الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة فرحــات عبــاس
(سطيــف 1)
كلية العلوم الاقتصادية، التجارية وعلوم التسيير

Université Ferhat ABBAS (Sétif 1)

FACULTE DES SCIENCES ECONOMIQUES, COMMERCIALES ET DES SCIENCES DE GESTION

مطبوعة بيداغوجية بعنوان:

دروس وتمارين في الاقتصاد القياسي1

موجهة لطلبة السنة الثالثة ليسانس علوم الاقتصادية

من اعداد الدكتور: عليوان عبد الغني

أستاذ محاضر قسم ب

السنة الجامعة: 2025-2026.

المحتويات

مقدمة:

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على أشرف المرسلين سيدنا ونبينا محمد بن عبد الله صلى الله عليه وسلم وعلى آله وصحبه والتابعين الى يوم الدين أجمعين.

يعد الاقتصاد القياسي أحد فروع العلوم الاقتصادية المستخدمة للأساليب الكمية يهتم بتحليل الظواهر الاقتصادية تحليلاً كمياً وذلك باستخدام الأساليب الإحصائية، وقد استخدم لفظ اقتصاد قياسي لأول مرة عام 1926 .

ان أصل هذا المصطلح Econometrics يوناني ويتكون من مقطعين هما Economic أي علم الاقتصاد وMetrics أي القياس ويعرفه البعض بأنه القياس في الاقتصاد، أي هو العلم الذي يهتم بقياس العلاقات الاقتصادية من خلال بيانات واقعية بغرض اختبار مدى صحة هذه العلاقات كما تقدمها النظرية، أو تفسير بعض الظواهر، أو رسم السياسات ، أو التنبؤ بسلوك بعض المتغيرات الاقتصادية.

منذ ذلك الحين بدأ الاقتصاد القياسي يحظى باهتمام الدارسين للعلاقات الاقتصادية، وصار استخدامه أداة مهمة في تحليل تلك العلاقات والوصول الى نتائج وقياسات دقيقة. ومع تزايد استخدام الحاسوب والبرامج الإحصائية التي وفرت الكثير من الوقت والجهد، نجد أن معظم الباحثين من أساتذة وطلبة أصبحوا يسعون في طلب المعرفة العلمية في مجال استخدام الاقتصاد القياسي.

ومن هذا المنطلق نسعى الى اعداد وتقديم محاضرات وتطبيقات في هذا المجال بكلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير بجامعة سطيف لطلبة شعبة العلوم الاقتصادية بكل تخصصاتها وبالأخص للسنة الثالثة تخصص اقتصاد كمي، ليتم جمعها في هذه المطبوعة الموجهة لهذه الفئة من الطلبة، نراعي فيها البرنامج المقرر من طرف وزارة التعليم العالي وطبيعة

تخصص هؤلاء الطلبة، كما تتمير بسهولة معالجة الموضوعات واستخدام الأساليب الرياضية بعيد عن التعقيد والتعمق الذي لا يحتاجه الطالب غير المتخصص في الطرق الكمية.

لقد حاولت تقسيم هذا العمل (المطبوعة) الى سبعة فصول:

يتطرق في الفصل الأول إلى ماهية وطبيعة الاقتصاد القياسي والثاني الى تحليل نموذج الانحدار الخطي البسيط، والفصل الثالث يتناول نموذج الانحدار المتعدد. في حين تحتوي الفصول الرابع والخامس والسادس المشاكل القياسية الناتجة عن عدم تحقق الفرضيات الأساسية. أما الفصل السابع فيتطرق لمختلف نماذج الانحدار غير الخطية.

الفصل الأول: ماهية وطبيعة الاقتصاد القياسي

1-1 مفهوم الاقتصاد القياسي

2-1 أهداف الاقتصاد القياسي

3-1 علاقة الاقتصاد القياسي بالعلوم الأخرى

4-1 مراحل البحث في الاقتصاد القياسي

يُعنى الاقتصاد القياسي (Econometrics) بتوصيف وقياس العلاقات بين المتغيرات الاقتصادية، ويتكون مصطلح (Econometrics) من المفردتين (Economic) وتعنى اقتصاد، و(Metrics) التي تعني قياس. وقد اختلف في ترجمتها، فقد ترجمها بعض الاقتصاديين بـ " الاقتصاد القياسي" على أساس أنه العلم الذي يدمج بين النظرية الاقتصادية وطرق القياس الإحصائية والرياضية. وعبّر بعض آخرون عنه بـ "القياس الاقتصادي" باعتباره فرعاً من فروع علم الاقتصاد الذي يستخدم التحليل الكمي للظواهر الاقتصادية.

1- مفهوم الاقتصاد القياسي

جاء في مجلة (Econometrica Journal) في افتتاحية عددها الأول عن تعريف الاقتصاد القياسي بأن: إن الاقتصاد القياسي ليس اطلاقا نفس الشيء مثل الإحصاء الاقتصادي، كم يجب ألا يعتبر متطابقا مع ما يسمى النظرية الاقتصادية العامة، رغم أن جزء كبيراً من تلك النظرية ذو طابع كمي صريح. كما يجب ألا يعتبر أيضا الاقتصاد القياسي مرادفا لتطبيق الرياضيات على الاقتصاد. وقد أثبتت التجربة إن كلا من وجهات النظر الثلاث، الإحصاء والنظرية الاقتصادية والرياضيات لإطار صحيح ولكن غير كاف في حد ذاته، لفهم حقيقة العلاقات الكمية في الحياة الاقتصادية. فالقوة تكمن في توحيد الثلاثة معا. وهذا التوحيد يشكل الاقتصاد القياسي.[1]

يمكن تعريف الاقتصاد القياسي بأنه ذلك الفرع من علم الاقتصاد الذي يستخدم التحليل الكمي للظواهر الاقتصادية الحقيقية، عبر استخدام أدوات علوم الاقتصاد والرياضيات والاحصاء، بهدف اختبار النظريات الاقتصادية المختلفة من ناحية ومساعدة رجال الاعمال والحكومات في اتخاذ القرارات السليمة ووضع السياسات من ناحية أخرى.

2- أهداف الاقتصاد القياسي

يهدف الاقتصاد القياسي إلى تحقيق الأهداف الرئيسية التالية:

- **اختبار النظرية الاقتصادية:**

عادة ما يبنى الباحثون الاقتصاديون نظرياتهم على مجموعة من الفرضيات، بين متغيرات عدة بقصد فهم الظواهر الاقتصادية. هنا يهتم الباحث في الاقتصاد القياسي بمدى صحة

[1] كامل علاوي، حسين لطيف، **القياس الاقتصادي، النظرية والتحليل**، دار صفاء للنشر والتوزيع، عمان، ط1، 2011، ص11.

تلك الفرضيات بتحليل العلاقات بين المتغيرات الاقتصادية، وبالتالي التحقق من تطابق تلك النظريات الاقتصادية مع الواقع.

- **اتخاذ القرار الاقتصادي:**

تساعد نتائج الدراسات الاقتصادية القياسية في اتخاذ القرار من خلال توفير تقديرات كمية للعلاقات الاقتصادية بين المتغيرات، فدراسة مرونة الطلب أو العرض لسلعة ما – على سبيل المثال – تساعد رجل الاعمال في اتخاذ قراره بزيادة سعر السلعة وهذا بعد معرفة مدى مرونة الطلب السعرية لهذه السلعة.

- **التنبؤ باتجاه المتغيرات الاقتصادية عبر الزمن:**

يعتبر التنبؤ بسلوك المتغيرات الاقتصادية من أهم أهداف الاقتصاد القياسي؛ إذ للتنبؤ دورا مهما في اتخاذ القرار، كما يساعد في وضع السياسات الاقتصادية من خلال توفيره التنبؤات عن السلوك المستقبلي للمتغيرات الاقتصادية.

3- علاقة الاقتصاد القياسي بالعلوم الأخرى

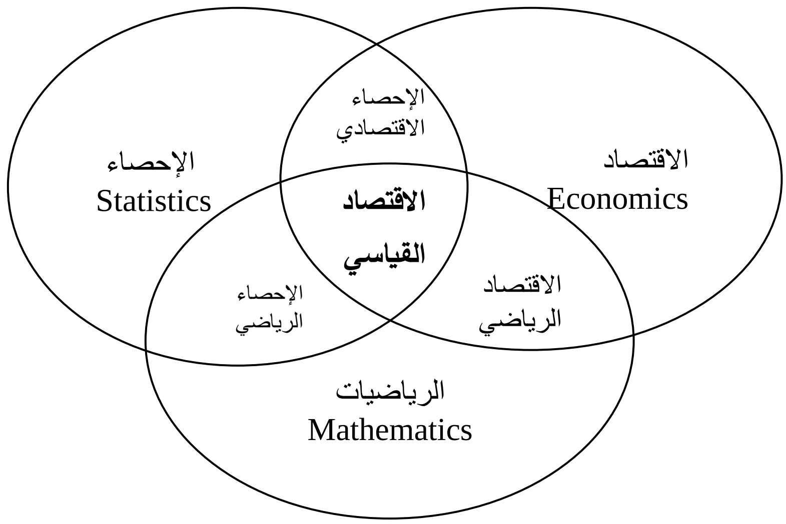
يرتبط الاقتصاد القياسي بعلمي الرياضيات والاحصاء بعلاقة وثيقة، كونه يستخدم تلك الأساليب في تحليل الظواهر الاقتصادية، ولعل دراسة قياس وتحليل المشكلات الاقتصادية يتطلب تعاون تلك العلوم بفروعها التالية[2]:

- **الاقتصاد الرياضي:** لتحديد العلاقات وصياغتها في شكل دوال رياضية، أي تحديد العلاقة الدالية المحددة للمتغير التابع والمتغيرات المفسرة له.
- **الإحصاء الاقتصادي:** للحصول على البيانات الخاصة بالمتغيرات الاقتصادية وتحليلها وصولاً إلى استنتاجات منطقية وقرارات مناسبة بشأنها.
- **الإحصاء الرياضي:** للوصول الى الدقة المطلوبة في التقدير.

يستمد الاقتصاد القياسي أصوله من العلوم: الاقتصاد، الرياضيات والاحصاء ليجمع بين النظرية الاقتصادية والعلاقات الرياضية والأساليب الإحصائية بغرض القياس الدقيق للظواهر الاقتصادية، ويمكن توضيح علاقة الترابط بين العلوم الثلاثة في الشكل التالي:

[2] إبراهيم سليمان وآخرون، **مقدمة في الاقتصاد القياسي**، المكتبة الاكاديمية، القاهرة، مصر، ط1، 2016، ص28.

الشكل رقم (1-1): علاقة الاقتصاد القياسي بالعلوم الاخرى



4- مراحل البحث في الاقتصاد القياسي

يمكن تحديد أربع مراحل في عملية البحث وهي:

المرحلة الأولى: توصيف النموذج: يعني توصيف النموذج تحديد المستقلة والتابعة، والتوقعات النظرية لإشارات وقيم المعالم. وكذا تحديد الشكل الرياضي للنموذج وتحويله إلى نموذج قياسي بإدخال عنصر الخطأ error أو حد التشويش distrubance وهو الجزء غير المنتظم في السلوك الاقتصادي.

المرحلة الثانية: تقدير معالم النموذج: وهي مرحلة الحصول على تقديرات عددية لمعالم النموذج الذي تم توصيفه، وتتم هذه المرحلة على الخطوات التالية:

- جمع البيانات أو المشاهدات الإحصائية عن المتغيرات الداخلة في النموذج.
- اختبار أو بحث مشاكل التجميع للمتغيرات المدروسة.
- اختيار الطريقة القياسية المناسبة لتقدير معالم النموذج.

المرحلة الثالثة: تقييم تقديرات المعلمات: بعد تقدير قيم المعلمات لابد من تقييمها، والتأكد مما إذا كانت تتفق مع النظرية. لهذا الغرض نستخدم عدة معايير، وهي:

- **معايير اقتصادية:** تستند هذه المعايير على النظرية الاقتصادية، والمنطق الاقتصادي للباحث، التي قد تحدد إشارة وحجم معالم النموذج مثل: المرونات Elasticties، القيم

الحدية Marginal values، المضاعفات Multiipliers، الميول الحدية Propensities. فإذا كانت المعلمات المقدرة لا تتفق مع ما تحدده النظرية الاقتصادية، فإن النموذج يجب أن يعدل أو يرفض.

- **معايير إحصائية:** تهدف الى اختبار مدى الثقة الإحصائية في التقديرات، واهمها:
  - اختبار معنوية النموذج المقدر.
  - اختبار معنوية معلمات النموذج المقدر.
- **معايير قياسية:** يتعلق الأمر بمدى تحقق الفرضيات الأساسية للنموذج المقدر وخاصة فيما تعلق بالخطأ العشوائي، وتوفر الخصائص المرغوبة في النموذج المقدر مثل: عدم التحيز، كفاءة التقدير والاتساق.

المرحلة الرابعة: تقييم القدرة التنبؤية للنموذج المقدر: من أهداف تقدير النموذج هو التنبؤ بالقيم المستقبلية للمتغير التابع على أساس القيم المستقبلية المعروفة أو المتوقعة للمتغير المستقل، فيجب التأكد من جودة الأداء العام للنموذج المقدر قبل استخدامه في عملية التنبؤ.

أسئلة الفصل الأول:

- ما مفهوم القياس الاقتصادي؟
- ما هي أهداف القياس الاقتصادي وما علاقته بالعلوم الأخرى؟
- ما هي منهجية البحث في القياس الاقتصادي؟
- ناقش أهداف ومكونات الاقتصاد القياسي.
- ناقش العبارة التالية: " يعد الاقتصاد القياسي هو المقيم للنظرية الاقتصادية".

الفصل الثاني: تحليل نموذج الانحدار الخطي البسيط

2–1 تقديم نموذج الانحدار الخطي البسيط (متغيرين)

2–2 الفرضيات الخاصة بالمتغير العشوائي

2–3 تقدير معلمات نموذج الانحدار الخطي البسيط

2–4 الخواص الأساسية لمقدرات نموذج الانحدار.

2–5 الاستدلال الاحصائي لنموذج الانحدار البسيط.

نحاول في هذا الفصل تحليل الانحدار الخطي البسيط أو ما يسمى بالنموذج الخطي لمتغيرين، والذي يعتبر هو الأبسط بين نماذج الانحدار المختلفة، ويعتمد على العلاقة السببية بين متغير تابع (Yi) ومتغير مستقل (Xi). تشكل دراسة هذا النموذج القاعدة الأساسية ونقطة الانطلاق نحو دراسة نماذج أكثر عمومية وواقعية.

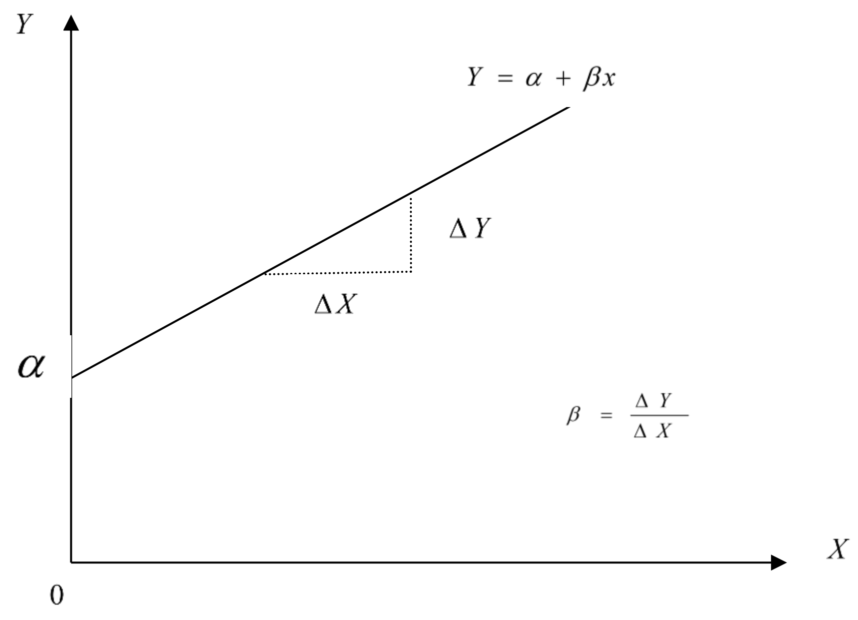
1- تقديم نموذج الانحدار الخطي البسيط (متغيرين)

إن نقطة البدء في البحث القياسي الاقتصادي هم نموذج الانحدار الذي يعتمد على العلاقة بين متغير تابع (Dependent Variable) ومتغير مستقل (Independent Variable) والتي تأخذ الشكل الرياضي الآتي:

$$Y = f(x)$$

تقرأ Y دالة لـ X، حيث يجرى تفسير تباين المتغير Y بواسطة تباين X. وبافتراض أن العلاقة السابقة خطية يمكن تمثيلها بمعادلة خط مستقيم. $Y = f(x) = \alpha + \beta x$ حيث α و β معالم مجهولة القيم وثوابت تختص بالمجتمع، ترمز α الى قاطع الدالة على محور التراتيب (Y) و β الى ميل الدالة الخطية كما هو موضح في الشكل التالي:

الشكل رقم (2-1): الدالة الخطية لمتغيرين



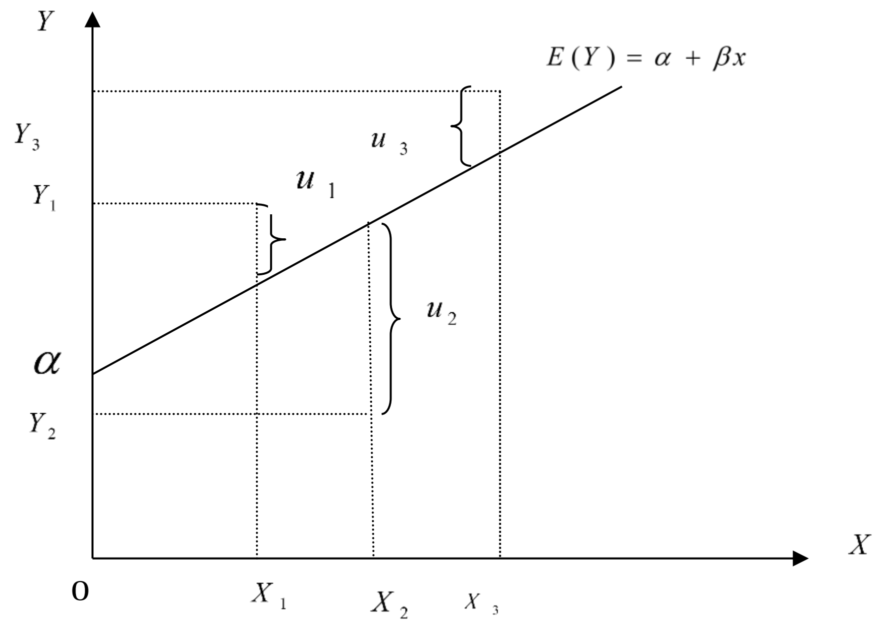
في غالب الأحيان تعطى النظرية الاقتصادية في صيغة محددة بينما تخضع العلاقة المضمنة في النظرية لمكون عشوائي، وبالتالي فإنه لغرض القياس الاحصائي والاختبار والتنبؤ فان النموذج الرياضي السابق لا يفي بالغرض نظرا لأنه نموذج محدد ولا بد من إضافة متغير عشوائي حتى يصبح قابلا للقياس.

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$$

حيث β تمثل ميل الدالة وهو يساوي المشتقة الأولى للمتغير التابع Y بالنسبة للمتغير المستقل X؛ وهو يوضح مقدار التباين في Y استجابة للتغير في X بوحدة واحدة. أما α تمثل الحد الثابت، و u الخطأ العشوائي.

بعد احتواء النموذج على عنصر الخطأ العشوائي u_i فإن قيم X_i المحددة لا تقابل بقيم محددة للمتغير Y_i ولكن بتوزيع احتمالي. أي أن قيم Y_i تتحدد على أساس كل من قيمة X_i وتوزيع الخطأ العشوائي u_i، وعليه فإن التباين في Y_i يرجع إلى جزئين: الأول يمثل بالخط المستقيم ($\alpha + \beta x$) والتي يعرف بالتباين الموضح أو المفسر (ناتج عن التغير في X)، كما هو موضح في الشكل الآتي:

الشكل رقم (2-2): شكل الانتشار الحقيقي



والثاني يعرف التباين غير الموضح ناتج عن تأثير المتغيرات غير المتضمنة في النموذج ويمثلها الخطأ العشوائي.

ويعلل ادخال عنصر الخطأ العشوائي في النموذج بالأسباب التالية:

- وجود عدة متغيرات تفسيرية ذات تأثير ضعيف أو غير منتظم على المتغير التابع Y_i لا تدخل في الاعتبار، وبالتالي فإن حد الخطأ يمثل التأثير الصافي لعدد كبير من المتغيرات ذات التأثير غير المنتظم.
- وجود أخطاء ممكنة في قياس المتغير التابع Y_i تم تضمين تأثيرها في المتغير العشوائي u_i.
- وجود مكون عشوائي في السلوك الإنساني تم تضمين مفعوله في المتغير العشوائي u_i.

2- الفرضيات الخاصة بالمتغير العشوائي

1- القيمة المتوقعة لحد الخطأ العشوائي تساوي الصفر $E(u_i) = 0$

2- تباين قيم الخطأ العشوائي ثابت لجميع المشاهدات (في كل فترة ولكل قيم x) لا يختلف من مشاهدة الى أخرى، بمعنى أن قيم u_i لا تزداد تباعدا او تقارباً من بعضها البعض مع كل زيادة في قيم المتغير المستقل x_i، أي أن:

$$\operatorname{var}(U_i) = E(u_i - E(u_i))^2 = \sigma_u^2$$

3- إن (U_i) يتبع توزيعا طبيعياً: $U_i \rightarrow N(0, \sigma_u^2)$

وعليه فإن توزيع المعاينة لمعالم الانحدار المقدرة تتبع أيضا التوزيع الطبيعي (كما سنرى لاحقاً).

4- قيم المتغير العشوائي (U_i) تكون مستقلة عن بعضها البعض، أي أن التباين المشترك لأي (U_i) يكون مساوياً للصفر، القيمة التي يأخذها في مشادة ما أو فترة ما مثلاً تكون غير مقترنة بقيمته في مشاهدة أو فترة أخرى:

$$\operatorname{cov}(u_i, u_j) = E(u_i, u_j) = 0; i \neq j$$

5- قيم المتغير العشوائي (U_i) تكون مستقلة عن قيم المتغيرات المستقلة، أي عدم وجود ترابط بين المتغير العشوائي (U_i) والمتغير المستقل (X_i):

$$cov(X_i, U_i) = E[(X_i - E(X_i))(U_i - E(U_i))]$$
$$cov(X_i, U_i) = E[(X_i - E(X_i))U_i]$$
$$cov(X_i, U_i) = E(X_i U_i) - E(X_i)E(U_i)$$

لأن: $E(u_i) = 0$

$$cov(X_i, U_i) = E(X_i U_i)$$
$$cov(X_i, U_i) = X_i E(U_i) = 0$$

لأن قيم المتغير المستقل (X_i) ثابتة*.

6- انعدام العلاقة بين المتغيرات المستقلة، وفي الواقع يواجه الباحث هذا الفرض عندما يكون النموذج المدروس متضمنا أكثر من متغير مستقل واحد؛ حيث يجب ألا يكون بينهما أي تعدد خطي وبالتالي يمكن التعرف على أثر كل منها على المتغير التابع.

3- تقدير معاملات نموذج الانحدار الخطي البسيط

تعتبر مرحلة تقدير معلمات النموذج المرحلة الثانية من مراحل بناء النموذج، حيث يتم فيها الحصول على تقديرات عددية لمعلمات نموذج الانحدار، وإحدى أبسط الطرق وأسعها انتشارا في التقدير هي طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية (Ordinary Least Square method) التي تقوم على مبدأ أن يكون مجموع مربعات الخطأ أصغر ما يمكن. وتتميز هذه الطريقة بسهولتها النسبية كما أنها تنتج تقديرات ذات خصائص إحصائية مرغوبة.

- **طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية:**

هي أسلوب لتوفيق أفضل خط مستقيم لعينة مشاهدات (X,Y) تهدف إلى تدنية مجموع مربعات الخطأ (انحرافات القيم الفعلية Y_i عن المقدرة $\hat{Y}_i$) إلى أدنى حد ممكن.

$$Min \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

تستخدم هذه الطريقة في التقدير سواء كانت البيانات أصلية، وتسمى بالتقدير حول نقطة الأصل، أو بيانات بانحرافات القيم الأصلية عن وسطها الحسابي، وتدعى بالتقدير حول نقطة المتوسط.

---

* يقصد بثبات قيم المتغير (X_i) هو أنه في حالة سحب عينات عشوائية عن المتغير (X_i) عدة مرات؛ فإن قيم (X_i) لا تتغير لكن قيم (Y_i) تتغير مقابل كل قيمة مثبة لـ (X_i).

أولاً: التقدير حول نقطة الأصل:

إذا كانت لدينا معادلة الانحدار التالية:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i \dots\dots (2-1)$$

حيث أن:

α : الحد الثابت للنموذج.

β : يمثل الميل الحدي للنموذج.

U_i : يمثل الخطأ العشوائي

وتكون الصيغة التقديرية للنموذج على الشكل التالي:

$$\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i \dots\dots (2-2)$$

e_i : البواقي ($\text{Residual}=\hat{U}_i$) وهو عبارة عن الفرق بين القيم الفعلية Y_i والقيم المقدرة $\hat{Y}_i$:

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i$$

يمكن الحصول على مقدرات معالم النموذج $\hat{\alpha}$ ، $\hat{\beta}$ والتي تجعل مجموع مربعات الخطأ أقل ما يمكن.

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

وبالتعويض عن قيمة $\hat{Y}_i$ نجد: $\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i)^2$

لتقدير قيمة $\hat{\alpha}$ نجري التفاضل الجزئي الأول (Partial derivative) ونساويه بالصفر

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n} e_i^2}{\partial \alpha} = 2 \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i)(-1) = 0$$

وبالقسمة على (2−) وإدخال علامة الجمع نجد: $\sum_{i=1}^{n} Y_i - n\hat{\alpha} - \hat{\beta} \sum_{i=1}^{n} X_i = 0$

وبإعادة ترتيب هذه المعادلة نحصل على: $\sum_{i=1}^{n} Y_i = n\hat{\alpha} + \hat{\beta} \sum_{i=1}^{n} X_i \dots\dots (2-3)$

لتقدير قيمة $\hat{\beta}$ نجري التفاضل الجزئي بالنسبة لـ β:

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n} e_i^2}{\partial \beta} = 2 \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i)(-X) = 0$$

وبالقسمة على (2−) وتوزيع $\sum X_i$ نجد: $\sum_{i=1}^{n} Y_i X_i = \hat{\alpha} \sum_{i}^{n} X_i + \hat{\beta} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \dots\dots (2-4)$

وتسمى المعادلتان السابقتان (3−1) و (4−1) بالمعادلات الطبيعية Normal Equations،

وبحلهما معاً نحصل على القيم المقدرة للحد الثابت $\hat{\alpha}$ والميل الحدي $\hat{\beta}$:

$$\hat{\beta} = \frac{n \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - (\sum_{i=1}^{n} X_i)(\sum_{i}^{n} Y_i)}{n \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} X_i)^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - n\bar{Y}\bar{X}}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n(\bar{X})^2} \dots\dots (2-5)$$

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta} \bar{X} \dots\dots (2-6)$$

مثال (1): الجدول التالي يبين قيمة واردات الجزائر (M) والناتج المحلي الإجمالي (Y)

السنة	M	Y	MY	Y^2
2000	855	4124	3526519	731404
2001	931	4227	3934079	866161
2002	1159	4522	5241505	1343676
2003	1254	5247	6580560	1572619
2004	1577	6136	9677186	2487363
2005	1820	7544	13733239	3313955
2006	1832	8460	15495446	3354410
2007	1917	9408	18034103	3674234
2008	2572	11043	28402450	6615356
2009	2855	10034	28645973	8149913
2010	3012	12050	36290776	9070985
2011	3443	14385	49519697	11850817
المجموع	23226	97180	219081533	53030893

المطلوب: تقدير دالة الطلب على الواردات $M_i = \alpha + \beta Y_i + U_i$.

