الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Setif 1 University Ferhat Abbas
Faculty of Sciences
Department of Mathematics

جامعة سطيف 1 فرحات عباس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

Master's Thesis

in Mathematics

Option: Optimization and Control

Theme:

A NEW KERNEL FUNCTION AND ITERATION BOUNDS FOR CONVEX QUADRATIC PROGRAMMING

Presented by:

Miss **Aya Djeziri**

Supervisor: **Dr. Chafia DAILI**

Thesis defended on June 24, 2026, in front of the jury composed of:

Mr. Raouf ZIADI	Dr.	University Ferhat Abbas Setif 1	President
Ms. Chafia DAILI	Dr.	University Ferhat Abbas Setif 1	Supervisor
Ms. Souaad CHENNAF	Dr.	University Ferhat Abbas Setif 1	Examiner

2025/2026

Contents

Dedication i

THANKS ii

Table of contents iii

Introduction 1

1 Fundamental Concepts 4

1.1 Preliminaries of Convex Analysis 4

1.1.1 Characterization of a differentiable convex function 5

1.2 Mathematical Programming 6

1.2.1 Classification of a mathematical program 8

1.2.2 Qualification of constraints 8

1.2.3 Solving a mathematical program 9

1.2.4 Existence and uniqueness of an optimal solution 9

1.2.5 Optimality conditions (First-order necessary conditions : Karush-Kuhn-Tucker multipliers) 10

1.3 Convex quadratic programming 11

1.3.1 Primal convex quadratic problem 12

1.3.2 Dual convex quadratic problem 12
1.3.3 Existence and uniqueness of a solution 13
1.3.4 Optimality Conditions 13
1.3.5 Duality in Quadratic Programming 14
1.4 Newton-Raphson method for a nonlinear system 15
1.4.1 Principle of the method 15
1.5 Methods for solving a (CQP) 16
1.6 Classical central path methods based on the logarithmic barrier approach 17
1.6.1 Logarithmic barrier primal-dual central path methods for (CQP) 17
1.6.2 The perturbed problem 19
1.6.3 Classical Newton directions 21

2 Primal-dual central path methods based on a new kernel function 24

2.1 Central path methods based on a new kernel function for (CQP) . . 24
2.1.1 New class of Newton directions 24
2.1.2 Generic primal-dual central path algorithm for (P) 26
2.2 New kernel function 27
2.2.1 The Property of the kernel function 28
2.3 Analysis of algorithm and its computational complexity 35

3 Numerical Implementation 41

3.1 Exemples of Fixed size 42
3.2 Examples of variable size 47
3.2.1 Comments 49

Conclusion **50**

Bibliography **50**

الملخص: تركز هذه الأطروحة على دراسة وتطوير طرق النقطة الداخلية الأولية الثنائية (IPMs) المطبقة على مسائل البرمجة التربيعية المحدبة (CQP). هدف هذا العمل هو دمج وتحليل دالة نواة جديدة لحل برامج تربيعية محدبة بكفاءة. نقدم دراسة خوارزمية مفصلة ونحسب التكلفة الحدودية النظرية لطريقة الخطوة الكبيرة، والذي يتبين أنها مطابقة لتكلفة طريقة الخطوة الصغيرة ($O(\sqrt{n}\log(n/\varepsilon))$) وأخيرًا، لتقييم أداء خوارزميتنا، تم إجراء اختبارات عددية ودراسة مقارنة على سلسلة متنوعة من الأمثلة.

الكلمات المفتاحية: البرمجة التربيعية المحدبة، طرق النقطة الداخلية الأولية-الثنائية، دالة النواة، المسار المركزي، التكلفة الحدودية ، طريقة نيوتن.

Résumé: Cette thèse est consacrée à l'étude et au développement de méthodes de points intérieurs primales-duales (IPMs) appliquées aux problèmes de programmation quadratique convexe (PQC). L'objectif de ce travail est d'intégrer et d'analyser une nouvelle fonction noyau pour résoudre efficacement les programmes quadratiques convexes. Nous présentons une étude algorithmique détaillée puis nous établissons la complexité polynomiale théorique pour les méthodes à grand pas, qui s'avère être identique à celle des méthodes à petit pas (à savoir $O(\sqrt{n}\log(n/\varepsilon))$). Enfin, afin d'évaluer la performance de notre algorithme, des tests numériques et une étude comparative ont été menés sur une série variée d'exemples.

Mots clé : Programmation quadratique convexe, méthodes de points intérieurs primales-duales, fonction noyau, trajectoire centrale, Complexité polynomiale, méthode de Newton.

Abstract: This thesis focuses on the study and development of primal-dual interior-point methods (IPMs) applied to convex quadratic programming (CQP) problems. The objective of this work is to integrate and analyze a new kernel function to efficiently solve convex quadratic programs. We present a detailed algorithmic study then establish the theoretical polynomial complexity for large-step methods, which turns out to be identical to that of small-step methods (namely $O(\sqrt{n}\log(n/\varepsilon))$), Finally, to evaluate the performance of our algorithm, numerical tests and a comparative study have been carried out on a varied series of examples.

Key words: Convex Quadratic Programming, Primal-Dual Interior Point Methods, Kernel Function, Central Path, Polynomial Complexity, Newton's Method.