\langle F\left(\varepsilon\left(u^\beta\right),\theta\right),\varepsilon\left(u^\beta\right)-\varepsilon(v)\right\rangle_{\mathcal{H}} + \left\langle \Phi u^\beta, u^\beta - v\right\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d}$$
$$\geq \left\langle F\left(\varepsilon\left(w\right),\theta\right),\varepsilon(\tilde{u})-\varepsilon(v)\right\rangle_{\mathcal{H}} + \left\langle \Phi w, \tilde{u}-v\right\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d}$$

Alors en passant à la limite dans (2.5.20) quand $\lambda \to 0$, on aura:

$$\textbf{(2.5.21)}\quad \begin{cases} \liminf_{\beta\to\infty} \left\langle F\left(\varepsilon\left(u^\beta\right),\theta\right),\varepsilon\left(u^\beta\right)-\varepsilon(v)\right\rangle_{\mathcal{H}} + \left\langle \Phi u^\beta, u^\beta - v\right\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d} \\ \quad \geq \left\langle F\left(\varepsilon\left(\tilde{u}\right),\theta\right),\varepsilon(\tilde{u})-\varepsilon(v)\right\rangle_{\mathcal{H}} + \left\langle \Phi \tilde{u}, \tilde{u}-v\right\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d} \ \forall v \in V \end{cases}$$

En prenant $v = 0$ dans (2.5.21), on obtient:

$$\textbf{(2.5.22)}\quad \liminf_{\beta\to\infty} \left\langle F\left(\varepsilon\left(u^\beta\right),\theta\right),\varepsilon\left(u^\beta\right)\right\rangle_{\mathcal{H}} + \left\langle \Phi u^\beta, u^\beta\right\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d} \geq \left\langle F\left(\varepsilon\left(\tilde{u}\right),\theta\right),\varepsilon(\tilde{u})\right\rangle_{\mathcal{H}} + \left\langle \Phi \tilde{u}, \tilde{u}\right\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d}$$

Mais d'après (2.5.11) on a:

$$\beta j(v) \geq \beta j(u^\beta) + \left\langle q, v-u^\beta\right\rangle_V + \left\langle F\left(\varepsilon\left(u^\beta\right),\theta\right),\varepsilon\left(u^\beta\right)-\varepsilon(v)\right\rangle_{\mathcal{H}} + \left\langle \Phi u^\beta, u^\beta - v\right\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d}$$

Comme $j(v) = 0$, pour $v \in U_{ad}$ et $\beta j(u^\beta) \geq 0$ alors on a:

$$0 \geq \left\langle q, v-u^\beta\right\rangle_V + \left\langle F\left(\varepsilon\left(u^\beta\right),\theta\right),\varepsilon\left(u^\beta\right)-\varepsilon(v)\right\rangle_{\mathcal{H}} + \left\langle \Phi u^\beta, u^\beta - v\right\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d} \forall v \in V.$$

En passant à la limite dans cette dernière inégalité et en utilisant (2.5.21) on obtient:

$$0 \geq \langle q, v-\tilde{u}\rangle_V + \langle F(\varepsilon(\tilde{u}),\theta),\varepsilon(\tilde{u})-\varepsilon(v)\rangle_{\mathcal{H}} + \langle \Phi\tilde{u}, \tilde{u}-v\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d} \ \forall v \in V.$$

C'est à dire

$$\textbf{(2.5.23)}\quad \langle F(\varepsilon(\tilde{u}),\theta),\varepsilon\left(v\right)-\varepsilon(\tilde{u})\rangle_{\mathcal{H}} + \langle \Phi\tilde{u}, \tilde{u}-v\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d} \geq \langle q, v-\tilde{u}\rangle_V \ \forall v \in V$$

De (2.5.15) et (2.5.23) on déduit que $\tilde{u}$ est aussi solution du problème elliptique (P). Comme (P) admet une solution unique, il résulte que $\tilde{u} = u$. On déduit aussi que u est l'unique limite faible de toute la suite $\left(u^\beta\right)$; ceci permet de conclure grâce au théorème A.1.3, la convergence faible de la suite $\left(u^\beta\right)$ vers u dans V quand $\beta \to \infty$.

Lemme 2.5.4.

(*i*) *La suite* $\left(u^{\beta}\right)$ *converge fortement vers la solution* u *de* (2.2.2).

(*ii*) *La suite* $\left(\sigma^{\beta}\right)$ *converge fortement vers la solution* σ *définie par (2.2.4).*

Démonstration

(*i*)en utilisant (2.1.6) et (2.1.11) et l'inégalité de korn on obtient:

(2.5.24) $c\left|u^{\beta}-u\right|_{V}^{2} \leq \left\langle F\left(\varepsilon\left(u^{\beta}\right),\theta\right)-F\left(\varepsilon\left(u\right),\theta\right),\varepsilon\left(u^{\beta}\right)-\varepsilon(u)\right\rangle_{\mathcal{H}}-\left\langle \Phi(u^{\beta}-u),u^{\beta}-u\right\rangle_{\mathbb{L}^{2}(\Gamma_{2})^{d}}.$

En prenant $v=u$ dans (2.5.11) il vient:

(2.5.25) $\left\langle F\left(\varepsilon\left(u^{\beta}\right),\theta\right),\varepsilon\left(u^{\beta}\right)-\varepsilon(u)\right\rangle_{\mathcal{H}}+\left\langle \Phi u^{\beta},u^{\beta}-u\right\rangle_{\mathbb{L}^{2}(\Gamma_{2})^{d}} \leq \left\langle q,u^{\beta}-u\right\rangle_{V}+\beta j\left(u^{\beta}\right).$

De (2.5.24) et (2.5.25) on obtient:

(2.5.26) $0 \leq c\left|u^{\beta}-u\right|_{H_{1}}^{2} \leq \left|\left\langle q,u^{\beta}-u\right\rangle_{V}+\beta j\left(u^{\beta}\right)-\left\langle F\left(\varepsilon\left(u\right),\theta\right),\varepsilon\left(u^{\beta}\right)-\varepsilon(u)\right\rangle_{\mathcal{H}}\right|.$

et moyennant(2.5.26) et le lemme (2.5.3), en déduit que:

$$\limsup_{\beta\to\infty}\left|u^{\beta}-u\right|_{H_{1}}=0$$

C'est-à-dire $u^{\beta}\to u$ dans H_1, quand $\beta\to\infty$.

(*ii*) Comme $\sigma^{\beta}=F\left(\varepsilon\left(u^{\beta}\right),\theta\right)$,et $\sigma=F\left(\varepsilon\left(u\right),\theta\right)$ alors d'après (2.1.11) on a

(2.5.27) $\left|\sigma^{\beta}-\sigma\right|_{\mathcal{H}} \leq L_{1}\left|\varepsilon\left(u^{\beta}\right)-\varepsilon\left(u\right)\right|_{\mathcal{H}} \leq C\left|u^{\beta}-u\right|_{H_{1}}$

De plus, on sait que

$$\left|\sigma^{\beta}-\sigma\right|_{\mathcal{H}_{1}}^{2}=\left|\sigma^{\beta}-\sigma\right|_{\mathcal{H}}^{2}+\left|Div\ \sigma^{\beta}-Div\ \sigma\right|_{\mathcal{H}_{1}}^{2}$$

et puisque $Div\ \sigma^{\beta}=Div\sigma=-f\in H$, il vient

(2.5.28) $\left|\sigma^{\beta}-\sigma\right|_{\mathcal{H}_{1}} \leq C\left|u^{\beta}-u\right|_{H_{1}}.$

Comme $u^\beta \to u$ dans V lorsque $\beta \to \infty$ nous obtenons $\sigma^\beta \to \sigma$ dans $\mathcal{H}_1$ lorsque $\beta \to \infty$, ce qui achève la démonstration du théorème 2.5.2.

Remarque 2.5.2. L'intreprétation mécanique du résultat de convergence donné par le théorème 2.5.2 est la suivante: On peut approcher la solution du problème de contact sans frottement d'un corps élastique avec une base rigide par la solution du problème de contact sans frottement selon les conditions (2.5.5) de ce même corps avec une base déformable quand son seuil d'éffondrement β tend vers l'infini.

Revenons maintenant au problème (P)

Remarque 2.5.3. Si Φ satisfait seulement l'hypothèse (2.1.7) tel que $|\Phi| < \frac{m}{C_0^2}$, alors sous les hypothèses (2.1.9)-(2.1.13) le problème variationnel (2.2.2) admet une solution unique $u \in U_{ab}$.

En effet, la formulation variationnelle (2.2.2) est de la forme

$$u \in U_{ad}, \ \langle A_\theta u, v-u\rangle_V + J(u,v) - J(u,u) \geq \langle q, v-u\rangle_V \quad \forall v \in U_{ad},$$

où $\quad \langle A_\theta u, v-u\rangle_V = \langle F(\varepsilon(u),\theta), \varepsilon(v)-\varepsilon(u)\rangle_{\mathcal{H}}$

et $J : V \times V \to \mathbb{R}$ défini par $J(u,v) = \langle \Phi u, v\rangle_{H'_{\Gamma_2}\times H_{\Gamma_2}}$.

On peut facilement tablir le théorème I.6 car A_θ *est un oprateur non linaire, fortement monotone et de Lipschitz et* $j(\eta,.)$ *est une fonction propre, convexe et semi-continue infrieurement telle que*$\forall \eta \in V$

$$j(\eta_1,u_2) - j(\eta_1,u_1) + j(\eta_2,u_1) - j(\eta_2,u_2) \leq \alpha |\eta_1-\eta_2|_V |u_1-u_2|_V \quad \forall \eta_i, u_i \in V,$$

$i = 1,2,$ *avec* $\alpha = |\Phi| C_0^2 < m.$

CHAPITRE 3

PROBLEME VISCOPLASTIQUE DE CONTACT AVEC FROTTEMENT

Le but ce chapitre est l'étude quasistatique d'un problème viscoplastique soumis à des conditions aux limites de frottement de Tresca en présence des forces de rappels. Il représente également une généralisation de quelques résultats obtenus dans [18]. Dans la première partie de ce chapitre, on donne, après avoir posé le problème mécanique, une formulation variationnelle et on démontre l'existence et l'unicité de la solution faible. Ensuite, On montre un résultat de dépendance de la solution par rapport au paramètre θ.

3.1. Formulation du problème-Hypothèses

Dans cette section, on va formuler le problème quasistatique soumis à des conditions aux limites de contact avec frottement de Tresca en présence des forces de rappels, d'un corps viscoplastique pour lequel on établira une formulation variationnelle ainsi qu'une résultat d'existence et d'unicité.

On considère un corps viscoplastique dont les particules matérielles occupent un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N = 1, 2, 3)$ et dont la frontière Γ, supposée suffisamment régulière, est divisée en trois parties mesurables disjointes Γ_1 ,Γ_2 et Γ_3 tells que mes $\Gamma_1 > 0$. Soit $[0, T]$ un intervalle de temps. On suppose que le champ des déplacements s'annule sur Γ_1, que des tractions superficielles f_2 s'appliquent sur Γ_2, que des forces volumiques f_0 agissent sur Ω et en contact avec une fondation rigide le long de Γ_3. De plus le contact, avec cette fondation, est supposé avec frottement obéissant à la loi de Tresca. On précise en outre qu'on étudie le cas quasistatique et que le corps Ω est modélisé en utilisant une loi de comportement viscoplastique de la forme:

$$\dot{\sigma} = \xi(\varepsilon(\dot{u})) + G(\sigma, \varepsilon(u), \theta).$$

où θ est un paramètre (la température ou l'humidité).

et G est une fonction constituve donnée.

Sous ces considérations, le problème mécanique qu'on étudie peut se formuler de la manière suivante:

Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^d$, le tenseur des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \to S_d$ tels que:

(3.1.1) $\dot{\sigma} = \xi(\varepsilon(\dot{u})) + G(\sigma, \varepsilon(u), \theta)$ dans $\Omega \times [0, T]$

(3.1.2) $Div\sigma + f_0 = 0 \qquad \text{dans } \Omega \times [0,T]$

(3.1.3) $u = 0 \qquad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times [0,T]$

(3.1.4) $\sigma\nu + \Phi(x)u = f_2 \qquad \text{dans } \Gamma_2 \times [0,T]$

(3.1.5)
$$\left.\begin{array}{c} u_\nu = 0, \ \ \|\sigma_\tau\| \leq g, \\ \|\sigma_\tau\| < g \Rightarrow \dot{u}_\tau = 0, \\ \|\sigma_\tau\| = g \Rightarrow \exists \lambda \ > 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda \dot{u}_\tau \end{array}\right\} \text{ dans } \Gamma_3 \times [0,T]$$

(3.1.6) $u(0) = u_0, \ \sigma(0) = \ \sigma_0 \qquad \text{dans} \qquad \Omega$

L'équation d'évolution (3.1.1) représente la loi de comportement viscoplastique. La relation (3.1.2) représente l'équation d'équilibre où f_0 est la densité des forces volumiques agissant sur le corps déformable. Les relations (3.1.3) et (3.1.4) sont des conditions aux limites déplacement-traction. (3.1.4) s'appelle les forces de rappels et signifie que le vecteur des contraintes de Cauchy est proportionnel au déplacement (c'est le cas des bâtiments construits anti-séisme et des matelats, ...). (3.1.5) représente les conditions aux limites de frottement de Tresca auquelles est soumise la partie Γ_3 de sa frontière. Finalement (3.1.5) représente les conditions initiales.

On dénote par (P) le problème (3.1.1)-(3.1.6).