باستخدام المعادلة رقم (1−5) نحصل على قيمة $\hat{\beta}$:

$$\hat{\beta} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} Y_i M_i - (\sum_{i=1}^{n} Y_i)(\sum_{i}^{n} M_i)}{n\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} Y_i)^2} = \frac{12(219081533) - (97180)(23226)}{12(53030893) - (97180)^2}$$
$$= 0.247$$

أما قيمة الثابت:

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X} = \left(\frac{23226}{12}\right) - 0.247\left(\frac{97180}{12}\right) = -68$$

ثانياً: التقدير حول نقطة المتوسط:

نعتمد في هذه الطريقة على انحرافات القيم للمتغيرين عن وسطهما الحسابي

$$x_i = X_i - \bar{X}$$
$$y_i = Y_i - \bar{Y}$$

لدينا:

$$\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i$$

وبطرح المتوسط الحسابي $\bar{Y}$ من طرفي المعادلة

$$\hat{Y}_i - \bar{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_i - \bar{Y}$$

وبما أن: $\bar{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\bar{X}$

وبتعويضها في المعادلة السابقة نجد:

$$\hat{Y}_i - \bar{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}\bar{X}$$

$$\hat{y}_i = \hat{Y}_i - \bar{Y} = \hat{\beta}X_i - \hat{\beta}\bar{X} = \hat{\beta}x_i$$

لدينا:

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i$$

$$e_i = y_i + \bar{Y} - \hat{y}_i - \bar{Y} = y_i - \hat{y}_i$$

وبالتالي: $\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2$

وبالتعويض عن قيمة: $\hat{y}_i = \hat{\beta}x_i$

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{\beta}x_i)^2$$

ولتقدير قيمة $\hat{\beta}$ نجري التفاضل الجزئي بالنسبة لـ β :

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n} e_i^2}{\partial \beta} = 2\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{\beta}x_i)(-x_i) = 0$$

وبقسمة طرفي المعادلة على (-2) وإعادة الترتيب نجد أن:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i - \hat{\beta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \ldots\ldots (2-7)$$

اما بالنسبة للحد الثابت:

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X} \ldots\ldots (2-8)$$

مثال (02): باستخدام بيانات المثال السابق يطلب تقدير دالة الطلب على الواردات $M_i = \alpha + \beta Y_i + U_i$ بطريقة التقدير حول المتوسط.

m²	m^	M^	my	y²	m²	y	m	Y	M	السنة
966968.43	-983.35	952.17	4293959.4	15799166.54	1167029	-3975	-1080	4124	855	2000
917219.39	-957.72	977.80	3889937.06	14986323.71	1009695	-3871	-1005	4227	931	2001
782903.89	-884.82	1050.69	2776634.8	12791760.99	602708.3	-3577	-776	4522	1159	2002
497423.31	-705.28	1230.23	1942772.61	8127332.276	464404	-2851	-681	5247	1254	2003
235699.76	-485.49	1450.02	703280.735	3851066.516	128432.9	-1962	-358	6136	1577	2004
18809.18	-137.15	1798.37	63799.6759	307320.7103	13244.79	-554	-115	7544	1820	2005
8027.90	89.60	2025.11	-37668.636	131166.7165	10817.73	362	-104	8460	1832	2006
105026.89	324.08	2259.59	-24475.493	1716020.244	349.0925	1310	-19	9408	1917	2007
530630.55	728.44	2663.96	1874214.6	8669900.98	405158.1	2944	637	11043	2572	2008
229390.36	478.95	2414.46	1779721.68	3747978.131	845098.1	1936	919	10034	2855	2009
955497.27	977.50	2913.01	4252622	15611740.88	1158410	3951	1076	12050	3012	2010
2418754.28	1555.23	3490.75	9473637.23	39519699.51	2271014	6286	1507	14385	3443	2011
7666351	0	23226	30988436	125259477	8076361	0	0	97180	23226	المجموع

باستخدام المعادلة رقم (1−7) نحصل على قيمة $\hat{\beta}$:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} y^2} = \frac{30988436}{125259477} = 0.247$$

أما قيمة الثابت: $\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X} = \left(\frac{23226}{12}\right) - 0.247\left(\frac{97180}{12}\right) = -68$

4− الخصائص الأساسية لمقدرات نموذج الانحدار (مقدرات طريقة المربعات الصغرى)

إذا توفرت الفروض السابقة للنموذج العشوائي فان مقدارات المربعات الصغرى $\hat{\alpha}$ $\hat{\beta}$ المتحصل عليها تتميز بأنها خطية Linearty لبيانات العينة وغير متحيزة Unbiased ولها أقل تباين Min Variance ويعبر عن تلك الخاصية التي تصف الصفات المرغوبة في المقدر بأنها BLUE أفضل مقدر خطي غير متحيز Best Linear Unbaised Estimator، وفيما يلي نذكر هذه الخصائص.

4−1− خاصية الخطية Linearity:

تتميز مقدارات المربعات الصغرى $\hat{\alpha}$ $\hat{\beta}$ بأنها خطية Linearty لبيانات العينة في المتغير التابع Y؛ حيث يمكن وضعها في صورة دالة أو تركيبة خطية Linear combination من قيم المتغير التابع Y.

بالنسبة لـ $\hat{\beta}$:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i (Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i Y_i - \bar{Y} \sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i Y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

حيث أن: $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$

ويمكن كتابتها: $\hat{\beta} = \sum_{i=1}^{n} K_i Y_i \quad \dots.(2-9)$

أي أن $\hat{\beta}$ دالة خطية في Y بالترجيح $K_i = \frac{x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

وبما أن الأوزان تعتمد على انحرافات القيم X_i الثابتة في المعاينات المتكررة فقط، فإنها تعتبر ثابتة في المعاينات المتكررة أيضا، وعليه نجد أن:

- مجموع الأوزان يساوي الصفر $\sum_{i=1}^{n} K_i = 0$
- مجموع مربعات الأوزان يساوي معكوس مجموع مربعات انحرافات X_i: $\sum_{i=1}^{n} K_i^2 = {1}/{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$
- مجموع مضروب الأوزان في قيم المتغير المستقل (أو انحرافاته) يساوي الواحد $\sum_{i=1}^{n} K_i x_i = 1$

بالنسبة لـ$\hat{\alpha}$: $\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n} - K_i \bar{X}\right) Y_i = \sum_{i=1}^{n} w_i Y_i \dots\dots.(2-10)$

وبالتالي مقدارات المربعات الصغرى $\hat{\alpha}$ $\hat{\beta}$ خطية Linearty لبيانات العينة في المتغير التابع Y.

2-4- خاصية عدم التحيز Unbiased:

تعتبر المقدرات $\hat{\beta}$ ، $\hat{\alpha}$ غير متحيزة إذا كانت القيمة المتوقعة لكل منهما تساوي القيمة المناظرة لمعلمة المجتمع β، α.

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum (X_i - \bar{X})^2}$$

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$$

$$\hat{\beta} = \sum_{i=1}^{n} K_i Y_i = \sum K_i(\ \alpha + \beta X_i + u_i)$$

$$\hat{\beta} = \alpha \sum K_i + \beta \sum K_i X_i + \sum K_i u_i$$

$$\hat{\beta} = \beta + \sum K_i\, u_i$$

وبإدخال التوقع لطرفي المعادلة نحصل على: $E(\hat{\beta}) = E(\beta) + \sum K_i E(\,u_i)$

وبملاحظة $E(u_i) = 0$ نتحصل على: $E(\hat{\beta}) = \beta \quad ...(2-11)$ وبالتالي فإن المقدرة $\hat{\beta}$ غير متحيزة للمعلمة الحقيقية β.

وبنفس الطريقة نجد أن المقدرة $\hat{\alpha}$ غير متحيزة للمعلمة الحقيقية α حيث أن:

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n} - K_i\bar{X}\right)Y_i = \sum_{i=1}^{n} w_i Y_i$$

$$\hat{\alpha} = \alpha + \sum_{i=1}^{n} w_i u_i$$

وبالتالي فإن:

$$E(\hat{\alpha}) = \alpha + \sum_{i=1}^{n} w_i E(u_i)$$

أي أن:

$$E(\hat{\alpha}) = \alpha \quad .....(2-12)$$

4-3- خاصية أفضل المقدرات (أقل تباين): مقدر كفؤ Efficient estimator

تمتلك المقدرات $\hat{\alpha}$ ، $\hat{\beta}$ أدنى تباين بين المقدرات غير المتحيزة؛ هذه الخاصية مهمة لأن الباحث القياسي يكون أكثر تأكداً بأن هذه المقدرات أقرب إلى المعلمة الحقيقية للمجتمع أو بمعنى آخر فإن المقدر الكفؤ يكون له أصغر فترة ثقة ومن المرجح أن يكون معنوياً احصائيا من غيره. وتنص نظرية جاوس – مركوف أن: مقدرات المربعات الصغرى هي أفضل مقدرات خطية غير متحيزة، أي أنها تتسم بالكفاية.

قبل أن نثبت خاصية أقل تباين يجب أن نقدر أولا تباين $\hat{\alpha}$وتباين $\hat{\beta}$

$$V(\hat{\alpha}) = \sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum(X_i - \bar{X})^2}\right)$$

$$V(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{\sum(X_i - \bar{X})^2}$$

نحاول اثبات أن $\hat{\beta}$ مقدر ذو أصغر تباين ممكن مقارنة مع بقية المقدرات الخطية الغير متحيزة الأخرى ولإثبات ذلك نفرض أن هناك مقدر أخر لβ خطي وغير متحيز ونرمز لهγ وعليه يمكن أن نكتب:

$\gamma = \sum c_i y_i \quad c_i = w_i + d_i$

$\gamma = \sum(w_i + d_i)y_i$

لكي يكون b غير متحيز يجب أن تتوفر الشروط التالية:

$E(\gamma)=\beta$

$E(\sum c_i y_i)= \beta$

$E(\gamma)= E(\sum c_i y_i) = E(\sum c_i (\alpha + Bx+u_i)) = E(\alpha\sum c_i + \beta\sum c_i x_i +\sum c_i u_i)$

$= \alpha\sum c_i + \beta\sum c_i x_i +\sum c_i E(u_i)$

$E(\gamma) = \alpha\sum c_i + \beta\sum c_i x_i \Rightarrow \sum c_i = 0 \quad \sum c_i x_i =1$

نبحث الان عن تباين γ

$$\gamma = \beta + \sum c_i u_i \Rightarrow E(\gamma - \beta)^2 = (\sum c_i u_i)^2 = \delta^2\sum c_i^2 + 2\sum\sum c_i c_j E(u_i u_j)$$

$$\Rightarrow v(\gamma) = \delta^2\sum c_i^2 = \delta^2(\sum(w_i+d_i)^2) = \delta^2 (\sum w_i^2 + \sum d_i^2 +2 \sum w_i d_i)$$

$$= \delta^2\sum w_i^2 + \delta^2 (\sum d_i^2) \ (\sum w_i d_i = 0)$$

$$\Rightarrow v(\gamma) = v(\hat{\beta}) + \delta^2 (\sum d_i^2)$$

$$\Rightarrow v(\gamma) - v(\hat{\beta}) = \delta^2 (\sum d_i^2)\geq 0$$

اذن $\sum d_i^2$ لا يساوي أبدا الصفر الا اذا كانت كل قيم d_i معدومة ومنه نستنتج أن:

$v(\gamma) \geq v(\hat{\beta})$ وبالتالي يكون المقدر $\hat{\beta}$ المتحصل عليه بطريقة المربعات الصغرى أصغر تباين بالمقارنة مع تباينات المقدرات الخطية الغير متحيزة الأخرى(بالنسبة للمقدر $\hat{\alpha}$ يكون الاثبات بنفس الطريقة)

Tapez une équation ici.

5-الاستدلال الاحصائي لنموذج الانحدار الخطي البسيط

بعد تقدير معلمات نموذج الانحدار باستخدام طريقة المربعات الصغرى (OLS) يجب وضع معايير للحكم على جودة التقديرات، أي بعد الحصول على المقدرات $\hat{\beta}$ ، $\hat{\alpha}$ من بيانات العينة نختبر مدى الاعتماد عليها كأساس جيد للوصول إلى معلمة المجتمع. من أهم المعايير الإحصائية المستخدمة هي:

5-1-اختبارات المعنوية للمعاملات المقدرة.

لموضوع اختبار الفرضيات حول معنوية معالم النموذج أهمية بالغة ومهمة في اتخاذ القرار، فالفرض الاحصائي هو ادعاء قد يكون صائباً أو خاطئاً حول معلمة أو أكثر لمجتمع ما، كما أن القبول أو الرفض يستند على المعلومات المتوفرة. فيضع الباحث فرضية إحصائية على أمل رفضها نسميها بفرضية العدم Null Hypothesis ونرمز لها بالرمز H_0 مما يعني قبول الفرضية البديلة Alternative Hypothesis ونرمز لها بالرمز H_1.

يستعمل تباين المقدرات $\hat{\alpha}$ ، $\hat{\beta}$ في اجراء اختبار المعنوية الخاصة بتلك المقدرات، حيث أن تباين حد الخطأ العشوائي σ^2 غير معلوم وبالتالي يتم تقدير تباين البواقي كمقدرة غير متحيزة لتباين حد الخطأ العشوائي $\hat{\sigma}_\mu^2$ ويعبر عنه بالصيغة التالية:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-2} \ldots\ldots (2-13)$$
$$E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$$

لإجراء اختبارات المعنوية والفروض فإنه لابد من الفرض الخاص بتوزيع حد الخطأ العشوائي u على أنه التوزيع الطبيعي؛ وإذا كان u_i يتبع توزيعا طبيعياً فإن Y_i أيضا كذلك، وبالتالي المقدرات $\hat{\beta}$ ، $\hat{\alpha}$ تكون هي الأخرى تتبع توزيعاً طبيعياً، أي أن:

$$\hat{\beta} \sim N\left(\beta . \frac{\sigma^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2}\right) \ldots . (2-14)$$
$$\hat{\alpha} \sim N\left(\alpha . \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2}\right)\right) \ldots . (2-15)$$

وبالتالي حسب نظرية النهاية المركزية نجد أن:

$$z = \frac{\hat{\beta} - \beta}{\sigma / \sqrt{\sum (X_i - \bar{X})^2}} \sim N(0.1)$$
$$z = \frac{\hat{\alpha} - \alpha}{\sigma / \sqrt{\sum \frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2}}} \sim N(0.1)$$

حيث يتم تعريف المتغير z على أنه متغير موزع توزيعا طبيعياً معيارياً.

كما أن المتغير v^2 يتبع توزيع كاي – تربيع x^2 بـ n−2 درجات حرية وبصورة مستقلة عن توزيع z؛ حيث:

$$v^2 = \frac{\sum e_i^2}{\sigma^2} = \frac{(n-2)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim x_{(n-2)}^2$$

وبالتالي فإن الإحصائية:

$$t = \frac{Z}{\sqrt{v^2 / (n-2)}} \sim t_{(n-2)}$$

تتوزع حسب توزيع t بـ n−2 درجات حرية أي أن:

$$t = \frac{\hat{\beta} - \beta}{se_{\hat{\beta}}} \sim t_{(n-2)} \quad .... (2-16)$$

$$t = \frac{\hat{\alpha} - \alpha}{se_{\hat{\alpha}}} \sim t_{n-2} \dots\dots (2-17)$$

$$V(\hat{\beta}) = \frac{\frac{\sum e_i^2}{n-2}}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \quad \rightarrow \quad se_{\hat{\beta}} = \sqrt{\frac{\frac{\sum e_i^2}{n-2}}{\sum (X_i - \bar{X})^2}}$$

$$V(\hat{\alpha}) = \frac{\sum e_i^2}{n-2}\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2}\right) \quad \rightarrow \quad se_{\hat{\alpha}} = \sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n-2}\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2}\right)}$$

$$cov(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \left(\frac{-\bar{X}}{\sum (X_i - \hat{X})^2}\right) . \frac{\sum e_i^2}{n-2}$$

نلاحظ أنه تم التخلص من القيمة الحقيقية المجهولة لـ σ باستعمال إحصائية t وبالتالي تمكنا من الحصول على دالة اختبار تعتمد على العينة وقيمة α أو β الافتراضية.

بالنسبة لـβ:

نضع الفرضية التالية:

$$H_0 : \beta = \beta_0$$

$$H_1 : \beta \neq \beta_0$$

نعوض القيمة الافتراضية β_0 بدلاً عن β في (16−2) ونتخذ القرار برفض H_0 إذا وقعت القيمة المحسوبة لـ t في المنطقة المحددة من توزيع t بـ n−2.

في حالة البحث عن العلاقة بين Y و X نضع الفرضية $H_0 : \beta = 0$ التي تسمي الفرضية الصفرية او فرضية العدم والتي تنص على انعدام العلاقة بين Y و X كما نضع فرضية بديلة $H_1 : \beta \neq 0$ وبالتالي لاختبار فرضية العدم نكتب:

$t_c = \frac{\hat{\beta}}{se_{\hat{\beta}}} \sim t_{(n-2)}$ حيث نرفض H_0 بمستوى معنوية (λ%) إذا كانت القيمة المحسوبة أكبر من القيمة المجدولة:

$$t_c = \left|\frac{\hat{\beta}}{se_{\hat{\beta}}}\right| \geq t_{\left(n-2,\frac{\lambda}{2}\right)} \quad \dots.(2-18)$$

أي أن β له معنوية إحصائية هو يختلف عن الصفر ؛ وبالتالي وجود تأثير لـ X على Y.

وبالنسبة لـ α:

لاختبار معنوية الثابت في النموذج (1−2) نضع الفرضية التالية: $H_0: \alpha = 0 \quad , H_1: \alpha \neq 0$

وبنفس الطريقة نجد القيمة المحسوبة التالية: $t_c = \left|\frac{\hat{\alpha}}{se_{\hat{\alpha}}}\right|$ واذا كانت:

$$t_c = \left|\frac{\hat{\alpha}}{se_{\hat{\alpha}}}\right| \geq t_{\left(n-2,\frac{\lambda}{2}\right)} \quad \dots.(2-19)$$

نرفض فرضية العدم التي تنص على عدم معنوية α.

5−2−بناء مجال الثقة للمعالم.

يمكن الحصول على مجال (فترة) الثقة لكل من المعلمتين α، β باستعمال توزيع t عوضاً عن التوزيع الطبيعي في حالة ($n \leq 30$ و σ^2 مجهولة) حيث نتحصل على

$$Pr\left[-t_{n-2,\frac{\lambda}{2}} \leq \frac{\hat{\beta}-\beta}{se_{\hat{\beta}}} \leq t_{n-2,\frac{\lambda}{2}}\right] = 1-\lambda$$

$$Pr\left[-t_{n-2,\frac{\lambda}{2}} \leq \frac{\hat{\alpha}-\alpha}{se_{\hat{\alpha}}} \leq t_{n-2,\frac{\lambda}{2}}\right] = 1-\lambda$$

$(1-\lambda)$ مستوى الثقة للاختبار، $t_{n-2,\frac{\lambda}{2}}$ القيمة الجدولية (القيمة الحرجة لتوزيع Student بدرجة حرية n−2 ومستوى معنوية (λ%).

وبعد التحويل للعبارتين نتحصل على فترات الثقة التالية:

$$\beta \in \left[\hat{\beta} - t_{n-2,\frac{\lambda}{2}}.se_{\hat{\beta}}, \hat{\beta} + t_{n-2,\frac{\lambda}{2}}.se_{\hat{\beta}}\right] \dots (2-20)$$

$$\alpha \in \left[\hat{\alpha} - t_{n-2,\frac{\lambda}{2}}.se_{\hat{\alpha}}, \hat{\alpha} + t_{n-2,\frac{\lambda}{2}}.se_{\hat{\alpha}}\right] \dots (2-21)$$

5−3− اختبار جودة التوفيق والارتباط

يعتبر معامل التحديد مقياس مدى كفاءة النموذج المقدر في تمثيل البيانات؛ أي بمعنى آخر يدل على جودة التوفيق، والذي يمثل النسبة بين التباين الموضح Explained Variation إلى التباين الكلي.

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - \bar{Y} - \left(\hat{Y}_i - \bar{Y}\right) = y_i - \hat{y}_i$$

وبالتالي: $\sum y_i^2 = \sum(e_i + \hat{y}_i)^2 = \sum \hat{y}_i^2 + \sum e_i^2 + 2\sum \hat{y}_i e_i$

لكن $\sum \hat{y}_i e_i = 0 \;\rightarrow\; \sum e_i x_i = 0$ وعليه $\sum y_i^2 = \sum \hat{y}_i^2 + \sum e_i^2 \quad \dots.(2-22)$

أي $SST = RSS + SSE$

SST: التباين الكلي وهو عبارة عن مجموع مربعات انحرافات قيم Y الفعلية عن وسطها الحسابي $\sum(Y_i - \bar{Y})^2$

RSS: التباين الموضح أو المفسر أو المسبب أو المشروح وهو عبارة عن مجموع مربعات انحرافات القيم المقدرة $\hat{Y}$ من معادلة الانحدار عن الوسط الحسابي $\sum\left(\hat{Y}_i - \bar{Y}\right)^2$

ESS: التباين غير الموضح والذي يرجع للعوامل الأخرى، وهو مجموع مربع انحرافات القيم الفعلية عن القيم المقدرة.

النسبة ما بين التباين الموضح والتباين الكلي تسمى بمعامل التحديد R^2.

$$R^2 = \frac{RSS}{SST} = \frac{\sum\left(\hat{Y}_i - \bar{Y}\right)^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2} = \frac{\sum \hat{y}_i^2}{\sum y_i^2} = \frac{\hat{\beta}^2 \sum x_i^2}{\sum y_i^2} = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2}$$

وهذا يدل على أن قيمة معامل التحديد محصورة بين الصفر والواحد.

5-4-اختبار المعنوية الكلية للنموذج

لاختبار المعنوية الكلية للنموذج المقدر نستخدم اختبار فيشر (Fisher)، ونعتمد الفرضيات التالية:

فرضية العدم: $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \cdots = \beta_n = 0$ والتي تنص على عدم وجود علاقة بين المتغيرات.

الفرضية البديلة: $H_1: \beta_1 \neq \beta_2 \neq \beta_3 \neq \cdots \neq \beta_n \neq 0$ والتي تنص على وجود علاقة بين المتغير المستقل (المتغيرات المستقلة) والمتغير التابع.

وتحسب إحصاءة (F) من الصيغة الرياضية التالية:

$$F_c = \frac{\sum \hat{y}_i^2 / K-1}{\sum e_i^2 / N-K}$$

ويمكن كتابة (F) بدلالة R^2 بالشكل التالي: $F_c = \frac{R^2/_{K-1}}{(1-R^2)/_{N-K}}$

حيث: N: عدد المشاهدات، K: عدد المعلمات.

نقارن قيمة F_c المحسوبة بالقيمة الجدولية F_t عند مستوى المعنوية المطلوب (λ%) ودرجتي حرية (K−1,N−K)؛ فإذا كانت أكبر منها فإننا نرفض فرضية العدم مما يدل على معنوية النموذج المقدر وعلى معنوية معامل التحديد R^2. والعكس يدل على عدم معنوية R^2 والنموذج المقدر غير كفؤ البيانات.

ملاحظة: في نموذج الانحدار الخطي البسيط يكون: $F_c = t_\beta^2$

5-5- تحليل التباين:

يلخص جدول تحليل التباين مصدر التغير الحاصل في Y، أي يبين تحليل مجموع المربعات الصغرى إلى مجموع مربعات الانحدار ومجموع مربعات البواقي، والغرض من هذا التحليل هو اختبار معنوية مجموع مربعات الانحدار وكذا اختبار معنوية المعامل β. كما هو مبين في المعادلة التالية:

$$\sum y_i^2 = \sum \hat{y}_i^2 + \sum e_i^2$$

جدول تحليل التباين (ANOVA)

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط مجموع المربعات	احصاءة F
المتغير المستقل	$RSS = \sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$	K-1	$RSS/_{K-1}$	$F_c = \dfrac{\sum \hat{y}_i^2/_{K-1}}{\sum e_i^2/_{N-K}}$
البواقي	$ESS = \sum e_i^2$	N-K	$ESS/_{N-K}$	
المجموع	$\sum(Y_i - \bar{Y})^2$	N-1		

يعطي جدول تحليل التباين احصاءة F التي يمكن استخدامها لاختبار فرضية العدم $H_0: \beta = 0$.

مثال تطبيقي1: النموذج الخطي: $C_i = \alpha + \beta R_i + U_i$ يمثل العلاقة بين الاستهلاك (C) ; والدخل .(R).

$\sum R_i = 455$ ، $\sum (R_i - \bar{R}_i)^2 = 3872.917$ ،

$\sum (C_i - \bar{C}_i)(R_i - \bar{R}_i) = 2663.750$

$\sum C_i = 345$ ، $\sum (C_i - \bar{C}_i)_i^2 = 1948.250$, $n = 12$

<u>المطلوب:</u>

1- قدر معالم نموذج الانحدار، وهل هي موافقة للنظرية الاقتصادية؟

2- اختبر معنوية المعالم مع تكوين مجال الثقة عند مستوى معنوية 5%.(القيمة النظرية الجدولية بدرجات حرية 10 هي(t=2.228) $\sum e_i^2 = 116.152$

3- أوجد معامل التحديد وفسره.

4- اختبر معنوية النموذج عند مستوى معنوية 5% (القيمة النظرية الجدولية بدرجات حرية 1 و 10 هي 4.96).

5- أوجد جدول تحليل التباين لهذا النموذج.

الحل:

1- تقدير معالم نموذج الانحدار، وهل هي موافقة للنظرية الاقتصادية؟

$$\hat{\beta}=\frac{\sum(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})}{\sum(X_i-\bar{X})^2}=\frac{\sum_{i=1}^{12}(R_i-\bar{R})(C_i-\bar{C})}{\sum_{i=1}^{12}(R_i-\bar{R})^2}=\frac{2663.750}{3872.917}=0.687$$

$$\hat{\alpha}=\bar{Y}-\hat{\beta}\bar{X}=\bar{C}-\hat{\beta}\bar{R}=28.750-(0.687*28.750)=2.671$$

$\hat{\beta}$: يمثل الميل الحدي للاستهلاك $0\le\hat{\beta}=0.687\le 1$ فهو موافق للنظرية الاقتصادية؛ حيث زيادة الدخل بوحدة واحدة تؤدي الى زيادة الاستهلاك بمقدار 0.687 وحدة.

$\hat{\alpha}$: يمثل الاستهلاك التلقائي؛ أي قيمة الاستهلاك عند انعدام الدخل.

2- اختبار معنوية معالم النموذج مع تكوين مجال الثقة عند مستوى معنوية 5%.(القيمة النظرية الجدولية بدرجات حرية 10 هي(t=2.228) $\sum e_i^{\ 2}=116.152$

يعطى مجال الثقة بالنسبة للمعالم α و β حسب المعادلتين (2-20) و (2-21) كما يلي:

$$\beta\in\left[\hat{\beta}-t_{n-2,\frac{\lambda}{2}}.se_{\hat{\beta}},\hat{\beta}+t_{n-2,\frac{\lambda}{2}}.se_{\hat{\beta}}\right]$$

$$\alpha\in\left[\hat{\alpha}-t_{n-2,\frac{\lambda}{2}}.se_{\hat{\alpha}},\hat{\alpha}+t_{n-2,\frac{\lambda}{2}}.se_{\hat{\alpha}}\right]$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{\sum e_i^2}{n-2}=\frac{116.152}{10}=11.615\ \rightarrow\ \hat{\sigma}_u=\sqrt{11.615}=3.408$$

حساب تباينات المقدرات $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ وانحرافاتها المعيارية:

$$V(\hat{\beta})=\frac{\frac{\sum e_i^2}{n-2}}{\sum(X_i-\bar{X})^2}=\frac{\hat{\sigma}_u^2}{\sum_{i=1}^{12}(R_i-\bar{R})^2}=\frac{11.615}{3872.917}=0.00299$$

$$\rightarrow\qquad se_{\hat{\beta}}=\sqrt{\frac{\frac{\sum e_i^2}{n-2}}{\sum(X_i-\bar{X})^2}}=\sqrt{0.00299}=0.0546$$

$$V(\hat{\alpha})=\frac{\sum e_i^2}{n-2}\left(\frac{1}{n}+\frac{\bar{X}^2}{\sum(X_i-\bar{X})^2}\right)=\hat{\sigma}_u^2\left(\frac{1}{n}+\frac{\bar{R}^2}{\sum_{i=1}^{12}(R_i-\bar{R})^2}\right)$$

$$=\ 11.615\left(\frac{1}{12}+\frac{(37.917)^2}{3872.917}\right)=5.279$$

$$\rightarrow \quad se_{\hat{\alpha}} = \sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n-2}\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{R}^2}{\sum_{i=1}^{12}(R_i - \bar{R})^2}\right)} = \sqrt{5.279} = 2.297$$

إيجاد مجال الثقة لـ α:

$$\alpha \in \left[\hat{\alpha} - t_{n-2,\frac{\lambda}{2}} . se_{\hat{\alpha}}, \hat{\alpha} + t_{n-2,\frac{\lambda}{2}} . se_{\hat{\alpha}}\right]$$

$$\alpha \in [2.671 - 2.228 * 2.297 \quad , \quad 2.671 + 2.228 * 2.297]$$

$$\alpha \in [2.406 \quad , \quad 7.768]$$

إيجاد مجال الثقة لـ β:

$$\beta \in \left[\hat{\beta} - t_{n-2,\frac{\lambda}{2}} . se_{\hat{\beta}}, \hat{\beta} + t_{n-2,\frac{\lambda}{2}} . se_{\hat{\beta}}\right]$$

$$\beta \in [0.687 - 2.228 * 0.0546 \quad , \quad 0.687 + 2.228 * 0.0546]$$

$$\beta \in [0.565 \quad , \quad 0.808]$$

اختبار معنوية المعلمة α:

$$\begin{cases} H_0: \alpha = 0 \\ H_1: \alpha \neq 0 \end{cases}$$

$$t_c = \frac{\hat{\alpha} - \alpha}{se_{\hat{\alpha}}} = \frac{2.671 - 0}{2.297} = 1.17 \leq t_{\left(n-2,\frac{\lambda}{2}\right)} = 2.228$$

وعليه نقبل فرضية العدم H_0؛ أي عدم معنوية α احصائياً في النموذج.

