

Table des matières

Introduction	ii
1 Groupes avec une condition sur les parties infinies	1
1.1 Introduction	1
1.2 Synthèses des résultats sur les classes $(\mathcal{X}, \infty)$ et $(\mathcal{X}, \infty)^*$	2
1.2.1 Résultats sur les classes $(\mathcal{P}, \infty)$, $(\mathcal{C}_o, \infty)$ et $(\mathcal{U}, \infty)$	2
1.2.2 Résultats sur les classes $(\mathcal{N}, \infty)$ et $(\mathcal{N}_k, \infty)$	3
1.2.3 Résultats sur les classes $\mathcal{E}(\infty)$, $\mathcal{E}_k(\infty)$ et $(\mathcal{E}_k, \infty)$	5
1.2.4 Résultats sur les classes $(\mathcal{NF}, \infty)$ et $(\mathcal{N}_k\mathcal{F}, \infty)$	7
1.2.5 Résultats sur les classes E^* , E_k^* , $E^\sharp$ et $E_k^\sharp$	7
1.2.6 Résultats sur les classes $(\mathcal{XN}, \infty)$ et $(\mathcal{XN}_k, \infty)$	8
1.2.7 Résultats sur les classes (Ω, ∞) et (Ω_k, ∞)	11
1.3 Groupes des classes $(\Omega, \infty)^*$ et $(\Omega_k, \infty)^*$	11
1.4 Groupes des classes $(\mathcal{ME}, \infty)^*$ et $(\mathcal{ME}_k, \infty)^*$	19
2 Groupes ayant beaucoup de sous-groupes 2-engendrés dans une classe donnée	24
2.1 Introduction	24
2.2 Groupes des classes $F(\mathcal{NF})$ et $F(\mathcal{N}_k\mathcal{F})$	25
2.3 Groupes des classes $F(\mathcal{FN})$ et $F(\mathcal{FN}_k)$	31
2.4 Groupes des classes $F(\mathcal{TN})$ et $F(\mathcal{TN}_k)$	34
3 Une caractérisation des groupes finis-par-nilpotents	39
3.1 Introduction	39
3.2 Groupes des classes $F\Omega$ et $F\Omega_k$	39
3.3 Groupes des classes $F(\mathcal{ME})$ et $F(\mathcal{ME}_k)$	44
Bibliographie	48

Introduction

Notre objectif dans cette thèse est d'étudier et de caractériser deux différents types de classes de groupes ayant beaucoup de sous-groupes 2-engendrés appartenant à une classe donnée. Plus précisément, étant donnée une classe de groupes $\mathcal{X}$, le premier type de classes qui nous intéresse ici est la classe des groupes G dont toute partie infinie X contient deux éléments distincts x, y tels que $\langle x, x^y \rangle \in \mathcal{X}$. Le second type est la classe des groupes G tels que pour tout élément x dans G , il existe un sous-groupe normal $H(x)$ d'indice fini dans G vérifiant $\langle x, h \rangle \in \mathcal{X}$ pour tout $h \in H(x)$. Il est naturel de se poser la question suivante : si un groupe G appartient à l'un de ces deux types de classes mentionnées, alors G hérite-t-il de la même propriété que ses sous-groupes 2-engendrés décrits ci-dessus ? Autrement dit, le groupe G est-il lui-même dans la classe $\mathcal{X}$? Sinon nous devons le comparer avec un $\mathcal{X}$ -groupe, c'est-à-dire $G \in \mathcal{XF}$? ou encore $G \in \mathcal{FX}$? où $\mathcal{F}$ désigne la classe des groupes finis.

Étant donnée une classe de groupes $\mathcal{X}$, on note $(\mathcal{X}, \infty)$ (respectivement $(\mathcal{X}, \infty)^*$) la classe des groupes dont toute partie infinie contient deux éléments distincts x, y tels que $\langle x, y \rangle \in \mathcal{X}$ (respectivement $\langle x, x^y \rangle \in \mathcal{X}$). Notons que si la classe $\mathcal{X}$ est stable par passage aux sous-groupes, alors on a l'inclusion $(\mathcal{X}, \infty) \subset (\mathcal{X}, \infty)^*$. Notons qu'en 1981, Lennox et Wiegold, dans [29], ont été les premiers à définir et à désigner la classe $(\mathcal{X}, \infty)$ dans cette forme générale en s'inspirant d'un résultat dû à B. H. Neumann en 1976. Notons aussi que la classe $(\mathcal{X}, \infty)^*$ a été introduite par N. Trabelsi dans [41] et [42]. En utilisant la notation utilisée par Lennox et Wiegold, suite à un problème posé par Paul Erdős, B. H. Neumann a prouvé, dans [33], qu'un groupe G est dans la classe $(\mathcal{A}, \infty)$ si, et seulement si, $G/Z(G)$ est fini ; où $\mathcal{A}$ désigne la classe des groupes Abéliens. Ce résultat a généré beaucoup de recherche, en remplaçant la commutativité par d'autres classes de groupes, qui ont fait l'objet de nombreuses publications (voir par exemple [1]—[5], [7]—[11], [13], [14], [18], [29]—[31], [34], [37], [40] et [41]).

Soit $\mathcal{X}$ une classe arbitraire de groupes. En s'inspirant d'un résultat dû à De Falco, de Giovanni, Musella et Trabelsi [12], on définit $\mathcal{FX}$ comme étant la classe des groupes G tels que pour tout élément x dans G , il existe un sous-groupe normal $H(x)$ d'indice fini dans G vérifiant $\langle x, h \rangle \in \mathcal{X}$ pour tout $h \in H(x)$. Il est clair que si $\mathcal{X}$ est fermée par passage aux sous-groupes, alors tout groupe de $\mathcal{X}$ appartient à la classe $\mathcal{FX}$. Il est donc naturel d'examiner le problème inverse,

c'est-à-dire comparer un groupe de la classe $F\mathcal{X}$ à un $\mathcal{X}$ -groupe. Notons que nous sommes les premiers à définir la classe $F\mathcal{X}$ dans cette forme générale. Le résultat de De Falco, de Giovanni, Musella et Trabelsi, dans [12], affirme donc que si G est un groupe résoluble-par-fini de type fini dans la classe $F\mathcal{N}_k$, alors il existe un entier positif m , ne dépendant que de k , tel que $G/Z_m(G)$ soit fini (et donc $G \in \mathcal{FN}_m$); où $\mathcal{N}_c$ désigne la classe des groupes nilpotents de classe égale au plus à c . Il est naturel de se demander ce qui se passe si on annule la borne de nilpotence k dans ce dernier résultat? Par exemple le groupe G appartiendrait-il à la classe $\mathcal{FN}$? où $\mathcal{N}$ désigne la classe des groupes nilpotents. Nous avons travaillé sur ce sujet et nous avons réussi à répondre affirmativement à cette question, ce qui nous a encouragé à montrer d'autres résultats plus importants.

Notre thèse se compose de trois chapitres que nous allons brièvement décrire.

Dans le premier chapitre, nous commençons par présenter quelques extensions du résultat de B. H. Neumann qui concernent les classes $(\mathcal{X}, \infty)$ et $(\mathcal{X}, \infty)^*$; en donnant les résultats dans un ordre chronologique et en donnant aussi des explications et des remarques qui permettent de comprendre le lien entre ces différents résultats. Après on caractérisera les classes $(\Omega, \infty)^*$, $(\Omega_k, \infty)^*$, $(\mathcal{ME}, \infty)^*$ et $(\mathcal{ME}_k, \infty)^*$ pour les groupes hyper-(Abélien-par-fini) de type fini, où $k > 0$ est un entier et Ω , Ω_k , $\mathcal{M}$, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}_k$ désignent respectivement la classe des groupes de profondeur finie, des groupes de profondeur finie $\leq k$, des groupes vérifiant la condition minimale sur les sous-groupes normaux, des groupes d'Engel et des groupes k -Engel. Plus précisément, on établira que si G est un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini et dans la classe $(\Omega, \infty)^*$ (respectivement $(\Omega_k, \infty)^*$, $(\mathcal{ME}, \infty)^*$ et $(\mathcal{ME}_k, \infty)^*$), alors G est dans la classe $\mathcal{FN}$ (respectivement $\mathcal{FN}_{c_1}$, $\mathcal{FN}$ et $\mathcal{FN}_{c_2}$) pour certains entiers positifs $c_1 = c_1(k)$ et $c_2 = c_2(k)$ ne dépendant que de l'entier k ; généralisant ainsi d'autres résultats connus, notamment [27, Théorème], [41, Théorème 3] et [5, Corollaire 3]. Ces résultats, obtenus en collaboration avec T. Rouabhi et sous la direction de N. Trabelsi, ont fait l'objet de la publication [14].

Dans le deuxième chapitre, nous considérerons la classe $F\mathcal{X}$ quand $\mathcal{X}$ est la classe des groupes nilpotent-par-fini, fini-par-nilpotent et périodique-par-nilpotent. On a montré, pour ces trois classes $\mathcal{X}$, que tout groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini dans $F\mathcal{X}$ appartient à $\mathcal{X}$. Plus précisément, on établira qu'un groupe G hyper-(Abélien-par-fini) de type fini est dans la classe $F(\mathcal{NF})$ (respectivement $F(\mathcal{FN})$, $F(\mathcal{TN})$) si, et seulement si, G est dans la classe $\mathcal{NF}$ (respectivement $\mathcal{FN}$, $\mathcal{TN}$); où $\mathcal{T}$ désigne la classe des groupes périodiques. On prouvera aussi que si $k > 0$ est un entier et si G est un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini dans la classe $F(\mathcal{N}_k\mathcal{F})$ (respectivement $F(\mathcal{FN}_k)$, $F(\mathcal{TN}_k)$), alors il existe un entier positif $c = c(k)$ ne dépendant que de k tel que G soit dans la classe $\mathcal{N}_c\mathcal{F}$ (respectivement $\mathcal{FN}_c$, $\mathcal{TN}_c$). Notre résultat qui concerne la classe $F(\mathcal{FN}_k)$ améliore donc le résultat de De Falco, de Giovanni, Musella et Trabelsi [12, Théorème 3.2 (a)] cité ci-dessus. Ces résultats, obtenus en collaboration avec N. Trabelsi,

ont fait l'objet de la publication [15].

Concernant le troisième chapitre, on y donnera une caractérisation des groupes finis-par-nilpotents dans la classe des groupes hyper-(Abélien-par-fini) de type fini. Plus précisément, on établira qu'un groupe G hyper-(Abélien-par-fini) de type fini est dans la classe $F\Omega$ (respectivement $F(\mathcal{ME})$) si, et seulement si, G est dans la classe $\mathcal{FN}$; où Ω et $\mathcal{ME}$ sont les classes utilisées dans le premier chapitre. On prouvera aussi que si $k > 0$ est un entier et si G est un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini dans la classe $F\Omega_k$ (respectivement $F(\mathcal{ME}_k)$), alors il existe un entier positif $c = c(k)$ ne dépendant que de k tel que G soit dans la classe $\mathcal{FN}_c$; où Ω_k et $\mathcal{E}_k$ sont les classes introduites au chapitre 1. Ces résultats généralisent ainsi quelques résultats établis au deuxième chapitre.

Chapitre 1

Groupes avec une condition sur les parties infinies

1.1 Introduction

Étant donnée une classe de groupes $\mathcal{X}$, on note $(\mathcal{X}, \infty)$ (respectivement $(\mathcal{X}, \infty)^*$) la classe des groupes dont toute partie infinie contient deux éléments distincts x, y tels que $\langle x, y \rangle \in \mathcal{X}$ (respectivement $\langle x, x^y \rangle \in \mathcal{X}$). Notons que si la classe $\mathcal{X}$ est stable par passage aux sous-groupes, alors on a l'inclusion $(\mathcal{X}, \infty) \subset (\mathcal{X}, \infty)^*$. Notons qu'en 1981, Lennox et Wiegold ont été les premiers à définir la classe $(\mathcal{X}, \infty)$ en s'inspirant d'un résultat dû à B. H. Neumann en 1976. Notons aussi que la classe $(\mathcal{X}, \infty)^*$ a été introduite par N. Trabelsi dans [41] et [42]. En utilisant la notation définie par Lennox et Wiegold, suite à un problème posé par Paul Erdős, B. H. Neumann a prouvé, dans [33], qu'un groupe G est dans la classe $(\mathcal{A}, \infty)$ si, et seulement si, $G/Z(G)$ est fini ; où $\mathcal{A}$ désigne la classe des groupes Abéliens. Ce résultat a généré beaucoup de recherche, en remplaçant la commutativité par d'autres classes de groupes, qui ont fait l'objet de nombreuses publications. Dans ce chapitre, nous commençons par présenter quelques extensions du résultat de B. H. Neumann. Puis on va caractériser les classes $(\Omega, \infty)^*$, $(\Omega_k, \infty)^*$, $(\mathcal{ME}, \infty)^*$ et $(\mathcal{ME}_k, \infty)^*$ pour les groupes hyper-(Abélien-par-fini) de type fini, où $k > 0$ est un entier et Ω , Ω_k , $\mathcal{M}$, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}_k$ désignent respectivement la classe des groupes de profondeur finie, des groupes de profondeur finie $\leq k$, des groupes vérifiant la condition minimale sur les sous-groupes normaux, des groupes d'Engel et des groupes k -Engel. Plus précisément,

on établira que si G est un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini dans la classe $(\Omega, \infty)^*$ (respectivement $(\Omega_k, \infty)^*$, $(\mathcal{ME}, \infty)^*$ et $(\mathcal{ME}_k, \infty)^*$), alors G est dans la classe $\mathcal{FN}$ (respectivement $\mathcal{FN}_{c_1}$, $\mathcal{FN}$ et $\mathcal{FN}_{c_2}$) pour certains entiers positifs $c_1 = c_1(k)$ et $c_2 = c_2(k)$ ne dépendant que de l'entier k .