Pour l'étude du problème (P), on considère les hypothèses suivantes:

(3.1.7)
$$\begin{cases} \xi : \Omega \times S_N \to S_N \\ (\mathbf{a}) \quad \xi_{ijkh} \in L^\infty(\Omega) \text{ pour tout } \ i,j,k,h = \overline{0,N} \\ (\mathbf{b}) \quad \xi\sigma.\tau = \sigma.\xi\tau \ \forall \ \sigma,\tau \in S_N. \\ (\mathbf{c}) \quad \exists \alpha > 0 \diagup \xi\sigma.\sigma \geqslant \alpha \left|\sigma\right|^2 \ \forall \sigma \in S_N. \end{cases}$$

(3.1.8)
$$\begin{cases} G : \Omega \times S_N \times S_N \times \mathbb{R}^M \to S_N \\ (\mathbf{a}) \quad \exists \tilde{L} > 0 \text{ tel que } \ \forall \sigma_1,\sigma_2,\varepsilon_1,\varepsilon_2 \in S_N, \ k_1,k_2 \in \mathbb{R}^M \text{ p.p dans } \Omega \\ |G(x,\sigma_1,\varepsilon_1,\theta_1) - G(x,\sigma_2,\varepsilon,\theta_2)| \leq \tilde{L}(|\sigma_1-\sigma_2| + |\varepsilon_1-\varepsilon_2| + |\theta_1-\theta_2|) \\ (\mathbf{b}) \quad x \to G(x,\sigma,\varepsilon,k) \text{ est une fonction Lebesgue-mesurable sur } \Omega \\ \text{pour tout } \sigma,\varepsilon \in S_N, \ \theta \in \mathbb{L}^2(\Omega)^M \\ (\mathbf{c}) \quad x \to G(x,0,0,0) \in \mathbb{L}^2(\Omega)^{N\times N}. \end{cases}$$

$\Phi : \Gamma_2 \to S_N$ tel que:

(3.1.9)
$$\begin{cases} \Phi(x)u.u \geq 0 \ \text{ sur } \Gamma_2. \\ \Phi_{km} = \Phi_{km} \text{ tel que } \Phi_{km} \in L^\infty(\overline{\Gamma}_2) \ \text{ pour } k,m = 1,...,N \end{cases}$$

(3.1.10) $f_0 \in W^{1,\infty}(0,T,H),\ f_2 \in W^{1,\infty}(0,T,H_{\Gamma_2})$.

(3.1.11) $g \in L^\infty(\Gamma_3),\ g \geqslant 0$ on Γ_3

On définit à présent les espaces suivants:

$$H = \left\{ v = (v_i) \diagup v_i \in \mathbb{L}^2(\Omega),\ i = \overline{1,N} \ \right\}$$

$$H_1 = \left\{ v = (v_i) / v_i \in H^1(\Omega),\ i = \overline{1, N} \ \right\}$$

$$V = \{ v \in H_1 : v = 0 \text{ p.p sur } \ \Gamma_1 \}$$

$$V_{\ 1} = \{ v \in V / \ v_\nu = 0 \text{ p.p sur } \Gamma_3 \}$$

$$Q = \{ \tau = (\tau_{ij}) : (\tau_{ij}) = (\tau_{ji}) \in \mathbb{L}^2(\Omega),\ 1 \leq i, j \leq p \ \}$$

$$Q_1 = \{ \tau \in Q, \quad Div\ \tau \in H \ \}$$

et on les munit des produit scalaires suivants:
$\langle ., \ . \rangle_H$, $\langle ., \ . \rangle_{H_1}$, $\langle ., \ . \rangle_V$, $\langle ., \ . \rangle_{V_1}$, $\langle ., \ . \rangle_Q$, $\langle ., \ . \rangle_{Q_1}$ respectivement.

On note par $f(t)$ l'élément de V_1 tel que:

(3.1.12) $$\langle f(t), v \rangle_V = \int_\Omega f_0 . v \ ds + \int_{\Gamma_2} f_2 . v da \ \forall v \in V_1$$

En utilisant (3.1.10) on déduit:

(3.1.13) $$f \in W^{1,\infty}(0, T, V_1)$$

Soit maintenant $j : V_1 \to \mathbb{R}_+$ définie par:

$$j(v) = \int_{\Gamma_2} g \, \| v_\tau \| \, da.$$

De (3.1.11) on a

(3.1.14) $$j(v) \leq c \|g\|_{\mathbb{L}^\infty(\Gamma_3)} \|v\| \qquad \forall v \in V_1$$

On note par $\Sigma(t)$ l'ensemble des contraintes admissibles définit par:

(3.1.15) $$\Sigma(t) = \left\{\tau \in Q: \quad \langle \tau, \varepsilon(v)\rangle_Q + \langle \Phi u, v\rangle_{L^2(\Gamma_2)} + j(v) \geq \quad \langle f(t), v\rangle_V, \forall v \in V_1\right\}, t \in \overline{[0,T]}$$

Finalement, on fait l'hypothèse suivant :

(3.1.16) $$u_0 \in V_1,\ \sigma_0 \in \Sigma(0)$$

3.2. Formulation variationnelle

Dans cette section, on va donner une formulation variationnelle du problème (P) dont l'inconnue principale est le champ des déplacements u.

On a le résultat suivant :

Lemme 3.2.1

Si le couplet de fonctions (u, σ) est une solution régulière (C^1) du problème mécanique (P) alors

(3.2.1) $$u(t) \in V_1, \quad \langle \sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t))\rangle_Q + \langle \Phi u(t), v - \dot{u}(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^N} +$$
$$j(v) - j(\dot{u}(t)) \geq \langle f(t), v - \dot{u}(t)\rangle_V \quad \forall v \in V_1$$

pour tout $t \in [0,T]$.

Démonstration:

Soit $t \in [0,T]$ et $v \in V_1$. On multiple l'équation (3.1.2) par $v - \dot{u}(t)$ et en utilisant l'intégration par partie, on obtient que:

$$\langle \sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)) \rangle_Q = \int_\Omega f_0(t).(v - \dot{u}(t))ds + \int_\Gamma \sigma\nu.(v - \dot{u}(t))da$$

En utilisant (3.1.3) et (3.1.4) on peut remplacer la deuxième partie de l'équation précédente par:

$$\langle f(t), v - \dot{u}(t) \rangle_V - \int_{\Gamma_2} \Phi u.(v - \dot{u}(t))da + \int_{\Gamma_3} \sigma\nu.(v - \dot{u}(t))da$$

De la condition aux limites (3.1.5) on dérive la relation

$$\sigma_\tau(t).\dot{u}_\tau(t) = -g \left\|\dot{u}_\tau(t)\right\| \qquad \text{sur } \Gamma_3$$

Alors, sur Γ_3,

$$\begin{aligned}
\sigma\nu.(v - \dot{u}(t)) &= \sigma_\nu(t).(v_\nu - \dot{u}_v(t)) + \sigma_\tau(t).(v_\tau - \dot{u}_\tau(t)) \\
&= \sigma_\tau(t).v_\tau - \sigma_\tau(t).\dot{u}_\tau(t) \\
&= \sigma_\tau(t).v_\tau + g \left\|\dot{u}_\tau(t)\right\| \\
&\geq g(\left\|\dot{u}_\tau(t)\right\| - \left\|v_\tau\right\|).
\end{aligned}$$

il résulte,

$$\int_{\Gamma_3} \sigma\nu.(v - \dot{u}(t))da \geq j(\dot{u}(t)) - j(v),$$

Et on a

$$\langle \sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)) \rangle_Q + \langle \Phi w, v - \dot{u}(t) \rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^N} \geq \langle f(t), v - \dot{u}(t) \rangle_V + j(\dot{u}(t) - j(v).$$

Le précédent lemme nous aide à donner la formulation variationnelle du problème (P).

Problème $\mathbf{P}_1$ Trouver le champ des déplacements $u : [0,T] \to \mathbb{V}_1$, le champ des contraintes $\sigma : [0,T] \to Q_1$.

(3.2.2) $$\dot{\sigma}(t) = \xi(\varepsilon(\dot{u})) + G(\sigma, u) \quad \text{p.p } t \in (0,T)$$

(3.2.3) $$\langle \sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)) \rangle_Q + \langle \Phi u(t), v - \dot{u}(t) \rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^N} +$$
$$j(v) - j(\dot{u}(t)) \geq \langle f(t), v - \dot{u}(t) \rangle_V \quad \forall v \in V_1$$

$$u(0) = u_0, \ \sigma(0) = \ \sigma_0.$$

Remarque 3.2.1 Le problème (P_1)est formellement équivalent au problème (P). En effet si (u, σ) est une solution régulière du problème (P_1) alors, en utilisant les arguments développés dans [18], on obtient que (u, σ) est une solution du problème mécanique (P).

Sous les hypothèses (3.1.7)-(3.1.11) , dans la prochaine section on donne un résultat d'existence et d'unicité pour la formulation variationnelle (P_1)

3.3. l'existence et l'unicité

Le principal résultat de cette section est le suivant:

Théorème 3.3.1 Sous les hypothèses *(3.1.7)- (3.1.11), le problème* (P_1) *admet une solution unique* $(u,\ \sigma)$ avec la régularité

(3.3.1) $\quad u \in W^{1,\infty}(0,T,V_1),\ \sigma \in W^{1,\infty}(0,T,Q_1).$

Pour établir ce théorème, on utilise une méthode de point fixe. Pour cela, supposons dans la suite que les hypothèses (3.1.7)- (3.1.11) sont satisfaites et on définit la fonction Z_η par

(3.3.2) $$Z_\eta(t) = \int_0^t \eta(s)ds + Z_0 \quad \forall t \in [0,T] \quad \text{où}$$

(3.3.3) $$Z_0 = (\sigma_0 - \xi\varepsilon(u_0))$$

On considère alors le problème elliptique suivant:

Problème $P_{1\eta}$ Trouver $u_\eta : [0,T] \to \mathbb{V}_1$ et $\sigma_\eta : [0,T] \to Q_1$

(3.3.4) $$\sigma_\eta(t) = \xi(\varepsilon(u_\eta)) + Z_\eta(t)$$

(3.3.5) $$\langle \sigma_\eta(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}_\eta(t))\rangle_Q + \langle \Phi u(t), v - \dot{u}(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^N} + j(v) - j(\dot{u}_\eta(t)) \geq \langle f(t), v - \dot{u}_\eta(t)\rangle_V \qquad \forall v \in V_1,\ \forall t \in [0,T]\ .$$

Lemme 3.3.1. *Le problème variationnel (* $P_{1\eta}$*) admet une solution unique* $u_\eta \in W^{1,\infty}(0,T,V_1)$, $\sigma_\eta \in W^{1,\infty}(0,T,Q_1)$.

Démonstration. On définit la forme linéaire $a : V_1 \times V_1 \to \mathbb{R}$ par

$$a(u,v) = \langle \xi(\varepsilon(u)), \varepsilon(v)\rangle_Q + \langle \Phi u(t), v)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^N} \quad \forall u, v \in V_1$$

De l'hypothèse (3.1.7) il résulte que $a(u,v)$ est continue, symétrique et V_1-élliptique. De

même, de (3.1.11) il résulte que j est continue et semi-norme sur V_1.

Soit $f_\eta : [0,T] \to V_1$ tel que

$$\left\langle f_\eta, v\right\rangle_V = \langle f(t), v\rangle_V - \langle Z_\eta(t), \varepsilon(v)\rangle_Q \quad \forall v \in V_1.$$

Puisque $f \in W^{1,\infty}([0,T], V_1)$ et $Z_\eta \in W^{1,\infty}([0,T], Q)$, on a $f_\eta \in W^{1,\infty}([0,T], V_1)$. Et Puisque $\sigma_0 = \xi\varepsilon(u_0) + Z_0 = \xi\varepsilon(u_0) + Z_\eta(0)$ de (3.3.3) et (3.3.2) il résulte $\sigma_0 \in \Sigma(0)$ c-à-d

$$\langle \xi\varepsilon(u_0), \varepsilon(v)\rangle_Q + \langle \Phi u_0, v\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^N} + \left\langle Z_\eta^1(0), \varepsilon(v)\right\rangle_Q + j(v) \geq \langle f(0), v\rangle_V \qquad \forall v \in V_1$$

En appliquant le théorème dans ([18] page70) on trouve qu'il existe une solution unique $u_\eta \in W^{1,\infty}(0,T,V_1)$ pour le problème

(3.3.6) $$a(u_\eta(t), v - \dot{u}_\eta(t)) + j(v) - j(\dot{u}_\eta(t)) \geq \left\langle f_\eta(t), v - \dot{u}_\eta(t)\right\rangle_V \qquad \forall v \in V_1$$

(3.3.7) $$u_\eta(0) = u_0$$

Soit $\sigma_\eta \in W^{1,\infty}(0,T,Q)$ défini par (3.3.3). Alors (u_η, σ_η) est la solution du (3.3.4)-(3.3.6). De l'inégalitée (3.3.5) on obtient $Div\sigma_\eta + f_0 = 0$ p.p dans $\Omega \times (0,T)$. On déduit alors que $\sigma_\eta \in W^{1,\infty}(0,T,Q_1)$.

Finalement, l'unicité de la solution du problème $(P_{1\eta})$ vient de l'unicité du problème (3.3.6)-(3.3.7).

Ainsi l'existence et l'unicité du couple (u_η, σ_η) solution du problème $(P_{1\eta})$ sont établies.

On définit l'opérateur $\Lambda : L^\infty(0,T,Q) \to L^\infty(0,T,Q)$ par

(3.3.8) $\Lambda\eta(t) = G(\sigma_\eta(t), \varepsilon(u_{_\eta})), \theta(t))$ pour tout $t \in [0,T]$.

où $(u_\eta, \sigma_{_\eta})$ est la solution du problème ($P_{1\eta}$).

Lemme 3.3.2. *L'opérateur* Λ possède un unique point fixe noté $\eta_* \in L^\infty(0,T,Q)$.