اختبار معنوية β:

$$\begin{cases} H_0: \beta = 0 \\ H_1: \beta \neq 0 \end{cases}$$

$$t_c = \frac{\hat{\beta} - \beta}{se_{\hat{\beta}}} = \frac{0.687 - 0}{0.0546} = 12.58 \geq t_{(10;0.025)} = 2.228$$

عند مستوى معنوية 5% ودرجة حرية 10 نلاحظ أن القيمة t المحسوبة أكبر من القيمة الجدولية وبالتالي نرفض الفرضية H_0 مما يدل على معنوية β.

3- حساب معامل التحديد وتفسيره.

$$R^2 = \frac{RSS}{SST} = \frac{\sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2} = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2} = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum(C_i - \bar{C})^2}$$

$$= 1 - \frac{116.152}{1948.250} = 0.94$$

الدخل يفسر الاستهلاك بنسبة 94% وهو يدل على جودة التوفيق للنموذج.

4- اختبار معنوية النموذج عند مستوى معنوية 5% (القيمة النظرية الجدولية بدرجات حرية 1 و10 هي 4.96)

$$\begin{cases} H_0 : \beta = 0 \\ H_1 : \beta \neq 0 \end{cases}$$

$$F_c = \frac{\sum \hat{y}_i^2 / K-1}{\sum e_i^2 / N-K} = \frac{ESS/1}{RSS/n-2} = \frac{1832.098}{11.61} = 157.8$$

نلاحظ أن قيمة F المحسوبة أكبر من القيمة الجدولية عند مستوى معنوية 5% وبدرجات حرية (1،10) وبالتالي نرفض فرضية العدم التي تنص على عدم معنوية النموذج؛ أي هناك علاقة بين الدخل والاستهلاك.

5- أيجاد جدول تحليل التباين لهذا النموذج.

جدول تحليل التباين (ANOVA)

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط مجموع المربعات	احصاءة F
المتغير المستقل	$RSS = \sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 = 1832.098$	1	$RSS/K-1 = 1832.098$	$F_c = \frac{\sum \hat{y}_i^2 / K-1}{\sum e_i^2 / N-K} = \frac{1832.098}{116.152} = 157.8$
البواقي	$ESS = \sum e_i^2 = 116.152$	10	$ESS/N-K = 11.61$	
المجموع	$\sum(Y_i - \bar{Y})^2 = 1948.250$	11		

مثال تطبيقي2: لو توفرت البيانات التالية عن النموذج $Y_i = \alpha + \beta X_i + U_i$ الذي يمثل العلاقة بين الإنفاق الاستهلاكي Y وإجمالي الدخل المتاح X :

$$\bar{X} = 224{,}77 \ ; \ \bar{Y} = 200{,}85 \ ; \ \sum x_i^2 = 47674{,}414 \ ; \ \sum x_i y_i = 38167{,}015 \ ; \ \sum y_i^2 = 31442{,}800 \ ; \ n = 16$$

المطلوب:

1. أوجد معادلة انحدار الإنفاق الاستهلاكي على الدخل، وأحسب المرونة الدخلية للاستهلاك.
2. اختبر معنوية معالم نموذج الانحدار وذلك عند مستوى معنوية 5%.

3. أوجد معامل التحديد، وفسره.
4. أوجد جدول تحليل التباين لهذا النموذج.

الحل:

1. تقدير معادلة الانحدار

$$\hat{\beta}=\frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}=\frac{38167,015}{47674,414}=0,801$$
$$\hat{\alpha}=\bar{Y}-\hat{\beta}\bar{X}=200,85\ -0,801(224,77)=20,905$$
$$Y_i=20,905+0,801X_i+\widehat{U_\imath}$$

2. اختبار معنوية α:

$$t=\frac{\hat{\alpha}-\alpha}{Se(\hat{\alpha})}=\frac{20,905-0}{8,433}=2,479$$

وحيث أن t المحسوبة أكبر من القيمة الجدولية عند مستوى معنوية 5% فإن α معنوية إحصائيا.

اختبار معنوية β:

$$t=\frac{\hat{\beta}-\beta}{Se(\hat{\beta})}=\frac{0,801-0}{0,036}=22,25$$

وبالتالي فإن β معنوية إحصائيا

3. حساب معامل الارتباط

$$r^2=\frac{\sum y_i^2-\sum e_i^2}{\sum y_i^2}=\frac{31442,800-887,187}{31442,800}=0,972$$

أي أن 97,2% من التباين مفسر من طرف الانحدار

4. جدول تحليل التباين

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجات الحرية	متوسط المربعات	إحصائية F
متغير الدخل	$SSR = 30555{,}615$	1	30555,615	482,178
البواقي	$SSE = 887{,}185$	14	63,370	
المجموع	$SST = 31442{,}800$	15		

تمارين مقترحة للفصل الثاني:

1- ناقش بتركيز المغزى من وجود فرضيات طريقة المربعات الصغرى. ماذا يحدث في حالة عدم تحقق إحدى هذه الفرضيات؟

2- ما الفرق فيما إذا كان تقدير معلمة معينة معنوي احصائيا وبين أن يكون التقدير غير متحيز؟

3- افترض أنه لدينا النموذج البسيط التالي: $Y_t = \alpha + \beta_1 X_t + U_t$

- اذكر الفرضيات الأساسية للنموذج.
- لماذا تكون طريقة المربعات الصغرى العادية (OLS) مفضلة بالنسبة للطرق الأخرى؟
- تعتمد طريقة (OLS) في تقدير المعلمات على المقدار $\sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2$ وليس على $\sum (Y_i - \hat{Y}_i)$، لماذا؟.

التمرين الأول:

لو توفرت لك البيانات التالية عن النموذج: $Y_i = \alpha + \beta_1 X_i + U_i$ الذي يمثل العلاقة بين الدخل (X) والاستهلاك (Y).

السنة i	Y_i	X_i	$Y_i - \bar{Y}$	$X_i - \bar{X}$	$(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$	$(X_i - \bar{X})^2$	$(Y_i - \bar{Y})^2$
2001	18.47	39.25	-5.14	-21.32	109.58	454.54	26.41
2002	19.89	41.84	-3.72	-18.73	69.67	350.81	13.83
2003	21.26	49.06	-2.35	-11.51	27.04	132.48	5.52
2004	23.71	57.31	0.10	-3.26	-0.32	10.62	0.01
2005	25.53	69.89	1.92	9.32	17.89	86.86	3.68
2006	26.95	78.64	3.34	18.07	60.35	326.52	11.15
2007	29.48	88.00	5.87	27.43	161.01	752.40	34.45
المجموع	165.29	423.99	0	0	445.24	2114.25	95.05
المتوسط	23.61	60.57	0	0	63.60	302.03	13.57

المطلوب:

1- أوجد معادلة انحدار الإنفاق الاستهلاكي على الدخل.

2- أوجد مجال الثقة لمعالم نموذج الانحدار وذلك عند مستوى معنوية 5%. علما أن (القيمة النظرية الجدولية هي t=2.570)

$$\sum u_i^{\ 2} = 1.32$$

3- أوجد معامل التحديد، وفسره.

4- أوجد جدول تحليل التباين لهذا النموذج.

التمرين الثاني:

نرغب في تقدير العلاقة الخطية بين الاستهلاك والدخل لمجموعة من العائلات وذلك حسب نموذج الانحدار الخطي البسيط التالي:

$$Y_I = \alpha + \beta X_i + e_i$$

لهذا الغرض تم اختيار عينة مكونة من 12 عائلة وكانت النتائج كالتالي:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Y	4.8	9.5	9	10.5	10.8	12.2	13.5	16	17.5	18	22	25
X	5	10	10	11	12	13	15	18	20	20	25	30

المطلوب:

1. مثل سحابة النقاط بيانيا وماذا تستنتج
2. قدر معالم معادلة الانحدار
3. اعط الكتابات المختلفة للنموذج
4. ماذا تمثل معالم الانحدار اقتصاديا وهل نتائج التقدير موافقة للنظرية الاقتصادية
5. باستعمال معادلة الانحدار أحسب القيم الجديدة المقدرة للاستهلاك
6. أحسب البواقي المقدرة ثم أحسب مقدر تباين الخطأ
7. أحسب تباينات المقدرات ثم أوجد مجالات الثقة لهذه المقدرات
8. أحسب معامل التحديد R^2 ثم اختبر جودة النموذج
9. أوجد الاستهلاك المتوقع عند دخل مساو ل 80 مع تحديد مجال ثقة للقيمة المطلوبة عند مستوى معنوية 95 %

الفصل الثالث: نموذج الانحدار الخطي المتعدد

1-تقديم النموذج

2-فرضيات النموذج الخطي المتعدد

3-تقدير معلمات النموذج الخطي المتعدد

4-خصائص مقدرات النموذج الخطي المتعدد

5-الاستدلال الاحصائي للنموذج الخطي المتعدد

تضمن الفصل السابق تحليل الانحدار الخطي البسيط والذي تحتوي فيه معادلة خط الانحدار على متغير مستقل واحد يقدم تفسير لجزء من التغير الحاصل في المتغير التابع. ولكن في المتغير التابع يحدده عدد من المتغيرات التفسيرية؛ فالكمية المطلوبة (Y) من سلعة ما تتحدد بسعر السلعة (X_1) وسعر السلعة البديلة (X_2) وسعر السلعة المكملة (X_3) ودخل المستهلك (X_4)، وفي هذه الحالة يكون لدينا ما يسمى بالانحدار المتعدد.

1- تقديم النموذج الخطي المتعدد

يستند النموذج الخطي المتعدد على افتراض وجود علاقة خطية بين متغير تابع (Y) وعدد من المتغيرات المستقلة ($X_1,X_2,X_3,X_4,\ldots,X_k$).

يعبر عن هذه العلاقة بالشكل الرياضي الآتي:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \cdots + \beta_k X_{ik} + U_i \ldots\ldots (3-1)$$

حيث أن: $j=0,1,2,\ldots,k$ $\qquad$ $i=1,2,3,4,\ldots,n.$

يمكن كتابة النموذج (3-1) بشكل مختصر كالآتي: $Y_i = \sum_{j=0}^{k} \beta_j X_{ij} + U_i$

كما يمكن كتابته على شكل مصفوفات: $Y = XB + U \ldots (3-2)$ (3-2)

أي:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ . \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \ldots & X_{1K} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \ldots & X_{2K} \\ . & . & . & \ldots & . \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \ldots & X_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ . \\ \beta_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ . \\ U_n \end{bmatrix} \quad \ldots. \ (3\text{-}3)$$

حيث أن:

Y: متجه (vector)عمودي أبعاده (n+1) يحتوي مشاهدات المتغير التابع .

X : مصفوفة (matrix) أبعادها (n × k+1) لمشاهدات المتغيرات المستقلة علماً أن العمود الأول يمثل الحد الثابت.

B: متجه عمودي أبعاده (K + 1 ×1) يحتوي على المعالم المطلوب تقديرها.

U: متجه عمودي أبعاده (n ×1) يحتوي على الأخطاء العشوائية.

2- فرضيات النموذج الخطي المتعدد

لايجاد تقدير لعناصر الموجه (B) بطريقة OLS في تقدير نموذج الانحدار الخطي المتعدد، يستوجب تحقق الفرضيات الأساسية التالية:

1- القيمة المتوقعة لمتجه حد الخطأ تساوي صفرا أي أن $E(U_i) = 0$:

$$E(U_i) = E\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ . \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(U_1) \\ E(U_2) \\ . \\ E(U_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{bmatrix} \quad \ldots.(3\text{-}4)$$

2- تباين الخطأ العشوائي ثابت، والتباين المشترك بينها يساوي صفرا، أي انعدام التغاير $COV(u_i, u_j) = 0$ عندما تكون $i \neq j$.

$$cov(U) = E(UU') = \sigma_u^2 I_n$$

$$E(UU') = E\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ . \\ U_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 & U2 & \ldots & U_n \end{bmatrix}$$

$$= E\begin{bmatrix} U_1^2 & U_1U_2 & \ldots & U_1U_n \\ U_2U_1 & U_2^2 & \ldots & U_2U_n \\ . & . & . & . \\ U_nU_1 & U_nU_2 & \ldots & U_n^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} E(U_1^2) & E(U_1U_2) & \ldots. & E(U_1U_n) \\ E(U_2U_1) & E(U_2^2) & \ldots. & E(U_2U_n) \\ . & . & \ldots.. & . \\ E(U_nU_1) & E(U_nU_2) & \ldots. & E(U_n^2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathrm{var}(U_1) & Cov(U_1U_2) & \ldots. & Cov(U_1U_n) \\ Cov(U_2U_1) & Var(U_2) & \ldots. & Cov(U_2U_n) \\ . & . & \ldots. & . \\ Cov(U_nU_1) & Cov(U_nU_2) & \ldots. & Var(U_n) \end{bmatrix}$$

$$E(UU') = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{var}(U_i) = E(U_i^2) = \sigma^2$$

وبما أن: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_4^2 = \cdots = \sigma_n^2$

$$E(UU') = \sigma_u^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & 1 \end{bmatrix} \ldots(3-5)$$

تسمى المصفوفة العددية أعلاه بمصفوفة التباين والتباين المشترك – Variance Covariance Matrix لحد الخطأ(U)، حيث تشكل العناصر القطرية في المصفوفة تباين قيم U، بينما تبقى العناصر غير القطرية مساوية للصفر لانعدام التباين المشترك بين قيم U_i.

إضافة الى تلك الفروض أن لا تكون هناك علاقة خطية تامة (تعدد خطي تام) بين المتغيرات المستقلة

$$cov(X_i, X_j) = 0 \quad i \neq j$$

كما وأن عدد المشاهدات للظاهرة المدروسة يجب أن يزيد على عدد المعلمات المطلوب تقديرها، أي أن عدد الأعمدة في المصفوفة (X) في النموذج (3–3) يجب أن يقل عن عدد الصفوف فيها؛

بمعنى آخر: $R(x) = k + 1 < n$

حيث أن (R) رتبة مصفوفة البيانات، (x) عدد المتغيرات المستقلة (k) زائدا (1) الحد الثابت، وهي أصغر من عدد المشاهدات (n). وهذه الفرضية ضرورية جدا لضمان أيجاد معكوس المصفوفة (XX')؛ إذ أن انتفاء هذا الفرض يجعل رتبة المصفوفة (X) اقل من (K+1) وبالتالي فان رتبة (XX') التي تستخدم في الحصول على مقدرات OLS بدورها أقل من (K+1) ولا يمكن أيجاد معكوسها بسبب ما يسمى بمشكل الارتباط الخطي المتعدد، وبالتالي لا يمكن الحصول على مقدرات المربعات الصغرى العادية OLS.

3– تقدير معلمات النموذج الخطي المتعدد

عند تحقق الفرضيات الأساسية يمكن استخدام طريقة المربعات الصغرى لتقدير معالم النموذج (2–3) أعلاه.

$$U = Y - X\widehat{B}$$

$$UU' = (Y - X\widehat{B})'(Y - X\widehat{B}) = (Y' - \widehat{B}'X')(Y - X\widehat{B})$$

بضرب المصفوفات نحصل على: $U'U = Y'Y - Y'X\widehat{B} - \widehat{B}'X'Y + \widehat{B}'X'X\widehat{B}$

وحيث أن $\widehat{B}'X'Y = Y'X\widehat{B}$ كميتان ثابتتان (scalar) ومتساويتان، فإن الصيغة أعلاه تصبح:

$$U'U = Y'Y - 2\widehat{B}'X'Y + \widehat{B}'X'X\widehat{B}$$

بأخذ المشتقة الجزئية الأولى لـ $(U'U)$ بالمنسبة لـ β' ومساواتها بالصفر نحصل على:

$$\frac{\delta(U'U)}{\delta\mathrm{B}'} = -2X'Y + 2X'X\widehat{\mathrm{B}} = 0$$

$$2X'Y = 2X'X\widehat{\mathrm{B}} \leftrightarrow X'Y = X'X\widehat{\mathrm{B}}$$

$$\hat{B} = (X'X)^{-1}X'Y.....(3-6)$$ وهو تقدير لـ B.

وتعتبر مصفوفة النموذج (3–6) أهم نتيجة لمبدأ طريقات المربعات الصغرى حيث $\widehat{\mathrm{B}}$ متجه عمودي يمثل تقدير لقيم B الحقيقية، وبالتالي يمكن معرفة خواص مقدرات $\widehat{\mathrm{B}}$ في الجزء الموالي.

4- خصائص مقدرات النموذج الخطي المتعدد

لا تختلف خصائص مقدرات الانحدار المتعدد عن مقدرات نموذج الانحدار الخطي البسيط التي ذكرناها سالفاً. يمكن شرحها في النقاط التالية:

4-1- خاصية الخطية:

اذا رمزنا للمصفوفة $(X'X)^{-1}X'$ بالرمز A؛ حيث: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ نجد أن:

$$\widehat{\mathrm{B}} = A.Y \qquad \therefore\ \hat{\beta}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}Y_j \qquad ,i = 1 \dots . k$$

ومنه نرى أن متجه المقدرات $\hat{\beta}$ هو على شكل خطي مع المتغير التابع Y.

4-2- خاصية عدم التحيز

لدينا النموذج التالي:

$$Y = X\mathrm{B} + U$$

وبعد التقدير يكون:

$$\hat{Y} = X\hat{B}$$

فنحصل على:

$$\widehat{\mathrm{B}} = (X'X)^{-1}X'Y = (X'X)^{-1}X'Y(X\widehat{\mathrm{B}} + U)$$

$$\widehat{\mathrm{B}} = (X'X)^{-1}X'(XB) + (X'X)^{-1}X'U$$

$$\hat{B} = B + (X'X)^{-1}X'U$$

وبإدخال التوقع الرياضي:

$$E(\hat{B}) = B + (X'X)^{-1}X'E(U)$$

نحصل على:

$$E\left(\hat{B}\right) = B + (X'X)X'E(U) \ \rightarrow\ E\left(\hat{B}\right) = B$$

لأن $E(U) = 0$

وبالتالي نجد أن المقدر $\hat{B}$ المحصل عليه بطريقة المربعات الصغرى مقدر غير متحيز لـ B.

بالإضافة $\widehat{B}$ هو التقدير الأفضل من ضمن كل التقديرات الخطية غير المتحيزة لـ B أي أنه Best Linear Unbiased Estimators وهي نفس خصائص النموذج البسيط المقدر بطريقة المربعات الصغرى.

5- الاستدلال الاحصائي لنموذج الانحدار الخطي المتعدد

لاختبار الفرضيات الخاصة بمعالم النموذج المقدر نتحصل أولاً على تباين الأخطاء وتباين المقدرات.

5-1- تقدير تباين الأخطاء ومصفوفة التباين والتباين المشترك للمقدرات.

نعلم سابقاً أن:

$$cov(U) = E(UU') = \sigma_u^2 I_n \dots\dots..(3-7)$$

وبما أن σ_u^2 غير معلوم وبالتالي يجب تقديره.

$\hat{\sigma}_u^2$ مقدر تباين الأخطاء والذي يعطى بالعلاقة التالية: $\hat{\sigma}_u^2 = \frac{U'U}{n-k}$

مصفوفة التباين والتباين المشترك لـ $\widehat{B}$ هي:

$$var\_cov(\widehat{B}) = E\{(\widehat{B} - E(\widehat{B}))(\widehat{B} - E(\widehat{B}))'\}$$

والتي يمكن كتابتها بالتفصيل:

$$var\_cov(\widehat{B}) = \begin{bmatrix} var(\hat{\beta}_1) & cov(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) \dots.. & cov(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_k) \\ cov(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_1) & var(\hat{\beta}_2) & cov(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_k) \\ \vdots & & \\ cov(\hat{\beta}_k, \hat{\beta}_1) & cov(\hat{\beta}_k, \hat{\beta}_2) & var(\hat{\beta}_k) \end{bmatrix}$$

وتعرف المصفوفة أعلاه بمصفوفة التباين والتباين المشترك (التغاير) للمعالم المقدرة؛ حيث بموجبها يمكن تحديد مواقع كل من تباين المعالم المقدرة والمتمثلة بقطر المصفوفة، أما العناصر الأخرى فتمثل التباين المشترك أي اثنين من هذه المعالم المقدرة.

$$var\_cov(\widehat{B}) = E\{(\widehat{B} - E(\widehat{B}))(\widehat{B} - E(\widehat{B}))'\}$$
$$var\_cov(\widehat{B}) = E\{((X'X)^{-1}X'U)((X'X)^{-1}X'U)'\}$$
$$var\_cov(\widehat{B}) = E\{(X'X)^{-1}X'UU'X(X'X)^{-1}\}$$
$$var\_cov(\widehat{B}) = (X'X)^{-1}X'E(UU')X(X'X)^{-1}$$
$$\text{var\_cov}(\hat{B}) = \sigma^2 (X'X)^{-1} X'X (X'X)^{-1}$$
$$var\_cov(\widehat{B}) = \sigma_u^2 I_n (X'X)^{-1}$$

وعليه فإن قيمة عناصر مصفوفة التباين والتباين المشترك للمعالم المقدرة وفقا للعلاقة التالية:

$$var\_cov(\widehat{B}) = \hat{\sigma}_u^2 (X'X)^{-1} \dots\dots (3-8)$$

هذا يعني أن قيمة تباين أي عنصر من عناصر المتجه $\widehat{\mathrm{B}}$ هو عبارة عن حاصل ضرب قيمة $\hat{\sigma}_u^2$ بما يقابلها من العناصر الواقعة على القطر الرئيسي للمصفوفة $(X'X)^{-1}$، أما التباين المشترك بين أي اثنين من عناصر $\widehat{\mathrm{B}}$ فهو عبارة عن حاصل ضرب $\hat{\sigma}_u^2$ بالعنصر المقابل والواقع خارج القطر الرئيسي للمصفوفة $(X'X)^{-1}$.

5-2- اختبار المعنوية وفترات الثقة لمعلمات الانحدار الخطي المتعدد

يكتسب اختبار المعنوية أهمية في تحليل الانحدار الخطي المتعدد؛ وذلك لكونها تعطينا مؤشرا على استبعاد المتغيرات المستقلة التي لا تؤثر على المتغير التابع. لذا تنطوي فرضية العدم على عدم وجود العلاقة بين المتغير المستقل والمتغير التابع.

لاختبار معنوية الفرضيات لا بد من استخدام أحد معايير الاختبارات (t) و (F) كما يلي:

بافتراض أن المتغير العشوائي U_i موزع توزيعا طبيعياً $U_i \sim N(0, \sigma_u^2 I_n)$

حيث U و 0 هما متجهان عموديان nx1 و I_n هي مصفوفة الوحدة nxn و 0 هو المتجه الصفري.

ومع وجود الفرضيات السابقة للنموذج المتعدد، فإن:

$$\widehat{\mathrm{B}}_k \sim N\left(\mathrm{B}_j, a_{jj}\sigma_u^2\right) \quad \cdots j = 1,2,3,..,k$$

حيث a_{jj} تمثل العناصر القطرية في المصفوفة $(X'X)^{-1}$

يمكن تعريف صيغة اختبار t كما يلي:

$$t_c = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{SE(\hat{\beta}_j)} = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{\frac{U'U}{n-k}}\sqrt{a_{jj}}} \dots.(3-9)$$

ويكون القرار وفق ما ذكرناه في الفصل الخاص بالانحدار البسيط.

ويمكن استنتاج مجال الثقة: $IC = \hat{\beta}_j \pm t_{\left(n-k,\frac{\lambda}{2}\right)} SE\left(\hat{\beta}_j\right) \dots..(3-10)$

5-3- اختبار جودة التوفيق والارتباط

كما ذكرنا في الفصل السابق أن معامل التحديد يعتبر مقياسا لمدى كفاءة النموذج المقدر في تمثيل البيانات؛ أي بمعنى آخر يدل على جودة التوفيق، وهو النسبة بين التباين الموضح Explained Variation إلى التباين الكلي.

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - \bar{Y} - \left(\hat{Y}_i - \bar{Y}\right) = y_i - \hat{y}_i$$
$$SST = RSS + SSE$$

SST: التباين الكلي وهو عبارة عن مجموع مربعات انحرافات قيم Y الفعلية عن وسطها الحسابي $\sum(Y_i - \bar{Y})^2$

RSS: التباين الموضح أو المفسر أو المسبب أو المشروح وهو عبارة عن مجموع مربعات انحرافات القيم المقدرة $\hat{Y}$ من معادلة الانحدار المتعدد عن الوسط الحسابي $\sum\left(\hat{Y}_i - \bar{Y}\right)^2$

ESS: التباين غير الموضح والذي يرجع للعوامل الأخرى، وهو مجموع مربع انحرافات القيم الفعلية عن القيم المقدرة.

النسبة ما بين التباين الموضح والتباين الكلي تسمى بمعامل التحديد R^2.

$$R^2 = \frac{RSS}{SST} = \frac{\sum\left(\hat{Y}_i - \bar{Y}\right)^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2} = \frac{\hat{Y}'\hat{Y}}{Y'Y} = \frac{\hat{B}'X'X\hat{B}}{Y'Y} = \frac{\hat{B}'X'Y}{Y'Y}$$
$$= 1 - \frac{U'U}{Y'Y} \ldots.(3-11)$$

وهذا يدل على أن قيمة معامل التحديد محصورة بين الصفر والواحد.

ان إضافة متغيرات مستقلة الى نموذج الانحدار المقدر سوف يؤدي الى زيادة قيمة R^2 . ويرجع ذلك الى أن إضافة متغير مستقل جديد يؤدي الى زيادة القيمة الموجودة في البسط في معادلة R^2 بينما يظل المقام ثابت، ولهذا يجب تعديل R^2 وذلك بالأخذ في الاعتبار درجات الحرية التي سوف تنقص بسبب إضافة متغيرات مستقلة جديدة في النموذج. ويتم تصحيح ذلك باحتساب معامل التحديد المصحح وفق الصيغة التالية:

$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2)\left(\frac{n-1}{n-k}\right) \ldots (3-12)$$

يتضح من المعادلة (3-12) أنه إذا كان حجم العينة n كبيرا فإن R^2 و $\bar{R}^2$ يقتربان من قيمتيهما، لكن في العينات الصغيرة، اذا كان عدد المتغيرات المستقلة كبيرا مقارنة مع حجم العينة n فإن $\bar{R}^2$ يقل بكثير عن R^2 ويمكن ان يأخذ قيما سالبة، في هذه الحالة يجب شرحه على أساس قيمته تساوي الصفر. كما يمكننا اعتبار أن $\bar{R}^2$ وسيلة قياس جودة التوفيق أفضل من معامل التحديد R^2.

5-4- اختبار المعنوية الكلية لنموذج الانحدار الخطي المتعدد

نستعمل اختبار (F) في معرفة وجود من عدم وجود علاقة بين المتغيرات المستقلة والمتغير التابع (مصدر الانحرافات هو المتغير العشوائي فقط)، وتصاغ فرضية العدم في هذه الحالة كما يلي:

فرضية العدم: $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \cdots = \beta_n = 0$ والتي تدل على عدم وجود علاقة بين المتغيرات.

الفرضية البديلة: $H_1: \beta_1 \neq \beta_2 \neq \beta_3 \neq \cdots \neq \beta_n \neq 0$ والتي تدل على وجود علاقة بين المتغيرات المستقلة والمتغير التابع.

وتحسب إحصاءة (F) من الصيغة الرياضية التالية:

$$F_c = \frac{\hat{Y}'\hat{Y}/_{K-1}}{U'U/_{N-K}}$$

ويمكن كتابة (F) بدلالة R^2 بالشكل التالي: $F_c = \frac{R^2/_{K-1}}{(1-R^2)/_{N-K}}$

حيث: N: عدد المشاهدات، K: عدد المعلمات.

نقارن قيمة F_c المحسوبة بالقيمة الجدولية F_t عند مستوى المعنوية المطلوب (λ%) ودرجتي حرية (K−1,N−K)؛ فإذا كانت أكبر منها فإننا نرفض فرضية العدم؛ مما يدل على معنوية النموذج المقدر وعلى معنوية معامل التحديد R^2. والعكس يدل على عدم معنوية R^2 والنموذج المقدر غير كفؤ البيانات.