1.2 Synthèses des résultats sur les classes $(\mathcal{X}, \infty)$ et $(\mathcal{X}, \infty)^*$

Dans cette section, on présentera quelques extensions du résultat de B. H. Neumann [33] affirmant qu'un groupe G est dans la classe $(\mathcal{A}, \infty)$ si, et seulement si, $G/Z(G)$ est fini, pour les types de classes des groupes $(\mathcal{X}, \infty)$ et $(\mathcal{X}, \infty)^*$.

1.2.1 Résultats sur les classes $(\mathcal{P}, \infty)$, $(\mathcal{C}_o, \infty)$ et $(\mathcal{U}, \infty)$

On désigne par $\mathcal{P}$, $\mathcal{C}_o$ et $\mathcal{U}$ respectivement la classe des groupes polycycliques, cohérents et superrésolubles. Rappelons qu'un groupe est dit cohérent si tout sous-groupe de type fini est de présentation finie, où un groupe G est dit de présentation finie si $G = \langle X \mid R \rangle$ avec $\text{card}(X) < \infty$ et $\text{card}(R) < \infty$, où X est une partie génératrice de G et R est l'ensemble des relations définissant G . Rappelons aussi qu'un groupe est dit superrésoluble s'il admet une série cyclique normale finie, i.e. une série normale finie dont chaque facteur est un groupe cyclique. Il est clair qu'on a $\mathcal{U} \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{C}_o$.

En 1981, J. C. Lennox et J. Wiegold, dans [29], ont étudié les classes $(\mathcal{P}, \infty)$ et $(\mathcal{C}_o, \infty)$ dans un groupe résoluble de type fini et ils ont montré les résultats suivants :

Théorème 1.2.1.1 *Soit G un groupe résoluble de type fini. Alors G est dans la classe $(\mathcal{P}, \infty)$ si, et seulement si, G est dans la classe $\mathcal{P}$.*

Théorème 1.2.1.2 *Soit G un groupe résoluble de type fini. Alors G est dans la classe $(\mathcal{C}_o, \infty)$ si, et seulement si, G est dans la classe $\mathcal{C}_o$.*

Notons que le Théorème 1.2.1.1 n'est pas vrai pour tous les groupes. En effet, Lennox et Wiegold ont cité l'exemple de M. F. Newman [29] d'un p -groupe infini G engendré par trois éléments dont tout sous-groupe à deux générateurs est fini,

donc nilpotent. Il est clair que G appartient à la classe $(\mathcal{P}, \infty)$, mais il n'est pas dans la classe $\mathcal{P}$ car il est un p -groupe infini.

Lennox et Wiegold ont cité aussi l'exemple de Vaughan-Lee et Wiegold [43] d'un p -groupe infini G , parfait (i.e. $G' = G$), localement fini et d'exposant un nombre premier $p \geq 5$. Dans ce cas, tout sous-groupe à deux générateurs est (p -groupe fini) nilpotent. Par suite G appartient à la classe $(\mathcal{P}, \infty)$, mais il n'est pas dans la classe $\mathcal{P}$ car il n'est pas de type fini.

Notons que le Théorème 1.2.1.1 généralise, dans un cas particulier, un résultat qui est dû à J. C. Lennox [25] affirmant qu'un groupe résoluble de type fini dont tout sous-groupe à deux générateurs est polycyclique est lui-même polycyclique.

De plus Lennox et Wiegold ont conjecturé que dans la classe des groupes résolubles de type fini, la classe $(\mathcal{U}, \infty)$ coïncide avec la classe $\mathcal{FU}$, où $\mathcal{F}$ désigne la classe des groupes finis. Cette conjecture est devenue une réalité et a été démontrée en **1983** par J. R. J. Groves [18], donc le résultat de J. R. J. Groves est le suivant :

Théorème 1.2.1.3 *Soit G un groupe résoluble de type fini. Alors G est dans la classe $(\mathcal{U}, \infty)$ si, et seulement si, G est dans la classe $\mathcal{FU}$.*

1.2.2 Résultats sur les classes $(\mathcal{N}, \infty)$ et $(\mathcal{N}_k, \infty)$

Soit $k > 0$ un entier fixé. On désigne par $\mathcal{N}$ (respectivement $\mathcal{N}_k$) la classe des groupes nilpotents (respectivement nilpotents de classe égale au plus à k). Il est clair que $\mathcal{N} = \bigcup_{k \geq 0} \mathcal{N}_k$. On désigne aussi par $\mathcal{N}_k^{(2)}$ la classe des groupes dont tout sous-groupe engendré par deux éléments est dans la classe $\mathcal{N}_k$.

En **1981**, J. C. Lennox et J. Wiegold, dans [29], ont montré le résultat suivant :

Théorème 1.2.2.1 *Soit G un groupe résoluble de type fini. Alors G est dans la classe $(\mathcal{N}, \infty)$ si, et seulement si, G est dans la classe $\mathcal{FN}$.*

En **1994**, C. Delizia, dans [7], s'est intéressé à la classe $(\mathcal{N}_2, \infty)$ et il a montré le résultat suivant :

Théorème 1.2.2.2 *Soit G un groupe résoluble de type fini. Alors G est dans la classe $(\mathcal{N}_2, \infty)$ si, et seulement si, $G/Z_2(G)$ est fini.*

En 1996, C. Delizia, dans [8], a montré que ce dernier résultat est vrai aussi pour les groupes résiduellement finis de type fini ; plus précisément, il a montré le résultat suivant :

Théorème 1.2.2.3 *Soit G un groupe résiduellement fini de type fini. Alors G est dans la classe $(\mathcal{N}_2, \infty)$ si, et seulement si, $G/Z_2(G)$ est fini.*

Malheureusement, il n'est pas possible de prolonger les deux Théorèmes 1.2.2.2 et 1.2.2.3 à la classe $(\mathcal{N}_k, \infty)$ pour $k > 2$. Autrement dit, si G est un groupe résoluble (ou résiduellement fini) de type fini et dans la classe $(\mathcal{N}_k, \infty)$ où $k > 2$, alors $G/Z_k(G)$ n'est pas nécessairement fini. En effet, en 1998, C. Delizia, dans [9], a cité l'exemple de L. C. Kappe et W. P. Kappe [24] d'un groupe G de type fini, sans torsion, 3-Engel et nilpotent de classe égale exactement à 4. Il est clair que G est résoluble et résiduellement fini. Par un résultat bien connu de H. Heineken, dans [20], tout sous-groupe à deux générateurs d'un groupe 3-Engel sans torsion est nilpotent de classe égale au plus à 3. Il s'ensuit que G appartient à la classe $(\mathcal{N}_3, \infty)$. Mais $G/Z_3(G)$ est infini, parce que s'il est fini, $\gamma_4(G)$ est fini en vertu d'un résultat de Baer [23, Théorème 1] ; or G est sans torsion, donc $\gamma_4(G) = 1$, i.e. $G \in \mathcal{N}_3$, ce qui est contradictoire. De plus, C. Delizia a considéré la classe $(\mathcal{N}_k, \infty)$ avec $k > 2$ est un entier quelconque, et il a montré le résultat suivant :

Théorème 1.2.2.4 *Soit G un groupe résoluble de type fini dans la classe $(\mathcal{N}_k, \infty)$. Alors $G/Z_l(G)$ est fini pour un certain entier positif l dépendant de k et de la longueur dérivée de G .*

En 1999, A. Abdollahi et B. Taeri, dans [3], se sont intéressés à la classe $(\mathcal{N}_k, \infty)$ avec $k > 0$ est un entier quelconque, et ils ont montré le résultat suivant :

Théorème 1.2.2.5 *Soit G un groupe résoluble de type fini. Alors G est dans la classe $(\mathcal{N}_k, \infty)$ si, et seulement si, G est dans la classe $\mathcal{FN}_k^{(2)}$.*

Notons que ce dernier résultat est une généralisation du précédent. En effet, si G est un groupe résoluble de longueur dérivée d et de type fini dans la classe $(\mathcal{N}_k, \infty)$, alors le Théorème 1.2.2.5 affirme que G est dans $\mathcal{FN}_k^{(2)}$ et par suite G

est fini-par- $(k$ -Engel, sans torsion et résoluble de longueur dérivée d) ; d'où, par le résultat de Gruenberg [35, Théorème 7.36 (i)], G est dans la classe $\mathcal{FN}_{k^{d-1}}$. Maintenant, par P. Hall [23, 1.5], $G/Z_l(G)$ est fini, avec $l = l(k, d) = k^{d-1}$.

En 2000, C. Delizia, A. H. Rhemtulla et H. Smith, dans [11], ont généralisé le Théorème 1.2.2.4 en démontrant le résultat suivant :

Théorème 1.2.2.6 *Soit G un groupe localement gradué de type fini dans la classe $(\mathcal{N}_k, \infty)$. Alors il existe un entier positif $c = c(k)$, ne dépendant que de k , tel que $G/Z_c(G)$ soit fini.*

1.2.3 Résultats sur les classes $\mathcal{E}(\infty)$, $\mathcal{E}_k(\infty)$ et $(\mathcal{E}_k, \infty)$

On désigne par $\mathcal{E}(\infty)$ la classe des groupes dont toute partie infinie contient deux éléments distincts x, y tels que $[x, {}_n y] = 1$ pour un certain entier $n = n(x, y) > 0$. Si $k > 0$ est un entier fixé, notons aussi $\mathcal{E}_k(\infty)$ la classe des groupes dont toute partie infinie contient deux éléments distincts x, y tels que $[x, {}_k y] = 1$. Il est clair qu'on a $\mathcal{E}_k(\infty) \subset \mathcal{E}(\infty)$. On désigne par $\mathcal{E}_k$ la classe des groupes k -Engel, donc $(\mathcal{E}_k, \infty) \subset \mathcal{E}_k(\infty) \subset \mathcal{E}(\infty)$.

En 1993, P. Longobardi et M. Maj, dans [31], ont montré les résultats suivants :

Théorème 1.2.3.1 *Soit G un groupe résoluble de type fini. Alors G est dans la classe $\mathcal{E}(\infty)$ si, et seulement si, G est dans la classe $\mathcal{FN}$.*

Théorème 1.2.3.2 *Soit G un groupe résoluble de type fini. Alors G est dans la classe $\mathcal{E}_2(\infty)$ si, et seulement si, $G/R(G)$ est fini ; où $R(G)$ désigne le sous-groupe caractéristique dans G constitué de tous les éléments 2-Engel à droite de G .*

Notons que le Théorème 1.2.3.1 est une amélioration du Théorème 1.2.2.1, car $(\mathcal{N}, \infty) \subset \mathcal{E}(\infty)$. Notons aussi qu'en 1994, G. Endimioni, dans [13], a montré le Théorème 1.2.3.1 par une méthode différente.

En 2000, A. Abdollahi, dans [1], a montré le résultat suivant :

Théorème 1.2.3.3 *Soit G un groupe résoluble de type fini. Alors G est dans la classe $\mathcal{E}_2(\infty)$ si, et seulement si, $G/Z_2(G)$ est fini.*

Notons que le Théorème 1.2.3.3 est une amélioration du Théorème 1.2.2.2, car $(\mathcal{N}_2, \infty) \subset \mathcal{E}_2(\infty)$. De plus, il est clair que $Z_2(G) \leq R(G)$, donc si $G/Z_2(G)$ est fini, $G/R(G)$ est également fini ; si bien que le Théorème 1.2.3.3 généralise aussi le Théorème 1.2.3.2.

En 2000, A. Abdollahi, dans [2], a étudié les classes $\mathcal{E}_3(\infty)$ et $\mathcal{E}_k(\infty)$ où $k > 0$ est un entier quelconque, et il a montré les résultats suivants :

Théorème 1.2.3.4 *Soit G un groupe résoluble de type fini. Alors G est dans la classe $\mathcal{E}_3(\infty)$ si, et seulement si, G est dans la classe $\mathcal{FN}_3^{(2)}$.*

Théorème 1.2.3.5 *Soit G un groupe métabélien de type fini. Alors G est dans la classe $\mathcal{E}_k(\infty)$ si, et seulement si, $G/Z_k(G)$ est fini.*

Théorème 1.2.3.6 *Soit G un groupe résoluble de type fini dans la classe $\mathcal{E}_k(\infty)$. Alors il existe un entier $t > 0$, ne dépendant que de k , tel que $G/Z_t(G)$ soit fini.*

Notons que le Théorème 1.2.3.6 est une amélioration du Théorème 1.2.2.4, car $(\mathcal{N}_k, \infty) \subset \mathcal{E}_k(\infty)$.

En 2001, C. Delizia et C. Nicotera, dans [10], ont montré le résultat suivant :

Théorème 1.2.3.7 *Soit G un groupe résiduellement fini de type fini. Si G est dans la classe $\mathcal{E}_2(\infty)$, alors $G/Z_2(G)$ est fini.*

Notons que le Théorème 1.2.3.7 est une amélioration du Théorème 1.2.2.3, car $(\mathcal{N}_2, \infty) \subset \mathcal{E}_2(\infty)$.