Démonstration. Soit $\eta_1,\ \eta_2 \in L^\infty(0,T,Q)$ on dénote

$u_i = u_{\eta i_i},\ \sigma_{i_i} = \sigma_{\eta i_i},\ Z_{i_i} = Z_{\eta i_i}$ for all $i = 1,2.$

et $\eta_i = (\eta_i^1, \eta_i^2)$ pour tout $i = 1,2$. En utilisant (3.3.4) et (3.3.5), on obtient:

$$a(u_1(t), v - \dot{u}_1(t)) + \langle Z_{_1}, \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}_1(t))\rangle_Q + j(v) - j(\dot{u}_1(t)) \geq \langle f(t), v - \dot{u}_1(t)\rangle_V$$

$$a(u_2(t), v - \dot{u}_2(t)) + \langle Z_2, \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}_2(t))\rangle_Q + j(v) - j(\dot{u}_2(t)) \geq$$

$\langle f(t), v - \dot{u}_2(t)\rangle_V$

Pour tout $v \in V_1$, p.p sur $(0,T)$. On remplace $v = \dot{u}_1$ dans la première inéquation, $v = \dot{u}_2$ dans la deuxième inéquation, et par différence on obtient:

$$a(u_2 - u_1, \dot{u}_2 - \dot{u}_1) \leq -\langle Z_{_1} - Z_{_2}, \varepsilon(\dot{u}_1(t)) - \varepsilon(\dot{u}_2(t))\rangle_Q \text{ a.e. on } (0,T).$$

Soit $t \in \overline{[0,T]}$. En intégrant:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(u_2 - u_1, u_2 - u_1) \leq -\langle Z_{_1} - Z_{_2}, \varepsilon(u_1(t)) - \varepsilon(u_2(t))\rangle_Q +$$

$$+ \int_0^t \left\langle \eta_{_1}(s) - \eta_{_2}(s), \varepsilon(u_1(s)) - \varepsilon(u_2(s))\right\rangle_Q ds$$

Alors,

$$c\left\|u_1(t) - u_2(t)\right\|_V^2 \leq \left\|Z_{_1}(t) - Z_{_2}(t)\right\|_Q \left\|u_1(t) - u_2(t)\right\|_V +$$

$$+ \int_0^t \left\|\eta_{_1}(s) - \eta_{_2}(s)\right\|_Q \left\|u_1(s) - u_2(s)\right\|_V ds.$$

Donc

$$\|Z_1(t) - Z_2(t)\|_Q \leq \int_0^t \left\|\eta_1(s) - \eta_2(s)\right\|_Q ds.$$

Finalement, on a

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 \leq c \int_0^t \left\|\eta_1^1(s) - \eta_2^1(s)\right\|_Q^2 ds + \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds.$$

En utilisant l'inégalité de Gronwal, on obtient

(3.3.9) $\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 \leq c \int_0^t \left\|\eta_1^1(s) - \eta_2^1(s)\right\|_Q^2 ds$

De (3.3.4) et (3.3.8) on a

(3.3.10) $\|\sigma_1(t) - \sigma_2(t)\|_V^2 \leq c \int_0^t \left\|\eta_1^1(s) - \eta_2^1(s)\right\|_Q^2 ds$

Finalement,

$$\begin{aligned} \Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t) &= G(\sigma_{\eta_1}(t), \varepsilon(u_{\eta_1})), \theta(t)) - \\ & \quad G(\sigma_{\eta_2}(t), \varepsilon(u_{\eta_2}), \theta(t)) \end{aligned}$$

En utilisant (3.1.8), (3.3.9) et (3.3.10) il résulte

(3.3.11) $|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)|_X \leq \tilde{C} \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_X ds$ for all $t \in (0, T)$

Le lemme 3.3.2 est maintenant une conséquence de (3.3.12) et une application de théorème de Banach de point fixe.

Nous avons maintenant les ingrédients nécessaires pour démontrer le théorème 3.3.1.

Démonstration du théorème 3.3.1

Existence.

Soit $\eta^* \in L^\infty(0,T,Q)$ le point fixe de l'opérateur Λ et soit $(u_{\eta^*}, \sigma_{\eta^*})$ la solution du problème ($P_{1\eta}$) pour $\eta = \eta^*$. En utilisant (3.3.8) et (3.3.2) il vient

$$\dot{\sigma}_{\eta^*}(t) = \xi(\varepsilon(\dot{u}_{\eta^*}(t))) + \eta^*(t) \quad p.p. \quad t \in (0,T).$$

et

$$\eta^*(t) = \Lambda\eta^*(t) = G(\sigma_\eta(t), \varepsilon(u_\eta), \theta(t)) \text{ p.p } t \in (0,T).$$

On a obtenu ainsi la partie "existence" du problème (P_1).

Unicité. L'unicité de la solution du problème (P_1) résulte de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ.

3.4. Dépendance de la solution par rapport au paramètre

La dépendance de la solution (u, σ) par rapport au paramètre θ est donnée par le résultat suivant.

Théorème 3.4.1 Sous les hypothèses (3.1.7)- (3.1.11) , *soit* $(u_i, \sigma_i), (i = 1,2)$ *la solution variationnelle du problème* (P), *associée au paramètre* $\theta_i \in \mathbb{L}^2(\Omega)^M$, alors *il existe une constante* $C > 0$ *qui ne dépend que de* Ω, Γ_1, ξ, G *et* Γ *telle que:*

$$|u_1 - u_2|_{H_1} + |\sigma_1 - \sigma_2|_{Q_1} \leq C\,|\theta_1 - \theta_2|_{\mathbb{L}^2(\Omega)^M}$$

Démonstration. Soit $(u_i, \sigma_i), (i = 1,2)$, la solution variationnelle de problème (P) alors:

(3.4.1) $\langle \sigma_i(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)) \rangle_Q + \langle \Phi u_i(t), v - \dot{u}_i(t) \rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^N} +$

$$j(v) - j(\dot{u}_i(t)) \geq \langle f(t), v - \dot{u}_i(t) \rangle_V \quad \forall v \in V_1$$

où

(3.4.2) $\sigma_i(t) = \xi(\varepsilon(u_{_i})) + Z_i(t) \qquad t \in (0,T)$

(3.4.3) $Z_i(t) \ = \int_0^t G(\sigma_i(s), \varepsilon(u_i(s)), \theta_i(s)) ds + \sigma_0 - \xi\varepsilon(u_0)$

En utilisant (3.3.4) et (3.3.5), on obtient:

$a(u_1, v - \dot{u}_1) + \langle Z_1(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}_1(t)) \rangle_Q \ + \ j(v) - j(\dot{u}_1(t)) \geq \langle f(t), v - \dot{u}_1(t) \rangle_V$

$a(u_2, v - \dot{u}_2) + \langle Z_2(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}_2(t)) \rangle_Q \ + \ j(v) - j(\dot{u}_2(t)) \geq \langle f(t), v - \dot{u}_2(t) \rangle_V$

Pour tout $v \in V_1$, a.e sur $(0,T)$. On replace $v = \dot{u}_1$ dans la première inégalité, $v = \dot{u}_2$ dans la deuxième inégalité, et par différence on obtient:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq - \langle Z_{_1} - Z_{_2}, \varepsilon(\dot{u}_1(t)) - \varepsilon(\dot{u}_2(t)) \rangle_Q \text{ a.e. on } (0,T).$$

Soit $t \in \overline{[0,T]}$. En intégrant:

$$\frac{1}{2} a(u_2 - u_1, u_2 - u_1) \leq - \langle Z_{_1} - Z_{_2}, \varepsilon(u_1(t)) - \varepsilon(u_2(t)) \rangle_Q +$$

$$+ \int_0^t \left\langle \eta_{_1}(s) - \eta_{_2}(s), \varepsilon(u_1(s)) - \varepsilon(u_2(s)) \right\rangle_Q ds$$

Alors,

$$c\,\|u_1(t)-u_2(t)\|_V^2 \le \|Z_1(t)-Z_2(t)\|_Q\,\|u_1(t)-u_2(t)\|_V +$$

$$+\int_0^t \|G(\sigma_1(s),\varepsilon(u_1(s)),\theta_1(s))-G(\sigma_2(s),\varepsilon(u_2(s)),\theta_2(s))\|_Q\,\|u_1(s)-u_2(s)\|_V\,ds.$$

on a:

$Z_1(t)-Z_2(t)=\int_0^t G(\sigma_1(s),\varepsilon(u_1(s)),\theta_1(s))-G(\sigma_2(s),\varepsilon(u_2(s),\theta_2(s))ds.$

donc

$$\|Z_1(t)-Z_2(t)\|_Q \le \int_0^t \|G(\sigma_1(s),\varepsilon(u_1(s)),\theta_1(s))-G(\sigma_2(s),\varepsilon(u_2(s),\theta_2(s))\|_Q\,ds.$$

Alors il resulte:

$$\|u_1(t)-u_2(t)\|_V^2 \le c\int_0^t \|G(\sigma_1(s),\varepsilon(u_1(s)),\theta_1(s))-G(\sigma_2(s),\varepsilon(u_2(s))\|_Q^2\,ds+\int_0^t \|u_1(s)-u_2(s)\|_V^2\,ds.$$

En utilisant l'inégalité de Gronwal, on obtient

(3.4.4) $\|u_1(t)-u_2(t)\|_V^2 \le c\int_0^t \|G(\sigma_1(s),\varepsilon(u_1(s)),\theta_1(s))-G(\sigma_2(s),\varepsilon(u_2(s),\theta_2(s))\|_Q^2\,ds$

De (3.4.3) et (3.4.4) on a:

(3.4.5) $\|\sigma_1(t)-\sigma_2(t)\|_V^2 \le c\int_0^t \|G(\sigma_1(s),\varepsilon(u_1(s)),\theta_1(s))-G(\sigma_2(s),\varepsilon(u_2(s)),\theta_2(s)\|_Q^2\,ds$

Finalement, en utilisant l'inégalité de Gronwal et (3.1.8) on obtient:

$$|u_1 - u_2|_{H_1} + |\sigma_1 - \sigma_2|_{Q_1} \leq C\, |\theta_1 - \theta_2|_{\mathbb{L}^2(\Omega)^M}\,.$$

d'où le résultat cherché.

Le résultat de ce théorème est important du point de vue mécanique. Il montre que des petites perturbations dans le paramètre θ entraînent des petites perturbations dans la solution (u, σ) du problème (3.1.1) – (3.1.6).

CHAPITRE 4

PROBLEME VISCOPLASTIQUE A VARIABLE INTERNE D'ETAT DE CONTACT AVEC FROTTEMENT

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude d'un problème viscoplastique à variable interne d'état soumis à des conditions aux limites de contact avec frottement de Tresca en présence des forces de rappels. Il représente également une généralisation de quelques résultats obtenus dans [2]. Après avoir donné des hypothèses sur les données, on établit la formulation variationnelle de ce problème. Ensuite, on s'intéresse aux résultats d'existence et d'unicité.

4.1. Formulation du problème-Hypothèses

Dans cette section, on va formuler le problème quasistatique soumis à des conditions aux limites de frottement de Tresca en présence des forces de rappels, d'un corps viscoplastique avec variable d'état pour lequel on établira une formulation variationnelle ainsi que un résultat d'existence et d'unicité.

On considère un corps viscoplastique dont les particules matérielles occupent un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N = 1, 2, 3)$ et dont la frontière Γ, supposée suffisamment dernière, est divisée en trois parties mesurables disjointes Γ_1 ,Γ_2 et Γ_3 tells que mes $\Gamma_1 > 0$. Soit $[0, T]$ un intervalle de temps. On suppose que le champ des déplacements s'annule sur Γ_1, que des tractions superficielles f_2 s'appliquent sur Γ_2, que des forces volumiques f_0 agissent sur Ω et en contact avec une fondation rigide le long de Γ_3. De plus le contact, avec cette fondation, est supposé avec frottement obéissant à la loi de Tresca. On précise en outre qu'on étudie le cas quasistatique et que le corps Ω est modélisé en utilisant une loi de comportement viscoplastique avec variable interne d'état de la forme:

$$\dot{\sigma} = \xi(\varepsilon(\dot{u})) + G(\sigma, u, k).$$

où k est un paramètre d'écrouissage, ou plus généralement une variable interne d'état à valeur dans $\mathbb{R}^M$ $(M \in IN)$. A cette dèrnière équation, on associe l'équation d'évolution de la forme

$$\dot{k} = \phi(\varepsilon(u), \sigma, k).$$

où ϕ est une fonction constituve donnée.

Sous ces considérations, le problème mécanique qu'on étudie peut se formuler de la manière suivante:

Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^d$, le tenseur des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \to S_d$ et la variable interne d'état $k : \Omega \times (0, T) \to \mathbb{R}^M$ tels que:

(4.1.1) $\dot{\sigma} = \xi(\varepsilon(\dot{u})) + G(\sigma, u, k) \qquad \text{dans } \Omega \times [0,T]$

(4.1.2) $\dot{k} = \phi(\varepsilon(u), \sigma, k) \qquad \text{dans } \Omega \times [0,T]$

(4.1.3) $Div\sigma + f_0 = 0 \qquad \text{dans } \Omega \times [0,T]$

(4.1.4) $u = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_1 \times [0,T]$

(4.1.5) $\sigma\nu + \Phi(x)u = f_2 \qquad \text{sur } \Gamma_2 \times [0,T]$

(4.1.6)
$$\left.\begin{array}{c} u_\nu = 0, \ \|\sigma_\tau\| \leq g, \\ \|\sigma_\tau\| < g \Rightarrow \dot{u}_\tau = 0, \\ \|\sigma_\tau\| = g \Rightarrow \exists \lambda \ > 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda \dot{u}_\tau \end{array}\right\} \text{ sur } \Gamma_3 \times [0,T]$$

(4.1.7) $u(0) = u_0, \ \sigma(0) = \ \sigma_0, \ k(0) = k_0 \qquad \text{dans} \qquad \Omega$

L'équation d'évolution (4.1.1) représente la loi de comportement viscoplastique avec variable interne d'état k dont l'évolution est donnée par l'équation (4.1.2). La relation (4.1.3) représente l'équation d'équilibre où f_0 est la densité des forces volumiques agissant sur le corps déformable. Les relations (4.1.4) et (4.1.5) sont des conditions aux limites déplacement-traction. (4.1.5) s'appelle les forces de rappels et signifie que le vecteur

des contraintes de Cauchy est proportionnel au déplacement (c'est le cas des bâtiments construits anti-séisme et des matelats, ...). (4.1.6) représente les conditions aux limites de frottement de Tresca auquelles est soumise la partie Γ_3 de sa frontière. Finalement (4.1.7) représente les conditions initiales.

On dénote par (P) le problème (4.1.1)-(4.1.7).