5-4- تحليل التباين

يمكن توضيح الانحرافات في جدول تحليل التباين الذي يلخص مصدر التغير الحاصل في Y، أي يبين تحليل مجموع المربعات الصغرى إلى مجموع مربعات الانحدار ومجموع مربعات البواقي، والغرض من هذا التحليل هو اختبار معنوية مجموع مربعات الانحدار وكذا اختبار معنوية المتجه B. كما هو مبين في المعادلة التالية:

$$SST = RSS + SSE$$
$$Y'Y = \hat{Y}'\hat{Y} + U'U$$

جدول تحليل التباين (ANOVA)

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط مجموع المربعات	احصاءة F
المتغير المستقل	$RSS = \hat{B}'X'Y$	K−1	$RSS/_{K-1}$	$F_c = \frac{\hat{Y}'\hat{Y}/_{K-1}}{U'U/_{N-K}}$
البواقي	$ESS = (1-R^2)Y'Y$	N−K	$ESS/_{N-K}$	
المجموع	$SST = Y'Y$	N−1		

N: عدد المشاهدات، k: عدد المعلمات المقدرة.

يعطي جدول تحليل التباين احصاءة F التي يمكن استخدامها لاختبار فرضية العدم:

$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \cdots = \beta_n = 0$.

مثال تطبيقي:

قمنا بتقدير معادلة الطلب على العمل في إحدى الدول خلال الفترة 1990-2016 وكانت النتائج كالتالي:

$$\hat{l}_t = -0{,}304 - 0{,}143wr_t + 0{,}734gdp_t + 0{,}0003nis_t$$
$$R^2 = 0{,}917 \quad DW = 0{,}742 \quad SSE = 0{,}0225 \quad F = 84{,}715$$
$$Var(\hat{\beta}) = \begin{pmatrix} 0{,}2565 & -0{,}0072 & -0{,}0452 & 0{,}0084 \\ & 0{,}0046 & 0{,}0010 & 0{,}0002 \\ & & 0{,}0081 & -0{,}0017 \\ & & & 0{,}0005 \end{pmatrix}$$

حيث:

$\hat{l}_t$: مقدر اللوغاريتم الطبيعي للتشغيل الكلي.

wr_t : اللوغاريتم الطبيعي لمؤشر الأجور الحقيقي.

gdp_t : اللوغاريتم الطبيعي للناتج المحلي الإجمالي الحقيقي.

nis_t : اللوغاريتم الطبيعي لمساهمات أرباب العمل في التأمين الوطني.

SSE: مجموع مربعات البواقي.

- قيّم المعنوية الإحصائية لنتائج التقدير عند مستوى معنوية 5% باعتبار أن جميع افتراضات النموذج الخطي الكلاسيكي محققة.

$$F_{23}^{3} = 3{,}03 \quad t_{23;0{,}025} = 2{,}069 \quad t_{22;0{,}025} = 2{,}074 \quad t_{23;0{,}05} = 1{,}71$$

الحل:

ليكن النموذج الأصلي كالتالي:

$$\hat{l}_t = \beta_0 + \beta_1 wr_t + \beta_2 gdp_t + \beta_3 nis_t + u_t$$

1- الاختبار المعنوية

أ- الفردية للمعلمات:

$$H_0: \beta_0 = 0 \;\; ; \;\; H_1: \beta_0 \neq 0 \quad \propto = 5\%$$
$$t_{\widehat{\beta_0}} = \frac{\widehat{\beta_0}}{SE(\widehat{\beta_0})} = \frac{-0{,}304}{\sqrt{0{,}2565}} = -0{,}600$$

نقارنها مع قيمة t الجدولية $t_{23;0{,}025} = 2{,}069$

لدينا $|2{,}069| > |-0{,}601|$ ومنه نقبل H_0

$$wr: \;\; H_0: \beta_1 = 0 \;\; ; \;\; H_1: \beta_1 < 0 \quad \propto = 5\%$$

$$t_{\widehat{\beta_1}} = \frac{\widehat{\beta_1}}{SE(\widehat{\beta_1})} = \frac{-0{,}143}{\sqrt{0{,}0046}} = -2{,}108$$
$$t_{23;0,05} = 1{,}714$$

وبما أن $|1{,}714| < |-2{,}108|$ فإننا نرفض H_0

$$gdp\colon\ H_0\colon \beta_2 = 0\ \ ;\ \ H_1\colon \beta_2 > 0 \quad \propto = 5\%$$
$$t_{\widehat{\beta_2}} = \frac{\widehat{\beta_2}}{SE(\widehat{\beta_2})} = \frac{0{,}734}{\sqrt{0{,}0081}} = 8{,}156$$
$$t_{23;0,05} = 1{,}714$$

وبما أن $8{,}156 > 1{,}714$ فإننا نرفض H_0

$$nis\colon\ H_0\colon \beta_3 = 0\ \ ;\ \ H_1\colon \beta_3 < 0 \quad \propto = 5\%$$
$$t_{\widehat{\beta_3}} = \frac{\widehat{\beta_3}}{SE(\widehat{\beta_3})} = \frac{0{,}0003}{\sqrt{0{,}0005}} = 0{,}013$$
$$t_{23;0,05} = 1{,}714$$

وبما أن $0{,}013 > -1{,}714$ فإننا نقبل H_0

ب-اختبار المعنوية الكلية للنموذج:

$$H_0\colon \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0\ ;$$
$$H_1\colon at\ least\ one\ of\ the\ \beta \neq 0$$

قيمة F المحسوبة:

$$F_c = \frac{R^2/(k-1)}{(1-R^2)/(n-k)} = \frac{0{,}917/3}{(1-0{,}917)/(23)} = 84{,}703\ > F_{23}^{3} = 3{,}03$$

ومنه نرفض H_0

تمارين مقترحة للفصل الثالث:

التمرين الأول:

إذا كان نموذج الانحدار العام هو: $Y = XB + U$

$$U \rightarrow N(0, \sigma_u^2 I_n)\ ,\ \mathrm{E}(U_i U_j) = 0 si \forall i \neq j$$

- أثبت أن موجه المعلمات (b) المقدر بأسلوب (OLS) غير متحيز، أي أن: $E(\hat{B}) = B$
- اشتق صيغة لتقدير مصفوفة التباين والتباين المشترك لموجه (b) ، أي $Var - Cov(\hat{B})$

التمرين الثاني:

إذا كان لدينا نموذج الانحدار التالي:

$$y_t = a_0 + a_1 x_{1t} + a_2 x_{2t} + a_3 x_{3t} + \varepsilon_t$$

اليك البيانات التالية:

t	y	x_1	x_2	x_3
1	12	2	45	121
2	14	1	43	132
3	10	3	43	154
4	16	6	47	145
5	14	7	42	129
6	19	8	41	156
7	21	8	32	132
8	19	5	33	147
9	21	5	41	128
10	16	8	38	163
11	19	4	32	161
12	21	9	31	172
13	25	12	35	174
14	21	7	29	180

$$(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 20.16864 & 0.015065 & -0.23145 & -0.07617 \\ 0.015065 & 0.013204 & 0.001194 & -0.00094 \\ -0.23145 & 0.001194 & 0.003635 & 0.000575 \\ -0.07617 & -0.00094 & 0.000575 & 0.000401 \end{pmatrix}$$ ،

$$(X'Y) = \begin{pmatrix} 248 \\ 1622 \\ 9202 \\ 37592 \end{pmatrix}$$

$e'e = 67.45$ ،

$$\sum_t (\hat{y}_t - \bar{y})^2 = 159.41 \quad \sum_t (y_t - \bar{y})^2 = 226.86$$

المطلوب:

- وضع النموذج في شكل مصفوفات مع تحديد أبعاد كل منها.
- تقدير معالم هذا النموذج.
- حساب تقدير التباين الخطأ والانحرافات المعيارية لكل المعلمات $SE(\hat{\beta}_j)$.
- حساب R^2 و $\overline{R}^2$.
- تكوين اختبارات المعنوية لكل المعلمات عند مستوى معنوية 5% ($t_{10}^{0,05} = 2,228$).
- ايجاد جدول تحليل التباين واختبار معنوية النموذج ($F_{3,10}^{0,05}$)

التمرين الثالث:

– إذا كان نموذج الانحدار العام هو: $Y = XB + U$

$$U \to N\left(0, \sigma_u^2 I_n\right) \text{ , } E\left(U_i U_j\right) = 0 si \forall i \neq j$$

أثبت أن مقدر (OLS) غير متحيز.

2– عند تقدير نموذج الانحدار المتعدد للعلاقة بين قيمة الانتاج من سلعة معينة (Y) ومعدل عدد العاملين (X_1) ورأس المال الثابت (X_2).

تحصلنا على الحسابات الآتية:

$$(X'Y) = \begin{pmatrix} 107.4901 \\ 830.0828 \\ 990.8668 \end{pmatrix} \text{، } Var\left(U_t\right) = 0.01174 \text{ ،}$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 129.2481 & -34.7471 & 15.0877 \\ & 10.0527 & -4.6514 \\ & & 2.2602 \end{pmatrix}$$

أ– قدر معالم هذا النموذج، مع التفسير الاقتصادي.

ب– أوجد مرونة الانتاج بالنسبة للعمل ورأس المال.

ت– أحسب مصفوفة التباين والتباين المشترك لمعلمات النموذج $Var - Cov\left(\hat{B}\right)$

التمرين الرابع:

عند تقدير نموذج الانحدار المتعدد للعلاقة بين المتغير التابع (Y) والمتغيرين المستقلين (X1) و (X2).

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + U_t$$

$$(X'Y) = \begin{pmatrix} 116 \\ 1342 \\ 1298 \end{pmatrix} \text{ ، ،}$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 1.1725 & 0.0852 & -0.1921 \\ & 0.0284 & -0.0362 \\ & & 0.0547 \end{pmatrix}$$

مع العلم أن حجم العينة n=10 ومجموع مربعات الانحدار هو

$$RSS = \sum_{i=1}^{10} (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 = 254.58$$

ومجموع المربعات الكلية هو $SST = \sum_{i=1}^{10} (Y_i - \bar{Y})^2 = 256.4$

المطلوب:

– قدر معالم هذا النموذج، مع تفسير المعلمات المقدرة.

- أحسب مجموع مربعات الأخطاء ESS.
- أوجد قيمة التباين $Var(U_t)=\sigma^2$ لحدود الأخطاء.
- أوجد التباين $Var(\hat{\beta})=\sigma_{\beta}^{2}$ وكذا الانحراف المعياري لكل معلمة.
- أحسب معامل التحديد ومعامل التحديد المصحح، ماذا تستنتج؟
- كوّن اختبارات المعنوية لكل المعلمات عند مستوى معنوية 5% ($t_7^{0.025}=2.36$).
- أوجد جدول تحليل التباين واختبر معنوية النموذج ($F_{2,7}^{0.05}=6.54$).

الفصل الرابع: مشكلة الارتباط الذاتي للأخطاء

مقدمة

4-1- مفهوم الارتباط الذاتي للأخطاء العشوائية

4-2- مصادر وأسباب الارتباط الذاتي للأخطاء العشوائية

4-3- اختبارات الارتباط الذاتي للأخطاء العشوائية

4-4- معالجة مشكلة الارتباط الذاتي للأخطاء العشوائية

تأخذ البيانات الإحصائية شكل بيانات مقطعية أو بيانات تكون عبارة عن سلاسل زمنية أو مزيج بينهما بما يسمى بالبيانات التجمعية. فغالباً عند استخدام بيانات السلاسل الزمنية نجد أن هذه المشاهدات تتبع ترتيباً طبيعيا عبر الزمن أي غير مستقلة الواحدة عن الأخرى، وبالتالي في هذه الحالة فرض عدم وجود ارتباط ذاتي للأخطاء العشوائية لن يكون محققاً. فما مفهوم الارتباط الذاتي للأخطاء العشوائية.

1- مفهوم الارتباط الذاتي للأخطاء العشوائية

يُعرف Tintner الارتباط الذاتي بأنه " ارتباط بين مشاهدات سلسلة معينة عند الفجوات الزمنية المختلفة، معبر عنها بوحدات زمنية"[3]، وبالتالي يُعرف الارتباط الذاتي لحد الخطأ العشوائي على أنه ارتباط بين عناصر الأخطاء العشوائية بعلاقة محددة (سالبة او موجبة) خلال الفترات الزمنية المتعاقبة (t,t+1,t+2,....).

إن تقدير نموذج الانحدار الخطي يفترض عدم ارتباط المتغيرات العشوائية

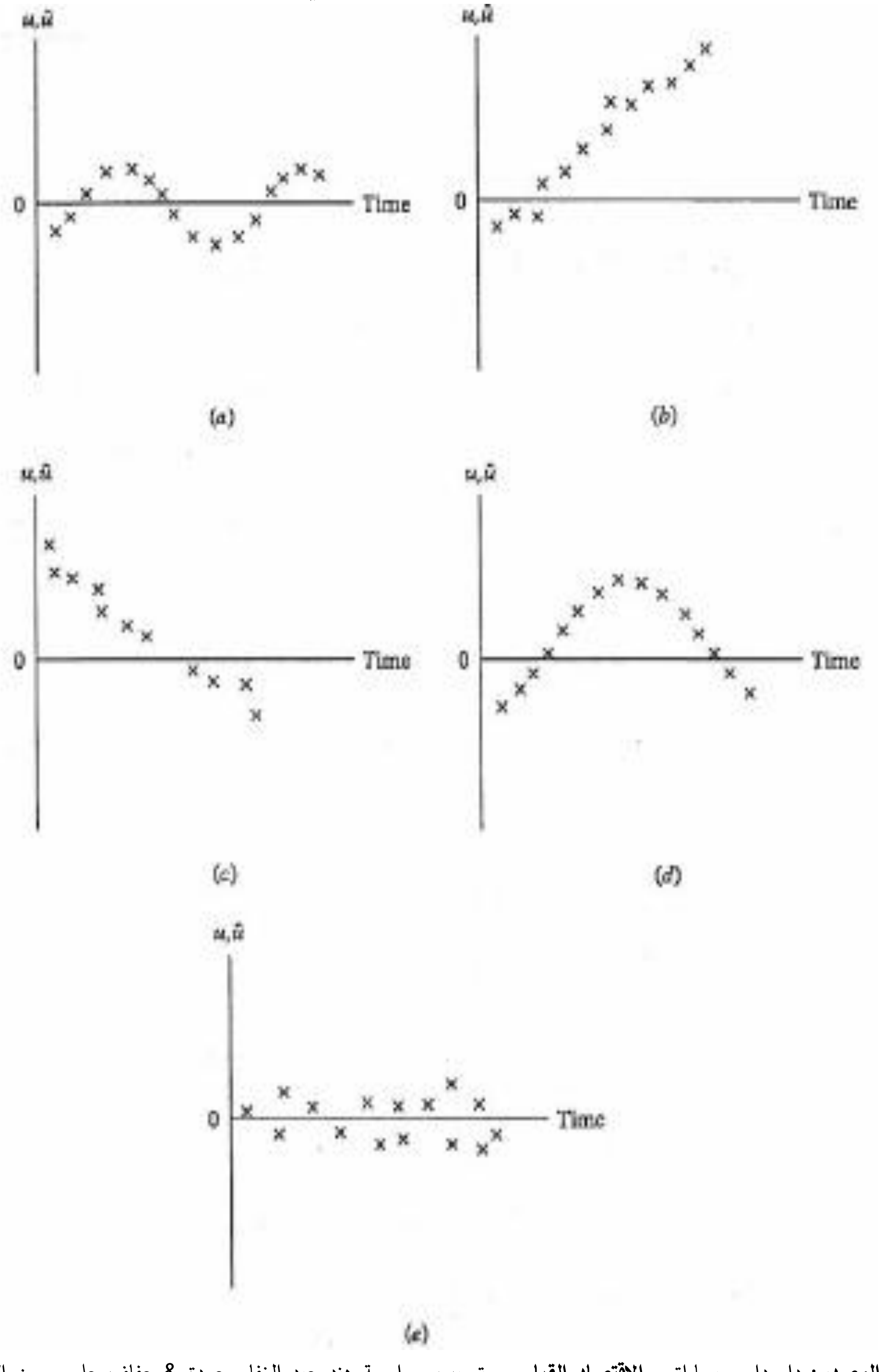
$$\mathrm{E}(u_i u_j) = 0 \quad i \neq j$$

وبموجب هذه الفرضية فإن التباين المشترك للمتغير العشوائي يساوي الصفر؛ وهذا يعني عدم تأثر الظاهرة الاقتصادية المتحققة في الزمن (*t*) على تلك التي ستتحقق في الزمن (*t+1 ;t+2,..*). فمثلاً عند دراسة انحدار الناتج على العمالة ورأس المال إذا حدث تغير مفاجئ في العمالة في السنة (*t*) يؤثر على الناتج في نفس السنة (*t*) لا يوجد ما يجعلنا نعتقد أن هذا التغيير سيظهر مرة أخرى في السنة الموالية. وعليه، إذا وجد عدم استقلال بين المشاهدات بهذا الشكل، فإننا أمام ارتباط ذاتي للأخطاء العشوائية، يمكن التعبير عنه بالشكل التالي: $\mathrm{E}(u_i u_j) \neq 0 \quad i \neq j$

يبين الشكل أناه مختلف أنماط وجود ارتباط ذاتي للأخطاء العشوائية؛ حيث يمثل البيان (a) النمط الدوري، والبيان (b) نمط الاتجاه العام الخطي المتزايد، البيان (c) يمثل نمط الاتجاه العام الخطي المتناقص، البيان (d) يوضح الاتجاه الخطي والتربيعي للارتباط الذاتي للأخطاء العشوائية، بينما البيان (*e*) لا يمثل أي نمط منتظم.

[3] Gerhard Tintner, Econometrics, Literary Licensing, LLC, United States, 2013.

الشكل رقم (1-4): أنواع الارتباط الذاتي للأخطاء العشوائية



المصدر: دامودار جيجاراتي، **الاقتصاد القياسي**، تعريب ومراجعة هند عبد الغفار عودة & عفاف على حسن الدش، دار المريخ، الرياض، المملكة العربية السعودية، 2015، ص569.

وبخصوص درجة الارتباط الذاتي للأخطاء العشوائية، تفترض أغلب الدراسات القياسية أن الارتباط الذاتي الخطي البسيط هو الأكثر شيوعاً، والذي يمكن التعبير عنه بالصيغة التالية: $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \ldots . (4-1)$

حيث: ε_t متغير عشوائي له الفرض الأساسية التالية:

$$(1) E(\varepsilon_t) = 0$$
$$(2) E(\varepsilon)_t^2 = \sigma_\varepsilon^2$$
$$(3) E\left(\varepsilon_i, \varepsilon_j\right) = 0 \quad i \neq j$$

باستخدام طريقة المربعات الصغرى OLS للمعادلة (4-1) يمكننا الحصول على تقدير قيمة $\hat{\rho}$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\hat{\rho} = \frac{\sum u_t u_{t-1}}{\sum u_{t-1}^2} \ldots .(4-2)$$

ان دراسة وجود من عدم وجود ارتباط ذاتي للأخطاء في هذه الحالة يتطلب دراسة معنوية معامل الارتباط ρ، وهو ما سنذكره في النقاط الموالية بعد دراسة مصادر هذا الارتباط.

2- مصادر وأسباب الارتباط الذاتي للأخطاء العشوائية

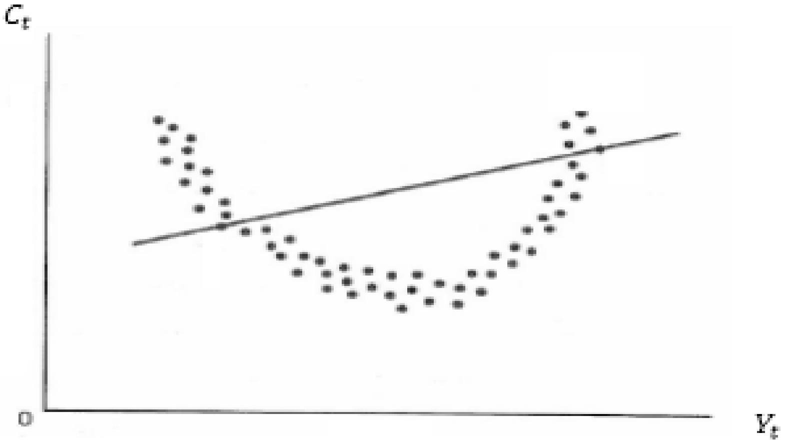
ان مصادر وأسباب حدوث مشكلة الارتباط الذاتي للأخطاء العشوائية عديدة؛ نذكر منها الأسباب التالية:

- إغفال أو حذف بعض المتغيرات المفسرة من النموذج: إن حذف بعض المتغيرات المستقلة المهمة من النموذج يؤدي الى تحير في التوصيف نتيجة استبعاد تلك المتغيرات؛ مما يجعل المتغير العشوائي يؤدي دور تلك المتغيرات المحذوفة، وبالتالي نجد أن المتغير العشوائي لا يعكس الخطأ العشوائي (u_t) فقط وإنما أيضا المتغيرات المحذوفة.
- الصياغة الرياضية الخاطئة للنموذج Mis-specification of Mathermatical of the Model: يؤدي الخطأ في اختيار الشكل الرياضي المناسب للنموذج القياسي إلى حدوث ارتباط بين الاخطاء العشوائية؛ فمثلا إذا كان النموذج الحقيقي في دراسة عن الاستهلاك وعلاقتة بالدخل هو النموذج التالي المكون من C الاستهلاك للفرد. و Y الدخل المتاح.

$$C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \beta_2 Y_t^2 + u_t$$

بينما قمنا بتقدير النموذج التالي: $C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + u_t$

الشكل (2–4): الشكل الرياضي الخاطئ



من خلال الشكل (2–4) نلاحظ قيمة الاستهلاك ستقدر بالانحدار الخطي بأعلى من قيمتها الفعلية؛ لأن مقدار الخطأ (u_t) سيظهر ارتباطا ذاتيا كنتيجة لاستخدام شكل رياضي خاطئ.

- معالجة البيانات الإحصائية[4] Manipulation of data: تخضع البيانات في الكثير من الحالات لمعالجتها أو استكمالها او الحصول على بعض منها بتمهيد منحنياتها، الأمر الذي يعني على متوسط المتغيرات العشوائية الحقيقية خلال الفترات الزمنية المتتالية، هذه المعالجات تتسبب في حدوث ارتباط ذاتي للأخطاء العشوائية.
- القصور الذاتي (الركود) Inertia: ويقصد به أن الظروف السابقة تؤثر في الظروف الحالية واللاحقة؛ إذ نجد على سبيل المثال قيمة الاستهلاك تتزايد باستمرار مع الزمن أو تتناقص في فترات زمنية متعاقبة؛ أي تكون القيم المتتالية في الزمن للمشاهدات مترابطة ذاتياً، في هذه الحالة نجد أن الأخطاء العشوائية ترتبط مع بعضها البعض.
- أثر الأحداث المختلفة (الصدمات) Influence of Shocks: قد تسبب مختلف الظواهر الطبيعية وغير الطبيعية (الاضطرابات الاقتصادية أو العمالية والتضخم..) في حدوث الارتباط الذاتي بين الأخطاء العشوائية.
- ظاهرة نسيج العنكبوت[5] Cobweb Phenomenon: تظهر هذه الظاهرة في الإنتاج الزراعي والعقار؛ إذ يتأثر العرض بالسعر لفترة زمنية سابقة، تقوم هذه النظرية على فكرة أو فرضية أن العرض لهذه السنة (t) اعتمد على السعر في الفترة (t−1). $Supply_t = \beta_0 + \beta_1 P_{t-1} + u_t$

لنفترض سعر الفترة (t−1) هوP_{t-1}، وبناء عليه تقرر الإنتاج الذي ظهر جاهزا للبيع الفترة الحالية (t). في حال حدوث تغيرات تسببت باتجاه الطلب إلى الانخفاض وفق الأسعار

[4] عبد الرزاق بني هاني، **الاقتصاد القياسي: نظرية الانحدار البسيط والمتعدد**، دار وائل لنشر والتوزيع، عمان، الاردن، ط1، 2014، ص155.

[5] دامودار جيجاراتي، **الاقتصاد القياسي**، مرجع سابق، ص 570.

الحالية، فإنه سينتج من ذلك فائض عرض هذه الفترة. وهذا الفائض سيضغط تجاه انخفاض السعر P_t مقارنة بالسعر P_{t-1}. هذا الانخفاض في السعر لن يشجع المزارعين كثيراً على التخطيط لإنتاج الكمية نفسها للفترة اللاحقة (t+1). وتبعا سيقررون إنتاج كمية أقل. والنتيجة أن السعر سيرتفع في الفترة (t+1). وهكذا يجعلنا ندخل في دورات مستمرة من ارتفاع وانخفاض في العرض والطلب والأسعار. ويشبه شكل هذه الدورات نسيج العنكبوت.

- التخلف في تأثر البيانات Lags ببعضها البعض: ومثال ذلك نجد أن نفقات الاستهلاك في الفترة الحالية تعتمد على عدة عوامل منها الدخل بالإضافة الى نفقات الاستهلاك في الفترة السابقة، لكن إذا تجاهلنا هذا الأخير فسيعكس مقدار الخطأ نمطا منتظما نتيجة تأثير استهلاك الفترة السابقة على الاستهلاك في الفترة الحالية.
- عدم السكون Nonstationarity: إذا وجدنا في نموذج انحدار Y على X أن السلسلتين Y وX غير ساكنتين فإنه قد يكون حد الخطأ العشوائي u_i غير ساكناً وبالتالي سيكون هناك ارتباط ذاتي للأخطاء العشوائية.

وهناك أسباب أخرى مثل تحويل البيانات Data Transformation قد تؤدي إلى مشكلة الارتباط الذاتي للأخطاء العشوائية؛ والتي تؤثر سلباً على تقديرات طريقة المربعات الصغرى بحيث لا يكون تباين مقدرات النموذج أقل ما يمكن، بينما تبقى هذه المقدرات خطية وغير متحيزة.

3- اختبارات الارتباط الذاتي للأخطاء العشوائية

3-1- **اختبار دوربين-واتسون (Durbin – Watson Test)**: يعتبر اختبار دوربين-واتسون (Durbin – Watson Test) من أكثر الاختبارات الإحصائية استعمالاً في الكشف عن وجود الارتباط الذاتي للأخطاء، وذلك باستعمال الإحصائية (d) التالية:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n}(\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t}^{n}\hat{u}_t^2} \dots\dots (4-3)$$

والتي تعتمد على البواقي المقدرة وهي النسبة بين مجموع الفروق المربعة للبواقي المتتالية في الزمن إلى مجموع مربعات الانحدار (RSS).

يقوم اختبار Durbin Watson على الفروض التالية[6]:

- نموذج الانحدار يجب أن يحتوي على الجزء الثابت للحصول على RSS.
- المتغيرات المفسرة ثابتة عند تكرار المعاينة.

---

[6] إبراهيم سليمان وآخرون، **مقدمة في الاقتصاد القياسي**، المكتبة الأكاديمية، مصر، 2012، ص 217.

- الخطأ u_t مولد عن طريق انحدار ذاتي من الدرجة الأولى: $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$ وبالتالي لا يمكن اعتماده في عمليات انحدار ذات رتب أعلى.
- الأخطاء العشوائية u_i تتبع التوزيع الطبيعي.
- نموذج الانحدار لا يتضمن متغيرات متأخرة للمتغير التابع كمتغيرات تفسيرية.
- يفترض هذا الاختبار عدم وجود مشاهدات مفقودة في البيانات.

ولإجراء اختبار Durbin Watson نقوم بصياغة الفرضي التالية:

$H_0: \rho = 0$ أي أن الأخطاء غير مرتبطة ذاتياً.

$H_1: \rho \neq 0$ أي أن الأخطاء مرتبطة ذاتياً.

