

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université FERHAT ABBAS de SETIF

Habilitation Universitaire

Présentée à la Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Option : Mathématiques appliquées

Par

ROUMILI HAYET

Synthèse des travaux scientifiques

Année universitaire 2011/2012

SOMMAIRE

I- Introduction	01
II- Synthèse des travaux scientifiques entrepris avant le Doctorat en sciences...	04
II-1 Mémoire de Magister	04
II-3 Thèse de Doctorat en cotutelle	05
III- Synthèse des travaux scientifiques entrepris après le Doctorat en sciences.	07
III-1 Publications internationales	08
III-2 Communications nationales et internationales	14
VI- Perspectives	14
V- Bibliographie	16

I- Introduction

Les méthodes de points intérieurs sont des méthodes effectives pour résoudre pas mal de problèmes d'optimisation. Ces méthodes reposent sur la fonction barrière logarithmique définie, en 1955, par Frisch ([4]). Cette fonction barrière logarithmique est largement étudiée dans les années soixante, notamment dans le livre de Fiacco et McCormick ([3]). C'est dans ce livre que le terme de points intérieurs est introduit. Les itérés générés par les méthodes basées sur cette fonction sont strictement réalisables: ils restent à l'intérieur du domaine réalisable, d'où la terminologie de ces méthodes. L'engouement pour ces méthodes dans les années soixante est dû au développement de méthodes performantes en optimisation sans contrainte, citons notamment le livre de Fiacco et McCormick. Le problème du mauvais conditionnement des matrices hessiennes des fonctions barrières d'abord étudié par Murray ([12, 13]) puis par Lootsma ([9, 10, 11]) ralentit le développement de ces méthodes au début des années soixante dix.

Avant 1984, tout problème d'optimisation linéaire se résolvait par la méthode du simplexe développée par Dantzig ([2]) ou par une variante de celle ci. Des recherches ont été menées pour mettre au point une autre méthode mais aucune de celles proposées n'améliorait celle du simplexe.

Dans les années 70, la théorie de la complexité devient une part intégrante de l'optimisation linéaire, lorsque Klee et Minty ([7]) ont trouvé un exemple qui montrait pour la première fois que la méthode du simplexe pouvait prendre un nombre exponentiel d'itérations (une question demeure toute fois ouverte : existe t-il un algorithme de complexité polynomiale pour résoudre un programme linéaire?), c'est à dire de résoudre le problème en un nombre d'opérations qui doit être borné par un polynôme en la taille du problème (L). La réponse est venue de Khachiyan (1979) lorsqu'il a montré que la méthode des ellipses était de complexité globale $O(n^4L)$ itérations pour la programmation linéaire ([5]). Cependant, et tandis que la méthode du simplexe de complexité exponentielle, fonctionnait bien en pratique, la méthode des ellipses s'est avérée nettement moins efficace que la méthode du simplexe. Il restait donc de trouver des méthodes polynômiales qui soient efficaces en pratique.

En 1984 Karmarkar ([5]) proposa un algorithme de points intérieurs à convergence polynômiale $O(n^{3.5}L)$ itérations pour résoudre des problèmes d'optimisation linéaire.

Dans les années 90, les méthodes de trajectoire centrale pour la programmation linéaire sont avéré être très efficaces en pratique. En 1989 Kojima, Mizuno et Yoshise ([8]) ont proposé un algorithme de complexité polynômiale $O(nL)$ itérations. En 1992 Mehrotra a décrit un autre algorithme de

trajectoire centrale très efficace en pratique de complexité polynômiale $O(\sqrt{n} L)$ itérations. La trajectoire centrale sert à conduire les itérés vers la solution optimale.

