

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي



Setif 1 University Ferhat Abbas
Faculty of Sciences
Department of Mathematics



جامعة سطيف 1 فرحات عباس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

Master's Thesis in Mathematics

Option : Applied Mathematics

Theme :

Existence, uniqueness and asymptotic analysis for a boundary value problem with Riemann–Liouville fractional derivative

Presented by

Miss. Ilham BOUKERROUCHA

Supervisor: **Pr. Mohamed DILMI**

Thesis defended on June 20, 2026, in front of the jury composed of:

Mr. Abdelbaki MEROUANI	Prof. Setif 1 University Ferhat Abbas	President
Mr. Mohamed DILMI	MCA. Blida 1 University Saad Dahlab	Supervisor
Mr. Aissa BENSEGHIR	Prof. Setif 1 University Ferhat Abbas	Examiner

2025/2026

Contents

Résumé	iv
Abstract	v
Notations	1
Introduction	3
1 Preliminary Notions	6
1.1 Notions of Fractional Calculus	7
1.1.1 Gamma Function	7
1.1.2 Riemann–Liouville Fractional Integral	7
1.1.3 Riemann–Liouville Fractional Derivative	8
1.1.4 Caputo Fractional Derivative	9
1.1.5 Some Properties of Fractional Derivatives	9
1.2 Functional analysis tools	10
1.2.1 Weak Topology	11
1.2.2 Space of Distributions	13
1.2.3 L^p Spaces	14
1.2.4 Sobolev Spaces	17
1.2.5 Fundamental Theorems	20
1.2.6 Some Inequalities and Green’s Formula	22
1.2.7 Gronwall Lemmas	23
1.2.8 Faedo-Galerkin Method	24
2 Existence and Uniqueness for a Boundary Value Problem with Riemann-Liouville	26
2.1 Problem Statement and Weak Formulation	27
2.2 Existence and Uniqueness of the Weak Solution	29
2.2.1 Existence of the Weak Solution	29

2.2.2	The Uniqueness of the Solution	34
3	Asymptotic Analysis of the Problem (2.1) – (2.4) in a Thin Domain	36
3.1	The Problem in a Thin Domain and the Rescaling Procedure	37
3.2	Limit Passage as $\varepsilon \rightarrow 0$ and the Resulting Limit Problem	41
	Conclusion	44
	Bibliography	44

الملخص

تتناول هذه المذكرة دراسة مسألة قيم حدية تتضمن مشتقة كسرية من نوع ريمان - ليوفيل بالنسبة للزمن من الرتبة $(\alpha \in (1, 3/2))$. بالاعتماد على أدوات التحليل الدالي وكذلك طريقة فايدو-غالركين، نثبت وجود ووحدانية الحل الضعيف. كما نقوم بتحليل السلوك المقارب لهذا الحل عندما تُصاغ المسألة في مجال رقيق ثنائي الأبعاد، حيث تميل نسبة السمك (ε) إلى الصفر. بعد إجراء تغيير مناسب في المقياس نحصل على تقديرات منتظمة مستقلة عن (ε) نستنتج بشكل صارم مسألة حدية مبسطة.

الكلمات المفتاحية: التحليل المقارب; مسألة قيم حدية; الوجود والوحدانية; المشتقة الكسرية من نوع ريمان.

Résumé

Cette mémoire étudie un problème de valeurs aux limites impliquant la dérivée fractionnaire de Riemann–Liouville en temps d'ordre $\alpha \in (1, 3/2)$. En utilisant des outils d'analyse fonctionnelle ainsi que la méthode de Faedo–Galerkin, nous établissons l'existence et l'unicité d'une solution faible.

Nous analysons ensuite le comportement asymptotique de cette solution lorsque le problème est formulé dans un domaine bidimensionnel mince. Lorsque le paramètre d'épaisseur (ε) tend vers zéro. Après un changement d'échelle approprié, nous obtenons des estimations a priori uniformes indépendantes de (ε) et dérivons rigoureusement un problème limite réduit.

Mots clés: Analyse asymptotique ; problème de valeurs aux limites ; existence et unicité ; dérivée fractionnaire de Riemann–Liouville.

Abstract

This thesis investigates a boundary value problem involving the Riemann–Liouville fractional derivative in time of order $\alpha \in (1, 3/2)$. By employing tools from functional analysis together with the Faedo–Galerkin method, we establish the existence and uniqueness of a weak solution.

We then analyze the asymptotic behavior of this solution when the problem is formulated in a thin two-dimensional domain, as the thickness parameter (ε) tends to zero. Following an appropriate rescaling, we derive uniform a priori estimates independent of (ε) and rigorously obtain a reduced limit problem.

Keywords: Asymptotic analyze; Boundary value problem; Existence and uniqueness; Riemann–Liouville fractional derivative.