نحسب قيمة الاختبار (d) من الصيغة (4−3) التالية:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n}(\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_t^n \hat{u}_t^2}$$

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n} \hat{u}_t{}^2 + \sum_{t=2}^{n} \hat{u}_{t-1}^2 - 2\sum_{t=2}^{n} \hat{u}_t\hat{u}_{t-1}}{\sum_t^n \hat{u}_t^2}$$

حيث $\sum_{t=2}^{n} \hat{u}_t{}^2 = \sum_{t=2}^{n} \hat{u}_{t-1}^2$ وعليه:

$$d \approx 2\left(1 - \frac{\sum_{t=2}^{n} \hat{u}_t\hat{u}_{t-1}}{\sum_t^n \hat{u}_t^2}\right)$$

وبما أن $\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{n} \hat{u}_t\hat{u}_{t-1}}{\sum_t^n \hat{u}_t^2}$ فإنه يمكن كتابة قيمة d على الشكل التالي:

$$d \approx 2(1 - \hat{\rho}) \ldots . (4 - 5)$$

وبما أن $1 \leq \hat{\rho} \leq 1-$ فإن قيمة DW تكون محصورة بين الصفر والاربعة $0 \leq d \leq 4$

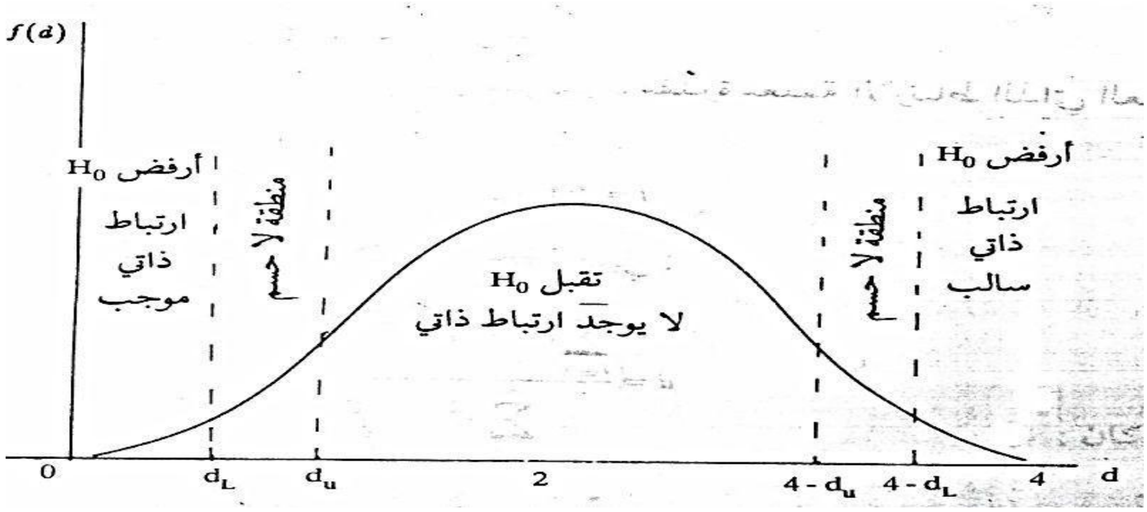
- إذا كان $\hat{\rho} = 0$ فإن $d = 2$ أي لا يوجد ارتباط ذاتي.
- إذا كان $\hat{\rho} = 1$ فإن $d = 0$ أي هناك ارتباطا ذاتيا موجبا تاما.
- إذا كان $\hat{\rho} = -1$ فإن $d = 4$ أي هناك ارتباطا ذاتيا سالبا تاما.

وغير ذلك، نقارن القيمة المحسوبة d من العينة بالقيمة الجدولية؛ والتي هي مجدولة بحدين قيمة دنيا (d_L) وقيمة عليا (d_U) وبحسب درجات الحرية (n−k) وعدد المتغيرات المستقلة. ويتم قبول أو رفض فرضية العدم حسب ما يلي:

جدول (1-4): اختبار الفرضيات لمعامل الارتباط الذاتي

القرار	قيمة d
نرفض H_0 يوجد ارتباط ذاتي سالب	$4-d_L \le d \le 4$
غير محدد	$4-d_u \le d \le 4-d_l$
نقبل H_0 : غياب الارتباط الذاتي	$d_u < d < 4-d_u$
غير محدد	ح$d_L < d < d_u$
نرفض H_0 يوجد ارتباط ذاتي موجب	$0 < d < d_L$

الشكل (3-4): اختبار Durbin –Watson



وبالرغم من أهمية اختبار DW إلا أنه لا يمكن استخدامه في حالة عدم تحقق الفروض السالفة الذكر، وبالأخص الفرض المتعلق بالمتغيرات المفسرة التي تكون ثابتة عند تكرار المعاينة، في هذه الحالة لا يمكن استخدامه سواء كان حجم العينة صغيراً أو كبيراً [7].

3-2- اختبار h لـ Durbin:

في حالة وجود متغير متباطئ للمتغير التابع ونتيجة لأسباب إحصائية لوحظ إن إحصاء ديربن واتسون Durbin – Watson يتجه نحو قيمة 2 وإذا استندنا عليه، سنتوصل إلى نتيجة خاطئة ونقول أنه لا يوجد مشكلة ارتباط ذاتي بحكم انه قريب من 2. إذا كان الاختبار لوجود الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى: $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$

$H_0 : \rho = 0$

$H_A : \rho \neq 0$

نعلم أن النماذج الاقتصادية تحكمها قوه معينه تحتم ظهور المتغيرات المتباطئة كمتغيرات مفسره لأي متغير تابع.

[7] Fumio Hayashi, **Econometrics**, Princeton University Press, Princeton, N. J., 2000, p..45.

$$Y = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 X_t + u_t$$

الإحصاء المحسوب $h = \hat{\rho}\sqrt{\frac{n}{1-nV(\hat{\beta}_1)}}$

n عدد المشاهدات، $V(\hat{\beta}_1)$ تباين مقدر معامل الانحدار المقدر الخاص بالمتغير التابع دات فترات ابطاء فترة واحدة Y_{t-1}.

$$d = 2(1-\hat{\rho})$$

$$\hat{\rho} = 1 - \frac{d}{2}$$

بأخذ إحصاءة Durbin – Watson

$$h = (1-\frac{d}{2})\sqrt{\frac{n}{1-nV(\hat{\beta})}}$$

يجدر الإشارة إلى أن قيمة h موزعة توزيعا طبيعيا بمتوسط حسابي يساوي الصفر وتباين يساوي الواحد الصحيح. ومن تم يجب مقارنة قيمة h بالقيمة الجدولية (القيمة الحرجة) لـ Z الموجودة في جدول التوزيع الطبيعي عند مستوى معنوية معين.

ويتلخص اختبار h من جانب واحد كما يلي:

فرضية العدم: $H_0: \rho \leq 0$

الفرضية البديلة: $H_1: \rho > 0$

القرار: إذا كانت $h > Z$ نرفض فرضية العدم ونقبل الفرضية البديلة؛ أي هناك ارتباط ذاتي موجب من الدرجة الأولى.

نلاحظ أن:

- القيمة الجدولية h يمكن إيجادها من جدول التوزيع الطبيعيZ
- يفضل استعماله للعينات الكبيرة التي أكبر من 30 مشاهده.
- تقل قوة الاختبار عند العينات التي أقل من 30.
- إذا كانت $nV(\beta_1) > 1$ لا يستخدم هذا الاختبار لأنه عندما تكون $nV(\beta_1) > 1$ يكون الجذر التربيعي بالسالب.
- بحم هذه الملاحظة الأخيرة وبحكم ا اعتبارات أخرى يطبق هذا على الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى ولا يصلح للارتباط الذاتي من الدرجة الثانية.

3-3- اختبار Breusch – Godfrey (LM)

يعرف اختبار Breusch(1978) – Godfrey(1978) باختبار مضاعف لاغرانج وهو اختبار عام يسمح أن يتضمن نموذج الانحدار متغيرات متأخرة للمتغير التابع Y_{t-1} ، Y_{t-2} كمتغيرات تفسيرية، كما يسمح باختبار ارتباط ذاتي أعلى من الدرجة الأولى مثل AR(1)، AR(2).....

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \cdots + \rho_p u_{t-p} \ldots\ldots (4-6)$$

يقوم الاختبار على الفرضية الصفرية التالية:

$$H_0: \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \cdots = \rho_p = 0 \ldots\ldots (4-7)$$

أي لا يوجد ارتباط ذاتي للأخطاء العشوائية من أي درجة.

ولاختبار هذه الفرضية نقوم بما يلي:

- تقدير نموذج الانحدار $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t$ والحصول على البواقي المقدرة $\hat{u}_t$.
- نقوم بتقدير نموذج انحدار $\hat{u}_t$ على القيم الأصلية للمتغير المفسر X_t (المتغيرات المفسرة) و قيم البواقي المقدرة في فترات زمنية سابقة $(\hat{u}_{t-1}, \hat{u}_{t-2}, \hat{u}_{t-3}, \ldots\ldots.., \hat{u}_{t-p})$.

$$\hat{u}_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_t + \rho_1 \hat{u}_{t-1} + \rho_2 \hat{u}_{t-2} + \rho_3 \hat{u}_{t-3} + \cdots \ldots. + \rho_p \hat{u}_{t-p} \ldots\ldots. (4-8)$$

ونحصل على R^2 بعد تقدير هذا النموذج.

- نحسب القيمة: $(n-p)R^2 \sim x_p^2$

اذا زادت قيمة $LM = (n-p)R^2$ عن القيمة المجدولة لتوزيع الكاي تربيع بدرجة حرية p عند مستوى معنوية معين، فإننا نرفض الفرضية الصفرية؛ مما يدل على وجود واحدة على الأقل من ρ في النموذج تختلف معنويا عن الصفر.

4- معالجة الارتباط الذاتي للأخطاء العشوائية

تأتي طريقة معالجة الارتباط الذاتي بحسب مصدر هذا الارتباط؛ إذا كان المصدر هو اغفال بعض المتغيرات يكون من الضروري إضافة هذه المتغيرات الى مجموعة المتغيرات المفسرة، وإذا كان المصدر هو التوصيف الخاطئ كان لزاما إعطاء صياغة مناسبة للنموذج.

إذا كان الارتباط هو ارتباط محض وغير متعلق بأي مشكلة أخرى (غير المصادر السالفة الذكر) وتبين من خلال استخدام اختبار Durbin – Watson أو أي اختبار آخر وجود ارتباط ذاتي بين الأخطاء، فإنه يتم تحويل النموذج الأصلي الى نموذج آخر يكون خال من مشكلة الارتباط الذاتي للأخطاء.

تتوقف عملية التحويل على ما إذا كانت قيمة معامل الارتباط ρ معروفة أم لا. وهناك حالتان وهما:

- الحالة الأولى: اذا كانت قيمة معامل الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى ρ معلومة وبافتراض علاقة النموذج على الشكل التالي:

$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t ....(4-9)$ صالحة في الزمن t، فإنها تكون صالحة في الزمن (t-1) أي ان $Y_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 X_{t-1} + u_{t-1} ...(4-10)$ وبضرب طرفي المعادلة (4-10) في ρ نجد:

$$\rho Y_{t-1} = \rho\beta_0 + \rho\beta_1 X_{t-1} + \rho u_{t-1}$$

بطرح (4-11) من (4-10) نتحصل على:

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = \beta_0(1-\rho) + \beta_1(X_t - \rho X_{t-1}) + (u_t - \rho u_{t-1}) \dots (4-12)$$

يمكن كتابة (4-12) بالشكل التالي:

$$Y_t^* = \beta_0^* + \beta_1^* X_t^* + \varepsilon_t \dots \dots (4-13)$$

وحتى لا نخسر المشاهدة الأولى من البيانات المتاحة، فقد جرت العادة على تحويل هذه المشاهدة للمتغيرين المستقل والتابع كما يلي:

$$Y_1\sqrt{1-\rho^2} \quad , \quad X_1\sqrt{1-\rho^2}$$

تسمى العملية بتحويلة بريز– وينستون Prais – Winston. وبعد ذلك يتم تقدير معلمات الدالة المحولة (4-13) من البيانات المحولة بطريقة المربعات الصغرى لنحصل على مقدرات لها الخصائص BLUE.

- الحالة الثانية: اذا كانت ρ غير معلومة

ان تطبيق الحالة الأولى في الواقع صعب؛ حيث يصعب أن تكون ρ معلومة، وبالتالي ضرورة تقديرها، وهناك عدة طرق لتقدير ρ تسمى بالطرق التكرارية؛ أي لتقدير ρ بشكل مكرر وبالتقريب ومن هذه الطرق التكرارية: الطريقة التكرارية لـ Cochrane – Orcutt وطريقة الخطوتين لـ Durbin وطريقة البحث لـ Hilgreth-Lu، نذكر منها:

- طريقة كوكران _ أوركات Cochrane – Orcutt

تعتبر هذه الطريقة التكرارية لـ Cochrane – Orcutt من أهم الطرق لتقدير $\hat{\rho}$؛ لامكانية استخدامها لعمليات انحدار ذاتي AR(1) و AR(2)، ...ويمكن توضيحها باستخدام النموذج الخطي البسيط في الخطوات التالية:

- تقدير معالم نموذج الانحدار بطريقة OLS:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t$$

ثم نحسب البواقي: $(u_1, u_2, \dots \dots, u_n)$

- احتساب قيم معامل الارتباط الذاتي البسيط (بافتراض العملية AR(1)) وفق الصيغة التالية:

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{n} \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum_{t}^{n} \hat{u}_t^2}$$

- بعد الحصول على قيمة $\hat{\rho}$ يتم تصحيح البيانات الأصلية الخاصة بالمتغير التابع Y والمتغير المستقل X

$$Y_t^* = Y_t - \rho Y_{t-1}$$

$$X_t^* = X_t - \rho X_{t-1}$$

وبعدها نقوم باستخدام طريقة المربعات الصغرى OLS على البيانات المحولة كما يلي:

$$Y_t^* = \beta_0^* + \beta_1^* X_t^* + \varepsilon_t \dots \dots (4-14)$$

أي أن:

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = \beta_0(1-\rho) + \beta_1(X_t - \rho X_{t-1}) + (u_t - \rho u_{t-1}) \dots (4-15)$$

ثم يتم احتساب البواقي بعد عملية التقدير للبيانات المحولة: $(u_1, u_2, \dots \dots, u_n)$

وتحتسب قيمة D-W من جديد، وفي حالة بقاء مشكلة الارتباط الذاتي تعاد نفس الآلية السابقة، فنقدر قيمة $\hat{\rho}$ ويستخدم في تصحيح البيانات الجديدة، وإذا حصل تطابق أو تناسب لكل من β_1و β_0 مع المرحلة الثانية سميت المعالم المقدرة بواسطة 2SLS طريقة المربعات على مرحلتين.

كما Durbin طريقة المرحلتين للحصول على قيمة $\hat{\rho}$ ويمكن أن نتبع الخطوات الآتية:

- تقدير المعادلة التالية:

$$Y_t = \beta_0(1-\rho) + \rho Y_{t-1} + \beta_1 X_t + u_t \dots (4-16)$$

- نستخدم $\hat{\rho}$ وهي معامل المتغير Y_{t-1} في تصحيح البيانات وكما ذكرنا سابقاً.
- نقدر المعادلة وفق البيانات المعدّلة، ثم نجري الاختبار مرة أخرى لمعرفة المشكلة من عدمها.

مثال تطبيقي:

قمنا بتقدير معادلة الطلب على العمل في إحدى الدول خلال الفترة 1990–2016 وكانت النتائج كالتالي:

$$\hat{l}_t = -0,304 - 0,143wr_t + 0,734gdp_t + 0,0003nis_t$$
$$R^2 = 0,917 \quad DW = 0,742 \quad SSE = 0,0225 \quad F = 84,715$$
$$Var(\hat{\beta}) = \begin{pmatrix} 0,2565 & -0,0072 & -0,0452 & 0,0084 \\ & 0,0046 & 0,0010 & 0,0002 \\ & & 0,0081 & -0,0017 \\ & & & 0,0005 \end{pmatrix}$$

حيث:

$\hat{l}_t$: مقدر اللوغاريتم الطبيعي للتشغيل الكلي.

wr_t : اللوغاريتم الطبيعي لمؤشر الأجور الحقيقي.

gdp_t : اللوغاريتم الطبيعي للناتج المحلي الإجمالي الحقيقي.

nis_t : اللوغاريتم الطبيعي لمساهمات أرباب العمل في التأمين الوطني.

SSE: مجموع مربعات البواقي.

1- قيّم المعنوية الإحصائية لنتائج التقدير عند مستوى معنوية 5% باعتبار أن جميع افتراضات النموذج الخطي الكلاسيكي محققة.

2- اختبر وجود مشكلة الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى.

3- على ضوء النتيجة المحصل عليها في اختبار وجود مشكلة الارتباط الذاتي، أعد تقييم إجابتك عن السؤال الأول (1).

تعطى: $d_L = 1,162 \quad d_U = 1,651$

$$F_{23}^3 = 3,03 \quad t_{23;0,025} = 2,069 \quad t_{22;0,025} = 2,074 \quad t_{23;0,05} = 1,71$$

الحل:

ليكن النموذج الأصلي كالتالي:

$$\hat{l}_t = \beta_0 + \beta_1 wr_t + \beta_2 gdp_t + \beta_3 nis_t + u_t$$

2- الاختبار المعنوية

ت- الفردية للمعلمات:

$$H_0: \beta_0 = 0 \ ; \quad H_1: \beta_0 \neq 0 \quad \propto = 5\%$$
$$t_{\widehat{\beta_0}} = \frac{\widehat{\beta_0}}{SE(\widehat{\beta_0})} = \frac{-0,304}{\sqrt{0,2565}} = -0,600$$

نقارنها مع قيمة t الجدولية $t_{23;0,025} = 2,069$

لدينا $|2,069| > |-0,601|$ ومنه نقبل H_0

$$wr: \ H_0: \beta_1 = 0 \ ; \quad H_1: \beta_1 < 0 \quad \propto = 5\%$$
$$t_{\widehat{\beta_1}} = \frac{\widehat{\beta_1}}{SE(\widehat{\beta_1})} = \frac{-0,143}{\sqrt{0,0046}} = -2,108$$
$$t_{23;0,05} = 1,714$$

وبما أن $|-2,108| > |1,714|$ فإننا نرفض H_0

$$gdp: \quad H_0: \beta_2 = 0 \quad ; \quad H_1: \beta_2 > 0 \quad \propto = 5\%$$

$$t_{\widehat{\beta_2}} = \frac{\widehat{\beta_2}}{SE(\widehat{\beta_2})} = \frac{0,734}{\sqrt{0,0081}} = 8,156$$

$$t_{23;0,05} = 1,714$$

وبما أن $8,156 > 1,714$ فإننا نرفض H_0

$$nis: \quad H_0: \beta_3 = 0 \quad ; \quad H_1: \beta_3 < 0 \quad \propto = 5\%$$

$$t_{\widehat{\beta_3}} = \frac{\widehat{\beta_3}}{SE(\widehat{\beta_3})} = \frac{0,0003}{\sqrt{0,0005}} = 0,013$$

$$t_{23;0,05} = 1,714$$

وبما أن $0,013 > -1,714$ فإننا نقبل H_0

ث–اختبار المعنوية الكلية للنموذج:

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0 \ ;$$
$$H_1: at\ least\ one\ of\ the\ \beta \neq 0$$

قيمة F المحسوبة:

$$F_c = \frac{R^2/(k-1)}{(1-R^2)/(n-k)} = \frac{0,917/3}{(1-0,917)/(23)} = 84,703 \ > F_{23}^{3} = 3,03$$

ومنه نرفض H_0

2– نختبر وجود مشكلة الارتباط الذاتي بالاعتماد على إحصائية Durbin–Watson .

لدينا القيمة الجدولية الدنيا $d_L = 1,162$ والقيمة المحسوبة هي $DW = 0,742$

وبما أن $DW < d_L$ فإنه توجد مشكلة ارتباط ذاتي موجب.

3– بما أنه توجد مشكلة ارتباط ذاتي موجب، فإنه يجب إعادة النظر في نتائج السؤال الأول. لأنه بوجود مشكلة الارتباط الذاتي تكون مقدرات النموذج غير كفؤة، وتبايناتها تكون متحيزة. وبالتالي اختبارات المعنوية الإحصائية تصبح غير مجدية.

تمارين مقترحة للفصل الرابع:

التمرين الأول:

- ما المقصود بمشكلة الارتباط الذاتي للأخطاء The Problem of Autocorrelation؟، وما هي أسباب ظهوره؟
- إذا كانت لدينا عينة مكونة من 50 مشاهدة و4 متغيرات مفسرة. ما رأيك في وجود أو عدم وجود ارتباط ذاتي في البيانات إذا كان:

a- DW=1.05
b- DW=1.40
c- DW=2.50
d- DW=3.97

<u>التمرين الثاني</u>:

1- إذا كان المتغير العشوائي (Y) يرتبط بالمتغير المستقل (X) وفق نموذج الانحدار التالي: $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + U_t$

$E(U_t) = 0$ ، $Var(U_t) = \sigma^2$

ووجد أن الخطأ العشوائي (U_t) يتبع الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى بمقدار $\hat{\rho}$.

أ- فما أسباب ظهور الارتباط الذاتي بين متغيرات الخطأ العشوائي؟

ب- وضح بيانياً الارتباط الذاتي الموجب والسالب، ولماذا يعتبر الارتباط الذاتي مشكلة تستوجب العلاج في الدراسات القياسية؟.

ت-اشرح الخطوات اللازمة لمعالجة أثر الارتباط الذاتي عند تقدير معالم النموذج.

2- إذا كانت الدالة المقدرة باستخدام طريقة (OLS) هي:

$$\hat{Y}_t = 6.65 + 2.75 X_t$$

وأعطيت النتائج الآتية:

$$\sum \left(\hat{e}_t - \hat{e}_{t-1}\right)^2 = 168.375 \text{ ، } \sum \hat{e}_t^2 = 204.6$$

- اختبر وجود ارتباط ذاتي عند مستوى معنوية 5% علماً أن قيمة d_L=1.08 و d_U=1.36 ، وما القيمة التقديرية لمعامل الارتباط الذاتي؟

<u>التمرين الثالث</u>: اليك النموذج المقدر التالي:

$$(Y_t - 0.94Y_{t-1}) = 1.7152 + 0.72(X_t - 0.94X_{t-1}) + u$$
$$se = (1.1069) \quad (0.1569)$$
$$d = 1.58 \quad n = 20 \quad R^2 = 0.42$$

- حدد معلمة الارتباط الذاتي في النموذج المقدر؟
- هل يوجد بها ارتباط ذاتي؟

<u>التمرين الرابع</u>: إذا كانت دالة الادخار المقدرة متمثلة في النموذج المقدر التالي:

$$\widehat{Y}_t = 330 + 0.122X_t$$
$$se = (1.1069) \quad (0.1569)$$
$$\sum \hat{e}_t\hat{e}_{t-1} = 1620 \quad \sum \hat{e}^2{}_t = 1930 \quad n = 31 \quad R^2 = 0.69$$

- أوجد مجال الثقة لكل من $\hat{\beta}_1$,$\hat{\beta}_0$ بدرجة ثقة 95%'، فسر النتائج.
- اختبر وجود الارتباط الذاتي $\alpha = 0.05$، في حالة وجوده ما سبل معالجته؟

الفصل الخامس: عدم ثبات تباين حد الخطأ

5-1- طبيعة عدم ثبات التباين

5-2- أسباب عدم ثبات التباين

5-3- أثار عدم ثبات التباين

5-4- اختبار عدم ثبات التباين

5-5- معالجة عدم ثبات التباين

من بين افتراضات نموذج الانحدار الخطي هو ثبات تباين الخطأ u_i (Homoscedasticity)؛ أي يكون لجميع الأخطاء نفس قيمة التباين. وعدم تحقق هذا الفرض يؤدي الى حدوث مشكلة عدم ثبات التباين للخطأ (Heteroscedasticity) مما يدل على أن الأخطاء ليس لها نفس قيمة التباين.

1- طبيعة مشكلة عدم ثبات التباين

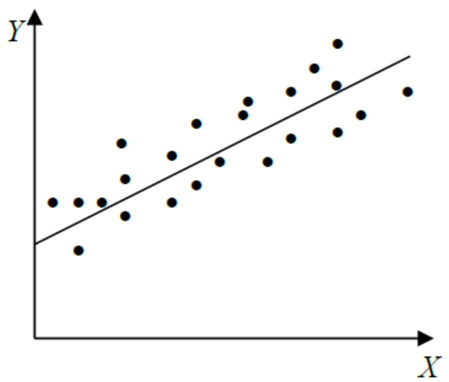
كما ذكرنا في الفصل الثاني أن أحد افتراضات نموذج الانحدار الخطي هو ثبات التباين لحد الخطأ u_i وهو أن يكون تباين u_i عند كل قيم المتغير المستقل مقدار ثابت يساوي σ^2.

$$E(u_i^2) = \sigma^2 \qquad i = 1,2,\dots,n \qquad \dots(5-1)$$

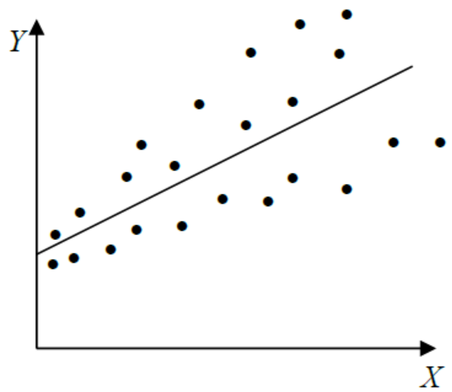
تظهر مشكلة عدم ثبات التباين (عدم تجانس) أساسا في البيانات المقطعية[8] (cross–section)؛ فمثلا تباين الخطأ الخاص بالإنفاق لعائلات الدخل المنخفض عادة ما يكون أصغر مقارنة بالعائلات ذات الدخل المرتفع؛ لأن معظم إنفاق الأسر ذات الدخل المنخفض يكون على الضروريات مما يترك مجالا ضيقا لحرية الاختيار. فتباين الأخطاء يتغير مع تغير قيم المتغير المستقل سواء في نفس الاتجاه أو الاتجاه العكسي.

يمكن توضيح مشكلة عدم ثبات تباين الأخطاء بيانيا في الشكل التالي:

الشكل رقم (1-5): ثبات وعدم ثبات التباين لحد الخطأ u_i



(أ) ثبات التباين



(ب): عدم ثبات التباين

يتضح من خلال الشكل رقم (1-5) الجزء (ب) حالة عدم ثبات التباين $E(u_i^2) \neq \sigma^2 \qquad i = 1,2,\dots,n$ في نموذج الانحدار أن زيادة قيم المتغير المستقل X سوف تؤدي إلى زيادة تباين حد الخطأ u_i؛ أي أن تباين حد الخطأ يعتمد على قيم X.

[8] إبراهيم سليمان وآخرون، **مقدمة في الاقتصاد القياسي**، مرجع سابق، ص228.

2- أسباب عدم ثبات التباين

هناك عد أسباب تجعل تباين حد الخطأ u_i متغيراً وغير ثابتاً منها:

- زيادة تعلم الأفراد: إذا زاد تعلم الأفراد فإن الأخطاء التي تترتب على سلوكهم الشخصي سوف تقل مع الزمن، وعليه فإن تباين حد الخطأ سوف ينخفض.
- زيادة الدخل للأفراد: كلما يزداد الدخل يزداد تنوع صرف الدخل، ويكون هناك مجالات أوسع للإنفاق، وبالتالي من المتوقع أن تزداد σ_i^2 مع زيادة الدخل.
- تحسن أساليب جمع البيانات: كلما تقدمت وسائل جمع البيانات والمعلومات؛ أي زادت جودة أسلوب جمع البيانات كلما قلّ تباين حد الخطأ σ_i^2 ، فمثلا إذا توفر لدى بعض البنوك تقنيات خاصة بالبيانات الدقيقة والمعقدة سوف تكون الأخطاء قليلة، وهذا لا يتوفر في البنوك الاخرى التي ليس بها تلك التقنيات الحديثة.
- وجود قيم شاذة في البيانات: فالقيمة الشاذة التي تعتبر مشاهدة مختلفة بشكل ملحوظ عن باقي المشاهدات، ولعل وجود أو حذف هذه المشاهدة من البيانات خصوصاً إذا كان حجم العينة صغيراً من الممكن أن يؤثر بشكل كبير على نتائج تحليل الانحدار.

3- آثار مشكلة عدم ثبات التباين

إذا تم تقدير نموذج الانحدار بطريقة المربعات الصغرى العادية OLS مع وجود مشكلة عدم ثبات تباين حد الخطأ فإن:

- مقدارات نموذج الانحدار تظل غير متحيزة ومتسقة ولكنها غير كفؤة؛ أي ليس لها أقل تباين سواء في حالة العينات الصغيرة أو الكبيرة.
- الأخطاء المعيارية للمقدرات تكون متحيزة، مما يؤدي الى الحصول على نتائج مضللة فيما يتعلق باختبارات الفروض أو تقديرات فترات الثقة. في هذه الحالة تكون الأخطاء المعيارية لـ

$\hat{\beta}_i$ مقدرة بأقل من قيمتها الحقيقية مما يجعل قيم اختبار (t) أكبر من قيمتها الحقيقية، وبالتالي يزيد احتمال الوقوع في خطأ من النوع الأول والذي يترتب عليه رفض فرضية العدم وهي صحيحة.

- التنبؤ باستخدام نتائج التقدير سوف يكون غير ممكناً؛ لأن المقدرات أصبحت لا تتمتع بخاصية الأقل تبايناً.