Ces progrès rivalisant, n'échappent pas tout de même aux inconvénients théoriques, algorithmiques et numériques, entre autre, le problème d'initialisation qui devient de plus en plus difficile en passant aux autres problèmes mathématiques (la question qui se pose comment choisir un point initial réalisable près de la trajectoire centrale pour démarrer l'algorithme ?). Ce problème d'initialisation est au centre de notre étude, il figure depuis des années au menu de la recherche dans le domaine de la programmation mathématique. Pour atténuer à cet inconvénient, une alternative particulièrement intéressante pour nous est celle de trajectoire centrale non réalisable, introduite par Zhang et al. ([19]) pour la programmation linéaire. Il s'agit en fait de démarrer l'algorithme d'un point initial non nécessairement réalisable et introduire une fonction dite de mérite qui contrôle la faisabilité des itérés et l'optimalité.

II- Synthèse des travaux scientifiques entrepris avant Doctorat en Sciences

II-1 Mémoire de Magister :

Le mémoire de Magister que j'ai soutenu sous la direction du Pr. A. Keraghel (Département de Mathématiques, Université de Sétif) s'intitule :

“ ETUDE QUALITATIVE DES METHODES DE POINTS INTERIEURS NON REALISABLES POUR LA PROGRAMMATION LINEAIRE ET LA PROGRAMMATION QUADRATIQUE CONVEXE ”.

Dans ce mémoire, nous avons repris l'étude théorique de Zhang [19] pour la programmation linéaire, nos efforts sont concentrés sur l'aspect numérique: où on a constaté le coût excessif de l'itération dominé par le volume calculatoire du pas et direction du déplacement, ce qui devrait entraîner une amélioration considérable du comportement numérique. Un algorithme de trajectoire centrale non réalisable est soigneusement implémenté avec les aménagements qu'on a fait pour le calcul de la direction et le pas de déplacement, les résultats obtenus sont très instructifs. Ces résultats nous ont encouragé à faire une extension à une contribution importante qui peut servir dans la résolution d'un programme convexe non linéaire, c'est la programmation quadratique convexe (*PQC*). Nous avons généralisé les résultats théoriques des méthodes de trajectoire centrale non réalisables pour résoudre avec succès un problème quadratique convexe (*PQC*).

Remarque :

Les travaux réalisés dans le mémoire de Magister ont fait l'objet de trois communications nationales et internationales:

- 1- Participation au « Congrès National de Mathématiques 99 », (Mai 1999), Annaba, Algérie.
- 2- Participation à « la 4^{ème} Conférence Maghrébine sur les Equations Différentielles et leurs Applications », (Octobre 2000), Sétif, Algérie.
- 3- Participation à « la 3^{ème} Rencontre Internationale d'Analyse Mathématique et ses Applications », (Mai 2002), Bejaïa, Algérie.

II-2 Thèse de Doctorat en cotutelle:

Ma thèse s'inscrit dans le cadre de la préparation d'une thèse de Doctorat en cotutelle entre l'Université Ferhat Abbas de Sétif (Algérie) et l'Université du Havre (France) sous la direction du Professeur A. Keraghel (Département de Mathématiques, Université de Sétif-Algérie) et le Professeur A. Yassine (Département de Mathématiques, Université du Havre-France).

La thèse de Doctorat représentée une continuation du mémoire de Magister, elle s'intitule :

« METHODES DE POINTS INTERIEURS NON REALISABLES EN OPTIMISATION. THEORIE, ALGORITHMES ET APPLICATIONS ».

La thèse est composée de trois chapitres. Le premier contient les notions préliminaires qui serviront d'appuis pour la suite. Le second chapitre, est consacré à la mise en œuvre de la méthode de trajectoire centrale non réalisable pour la programmation linéaire (*PL*) puis son extension pour la programmation quadratique convexe (*PQC*) où on a implémenté les algorithmes, les résultats obtenus sont encourageants et sont publiés dans des revues spécialisées. Enfin l'adaptation et l'étude théorique de l'algorithme de trajectoire centrale non réalisable pour la programmation semi-définie (*SDP*) sont présentées dans le dernier chapitre, les résultats obtenus sont aussi publiés dans une revue spécialisée.