Pour l'étude du problème (P), on considère les hypothèses suivantes:

$$\textbf{(4.1.8)} \begin{cases} \xi : \Omega \times S_N \to S_N \\ (\mathbf{a}) \quad \xi_{ijkh} \in L^\infty(\Omega) \text{ pour tout } \ i,j,k,h = \overline{0,N} \\ (\mathbf{b}) \quad \xi\sigma.\tau = \sigma.\xi\tau \ \forall \ \sigma,\tau \in S_N. \\ (\mathbf{c}) \quad \exists \alpha > 0 / \xi\sigma.\sigma \geqslant \alpha \left|\sigma\right|^2 \ \forall \sigma \in S_N. \end{cases}$$

$$\textbf{(4.1.9)} \begin{cases} G : \Omega \times S_N \times S_N \times \mathbb{R}^M \to S_N \\ (\mathbf{a}) \quad \exists \tilde{L} > 0 \text{ tel que } \ \forall \sigma_1,\sigma_2,\varepsilon_1,\varepsilon_2 \in S_N, \ k_1,k_2 \in \mathbb{R}^M \text{ p.p dans } \Omega \\ |G(x,\sigma_1,\varepsilon_1,k_1) - G(x,\sigma_2,\varepsilon_2,k_2)| \leq \tilde{L}(|\sigma_1-\sigma_2| + |\varepsilon_1-\varepsilon_2| + |k_1-k_2|) \\ (\mathbf{b}) \quad x \to G(x,\sigma,\varepsilon,k) \text{ est une fonction Lebesgue-mesurable sur } \Omega \\ \text{pour tout } \sigma,\varepsilon \in S_N, \ k \in \mathbb{R}^M \\ (\mathbf{c}) \quad x \to G(x,0,0,0) \in \mathbb{L}^2(\Omega)^{N\times N}. \end{cases}$$

$$\textbf{(3.1.10)} \begin{cases} \phi : \Omega \times S_N \times S_N \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^M \text{ et} \\ (\mathbf{a}) \exists C > 0 \text{ tel que } \forall \sigma_1,\sigma_2,\varepsilon_1,\varepsilon_2 \in S_N, \ k_1,k_2 \in \mathbb{R}^M \text{ p.p dans } \Omega \\ |\phi(x,\sigma_1,\varepsilon_1,k_1) - \phi(x,\sigma_2,\varepsilon_2,k_2)| \leq C(|\sigma_1-\sigma_2| + |\varepsilon_1-\varepsilon_2| + |k_1-k_2|) \\ (\mathbf{b}) \quad x \to \phi(x,\sigma,\varepsilon,k) \text{ est une fonction Lebesgue-mesurable sur } \Omega \\ \text{pour tout } \sigma,\varepsilon \in S_N, \ k \in \mathbb{R}^M \\ (\mathbf{c}) x \to \phi(x,0,0,0) \in \mathbb{L}^2(\Omega)^M. \end{cases}$$

$\Phi : \Gamma_2 \to S_N$ tel que:

(4.1.11) $\begin{cases} \Phi(x)u.u \geq 0 \ \text{ on } \Gamma_2. \\ \Phi_{km} = \Phi_{mk} \text{ tel que } \Phi_{km} \in L^\infty(\overline{\Gamma}_2) \ \text{ pour } k, m = 1, ..., N \end{cases}$

(4.1.12) $k_0 \in \mathbb{L}^2(\Omega)^M$

(4.1.13) $f_0 \in W^{1,\infty}(0, T, H),\ f_2 \in W^{1,\infty}(0, T, H_{\Gamma_2}).$

(4.1.14) $g \in L^\infty(\Gamma_3),\ g \geqslant 0 \text{ on } \Gamma_3$

On définit à présent les espaces suivants:

$$H = \left\{ v = (v_i) / v_i \in \mathbb{L}^2(\Omega),\ i = \overline{1, N} \ \right\}$$

$$H_1 = \left\{ v = (v_i) / v_i \in H^1(\Omega),\ i = \overline{1, N} \ \right\}$$

$$V = \{ v \in H_1 : v = 0 \text{ p.p sur } \ \Gamma_1 \}$$

$$V_{\ 1} = \{ v \in V / \ v_\nu = 0 \text{ p.p sur } \Gamma_3 \}$$

$$Q = \{ \tau = (\tau_{ij}) : (\tau_{ij}) = (\tau_{ji}) \in \mathbb{L}^2(\Omega),\ 1 \leq i, j \leq p \ \}$$

$$Q_1 = \{ \tau \in Q, \quad Div\ \tau \in H \ \}$$

et on les munit des produit scalaires suivants:

$\langle ., \ . \rangle_H$, $\langle ., \ . \rangle_{H_1}$, $\langle ., \ . \rangle_V$, $\langle ., \ . \rangle_{V_1}$, $\langle ., \ . \rangle_Q$, $\langle ., \ . \rangle_{Q_1}$ respectivement.

On note par $f(t)$ l'élément de V_1 tel que:

(4.1.15) $\langle f(t), v \rangle_V = \int_\Omega f_0 . v \ ds + \int_{\Gamma_2} f_2 . v da \ \forall v \in V_1$

En utilisant (4.1.13) et (4.1.14), on déduit:

(4.1.16) $f \in W^{1,\infty}(0, T, V_1)$

Soit maintenant $j : V_1 \to \mathbb{R}_+$ définie par:

$$j(v) = \int_{\Gamma_2} g \, \|v_\tau\| \, da.$$

De (4.1.14) on a

(4.1.17) $j(v) \leq c \, \|g\|_{\mathbb{L}^\infty(\Gamma_3)} \, \|v\| \qquad \forall v \in V_1$

On note par $\Sigma(t)$ l'ensemble des contraintes admissibles défini par:

(4.1.18) $\Sigma(t) = \left\{ \tau \in Q: \ \ \langle \tau, \varepsilon(v) \rangle_Q + \langle \Phi u, v \rangle_{L^2(\Gamma_2)} + j(v) \geq \ \ \langle f(t), v \rangle_V , \forall v \in V_1 \right\}, t \in \overline{[0, T]}$

Finalement, on fait l'hypothèse suivante:

(4.1.19) $$u_0 \in V_1,\ \sigma_0 \in \Sigma(0)$$

4.2. Formulation Variationnelle

Dans cette section, on va donner une formulation variationnelle du problème (P) dont l'inconnue principale est le champ des déplacements u.

On a le résultat suivant:

Lemme 4.2.1 Si le triplet de fonctions $(u,\ \sigma, k)$ est une solution régulière (C^1) du problème mécanique (P) alors

(4.2.1) $$u(t) \in V_1,\quad \langle \sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)) \rangle_Q + \langle \Phi u(t), v - \dot{u}(t) \rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^N} +$$
$$j(v) - j(\dot{u}(t)) \geq \langle f(t), v - \dot{u}(t) \rangle_V \quad \forall v \in V_1$$

pour tout $t \in [0, T]$.

Démonstration: Soit $t \in [0, T]$ et $v \in V_1$. On multiplie l'équation (4.1.3) par $v - \dot{u}(t)$ et en utilisant l'intégration par partie, on obtient que:

$$\langle \sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)) \rangle_Q = \int_\Omega f_0(t).(v - \dot{u}(t))ds + \int_\Gamma \sigma\nu.(v - \dot{u}(t))da$$

En utilisant (4.1.4) et (4.1.5) on peut remplacer la deuxieme partie de l'équation précédente par:

$$\langle f(t), v - \dot{u}(t)\rangle_V - \int_{\Gamma_2} \Phi u.(v - \dot{u}(t))da + \int_{\Gamma_3} \sigma\nu.(v - \dot{u}(t))da$$

De la condition aux limites (4.1.6) on dérive la relation

$$\sigma_\tau(t).\dot{u}_\tau(t) = -g\,\|\dot{u}_\tau(t)\| \qquad on\Gamma_3$$

Alors, sur Γ_3,

$$\begin{aligned}\sigma\nu.(v - \dot{u}(t)) &= \sigma_\nu(t).(v_\nu - \dot{u}_v(t)) + \sigma_\tau(t).(v_\tau - \dot{u}_\tau(t)) \\ &= \sigma_\tau(t).v_\tau - \sigma_\tau(t).\dot{u}_\tau(t) \\ &= \sigma_\tau(t).v_\tau + g\,\|\dot{u}_\tau(t)\| \\ &\geq g(\|\dot{u}_\tau(t)\| - \|v_\tau\|).\end{aligned}$$

il résulte,

$$\int_{\Gamma_3} \sigma\nu.(v - \dot{u}(t))da \geq j(\dot{u}(t)) - j(v),$$

Et on a

$$\langle\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t))\rangle_Q + \langle\Phi w, v - \dot{u}(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^N} \geq \langle f(t), v - \dot{u}(t)\rangle_V + j(\dot{u}(t) - j(v).$$

La lemme précédent nous aide à donner la formulation variationnelle du problème (P).

Problème $\mathbf{P}_1$ Trouver le champ des déplacements $u : [0,T] \to \mathbb{V}_1$, le champ des contraintes $\sigma : [0,T] \to Q_1$ et la variable interne d'état $k : [0,T] \to \mathbb{R}^M$

(4.2.2) $\qquad \dot{\sigma}(t) = \xi(\varepsilon(\dot{u})) + G(\sigma,\, u,\, k) \quad$ a.e $t \in (0,T)$

(4.2.3) $\dot{k} = \phi(\varepsilon(u), \sigma, k)$

(4.2.4) $\langle \sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)) \rangle_Q + \langle \Phi u(t), v - \dot{u}(t) \rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^N} +$

$$j(v) - j(\dot{u}(t)) \geq \langle f(t), v - \dot{u}(t) \rangle_V \quad \forall v \in V_1$$

$$u(0) = u_0,\ \sigma(0) = \ \sigma_0, k(0) = k_0$$

Remarque 4.2.1 Le problème (P_1)est formellement équivalent au problème (P). En effet si $(u,\ \sigma,\ k)$ est une solution régulière de problème (P_1) alors, et en utilisant les arguments développés dans [2], on obtient que $(u,\ \sigma,\ k)$ de problème mécanique (P).

Sous les hypothèses (4.1.8)-(4.1.14) , dans la prochaine section on donne une résultat d'éxistence et d'unicité pour la formulation variationnelle (P_1)

4.3. Existence et unicité

Le principal résultat de cette section est le suivant:

Théorème 4.3.1 Sous les hypothèses *(4.1.8)- (4.1.14), le problème* (P_1) *admet une solution unique* $(u,\ \sigma, k)$ avec la régularité

(4.3.1) $u \in W^{1,\infty}(0, T, V_1),\ \sigma \in W^{1,\infty}(0, T, Q_1), k \in W^{1,\infty}(0, T, \mathbb{L}^2(\Omega)^M).$

Pour établir ce théorème, on utilise une méthode de point fixe. Pour cela, nous supposons dans la suite que les hypothèses (4.1.8)- (4.1.14) sont satisfaites et pour tout $\eta = (\eta^1, \eta^2) \in C^0(0,T,Q \times \mathbb{L}^2(\Omega)^M)$, soit

$Z_\eta = Z_\eta^1 + Z_\eta^2 \in C^0(0,T,Q \times \mathbb{L}^2(\Omega)^M)$ la fonction définie par

(4.3.2) $$Z_\eta(t) = \int_0^t \eta(s)ds + Z_0 \quad \forall t \in [0,T] \quad \text{où}$$

(4.3.3) $$Z_0 = (\sigma_0 - \xi\varepsilon(u_0), k_0)$$

On considère alors le problème elliptique suivant:

Problème $P_{1\eta}$ Trouver $u_{_\eta} : [0,T] \to \mathbb{V}_1$ et $\sigma_{_\eta} : [0,T] \to Q_1$

(4.3.4) $$\sigma_\eta(t) = \xi(\varepsilon(u_{_\eta})) + Z_\eta^1(t)$$

(4.3.5) $$\langle \sigma_\eta(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}_\eta(t)) \rangle_Q + \langle \Phi u(t), v - \dot{u}(t) \rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^N} + j(v) - j(\dot{u}_\eta(t)) \geq \langle f(t), v - \dot{u}_\eta(t) \rangle_V$$

$$\forall v \in V_1,\ \forall t \in [0,T]\ .$$

.

Lemme 4.3.1. *Le problème variationnel ($P_{1\eta}$) admet une solution unique* $u_{_\eta} \in W^{1,\infty}(0,T,V_1)$, $\sigma_{_\eta} \in W^{1,\infty}(0,T,Q_1)$.

Démonstration. On définit la forme linéaire $a : V_1 \times V_1 \to \mathbb{R}$ par

$$a(u,v) = \langle \xi(\varepsilon(u)), \varepsilon(v) \rangle_Q + \langle \Phi u(t), v \rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^N} \quad \forall u, v \in V_1$$

De l'hypothèse (4.1.9) il résulte que $a(u,v)$ est continue, symétrique et V_1-élliptique. De

même, de (4.1.14) il résulte que j est continue et semi-norme sur V_1.

Soit $f_\eta : [0,T] \to V_1$ tel que

$$\left\langle f_\eta, v\right\rangle_V = \left\langle f(t), v\right\rangle_V - \left\langle Z_\eta^1(t), \varepsilon(v)\right\rangle_Q \quad \forall v \in V_1.$$

Puisque $f \in W^{1,\infty}([0,T], V_1)$ et $Z_\eta^1 \in W^{1,\infty}([0,T], Q)$, on a $f_\eta \in W^{1,\infty}([0,T], V_1)$.

Et Puisque $\sigma_0 = \xi\varepsilon(u_0) + Z_0^1 = \xi\varepsilon(u_0) + Z_\eta^1(0)$ de (4.3.3) et (4.3.2) il résulte $\sigma_0 \in \Sigma(0)$ c-à-d

$$\langle \xi\varepsilon(u_0), \varepsilon(v)\rangle_Q + \langle \Phi u_0, v\rangle_{\mathbb{L}^2(\Gamma_2)^N} + \left\langle Z_\eta^1(0), \varepsilon(v)\right\rangle_Q + j(v) \geq \langle f(0), v\rangle_V \qquad \forall v \in V_1$$

En appliquant le théorème dans ([18] page70) on trouve qu'il existe une solution unique $u_\eta \in W^{1,\infty}(0,T,V_1)$ pour le problème

(4.3.6) $$a(u_\eta(t), v - \dot{u}_\eta(t)) + j(v) - j(\dot{u}_\eta(t)) \geq \left\langle f_\eta(t), v - \dot{u}_\eta(t)\right\rangle_V \qquad \forall v \in V_1$$

(4.3.7) $$u_\eta(0) = u_0$$

Soit $\sigma_\eta \in W^{1,\infty}(0,T,Q)$ défini par (4.3.3). Alors (u_η, σ_η) est une solution pour (4.3.4)-(4.3.6). De l'inégalitie (4.3.5) on obtient $Div\sigma_\eta + f_0 = 0$ p.p dans $\Omega \times (0,T)$. On déduit alors $\sigma_\eta \in W^{1,\infty}(0,T,Q_1)$.

Finalement, l'unicité de la solution du problème $(P_{1\eta})$ vient de l'unicité du problème (4.3.6)-(4.3.7).

Ainsi l'existence et l'unicité du couple (u_η, σ_η) solution du problème $(P_{1\eta})$ sont établies.