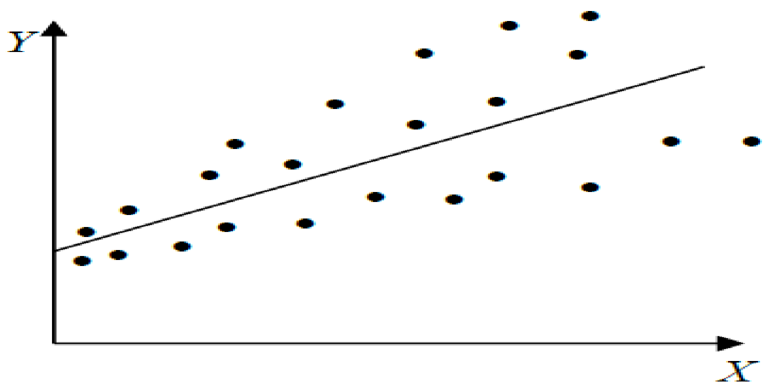
4- اختبارات الكشف عن عدم ثبات التباين

هناك عدة طرق للكشف عن عدم ثبات تباين حد الخطأ العشوائي u_i. نكر منها:

4-1- طبيعة البيانات: في حالة البيانات المقطعية والتي تمثل وحدات غير متجانسة فإن اختلاف التباين يكون أكثر احتمالا من ثباته. فعند دراسة نفقات الاسر، نجد أن الأسر تختلف من الدخل والادخار فمن الطبيعي أن نتوقع عدم ثبات التباين في توزيع الانفاق عند مستويات مختلفة من الدخل.

4-2- الطريقة البيانية: يمكننا معرفة ثبات أو عدم ثبات التباين لحد الخطأ العشوائي u_i من خلال شكل البيانات (Y,X)، فإذا أخذت النقاط بالابتعاد عن الخط المستقيم الذي يمثل تقدير نموذج الانحدار، فإن ذلك يدل على عدم ثبات (تجانس) التباين، كما يوضحه الشكل التالي:

الشكل رقم (2−5): عدم ثبات تباين حد الخطأ u_i في نموذج الانحدار البسيط



من خلال الشكل يتضح أن البواقي $(u_1 < u_2 < u_3 < \cdots < u_i)$ مما يعني أن تباين الأخطاء العشوائية غير ثابت، وأن قيمته ترتفع مع ارتفاع قيمة المتغير المستقل X.

4−3− اختبار بارك The Park Test

يعتمد هذا الاختبار على افتراض أن σ_i^2 دالة ما في المتغير المستقل X، واقترح الشكل التالي:

$$\sigma_i^2 = \sigma^2 X_i^{\beta} e^{v_i} \;\dots..(5-1)$$

وبأخذ اللوغاريتم لطرفي المعادلة (1−5) نحصل على:

$$ln\sigma_i^2 = ln\sigma^2 + \beta lnX_i + v_i \;\dots.(5-2)$$

بما أن σ_i^2 غير معلومة، فإن بارك (Park) اقترح استخدام $\hat{u}_i^2$ كبديل، وقام بالانحدار التالي:

$$\begin{aligned} lnu_i^2 &= ln\sigma^2 + \beta lnX_i + v_i \\ &= \alpha + \beta lnX_i + v_i \end{aligned} \;\dots.(5-3)$$

إذا كانت β معنوية احصائياً، فإن ذلك يعني وجود عدم ثبات التباين، أي نرفض الفرضية

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 \dots. = \sigma_n^2$$

وقد بينت بعض الدراسات[9] أن هناك بعض المشاكل في تطبيق اختبار Park؛ إذ ذكرا كل من Goldfeld و Quandt أن حد الخطأ v_i من المعادلة (3−5) قد لا يستوفي شروط طريقة المربعات الصغرى العادية OLS وبالتالي قد يكون هو نفسه غير ثابت التباين، وهو ما يعقد المشكلة.

[9] Stephen Goldfeld and Richard E Quandt, **Nonlinear Methods in Econometrics**, North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1972,p94.

مثال:

لتكن لديك البيانات التالية والمتعلقة بالدخل (X) والادخار (Y).

X_1 الدخل	Y_i الادخار
2262	270
2574	330
2834	420
3900	510
4810	570
5460	660
6500	900
7020	1050

المطلوب: اختبار عدم ثبات التباين باستخدام اختبار Park .

- إيجاد تقدير معادلة انحدار الادخار على الدخل .

كانت معادلة الانحدار المقدرة هي:

$$\hat{Y}_i = 57.454 + 0.146X_i$$

- إيجاد معادلة انحدار لوغاريتم مربعات الأخطاء على لوغاريتم المتغير المستقل " الدخل (X) " باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية وكانت معادلة الانحدار المقدرة كالتالي:

$$lnu_i^2 = \alpha + \beta lnX_i + v_i$$

$$lnu_i^2 = 7.932 + 2.913lnX_i$$

$H_0: \beta = 0$ (فرضية العدم) ثبات تباين الأخطاء

عدم ثبات تباين الأخطاء $H_0: \beta \neq 0$ (الفرضية البديلة)

إيجاد القيمة المحسوبة لاختبار t بالنسبة لـ $\hat{\beta}$ كما يلي:

$$t_c = \frac{\hat{\beta} - \beta}{se_{\hat{\beta}}} = \frac{2.913 - 0}{2.552} = 1.141 < t_{(6;0.025)} = 2.447$$

نلاحظ أن t المحسوبة أقل من القيمة المجدولة، وبالتالي يتم قبول الفرض الصفري ويدل هذا على عدم وجود مشكلة عدم ثبات تباين الخطأ u_i.

4-3- اختبار Goldfeld-Quandt

يعتبر هذا الاختبار الأكثر استعمالاً في مجال القياس الاقتصادي؛ إذ يعتمد هذا الاختبار على الخطوات التالية:

أ- ترتيب المشاهدات وفقا لقيم X تصاعدياً.

ب- حذف المشاهدات المركزية c، حيث c يتم تحديدها مسبقاً، وتقسيم المشاهدات (n-c) الى مجموعتين؛ وذلك بهدف عزل المشاهدات ذات التباين المنخفض عن المشاهدات ذات التباين المرتفع.

ت- تقدير انحدار خاص بالمجموعة الأولى باستخدام OLS وكذلك انحدار خاص بالمجموعة الثانية، ويتم الحصول على مجموع مربعات البواقي RSS_1 و RSS_2 للمجموعة الأولى والثانية على الترتيب، ويكون لكل منهما درجات حرية تساوي $(\frac{n-c}{2} - k)$ حيث k عدد المعالم المقدرة.

ث- حساب النسبة F $$F = \frac{RSS_1 / (\frac{n-c}{2} - k)}{RSS_2 / (\frac{n-c}{2} - k)} \sim F_{(\frac{n-c}{2} - k),(\frac{n-c}{2} - k)}$$

فإذا كانت قيمة F المحسوبة أكبر من القيمة الجدولية عند مستوى معنوية معين ودرجتي حرية $(\frac{n-c}{2} - k)$ و $(\frac{n-c}{2} - k)$؛ فإن ذلك يدل على عدم ثبات التباين لحد الخطأ u_i

مثال: لديك البيانات التالية التي تبين الإنفاق الاستهلاكي (Y) والدخل القابل للتصرف (X) في اقتصاد إحدى الدول للفترة (1983-1994).

Y_i	X_1	السنوات
26.1	38.3	1983
29.3	43.5	1984
35.6	53.5	1985
39.4	60.8	1986
42.7	66.4	1987
46.3	71.2	1988
50.1	77.2	1989
54.5	86.1	1990
60.1	94.6	1991
64.9	102.4	1992
69.2	109.9	1993
73.1	115.6	1994

المطلوب: اختبار عدم ثبات التباين باستخدام اختبار **Goldfeld Quandt**

أ- نلاحظ أن البيانات الخاصة بالمتغير المستقل (X) مرتبة تصاعديا.

ب- نقوم بحذف 1/5 المشاهدات أي: 12*1/5=2.5 مشاهدة، أي تحذف المشاهدتين الخاصتين بسنتي 1988 و 1989 لكي تقسم البيانات إلى مجموعتين جزئيتين تضم كلا من "05 " مشاهدات وذلك على الشكل التالي:

المجموعة الأولى من سنة: 1983-1987:

X_i	Y_i	$= (X_t - \bar{X})$	$y_i = (Y_t - \bar{Y})$	$x_i y_i$	x_i^2
38.3	**26.1**	**-14.2**	**-8.52**	**120.984**	**201.64**
43.5	**29.3**	**-9**	**-5.32**	**47.88**	**81**
53.5	**35.6**	**1**	**0.98**	**0.98**	**1**
60.8	**39.4**	**8.3**	**4.78**	**39.674**	**68.89**
66.4	**42.7**	**13.9**	**8.08**	**112.312**	**193.21**
$= 262.5$ $\bar{X} = 52.5$	$\sum Y_i = 173.1$ $\bar{Y} = 34.62$	$X_i - \bar{X}) = 0$ $\sum(x_i) = 0$	$\sum(Y_i - \bar{Y}) = 0$ $\sum(y_i) = 0$	$x_i y_i) = 321.83$	$x_i^2 = 545.74$

e_i	$e^2{}_1$	$\hat{Y}$
-0.146075	**0.0213379**	**26.24**
-0.012583	**0.0001583**	**29.31**
0.390287	**0.1523239**	**35.20**
-0.114618	**0.0131372**	**39.51**
-0.117011	**0.0136915**	**42.81**
0 $\sum =$	$\sum =$ **0.2006488**	**173.1** $\sum$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_i x_i y_i}{\sum_i x_i^2}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{321.83}{545.74} = 0.58$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} = 34.62 - 0.58 * 52.5 = 3.66$$

$$\hat{Y}_i = 3.66 + 0.58 X_i$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum u_i^{\ 2}}{n-k} = \frac{0.2006}{5-2} = 0.0668$$

المجموعة الثانية من سنة: 1990–1994:

X_i	Y_i	$= (X_t - \overline{X})$	$y_i = (Y_t - \overline{Y})$	$x_i y_i$	x_i^2
86.19 4.6	**54.4**	**−15.62**	**−9.86**	**154.01**	**243.98**
102.4	**60.1**	**−7.12**	**−4.26**	**30.33**	**50.69**
109.9	**64.9**	**0.68**	**0.54**	**0.36**	**0.64**
115.6	**69.2**	**8.18**	**4.84**	**39.59**	**66.91**
	73.1	**13.88**	**8.74**	**121.31**	**192.65**
$= 508.6$ $= 101.72$	$\sum Y_i = 321.8$ $\overline{Y} = 64.36$	$X_i - \overline{X}) = 0$ $\sum (x_i) = 0$	$\sum (Y_i - \overline{Y}) = 0$ $\sum (y_i) = 0$	$x_i y_i) = 354.61$	$x_i^2 = 554.70$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_i x_i y_i}{\sum_i x_i^2}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{354.61}{554.70} = 0.62$$

$$\hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{X} = 64.36 - 0.62 * 101.72 = 0.98$$

$$\hat{Y}_i = 0.98 + 0.62 X_i$$

إيجاد $ESS = \sum u_i^2$:

لدينا : $\sum_i y_i^2 = \sum_i \hat{y}_y^2 + \sum_i e_i^2$

$$SST = \sum (Y_i - \overline{Y})^2 = 215.47$$

$$SCT = \sum_i y_i^2 = 215.47$$

$$RSS = \sum \left(\hat{Y}_i - \overline{Y}\right)^2 = \hat{\beta}_1 \sum x_i y_i = 215.331$$

$$ESS = \sum u_i^2 = 0.13$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum u_i^2}{n-k} = \frac{0.13}{5-2} = 0.045$$

تؤخذ نسبة مجموع مربعات البواقي في الانحدار الثاني إلى مجموع مربعات البواقي في الانحدار الأول وذلك للحصول على القيمة المحسوبة للإحصاء

$$F = \frac{RSS_1 \Big/ (\frac{n-c}{2} - k)}{RSS_2 \Big/ (\frac{n-c}{2} - k)} = \frac{0.045}{0.066} = 0.6739 \sim F_{(\frac{n-c}{2}-k),(\frac{n-c}{2}-k)}$$

- إيجاد القيمة الجدولية لإحصائية $F_t = F_{(n1-k,n2-k)} = F_{(3,3)} = 9.28$.
- نلاحظ أن F المحسوبة أقل من F الجدولية، وبالتالي قبول H_0 والتي تنص على ثبات تباين الأخطاء.

4-4- اختبار معامل ارتباط الرتب لـ Spearman

يعتمد هذا الاختبار على احتساب القيمة المطلقة للبواقي $|\hat{u}_i|$ ، ثم يتم ترتيبها تصاعديا او تنازليا مع قيم المتغير المستقل X أو Y، ويتم حساب معامل ارتباط الرتب لـ **Spearman** وفق الصيغة التالية: $r_s = 1 - 6\left[\frac{\sum d_i^2}{n(n^2-1)}\right]$ حيث d فرق الرتب بين مشاهدات المفردة i (X_i, u_i)، n: عدد المشاهدات المرتبة.

نقوم باختبار معنوية معامل ارتباط الرتب باستخدام إحصائية t التالية:

$$t = \frac{r_s\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \sim t_{(n-2)} \dots . (5-5)$$

فإذا كانت قيمة t المحسوبة أكبر من الجدولية بدرجة حرية (n-2) فإن ذلك يدل على عدم ثبات التباين.

4-5- اختبار Breusch – Pagan–Godfrey

ذكرنا أن اختبار **Goldfeld–Quandt** يعتمد على قيمة c (عدد المشاهدات المركزية التي يتم حذفها) وعلى التعريف السليم للمتغير X الذي يتم ترتيب المشاهدات وفقاً له، هذه القيود يمكن تجنبها باستخدام اختبار **Breusch – Pagan–Godfrey** وهو اختبار يعتمد على حساب مقدر تباين حد الخطأ بطريقة الإمكان الأعظم، ويلخص في الخطوات التالية:

- يتم تقدير معادلة الانحدار باستخدام طريقة المربعات الصغرى OLS للحصول على البواقي $\hat{u}_i$.
- حساب $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum \hat{u}_i^2}{n}$ وهو تقدير لـ σ^2 بطريقة الإمكان الأعظم.
- تكوين المتغير P_i حيث: $P_i = \frac{\hat{u}_i^2}{\hat{\sigma}^2}$
- نقوم بانحدار المتغير P_i على X_i ، فمثلاً $P_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + v_i$
- نحصل على مجموع مربعات الانحدار $\mathrm{ESS} = \sum(\hat{P}_i - \bar{P})^2$، ثم نحيب القيمة θ التالية:

$$\theta = \frac{1}{2}(ESS)$$

بافتراض أن u_i يتبع التوزيع الطبيعي، وحجم العينة كبير، فإنه يمكن اثبات أن θ تتبع توزيع كاي تربيع بدرجات حرية $(n-1)$

$$\theta = \frac{1}{2}(ESS) \sim x^2_{(n-1)} \ldots (5-6)$$

إذا كانت قيمة θ المحسوبة أكبر من قيمة $x^2_{(n-1)}$ عند مستوى معنوية ما، فإننا نرفض فرضية ثبات التباين $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 .... = \sigma_n^2$.

4-6- اختبار *White*

لاختبار ثبات التباين لحد الخطأ العشوائي باستخدام الاختبار العام لـ *White* نقوم باتباع

الخطوات التالية:

- تقدير نموذج الانحدار $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + u_i$ والحصول على البواقي $\hat{u}_i$
- نقوم بإجراء انحدار مربعات البواقي على المتغيرات المستقلة ومربعاتها وحاصل ضربها.

$$\hat{u}_i^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{1i} + \alpha_2 X_{2i} + \alpha_3 X_{1i}^2 + \alpha_4 {X_{2i}}^2 + \alpha_5 X_{1i} X_{2i} + v_i$$

- يحسب معامل التحديد للانحدار المسـاعد والذي يسمى R_W^2
- نقوم بحساب القيمة المحسوبة للاختبار والتي تساوي $nR_W^2 \sim \chi_p^2$.....(5 – 4) حيث *n* عدد المشاهدات في انحدار White.

إذا كان النموذج يمتلك ثبات التباين معنى ذلك ليس هناك تأثير من المتغيرات *X* على التباين $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5$ وإذا لم يكن هناك تأثير من ناحية متغيرات *X* على التباين نتوقع جميع المتغيرات *X* لا تلعب أي دور أو تؤدي دورا ضعيف جدا في تفسير التباين الذي يحصل عليه من *u*.

نفس المنطق السابق، إذا كانت قيمة كاي التربيعية التي حصلنا عليها من (4–5) أكبر من القيمة الجدولية عند مستوى معنوية محدد، فإننا نستنتج نرفض فرضية ثبات التباين.

مثال:

في دراسة علاقة الاستثمار الأجنبي المباشر بالتضخم خلال الفترة الممتدة من1990 الى غاية 2013 . لاختبار عدم ثبات التباين باستخدام اختبار *White* نتبع الخطوات التالية:

* تقدير النموذج الخطي البسيط بطريقة المربعات الصغرى العادية

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$$

ثم حساب مربعات البواقي e_t^2.

* أعطت نتائج التقدير باستخدام برمجية *Eviews* النتائج التالية:

$$IDE_i = 3.91 - 0.11 INF_i$$

- يعتمد اختبار *White* بالدرجة الأولى على تقدير انحدار مساعد $e^2{}_i$ من ناحية والمتغيرات التفسيرية، وفي دراستنا هذه تتمثل في: (IDE و INF) من ناحية أخرى أي:

تقدير الصيغة التالية:

$$e_t^2 = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 IDE + \ddot{\beta}_2 INF + \hat{\beta}_3 IDE^2 + \hat{\beta}_4 INF^2 + \hat{\beta}_5 IDE * INF + \varepsilon$$

- ووفقا لهذا الاختبار نتحصل على تقدير النموذج التالي:

$$e_t^2 = 11.87 + 9.86IDE + 1.79INF + 0.04IDE^2 + 0.61INF^2 + 0.86IDE * INF + W$$

ولدينا: $wh = nR^2 = 26 * 0.21 = 5.46$

حيث: n عدد المشاهدات المستعملة في النموذج.

و لدينا: $\chi^2(k-1)$ أي : $\chi^2(4) = 9.488$ عند مستوى معنوية 5 % .

- إذن : $\chi^2(4) \succ wh$ وبهذا نقبل فرضية العدم التي تنص على ثبات التباين لحد الخطأ.

هناك العديد من الاختبارات الخاصة بعدم ثبات التباين- لم نذكرها- وكل منها يعتمد على افتراضات معينة.

5- معالجة مشكلة عدم ثبات التباين

كما ذكرنا أن عدم ثبات (اختلاف) التباين لحد الخطأ u_i لا يؤثر على خاصية عدم التحيز وخاصية الاتساق لمقدرات طريقة OLS، بل يؤثر على خاصية الكفاءة، وهو ما يؤثر على اختبار الفروض الأساسية، مما يستدعي ضرورة معالجة مشكلة عدم ثبات التباين.

نميز حالتين لمعالجة عدم ثبات التباين وهما:

- **الحالة الأولى: عندما تكون σ_i^2 معلومة:**

نفترض تقدير معادلة الانحدار الخطي البسيط التالي:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i \dots (5-7)$$

إذا علمنا باستخدام أحد الاختبارات السابقة أن هناك مشكلة عدم ثبات (تجانس) التباين، وفي الوقت نفسه علمنا قيمة التباين σ_i^2 ، في هذه الحالة يتم تحويل المعادلة (7-5) بقسمة طرفيها على الانحراف المعياري σ_i لنحصل على:

$$\begin{aligned} \frac{Y_i}{\sigma_i} &= \frac{\alpha}{\sigma_i} + \frac{\beta X_i}{\sigma_i} + \frac{u_i}{\sigma_i} \\ \frac{Y_i}{\sigma_i} &= \alpha\left(\frac{1}{\sigma_i}\right) + \beta\left(\frac{X_i}{\sigma_i}\right) + v_i \end{aligned} \quad \dots\dots (5-8)$$

حيث ترمز v_i للخطأ العشوائي الجديد. بتقدير هذه المعادلة نحصل على ما يسمى بمعادلة الانحدار المرجحة $\frac{\widehat{Y_i}}{\sigma_i} = \hat{\alpha}\left(\frac{1}{\sigma_i}\right) + \hat{\beta}\left(\frac{X_i}{\sigma_i}\right) \dots (5-9)$ ..نلاحظ أن هذه المعادلة لا تتضمن الجزء الثابت، كما تتضمن متغيران مستقلان $\frac{1}{\sigma_i}$ و $\frac{X_i}{\sigma_i}$ ، ونشير أنه يتم تفسير معامل التحديد R^2 في هذه بطريقة تختلف عن الحالة العادية.

- **الحالة الثانية: عندما تكون σ_i^2 غير معلومة:**

في غالب تكون قيمة التباين σ_i^2 غير معلومة، ونفترض تقدير معادلة الانحدار الخطي البسيط التالي:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i \dots (5-10)$$

هناك عدة افتراضات[10] لعدم ثبات تباين حد الخطأ، ويختلف النموذج من افتراض الى آخر.

- **الافتراض الأول: نفترض** أن $E(u_i^2) = \sigma^2 X_i^2$ يتم تحويل النموذج الأصلي (5−10) الى الشكل التالي:

$$\frac{Y_i}{X_i} = \frac{\alpha}{X_i} + \frac{\beta X_i}{X_i} + \frac{u_i}{X_i} \dots . (5-11)$$

$$\frac{Y_i}{X_i} = \alpha\left(\frac{1}{X_i}\right) + \beta + v_i \dots . (5-12)$$

حيث ترمز v_i للخطأ العشوائي المحول $\left(\frac{u_i}{X_i}\right)$ وباجراء تقدير لنموذج الانحدار (5−12) نتحصل على نموذج لا يعاني من عدم ثبات (تجانس) تباين الأخطاء العشوائية.

$$\frac{\widehat{Y_i}}{X_i} = \hat{\beta} + \hat{\alpha}\left(\frac{1}{X_i}\right) \dots . (5-13)$$

يتضح أن الحد الثابت في النموذج المحول هو عبارة عن ميل معامل الانحدار في النموذج الأصلي، وميل الانحدار في النموذج الانحدار للنموذج المحول هو عبارة عن الحد الثابت في النموذج الأصلي.

- **الافتراض الثاني: ويمكن افتراض** لعدم ثبات تباين حد الخطأ الدالة التالية:

$$E(u_i^2) = \sigma_i^2 X_i$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{X} E(u^2)$$

أي أن التباين يساوي

$$\sigma = \frac{u}{X}$$

[10] GUJARATI. N. D, **Econométrie**, De Boeck, Bruxelles, 2004, p 422 .

ولتصحيح النموذج حسب هذه الدالة بهذا يمكن تقسيم النموذج بقيمة X حيث:

$$\frac{Y_i}{\sqrt{X_i}} = \frac{\alpha}{\sqrt{X_i}} + \beta\sqrt{X_i} + \frac{u_i}{\sqrt{X_i}}$$

ويساوي

$$\frac{Y_i}{\sqrt{X_i}} = \alpha\frac{1}{\sqrt{X_i}} + \beta\sqrt{X_i} + \upsilon_i$$

حيث تمثل υ المتغير العشوائي وتساوي u لأن يمكن إثبات افتراض ثبات التباين واستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية لتقدير α, β.

- **الافتراض الثالث:** يمكن ان يكون تباين الحد العشوائي يتناسب تربيعيا مع قيم المتغير التابع " Y_i " أي $E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2 Y_i^2$. وطبقا لهذا الافتراض يتم تحويل النموذج الأصلي بقسمة طرفي المعادلة على Y_i إلى الشكل التالي[11]:

$$\frac{Y_i}{Y_i} = \frac{\beta_0}{Y_i} + \beta_1\frac{X_i}{Y_i} + \frac{\varepsilon_i}{Y_i} = \beta_0\frac{1}{Y_i} + \beta_1\frac{X_i}{Y_i} + \varphi$$

ويلاحظ أن الحد العشوائي الجديد في النموذج المحول يستوفي فرض ثبات التباين:

$$V(\varepsilon^*) = E(\varepsilon^*_i)^2 = E\left(\frac{\varepsilon_i}{Y_i}\right)^2 = \frac{E(\varepsilon_i)^2}{Y_i^2} = \frac{\sigma^2 Y_i^2}{Y_i^2} = \sigma^2$$

أي أن تباين النموذج المصحح ثابت ويمكن تطبيق طريقة المربعات الصغرى العادية على النموذج المصحح.

- **الافتراض الرابع:** $E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2|e_i|$ ويقضي هذا الفرض أن تباين الحد العشوائي يتناسب خطيا مع القيم المشاهدة لأخطاء المربعات الصغرى العادية e_i وطبقا لهذا الافتراض يتم تحويل النموذج الأصلي بقسمة طرفي المعادلة على الجذر التربيعي للبواقي e_i كما يلي:

$$\frac{Y_i}{\sqrt{e_i}} = \frac{\beta_0}{\sqrt{e_i}} + \beta_1\frac{X}{\sqrt{e_i}} + \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{e_i}}$$

$$V(\varepsilon^*) = E(\varepsilon^*_i)^2 = E\left(\frac{\varepsilon_i}{\sqrt{e_i}}\right)^2 = \frac{E(\varepsilon_i)^2}{e_i} = \frac{\sigma^2|e_i|}{e_i} = \sigma^2$$

أي أن تباين النموذج المصحح ثابت ويمكن تطبيق طريقة المربعات الصغرى على النموذج المصحح.

- **الافتراض الخامس: يمكن التخلص من مشكلة عدم ثبات تباين حد الخطأ باستخدام التحويلات اللوغاريتمية**؛ إذ أن تحويل النموذج الأصلي الى الصيغة اللوغاريتمية المزدوجة سوف يؤدي

[11] حسام علي داود وخالد محمد السواعي، **الاقتصاد القياسي بين النظرية والتطبيق**، دار المسيرة، الأردن، 2013، ص298.

غالياً الى تقليل درجة عدم ثبات تباين حد الخطأ، وبالتالي يكون النموذج بعد التحويل بالشكل التالي:

$$lnY_i = \beta_0 + \beta_1 lnX_i + v_i \dots .(5-14)$$

مثال تطبيقي:

قمنا بتقدير دالة الإنتاج (Cobb–Douglas) لعشرين مؤسسة تعمل في صناعة معينة، وكانت النتائج كالتالي:

$$\widehat{q_i} = -16{,}907 + 0{,}332k_i + 2{,}777l_i$$
$$R^2 = 0{,}915 \quad DW = 2{,}032 \quad SSE = 0{,}461$$
$$Var(\hat{\beta}) = \begin{pmatrix} 4{,}939971 & & \\ 0{,}216639 & 0{,}031875 & \\ -0{,}857446 & -0{,}057229 & 0{,}16607 \end{pmatrix}$$

حيث:

$\widehat{q_i}$: القيمة المقدرة للوغاريتم الطبيعي لكمية الإنتاج (كمية الإنتاج بآلاف الأطنان)

k_i : اللوغاريتم الطبيعي لرأس المال (رأس المال بعدد ساعات تشغيل آلات الإنتاج).

l_i : اللوغاريتم الطبيعي للعمل (العمل بعدد الساعات).

SSE : مجموع مربعات البواقي.

i : مؤشر المؤسسة.

1- قيم المعنوية الإحصائية لنتائج التقدير عند مستوى معنوية 5% باعتبار أن جميع افتراضات النموذج الخطي الكلاسيكي محققة.

2- اختبر وجود مشكلة الارتباط الذاتي.

3- قمنا بتقدير معادلة انحدار مربعات البواقي $\widehat{u_i^2}$ على المتغيرين المستقلين في النموذج الأساسي السابق (k_i, l_i)، ومربعي هاذين المتغيرين (k_i^2, l_i^2)، وجدائهما $(k_i l_i)$ وحصلنا على ما يلي: $R^2 = 0{,}296041 \quad F = 1{,}77507 \ (p = 0{,}368382)$

أ- بناء على هذه المعلومات، ماهي المشكلة القياسية التي يمكنك البحث عن وجودها؟ وما هو الاختبار المناسب لذلك؟

ب-قم بإجراء هذا الاختبار وفسر النتائج المحصل عليها.

ج- ما أثر هذه المشكلة القياسية على مقدرات النموذج؟

تعطى قيم: $F_{17}^2 = 3{,}59$; $t_{17;0,05} = 1{,}740$; $d_U = 1{,}54$; $d_L = 1{,}10$

الحل:

1- ليكن النموذج الأصلي كالتالي:

$$q_t = \beta_0 + \beta_1 k_t + \beta_2 l_t + u_t$$

أ- اختبار المعنوية الفردية للمعلمات:

أولا:

$$k_t:\ \ H_0: \beta_1 = 0\ \ ;\ \ H_1: \beta_1 > 0 \quad \propto = 5\%$$

قيمة t المحسوبة: $t_{\widehat{\beta_1}} = \frac{\widehat{\beta_1}}{SE(\widehat{\beta_1})} = \frac{0,332}{\sqrt{0,031875}} = 1,860$

نقارنها مع قيمة t الجدولية $t_{17;0,05} = 1,740$

بما أن $1,860 > 1,740$ فإننا نرفض H_0 عند مستوى معنوية 5%

ثانيا:

$$l_t:\ \ H_0: \beta_2 = 0\ \ ;\ \ H_1: \beta_2 > 0 \quad \propto = 5\%$$

قيمة t المحسوبة: $t_{\widehat{\beta_2}} = \frac{\widehat{\beta_2}}{SE(\widehat{\beta_2})} = \frac{2,777}{\sqrt{0,16607}} = 6,814$

نقارنها مع قيمة t الجدولية $t_{17;0,05} = 1,740$

بما أن $6,814 > 1,740$ فإننا نرفض H_0 عند مستوى معنوية 5%

ب-اختبار المعنوية الكلية للنموذج:

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = 0\ ;$$
$$H_1: at\ least\ one\ of\ the\ \beta \neq 0$$

قيمة F المحسوبة:

$$F_c = \frac{R^2/(k-1)}{(1-R^2)/(n-k)} = \frac{0,915/2}{(1-0,915)/(20-3)} = 91,5\ > F_{17}^{2} = 3,59$$

ومنه نرفض H_0

2- نختبر وجود مشكلة الارتباط الذاتي بالاعتماد على إحصائية Durbin–Watson .