Remarque :

Les travaux réalisés dans la thèse de Doctorat en cotutelle ont fait l'objet de trois publications internationales :

1 – H. Roumili, A.Keraghel & A.Yassine « Infeasible Primal-Dual Algorithm for minimizing Convex Quadratic Problems » *Université Babes-Bolyai*, (Octobre 2004), Roumanie.

2 – M.Achache, H. Roumili & A.Keraghel « A numerical study of an infeasible primal-dual path-following algorithm for linear programming », *Applied Mathematics and Computation* 186 (2007) 1472–1479.

3 - H. Roumili, A.Keraghel & A.Yassine « Infeasible Interior Point Method for Semidefinite Programs » *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 1, 2007, no. 21, 1009 – 1018.

Et de trois communications internationales:

- 1- Participation à « la 4^{ème} Rencontre Internationale d'Analyse Mathématique et ses Applications », (Avril 2004) , Université de Sétif, Algérie.
- 2- Participation au « Séminaire International de Mathématiques Appliquées », (Avril 2007), Université de Oum El Bouaghi, Algérie.
- 3- Participation au « 2^{ème} Colloque International sur l'Analyse non linéaire et Application », (Novembre 2007), Université de Sétif, Algérie.

III- Synthèse des travaux scientifiques entrepris après Doctorat en Sciences

Après avoir soutenu ma thèse de Doctorat en Sciences, je me suis penché sur le développement de nouvelles méthodes introduites par Jansen et al. pour la programmation linéaire, ces méthodes présentent une nouvelle analyse basée sur une mesure de proximité et une nouvelle direction de descente et elles supposent toujours que le point initial réalisable soit près de la trajectoire centrale. Dans mon travail j'ai fait une extension de ces méthodes à la programmation quadratique convexe et cette fois là pour résoudre le problème d'initialisation,

j'ai introduit le **vecteur poids** qui assure que le point **initial réalisable** soit sur la **trajectoire centrale**.

Ce travail a fait l'objet de ma publication internationale et de deux communications nationales.

III-1 Publications internationales:

1 - H.Roumili “ Short-step primal-dual target-following algorithms for the convex quadratic problems ” International Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol 77, N° 3, 2012.

Dans cet article, pour résoudre un problème quadratique convexe primal (PQCP) avec son dual (PQCD), on a proposé une méthode de trajectoire centrale réalisable avec une nouvelle direction de descente et une analyse de convergente quadratique basée sur la mesure de proximité. Concernant le point initial réalisable on applique l'algorithme de Karmarker pour le trouver et pour être près de la trajectoire centrale, on a introduit le vecteur poids (r).

Présentation du problème

Pour être plus précis, nous introduisons le problème de programmation quadratique convexe primal sous sa forme standard:

$$(PQCP) \begin{cases} \min c^t x + \frac{1}{2} x^t Q x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

Où $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice symétrique semi définie positive, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ et

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ une matrice de plein rang.

Son dual (PCQP) est donné par:

$$(PQCD) \begin{cases} \min & b^t x - \frac{1}{2} x^t Q x \\ & A^t y + z - Qx = c \\ & x \geq 0, y \in \mathbb{R}^m \end{cases} \quad (2)$$

Supposons:

- $K_{\text{int}} = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x > 0\} \neq \emptyset$ l'ensemble des solutions strictement réalisable de (1) est non vide.
- $T_{\text{int}} = \{y \in \mathbb{R}^m, z \in \mathbb{R}^n / A^t y + z - Qx = c, z > 0\} \neq \emptyset$ l'ensemble des solutions strictement réalisable de (2) est non vide.