On note maintenant $k_\eta \in L^\infty(0,T,\mathbb{L}^2(\Omega)^M)$ la fonction définie par

(4.3.8) $k_\eta = Z_\eta^2$

On définit l'opérateur $\Lambda : L^\infty(0,T,X) \to L^\infty(0,T,X)$ par

(4.3.9) $\Lambda\eta(t) = (G(\sigma_\eta(t),\, \varepsilon(u_{_\eta}),\, k_\eta(t)), \phi(\sigma_\eta(t),\, \varepsilon(u_{_\eta}),\, k_\eta(t)))$ pour tout $t \in [0,T]$.

où $(u_\eta, \sigma_{_\eta})$ est la solution du problème ($P_{1\eta}$).

Lemme 4.3.2. *L 'opérateur* Λ possède un unique point fixe noté $\eta^* \in L^\infty(0,T,X)$.

Démonstration. Soit $\eta_1,\, \eta_2 \in L^\infty(0,T,X)$ on dénote

$u_i = u_{\eta i_i},\, \sigma_{i_i} = \sigma_{\eta i_i},\, Z_{i_i} = Z_{\eta i_i},\, Z_i = Z_i^1 + Z_i^2$

et $\eta_i = (\eta_i^1, \eta_i^2)$ pour tout $i = 1, 2$. En utilisant (4.3.4) et (4.3.5), on obtient:

$$a(u_1(t), v - \dot{u}_1(t)) + \left\langle Z_{_1}^1, \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}_1(t)) \right\rangle_Q + j(v) - j(\dot{u}_1(t)) \geq \langle f(t), v - \dot{u}_1(t) \rangle_V$$

$$a(u_2(t), v - \dot{u}_2(t)) + \left\langle Z_2^1, \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}_2(t)) \right\rangle_Q + j(v) - j(\dot{u}_2(t)) \geq \langle f(t), v - \dot{u}_2(t) \rangle_V$$

Pour tout $v \in V_1$, p.p sur $(0,T)$. On replace $v = \dot{u}_1$ dans la première inégalité, $v = \dot{u}_2$ dans la deuxième inégalité, et par différence on obtient:

$$a(u_2 - u_1, \dot{u}_2 - \dot{u}_1) \leq -\left\langle Z_{_1}^1 - Z_{_2}^1, \varepsilon(\dot{u}_1(t)) - \varepsilon(\dot{u}_2(t)) \right\rangle_Q \text{ a.e. on } (0,T).$$

Soit $t \in \overline{[0,T]}$. En intégrant:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} a(u_2 - u_1, u_2 - u_1) \leq -\left\langle Z_{_1}^1 - Z_{_2}^1, \varepsilon(u_1(t)) - \varepsilon(u_2(t)) \right\rangle_Q +$$

$$+\int_0^t \left\langle \eta_1^1(s)-\eta_2^1(s), \varepsilon(u_1(s))-\varepsilon(u_2(s))\right\rangle_Q ds$$

Alors,

$$c\left\|u_1(t)-u_2(t)\right\|_V^2 \leq \left\|Z_1^1(t)-Z_2^1(t)\right\|_Q \left\|u_1(t)-u_2(t)\right\|_V +$$

$$+\int_0^t \left\|\eta_1^1(s)-\eta_2^1(s)\right\|_Q \left\|u_1(s)-u_2(s)\right\|_V ds.$$

Donc

$$\left\|Z_1^1(t)-Z_2^1(t)\right\|_Q \leq \int_0^t \left\|\eta_1^1(s)-\eta_2^1(s)\right\|_Q ds.$$

Finalement, on a

$$\left\|u_1(t)-u_2(t)\right\|_V^2 \leq c\int_0^t \left\|\eta_1^1(s)-\eta_2^1(s)\right\|_Q^2 ds + \int_0^t \left\|u_1(s)-u_2(s)\right\|_V^2 ds.$$

En utilisant l'inégalité de Gronwal, on obtient

(4.3.10) $\left\|u_1(t)-u_2(t)\right\|_V^2 \leq c\int_0^t \left\|\eta_1^1(s)-\eta_2^1(s)\right\|_Q^2 ds$

De (4.3.4) et (4.3.9) on a

(4.3.11) $\left\|\sigma_1(t)-\sigma_2(t)\right\|_V^2 \leq c\int_0^t \left\|\eta_1^1(s)-\eta_2^1(s)\right\|_Q^2 ds$

Finalement,

$$\begin{aligned}\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t) &= (G(\sigma_{\eta_1}(t), \varepsilon(u_{\eta_1}), K_{\eta_1}(t)), \phi(\sigma_{\eta_1}(t), \varepsilon(u_{\eta_1}), K_{\eta_1}(t))) - \\ &\quad (G(\sigma_{\eta_2}(t), \varepsilon(u_{\eta_2}), K_{\eta_2}(t)), \phi(\sigma_{\eta_2}(t), \varepsilon(u_{\eta_2}), K_{\eta_2}(t)))\end{aligned}$$

En utilisant (4.1.9), (4.1.10) , (4.3.8) et (4.3.9) il résulte

(4.3.12) $|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)|_X \leq \tilde{C} \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_X \, ds$ for all $t \in (0, T)$

Le lemme 4.3.2 est maintenant une conséquence de (4.312) et une application du théorème de Banach de point fixe.

Nous avons maintenant les ingrédients nécessaires pour démontrer le théorème 4.3.1.

Démonstration du théorème 4.3.1

Existence.

Soit $\eta^* \in L^\infty(0, T, X)$ le point fixe de l'opérateur Λ et soit $(u_{\eta^*}, \sigma_{\eta^*})$ la solution du problème ($P_{1\eta}$). Soit aussi $k_{\eta^*} \in L^\infty(0, T, \mathbb{L}^2(\Omega)^M)$ la fonction donnée par (4.3.8) pour $\eta = \eta^*$. En utilisant (4.3.9) et (4.3.2) il vient

$$\dot{\sigma}_{\eta^*}(t) = \xi(\varepsilon(\dot{u}_{\eta^*}(t))) + \eta^*(t) \quad p.p. \quad t \in (0, T).$$

et

$$\eta^*(t) = \Lambda\eta^*(t) = (G(\sigma_\eta(t), \varepsilon(u_\eta), K_\eta(t)), \phi(\sigma_\eta(t), \varepsilon(u_\eta), K_\eta(t))) \text{ p.p } t \in (0, T).$$

On a obtenu ainsi la partie "existence" du problème (P_1).

Unicité. La partie d'unicité du théorème 4.3.1 résulte de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ.

ANNEXE.

Le but de cet annexe est de faciliter la lecture de cette thése. Il comprend des rappels sur les espaces fonctionnels dans lesquels on étudie des problèmes élastiques et viscoplastiques ainsi que des résultats classiques d'avanlyse non linéaire.

A.1. Analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert:

Il s'agit dans cette section de rappeler quelques résultats d'analyse non linéaire utilisés dans ce mémoire. Par simplicité, nous nous restreignons au seul cadre Hilbertien.

A.1.1. Rappels sur les espaces de Hilbert:

Dans la suite, H désigne un espace de Hilbert réel muni de son produit scalaire ainsi que de la norme associée notés respectivement par $\langle .,. \rangle_H$ et $|.|_H$. On note aussi par H' l'espace dual de H et par $\langle .,. \rangle_{H' \times H}$ la dualité entre H'et H.

a) Propriétés élémentaires:

Théorème A.1.1. (théorème de représentation de Riesz- fréchet).

Etant donné $\eta \in H'$,il existe$f \in H$ unique tel que

$$\langle \eta, v \rangle_{H' \times H} = \langle f, v \rangle_H \, \forall v \in H$$

On a de plus $|\eta|_{H'} = |f|_H$.

Ce théorème montre que toute forme linéaire continue sur H peut se représenter de manière unique à l'aide du produit scalaire. L'appliquation $\eta \to f$ est un isomorphisme isométrique qui permet d'identifier H et son dual H'.

On dit que la suite $(u_n) \subset H$ est faiblement convergente vers l'élément $u \in H$ et on note

$$u_n \rightharpoonup u \quad si \quad \langle v, u_n \rangle_H \to \langle v, u \rangle_H \ \forall v \in H$$

Dans ce cas, u s'appelle limite faible de la suite (u_n). En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, il résulte que si $u_n \to u$ dans H alors $u_n \rightharpoonup u$ dans H. La réciproque n'est pas en général vraie. De plus, puisque tout espace de Hilbert est réflexif, on a le résultat suivant:

Théorème A.1.2. *Soit (u_n) une suite bornée de H. Il existe alors un élément $u \in H$ et une sous-suite de (u_n) encore notée (u_n) telle que $u_n \to u$. Un élément $u \in H$ qui est la limite faible d'une sous-suite de la suite (u_n) s'appelle point faiblement adhérent à la suite (u_n).*

Théorème A.1.3. *Si la suite $(u_n) \subset H$ possède un unique point faiblement adhérent $u \in H$, alors $u_n \to u$.*

Autrement dit, le théorème précédent affirme que si toutes les sous-suites faiblement convergentes d'une suite (u_n) ont la même limite faible u, alors toute la suite(u_n) converge faiblement vers u.

Soient u et v deux élèments de H. On dit que u et v sont orthogonaux et on note $u \perp v$ si $\langle u, v \rangle_H = 0$. Soit M un sous-espace vectoriel de H. On pose

$$M^{\perp} = \{v \in H \mid v \perp u \ \forall u \in M\}.$$

On dit que $M^{\perp}$ est l'orthogonal de M dans H et on peut prouver le résultat suivant:

Théorème A.1.4. S*oit M un sous-espace fermé de H. Alors $M^{\perp}$ est un supplémentaire topologique de M c'est-à-dire*

1) *$M^{\perp}$ est un sous-espace fermé de H*

2) *$M \cap M^{\perp} = \{0\}$ et $M + M^{\perp} = H$*

On va finir ce paragraphe par un résultat concernant la projection sur un convexe fermé.

Théorème A.1.5. *Soit $K \subset H$ un convexe fermé non- vide. Alors pour tout $f \in H$ il existe $u \in K$ unique tel que*

(A.1.1) $|f-u|_H = \min_{v\in K} |f-v|_H$.

De plus, u est caractérisé par la propriété suivante:

(A.1.2) $u \in K,\ \langle u, v-u\rangle_H \geq \langle f, v-u\rangle_H \ \forall\ v \in K.$

Etant donné $K \subset H$ un convexe fermé non -vide, le théorème précédent nous permet d'associer à chaque élément $f \in H$ l'élément u défini par $(A.1.1)$ ou $(A.1.2)$. On note $u = P_K\ f$. On a mis ainsi en évidence l'opérateur $P_K : H \to K$ qui s'appelle opérateur projection de H sur K.

b) Théorème du point fixe- Théorème de Laxe-Milgram

On va commencer par rappeler un résultat classique qui est le théorème de point fixe de Banach .Ce résultat intervient dans les démonstrations de bon nombre de résultats d'éxistence et d'unicité établis dans les chapitres précédents.

Théorème A.1.6. *Soit $(X,\ D)$ un espace métrique complet et soit $F : X \to X$ une application contractante, c'est-à-dire qu'il existe un réel k vérifiant $0 < k < 1$ tel que*

$$d\left(F(x_1), F(x_2)\right) \leq k\, d\left(x_1, x_2\right) \quad \forall x_1, x_2 \in X$$

L'application F admet alors un point fixe unique $x \in X$ i.e. $F(x) = x$.

Soit maintenant $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur $H \times H$. La forme a est dite

1) continue s'il existe un réel $M > 0$ tel que

$$|a(u,v)| \leq M\, |u|_H\, |v|_H \quad \forall u, v \in H.$$

2)coercive s'il existe un réel $m \rangle\ 0$ tel que

$$a(u,u) \geq m\,|u|_H^2 \quad \forall u \in H.$$

Remarque A.1.7. Soient $A : H \to H$ un opérateur et $a : H \times H \to \mathbb{R}$ la forme définie par

(A.1.3) $a(u,v) = \langle Au, v\rangle_H \ \forall u, v \in H.$

On a alors les propriétés suivantes:

i) a est bilinéaire si et seulement si A est linéaire.

ii) a est continue si et seulement si A est continu.

iii) a est coércive si et seulement si A est défini positif.

Le second rappel de ce paragraphe concerne le fameux théorème de lax-Milgram:

Théorème A.1.8. *Soit $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, continue et coércive. Alors pour tout $f \in H$, il existe un unique $u \in H$ tel que*

(A.1.4) $a(u,v) = \langle f, v\rangle_H \ \forall v \in H.$

A.1.2.Fonctions convexes- Semi-continuité inférieure:

On considère une fonction φ définie sur un espace vectoriel réel X et à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$. Une telle fonction est dite propre si elle n'est pas identiquement égale à $+\infty$, c'est-à-dire s'il existe $u_0 \in X$ tel que $\varphi(u_0) < +\infty$. La fonction φ est dite convexe si

$$\varphi\left(tu + (1-t)v\right) \ \leq \ t\varphi\left(u\right) + (1-t)\,\varphi\left(v\right) \quad \forall u, v \in X,\ t \in]0,1[\,.$$

La fonction φ est dite strictement convexe si cette dernière inégalité est stricte pour tout $u, v \in X$ tels que $u \neq v$.

Pour toute fonction $\varphi : X \to]-\infty, +\infty]$,on définit le domaine et l'épigraphe de φ respectivement par:

$$dom\,\varphi = \{u \in X \mid \varphi(u) \langle +\infty\}$$

$$epi\,\varphi \quad = \quad \{(u, \alpha) \in X \times \mathbb{R} \mid \varphi(u) \leq \alpha\}\,.$$

Il est clair qu'on peut établir les résultats suivants:

1) φ est propre si et seulement si $dom\,\varphi \neq \phi$

2) Le domaine de φ est un ensemble convexe de X si φ est convexe

3) φ est convexe si et seulement si $epi\,\varphi$ est un ensemble convexe dans $X \times \mathbb{R}$.

Une fonction $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ est dite semi-continue inférieurement (s.c.i.) en $u_0 \in H$ si

$$\liminf_{u \to u_0} \varphi(u) \geq \varphi(u_0).$$

Une fonction est dite s.c.i. sur $K \subset H$ si elle est s.c.i. en tout point de K et elle est dite s.c.i.si elle est s.c.i.sur tout H. La propriété de semi-continuité inférieure peut être caractérisée par:

Lemme A.1.9. *Soit $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*

1) φ est semi-continue inférieurement.

2) l'épigraphe de φ est fermé dans $H \times \mathbb{R}$..