لدينا القيمتين الجدوليتين الدنيا والعليا على الترتيب $d_L = 1,10$ $d_U = 1,54$

والقيمة المحسوبة هي $DW = 2,032$

وبما أن $d_U < 2,032 < 4 - d_U$ فإنه لا توجد مشكلة الارتباط الذاتي.

-3

أ- المشكلة القياسية هي مشكلة عدم ثبات التباين *heteroscedasticity* ويمكن الكشف عليها باستعمال اختبار وايت *White's test* .

ب- لدينا $F = 1,77507$ و $p = 0,368382$

وبما أن $p > \propto$ فإننا لا نرفض H_0 أي أنه لا وجد مشكلة عدم ثبات التباين.

ج- في ظل وجود مشكلة عدم ثبات التباين، تبقى المقدرات غير متحيزة ولكنها لا تكون لها كفاءة في عملية التنبؤ. وبما أن التباينات تكون متحيزة، فإن اختبارات المعنوية وكذلك مجالات الثقة تكون غير صالحة.

تمارين مقترحة للفصل الخامس:

التمرين الأول: تبين البيانات في الجدول المرافق استهلاك النفط في 20 دولة.

أ- هل يوجد علاقه بين استهلاك النفط وعدد السكان؟.

ب- استخدم اختبار Park لاختبار عدم ثبات التباين لحد الخطأ.

ج- باعتبار ان هناك علاقة بين تباين النموذج وقيمة المتغير المستقل على الشكل التالي:

$$E(u^2) = \sigma^2 X$$

يطلب معالجة عدم ثبات التباين.

د- قم باستخدام الخطأ المعياري المصحح لـ White في انحدار بين استهلاك الطاقة وعدد السكان واختبار **Goldfeld-Quandt** وما هو الاستنتاج الذي تستخلصه من النتيجة؟

الجدول:

الدولة	عدد السكان	استهلاك الطاقة
1	1136	270
2	948	122
3	520	58
5	5750	821
5	953	98
6	3126	450
7	17567	1819
8	7427	1229
9	11879	1200
10	10772	1205
11	5482	650
12	11466	1198
13	9116	760
51	4745	460
51	4133	503
16	2906	371
17	4942	571
18	672	136
19	694	109
20	1589	203

الفصل السادس: مشكلة التعدد (الازدواج) الخطي

6-1- طبيعة مشكلة التعدد الخطي

6-2- مصادر وأسباب مشكلة التعدد الخطي

6-3- آثار مشكلة التعدد الخطي

6-4- اختبارات الكشف عن مشكلة التعدد الخطي

6-5- معالجة مشكلة التعدد الخطي

تنص فرضيات الانحدار الخطي على استقلال العلاقة بين المتغيرات المستقلة؛ أي $\mathrm{cov}(\mathrm{X_i};\mathrm{X_j})=0$، وعدم تحقق هذه الفرضية أي إذا ارتبطت المتغيرات المستقلة ببعضها البعض؛ فإن ذلك يدل على وجود ما يسمى بالتعدد (الازدواج) الخطي Multicollinearity. وهو ما سيتم توضيحه من خلال النقاط التالية:

1-طبيعة مشكلة التعدد الخطي:

التعدد الخطي يعني وجود ارتباط خطي تام بين بعض أو كل المتغيرات المستقلة في نموذج الانحدار. يوضح Frisch (1934) مفهوم التعدد الخطي بأنه المتغيرات التي تتعامل معها قد تكون واقعة تحت تأثير علاقتين أو أكثر. إذ يشير مصطلح الانحدار الخطي المتعدد إلى وجود ارتباط خطي بين عدد من المتغيرات التفسيرية في نموذج الانحدار. ويظهر في السلاسل الزمنية حيث التبعية الزمنية.

وبافتراض أن نموذج الانحدار المراد تقديره هو كما يلي:

$$Y_i=\beta_0+\beta_1X_{1i}+\beta_2X_{2i}+u_i \quad ,i=1,2,3,\dots,n$$

عند وجود علاقة ارتباط تام بين المتغيرين التفسيريين X_{1i},X_{2i} أو بين جميع المتغيرات التفسيرية المكونة للنموذج يصبح محدد المصفوفة $(X'X)$ يساوي صفرا؛ إذ يستحيل إيجاد معكوس المصفوفة $(X'X)$، وبالتالي عدم إمكانية استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية في الحصول على قيمة عددية لكل معامل على حده، أو أن يكون محدد المصفوفة $(X'X)$ قريبا من الصفر في حالة الارتباط غير التام الذي معه تضعف قدرة طريقة OLS، ومن ثم يمكن القول أن مشكلة التعدد الخطي تؤثر على دقة تقديرات معاملات الانحدار.

باستخدام معامل الارتباط r_{X1X2} نحدد إذا كان هناك ارتباط خطي متعدد.

$$r_{X1X2}=\frac{\sum\left(X_{1i}-\bar{X}_1\right)\left(X_{2i}-\bar{X}_2\right)}{\sqrt{\sum\left(X_{1i}-\bar{X}_1\right)}\sqrt{\sum\left(X_{2i}-\bar{X}_2.\right)}.}$$

- إذا كان معامل الارتباط $r_{X1X2}=0$ يساوي الصفر فانه ليس هناك مشكلة ارتباط خطي متعدد.
- إذا كان هناك ارتباط تام أي أن $r_{X1X2}=\pm1$ فنقول أن هناك ارتباط خطي متعدد تام، وعند حدوث الارتباط الخطي التام لا نستطيع إجراء التقدير باستخدام المربعات الصغرى العادية.

إذا كان هناك ارتباط تام أي أن معامل الارتباط بين أي زوج من المتغيرات التفسيرية $0\prec r_{X1X2}\prec1$ فنقول أن هناك ارتباط غير تام. هذه الحالة هي الحالة الشائعة في الحياة العملية.

2- مصادر وأسباب التعدد الخطي (الازدواج الخطي):

تنشأ مشكلة التعدد الخطي لعدة أسباب، نذكر منها:

- **اتجاه المتغيرات الاقتصادية معا للتغير مع مرور الزمن:** فبمرور الزمن سوف تزيد المتغيرات الاقتصادية معاً. فعلى سبيل المثال تزداد معظم المتغيرات الاقتصادية في أوقات الرواج والتوسع Expression فإن الدخل والاستهلاك والادخار والاستثمار والأسعار والعمالة تميل جميعها للنمو والزيادة.

والعكس في فترات الركود Recession فإن تلك المتغيرات تميل للانخفاض وعلى ذلك فإن عوامل النمو والاتجاه العام في السلاسل الزمنية من أهم وأخطر العوامل للتعدد الخطي.

- **استخدام متغيرات مستقلة ذات فترات ابطاء بنموذج الانحدار.** فالاستهلاك للفترة الحالية يتحدد بالدخل للفترة الحالية والدخل للفترة السابقة، وحيث هناك ارتباط بين القيم المتتالية لمتغير الدخل فإن التعدد الخطي سوف يتحقق. وبالتالي فإن التعدد الخطي غالباً ما يتحقق في نماذج فترات الابطاء المزعة.

- **أسلوب جمع البيانات:** فمثلاً أخذ عينة على قيم محدودة للمتغيرات المستقلة في المجتمع.

تجدر الإشارة إلى أن مكلة التعدد الخطي وإن كانت مرتبطة أكثر ببيانات السلاسل الزمنية إلا أنها ممكن أن تظهر في البيانات المقطعية Cross– Section فإذا أخذنا عينة لمؤسسات صناعية نجد أن المؤسسات الكبيرة بها كميات كبيرة من العمل ورأس المال يكون بينهما ارتباط قوي، بينما المؤسسات الصغيرة أو المتوسطة لا يتوفر بها سوى قليل من هذه العوامل للإنتاج.

3- آثار مشكلة التعدد الخطي[12]**:**

إذا كان هناك تعدد خطي تام، $r_{X1X2} = \pm 1$:

- فإن المعلمات المقدرة تكون غير محددة (يتعذر الحصول عليها).
- الأخطاء المعيارية للمعلمات المقدرة تؤول الى ما لا نهاية وبالتالي يصعب استخدام OLS.

إذا كان هناك تعدد خطي غير التام:

- تكون قيم المعلمات المقدرة غير مستقرة كلما أضفنا متغيرات مرتبطة خطياً أو كلما تم زيادة حجم العينة.
- قيم المعلمات المقدرة تبقى دائما غير متحيزة.

[12] تومي صالح، **مدخل لنظرية القياس الاقتصادي**، الجزء الأول، ديوان المطبوعات الجامعية، ط2، الجزائر، ص184.

– كبر الأخطاء المعيارية للمعلمات المقدرة في حالة التعدد الخطي يؤدي الى خطأ في التوصيف للنموذج.

– عدم كفاءة المعلمات المقدرة (تباينها يكون كبيراً)

– إشارات غير متوقعة للمعلمات المقدرة (غير متفقة مع النظرية)

– عدم معنوية اختبار الفروض الإحصائية رغم ارتفاع معامل التحديد.

– تصبح مقدرات وأخطائها المعيارية طريقة المربعات الصغرى حساسة Sensitive للتغيرات الطفيفة في البيانات.

4– اختبارات الكشف عن وجود مشكلة التعدد الخطي:

هناك عدة اختبارات لاكتشاف التعدد الخطي منها ما يلي:

4–1– طريقة تحليل Frisch:

يمكن تلخيص هذا التحليل في الخطوات التالية:

– إجراء انحدار للمتغير التابع على كل متغير مستقل على حده؛

– تقييم نتائج التقدير المتحصل عليها من حيث قيمة معامل التحديد R^2 والأخطاء المعيارية للقيم المقدرة لمعلمات الانحدار ؛

– اختيار الانحدار الأولي الذي يعطي أفضل النتائج في ضوء المعايير المستخدمة،

– اضافة متغيرات مفسرة واحد تلو الآخر (تدريجياً) ونختبر أثاره على الأخطاء المعيارية وعلىR^2، ويكون المتغير المضاف للانحدار ذا معنوية إذا تحققت فيه الشروط التالية[13]:

- إذا كان المتغير المستقل الجديد يحَسَّن من R^2 بدون أن يجعل المعالم الفردية مرفوضة بطريقة خاطئة، نحتفظ بهذا المتغير ونعتبره كمتغير مستقل.
- إذا كان المتغير المستقل المضاف لا يُحسّن من R^2 ولا يؤثر على قيم المعلمات المقدرة، فإن هذا المتغير يجب حذفه من النموذج.
- إذا كان المتغير المستقل المضاف يؤثر بشكل واضح على إشارات وقيم معلمات الانحدار لتكون قيم غير مقبولة اقتصادياً فإنه يمكننا القول بأن هذا المتغير هو السبب في وجود التعدد الخطي وبالتالي يجب حذفه.

4–2– اختبار Klein[14]:

يعتمد هذا الاختبار على مقارنة معاملات الارتباط الجزئية البسيطة بين المتغيرات المستقلة وعامل الارتباط المتعدد، وعلى ضوء هذا الاختبار

[13] وليد إسماعيل السيفو وآخرون، **مشاكل الاقتصاد القياسي التحليلي**، الأهلية للنشر والتوزيع، عمان، الاردن ، 2007، ص 101.

[14] كامل علاوي الفتلاوي، حسن لطيف الزبيدي، **القياس الاقتصادي: النظرية والتحليل**، ط1، دار صفاء للنشر، عمان، الأردن، 2010، ص173.

$H_0: \quad X_j$ متعامدة

$H_1: \quad X_j$ غيرمتعامدة

فإذا كان معامل الارتباط المتعدد أكبر من معاملات الارتباط البسيط بين المتغيرات المستقلة نقبل فرضية العدم ونرفض الفرض البديل ؛ أي أن المتغيرات المستقلة مستقلة.

3-4- طريقة Farrar–Glauber [15]:

من أهم الاختبارات للكشف عن مشكلة التعدد الخطي هو اختبار **(Farrar–Glauber)** ويستند هذا الاختبار على إحصائية (x^2) حيث يتم اختبار الفرضية التالية:

$H_0: \quad X_j Orthogonal$ متعامدة

$H_1: \quad X_j\ Not\ Orthogonal$ غيرمتعامدة

ويمكن التعبير عن إحصائية **Farrar–Glauber** بالصيغة التالية:

$$\chi^2 * = -\left[n-1-\frac{1}{6}(2k+5)\right].\ln D$$

حيث n هو حجم العينة، k هو عدد المتغيرات المفسرة في النموذج و ln هو اللوغاريتم النيبيري لمحدد مصفوفة معاملات الارتباط التالية :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & r_{X_1X_2} & r_{X_1X_3} & \dots & r_{X_1X_k} \\ r_{X_2X_1} & 1 & r_{X_2X_3} & \dots & r_{X_2X_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{X_kX_k} & r_{X_kX_2} & r_{X_kX_3} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

عندما تكون قيمة المحدد تقترب من الصفر، فإن هناك دليل على وجود تعدد خطي.

إذا كانت قيمة $\chi^2 *$ أكبر تماما من القيمة المجدولة لتوزيع χ^2 بدرجة حرية $\frac{1}{2}k(k-11)$ ونسبة معنوية α، نقبل H_1 أي هناك تعدد خطي.

وبعد ثبوت مشكلة التعدد الخطي بموجب الاختبار أعلاه، يستوجب تحديد أي متغير من المتغيرات المستقلة مرتبطة خطياً بحيث أدت إلى حدوث مشكلة التعدد الخطي، ويتم مثل هذا التشخيص من خلال اختبار F حيث تستخرج القيمة المحسوبة للاختبار المذكور أعلاه، بعد تقدير معامل التحديد المتعدد ما بين المتغير المستقل (X_j) وبقية المتغيرات المستقلة، وحسب الصيغة التالية [16]:

[15] أموري هادي كاظم الحسناوي، **مقدمة في القياس الاقتصادي**، دار زهران للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2009، ص214.

[16] نفس المرجع، ص 215.

$$F_c == \frac{R^2_{xj.x1.x2........XK}/k}{\left(1-R^2_{xj.x1.x2......XK}\right)/n-k-1} \sim F_\alpha(k,n-k-1)$$

وذلك لاختبار الفرضيات التالية:

$$H_0 : \mathrm{R}^2_{XJ.X1.X2.....XK} = 0$$

$$H_1 : \mathrm{R}^2_{XJ.X1.X2.....XK} \neq 0$$

نقارن قيمة F_c المحسوبة مع قيمة F_t النظرية بدرجتي حرية $(k,n-k-1)$ ومستوى معنوية α فاذا

كانت $F_{Tab} \rangle \left|F_{Cal}\right|$ ترفض H_0 أي أن المتغيرات التوضيحية مرتبطة مع بعضها وبعكسه ترفض الفرضية البديلة H_1 اي ان المتغيرات التوضيحية لا ترتبط مع بعضها ولا يشكل مصدر قلق لمشكلة التعدد الخطي، وبذلك يتم تشخيص كافة المتغيرات المرتبطة مع بقية المتغيرات التوضيحية.

ولغرض تحديد العوامل المسببة لحصول مثل هذه المشكلة للمتغيرات التوضيحية لذلك يجب إجراء اختبار ثالث وهو اختبار t الذي يعتمد على قيم معاملات الارتباط الجزئية ما بين كل اثنين من المتغيرات التوضيحية وبموجب الصيغة التالية[17] :

$$t_{ij} == \frac{r_{xixj.x1x2......xk}/\sqrt{n-k}}{\sqrt{\left(1-r^2_{xij.x1x2......xk}\right)}}$$

حيث أن : $r^2_{ij.}$ يمثل مربع معامل الارتباط الجزئي ما بين المتغيرين المستقلين (X_i و X_j)

باعتبار أن بقية المتغيرات المستقلة ثابتة.

حيث أن:

$$H_1 : \mathrm{r}_{Kij.X1X2......XK} \neq 0 \quad H_0 : \mathrm{r}_{Kij.X1X2......XK} = 0$$

نقارن القيمة المحسوبة t_c والقيمة الجدولية t_t بدرجة حرية $(n-k)$ ومستوى معنوية معين فإذا كانت

كانت $t_{Tab} \rangle \left|t_{Cal}\right|$ ترفض H_0 ، أي أن الارتباط الجزئي بين (X_i و X_j) معنوي، وبذلك يتم تشخيص بشكل نهائي المتغيرات التوضيحية التي تكون سبباً في حصول مشكلة التعدد الخطي.

مثال:

إذا كانت لدينا مصفوفة الارتباطات R التالية:

[17] حسين علي بخيت وسحر فتح الله، الاقتصاد القياسي، دار اليازوري، عمان الأردن، ص 250.

$$(R)=\begin{bmatrix} 1 & 0.8811 & 0.9366 \\ 0.8811 & 1 & 0.9866 \\ 0.9366 & 0.9866 & 1 \end{bmatrix}$$

$(n=15) \qquad (k=4)$

محدد الارتباط يصبح :

$$|R|=\left\|\begin{matrix} 1 & 0.8811 & 0.9366 \\ 0.8811 & 1 & 0.9866 \\ 0.9366 & 0.9866 & 1 \end{matrix}\right\| = 0.000969$$

نلاحظ أن قيمة المحدد تقترب من الصفر، فإن هناك دليل على وجود تعدد خطي.

$$\chi^2 * = -\left[n-1-\frac{1}{6}(2k+5)\right].\ln D$$

$$\chi^2 * = -\left[15-1-\frac{1}{6}(24+5)\right].\ln 0.000969$$

$$\chi^2 * = 52$$

نلاحظ أن قيمة χ^2 الجدولية بدرجات حرية 4*2/3=6 هي 16.8 وهي أصغر من χ^2 المحسوبة وعليه نستنتج أن هناك مشكلة التعدد الخطي.

5- معالجة مشكلة التعدد الخطي:

إن التعدد الخطي لا يعد اشكالا في وجوده بقدر ما يتمثل الاشكال في درجة التعدد الخطي، فإذا كانت درجة التعدد الخطي منخفضة فمكن الممكن قبول وجوده، أما إذا كانت درجة التعدد الخطي مرتفعة فيجب معالجته. وهناك عدة طرق للمعالجة منها ما يلي:

- التخلص من المتغير الذي يسبب مشكلة التعدد الخطي؛ بمعنى حذف المتغير غير المهم إذا ظهر تأثيره بسبب وجود مشكلة التعدد الخطي.
- توسيع حجم العينة – إن أمكن– من خلال إضافة بيانات كافية عن متغيرات الظاهرة المدروسة، لأنه يساعد على تخفيض حجم التباينات نظرا لوجود علاقة عكسية بين حجم العينة وقيمة التباين[18]. ويكون هذا صحيحاً إذا كان التعدد الخطي راجع أساساً الى أخطاء في القياس وكذلك في حالة وجود الارتباط بين بيانات العينة الأصلية دون بيانات المجتمع.
- الحصول على معلومات مسبقة في حالة توافرها.

[18] حسين علي بخيت وسحر فتح الله، مرجع سابق، ص 253.

– تجميع البيانات المقطعية والسلاسل الزمنية، وهي طريقة شائعة الاستخدام في الدراسات القياسية وتعتبر حالة خاصة من المربعات الصغرى المقيدة Restricted LS وتستخدم بكثرة في حالة قياس دالة الطلب على سبيل المثال.

– إيجاد الفرق الأول لكل متغير من متغيرات النموذج ثم إعادة اجراء الانحدار مرة أخرى

– إضافة معادلات جديدة للنموذج[19]؛ إذ تشرح العلاقات القائمة بين المتغيرات المستقلة مع بعض المتغيرات الجديدة. وبهذه الإضافة نحصل على نموذج معادلات آنية يتضمن التبعية المشتركة للمتغيرات. وفي حالة تميز النموذج يمكن تقدير معالمه بإحدى الطرق المناسبة، فطريقة الصيغة المختزلة Reduced يمكن أن تعالج التعدد الخطي للمعادلة الأصلية بشرط أن يكون النموذج الجديد متميزاً Identified.

مثال تطبيقي:

بعد تقدير قيمة الواردات (Y) على الناتج المحلي الإجمالي (X_1) والرقم القياسي لمستوى الأسعار (X_2) تحصلنا على النتائج التالية:

$$\hat{Y}_t = -101.49 + 0.08X_{1t} + 0.76X_{2t}$$
$$(t): \qquad (1.4) \qquad (1.0)$$
$$R^2 = 0.97; \quad r_{x1x2} = 0.957 \quad \overline{R^2} = 0.98$$

يتبين لنا من نتائج التقدير أن إشارات المعالم المقدرة تتفق مع النظرية الاقتصادية، ولكن لم يتبين ثبوت معنوية أي من استجابة الناتج المحلي الإجمالي (X_1) أو الرقم القياسي لمستوى أسعار المستهلك عند مستوى 5% رغم أن قيمة معامل التحديد تبلغ حوالي 97%، وهذا دليل على وجود ارتباط متعدد بين X_1 و X_2، معامل الارتباط يساوي 0.957. لا ينصح هنا بالتغلب على هذه المشكلة باستبعاد أحد المتغيرين لأن هذا يؤدي الى تقدير متحيز، ونظرا لأهمية المتغيرين في النظرية الاقتصادية في تفسير حجم الواردات، لهذا يفضل إيجاد صيغة دالية جديدة لا تؤدي الى الانحراف عن فرضيات النظرية الاقتصادية. نقترح إعادة التحليل بإيجاد علاقة بين قيمة الواردات والناتج المحلي الحقيقي؛ أي بالقسمة على الرقم القياسي لأسعار المستهلك.

[19] إبراهيم سليمان وآخرون، مقدمة في الاقتصاد القياسي، مرجع سابق، ص207.

تمارين مقترحة للفصل السادس:

التمرين الأول: لدراسة الدالة التالية Y والعوامل المؤثرة X_1 و X_2 تحصلنا على النتائج التالية:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + u_t$$
$$Y = 5.47 + 0.086 X_1 + 0.414 X_2 + u_t$$
$$SE \quad (0.211) \quad (0.231)$$
$$R^2 = 0.90 \qquad n = 20 \backslash$$
$$SSE = 129.025 \qquad \sum y^2 = 18102$$
$$\sum x_1^2 = 5362 \quad \sum x_2^2 = 4482 \quad \sum x_1^2 x_2^2 = 4824$$
$$\sigma^2{}_{xy} = 2.754$$

من خلال هذه المعلومات المطلوب تحديد:

1) جدول تحليل التباين للنموذج.
2) معامل الارتباط بين المتغيرات المستقلة.
3) معنوية اختبار العلاقة بين المتغيرات Y والعوامل المؤثرة X_1 و X_2.
4) اذا كانت قيمة معامل التحديد مرتفعة واختبار F منخفضة ويتم رفض أنه يوجد علاقه بين المتغيرات، ما تستنتج؟.

تم حذف المتغير X_1 وتحصلنا على النتائج التالية:

هل تحسن النموذج وهل استفدنا من حذف المتغير X2

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + u_t$$
$$Y = 5.31 + 0.458 X_1 + u_t$$
$$SE \quad (0.039)$$
$$R^2 = 0.88 \qquad n = 20 \backslash$$
$$SSE = 153.39 \qquad F = 132.43[0.000]$$
$$\sigma_{xy} = 2.912$$

التمرين الثاني:

من العلاقة المقدرة التالية:

$$\hat{Y}_t = 18.3 - 0.5 X_{1t} + 0.2 X_{2t} - 0.3 X_{3t}$$
$$S.E : (9.6)(0.1)(0.5)(0.8)$$
$$R^2 = 0.97; r_{x1x2} = 0.89; r_{x1x3} = 0.60; r_{x2x3} = 0.98$$

باستخدام المعلومات المتوفرة أعلاه، هل نستطيع الجزم بوجود مشكلة الارتباط الخطي المتعدد أم لا؟ ما هي الإجراءات اللازمة للمعالجة؟.

الفصل السابع: النماذج غير الخطية:

1-النماذج غير الخطية البسيطة

2-النماذج غير الخطية للنموذج المتعدد

1-النماذج غير الخطية البسيطة:

لقد تعرضنا سابقا الى تقدير نموذج الانحدار الخطي البسيط الممثل بمعادلة الخط المستقيم:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$$

ان النماذج القياسية غير الخطية البسيطة تمثلها معادلات قد تكون على الأشكال التالية:

- شكل منحنى قطع زائد الممثل بالمعادلة: $y_i = \alpha + \beta(\frac{1}{x}) + u_i$
- شكل منحنى أصم الممثل بالمعادلة: $y_i = \alpha x^{\beta} e^{u_i}$
- شكل منحنى أسي الممثل بالمعادلة: $y_i = \alpha \beta^{x} e^{u}$

يمكننا اجراء نفس المناقشة السابقة عند دراستنا للشكل المستقيم على كل معادلة من المعادلات السابقة على حدة لنحصل على نتائج متشابهة لما حصلنا عليه عند مناقشة معادلة مستقي، بمعنى أن وضعية أي من المنحنيات السابقة تتحدد فقط عندما نحدد الثوابت العددية الداخلة في المعادلة التي تمثلها.

كما رأينا في دراسة النموذج الخطي البسيط فان مهمتنا الان تتمثل في تقدير ثوابت معادلة النموذج الرياضي المقترح اذا كان شكل انتشار قيم هذه الظاهرة في المستوى الاحداثي أخذ شكل غير مستقيم (ملتوي أو منحنى) فيمكننا في هذه الحالة اقتراح صيغة أو نموذج لتمثيل العلاقة المدروسة تمثيلا حسنا في شكل معادلة منحنى.

أ. التمثيل بواسطة معادلة القطع الزائد:

الشكل العام لهذه المعادلة هو كالتالي: $y_i = \alpha + \beta(\frac{1}{x}) + u_i$

من أجل تقدير معاملات هذه المعادلة يكفي أن نضع: $z_i = \frac{1}{x}$ لتصبح المعادلة من الشكل:

$$\mathbf{y_i = \alpha + \beta z_i + u_i}$$

وبذلك تصبح العلاقة بين **z** و **y** خطية وبذلك يمكن استعمال طريقة المربعات الصغرى لتقدير معاملات النموذج كالتالي:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum(z_i-\bar{z})(Y_i-\bar{Y})}{\sum(z_i-\bar{z})^2} \quad ;\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{z}$$

ب- التمثيل بواسطة معادلة من الشكل: $y_i = \alpha x^{\beta} e^{u_i}$

لكي يتم تقدير معاملات هذه المعادلة نلجأ الى ادخال اللوغاريتم على طرفي المعادلة حتى نحول المعادلة من شكلها الأصلي الى الشكل الخطي كالتالي:

$$y_i = \alpha x^{\beta} e^{u_i} \Rightarrow \ln y = ln\alpha + \beta lnX + u$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum(lnx-\overline{lnx})(lny_i-\overline{lny})}{\sum(lnx-\overline{lnx})^2}$$

$$\widehat{ln\alpha} = \overline{lny} - \hat{\beta}\overline{lnx}$$

$$\hat{y} = e^{ln\alpha} X_i^{\beta}.$$

ج- التمثيل بواسطة معادلة من الشكل: $y_i = \alpha\beta^x e^u$

بنفس طريقة الشكل السابق ومن أجل تقدير معاملات هذه المعادلة ندخل اللوغاريتم على طرفي المعادلة لتحويلها للشكل الخطي كالاتي:

$$y_i = \alpha\beta^x e^u \Rightarrow lny = \ln\alpha + x\ln\beta + ui$$

$$\widehat{ln\beta} = \frac{\sum(x-\bar{x})(lny_i-\overline{lny})}{\sum(x-\bar{x})^2} \quad \widehat{ln\alpha} = \overline{lny} - \widehat{ln\beta}\bar{x}$$

$$\hat{y} = e^{ln\alpha}(e^{ln\beta})^x$$

2-النماذج غير الخطية للنموذج المتعدد:

لقد افترضنا سابقا في دراسة النموذج المتعدد أن شكل العلاقة التي رغبنا في تقديرها هو الشكل الخطي، لكن وفي الحقيقة فان الشكل الخطي يعد شرطا مقيدا جدا وعادة ما تقترح النظرية الاقتصادية أو شكل انتشار النقاط المشاهدة أن العلاقة بين المتغيرات غير خطية.