En 2001, P. Longobardi, dans [30], a montré le résultat suivant :

Théorème 1.2.3.8 *Soit G un groupe localement gradué de type fini. Si G est dans la classe $(\mathcal{E}_k, \infty)$, alors G est dans la classe $\mathcal{FE}_k$ (par conséquent, G est dans la classe $\mathcal{E}_k\mathcal{F}$).*

Notons que le Théorème 1.2.3.8 est une amélioration du Théorème 1.2.2.6. En effet, si G est un groupe localement gradué de type fini et dans la classe $(\mathcal{N}_k, \infty) \subset (\mathcal{E}_k, \infty)$, alors le Théorème 1.2.3.8 affirme que G est dans $\mathcal{FE}_k$, donc G est fini-par-(localement gradué, k -Engel et de type fini) et par suite G est fini-par-(nilpotent, k -Engel et sans torsion). Maintenant, par le résultat de Zelmanov [44], G est dans la classe $\mathcal{FN}_{c(k)}$, où $c(k) > 0$ est un entier ne dépendant que de k ; d'où, par P. Hall [23, 1.5], $G/Z_{c(k)}(G)$ est fini.

1.2.4 Résultats sur les classes $(\mathcal{NF}, \infty)$ et $(\mathcal{N}_k\mathcal{F}, \infty)$

En 2002, N. Trabelsi, dans [40], s'est intéressé aux classes $(\mathcal{NF}, \infty)$ et $(\mathcal{N}_k\mathcal{F}, \infty)$, et il a montré les résultats suivants :

Théorème 1.2.4.1 *Soit G un groupe résoluble de type fini. Alors G est dans la classe $(\mathcal{NF}, \infty)$ si, et seulement si, G est dans la classe $\mathcal{NF}$.*

Théorème 1.2.4.2 *Soit $k > 0$ un entier et soit G un groupe résoluble de type fini dans la classe $(\mathcal{N}_k\mathcal{F}, \infty)$. Alors il existe une fonction $c = c(k)$ de k , tel que G soit dans la classe $\mathcal{N}_c\mathcal{F}$.*

Notons que le Théorème 1.2.4.1 généralise un résultat qui est dû à J. C. Lennox [25] affirmant qu'un groupe résoluble de type fini est dans la classe $\mathcal{NF}$ si, et seulement si, tous ses sous-groupe à deux générateurs sont dans la classe $\mathcal{NF}$.

1.2.5 Résultats sur les classes E^* , E_k^* , $E^\sharp$ et $E_k^\sharp$

Soit $k > 0$ un entier fixé. Notons E^* (respectivement E_k^*) la classe des groupes G tels que pour toute partie infinie X de G , il existe deux éléments distincts x, y dans X , un entier positif n et des entiers rationnels non nuls $t_0, t_1, \dots, t_n$ (respectivement $t_0, t_1, \dots, t_k$) dépendants de x, y et vérifiant $[z_0^{t_0}, z_1^{t_1}, \dots, z_n^{t_n}] = 1$ (respectivement $[z_0^{t_0}, z_1^{t_1}, \dots, z_k^{t_k}] = 1$) ; où $z_i \in \{x, y\}$ pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ (respectivement $\{0, 1, \dots, k\}$) et $z_0 \neq z_1$. Notons qu'on a $(\mathcal{NF}, \infty) \subset E^*$ et $(\mathcal{N}_k\mathcal{F}, \infty) \subset E_k^*$.

En 2002, A. Abdollahi et N. Trabelsi, dans [4], ont montré les résultats suivants :

Théorème 1.2.5.1 *Soit G un groupe résoluble de type fini. Alors G est dans la classe E^* si, et seulement si, G est dans la classe $\mathcal{NF}$.*

Théorème 1.2.5.2 *Soit G un groupe résoluble de type fini dans la classe E_k^* . Alors il existe un entier positif t , ne dépendant que de k , tel que G soit dans la classe $\mathcal{N}_t\mathcal{F}$.*

Théorème 1.2.5.3 *Soit G un groupe métabélien de type fini. Alors G est dans la classe E_k^* si, et seulement si, G est dans la classe $\mathcal{N}_k\mathcal{F}$.*

Notons que le Théorème 1.2.5.1 est une amélioration du Théorème 1.2.4.1, car $(\mathcal{NF}, \infty) \subset E^*$. Notons aussi que le Théorème 1.2.5.2 est une amélioration du Théorème 1.2.4.2, car $(\mathcal{N}_k\mathcal{F}, \infty) \subset E_k^*$.

Soit $k > 0$ un entier fixé. Dans ce qui suit ; on notera $E^\sharp$ (respectivement $E_k^\sharp$) la classe des groupes $G \in E^*$ (respectivement E_k^*) pour lesquels les entiers rationnels $t_0, \dots, t_n$ (respectivement $t_0, \dots, t_k$) sont dans l'ensemble $\{-1, 1\}$. Notons qu'on a $\mathcal{E}(\infty) \subset E^\sharp \subset E^*$ et $\mathcal{E}_k(\infty) \subset E_k^\sharp \subset E_k^*$.

En **2002**, A. Abdollahi et N. Trabelsi, dans [4], ont montré les résultats suivants :

Théorème 1.2.5.4 *Soit G un groupe résoluble de type fini. Alors G est dans la classe $E^\sharp$ si, et seulement si, G est dans la classe $\mathcal{FN}$.*

Théorème 1.2.5.5 *Soit G un groupe résoluble de type fini dans la classe $E_k^\sharp$. Alors il existe un entier positif t , ne dépendant que de k , tel que $G/Z_t(G)$ soit fini.*

Théorème 1.2.5.6 *Soit G un groupe métabélien de type fini. Alors G est dans la classe $E_k^\sharp$ si, et seulement si, $G/Z_k(G)$ est fini. En particulier ; tout groupe métabélien sans torsion dans $E_k^\sharp$ est nilpotent de classe au plus égale à k .*

Notons que le Théorème 1.2.5.4 est une amélioration du Théorème 1.2.3.1, car $\mathcal{E}(\infty) \subset E^\sharp$. Notons aussi que le Théorème 1.2.5.5 (respectivement 1.2.5.6) est une amélioration du Théorème 1.2.3.6 (respectivement 1.2.3.5), car $\mathcal{E}_k(\infty) \subset E_k^\sharp$.

1.2.6 Résultats sur les classes $(\mathcal{XN}, \infty)$ et $(\mathcal{XN}_k, \infty)$

On désigne par $\mathcal{Y}$, $\mathcal{T}$ et $\mathcal{C}$ respectivement la classe des groupes vérifiant la condition minimale sur les sous-groupes, la classe des groupes périodiques et la classe des groupes de Chernikov. Notons qu'on a $\mathcal{F} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{Y} \subset \mathcal{T}$.

En **2002**, N. Trabelsi, dans [40], s'est intéressé aux classes $(\mathcal{FN}, \infty)$ et $(\mathcal{FN}_k, \infty)$, où $k > 0$ est un entier quelconque, et il a montré les résultats suivants :

Théorème 1.2.6.1 *Soit G un groupe résoluble de type fini. Alors G est dans la classe $(\mathcal{FN}, \infty)$ si, et seulement si, G est dans la classe $\mathcal{FN}$.*

Théorème 1.2.6.2 *Soit $k > 0$ un entier et soit G un groupe résoluble de type fini dans la classe $(\mathcal{FN}_k, \infty)$. Alors il existe une fonction $c = c(k)$ de k tel que G soit dans la classe $\mathcal{FN}_c$.*

Notons que le Théorème 1.2.6.1 généralise un résultat qui est dû à J.C. Lennox [25] affirmant qu'un groupe résoluble de type fini est dans la classe $\mathcal{FN}$ si, et seulement si, tous ses sous-groupes à deux générateurs sont dans la classe $\mathcal{FN}$. Le Théorème 1.2.6.1 est aussi une amélioration du Théorème 1.2.2.1, car $(\mathcal{N}, \infty) \subset (\mathcal{FN}, \infty)$. Notons que le Théorème 1.2.6.2 généralise le Théorème 1.2.2.4, en effet, si G est un groupe résoluble de type fini et dans la classe $(\mathcal{N}_k, \infty) \subset (\mathcal{FN}_k, \infty)$, alors le Théorème 1.2.6.2 montre que $G \in \mathcal{FN}_c$ où $c > 0$ est un entier ne dépendant que de k ; donc $\gamma_{c+1}(G)$ est fini et par suite, par P. Hall [23, 1.5], $G/Z_c(G)$ est fini.

En 2002, A. Abdollahi et N. Trabelsi, dans [4], ont montré le résultat suivant :

Théorème 1.2.6.3 *Soit G un groupe résoluble de type fini. Alors G est dans la classe $(\mathcal{FN}_k, \infty)$ si, et seulement si, G est dans la classe $\mathcal{FN}_k^{(2)}$.*

Notons que le Théorème 1.2.6.3 est une amélioration du Théorème 1.2.2.5, car $(\mathcal{N}_k, \infty) \subset (\mathcal{FN}_k, \infty)$.

En 2004, A. Boukaroura, dans [5], a considéré les classes $(\mathcal{YN}, \infty)$ et $(\mathcal{YN}_k, \infty)$, où $k > 0$ est un entier quelconque, et il a montré les résultats suivants :

Théorème 1.2.6.4 *Soit G un groupe résoluble de type fini. Alors G est dans la classe $(\mathcal{YN}, \infty)$ si, et seulement si, G est dans la classe $\mathcal{FN}$.*

Théorème 1.2.6.5 *Soit $k > 0$ un entier et soit G un groupe résoluble de type fini. Alors G est dans la classe $(\mathcal{YN}_k, \infty)$ si, et seulement si, G est dans la classe $\mathcal{FN}_k^{(2)}$.*

Notons que le Théorème 1.2.6.4 est une amélioration du Théorème 1.2.6.1, car $(\mathcal{FN}, \infty) \subset (\mathcal{YN}, \infty)$. Notons aussi que le Théorème 1.2.6.5 améliore le Théorème 1.2.2.5 et le Théorème 1.2.6.3.

En 2006, L. Noui, dans [34], a étudié la classe $(\mathcal{CN}, \infty)$ et il a montré le résultat suivant :

Théorème 1.2.6.6 *Soit G un groupe résoluble de type fini. Alors G est dans la classe $(\mathcal{CN}, \infty)$ si, et seulement si, G est dans la classe $\mathcal{FN}$.*

En 2005, N. Trabelsi, dans [41], a étudié les classes $(\mathcal{CN}, \infty)^*$, $(\mathcal{CN}_k, \infty)^*$, $(\mathcal{TN}, \infty)$ et $(\mathcal{TN}_k, \infty)$; où $k > 0$ est un entier quelconque, et il a montré les résultats suivants :

Théorème 1.2.6.7 *Soit G un groupe résoluble de type fini. Alors G est dans la classe $(\mathcal{CN}, \infty)^*$ si, et seulement si, G est dans la classe $\mathcal{FN}$.*

Théorème 1.2.6.8 *Soit $k > 0$ un entier et soit G un groupe résoluble de type fini dans la classe $(\mathcal{CN}_k, \infty)^*$. Alors il existe un entier positif $c = c(k)$, ne dépendant que de k , tel que G soit dans la classe $\mathcal{FN}_c$.*

Théorème 1.2.6.9 *Soit G un groupe résoluble de type fini. Alors G est dans la classe $(\mathcal{TN}, \infty)$ si, et seulement si, G est dans la classe $\mathcal{TN}$.*

Théorème 1.2.6.10 *Soit $k > 0$ un entier et soit G un groupe résoluble de type fini dans la classe $(\mathcal{TN}_k, \infty)$. Alors il existe un entier positif $c = c(k)$, ne dépendant que de k , tel que G soit dans la classe $\mathcal{TN}_c$.*

Notons, pour les groupes résolubles, qu'on a $\mathcal{Y} = \mathcal{C}$ et ainsi on a $(\mathcal{YN}, \infty) = (\mathcal{CN}, \infty) \subset (\mathcal{CN}, \infty)^*$ et $(\mathcal{YN}_k, \infty) \subset (\mathcal{CN}_k, \infty)^*$.

En 2007, T. Rouabhi et N. Trabelsi, dans [37], ont étudié les classes $(\mathcal{TN}, \infty)^*$ et $(\mathcal{TN}_k, \infty)^*$, où $k > 0$ est un entier quelconque, et ils ont montré les résultats suivants :

Théorème 1.2.6.11 *Soit G un groupe résoluble de type fini. Alors G est dans la classe $(\mathcal{TN}, \infty)^*$ si, et seulement si, G est dans la classe $\mathcal{TN}$.*

Théorème 1.2.6.12 *Soit $k > 0$ un entier et soit G un groupe résoluble de type fini dans la classe $(\mathcal{TN}_k, \infty)^*$. Alors il existe un entier positif $c = c(k)$, ne dépendant que de k , tel que G soit dans la classe $\mathcal{TN}_c$.*

Notons que le Théorème 1.2.6.11 est une amélioration du Théorème 1.2.6.9, car $(\mathcal{TN}, \infty) \subset (\mathcal{TN}, \infty)^*$. Le Théorème 1.2.6.12 améliore aussi le Théorème 1.2.6.10.

1.2.7 Résultats sur les classes (Ω, ∞) et (Ω_k, ∞)

On dit qu'un groupe G est de profondeur finie si sa série centrale descendante est stationnaire (ou se stabilise) après un nombre fini d'étapes, i.e. s'il existe un entier positif n tel que $\gamma_n(G) = \gamma_{n+1}(G)$; où $\gamma_n(G)$ désigne le $n^{\text{ième}}$ terme de la série centrale descendante de G . Le plus petit entier positif vérifiant cette propriété est appelé "profondeur de G ". On désigne par Ω la classe des groupes de profondeur finie. En particulier, si k est un entier positif fixé, on notera Ω_k la classe des groupes de profondeur finie $\leq k$, i.e. la classe des groupes G tels que $\gamma_k(G) = \gamma_{k+1}(G)$. Il est très clair qu'on a $\Omega_k \subset \Omega$, $\mathcal{YN} \subset \Omega$ et $\mathcal{N}_k \subset \Omega_{k+1}$.

