الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Setif 1 University Ferhat Abbas
Faculty of Sciences
Department of Mathematics

جامعة سطيف 1 فرحات عباس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

Master's Thesis

in Mathematics

Option : Applied Mathematics

Theme :

ENERGY CONSERVATION FOR A HYPERELASTIC CONTACT PROBLEM

Presented by

Miss. Hanadi Amina GHODBANE

Supervisor: **Pr. AISSA BENSEGHIR**

Thesis defended on June 20, 2026, in front of the jury composed of:

Mr.	Mohamed DILMI	MCA.	Blida1 Saad Dahlab	President
Mr.	Aissa BENSEGHIR	Prof.	Setif 1University Ferhat Abbas	Supervisor
Mr.	Ali KHALOTA	MCA.	Setif 1 University Ferhat Abbas	Examiner

2025/2026

Contents

Notations **iii**

1 Preliminary **5**

1.1 Introduction 5

1.2 Definitions and basic properties 5

1.2.1 Definition 5

1.2.2 Useful Results 6

1.3 Elements of Nonlinear Analysis 8

1.3.1 Monotone Operators 8

1.3.2 Subdifferential 10

1.4 Elliptic Variational Inequalities 13

1.5 Variational Inequalities With Memory Term 13

1.5.1 Spaces of Vector-Valued Functions 13

1.5.2 Quasi-Variational Inequalities with Memory Term 15

1.5.3 Corollary 19

1.6 An Optimization Problem 20

2 Energy conservation for a hyperelastic contact problem **23**

2.1 A Specific Contact Model with Normal Compliance, Unilateral Constraint, and Friction 24

2.2 Mechanical Problem and Variational Formulation 25

2.3 Discretization and Variational Approximation 28

2.4 An Energy-Conserving Method 31

2.5 Numerical Simulations 33

Bibliographie **42**

Résumé

L'objectif de ce mémoire est d'étudier un modèle de contact pour les matériaux hyperélastiques visant à préserver l'énergie lors des simulations dynamiques d'impact. Elle présente les fondements mathématiques nécessaires, notamment les espaces de Hilbert, les opérateurs monotones et les inégalités variationnelles avec effets de mémoire. Un modèle de contact combinant la compliance normale, des contraintes unilatérales et une loi de frottement de Coulomb modifiée est développé. La Méthode de Pénalisation Améliorée (Improved Penalized Method, IPM) est proposée afin de contrôler simultanément la conservation de l'énergie et la pénétration.

Mots -Clés : Hyperélasticité — Contact dynamique — Conservation de l'énergie — Compliance normale — Frottement de Coulomb —Méthode IPM.

Abstract

The purpose of this thesis is the study a contact model for hyperelastic materials aimed at preserving energy during dynamic impact simulations. It introduces the mathematical foundations, including Hilbert spaces, monotone operators, and variational inequalities with memory effects. A contact model combining normal compliance, unilateral constraints, and a modified Coulomb friction law is developed. The Improved Penalized Method (IPM) is proposed to simultaneously control energy conservation and penetration.

Keywords: Hyperelasticity — Dynamic contact — Energy conservation — Normal compliance — Coulomb friction — IPM method.

الملخص

تتناول هذه المذكرة دراسة نموذج تماس للمواد فائقة المرونة بهدف الحفاظ على الطاقة أثناء محاكاة الصدمات الديناميكية. وتعرض الأسس الرياضية اللازمة، بما في ذلك فضاءات هيلبرت، والمؤثرات الرتيبة، والمتباينات التغايرية ذات تأثيرات الذاكرة. كما تطوّر نموذج تماس يجمع بين المطاوعة العمودية، والقيود الأحادية الجانب، وقانون احتكاك كولوم المعدّل. وتُقترح الطريقة المحسّنة للعقوبة للتحكم في الوقت نفسه في حفظ الطاقة وتقليل الاختراق أثناء التماس.

الكلمات المفتاحية: المرونة الفائقة ـ التلامس الديناميكي ـ حفظ الطاقة ـ المطاوعية العمودية ـ احتكاك كولوم ـ طريقة النقطة الداخلية .