والتساؤل هنا هو كيف يمكن التعامل مع العلاقات غير الخطية.هناك نوعان من النماذج: نماذج غير خطية يمكن تحويلها الى شكل خطي ونماذج غير خطية لا يمكن تحويلها الى شكل خطي.

قبل تقدير العلاقة بين المتغير التابع والمتغيرات المستقلة يجب أولا البحث عن أنسب الصيغ الرياضية التي تعبر عن هذه العلاقة تعبيرا دقيقا. ولتحقيق ذلك يجب التعرف على الشكل البياني للعلاقة بين المتغيرات، ويتم ذلك بواسطة النظرية الاقتصادية أو الدراسات التطبيقية السابقة أو الرسم البياني للمتغير التابع وكل متغير مستقل على حدا ثم اختيار أنسب الصيغ الرياضية التي تتلاءم مع الشكل البياني الحقيقي للعلاقة محل الدراسة.

أحسن مثال في النظرية الاقتصادية للنماذج غير الخطية والتي يمكن ارجاعها خطية هو دالة كوب دوغلاس التي تعطي العلاقة بين الإنتاج وعوامله.

لتقدير الإنتاج Q_i بدلالة العمل L ورأس المال K المعطاة بالعلاقة التالية:

$$Q_i= \beta_0 K^{\beta_1} L^{\beta_2} e^{u_i}$$

فباعتبار هذه الدالة غير خطية من حيث المعالم لكن يمكن تحويلها الى شكل خطي وذلك عن طريق التحويل اللوغاريتمي وبذلك يصبح النموذج المراد تقديره كالاتي:

$$\ln Q_i= \ln\beta_0+ \beta_1 \ln K + \beta_2 \ln L +u_i$$

نستعمل طريقة المربعات الصغرى من أجل تقدير معاملات عوامل الإنتاج والثابت(شرحت هذه الطريقة بالتفصيل في الفصل الثالث لنموذج الانحدار الخطي المتعدد).

طرق تقدير النماذج غير الخطية الغير قابلة للتحويل الى الشكل الخطي:

هناك بعض النماذج غير الخطية من المستحيل تحت فرضيات معينة تطبيق طريقة المربعات الصغرى، نستعمل تقنيات أخرى للتقدير مهما يكن نوع الخوارزمية المستعملة.

يمكن تحويل هذه النماذج الى الشكل الخطي عن طريق نشر تايلور وذلك باعطاء قيم ابتدائية للمعالم ويتم تقديرها عن طريق تكرار العملية. تستخدم طريقة المربعات الصغرى على المعادلة التي تم تحويلها الى شكل خطي من أجل تقدير معاملات جديدة.

تسمح هذه الأجيرة عن طريق نشر جديد محدود بتحويل خطي جديد، يتم إيقاف العملية عندما تكون معاملات ساكنة نسبيا من مرحلة الى مرحلة أخرى.

لكي تكون هذه الطريقة فعالة، ينبغي أن تكون القيم الابتدائية للمعالم قريبة من القيم المثلى. اذا لم تكن كذلك فان التقدير غير جيد أي لا يوجد تقارب convergence.

تمارين مقترحة للفصل السادس:

التمرين الأول:يعطى تطور الدخل الوطني بدلالة أسعار البترول خلال الفترة الممتدة من 2019 الى 2024:

السنوات	2019	2020	2021	2022	2023	2024
سعر البرميل x_i	5	10	15	20	25	30
الدخل الوطني y	1250	20000	101250	320000	781250	1620000

المطلوب:

- مثل البيانات على معلم متعامد ومتجانس.
- عدل هذه البيانات ثم قدر معاملات النموذج وفقا للعلاقة التالية: $Y_i = \alpha x^{\beta} e^{ui}$

التمرين الثاني: اليك تطور مبيعات سلعة ما بدلالة السعر:

المشاهدة i	1	2	3	4	5	6
السعر x	60	50	40	30	20	10
المبيعات y	52000	60000	71000	90000	115000	200000

المطلوب:

- عدل هذه البيانات وقدر معاملات النموذج وفقا للعلاقة: $Y_i = \alpha\beta^{x} e^{ui}$
- اختبر المعنوية الكلية للنموذج بدرجة حرية 95%.

التمرين الثالث: *تعطى المعطيات الموالية حول نسبة التضخم* P_i ونسب البطالة C_i كالاتي:

i	2013	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
p_i	1.70	1.00	1.00	1.3	1.3	1.6	2.9	3.1	4.2	5.5	5.7	4.4
c_i	5.5	6.7	5.5	5.5	5.2	4.5	3.8	3.8	3.6	3.5	4.9	5.9

المطلوب:تعديل البيانات ثم تقدير المعاملات واختيار أفضل نموذج حسب العلاقتين التاليتين:

- $\Delta P = \alpha + \beta C + U$
- $\Delta P = \alpha + \beta\left(\frac{1}{C}\right) + U$

التمرين الرابع: لتكن المعطيات التالية التي تخص تطور حجم الكمية المعروضة من سلعة ما بدلالة سعر البيع X_1 و اعانات الإنتاج X_2 كما هو موضح في الجدول أدناه:

Y	10	12	17	13	15	10	14	12	16	18
X_1	2	2	8	2	6	3	5	3	9	10
X_2	1	2	10	4	8	4	7	3	10	11

المطلوب:

- تقدير معاملات النموذج وفق نموذج متعدد خطي من الشكل: $y_i=\beta_0+\beta_1X_1+\beta_2X_2+U_i$
- تقدير المعاملات وفق نموذج غير خطي من الشكل: $y_i=\beta_0X_1^{\beta 1}X_2^{\beta 2}e^{ui}$
- تقييم جودة النموذجين واختيار أفضل نموذج بمخاطرة 5%.

المراجع:

1. مكيد علي، الاقتصاد القياسي، ديوان المطبوعات الجامعية، بن عكنون، الجزائر، 2007.
2. إبراهيم سليمان وآخرون، مقدمة في الاقتصاد القياسي، ط1، المكتبة الاكاديمية، القاهرة، مصر ، 2016.
3. أموري هادي كاظم الحسناوي، مقدمة في القياس الاقتصادي، دار زهران للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2009.
4. حسام علي داود وخالد محمد السواعي، الاقتصاد القياسي بين النظرية والتطبيق، دار المسيرة، الأردن، 2013.
5. صالح تومي، مدخل لنظرية القياس الاقتصادي، ج 1، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 1999.
6. صالح تومي، مدخل لنظرية القياس الاقتصادي، ج 2، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 1999.
7. عبد المحمود محمد عبد الرحمان، **مقدمة في الاقتصاد القياسي**، عمادة شؤون المكتبات، الرياض، المملكة العربية السعودية، 1995.
8. كامل علاوي كاظم الفتلاوي وحسن لطيف الزبيدي، القياس الاقتصادي، ط1، دار الصفاء، الأردن، 2011.
9. وليد إسماعيل السيفو وآخرون، مشاكل الاقتصاد القياسي التحليلي، الأهلية للنشر والتوزيع، المملكة الأردنية، عمان،2007.

وليد إسماعيل السيفو واخرون، الاقتصاد القياسي التحليلي بين النظرية والتطبيق، دار مجدلاوي للنشر والتوزيع،ى عمان، الأردن، 2003.

- Breusch, T. ‘Testing for Autocorrelation in Dynamic Linear Models’, Australian Economic Papers, 17, 1978.
- Dimitrios Asteriou & Stephen G. Hall, Applied Econometrics, Macmillan Publishers Limited, China, 2011
- Gerhard Tintner, Econometrics, Literary Licensing, LLC, United States, 2013.
- GUJARATI. N. D, Econométrie, De Boeck, Bruxelles, 2004.

- JOHNSTON. J, DINARDO. J, Méthodes économétrique, Economica, Paris, 1999.
- Régis Bourbonnais, Econométrie, 5 ème édition, Edition Dunod, Paris, 2004.
- G S Maddala, Introduction to econometrics, second edition, Macmillan Publishing company, United states America,1992.
- Christopher Dougherty, Introduction to econometrics,third edition, Oxford, 2007.

الملاحق:

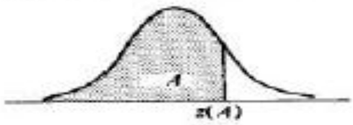
الجداول الإحصائية: STATISTICAL TABLES

1- جدول التوزيع الطبيعي المعياري

Normal Distribution

Cumulative Probabilities of the Standard Normal Distribution.

Entry is area A under the standard normal curve from $-\infty$ to $z(A)$



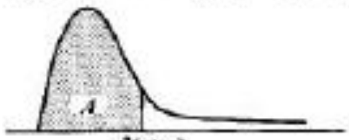
z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

2- جدول توزيع كاي تربيع

Chi-Square Distribution

Percentiles of the χ^2 Distribution

Entry is $\chi^2(A;\nu)$ where $P\{\chi^2(\nu) \le \chi^2(A;\nu)\} = A$



$\chi^2(A;\nu)$

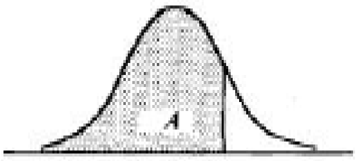
ν	A: .005	.010	.025	.050	.100	.900	.950	.975	.990	.995
1	0.0^4393	0.0^3157	0.0^3982	0.0^2393	0.0158	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.09	21.96
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.28	19.68	21.92	24.73	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	85.53	90.53	95.02	100.4	104.2
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	96.58	101.9	106.6	112.3	116.3
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2

3- جدول توزيع ستويدنت

Student's Distribution (t Distribution)

Percentiles of the t Distribution

Entry is $t(A;\ \nu)$ where $P\{t(\nu) \leq t(A;\ \nu)\} = A$



$t(A;\ \nu)$

	A						
ν	.60	.70	.80	.85	.90	.95	.975
1	0.325	0.727	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706
2	0.289	0.617	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303
3	0.277	0.584	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182
4	0.271	0.569	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776
5	0.267	0.559	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571
6	0.265	0.553	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447
7	0.263	0.549	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365
8	0.262	0.546	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306
9	0.261	0.543	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262
10	0.260	0.542	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228
11	0.260	0.540	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201
12	0.259	0.539	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179
13	0.259	0.537	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160
14	0.258	0.537	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145
15	0.258	0.536	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131
16	0.258	0.535	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120
17	0.257	0.534	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110
18	0.257	0.534	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101
19	0.257	0.533	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093
20	0.257	0.533	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086
21	0.257	0.532	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080
22	0.256	0.532	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074
23	0.256	0.532	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069
24	0.256	0.531	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064
25	0.256	0.531	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060
26	0.256	0.531	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056
27	0.256	0.531	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052
28	0.256	0.530	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048
29	0.256	0.530	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045
30	0.256	0.530	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042
40	0.255	0.529	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021
60	0.254	0.527	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000
120	0.254	0.526	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980
∞	0.253	0.524	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960

(Continued) Percentiles of the *t* Distribution

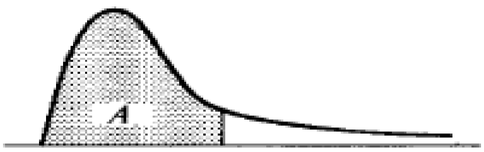
	A						
ν	.98	.985	.99	.9925	.995	.9975	.9995
1	15.895	21.205	31.821	42.434	63.657	127.322	636.590
2	4.849	5.643	6.965	8.073	9.925	14.089	31.598
3	3.482	3.896	4.541	5.047	5.841	7.453	12.924
4	2.999	3.298	3.747	4.088	4.604	5.598	8.610
5	2.757	3.003	3.365	3.634	4.032	4.773	6.869
6	2.612	2.829	3.143	3.372	3.707	4.317	5.959
7	2.517	2.715	2.998	3.203	3.499	4.029	5.408
8	2.449	2.634	2.896	3.085	3.355	3.833	5.041
9	2.398	2.574	2.821	2.998	3.250	3.690	4.781
10	2.359	2.527	2.764	2.932	3.169	3.581	4.587
11	2.328	2.491	2.718	2.879	3.106	3.497	4.437
12	2.303	2.461	2.681	2.836	3.055	3.428	4.318
13	2.282	2.436	2.650	2.801	3.012	3.372	4.221
14	2.264	2.415	2.624	2.771	2.977	3.326	4.140
15	2.249	2.397	2.602	2.746	2.947	3.286	4.073
16	2.235	2.382	2.583	2.724	2.921	3.252	4.015
17	2.224	2.368	2.567	2.706	2.898	3.222	3.965
18	2.214	2.356	2.552	2.689	2.878	3.197	3.922
19	2.205	2.346	2.539	2.674	2.861	3.174	3.883
20	2.197	2.336	2.528	2.661	2.845	3.153	3.849
21	2.189	2.328	2.518	2.649	2.831	3.135	3.819
22	2.183	2.320	2.508	2.639	2.819	3.119	3.792
23	2.177	2.313	2.500	2.629	2.807	3.104	3.768
24	2.172	2.307	2.492	2.620	2.797	3.091	3.745
25	2.167	2.301	2.485	2.612	2.787	3.078	3.725
26	2.162	2.296	2.479	2.605	2.779	3.067	3.707
27	2.158	2.291	2.473	2.598	2.771	3.057	3.690
28	2.154	2.286	2.467	2.592	2.763	3.047	3.674
29	2.150	2.282	2.462	2.586	2.756	3.038	3.659
30	2.147	2.278	2.457	2.581	2.750	3.030	3.646
40	2.123	2.250	2.423	2.542	2.704	2.971	3.551
60	2.099	2.223	2.390	2.504	2.660	2.915	3.460
120	2.076	2.196	2.358	2.468	2.617	2.860	3.373
∞	2.054	2.170	2.326	2.432	2.576	2.807	3.291

4- جدول توزيع فيشر

F Distribution

Percentiles of the *F* Distribution

Entry is $F(A;\ \nu_1,\ \nu_2)$ where $P\{F(\nu_1,\ \nu_2) \leq F(A;\ \nu_1,\ \nu_2)\} = A$



$F(A;\nu_1,\nu_2)$

$$F(A;\nu_1,\nu_2) = \frac{1}{F(1-A;\nu_2,\nu_1)}$$

Den. df	A	Numerator df 1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	.50	1.00	1.50	1.71	1.82	1.89	1.94	1.98	2.00	2.03
	.90	39.9	49.5	53.6	55.8	57.2	58.2	58.9	59.4	59.9
	.95	161	200	216	225	230	234	237	239	241
	.975	648	800	864	900	922	937	948	957	963
	.99	4,052	5,000	5,403	5,625	5,764	5,859	5,928	5,981	6,022
	.995	16,211	20,000	21,615	22,500	23,056	23,437	23,715	23,925	24,091
	.999	405,280	500,000	540,380	562,500	576,400	585,940	592,870	598,140	602,280
2	.50	0.667	1.00	1.13	1.21	1.25	1.28	1.30	1.32	1.33
	.90	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38
	.95	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4
	.975	38.5	39.0	39.2	39.2	39.3	39.3	39.4	39.4	39.4
	.99	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4
	.995	199	199	199	199	199	199	199	199	199
	.999	998.5	999.0	999.2	999.2	999.3	999.3	999.4	999.4	999.4
3	.50	0.585	0.881	1.00	1.06	1.10	1.13	1.15	1.16	1.17
	.90	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24
	.95	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81
	.975	17.4	16.0	15.4	15.1	14.9	14.7	14.6	14.5	14.5
	.99	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3
	.995	55.6	49.8	47.5	46.2	45.4	44.8	44.4	44.1	43.9
	.999	167.0	148.5	141.1	137.1	134.6	132.8	131.6	130.6	129.9
4	.50	0.549	0.828	0.941	1.00	1.04	1.06	1.08	1.09	1.10
	.90	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94
	.95	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00
	.975	12.2	10.6	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90
	.99	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7
	.995	31.3	26.3	24.3	23.2	22.5	22.0	21.6	21.4	21.1
	.999	74.1	61.2	56.2	53.4	51.7	50.5	49.7	49.0	48.5
5	.50	0.528	0.799	0.907	0.965	1.00	1.02	1.04	1.05	1.06
	.90	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32
	.95	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77
	.975	10.0	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68
	.99	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2
	.995	22.8	18.3	16.5	15.6	14.9	14.5	14.2	14.0	13.8
	.999	47.2	37.1	33.2	31.1	29.8	28.8	28.2	27.6	27.2
6	.50	0.515	0.780	0.886	0.942	0.977	1.00	1.02	1.03	1.04
	.90	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96
	.95	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10
	.975	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52
	.99	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98
	.995	18.6	14.5	12.9	12.0	11.5	11.1	10.8	10.6	10.4
	.999	35.5	27.0	23.7	21.9	20.8	20.0	19.5	19.0	18.7
7	.50	0.506	0.767	0.871	0.926	0.960	0.983	1.00	1.01	1.02
	.90	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72
	.95	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68
	.975	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82
	.99	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72
	.995	16.2	12.4	10.9	10.1	9.52	9.16	8.89	8.68	8.51
	.999	29.2	21.7	18.8	17.2	16.2	15.5	15.0	14.6	14.3

Den. df	A	Numerator df								
		10	12	15	20	24	30	60	120	∞
1	.50	2.04	2.07	2.09	2.12	2.13	2.15	2.17	2.18	2.20
	.90	60.2	60.7	61.2	61.7	62.0	62.3	62.8	63.1	63.3
	.95	242	244	246	248	249	250	252	253	254
	.975	969	977	985	993	997	1,001	1,010	1,014	1,018
	.99	6,056	6,106	6,157	6,209	6,235	6,261	6,313	6,339	6,366
	.995	24,224	24,426	24,630	24,836	24,940	25,044	25,253	25,359	25,464
	.999	605,620	610,670	615,760	620,910	623,500	626,100	631,340	633,970	636,620
2	.50	1.34	1.36	1.38	1.39	1.40	1.41	1.43	1.43	1.44
	.90	9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.48	9.49
	.95	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
	.975	39.4	39.4	39.4	39.4	39.5	39.5	39.5	39.5	39.5
	.99	99.4	99.4	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5
	.995	199	199	199	199	199	199	199	199	200
	.999	999.4	999.4	999.4	999.4	999.5	999.5	999.5	999.5	999.5
3	.50	1.18	1.20	1.21	1.23	1.23	1.24	1.25	1.26	1.27
	.90	5.23	5.22	5.20	5.18	5.18	5.17	5.15	5.14	5.13
	.95	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.57	8.55	8.53
	.975	14.4	14.3	14.3	14.2	14.1	14.1	14.0	13.9	13.9
	.99	27.2	27.1	26.9	26.7	26.6	26.5	26.3	26.2	26.1
	.995	43.7	43.4	43.1	42.8	42.6	42.5	42.1	42.0	41.8
	.999	129.2	128.3	127.4	126.4	125.9	125.4	124.5	124.0	123.5
4	.50	1.11	1.13	1.14	1.15	1.16	1.16	1.18	1.18	1.19
	.90	3.92	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.79	3.78	3.76
	.95	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.69	5.66	5.63
	.975	8.84	8.75	8.66	8.56	8.51	8.46	8.36	8.31	8.26
	.99	14.5	14.4	14.2	14.0	13.9	13.8	13.7	13.6	13.5
	.995	21.0	20.7	20.4	20.2	20.0	19.9	19.6	19.5	19.3
	.999	48.1	47.4	46.8	46.1	45.8	45.4	44.7	44.4	44.1
5	.50	1.07	1.09	1.10	1.11	1.12	1.12	1.14	1.14	1.15
	.90	3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.14	3.12	3.11
	.95	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.43	4.40	4.37
	.975	6.62	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.12	6.07	6.02
	.99	10.1	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.20	9.11	9.02
	.995	13.6	13.4	13.1	12.9	12.8	12.7	12.4	12.3	12.1
	.999	26.9	26.4	25.9	25.4	25.1	24.9	24.3	24.1	23.8
6	.50	1.05	1.06	1.07	1.08	1.09	1.10	1.11	1.12	1.12
	.90	2.94	2.90	2.87	2.84	2.82	2.80	2.76	2.74	2.72
	.95	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.74	3.70	3.67
	.975	5.46	5.37	5.27	5.17	5.12	5.07	4.96	4.90	4.85
	.99	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.06	6.97	6.88
	.995	10.2	10.0	9.81	9.59	9.47	9.36	9.12	9.00	8.88
	.999	18.4	18.0	17.6	17.1	16.9	16.7	16.2	16.0	15.7
7	.50	1.03	1.04	1.05	1.07	1.07	1.08	1.09	1.10	1.10
	.90	2.70	2.67	2.63	2.59	2.58	2.56	2.51	2.49	2.47
	.95	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.30	3.27	3.23
	.975	4.76	4.67	4.57	4.47	4.42	4.36	4.25	4.20	4.14
	.99	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.82	5.74	5.65
	.995	8.38	8.18	7.97	7.75	7.65	7.53	7.31	7.19	7.08
	.999	14.1	13.7	13.3	12.9	12.7	12.5	12.1	11.9	11.7

Den. df	α	Numerator df 1	2	3	4	5	6	7	8	9
8	.50	0.499	0.757	0.860	0.915	0.948	0.971	0.988	1.00	1.01
	.90	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56
	.95	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39
	.975	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36
	.99	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91
	.995	14.7	11.0	9.60	8.81	8.30	7.95	7.69	7.50	7.34
	.999	25.4	18.5	15.8	14.4	13.5	12.9	12.4	12.0	11.8
9	.50	0.494	0.749	0.852	0.906	0.939	0.962	0.978	0.990	1.00
	.90	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44
	.95	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18
	.975	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03
	.99	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35
	.995	13.6	10.1	8.72	7.96	7.47	7.13	6.88	6.69	6.54
	.999	22.9	16.4	13.9	12.6	11.7	11.1	10.7	10.4	10.1
10	.50	0.490	0.743	0.845	0.899	0.932	0.954	0.971	0.983	0.992
	.90	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35
	.95	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02
	.975	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78
	.99	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94
	.995	12.8	9.43	8.08	7.34	6.87	6.54	6.30	6.12	5.97
	.999	21.0	14.9	12.6	11.3	10.5	9.93	9.52	9.20	8.96
12	.50	0.484	0.735	0.835	0.888	0.921	0.943	0.959	0.972	0.981
	.90	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21
	.95	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80
	.975	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44
	.99	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39
	.995	11.8	8.51	7.23	6.52	6.07	5.76	5.52	5.35	5.20
	.999	18.6	13.0	10.8	9.63	8.89	8.38	8.00	7.71	7.48
15	.50	0.478	0.726	0.826	0.878	0.911	0.933	0.949	0.960	0.970
	.90	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09
	.95	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59
	.975	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12
	.99	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89
	.995	10.8	7.70	6.48	5.80	5.37	5.07	4.85	4.67	4.54
	.999	16.6	11.3	9.34	8.25	7.57	7.09	6.74	6.47	6.26
20	.50	0.472	0.718	0.816	0.868	0.900	0.922	0.938	0.950	0.959
	.90	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96
	.95	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39
	.975	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84
	.99	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46
	.995	9.94	6.99	5.82	5.17	4.76	4.47	4.26	4.09	3.96
	.999	14.8	9.95	8.10	7.10	6.46	6.02	5.69	5.44	5.24
24	.50	0.469	0.714	0.812	0.863	0.895	0.917	0.932	0.944	0.953
	.90	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91
	.95	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30
	.975	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70
	.99	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26
	.995	9.55	6.66	5.52	4.89	4.49	4.20	3.99	3.83	3.69
	.999	14.0	9.34	7.55	6.59	5.98	5.55	5.23	4.99	4.80

Den. df	A	Numerator df								
		10	12	15	20	24	30	60	120	∞
8	.50	1.02	1.03	1.04	1.05	1.06	1.07	1.08	1.08	1.09
	.90	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.34	2.32	2.29
	.95	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.01	2.97	2.93
	.975	4.30	4.20	4.10	4.00	3.95	3.89	3.78	3.73	3.67
	.99	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.03	4.95	4.86
	.995	7.21	7.01	6.81	6.61	6.50	6.40	6.18	6.06	5.95
	.999	11.5	11.2	10.8	10.5	10.3	10.1	9.73	9.53	9.33
9	.50	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05	1.05	1.07	1.07	1.08
	.90	2.42	2.38	2.34	2.30	2.28	2.25	2.21	2.18	2.16
	.95	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.79	2.75	2.71
	.975	3.96	3.87	3.77	3.67	3.61	3.56	3.45	3.39	3.33
	.99	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.48	4.40	4.31
	.995	6.42	6.23	6.03	5.83	5.73	5.62	5.41	5.30	5.19
	.999	9.89	9.57	9.24	8.90	8.72	8.55	8.19	8.00	7.81
10	.50	1.00	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05	1.06	1.06	1.07
	.90	2.32	2.28	2.24	2.20	2.18	2.16	2.11	2.08	2.06
	.95	2.98	2.91	2.84	2.77	2.74	2.70	2.62	2.58	2.54
	.975	3.72	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.20	3.14	3.08
	.99	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.08	4.00	3.91
	.995	5.85	5.66	5.47	5.27	5.17	5.07	4.86	4.75	4.64
	.999	8.75	8.45	8.13	7.80	7.64	7.47	7.12	6.94	6.76
12	.50	0.989	1.00	1.01	1.02	1.03	1.03	1.05	1.05	1.06
	.90	2.19	2.15	2.10	2.06	2.04	2.01	1.96	1.93	1.90
	.95	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.38	2.34	2.30
	.975	3.37	3.28	3.18	3.07	3.02	2.96	2.85	2.79	2.72
	.99	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.54	3.45	3.36
	.995	5.09	4.91	4.72	4.53	4.43	4.33	4.12	4.01	3.90
	.999	7.29	7.00	6.71	6.40	6.25	6.09	5.76	5.59	5.42
15	.50	0.977	0.989	1.00	1.01	1.02	1.02	1.03	1.04	1.05
	.90	2.06	2.02	1.97	1.92	1.90	1.87	1.82	1.79	1.76
	.95	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.16	2.11	2.07
	.975	3.06	2.96	2.86	2.76	2.70	2.64	2.52	2.46	2.40
	.99	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.05	2.96	2.87
	.995	4.42	4.25	4.07	3.88	3.79	3.69	3.48	3.37	3.26
	.999	6.08	5.81	5.54	5.25	5.10	4.95	4.64	4.48	4.31
20	.50	0.966	0.977	0.989	1.00	1.01	1.01	1.02	1.03	1.03
	.90	1.94	1.89	1.84	1.79	1.77	1.74	1.68	1.64	1.61
	.95	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.95	1.90	1.84
	.975	2.77	2.68	2.57	2.46	2.41	2.35	2.22	2.16	2.09
	.99	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.61	2.52	2.42
	.995	3.85	3.68	3.50	3.32	3.22	3.12	2.92	2.81	2.69
	.999	5.08	4.82	4.56	4.29	4.15	4.00	3.70	3.54	3.38
24	.50	0.961	0.972	0.983	0.994	1.00	1.01	1.02	1.02	1.03
	.90	1.88	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.61	1.57	1.53
	.95	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.84	1.79	1.73
	.975	2.64	2.54	2.44	2.33	2.27	2.21	2.08	2.01	1.94
	.99	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.40	2.31	2.21
	.995	3.59	3.42	3.25	3.06	2.97	2.87	2.66	2.55	2.43
	.999	4.64	4.39	4.14	3.87	3.74	3.59	3.29	3.14	2.97

Den. df	A	Numerator df 1	2	3	4	5	6	7	8	9
30	.50	0.466	0.709	0.807	0.858	0.890	0.912	0.927	0.939	0.948
	.90	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85
	.95	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21
	.975	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57
	.99	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07
	.995	9.18	6.35	5.24	4.62	4.23	3.95	3.74	3.58	3.45
	.999	13.3	8.77	7.05	6.12	5.53	5.12	4.82	4.58	4.39
60	.50	0.461	0.701	0.798	0.849	0.880	0.901	0.917	0.928	0.937
	.90	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74
	.95	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04
	.975	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33
	.99	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72
	.995	8.49	5.80	4.73	4.14	3.76	3.49	3.29	3.13	3.01
	.999	12.0	7.77	6.17	5.31	4.76	4.37	4.09	3.86	3.69
120	.50	0.458	0.697	0.793	0.844	0.875	0.896	0.912	0.923	0.932
	.90	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68
	.95	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96
	.975	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22
	.99	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56
	.995	8.18	5.54	4.50	3.92	3.55	3.28	3.09	2.93	2.81
	.999	11.4	7.32	5.78	4.95	4.42	4.04	3.77	3.55	3.38
∞	.50	0.455	0.693	0.789	0.839	0.870	0.891	0.907	0.918	0.927
	.90	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63
	.95	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88
	.975	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11
	.99	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41
	.995	7.88	5.30	4.28	3.72	3.35	3.09	2.90	2.74	2.62
	.999	10.8	6.91	5.42	4.62	4.10	3.74	3.47	3.27	3.10