En 1975, J. C. Lennox, dans [26], a montré qu'un groupe résoluble de type fini est dans la classe $\mathcal{FN}$ si, et seulement si, tous ses sous-groupe à deux générateurs sont dans la classe Ω .

En 2004, A. Boukaroura, dans [5], a généralisé ce résultat, et il a montré les résultats suivants :

Théorème 1.2.7.1 *Soit G un groupe résoluble de type fini. Alors G est dans la classe (Ω, ∞) si, et seulement si, G est dans la classe $\mathcal{FN}$.*

Théorème 1.2.7.2 *Soit $k > 0$ un entier et soit G un groupe résoluble de type fini. Alors G est dans la classe (Ω_k, ∞) si, et seulement si, G est dans la classe $\mathcal{FN}_{k-1}^{(2)}$.*

Notons que le Théorème 1.2.6.4 a été démontré en utilisant le Théorème 1.2.7.1. Notons aussi que le Théorème 1.2.7.2 est une amélioration du Théorème 1.2.2.5, car si G est un groupe résoluble de type fini et dans la classe $(\mathcal{N}_k, \infty) \subset (\Omega_{k+1}, \infty)$, alors le Théorème 1.2.7.2 montre que G est dans la classe $\mathcal{FN}_k^{(2)}$.

1.3 Groupes des classes $(\Omega, \infty)^*$ et $(\Omega_k, \infty)^*$

Rappelons qu'on désigne par Ω , Ω_k respectivement la classe des groupes de profondeur finie et celle des groupes de profondeur finie $\leq k$; où k est un entier positif fixé. Notons qu'on a $\mathcal{N} \cap \Omega_k = \mathcal{N}_{k-1} \subset \Omega_k \subset \Omega$. Notons aussi que la classe Ω n'est pas stable par passage aux sous-groupes, mais elle est fermée par passage aux quotients. On peut vérifier facilement que $\mathcal{FN} \subset \Omega$, et comme la

classe $\mathcal{FN}$ est stable par passage aux sous-groupes, on déduit que tout groupe fini-par-nilpotent est dans la classe $(\Omega, \infty)^*$. Ici, nous nous intéresserons à la réciproque. Dans cette section on caractérisera les classes $(\Omega, \infty)^*$ et $(\Omega_k, \infty)^*$, où on va d'abord caractériser la classe $(\Omega, \infty)^*$; plus précisément, on prouvera qu'un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini dans la classe $(\Omega, \infty)^*$ est fini-par-nilpotent. La clé de la démonstration de ce résultat principal dans cette section, est un résultat qui est dû à Longobardi and Maj [31, Théorème 1] affirmant qu'un groupe résoluble de type fini et dans la classe $\mathcal{E}(\infty)$ est dans $\mathcal{FN}$, et aussi des techniques adaptées de la preuve du Théorème 3 de Lennox [26]. Notons que $\mathcal{E}(\infty)$ désigne la classe des groupes dont toute partie infinie contient deux éléments distincts x, y tels que $[x, {}_n y] = 1$ pour un certain entier $n = n(x, y) > 0$. On va commencer par établir quelques résultats préliminaires.

Lemme 1.3.1 *Soit A un sous-groupe normal et Abélien d'un groupe G . Alors pour tous $a, b \in A$, $x \in G$ et quels que soient les entiers $m > 0$, $n > 0$, on a :*

- (1) $[a, {}_n bx] = [a, {}_n x]$.
- (2) $[a^m, x] = [a, x]^m$.
- (3) $[a^m, {}_n x] = [a, {}_n x]^m$.

Preuve. Il est bien connu que les identités :

- (i) $[xy, z] = [x, z]^y [y, z] = [x, z] [x, z, y] [y, z]$
- (ii) $[x, yz] = [x, z] [x, y]^z = [x, z] [x, y] [x, y, z]$

sont valables dans tout groupe.

(1) Par récurrence sur n . Grâce à l'égalité (ii), on a $[a, bx] = [a, x] [a, b]^x = [x, a]$ car A est Abélien, d'où l'égalité (1) est vérifiée pour $n = 1$. On a, en supposant l'égalité vraie pour $n - 1$, $[a, {}_n bx] = [[a, bx], {}_{n-1} bx] = [[a, x], {}_{n-1} bx]$, or $[a, x]$ est dans A car A est normal dans G , par l'hypothèse de récurrence, on en déduit que $[[a, x], {}_{n-1} bx] = [[a, x], {}_{n-1} x]$, donc $[a, {}_n bx] = [[a, x], {}_{n-1} x] = [a, {}_n x]$.

(2) Par récurrence sur m . Il est clair que l'égalité est vraie pour $m = 1$. Supposons que l'on ait $[a^{m-1}, x] = [a, x]^{m-1}$. Par l'égalité (i), on a $[a^m, x] = [a^{m-1}a, x] = [a^{m-1}, x]^a [a, x] = [a^{m-1}, x] [a, x]$ car A est normal et Abélien. Par l'hypothèse de récurrence, on en déduit que $[a^m, x] = [a, x]^{m-1} [a, x] = [a, x]^m$.

(3) Par récurrence sur n . Pour $n = 1$ on trouve l'égalité (2). On a, en supposant l'égalité vraie pour $n - 1$, $[a^m, {}_n x] = [[a^m, x], {}_{n-1} x] = [[a, x]^m, {}_{n-1} x] = [[a, x], {}_{n-1} x]^m = [a, {}_n x]^m$. ■

Le Lemme suivant est une version plus faible du Lemme 11 de [41], mais nous incluons une démonstration pour garder nos résultats raisonnablement indépendants.

Lemme 1.3.2 *Un groupe Abélien-par-fini, de type fini et dans la classe $(\mathcal{FN}, \infty)$ est fini-par-nilpotent.*

Preuve. Soit G un groupe Abélien-par-fini, de type fini et dans la classe $(\mathcal{FN}, \infty)$. Soit N un sous-groupe normal Abélien de G tel que G/N soit fini. Comme N est un groupe Abélien de type fini, il admet un sous-groupe normal sans torsion d'indice fini [36, 5.4.15 (i)]; d'où G a un sous-groupe normal Abélien sans torsion A d'indice fini. Soit x un élément non trivial dans A et soit g dans G . Ensuite, la partie $\{x^i g : i \text{ un entier positif}\}$ est infinie, il existe donc deux entiers positifs m, n tels que $\langle x^m g, x^n g \rangle$ soit fini-par-nilpotent, d'où $\langle x^r, x^n g \rangle$ est fini-par-nilpotent; où $r = m - n$. Ainsi, il y a deux entiers positifs c et d tels que $[x^r, c x^n g]^d = 1$. L'élément x étant dans A qui est Abélien et normal dans G , nous avons $[x^r, c x^n g] = [x^r, c g] = [x, c g]^r$ selon le Lemme 1.3.1, donc $[x, c g]^{r.d} = 1$. Maintenant $[x, c g]$ appartient au groupe sans torsion A , donc $[x, c g] = 1$. Il s'ensuit que x est un élément d'Engel à droite de G . Comme G est Abélien-par-fini et de type fini, il vérifie la condition maximale sur les sous-groupes, donc l'ensemble des éléments d'Engel à droite de G coïncide avec son hypercentre qui est égal à $Z_i(G)$, le $(i + 1)$ -ième terme de la série centrale ascendante de G , pour un certain entier $i > 0$ [35, Théorème 7.21]. Par suite $A \leq Z_i(G)$, et puisque A est d'indice fini dans G , $G/Z_i(G)$ est fini. Ainsi, par un résultat de Baer [23, Théorème 1], G est fini-par-nilpotent, et c'est ce que nous voulons. ■

Lemme 1.3.3 *Un groupe Abélien-par-fini, de type fini et dans la classe $\mathcal{E}(\infty)$ est fini-par-nilpotent.*

Preuve. Soit G un groupe Abélien-par-fini, de type fini et dans la classe $\mathcal{E}(\infty)$, et soit A un sous-groupe normal Abélien d'indice fini dans G . Il est clair que toute partie infinie de G contient deux éléments distincts x, y tels que $xA = yA$, donc $y = xa$ pour un certain élément a dans A et $\langle x, y \rangle = \langle x, a \rangle$. Comme $\langle x, a \rangle \leq \langle x, A \rangle = \langle x \rangle A$ et $\langle x \rangle A$ est métabélien, alors $\langle x, y \rangle$ est un groupe métabélien de type fini dans la classe $\mathcal{E}(\infty)$. Il s'ensuit par le résultat de Longobardi et Maj [31, Théorème 1], que $\langle x, y \rangle$ est fini-par-nilpotent. Par suite G est dans la classe $(\mathcal{FN}, \infty)$. Maintenant, par le Lemme 1.3.2, G est fini-par-nilpotent, et c'est ce que nous voulons. ■

Lemme 1.3.4 *Un groupe hyper-(Abélien-par-fini), de type fini et dans la classe $\mathcal{E}(\infty)$ est nilpotent-par-fini.*

Preuve. Soit G un groupe hyper-(Abélien-par-fini), de type fini et dans la classe $\mathcal{E}(\infty)$. Supposons que G ne soit pas nilpotent-par-fini. Comme les groupes nilpotents-par-finis de type fini sont de présentation finie, et comme la classe $\mathcal{E}(\infty)$ est stable par passage aux quotients, alors d'après [35, Lemme 6.17] on peut supposer que tout quotient propre de G soit dans la classe $\mathcal{NF}$. Puisque G est hyper-(Abélien-par-fini), il contient un sous-groupe normal non trivial H tel que H soit fini ou Abélien ; donc on a G/H est dans la classe $\mathcal{NF}$. Si H est fini, alors $G \in \mathcal{F}(\mathcal{NF}) = \mathcal{NF}$, i.e. G est nilpotent-par-fini, une contradiction. Par conséquent H est Abélien, donc G est Abélien-par-(nilpotent-par-fini) et ainsi il est (Abélien-par-nilpotent)-par-fini. Par suite, G est une extension finie d'un groupe résoluble, il existe donc un sous-groupe normal résoluble K de G d'indice fini. Maintenant, K est un groupe résoluble de type fini dans la classe $\mathcal{E}(\infty)$, il s'ensuit, par le résultat de Longobardi et Maj [31, Théorème 1], que K est fini-par-nilpotent. En vertu du résultat de P. Hall [23, Théorème 2], K est nilpotent-par-fini et donc $G \in (\mathcal{NF})\mathcal{F} = \mathcal{NF}$, une contradiction et maintenant le Lemme est démontré. ■

Comme les groupes nilpotents-par-finis de type fini vérifient la condition maximale sur les sous-groupes, le Lemme 1.3.4 admet la conséquence suivante :

Corollaire 1.3.1 *Un groupe hyper-(Abélien-par-fini), de type fini et dans la classe $\mathcal{E}(\infty)$ vérifie la condition maximale sur les sous-groupes.*

Proposition 1.3.1 *Un groupe hyper-(Abélien-par-fini), de type fini et dans la classe $\mathcal{E}(\infty)$ est fini-par-nilpotent.*

Preuve. Soit G un groupe hyper-(Abélien-par-fini), de type fini et dans la classe $\mathcal{E}(\infty)$. Selon le Corollaire 1.3.1, G vérifie la condition maximale sur les sous-groupes. Maintenant, comme $\mathcal{E}(\infty)$ est fermée par passage aux quotients, on peut supposer que toute image homomorphe propre de G soit dans la classe $\mathcal{FN}$, mais G lui-même ne soit pas fini-par-nilpotent. Notre groupe G étant hyper-(Abélien-par-fini), il contient un sous-groupe normal non trivial H tel que H soit fini ou Abélien, donc par hypothèse G/H est dans la classe $\mathcal{FN}$. Si H est fini, alors $G \in \mathcal{F}(\mathcal{FN}) = \mathcal{FN}$, i.e. G est fini-par-nilpotent, ce qui contredit notre

hypothèse. Par conséquent H est Abélien et donc G est dans $\mathcal{A}(\mathcal{FN})$, laquelle est incluse dans la classe $(\mathcal{AF})\mathcal{N}$, par suite G est dans $(\mathcal{AF})\mathcal{N}$. Maintenant ; comme G vérifie la condition maximale sur les sous-groupes, il s'ensuit du Lemme 1.3.3 que G est dans la classe $(\mathcal{FN})\mathcal{N}$, donc il est dans $\mathcal{F}(\mathcal{NN})$. Ainsi, il existe un sous-groupe normal fini K de G tel que G/K soit résoluble. Comme G/K est un groupe résoluble de type fini dans la classe $\mathcal{E}(\infty)$, il découle du résultat de Longobardi and Maj [31, Théorème 1] que $G/K \in \mathcal{FN}$, or K est fini, donc G est dans la classe $\mathcal{FN}$. Cette contradiction achève la démonstration. ■

Le reste de la démonstration de notre résultat principal dans cette section est adapté de celui du Théorème de Lennox [26, Théorème 3].