Les méthodes de trajectoire centrale sont basées sur la résolution du problème barrière associé au problème (PQCP), donc au lieu de résoudre (PQCP) directement, on va résoudre le problème perturbé $(PQCP_\mu)$ suivant:

$$(PQCP_\mu) \begin{cases} \min & c^t x + \frac{1}{2} x^t Q x - \mu \sum_{i=1}^n r_i \ln(x_i) = f_\mu(x) \\ & Ax = b \\ & x > 0 \end{cases}$$

$\mu > 0$ est le paramètre barrière, $r \in \mathbb{R}_{++}^n$ désigne le vecteur poids. Si $\mu \rightarrow 0$ la solution optimale de $(PQCP_\mu)$ est une solution optimale pour (PQCP)

On applique les conditions d'optimalité au $(PQCP_\mu)$ qui sont nécessaires et suffisantes, on obtient:

$$\begin{cases} c - z - A^t y + Qx = 0, & x > 0, z > 0 \\ Ax = b \\ xz = \mu r \end{cases} \quad (3)$$

Nouvelle direction de descente:

On remplace l'équation: $xz = \mu r$

par : $\psi(xz) = \psi(\mu r)$

où ψ est une fonction réelle sur $[0, +\infty)$ et dérivable sur $(0, +\infty)$ tel que $\psi(t)$ et

$\psi'(t) > 0$, pour tout $t > 0$. Donc le système (3) est équivalent au système suivant:

$$\begin{cases} c - z - A^t y + Qx = 0, & x > 0, z > 0 \\ Ax = b \\ \psi(xz) = \psi(\mu r) \end{cases} \quad (4)$$

On applique la méthode de Newton pour résoudre (4), on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} A^t \Delta y - Q \Delta x + \Delta z = 0, & x > 0, z > 0 \\ A \Delta x = 0 \\ z \psi'(xz) \Delta x + x \psi'(xz) \Delta z = \psi(\mu r) - \psi(xz) \end{cases}$$

Nous considérons la fonction suivante:

$$\psi(t) = \sqrt{t} > 0, \quad \psi'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} > 0$$

on pose:

$$v = \sqrt{xz}, \quad d = \sqrt{\frac{x}{z}}, \quad p_x = d^{-1} \Delta x, \quad p_z = d \Delta z, \quad p_y = \Delta y$$

On détermine la nouvelle direction de descente (p_x, p_z, p_y)

$$\begin{cases} -DQDp_x + (AD)^t p_y + p_z = 0 \\ ADp_x = 0 \\ p_x + p_z = p_v \end{cases} \quad (5)$$

Où $p_v = 2(\sqrt{\mu r} - \sqrt{xz}) = 2(\sqrt{\mu r} - v)$

$$(5) \Leftrightarrow \begin{cases} -\bar{Q}p_x + \bar{A}^t p_y + p_z = 0 \\ \bar{A}p_x = 0 \\ p_x + p_z = 2(\sqrt{\mu r} - v) \end{cases} \quad (6)$$

où $Q = DQD$, $A = AD$ et $D = \text{diag}(d)$.

Avec des simples calculs on obtient la nouvelle direction :

$$\begin{cases} p_y = 2(\bar{A}(I + \bar{Q})^{-1} \bar{A}^t)^{-1} \bar{A}(I + \bar{Q})^{-1} (v - \sqrt{\mu r}) \\ p_x = (I + \bar{Q})^{-1} \bar{A}^t p_y + 2(I + \bar{Q})^{-1} (\sqrt{\mu r} - v) \\ p_z = 2(\sqrt{\mu r} - v) - p_x \end{cases}$$

Puis on calcul :

$$\begin{cases} \Delta x = d p_x \\ \Delta z = d^{-1} p_z \\ \Delta y = p_y \end{cases}$$

Description de l'algorithme

Algorithme pour la programmation quadratique convexe

- Posons : (x^0, y^0, z^0) solution strictement réalisable de (1) et (2), $\mu^0 > 0$ et $0 < \theta < 1$
- calculons: $r^0 = \frac{x^0 z^0}{\mu^0}$
- Début :
 - $x = x^0, z = z^0, v = \sqrt{xz}, d = \sqrt{\frac{x}{z}}, \mu = \mu^0$
 - si $x^t z > \varepsilon$ (ε paramètre de précision) faire
 - résoudre le système (6)
 - calculons : $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$
 - calculons : $x = x + \Delta x, y = y + \Delta y, z = z + \Delta z$ et $\mu = (1 - \theta) \mu$
- Fin