Puisque dans un espace vectoriel normé tout ensemble convexe est simultanément fermé pour la topologie forte et la topologie faible, le lemme précédent conduit au résultat suivant:

Théorème A.1.10. *Soit $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe et propre. Alors φ est semi-continue inférieurement si et seulement si elle est semi -continue inférieurement par rapport à la topologie faible de H.*

Soit maintenant K un sous -ensemble de H . On appelle fonction indicatrice de K, la fonction $\psi_K : H \to]-\infty, +\infty]$ définie par

$$\textbf{(A.1.5)}\quad \psi_K(u) \begin{cases} 0 & si \quad u \in K \\ +\infty & sinon. \end{cases}$$

En utilisant cette définition, on peut facilement prouver le résultat suivant :

Lemme A.1.11. *K est un ensemble convexe, formé et non vide de H si et seulement si la fonction indicatrice ψ_K est convexe, semi -continue inférieurementet propre.*

A.1.4. Inéquations variationnelles elliptiques:

Soient $A : H \to H$ un opérateur non linéaire, $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ une fonction propre et $f \in H$. Un bon nombre de problèmes aux limites en équations aux dérivées partielles ainsi qu'en mécanique des milieux continus ont un rapport avec des problèmes mathématiques de la forme suivante: Trouver u tel que :

(A.1.6) $u \in H$, $\langle Au, v-u\rangle_H + \varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle f, v-u\rangle_H \quad \forall v \in H.$

Le problème $(A.1.6)$ est appelé inéquation variationnelle elliptique de seconde espèce sur H . D'autres problèmes rencontrés en mécanique ont un rapport avec des problèmes mathématiques similaires de la forme suivante: Trouver u tel que :

(A.1.7) $u \in K$, $\langle Au, v-u\rangle_H \geq \langle f, v-u\rangle_H \quad \forall v \in K,$

où K est un sous-ensemble non vide de H. Le problème $(A.1.7)$ est appelé inéquation variationnelle elliptique de première espèce sur H.
Remarquons que si $\varphi \equiv 0$ (ou $K = H$), alors $(A.1.6)$ (resp. $(A.1.7)$) est équivalente au problème suivant : Trouver u tel que :

(A.1.8) $u \in H$, $\langle Au, v\rangle_H = \langle f, v\rangle_H \quad \forall v \in H.$

On obtient ainsi une équation variationnelle.
On dit que l'opérateur A défini sur un espace de Hilbert H est

a) de lipschitz si A vérifie
il existe $m > 0$ tel que $(A(\varepsilon_1) - A(\varepsilon_2)) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m \left|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right|^2$ pour tout $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in H$;

b) fortement monotone si A vérifie

il existe $L > 0$ tel que $|A(\varepsilon_1) - A(\varepsilon_2)| \leq L\,|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|$ pour tout $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in H$.
On peut démontrer que si A est un opérateur fortement monotone et de lipschitz alors A est inversible et A^{-1} est fortement monotone et de lipschitz.
En ce qui concerne les problèmes $(A.1.6)$ et $(A.1.7)$, on a les résultats d'existence et d'unicité suivants:

Théorème A.1.11. *Si A est un opérateur fortement monotone et de lipschitz et φ est une fonction propre , convexe et semi-continue inférieurement alors l'inéquation variationnelle elliptique* $(A.1.6)$ *admet une solution unique.*

Théorème A.1.12. *Si A est un opérateur fortement monotone et de lipschitz et K est un convexe fermé non vide de H alors l'inéquation variationelle elliptique* $(A.1.7)$ *admet une solution unique.*

A.1.5. Inéquations quasivariationnelles:

La modélisation mathématique de plusieurs classes de problème physiques conduit aux inégalités variationnelles elliptiques, dans lesquelles la fonctionnelle non différentiable dépend de la solution elle même. Les inégalités variationnelles de ce type sont appelées des inégalités quasivariationnelles. Nous considérons dans la suite un résultat d'existence et d'unicité pour ce type de problème.

Soit V un espace de Hilbert réel induite par le produit scalaire $\langle .,. \rangle_V$ et la norme associée $||_V$. on note par " $\rightarrow$ "la convergence faible sur V.Soit $A : V \rightarrow V$ on opérateur non linéaire , $j : V \times V \rightarrow IR$, $f \in V$. Compte de ces données, on considère deux inégalités quasivariationnelles suivantes:

(A.1.9) $\langle Au, v - u \rangle_V + j(u, v) - j(u, u) \geq \langle f, v - u \rangle_V \quad \forall v \in V.$

(A.1.10) $\langle Au, v - \dot{u} \rangle_V + j(v) - j(\dot{u}) \geq \langle f, v - \dot{u} \rangle_V \quad \forall v \in V.$

et

(A.1.11) $u(0) = u_0$.

a) Pour résoudre inéquation (A.1.9), on suppose que A est fortement monotone et continûment de Lipschitz, donc vérifiant:

$$\textbf{(A.1.12)} \quad \begin{cases} \textbf{a)} \text{ il existe} M > 0 \quad \text{tel que } \langle Au - Av, v - u\rangle_V \geq M \left|u - v\right|_V^2 \quad \text{pour tout } u, v \in V \\ \textbf{b)} \text{ il existe } L > 0 \qquad \text{tel que } \left|A(u) - A(v)\right|_V \leq L \left|u - v\right|_V \qquad \text{pour tout } u, v \in V. \end{cases}$$

La fonction $j : V \times V \to IR$ satisfait:

(A.1.13) $j(\zeta, .) : V \times V \to IR$ est une fonction convexe pour tout $\zeta \in V$.

Nous formulons dans la suite quelques conditions sur j pour résoudre (A.1.9). En gardant à l'esprit (A.1.13), il est bien connu qu'on peut définir la dérivée directionnelle

(A.1.14) $j_2^{\backprime}(\zeta, u; v) = \lim\limits_{\lambda \downarrow 0} \frac{1}{\lambda} \left[j(\zeta, u + \lambda v) - j(\zeta, u)\right] \; \forall \zeta, u, v \in V.$

Maintemant, on considère les hypothèses:

$$\textbf{(A.1.15)} \quad \begin{cases} \text{Pour chaque suite} \quad \{u_n\} \subset V \text{ avec } |u_n| \to \infty \\ \text{et chaque suite} \qquad\qquad \{t_n\} \subset [0, 1] \text{ on a :} \\ \qquad \liminf\limits_{n \to \infty} \left[\frac{1}{|u_n|_V^2} j_2' \left(t_n u_n, u_n; -u_n\right)\right] < m. \end{cases}$$

$$\textbf{(A.1.16)} \quad \begin{cases} \text{Pour chaque suite } \{u_n\} \subset V \text{ avec } \left|u_n\right|_V \to \infty \\ \qquad \text{et chaque suite } \{\xi_n\} \subset V \text{ on a :} \\ \qquad \liminf\limits_{n \to \infty} \left[\frac{1}{|u_n|_v^2} j_2' \left(\xi_n u_n, u_n; -u_n\right)\right] < m \end{cases}$$

$$\textbf{(A.1.17)} \quad \begin{cases} \text{Pour chaque suite } \{u_n\} \subset V \text{ et } \{\xi_n\} \subset V \text{ telle que } u_n \to u \in V \\ \xi_{n\prime} \to \xi \in V \text{ et pour chaque } v \subset V, \text{ l'inégalité satisfait} \\ \limsup_{n\to\infty} \left[j\left(\xi_n, v\right) - j\left(\xi_n, u_n\right) \right] \leq j\left(\xi, u_n\right) - j\left(\xi, u\right) \end{cases}$$

$$\textbf{(A.1.18)} \quad \begin{cases} j\left(u,v\right) - j\left(u,u\right) + j\left(v,u\right) - j\left(v,v\right) \leq \beta \left|u-v\right|_V^2 \quad \forall u, v \in V \\ \text{pour un certain} \qquad \beta \in IR avec \beta < m. \end{cases}$$

$$j\left(u,v\right) - j\left(u,u\right) + j\left(v,u\right) - j\left(v,v\right) \leq \beta \left|u-v\right|_V^2 \quad \forall u, v \in V$$

pour un certain $\beta \in IR$ avec $\beta < m$.

On a les résultats d'existence et d'unicité suivants:

Théorème A.1.13. Supposons que les hypothéses (A.1.12)-(A.1.13)soient satisfaifes. Alors:

1) Sous les hypothèses (A.1.14)-(A.1.16), il existe au moins un élément $v \in V$ qui résoud (A.1.9).

2) Sous les hypothèses (A.1.14)-(A.1.18). Le problème (A.1.9) admet une unique solution $u = u_f$ qui est une fonction lipschitzienne de f avec la constante de Lipschitz $(m-\beta)^{-1}$.

B) Pour résoudre inéquation (A.1.10)-(A.1.11) on suppose que A une forme bilinéair symitrique:

$$\textbf{(A.1.19)} \quad \begin{cases} \textbf{a)} \text{ il existe } m > 0 \quad \text{tel que} \quad A(v,v) \geq m \left\|v\right\|_V^2 \quad \text{pour} \quad \text{tout} v \in V \\ \textbf{b)} \text{ il existe } M > 0 \quad \text{tel que } \left|A(u-v)\right| \leq M \left\|u\right\|_V \left\|v\right\|_V \text{ pour tout } u, v \in V. \end{cases}$$

Et que la fonction $j : V \times V \to IR$ satisfait:

(A.1.20) j est une fonction continue et semi-norme sur V avec:

(A.1.21) $f \in W^{1,p}(0.T.V)$

(A.1.22) $u_0 \in V.$

(A.1.23) $A(u_0, v) + j(v) \geq (f(0), v)_V \qquad v \in V.$

On a le résultat d'existence et d'unicité suivant:

Théorème A.1.14. Supposons que les hypothéses (A.1.21)-(A.1.23) soient satisfaites.

Alors: Le problème (A.1.10)-(A.1.11) admet une unique solution u$\in W^{1,p}(0, T, V)$.

Théorème A.1.15. *Si A est un opérateur non linéaire, fortement monotone et de Lipschitz et $j(\eta, .)$ est une fonction propre, convexe et semi-continue inférieurement $\forall \eta \in V$ telle que*

$$j(\eta_1, u_2) - j(\eta_1, u_1) + j(\eta_2, u_1) - j(\eta_2, u_2) \leq \alpha \left|\eta_1 - \eta_2\right|_V \left|u_1 - u_2\right|_V \quad \forall \eta_i, u_i \in V,$$

$i = 1, 2$, *avec $\alpha < m$, alors l'inégalité (A.1.9) admet une solution unique dans V.*

A.1.5. Lemme de Gronwall

On présente ici des lemmes classiques du type Gronwall.

Lemme A.1.11. Soit $m, n \in C(0, T; IR)$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0.T]$ et soit $a \geq 0$.Si $\psi \in C(0, T; IR)$ est une fonction telle que:

$$\psi(t) \leq a + \int_0^t m(s)ds + \int_0^t n(s)\psi(s)ds \qquad \forall t \in [0.T],$$

alors

$$\psi(t) \leq \left(a + \int_0^t m(s)ds\right) \exp\left(\int_0^t n(s)ds\right) \qquad \forall t \in [0.T]\,,$$

Pour le cas particulier m=0, ce lemme devient:

Corollaire A.1.1. Soit $n \in C(0,T;IR)$ telle que $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0.T]$ et soit $a \geq 0$.Si $\psi \in C(0,T;IR)$ est une fonction telle que:

$$\psi(t) \leq a + \int_0^t n(s)\psi(s)ds \qquad \forall t \in [0.T]\,,$$

alors

$$\psi(t) \leq a \exp\left(\int_0^t n(s)ds\right) \qquad \forall t \in [0.T]\,,$$

De meme on le résultat suivant:

Lemme A.1.12. Soit $m, n \in C(0,T;IR)$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0.T]$ et soit $a \geq 0$.Si $\psi \in C(0,T;IR)$ est une fonction telle que:

$$\tfrac{1}{2}\psi^2(t) \leq \tfrac{1}{2}a^2 + \int_0^t m(s)\psi(s)ds + \int_0^t n(s)\psi^2(s)ds \qquad \forall t \in [0.T]\,,$$

alors

$$|\psi(t)| \leq \left(a + \int_0^t m(s)ds\right) \exp\left(\int_0^t n(s)ds\right) \qquad \forall t \in [0.T]\,,$$

A.2.Espaces fonctionnels.

On introduit dans cette section des espaces du type Sobolev utilisés en mécanique et associés aux opérateurs divergence et déformation. On présente de plus leurs principales propriétés, notamment les théorèmes de trace. On rappelle aussi quelques espaces définis sur un intervalle réel et à valeurs dans un espaces de Hilbert. On adopte ici la convention de l'indice muet et on précise aussi que toute les notations ainsi que les espaces fonctionnels utilisés dans cette thése sont introduits dans cette section.

A.2.1. Espaces de distributions:

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On note par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonction réelles sur Ω, indéfiniment dérivables et à support compact inclus dans Ω et par $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω. Le produit de dualité entre $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\Omega)$ sera noté par $\langle .,. \rangle$. On précise en outre que le produit scalaire canonique ainsi que la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ seront respectivement notées par "."et $|.|$ nous introduisons également les espaces suivants:

$$\begin{aligned}
D &= \left\{\varphi = (\varphi_i) \mid \varphi_i \in D(\Omega),\ i = \overline{1,\ d}\right\} = \mathcal{D}(\Omega)^d \\
\mathcal{D} &= \left\{\Phi = (\Phi_{ij}) \mid \Phi_{ij} = \Phi_{ji} \in D(\Omega),\ i,j = \overline{1,\ d}\right\} = \mathcal{D}(\Omega)_S^{d\times d} \\
D' &= \left\{u = (u_i) \mid u_i \in D'(\Omega),\ i = \overline{1,\ d}\right\} = \mathcal{D}'(\Omega)^d \\
\mathcal{D}' &= \left\{\sigma = (\sigma_{ij}) \mid \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in D'(\Omega),\ i,j = \overline{1,\ d}\right\} = \mathcal{D}'(\Omega)_S^{d\times d}
\end{aligned}$$

Les dualités entre les espaces D'et D, $\mathcal{D}'$et $\mathcal{D}$ seront notées respectivement par $\langle .,. \rangle_{D'\times D}$ et $\langle .,. \rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}}$. Plus précisement on a:

$$\begin{aligned}
\langle u, \varphi \rangle_{D'\times D} &= \langle u_i, \varphi_i \rangle \\
\langle \sigma, \Phi \rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}} &= \langle \sigma_{ij}, \Phi_{ij} \rangle
\end{aligned}$$

pour tout $u \in D'$, $\varphi \in D$, $\sigma \in D'$ et $\Phi \in D$ avec la convention de l'indice muet. Considérons maintenant l'opérateur défini pour les fonctions et pour les distributions $\partial_i = \partial / \partial_{x_i}$, $i = \overline{1,\ d}$. On a

(A.2.1) $\langle \partial_i \theta, \psi \rangle = - \langle \theta, \partial_i \psi \rangle$ $\forall \theta \in D'(\Omega), \psi \in D(\Omega)$.