Lemme 1.3.5 *Soit G un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini dans la classe $(\Omega, \infty)^*$. Si G est résiduellement nilpotent, alors G est dans la classe $\mathcal{FN}$.*

Preuve. Soit G un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini dans la classe $(\Omega, \infty)^*$, et supposons que G soit résiduellement nilpotent. Soit X une partie infinie de G , il existe donc deux éléments distincts x et y de X tels que $\langle x, x^y \rangle \in \Omega$. Il s'ensuit qu'il existe un entier positif k tel que $\gamma_k(\langle x, x^y \rangle) = \gamma_{k+1}(\langle x, x^y \rangle)$. En revanche, le groupe $\langle x, x^y \rangle$ est résiduellement nilpotent en tant que sous-groupe de G , donc $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \gamma_i(\langle x, x^y \rangle) = 1$, d'où $\gamma_k(\langle x, x^y \rangle) = \bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} \gamma_i(\langle x, x^y \rangle) = 1$. Or $\langle x, x^y \rangle = \langle x, x^{-1}x^y \rangle = \langle x, [x, y] \rangle = \langle x, [y, x] \rangle$, donc $\gamma_k(\langle [y, x], x \rangle) = 1$ et ainsi $[y, {}_k x] = 1$. On en déduit que G est un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini dans la classe $\mathcal{E}(\infty)$. Maintenant, la Proposition 1.3.1 nous permet de conclure que G est dans la classe $\mathcal{FN}$, et c'est ce que nous voulons. ■

Lemme 1.3.6 *Un groupe hyper-(Abélien-par-fini), de type fini et dans la classe $(\Omega, \infty)^*$ est nilpotent-par-fini.*

Preuve. Soit G un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini dans la classe $(\Omega, \infty)^*$. On suppose que G ne soit pas dans $\mathcal{NF}$. Comme la classe $(\Omega, \infty)^*$ est stable par passage aux quotients, et comme les groupes de type fini de la classe $\mathcal{NF}$ sont de présentation finie, on peut supposer que tout quotient propre de G soit dans la classe $\mathcal{NF}$ [35, Lemme 6.17]. Puisque G est hyper-(Abélien-par-fini), il contient un sous-groupe normal non trivial H tel que H soit fini ou Abélien, donc G/H est dans $\mathcal{NF}$. Dans ce cas, H est Abélien et donc G est

dans la classe $\mathcal{A}(\mathcal{NF})$ qui est incluse dans $(\mathcal{AN})\mathcal{F}$, ainsi $G \in (\mathcal{AN})\mathcal{F}$. Par conséquent, G a un sous-groupe normal N d'indice fini tel que N soit Abélien-par-nilpotent. Par ailleurs, N étant un sous-groupe d'index fini dans un groupe de type fini, est lui-même de type fini, et ainsi N est un groupe Abélien-par-nilpotent de type fini. Il s'ensuit, par un résultat de Segal [38, Corollaire 1], que N a un sous-groupe normal résiduellement nilpotent d'indice fini, ainsi G admet un sous-groupe normal résiduellement nilpotent d'indice fini K . Ceci signifie que K est un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini et résiduellement nilpotent dans la classe $(\Omega, \infty)^*$. Le Lemme 1.3.5 nous permet de dire que K est dans la classe $\mathcal{FN}$, laquelle est incluse dans $\mathcal{NF}$ en vertu du résultat de P. Hall [23, Théorème 2], d'où G appartient à la classe $\mathcal{NF}$, ce qui est contradictoire. ■

Lemme 1.3.7 *Un groupe nilpotent-par-cyclique fini, de type fini et dans la classe $(\Omega, \infty)^*$ est fini-par-nilpotent.*

Preuve. Soit G un groupe de type fini dans la classe $(\Omega, \infty)^*$ admettant un sous-groupe normal nilpotent N tel que G/N soit un groupe cyclique fini. On va montrer par récurrence sur l'ordre du groupe G/N que G est dans la classe $\mathcal{FN}$. On pose $n = |G/N|$. Si $n = 1$, alors $G = N$ et G est nilpotent. Supposons maintenant que $n > 1$, et que tout groupe de type fini dans la classe $(\Omega, \infty)^*$ et nilpotent-par-cyclique fini d'ordre r , avec $r < n$, soit fini-par-nilpotent. Soit q un nombre premier divisant n . Comme G/N est cyclique, il admet un sous-groupe normal H/N d'indice q , donc H est un sous-groupe normal dans G d'indice q contenant N . De plus, comme $|H/N| < |G/N|$, alors par l'hypothèse de récurrence, H est dans la classe $\mathcal{FN}$. Soit T le sous-groupe de torsion de H . Comme H est de type fini, T est fini et H/T est un groupe nilpotent sans torsion de type fini. Par suite, par un résultat de Gruenberg [36, 5.2.21], H/T est résiduellement un p -groupe fini pour tous les nombres premiers p et par conséquent, en particulier, H/T est résiduellement un q -groupe fini. Or H est d'indice q dans G , donc cela nous permet de conclure que G/T est résiduellement un q -groupe fini [39, Exercice 10, page 17]. Ceci signifie que G/T est résiduellement nilpotent. Il s'ensuit, par le Lemme 1.3.5, que G/T est dans la classe $\mathcal{FN}$ et donc G est lui-même fini-par-nilpotent. ■

Maintenant, nous sommes prêts pour démontrer notre résultat principal dans cette section :

Théorème 1.3.1 *Soit G un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini. Alors, G est dans la classe $(\Omega, \infty)^*$ si, et seulement si, G est dans la classe $\mathcal{FN}$.*

Preuve. Il est clair que tout groupe fini-par nilpotent est dans la classe $(\Omega, \infty)^*$. Réciproquement, soit G un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini de la classe $(\Omega, \infty)^*$. Par suite, par le Lemme 1.3.6, G est dans la classe $\mathcal{NF}$. Soit K un sous-groupe normal nilpotent de G tel que G/K soit fini. Comme K est un groupe nilpotent de type fini, il admet un sous-groupe normal sans torsion d'indice fini [36, 5.4.15 (i)]. Donc G a un sous-groupe normal nilpotent sans torsion N d'indice fini. Soit x un élément non trivial de G . Comme N est de type fini, $\langle N, x \rangle$ est de type fini dans la classe $(\Omega, \infty)^*$, or $\langle N, x \rangle / N$ est cyclique fini, donc par le Lemme 1.3.7, $\langle N, x \rangle$ est dans la classe $\mathcal{FN}$. Il existe donc un sous-groupe normal fini H de $\langle N, x \rangle$ tel que $\langle N, x \rangle / H$ soit nilpotent, ainsi $\gamma_{k+1}(\langle N, x \rangle) \leq H$ pour un certain entier positif k , d'où $\gamma_{k+1}(\langle N, x \rangle)$ est fini. Par suite, il existe un entier positif m tel que $[g, {}_k x]^m = 1$; pour tout $g \in N$. Soit $g \in N$. Comme $[g, {}_k x]$ est un élément du groupe sans torsion N , on déduit que $[g, {}_k x] = 1$, ainsi g est un élément d'Engel à droite de G et par conséquent $N \subset R(G)$; où $R(G)$ désigne l'ensemble des éléments d'Engel à droite de G . Par ailleurs, comme G est un groupe nilpotent-par-fini de type fini, il vérifie la condition maximale sur les sous-groupes. Donc, par un résultat de Baer [35, Théorème 7.21], $R(G)$ coïncide avec l'hypercentre de G qui est égal à $Z_n(G)$ pour un certain entier positif n , ainsi $N \leq Z_n(G)$ et par suite $Z_n(G)$ est d'indice fini dans G . Il s'ensuit, encore par Baer [23, Théorème 1], que G est dans la classe $\mathcal{FN}$. ■

Notons que le Théorème 1.3.1 n'est pas vrai pour tous les groupes. En effet, Vaughan-Lee et Wiegold, dans [43], ont construit un p -groupe infini G , parfait (i.e. $G' = G$), localement fini et d'exposant un nombre premier $p \geq 5$; donc tout sous-groupe à deux générateurs de G est nilpotent. Par suite $G \in (\mathcal{N}, \infty)^*$ et ainsi $G \in (\Omega, \infty)^*$; mais $G \notin \mathcal{FN}$ car il est parfait et infini. On ne peut pas donc supprimer la condition "de type fini" du Théorème 1.3.1.

Aussi, soit G l'exemple de Golod [16] d'un groupe infini engendré par 3 éléments dont tous les sous-groupes 2-engendrés sont p -groupes finis ; pour un certain nombre premier p . Donc $G \in (\mathcal{N}, \infty)^*$ et par conséquent $G \in (\Omega, \infty)^*$, mais G , étant infini, n'est pas dans la classe $\mathcal{FN}$. Par suite le Théorème 1.3.1 n'est pas vrai pour tous les groupes (résiduellement finis) de type fini.

Notons que le Théorème 1.3.1 généralise le résultat de Lennox [27] qui affirme qu'un groupe résoluble-par-fini de type fini dont les sous-groupes engendrés par deux conjugués sont de profondeur finie, est fini-par-nilpotent.

Il est clair qu'un groupe Abélien G dans la classe $(\Omega_1, \infty)^*$ est fini. En effet, si G est infini, alors il contient une partie infinie $X = G \setminus \{1\}$, et il existe donc deux éléments distincts x, y ($\neq 1$) dans X tels que $\gamma_1(\langle x, x^y \rangle) = \gamma_2(\langle x, x^y \rangle) = 1$, d'où $x = 1$; ce qui est une contradiction. Il s'ensuit qu'un groupe hyper-(Abélien-par-fini) G dans la classe $(\Omega_1, \infty)^*$ est hyper-(fini), car $(\Omega_1, \infty)^*$ est une classe stable par passage aux sous-groupes et par passage aux quotients. Mais il n'est pas difficile de voir qu'un groupe hyper-(fini) est localement fini [35, Partie 1, page 36], donc G est localement fini. Maintenant si G est infini, alors il contient un sous-groupe Abélien infini A [35, Théorème 3.43]. Comme A est dans la classe $(\Omega_1, \infty)^*$, il est fini, une contradiction et G , donc, est fini. Finalement, on a tout groupe hyper-(Abélien-par-fini) dans la classe $(\Omega_1, \infty)^*$ est fini.

A l'aide de notre Théorème 1.3.1, on va caractériser les classes $(\Omega_k, \infty)^*$, $(\Omega_2, \infty)^*$ et $(\Omega_3, \infty)^*$; où k est un entier positif. Pour ce faire, nous avons besoin de trois résultats qui sont dûs à Abdollahi, liés à la classe $\mathcal{E}_k(\infty)$ des groupes dont toute partie infinie contient deux éléments distincts x, y tels que $[x, {}_k y] = 1$, avec les deux cas particuliers $k = 2$ et $k = 3$. Plus précisément, Abdollahi, dans [1] et [2], a montré pour un groupe G résoluble de type fini dans la classe $\mathcal{E}_k(\infty)$ (resp. $\mathcal{E}_2(\infty)$, $\mathcal{E}_3(\infty)$) il existe un entier positif $c = c(k)$, ne dépendant que de k , tel que $G/Z_c(G)$ soit fini (resp. $G/Z_2(G)$ est fini, G est dans la classe $\mathcal{FN}_3^{(2)}$); où $\mathcal{N}_3^{(2)}$ désigne la classe des groupes dont tous les sous-groupes engendrés par 2 éléments sont dans la classe $\mathcal{N}_3$. Notons que le lien entre nos classes et ceux de Abdollahi est le fait que $\mathcal{N} \cap \Omega_k \subset \mathcal{N}_{k-1}$, donc un groupe nilpotent dans la classe $(\Omega_k, \infty)^*$ est dans $(\mathcal{N}_{k-1}, \infty)^*$, laquelle est incluse dans la classe $\mathcal{E}_k(\infty)$.

Corollaire 1.3.2 *Soit $k > 0$ un entier et soit G un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini. On a :*

- (i) *Si G est dans la classe $(\Omega_k, \infty)^*$, alors il existe un entier positif $c = c(k)$, ne dépendant que de k , tel que G soit dans $\mathcal{FN}_c$.*
- (ii) *Si G est dans la classe $(\Omega_2, \infty)^*$, alors G est dans la classe $\mathcal{FN}_2$.*
- (iii) *Si G est dans la classe $(\Omega_3, \infty)^*$, alors G est dans la classe $\mathcal{FN}_3^{(2)}$.*

Preuve. Soit $k > 0$ un entier et soit G un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini.

(i) Supposons que G soit dans la classe $(\Omega_k, \infty)^*$, donc d'après le Théorème 1.3.1, G est dans la classe $\mathcal{FN}$. Soit H un sous-groupe normal fini de G tel que G/H soit nilpotent. Il est clair que G/H est dans la classe $(\Omega_k, \infty)^*$. Soit $\bar{X}$ une partie infinie de G/H , il existe donc deux éléments distincts $\bar{x} = xH$, $\bar{y} = yH$ ($x, y \in G$) de $\bar{X}$ tels que $\langle \bar{x}, \bar{x}^{\bar{y}} \rangle \in \Omega_k$, ainsi $\gamma_k(\langle \bar{x}, \bar{x}^{\bar{y}} \rangle) = \gamma_{k+1}(\langle \bar{x}, \bar{x}^{\bar{y}} \rangle)$. Maintenant, comme $\langle \bar{x}, \bar{x}^{\bar{y}} \rangle$ est nilpotent, il y a un entier positif i tel que $\gamma_i(\langle \bar{x}, \bar{x}^{\bar{y}} \rangle) = 1$, d'où $\gamma_k(\langle \bar{x}, \bar{x}^{\bar{y}} \rangle) = 1$. Puisque $\langle \bar{x}, \bar{x}^{\bar{y}} \rangle = \langle [\bar{y}, \bar{x}], \bar{x} \rangle$, on a $\gamma_k(\langle [\bar{y}, \bar{x}], \bar{x} \rangle) = 1$ et ainsi $[\bar{y}, \bar{x}] = 1$. Par conséquent, G/H est dans la classe $\mathcal{E}_k(\infty)$ des groupes dans lesquels chaque partie infinie contient deux éléments distincts g, h tels que $[g, {}_k h] = 1$. Le groupe G/H , étant un groupe résoluble de type fini dans la classe $\mathcal{E}_k(\infty)$, il s'ensuit par un résultat de Abdollahi [2, Théorème 3], qu'il existe un entier positif $c = c(k)$, ne dépendant que de k , tel que $(G/H)/Z_c(G/H)$ soit fini. Par un résultat de Baer [23, Théorème 1], $\gamma_{c+1}(G/H) = \gamma_{c+1}(G)H/H$ est fini ; or H est fini, donc $\gamma_{c+1}(G)$ est fini. Ceci signifie que G est dans la classe $\mathcal{FN}_c$.