Pour établir la convergence de l'algorithme, on définit la mesure de proximité pour tout vecteur v par :

$$\delta(xz, \mu) = \delta(v, \mu) = \frac{\|p_v\|}{2 \min(\sqrt{\mu r})} = \frac{\|\sqrt{\mu r} - v\|}{2 \min(\sqrt{\mu r})}$$

Où $\| \cdot \|$ est la norme Euclidienne (l_2) et $\min(x) = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et nous

introduisons encore une autre mesure $\sigma_c(r) = \frac{\max(r)}{\min(r)}$.

Théorème 1 : Si $\delta = \delta(v, \mu) < 1$. Alors le nouvel itéré (x, y, z) est strictement réalisable.

Théorème 2 : Soient $x = x + \Delta x$ et $z = z + \Delta z$ le nouvel itéré avec $v = \sqrt{xz}$ et

$$\hat{v} = \sqrt{\hat{x}\hat{z}}, \text{ supposons } \delta = \delta(v, \mu) < 1. \text{ Alors } \delta(\hat{v}, \mu) \leq \frac{\delta^2}{1 + \sqrt{1 - \delta^2}}.$$

Ce résultat nous donne la convergence quadratique $\delta(\hat{v}, \mu) \leq \delta^2(v, \mu)$.

Théorème 3 : Soit $\delta = \delta(v, \mu) \leq \frac{1}{2}$ et $\hat{\mu} = (1 - \theta)\mu$, $\theta = \frac{2}{5\sqrt{\sigma_c(r)n}}$, $n \geq 4$. Alors :

$$\delta(\hat{v}, \hat{\mu}) \leq \frac{\theta}{1 - \theta} \sqrt{\sigma_c(r)} + \frac{1}{1 - \theta} \delta(\hat{v}, \mu) \leq \frac{1}{2}.$$

Ce théorème assure que tout les itérés restent près de la trajectoire centrale.

Théorème 4 : Soient x^0, z^0 le point initial strictement réalisable, $\mu^0 = \frac{(x^0)^t z^0}{n}$ et

soient x^k, z^k les solutions obtenues après k itérations. Alors $(x^k)^t z^k \leq \varepsilon$ est

$$\text{satisfait pour } k \geq \left\lceil \frac{1}{\theta} \log \frac{(x^0)^t z^0}{\varepsilon} \right\rceil.$$

Si $\theta = \frac{2}{5\sqrt{\sigma_c(r)n}}$, l'algorithme converge après $\left\lceil \frac{5}{2} \sqrt{\sigma_c(r)n} \log \frac{(x^0)^t z^0}{\varepsilon} \right\rceil$ itérations.

Ce théorème nous garanti la convergence polynômiale de notre algorithme.

III-2 Communications nationales et internationales :

- 1- Participation « à la Journée Nationale sur les Mathématiques Appliquées », Novembre 2011, Bordj Bou Arreridj, Algérie.
- 2- Participation au « Congrès des Mathématiciens Algériens », (Mars 2012),
Annaba, Algérie.

VI- Perspectives

Depuis l'apparition de l'algorithme de Karmarkar , les chercheurs sont en concurrence pour développer des méthodes de points intérieurs (améliorer la complexité polynômiale au même temps les algorithmes soient efficaces en pratique). Les problèmes du point initial, le pas de déplacement et le calcul du la direction de descente restent jusqu'à présent des sujets importants pour améliorer les performances des méthodes de points intérieurs.

Les méthodes de points intérieurs non réalisables sont des méthodes acceptables pour résoudre le problème d'initialisation, qui sera de plus en plus très difficile de trouver un point initial près de la trajectoire centrale pour des problèmes non linéaires, problèmes coniques et problèmes semi définis.