On introduit également les opérateurs différentiels du premier ordre définis par

(A.2.2) $\varepsilon : D \to \mathcal{D}, \varepsilon(\varphi) = (\varepsilon_{ij}(\varphi)), \varepsilon_{ij}(\varphi) = \frac{1}{2}\left(\partial_j \varphi_i + \partial_i \varphi_j\right) \forall i, j = \overline{1,\ d}, \varphi \in D$

(A.2.3) $Div : \mathcal{D} \to D,\ Div\Phi = (\partial_j \Phi_{ij})\, \forall i = \overline{1,\ d}, \Phi \in \mathcal{D}.$

On va utiliser les mêmes notations pour les opérateurs correspondants définis sur les espaces de distribution:

(A.2.4) $\varepsilon : D' \to \mathcal{D}', \quad \varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)),$

$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\partial_j u_i + \partial_i u_j\right)\ \forall i, j = \overline{1,\ d},\ u \in D'$

(A.2.5) $Div : \mathcal{D}' \to D', Div\sigma = \left(\partial_j \sigma_{ij}\right), i = \overline{1,\ d}, \sigma \in \mathcal{D}'.$

En utilisant $(A.2.1)$,on obtient facilement

(A.2.6) $\langle \varepsilon(u), \Phi \rangle_{\ \mathcal{D}' \times \mathcal{D}} = -\left\langle u, Div\Phi \right\rangle_{D' \times D}\ \forall u \in D', \Phi \in \mathcal{D}.$

(A.2.7) $\langle Div\sigma, \varphi \rangle_{D' \times D} = -\left\langle \sigma, \varepsilon(\varphi) \right\rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}}\ \forall \sigma \in \mathcal{D}', \varphi \in D.$

L'opérateur ε défini par $(A.2.2.)$ pour les fonctions et par $(A.2.4)$ pour les distributions s'appelle opérateur déformation. L'opérateur Div défini par $(A.2.3)$ pour les fonctions et par $(A.2.5)$ pour les distributions s'appelle *opérateur divercence.* On va utiliser aussi les notations :

(A.2.8) $$H = \left\{u = (u_i) \mid u_i \in \mathbb{L}^2(\Omega), i = \overline{1,d}\right\} = \mathbb{L}^2(\Omega)^d$$

(A.2.9) $$\mathcal{H} = \left\{\sigma = (\sigma_{ij}) \mid \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in \mathbb{L}^2(\Omega), i = \overline{1,d}\right\} = \mathbb{L}^2(\Omega)_S^{d\times d}$$

Les espaces H et $\mathcal{H}$ sont des espaces de Hilbert réels munis des produits scalaires canoniques

$$\begin{aligned} \langle u, u\rangle_H &= \int_\Omega u_i u_i \, dx \quad \forall u, u \in H \\ \langle \sigma, \tau\rangle_{\mathcal{H}} &= \int_\Omega \sigma_{ij}\tau_{ij} \, dx \quad \forall \sigma, \tau \in \mathcal{H} \end{aligned}$$

Les normes associées à ces produit scalaires seront notées respectivement par $|.|_H$et $|.|_{\mathcal{H}}$. Compte tenu de l'identification de $\mathbb{L}^2(\Omega)$ à un sous-espace des distributions sur Ω, on peut considérer que $H \subset D'$ et $\mathcal{H} \subset \mathcal{D}'$. Par conséquent, les opérateurs déformation et divergence peuvent être définis respectivement sur les espaces H et $\mathcal{H}$. Cela nous conduira à l'étude d'autres espaces fonctionnels, dans les paragraphes$(A.2.2)$et$(A.2.3)$ pour l'instant, on rappelle la définition de l'spaces de sobolev $H^1(\Omega)$ défini par

$$H^1(\Omega) \quad = \quad \left\{ u \in \mathbb{L}^2(\Omega) / \; \partial_i u \in \mathbb{L}^2(\Omega), i = \overline{1,d} \right\}$$

L'espaces $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert réel pour le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} \quad = \quad \langle u, v \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \langle \partial_i u, \partial_i v \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \, \forall u, v \in H^1(\Omega)$$

On notera la norme associée par $|.|_{H^1(\Omega)}$. On note de plus par$H_o^1(\Omega)$ l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. L'espace $H_o^1(\Omega)$ est un espace fermé de $H^1(\Omega)$.

A.2.2.Espaces liés à l'opérateur déformation.

Pour l'opérateur déformation défini par $(A.2.4)$, il est naturel d'introduire l'espace

$$H_1 \quad = \quad \{ u \in H \mid \varepsilon(u) \in \mathcal{H} \}$$

On considère sur H_1 le produit scalaire

$$\langle u, u \rangle_{H_1} \quad = \quad \langle u, u \rangle_H + \langle \varepsilon(u), \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} \, \forall u, u \in H_1$$

Et on notera la norme associée par $|.|_{H_1}$. On obtient ainsi que l'injection $H_1 \subset H$ et

l'opérateur déformation $\varepsilon : H_1 \to \mathcal{H}$ sont des opérateurs continus. De même, compte tenu de l'identification de H et $\mathcal{H}$sous-espaces de D' et $\mathcal{D}'$ en utilisant $(A.2.6)$ il résulte:

(A.2.10) $\langle \varepsilon(u), \Phi \rangle_{D' \times D} + \langle u, Div\Phi \rangle_{\mathcal{H}} = 0 \ \forall u \in \mathcal{H}, \Phi \in \mathcal{D}.$

(A.2.11) $\langle \varepsilon(u), \Phi \rangle_{\mathcal{H}} + \langle u, Div\Phi \rangle_{\mathcal{H}} = 0 \ \forall u \in \mathcal{H}_1, \Phi \in \mathcal{D}.$

Théorème A.2.1. *Muni du produit scalaire* $\langle ., . \rangle_{H_1}$, *l'espace* H_1 *est un espace de Hilbert réel.*

On munit maintenant l'espace produit $H^1(\Omega)^d$du produit scalaire canonique et de la norme asociée qu'on note respectivement par$\langle ., . \rangle_{H^1(\Omega)^d}$ et $|.|_{H^1(\Omega)^d}$. On a alors le résultat suivant:

Théorème A.2.2. *On a l'égalité algébrique* $H_1 = H^1(\Omega)^d$ et$|.|_{H_1}$, $|.|_{H^1(\Omega)^d}$ *sont des normes équivalentes sur* H_1.

On suppose maintenant que dans toute la suite, la frontière Γ de Ω est de classe $C^{1,1}$. Compte tenu du théorème précédent, toutes les propriétés de l'espace $H^1(\Omega)$ peuvent être transportées sur l'espaces H_1 par passage aux espaces produit. Plus précisément, on a les résultats suivants:

- $C^1\left(\overline{\Omega}\right)^d$ est dense dans H_1.
- $H_1 \subset H$ avec injection compacte (théorème de rellich).
- Il existe une application linéaire et continue $\gamma : H_1 \to \mathbb{L}^2(\Gamma)^d$ vérifiant l'égalité $\gamma u = u_{|\Gamma}$ pour tout $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)^d$.

L'application γ est appelée application trace. Elle est définie comme le prolongement par densité de l'application $u \to u_{|\Gamma}$ définie pour tout $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)^d$.

L'application trace $\gamma : H_1 \to \mathbb{L}^2(\Gamma)^d$ n'est pas surjective. L'image de H_1 par cette application est notée par H_Γ; c'est un sous-espace de $\mathbb{L}^2(\Gamma)^d$ qui est de Hilbert pour la structure transportée par γ. On a en outre:

- $H_\Gamma \subset \mathbb{L}^2(\Gamma)^d$ avec injection continue.
- Il existe une application linéaire et continue $z : H_\Gamma \to H_1$ vérifiant l'égalité

(A.2.12) $\gamma(z(\zeta)) = \zeta \ \forall \zeta \in H_\Gamma.$

• Le noyau de l'application trace est $H_o^1(\Omega)^d$ i.e. $H_o^1(\Omega)^d = \{u \in H_1 \mid \gamma u = 0\}$.

En notant par $\nu = (\nu_j)$ la normale sortante unitaire à Γ, on définit pour tout $\zeta \in H_\Gamma$ les composantes normale et tangentielle de ζ respectivement par

(A.2.13) $\zeta_\nu = \zeta.\nu \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $\zeta_\tau = \zeta - \zeta_\nu \ \nu \in H_\tau$

où H_τ est le sous-espace fermé de H_τ défini par

$$H_\tau \ = \ \{\zeta \in H_\Gamma \mid \zeta_\nu = 0 \ p.p. \ sur \ \Gamma\}$$

On peut prouver que l'application $\zeta \to (\zeta_\nu, \zeta_\tau)$ est un isomorphisme de H_Γ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H_\tau$.

Dans la suite, on va utiliser respectivement les espaces duals H'_Γ, $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et H'_τ de H_Γ $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et H_τ.On notera leurs normes respectives ainsi que leurs produits de dualité par $|.|_{H'_\Gamma}$, $\langle ., . \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma}$, $|.|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}$, $\langle ., . \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$ et $|.|_{H'_\tau}$, $\langle ., . \rangle_{H'_\tau \times H_\tau}$.

Pour tout $\zeta' \in H'_\Gamma$, les composantes normale et tangentielle de ζ' sont respectivement définies par

(A.2.14) $\langle \zeta'_\nu, \zeta \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \langle \zeta', \zeta_\nu \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} \ \forall \zeta \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma).$

(A.2.15) $\langle \zeta'_\tau, \zeta \rangle_{H'_\tau \times H_\tau} = \langle \zeta', \zeta \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} \ \forall \zeta \in H_\tau.$

L'application$\zeta' \to (\zeta'_\nu, \zeta'_\tau)$ est un isomorphisme de H'_Γ dans$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H'_\tau$et,compte tenu de

$(A.3.13) - (A.3.15)$, il résulte

(A.2.16) $\zeta', \zeta_{\nu H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \langle \zeta'_\nu, \zeta_\nu \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \langle \zeta'_\tau, \zeta_\tau \rangle_{H'_\tau \times H_\tau} \ \forall \zeta' \in H'_\Gamma, \forall \zeta \in H_\Gamma.$

Moyennant l'application trace, on définit pour tout $u \in H_1$, les élèments $\gamma_\nu u \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et

$\gamma_\tau u \in H_\tau$ par

$$\gamma_\nu u = (\gamma u)_\nu, \gamma_\tau u = (\gamma u)_\tau$$

et rappelons que si $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)^d$alors

$$\gamma u = u_{|\Gamma}, \gamma_\nu u = u_{|\Gamma}.\nu, \ \gamma_\tau u = u_{|\Gamma} - (u_{|\Gamma}.\nu)\nu.$$

de plus, par souci de simplicité, on utilisera souvent les notations u, u_ν, u_τ au lieu de γu, $\gamma_\nu u$, $\gamma_\tau u$ pour tout $u \in H_1$.

On note à présent par $\mathcal{R}$ l'ensemble des déplacements rigides défini par

(A.2.17) $$\mathcal{R} = \{u \in H_1 \mid \varepsilon(u) = 0\},$$

et soit V un sous-espace fermé de H_1. On a alors le résultat suivant:

Théorème A.2.3. *Si le sous-espace V est tel que :*

(A.2.18) $$V \cap \mathcal{R} = \{0\}$$

Alors l'inégalité de korn est vérifiée sur V, c'est-à-dire

(A.2.19) $$|\varepsilon(u)|_{\mathcal{H}} \geq C_K \, |u|^2_{H_1} \ \forall u \in V$$

où C_K est une constante strictement positive ne dépendant que de Ω et V.

Supposons maintenant que $\Gamma = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \bigcap \Gamma_2 = \emptyset$ est une partition de Γ et soit V le sous-espace fermé de H_1 défini par

(A.2.20) $$V = \{u \in H_1 \mid \gamma u = 0 \ p.\ p.\ sur \Gamma_1\}:$$

Carollaire A.2.4. *Si mes $\Gamma_1 \rangle\ 0$ Alors l'inégalité de korn $(A.2.19)$ est vérifiée sur le sous-espace V défini par $(A.2.20)$.*

En utilisant ce résultat, il vient:

Remarque A.2.5. Si mes $\Gamma_1 \rangle\ 0$ Alors $u \rightarrow |\varepsilon(u)|_{\mathcal{H}}$ est une norme sur le sous-espace V défini par $(A.2.20)$, équivalente à la norme canonique$|.|_{H_1}$.

A.2.3. Espaces liés à l'opérateur divergence

Comme dans le cas de l'opérateur déformation, il est naturel d'introduire l'espace $\mathcal{H}_1$lié à l'opérateur divergence et défini par

$$\mathcal{H}_1 = \{\sigma \in \mathcal{H} \mid Div\sigma \in \mathcal{H}\}$$

sur lequel on considère le produit scalaire

$$\langle \sigma, \tau \rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle \sigma, \tau \rangle_{\mathcal{H}} + \langle Div\sigma, Div\tau \rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall \sigma, \tau \in \mathcal{H}_1$$

On note la norme associée par $|.|_{\mathcal{H}_1}$. On obtient ainsi que l'injection $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$ et l'opérateur divergence $Div : \ \mathcal{H}_1 \rightarrow H$ sont des opérateurs continus. De plus, compte tenu de l'identification de H et $\mathcal{H}$ à des sous espaces de D' et D' , en utilisant $(A.2.7)$ il résulte

(A.2.21) $\langle Div\sigma, \varphi\rangle_{D'\times D} + \langle \sigma, \varepsilon(\varphi)\rangle_{\mathcal{H}} = 0 \quad \forall \sigma \in \mathcal{H}_1, \varphi \in D.$

(A.2.22) $\langle Div\sigma, \varphi\rangle_{H} + \langle \sigma, \varepsilon(\varphi)\rangle_{\mathcal{H}} = 0 \quad \forall \sigma \in \mathcal{H}_1, \varphi \in D.$

Théorème A.2.6. *Muni du produit scalaire* $\langle ., . \rangle_{\mathcal{H}_1}$ *l'espace* $\mathcal{H}_1$*est un espace de Hilbert réel.*

On peut prouver que l'espace $C^1\left(\overline{\Omega}\right)_S^{d\times d} = \left\{\sigma = (\sigma_{ij}) \mid \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in C^1\left(\overline{\Omega}\right), i, j = \overline{1,d}\right\}$ est dense dans $\mathcal{H}$. De plus, pour tout $\sigma \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)_S^{d\times d}$, on note par $\sigma\nu$ le vecteur de composantes $(\sigma_{ij}\nu_j)$, $i = \overline{1,d}$. Comme dans le cas de l'espace H_1 , on peut définir l'application trace pour l'espaces $\mathcal{H}_1$ à l'aide du résultat suivant:

Théorème A.2.7. *Il existe une application linéaire, continue et surjective* $\overline{\gamma} : \mathcal{H}_1 \to H'_\Gamma$ *telle que*

(A2.23) $\langle \overline{\gamma}\sigma, \zeta\rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \int\limits_\Gamma \sigma\nu.\zeta da,$

pour tout $\zeta \in H_\Gamma$et $\sigma \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)_S^{d\times d}$. Pour tout $\sigma \in \mathcal{H}_1$, l'image $\overline{\gamma}\sigma \in H'_\Gamma$ est un élèment de H'_Γ vérifiant l'égalité

(A.2.24) $\langle \overline{\gamma}\sigma, \gamma u\rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \langle \sigma, \varepsilon(u)\rangle_{\mathcal{H}} + \langle Div\sigma, u\rangle_{H} \ \forall u \in H_1$

.