(ii) Si G est dans la classe $(\Omega_2, \infty)^*$, alors par le Théorème 1.3.1, G est fini-par-nilpotent. Donc, G a un sous-groupe normal fini H tel que G/H soit nilpotent. Comme G/H est dans la classe $(\Omega_2, \infty)^*$, il est dans la classe $\mathcal{E}_2(\infty)$. Par suite, par Abdollahi [1, Théorème], $(G/H)/Z_2(G/H)$ est fini. En vertu du résultat de Baer [23, Théorème 1], $\gamma_3(G/H)$ est fini, or H est fini, donc $\gamma_3(G)$ est fini ; d'où G est dans la classe $\mathcal{FN}_2$.

(iii) Maintenant, si G est dans la classe $(\Omega_3, \infty)^*$, alors par le Théorème 1.3.1 G a un sous-groupe normal fini H tel que G/H soit nilpotent. Comme G/H est dans la classe $(\Omega_3, \infty)^*$, il est dans la classe $\mathcal{E}_3(\infty)$. Par suite, par Abdollahi [2, Théorème 1], G/H est dans la classe $\mathcal{FN}_3^{(2)}$, et par conséquent G est dans la classe $\mathcal{FN}_3^{(2)}$. ■

1.4 Groupes des classes $(\mathcal{ME}, \infty)^*$ et $(\mathcal{ME}_k, \infty)^*$

Soit k un entier positif fixé, on note $\mathcal{M}$, $\mathcal{E}_k$ et $\mathcal{E}$ respectivement la classe des groupes vérifiant la condition minimale sur les sous-groupes normaux, la classe des groupes k -Engel et la classe des groupes d'Engel. En utilisant le Théorème 1.3.1, nous allons prouver des résultats qui sont en relation avec les classes $(\mathcal{ME}, \infty)^*$, $(\mathcal{ME}_k, \infty)^*$, $(\mathcal{MA}, \infty)^* = (\mathcal{ME}_1, \infty)^*$ et $(\mathcal{ME}_2, \infty)^*$. Nous commençons par montrer notre résultat principal de cette section, qui est une version plus faible du Théorème 1.3.1, affirmant qu'un groupe hyper-(Abélien-par-fini)

de type fini dans la classe $(\mathcal{ME}, \infty)^*$ est fini-par-nilpotent. Pour ce faire, nous avons besoin de quelques résultats préliminaires.

Lemme 1.4.1 *Un groupe hyper-(Abélien-par-fini), de type fini et dans la classe $(\mathcal{MN}, \infty)^*$ est fini-par-nilpotent.*

Preuve. Soit G un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini dans la classe $(\mathcal{MN}, \infty)^*$, et soit X une partie infinie de G . Il existe donc deux éléments distincts x, y de X tels que $\langle x, x^y \rangle$ soit dans la classe $\mathcal{MN}$, ainsi il y a un sous-groupe normal N de $\langle x, x^y \rangle$ tel que N soit dans $\mathcal{M}$ et $\langle x, x^y \rangle / N$ soit nilpotent. Maintenant $\gamma_{i+1}(\langle x, x^y \rangle) \leq N$ pour un certain entier positif i , donc on a $\gamma_{i+1}(\langle x, x^y \rangle) \geq \gamma_{i+2}(\langle x, x^y \rangle) \geq \dots$ est une série descendante infinie de sous-groupes normaux de N ; or N est dans la classe $\mathcal{M}$, ainsi il existe un entier positif $n \geq i + 1$ tel que $\gamma_n(\langle x, x^y \rangle) = \gamma_{n+1}(\langle x, x^y \rangle)$. Par conséquent G est dans $(\Omega, \infty)^*$, il s'ensuit, par le Théorème 1.3.1, que G est fini-par-nilpotent. ■

Lemme 1.4.2 *Un groupe hyper-(Abélien-par-fini), de type fini et dans la classe $(\mathcal{ME}, \infty)^*$ est nilpotent-par-fini.*

Preuve. Soit G un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini dans la classe $(\mathcal{ME}, \infty)^*$. Comme la classe $(\mathcal{ME}, \infty)^*$ est fermée par passage aux quotients, et comme les groupes nilpotents-par-finis de type fini sont de présentation finie, on peut supposer que G ne soit pas nilpotent-par-fini, mais que toute image homomorphe propre de G la soit [35, Lemme 6.17]. Puisque G est hyper-(Abélien-par-fini), il existe un sous-groupe normal non trivial H de G tel que H soit fini ou Abélien, donc on a G/H est nilpotent-par-fini. Si H est fini, alors G est nilpotent-par-fini, une contradiction. Par conséquent H est Abélien et donc G est Abélien-par-(nilpotent-par-fini) et ainsi il est (Abélien-par-nilpotent)-par-fini. Par suite G est une extension finie d'un groupe résoluble. Soit K un sous-groupe normal résoluble de G d'indice fini. Comme tout groupe résoluble d'Engel coïncide avec son radical de Hirsch-Plotkin qui est localement nilpotent [35, Théorème 7.34], et comme K est dans la classe $(\mathcal{ME}, \infty)^*$, on déduit que K est dans $(\mathcal{MN}, \infty)^*$. Maintenant, le Lemme 1.4.1 nous permet de conclure que K est fini-par-nilpotent, et ainsi il est nilpotent-par-fini en vertu d'un résultat de P. Hall [23, Théorème 2]. Ceci signifie que G est nilpotent-par-fini et cette dernière contradiction termine la démonstration. ■

Comme les groupes nilpotents-par-finis de type fini vérifient la condition maximale sur les sous-groupes, le Lemme 1.4.2 admet la conséquence suivante :

Corollaire 1.4.1 *Un groupe hyper-(Abélien-par-fini), de type fini et dans la classe $(\mathcal{ME}, \infty)^*$ vérifie la condition maximale sur les sous-groupes.*

Maintenant, nous sommes prêts pour démontrer notre résultat principal dans cette section :

Théorème 1.4.1 *Soit G un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini. Alors, G est dans la classe $(\mathcal{ME}, \infty)^*$ si, et seulement si, G est dans la classe $\mathcal{FN}$.*

Preuve. Il est clair que tout groupe fini-par-nilpotent est dans la classe $(\mathcal{ME}, \infty)^*$. Inversement, soit G un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini dans la classe $(\mathcal{ME}, \infty)^*$. En vertu du Corollaire 1.4.1, G vérifie la condition maximale sur les sous-groupes. Comme les groupes d'Engel vérifiant la condition maximale sur les sous-groupes sont nilpotent [36, 12.3.7], on en déduit que G est dans la classe $(\mathcal{MN}, \infty)^*$. Maintenant, le Lemme 1.4.1 nous aide à terminer la démonstration en disant que G est dans la classe $\mathcal{FN}$. ■

Notons que le Théorème 1.4.1 n'est pas vrai pour tous les groupes. En effet, soit le groupe localement diédral $G = A \rtimes \langle x \rangle$ où $A \simeq C_{2^\infty}$, $x^2 = 1$ et $a^x = a^{-1}$ pour tout $a \in A$. Il est clair que $G' = A$ et G est localement nilpotent, donc $G \in (\mathcal{N}, \infty)^*$ et par conséquent $G \in (\mathcal{ME}, \infty)^*$. Si $G \in \mathcal{FN}$, alors $G \in \mathcal{FA}$ par [35, Lemme 3.13] ce qui donne la contradiction que G' est fini. Par suite $G \notin \mathcal{FN}$ et on ne peut pas donc renoncer à la condition "de type fini" dans le Théorème 1.4.1.

Aussi, soit G l'exemple de Golod [16] d'un groupe infini engendré par 3 éléments dont tous les sous-groupes 2-engendrés sont p -groupes finis ; pour un certain nombre premier p . Donc $G \in (\mathcal{F}, \infty)^*$ et par conséquent $G \in (\mathcal{ME}, \infty)^*$, mais G , étant infini, n'est pas dans la classe $\mathcal{FN}$. Par suite le Théorème 1.4.1 n'est pas vrai pour tous les groupes (résiduellement finis) de type fini.

Notons que notre Théorème 1.4.1 améliore le Théorème 3 de [41] (respectivement, le Corollaire 3 de [5]) où il est prouvé qu'un groupe résoluble de type fini dans la classe $(\mathcal{CN}, \infty)^*$ (respectivement, $(\mathcal{YN}, \infty)$) est fini-par-nilpotent ; où $\mathcal{C}$

(respectivement, $\mathcal{Y}$) désigne la classe des groupes de Chernikov (respectivement, la classe des groupes vérifiant la condition minimale sur les sous-groupes).

A l'aide de notre Théorème 1.4.1, on va caractériser les classes $(\mathcal{ME}_k, \infty)^*$, $(\mathcal{MA}, \infty)^* = (\mathcal{ME}_1, \infty)^*$ et $(\mathcal{ME}_2, \infty)^*$; où k est un entier positif. Pour ce faire, nous avons besoin de trois résultats qui sont dûs à Abdollahi, liés à la classe $\mathcal{E}_k(\infty)$ des groupes dans lesquels chaque partie infinie contient deux éléments distincts x, y tels que $[x, y] = 1$, avec les deux cas particuliers $k = 2$ et $k = 3$. Plus précisément, Abdollahi, dans [1] et [2], a montré pour un groupe G résoluble de type fini dans la classe $\mathcal{E}_k(\infty)$ (resp. $\mathcal{E}_2(\infty)$, $\mathcal{E}_3(\infty)$) il existe un entier positif $c = c(k)$, ne dépendant que de k , tel que $G/Z_c(G)$ soit fini (resp. $G/Z_2(G)$ est fini, G est dans la classe $\mathcal{FN}_3^{(2)}$); où $\mathcal{N}_3^{(2)}$ désigne la classe des groupes dont tous les sous-groupes engendrés par 2 éléments sont dans la classe $\mathcal{N}_3$. Notons que le lien entre nos classes et ceux de Abdollahi est l'information que la classe $(\mathcal{E}_k, \infty)^*$ est incluse dans $\mathcal{E}_{k+1}(\infty)$.

Corollaire 1.4.2 *Soit $k > 0$ un entier et soit G un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini. On a :*

(i) *Si G est dans la classe $(\mathcal{ME}_k, \infty)^*$, alors il existe un entier positif $c = c(k)$, ne dépendant que de k , tel que G soit dans $\mathcal{FN}_c$.*

(ii) *Si G est dans la classe $(\mathcal{MA}, \infty)^*$, alors G est dans la classe $\mathcal{FN}_2$.*

(iii) *Si G est dans la classe $(\mathcal{ME}_2, \infty)^*$, alors G est dans la classe $\mathcal{FN}_3^{(2)}$.*

Preuve. Soit $k > 0$ un entier et soit G un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini.

(i) Supposons que G soit dans la classe $(\mathcal{ME}_k, \infty)^*$, donc d'après le Théorème 1.4.1, G est dans la classe $\mathcal{FN}$. Soit N un sous-groupe normal fini de G tel que G/N soit nilpotent. Comme G/N est un groupe nilpotent de type fini, son sous-groupe de torsion T/N est fini, donc T est fini et G/T est un groupe nilpotent sans torsion. Le groupe G/T , étant résoluble sans torsion et dans la classe $(\mathcal{ME}_k, \infty)^*$, il appartient à $(\mathcal{E}_k, \infty)^*$ [35, Théorème 5.25]. Soit $\bar{X}$ une partie infinie de G/T , il existe donc deux éléments distincts $\bar{x} = xT$, $\bar{y} = yT$ ($x, y \in G$) de $\bar{X}$ tels que $\langle \bar{x}, \bar{x}^{\bar{y}} \rangle$ soit un groupe k -Engel. Puisque $\langle \bar{y}, \bar{x}^{\bar{y}} \rangle = \langle [\bar{y}, \bar{x}], \bar{x} \rangle$, on a $[\bar{y}, {}_{k+1}\bar{x}] = [[\bar{y}, \bar{x}], {}_k\bar{x}] = 1$. Par conséquent, G/T est dans la classe $\mathcal{E}_{k+1}(\infty)$. Le groupe G/T est donc résoluble de type fini et dans la classe $\mathcal{E}_{k+1}(\infty)$, il s'en suit par un résultat de Abdollahi [2, Théorème 3], qu'il existe un entier positif

$c = c(k)$, ne dépendant que de k , tel que $(G/T)/Z_c(G/T)$ soit fini. Par un résultat de Baer [23, Théorème 1], $\gamma_{c+1}(G/T) = \gamma_{c+1}(G)T/T$ est fini, or T est fini, donc $\gamma_{c+1}(G)$ est fini. Ceci signifie que G est dans la classe $\mathcal{FN}_c$.