Nos perspectives sont :

- 1- Implémenter l'algorithme de points intérieurs pour la programmation semi définie positive linéaire, l'étude théorique est faite dans ma thèse de Doctorat en Science.
- 2- Généraliser ces méthodes aux problèmes non linéaires convexes, théoriquement et numériquement.
- 3- Généraliser ces méthodes aux problèmes coniques théoriquement et numériquement.
- 4- Faire une comparaison entre les résultats numériques des méthodes de points intérieurs non réalisables et les méthodes avec poids pour la (PQC).
- 5- Généraliser les méthodes de points intérieurs avec poids que j'ai étudié pour la programmation quadratique convexe aux problèmes non linéaires convexes et problèmes coniques.

V- Bibliographie

- [1] M.Achache, H. Roumili & A.Keraghel « *A numerical study of an infeasible primal-dual path-following algorithm for linear programming* », Applied Mathematics and Computation 186 (2007) 1472–1479.
- [2] G.B.Dantzig « *Linear Programming and Extensions* » Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1963.
- [3] Fiacco & McCormick « *Nonlinear programming: Sequential unconstrained minimization techniques* » John Wiley and Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1968.
- [4] K. R. Frisch « *The logarithmic potential method of convex programming* » Memorandum of May 13 (1955), University Institute of Economics, Oslo, Norway.
- [5] N. Karmarkar « *A new polynomial-time algorithm for linear programming* » Combinatorics 4 (1984), pp. 373-395.
- [6] L. G. Khachian « *A polynomial algorithm in linear programming* » Soviet Mathematics Doklady, 20 (1979), pp. 191-194.
- [7] Klee & Minty « *How good is the simplex algorithm ?, Inequalities* » O. Shisha, editor, Academic Press, New York (1972), pp. 159-175.
- [8] M. Kojma, S. Mizuno & A. Yoshise « *A primal-dual interior point algorithm for linear programming* » in Progress in Mathematical

Programming: Interior Point and Related Methods, N. Megiddo, ed., Springer-Verlag, New York, 1989, pp. 29-47.

[9] F. A. Lootsma « *Hessian matrices of penalty functions for solving constrained optimization problems* » Philips Res. Repts. 24 (1969), pp. 322-331.

[10] F. A. Lootsma « *Boundary properties of penalty functions for constrained optimization problems* » Philips Res. Repts. Suppl. 3 (1970).

[11] F. A. Lootsma « *A survey of methods for solving constrained optimization problems via unconstrained optimization, in Numerical Methods for Non-Linear Optimization* » Academic Press, London and New York (1972).

[12] W. Murray « *An algorithm for constrained minimization, in Optimization* » (R. Fletcher, ed), Academic Press London and New York (1969), pp. 247-258.

[13] W. Murray « *Analytical expressions for the eigenvalues and eigenvectors of the Hessian matrices of barrier and penalty functions* » J. Optim. Theory Appl. 7(1971), pp. 189-196.

[14] H. Roumili, *Etude qualitative des méthodes de points intérieurs non réalisables pour la programmation linéaire*, Thèse de Magister (1998), U.F.A Sétif- Algérie.

[15] H. Roumili, A.Keraghel & A.Yassine « *Infeasible Primal-Dual Algorithm for minimizing Convex Quadratic Problems* » Université Babes-Bolyai, (Octobre 2004), Roumanie.

- [16] H. Roumili, A.Keraghel & A.Yassine « *Infeasible Interior Point Method for Semidefinite Programs* » Applied Mathematical Sciences, Vol. 1, 2007, no. 21, 1009 – 1018.
- [17] H. Roumili « *Méthodes de points intérieurs non réalisables en optimisation. Théorie, algorithmes et applications* » Thèse de Doctorat en Sciences (2007), U.F.A Sétif- Algérie-.
- [18] H. Roumili « *Short-step primal-dual target-following algorithms for the convex quadratic problems* » Internal Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol 77, N° 3, 2012.
- [19] D. Zhang & Y. hang « *Superlinear convergence of infeasible interior point methods for linear programming*, Mathematical programming 66 (1994) pp. 361-377.