De plus, il existe une application linéaire et continue $\overline{z} : H'_\Gamma \to \mathcal{H}_1$ telle que

(A.2.25) $\overline{\gamma}\left(\overline{z}(\Sigma)\right) = \Sigma \ \ \forall \Sigma \in H'_\Gamma.$

Compte tenu de ce résultat, on définit pour tout $\sigma \in \mathcal{H}_1$, les éléments $\overline{\gamma}_\nu \sigma \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $\overline{\gamma}_\tau \sigma \in H'_\tau$ par

$$\overline{\gamma}_\nu \sigma = (\overline{\gamma}\sigma)_\nu, \overline{\gamma}_\tau \sigma = (\overline{\gamma}\sigma)_\tau.$$

Rappelons que si $\sigma \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)_S^{d\times d}$ alors, à partir de $(A.2.24), (A.2.14)$ et $(A.2.15)$, il résulte

$$\overline{\gamma}\sigma = \sigma_{|\Gamma}\nu, \overline{\gamma}_\nu \sigma = (\sigma_{|\Gamma}\nu)_\nu, \overline{\gamma}_\tau \sigma = \sigma_{|\Gamma}\nu - (\sigma_{|\Gamma}\nu)\nu$$

Afin de simplifier les notations, on utilisera dans la suite la notation $\sigma\nu, \sigma_\nu \text{et} \sigma_\tau$ au lieu de$\overline{\gamma}\sigma$, $\overline{\gamma}_\nu \sigma$ et $\overline{\gamma}_\tau \sigma$ pour tout $\sigma \in \mathcal{H}_1$et, moyennant $(A.2.16)$ et $(A.2.24)$,on peut alors énoncer la double égalité suivante:

$$\textbf{(A.2.26)} \quad \begin{cases} \langle \sigma\nu, \gamma u\rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \langle \sigma_\nu, u_\nu\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \langle \sigma_\tau, u_\tau\rangle_{H'_\tau \times H_\tau} \\ \\ \qquad\qquad = \langle \sigma, \varepsilon(u)\rangle_{\mathcal{H}} + \langle Div\sigma, u\rangle_H \end{cases}$$

pour tout $u \in H_1$ et $\sigma \in \mathcal{H}_1$.

Supposons maintenant que $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ est une partition de Γ et soit $\sigma \in \mathcal{H}_1$. On introduit les définitions suivantes :

$$\textbf{(A.2.27)} \ \sigma\nu = 0 \ sur \ \Gamma_1 \Leftrightarrow \langle \sigma\nu, \gamma u\rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = 0 \quad \forall u \in H_1 \text{ tel que } u = 0 \text{ sur } \Gamma_2$$

$$\textbf{(A.2.28)} \ \sigma_\nu = 0 \ sur \ \Gamma_1 \Leftrightarrow \langle \sigma\nu, \gamma u\rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = 0 \ \ \forall u \in H_1 \text{ tel que} \begin{cases} u_\nu = 0 \ sur \ \Gamma_2 \\ u_\tau = 0 \ sur \ \Gamma \end{cases}$$

$$\textbf{(A.2.29)} \ \sigma_\nu \leq 0 \ sur \ \Gamma_1 \Leftrightarrow \langle \sigma\nu, \gamma u\rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} \geq 0 \ \ \forall u \in H_1 \text{ tel que} \begin{cases} u_\nu \leq 0 \ sur \ \Gamma_1 \\ u_\tau = 0 \ sur \ \Gamma \end{cases}$$

(A.2.30) $\sigma_\tau = 0 \; sur \; \Gamma_1 \Leftrightarrow \langle \sigma\nu, \gamma u \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = 0 \;\; \forall u \in H_1$ tel que $\begin{cases} u_\tau = 0 \; sur \; \Gamma_2 \\ u_\nu = 0 \; sur \; \Gamma \end{cases}$

Ces définitions sont motivées par le souci de prolonger les définitions de ces mêmes propriétés de $C^1\left(\overline{\Omega}\right)_S^{d\times d}$ vers $\mathcal{H}_1$. de plus , on dit que $\sigma\nu = h$ sur Γ_1 si $\sigma\nu - h = 0$ sur Γ_1 et les propriétés $\sigma_\nu = h$ sur Γ_1, $\sigma_\nu \leq h$sur Γ_1 et $\sigma_\tau = h$ sur Γ_1 sont définies de manières analogues .

On considère maintenant le sous-espace fermé $\mathcal{V}$ de $\mathcal{H}_1$ défini par

(A.2.31) $\mathcal{V} = \{\sigma \in \mathcal{H}_1 \mid Div\sigma = 0 \; dans \; \Omega, \sigma\nu = 0 \; sur \; \Gamma_2\}$.

Le lien entre l'espace V défini par (A.2.20) et l'espace $\mathcal{V}$ est donné par le résultat suivant:

Théorème A.2.8. *Si mes* $\Gamma_1 > 0$ *alors* $\varepsilon(V)$ *est un sous-espace fermé de* $\mathcal{H}$ *dont l'orthogonal est l'espace* $\mathcal{V}$.

A.2.3.Espace de fonction à valeurs vectorielles:

Soient k$\in N$, $1 \leq p \leq +\infty$ et $T > 0$. On rapelle que $W^{k,p}(0,T,H)$ est l'espace des distributions vectorielles $u \in D'(0,T,H)$ telles que $D_j u \in L_P(0,T,H)$ pour $j = \overline{0,k}$, D_j désignant la dérivée d'ordre j au sens des distributions . Si $1 \leq p < +\infty$, $W^{k,p}(0,T,H)$ est un espace de Banach réel pour la norme définie par :

(A.2.32) $|u|_{w^{k,p}(0,T,H)} = \left(\sum_{j=0}^{k} \int_o^T |D_j u\,(x)^p|\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall u \in W^{k,p}(0,T,H)$

En particulier, $W^{k,p}(0,T,H)$ est un espace de Hilbert réel pour le produit scalaire défini par :

(A.2.33) $\langle u,v\rangle_{W^{k,p}(0,T,H)}=\sum_{j=0}^{k}\int_o^T\langle D_Ju\left(t\right),D_Jv\left(t\right)\rangle_H dt\ \ \forall u,v\in W^{k,2}\left(0,T,H\right).$

D'autre part , $W^{k,\infty}\left(0,T,H\right)$ est un espace de Banach pour la somme définie par

(A.2.34) $|u|_{W^{k,\infty}(0,T,H)}=\sum_{j=0}^{k}\sup_{t\in[0,T]}|D_ju\left(t\right)|_H\ \ \forall u\in W^{k,\infty}\left(0,T,H\right).$

Dans le cas particulier k = 0 , on remarque que $W^{0,p}\left(0,T,H\right)=L^P\left(0,T,H\right)$ et on note alors la norme de $L^P\left(0,T,H\right)$ par $|.|_{L^P(0,p,H)}$ .pour tout $1\leq p\leq+\infty$.

On défini aussi , pour tout $k\in N$ l'espace $C^k\left(0,T,H\right)$ des fonctions $u:[0,T]\longrightarrow H$ telles que pour tout $j=\overline{0,k}$ les dérivées $\frac{d^ju}{dt^j}$ existent et son continues sur $[0,T]$ .On note, en particulier, $C^0\left(0,T,H\right)$ par $C\left(0,T,H\right)$. L'espace $C^k\left(0,T,H\right)$ est un espace de Banach pour la norme définie par :

(A.2.35) $|u|_{c^k(0,T,H)}=\sum_{j=0}^{k}\max_{t\in[0,T]}\left|\frac{d^ju}{dt^j}\left(t\right)\right|_H\ \ \forall u\in C^k\left(0,T,H\right).$

En particulier , les normes sur les espaces $C\left(0,T,H\right)$ et $C^1\left(0,T,H\right)$ .sont données par:

(A.2.36) $|u|_{c^1(0,T,H)}=\max_{t\in[0,T]}|\left(u\left(t\right)\right)|_H\ \ \forall u\in C\left(0,T,H\right).$

(A.2.37) $|u|_{c^1(0,T,H)}=|u|_{c(0,T,H)}+|.u|_{c(0,T,H)}+\ \ \forall u\in C^1\left(0,T,H\right).$

On précise que le point au dessus d'une expression désigne la dérivée de cette expression par rapport au temps , représenté par la variable $t\in[0,T]$.

.

Bibliographie

[**1**] A. Amassad, M Shillor and M. Sofonea,A quasistatic contact problem for an elastic perfectly plastic body with Tresca's friction, Nonlin. Anal, (35) (1999), 95-105.

[**2**] A. Amassad and M. Sofonea, Analysis of a quasistatic viscoplastic problem involving Tresca friction law, Discrete and Continuous Dynamical Systemes, 4(1) (1998), 55-72.

[**3**] A. Bassam, Analyse variationnelle de quelques problèmes viscoélastiques et viscoplastiques avec frottement.Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Perpignan (2001).

[**4**] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle, Théorie et applications, Masson, Paris, (1987).

[**5**] H. Brezis, Opérateurs maximaux monotone et semigroupes de Contractions dans les espaces de Hilbert, North Holland, Amsterdam (1973).

[**6**] H. Brezis, Equations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité, Ann Inst. Fourier 18 (1968), 115-175.

[**7**] O.Chau, D. matreaonu and M. Sofonea, Quasistatic frictional problems for elastic and viscoelastic materials, to appear in Applications of mathematics.

[**8**] M. Cocu, Existence of solutions of Signorini problems with friction, Int. J. Eng. Sci. **22**, 567-581, (1984).

[**9**] M. Cocu, Unilatéral contact problems with friction for an elastoviscoplastic material with internal state variable, Proc. Contact Mechanics Int. Symp. Edt. A. Curnier, PPUR (1992), 207-216.

[**10**] M. Cocu, E. Pratt and M. Raous, Formulation and approximations of quasistatic frictional contact, Int. J. Eng. Sci. vol 34, 783-798, (1996).

[**11**] S. Djabi et M. Sofonea, A fixed method in quasistatic rate-type viscoplasticity, Appl. Math. and Comp. Sci., **3**, 2 (1993), 269-279.

[**12**] S. Drabla, Analyse variationnelle de quelques problèmes aux limites en élasticité et en viscoplasticité, Thèse de Doctorat d'Etat en Mathématiques Appliquées, Setif, Algerie, (1999).

[**13**] G. Duvaut, J.L. Lions , Les inéquations en mécanique et en physique, Dunod, Paris, (1972).

[**14**] G. Duvaut and J.L. Lions, Inequalities in Mechanics and physics, Springer-Verlag, Berlin, (1976).

[**15**] S. Drabla, M. Shillor, M. Sofonea, Africtionless contact problem for elastic-viscoplastic materials with internal state variables, Mathl. Modelling Vol. 26, No. 12, 31- 47, (1997).

[**16**] G. Duvaut, Loi de frottement non locale, J. Méc. Thé . Appl, Special issue (1982), 73-78.

[**17**] W. Han, M. Sofonea and J. M.Viaño,.Variational and numerical analysis of a frictionless contact problem for elastic-viscoplastic materials with internal state variables, Quarterly journal of Mathematics and Applied mathematics 54, 501-522, (2001).

[**18**] W. Han and M. SOFONEA, Quasistatic Contact Problem in Viscoelasticity and viscoplasticity, December 14, (2001).

[**19**] W. Han, M. Sofonea, Time-Dependent variational inequalities for viscoelastic problems, Journal of Computanal and Applied mathematics 136 (2001), 369-387.

[**20**] I. R. Ionescu, et M. Sofonea, Quasistatic processes for elastic-viscoplastic materials, quart. Appl. Math. 2 (1988), 229- 243.

[**21**] I. R. Ionescu, et M. Sofonea, Functionnal and numerical methods in viscoplasticity, Oxford University Press, Oxford (1993).

[**22**] N. Lebri, S. Djabi and S. Boutechebak, Bilaleral contact with Tresca's Friction law and with internal state variables. Appied mathematical sciences, Vol. 2, 2008, No.10, 479-488.

[**23**] N.Lebri and S.Boutechebak, Frictionless contact problem on nonlinear elasticity, Anal Univ Oradea, fasc, Math. Tom XV (2008), 129-140.

[**24**] N.Lebri and S.Djabi, Frictional bilateral contactin viscoplasticity. FJMS.

[**25**] M. Rochdi and M. Sofonea, On frictionless contact between two elastic-viscoplastic bodies, Quart. J. Mech. Appl. Math., 30,3,481-496, 1997.

[**26**] M. Sofonea, Problèmes non-linéaires dans la théorie de l'élasticioté, Cours de Magister en mathématiques appliquées", Université F. Abbes, Sétif, Algérie (1993).

[**27**] M. Sofonea and Shillor, Variational analysis of quasistatic viscoplastic contact problems with friction, Commun. Appl. Anal.**5**, 135-151, (2001).

[**28**] B. Teniou, Etude fonctionnelle des problèmes élasto-visco-plastiques, thèse de Doctorat d'Etat en Mathématiques Appliquées, Constantine, Algerie (2000).