(ii) Si G est dans la classe $(\mathcal{MA}, \infty)^* = (\mathcal{ME}_1, \infty)^*$, alors par le Théorème 1.4.1, G est fini-par-nilpotent. Nous procédons comme dans (i) jusqu'à ce que nous obtenons G/T est dans la classe $\mathcal{E}_2(\infty)$. Par suite, par Abdollahi [1, Théorème], $(G/T)/Z_2(G/T)$ est fini, donc $\gamma_3(G/T)$ est fini [23, Théorème 1]. Comme T est fini, $\gamma_3(G)$ est fini; d'où G est dans la classe $\mathcal{FN}_2$.

(iii) Maintenant, si G est dans la classe $(\mathcal{ME}_2, \infty)^*$, il est fini-par-nilpotent en vertu du Théorème 1.4.1. Nous procédons comme dans (i) jusqu'à ce que nous obtenons G/T est dans la classe $\mathcal{E}_3(\infty)$. Le résultat de Abdollahi [2, Théorème 1] nous aide à obtenir ce que nous voulons, en disant que notre groupe G est dans la classe $\mathcal{FN}_3^{(2)}$. ■

Chapitre 2

Groupes ayant beaucoup de sous-groupes 2-engendrés dans une classe donnée

2.1 Introduction

Étant donnée une classe de groupes $\mathcal{X}$, on désigne par $F\mathcal{X}$ la classe des groupes G tels que pour tout élément x dans G il existe un sous-groupe normal $H(x)$ d'indice fini dans G vérifiant $\langle x, h \rangle \in \mathcal{X}$ pour tout $h \in H(x)$. Clairement, si $\mathcal{X}$ est fermée par passage aux sous-groupes, alors tout groupe de $\mathcal{X}$ appartient à la classe $F\mathcal{X}$; il est donc naturel que nous concentrons notre attention sur le problème inverse. Notons que la classe $F\mathcal{X}$ est fermée par passage aux sous-groupes pour n'importe quelle classe $\mathcal{X}$, et en revanche elle est stable par passage aux quotients si $\mathcal{X}$ l'est aussi. Nous considérerons ici la classe $F\mathcal{X}$, quand $\mathcal{X}$ est la classe des groupes nilpotent-par-fini, fini-par-nilpotent et périodique-par-nilpotent. On va montrer, pour ces trois classes $\mathcal{X}$, que tout groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini dans $F\mathcal{X}$ est dans $\mathcal{X}$. Plus précisément, on établira qu'un groupe G hyper-(Abélien-par-fini) de type fini est dans la classe $F(\mathcal{NF})$ (respectivement $F(\mathcal{FN})$, $F(\mathcal{TN})$) si, et seulement si, G est dans la classe $\mathcal{NF}$ (respectivement $\mathcal{FN}$, $\mathcal{TN}$). On prouvera aussi que si $k > 0$ est un entier et si G est un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini dans la classe $F(\mathcal{N}_k\mathcal{F})$ (respectivement $F(\mathcal{FN}_k)$, $F(\mathcal{TN}_k)$), alors il existe un entier positif $c = c(k)$ ne dépendant que de k tel que G soit dans la classe $\mathcal{N}_c\mathcal{F}$ (respectivement $\mathcal{FN}_c$,

$\mathcal{TN}_c$). Pour ce faire, nous allons ramener l'étude des classes $F(\mathcal{N}_k\mathcal{F})$, $F(\mathcal{F}\mathcal{N}_k)$ et $F(\mathcal{TN}_k)$ à celle de $F\mathcal{N}_k$ qui a été caractérisée par De Falco, de Giovanni, Musella et Trabelsi [12], en montrant que si G est un groupe résoluble-par-fini de type fini et dans la classe $F\mathcal{N}_k$, alors il existe un entier positif m , ne dépendant que de k , tel que $G/Z_m(G)$ soit fini. Notons qu'il est clair qu'un groupe G appartenant à la classe $F\mathcal{A}$ est un FC-groupe. En effet, si $x \in G$, alors il existe un sous-groupe normal H d'indice fini dans G tel que $\langle x, h \rangle \in \mathcal{A}$ pour tout $h \in H$, i.e. $xh = hx$ pour tout $h \in H$, donc $H \leq C_G(x)$ et par suite $|G : C_G(x)|$ est fini. On en déduit que tout groupe de type fini dans la classe $F\mathcal{A}$ est dans $\mathcal{FA}$. On utilisera ce dernier résultat dans le cas spécial $k = 1$. Pour le cas particulier où $k = 2$, on établira, dans les résultats cités ci-dessus, que $c(k) = 2$ en utilisant un cas particulier d'un résultat de Levi [35, Théorème 7.14] où tout groupe 2-Engel et sans torsion est dans la classe $\mathcal{N}_2$. Mais pour le cas particulier où $k = 3$, on établira qu'on peut remplacer la classe $\mathcal{N}_c$, dans les résultats cités ci-dessus, par la classe $\mathcal{N}_3^{(2)}$ en utilisant un cas particulier d'un résultat de Gupta et Newman [19, Théorème 3.5] où tout groupe 3-Engel, sans torsion et engendré par 2 éléments est dans la classe $\mathcal{N}_3$. Pour arriver à ce que nous voulons, pour $k = 2$ et $k = 3$, nous utiliserons un résultat dû à Abdollahi [2, Lemme 1] qui affirme que si G est un groupe nilpotent de classe k et $x_1, \dots, x_k \in G$, alors $[x_1, \dots, x_{i-1}, x_i^n, x_{i+1}, \dots, x_k] = [x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_k]^n$; pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$ et pour tout entier n .

2.2 Groupes des classes $F(\mathcal{N}\mathcal{F})$ et $F(\mathcal{N}_k\mathcal{F})$

Dans cette section on va d'abord caractériser la classe $F(\mathcal{N}\mathcal{F})$, où dans un premier temps, on supposera que le groupe est Abélien-par-nilpotent (Lemme 2.2.1) dont la démonstration utilise un résultat qui est dû à Maltsev [32] affirmant que si G est un groupe nilpotent de type fini, alors l'ensemble des puissances $\{x^n \mid x \in G\}$ contient un sous-groupe normal et d'indice fini dans G ; pour tout entier $n > 0$, et aussi un résultat qui est dû à Lennox et Roseblade [28] affirmant que tout groupe G Abélien-par-nilpotent et de type fini est érémitique, i.e. il existe un entier $d > 0$ tel que pour tout entier $n > 0$ et pour tout $x \in G$ l'on ait $C_G(x^n) \leq C_G(x^d)$. On a utilisé également, dans la démonstration du Lemme 2.2.1, une terminologie qui a été introduite dans [17] ce qu'on appelle "groupe périodique sur un sous-groupe", où par définition un groupe G est dit périodique

sur $H \leq G$, si pour tout élément $g \in G$ il existe un entier $n = n(g) > 0$ tel que $g^n \in H$. Il est clair que si $H \triangleleft G$, alors G est périodique sur H si, et seulement si, G/H est périodique. Il est facile de voir aussi que si un groupe G est périodique sur H , alors pour tout $H \leq K \leq L \leq G$ on a L est périodique sur K .

Lemme 2.2.1 *Un groupe Abélien-par-nilpotent, de type fini et dans la classe $F(\mathcal{NF})$ est nilpotent-par-fini.*

Preuve. Soit G un groupe Abélien-par-nilpotent, de type fini et dans la classe $F(\mathcal{NF})$, donc G vérifie la condition maximale sur les sous-groupes normaux [35, Théorème 5.34]. Comme la classe des groupes Abéliens-par-nilpotents de type fini et $F(\mathcal{NF})$ sont stables par passage aux quotients, on peut supposer que $G \notin \mathcal{NF}$, mais que tout quotient propre de G soit nilpotent-par-fini. Soit A un sous-groupe normal Abélien tel que G/A soit nilpotent.

On suppose d'abord que A soit sans torsion. Soit $1 \neq a \in A$, donc il existe un sous-groupe normal $H(a)$ d'indice fini dans G tel que $\langle a, h \rangle \in \mathcal{NF}$; pour tout $h \in H(a)$. Soit $h \in H(a)$, donc $\langle a, h \rangle \in \mathcal{NF}$, d'où il existe deux entiers positifs $n = n(a, h)$ et $c = c(a, h)$ tels que $[a^n, {}_c h^n] = 1$. Mais $[a^n, {}_c h^n] = [a, {}_c h^n]^n$ et A est sans torsion, donc $[a, {}_c h^n] = 1$. Comme G est un groupe Abélien-par-nilpotent de type fini, il existe par [28, Théorème B] un entier $d > 0$, ne dépendant que de G , tel que pour tout $x \in G$ et pour tout entier positif k on ait $C_G(x^k) \leq C_G(x^d)$. Il s'ensuit que $[a, {}_{c-1} h^n], h^d] = 1$. Il est facile de voir que $[b, h^i, h^j] = [b, h^j, h^i]$ pour tout $b \in A$ et tous entiers i, j , donc $[a, h^d], {}_{c-1} h^n] = 1$. Par suite une récurrence sur c donne que $[a, {}_c h^d] = 1$. En outre, comme $AH(a)/A$ est un groupe nilpotent de type fini, alors par [32], l'ensemble $\{h^d A \mid h \in H(a)\}$ contient un sous-groupe normal d'indice fini dans $AH(a)/A$, noté K/A . Il est clair qu'on peut supposer que K soit normal dans G , car il est d'indice fini dans G . Soit $y \in K$, donc $y = h^d b$ pour certains $h \in H(a)$ et $b \in A$. Puisqu'il y a un entier $c = c(a, h) > 0$ tel que $[a, {}_c h^d] = 1$, on a $[a, {}_c y] = [a, {}_c h^d b] = [[a, h^d], {}_{c-1} h^d b] = [a, {}_c h^d] = 1$ en utilisant le fait que A est normal et Abélien et une récurrence sur c . Par conséquent $a \in R(K)$, l'ensemble des éléments d'Engel à droite de K . Comme K est d'indice fini dans G , il est de type fini, donc par [6] on a $R(K) = Z_m(K)$ pour un certain entier $m > 0$, car G vérifie la condition maximale sur les sous-groupes normaux. On en déduit que $a \in Z_m(K)$, d'où $G/Z_m(K)$, et par suite $K/Z_m(K)$, est nilpotent-par-fini, ce qui donne que K est nilpotent-par-fini. Donc G est nilpotent-par-fini, une contradiction.

Supposons maintenant que T_A , le sous-groupe de torsion de A , soit non trivial. Par suite $G/T_A \in \mathcal{NF}$, donc G est (périodique-par-nilpotent)-par-fini. Il est clair qu'il n'y a pas de perte de généralité si on suppose que G soit périodique-par-nilpotent. Soit $x \in G$, donc $\langle x, h \rangle \in \mathcal{NF}$ pour tout $h \in H(x)$. Comme $\langle x, h \rangle \in \mathcal{NF}$, il vérifie la condition maximale sur les sous-groupes, mais on a $\langle x, h \rangle \in \mathcal{TN}$, donc $\langle x, h \rangle \in \mathcal{FN}$. Il s'ensuit que $G \in F(\mathcal{FN})$. Soit $b \in T_A$, donc il existe un sous-groupe normal $H(b)$ d'indice fini dans G tel que $\langle b, h \rangle \in \mathcal{FN}$; pour tout $h \in H(b)$. Soit $h \in H(b)$, donc $\langle b, h \rangle \in \mathcal{FN}$, d'où le sous-groupe de torsion T de $\langle b, h \rangle$ est fini. Puisque $b \in T$, on a $\langle b, h \rangle / T$ est cyclique et $\langle b, h \rangle \in \mathcal{FA}$. Par suite $\langle b, h \rangle / Z(\langle b, h \rangle)$ est fini. Il existe donc un entier positif $m = m(b, h)$ tel que $h^m \in C_G(b)$. Comme $G/H(b)$ est fini, on en déduit que pour tout élément $g \in G$, il y a un entier $n = n(b, g) > 0$ tel que $g^n \in C_G(b)$, i.e. G est périodique sur $C_G(b)$. Puisque G/A est nilpotent et $A \leq C_G(b)$, $C_G(b)$ est sous-normal dans G , de défaut r , i.e. $C_G(b) \triangleleft^r G$. Maintenant par récurrence sur r , on peut montrer que $|G : C_G(b)| < \infty$. En effet, si $r = 1$, alors $C_G(b) \triangleleft G$ et par suite $G/C_G(b)$, étant un groupe résoluble périodique de type fini, est fini. Supposons que $r > 1$ et que si G est périodique sur $K \leq G$ et $K \triangleleft^{r-1} G$, alors $|G : K| < \infty$. Soit la série $C_G(b) = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_r = G$. Comme G est périodique sur G_1 qui est sous-normal de défaut $r - 1$, par l'hypothèse de récurrence on en déduit que $|G : G_1| < \infty$. Par suite G_1 est de type fini, donc G_1/G_0 est fini. Par conséquent $|G : C_G(b)| < \infty$ et donc b est un FC-élément de G . Il s'ensuit que $b^G = \langle b^g \mid g \in G \rangle$ est fini. Mais T_A est la clôture normale d'un nombre fini d'éléments, donc il est fini, d'où $G \in \mathcal{NF}$; ce qui est notre contradiction finale. ■

Maintenant, nous sommes prêts pour démontrer notre résultat principal dans cette section :

Théorème 2.2.1 *Soit G un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini. Alors G est dans la classe $F(\mathcal{NF})$ si, et seulement si, G est dans la classe $\mathcal{NF}$.*

Preuve. Il est clair que tout élément de la classe $\mathcal{NF}$ est dans la classe $F(\mathcal{NF})$. Réciproquement, soit G un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini de la classe $F(\mathcal{NF})$. Supposons que G ne soit pas dans la classe $\mathcal{NF}$. Comme la classe $F(\mathcal{NF})$ est fermée par passage aux quotients, et comme les groupes de type fini de la classe $\mathcal{NF}$ sont de présentation finie, alors d'après [35, Lemme

6.17] on peut supposer que tout quotient propre de G soit dans la classe $\mathcal{NF}$. Le groupe G étant hyper-(Abélien-par-fini), il contient un sous-groupe normal non trivial A tel que A soit fini ou Abélien, donc $G/A \in \mathcal{NF}$. Il s'ensuit que si A est fini, alors $G \in \mathcal{NF}$, ce qui contredit notre hypothèse. Donc A est Abélien et par suite G est dans la classe $\mathcal{A}(\mathcal{NF}) \subset (\mathcal{AN})\mathcal{F}$, i.e. $G \in (\mathcal{AN})\mathcal{F}$, ce qui donne la contradiction, par le Lemme 2.2.1, que $G \in (\mathcal{NF})\mathcal{F} = \mathcal{NF}$ et le Théorème est démontré. ■

Notons que le Théorème 2.2.1 n'est pas vrai pour tous les groupes. En effet, soit G l'exemple de Heineken et Mohamed [21] d'un p -groupe métabélien avec le centre est trivial tel que $G/G' \simeq C_{p^\infty}$ et dont les sous-groupes propres sont nilpotents et sous-normaux, pour un certain nombre premier p . Comme G est localement nilpotent, il appartient à FN . Mais G n'a pas de sous-groupes propres d'indice fini, donc $G \notin \mathcal{NF}$. Cela montre qu'on ne peut pas supprimer la condition "de type fini" du Théorème 2.2.1.

Aussi, soit G l'exemple de Golod [16] d'un groupe infini engendré par 3 éléments dont tous les sous-groupes 2-engendrés sont p -groupes finis, pour un certain nombre premier p . Donc $G \in \text{FN}$, mais G , étant infini, n'est pas dans la classe $\mathcal{NF}$. Par suite le Théorème 2.2.1 n'est pas vrai pour tous les groupes (résiduellement finis) de type fini.

Notons que le Théorème 2.2.1 généralise un résultat qui est dû à J. C. Lennox [25, Théorème A] affirmant qu'un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini dont tout sous-groupe à deux générateurs est nilpotent-par-fini est lui-même nilpotent-par-fini.

En combinant un résultat de [12, Théorème 3.2 (a)] et le Théorème 2.2.1, on a la conséquence suivante qui caractérise la classe $F(\mathcal{N}_k\mathcal{F})$; où k est un entier positif. Pour le cas spécial $k = 1$, nous n'avons besoin que du Théorème 2.2.1 et du fait que tout groupe de type fini dans la classe FA est dans $\mathcal{FA}$, pour caractériser la classe $F(\mathcal{AF})$.

Corollaire 2.2.1 *Soit $k > 0$ un entier et soit G un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini. On a :*

- (i) *Si G est dans la classe $F(\mathcal{N}_k\mathcal{F})$, alors il existe un entier positif $c = c(k)$, ne dépendant que de k , tel que G soit dans $\mathcal{N}_c\mathcal{F}$.*
- (ii) *Si G est dans la classe $F(\mathcal{AF})$, alors G est dans $\mathcal{AF}$.*

Preuve. Soit $k > 0$ un entier et soit G un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini.

(i) Supposons que G soit dans la classe $F(\mathcal{N}_k\mathcal{F})$, donc d'après le Théorème 2.2.1, G est dans la classe $\mathcal{N}\mathcal{F}$. Soit K un sous-groupe normal nilpotent de G tel que G/K soit fini. Comme K est un groupe nilpotent de type fini, il admet un sous-groupe normal sans torsion d'indice fini [36, 5.4.15 (i)]. D'où G a un sous-groupe normal nilpotent sans torsion N d'indice fini, mais N est dans la classe $F(\mathcal{N}_k\mathcal{F})$, donc N est dans FN_k [35, Lemme 6.33]. Il s'ensuit, par [12, Théorème 3.2 (a)], qu'il existe un entier $c = c(k)$, ne dépendant que de k , tel que N soit dans $\mathcal{F}\mathcal{N}_c$, i.e. $N \in \mathcal{N}_c$, d'où G est dans la classe $\mathcal{N}_c\mathcal{F}$.

(ii) Si G est dans la classe $F(\mathcal{A}\mathcal{F}) = F(\mathcal{N}_1\mathcal{F})$, alors par le Théorème 2.2.1, G est dans la classe $\mathcal{N}\mathcal{F}$. Nous procédons comme dans (i) jusqu'à ce que nous obtenons N est dans la classe $F\mathcal{A}$, donc N est dans $\mathcal{F}\mathcal{A}$, i.e. $N \in \mathcal{A}$, et par suite G est dans la classe $\mathcal{A}\mathcal{F}$. ■

Maintenant, encore une fois en utilisant le Théorème 2.2.1, on va caractériser les classes $F(\mathcal{N}_k\mathcal{F})$ pour les deux cas particuliers $k = 2$ et $k = 3$. Pour ce faire, nous avons besoin de quelques résultats préliminaires. Levi, voir [35, Théorème 7.14], a montré que si G est un groupe 2-Engel, alors $[G', G]^3 = 1$. En particulier, tout groupe 2-Engel et sans torsion est dans la classe $\mathcal{N}_2$. On utilisera ce dernier résultat dans le cas où $k = 2$. En revanche, Gupta et Newman, dans [19, Théorème 3.5], ont montré que tout groupe 3-Engel, sans éléments d'ordre 2 et engendré par n éléments, est nilpotent de classe égale au plus à $2n - 1$. En particulier, tout groupe 3-Engel, sans torsion et engendré par 2 éléments est dans la classe $\mathcal{N}_3$. On utilisera ce dernier résultat dans le cas où $k = 3$. Mais comme résultat commun qui sera utilisé dans les deux cas $k = 2$ et $k = 3$, on a un résultat démontré par Abdollahi [2, Lemme 1], qui affirme que si G est un groupe nilpotent de classe k et $x_1, \dots, x_k \in G$, alors $[x_1, \dots, x_{i-1}, x_i^n, x_{i+1}, \dots, x_k] = [x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_k]^n$; pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$ et pour tout entier n .

Lemme 2.2.2 *Un groupe nilpotent, sans torsion et dans la classe FN_2 est nilpotent de classe égale au plus à 2.*

Preuve. Soit G un groupe nilpotent, sans torsion et dans la classe FN_2 . On va montrer par récurrence sur la classe de nilpotence de G , notée c , que G est dans la classe $\mathcal{N}_2$. Il est clair que le résultat est vrai pour $c = 1$. Supposons maintenant

que $c > 1$ et que tout groupe nilpotent de classe strictement inférieure à c , sans torsion et dans FN_2 soit dans la classe $\mathcal{N}_2$. Puisque $G/Z(G) \in \mathcal{N}_{c-1}$, on a par l'hypothèse de récurrence que $G/Z(G) \in \mathcal{N}_2$; d'où $G \in \mathcal{N}_3$. Pour arriver à ce que nous voulons, il suffit de montrer par un résultat de Levi [35, Théorème 7.14] que G est un groupe 2-Engel, car il est sans torsion. Soient $x, y \in G$, donc il existe un sous-groupe normal $H(x)$ d'indice fini dans G tel que $\langle x, h \rangle \in \mathcal{N}_2$; pour tout $h \in H(x)$. Comme $H(x)$ est d'indice fini dans G , il existe un entier $n > 0$ tel que $y^n \in H(x)$, donc $\langle x, y^n \rangle \in \mathcal{N}_2$; d'où $[x, {}_2 y^n] = 1$. Comme $G \in \mathcal{N}_3$, alors par un résultat dû à Abdollahi [2, Lemme 1], $[x, {}_2 y^n] = [x, {}_2 y]^{n^2}$; or G est sans torsion, donc $[x, {}_2 y] = 1$. Ceci signifie que G est un groupe 2-Engel. ■

Lemme 2.2.3 *Un groupe nilpotent, sans torsion, engendré par 2 éléments et dans la classe FN_3 est nilpotent de classe égale au plus à 3.*

Preuve. Soit G un groupe nilpotent, sans torsion, 2-engendré et dans la classe FN_3 . On va montrer par récurrence sur la classe de nilpotence de G , notée c , que G est dans la classe $\mathcal{N}_3$. Il est clair que le résultat est vrai pour $c = 1$. Supposons maintenant que $c > 1$ et que tout groupe nilpotent de classe strictement inférieure à c , sans torsion, 2-engendré et dans FN_3 soit dans la classe $\mathcal{N}_3$. Puisque $G/Z(G) \in \mathcal{N}_{c-1}$, on a par l'hypothèse de récurrence que $G/Z(G) \in \mathcal{N}_3$; d'où $G \in \mathcal{N}_4$. Pour arriver à ce que nous voulons, il suffit de montrer par un résultat de Gupta et Newman [19, Théorème 3.5] que G est un groupe 3-Engel, car il est 2-engendré et sans torsion. Soient $x, y \in G$, donc il existe un sous-groupe normal $H(x)$ d'indice fini dans G tel que $\langle x, h \rangle \in \mathcal{N}_3$; pour tout $h \in H(x)$. Comme $H(x)$ est d'indice fini dans G , il existe un entier $n > 0$ tel que $y^n \in H(x)$, donc $\langle x, y^n \rangle \in \mathcal{N}_3$; d'où $[x, {}_3 y^n] = 1$. Comme $G \in \mathcal{N}_4$, alors par un résultat dû à Abdollahi [2, Lemme 1], $[x, {}_3 y^n] = [x, {}_3 y]^{n^3}$; or G est sans torsion, donc $[x, {}_3 y] = 1$. Ceci signifie que G est un groupe 3-Engel. ■

En combinant le Théorème 2.2.1 et les deux résultats Lemme 2.2.2 et Lemme 2.2.3, on a les conséquences suivantes :

Corollaire 2.2.2 *Soit G un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini. On a :*

- (i) *Si G est dans la classe $F(\mathcal{N}_2\mathcal{F})$, alors G est dans la classe $\mathcal{N}_2\mathcal{F}$.*
- (ii) *Si G est dans la classe $F(\mathcal{N}_3\mathcal{F})$, alors G est dans la classe $\mathcal{N}_3^{(2)}\mathcal{F}$.*

Preuve. Soit G un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini.

(i) Supposons que G soit dans la classe $F(\mathcal{N}_2\mathcal{F})$, donc d'après le Théorème 2.2.1, G est dans la classe $\mathcal{NF}$. Soit K un sous-groupe normal nilpotent de G tel que G/K soit fini. Comme K est un groupe nilpotent de type fini, il admet un sous-groupe normal sans torsion d'indice fini [36, 5.4.15 (i)]. D'où G a un sous-groupe normal nilpotent sans torsion N d'indice fini, or N est dans la classe $F(\mathcal{N}_2\mathcal{F})$, donc N est dans FN_2 [35, Lemme 6.33]. Il s'ensuit, par le Lemme 2.2.2, que N est dans la classe $\mathcal{N}_2$ et par conséquent G appartient à la classe $\mathcal{N}_2\mathcal{F}$.

(ii) Supposons que G soit dans la classe $F(\mathcal{N}_3\mathcal{F})$, donc d'après le Théorème 2.2.1, G est dans la classe $\mathcal{NF}$. Nous procédons comme dans (i) jusqu'à ce que nous obtenons N est dans la classe FN_3 . Il s'ensuit, par le Lemme 2.2.3, que N est dans la classe $\mathcal{N}_3^{(2)}$ et par conséquent G appartient à la classe $\mathcal{N}_3^{(2)}\mathcal{F}$. ■

L. C. Kappe et W. P. Kappe, dans [24], ont construit un groupe G de type fini, sans torsion, 3-Engel et nilpotent de classe égale exactement à 4. Par suite, en utilisant une conséquence d'un résultat de Gupta et Newman [19, Théorème 3.5], G est dans la classe FN_3 ; or $FN_3 \subset F(\mathcal{N}_3\mathcal{F})$, donc $G \in F(\mathcal{N}_3\mathcal{F})$. Si $G \in \mathcal{N}_3\mathcal{F}$, et comme il est nilpotent et sans torsion, G sera dans la classe $\mathcal{N}_3$ par [35, Lemme 6.33]; ce qui contredit le fait que G est nilpotent de classe égale exactement à 4. Ceci signifie qu'un groupe G hyper-(Abélien-par-fini) de type fini et appartenant à la classe $F(\mathcal{N}_k\mathcal{F})$, n'est pas forcément être dans la classe $\mathcal{N}_k\mathcal{F}$ pour un entier positif $k \geq 3$.

2.3 Groupes des classes $F(\mathcal{FN})$ et $F(\mathcal{FN}_k)$

Le Théorème suivant est notre résultat principal dans cette section, et qui concerne la classe $F(\mathcal{FN})$, dont la démonstration utilise le Théorème 2.2.1.

Théorème 2.3.1 *Soit G un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini. Alors G est dans la classe $F(\mathcal{FN})$ si, et seulement si, G est dans la classe $\mathcal{FN}$.*

Preuve. Il est clair que tout groupe fini-par-nilpotent est dans la classe $F(\mathcal{FN})$. Réciproquement, soit G un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini de la classe $F(\mathcal{FN})$. D'après le Théorème 2.2.1, $G \in \mathcal{NF}$. Soit N un sous-groupe normal nilpotent de G tel que G/N soit fini.

Supposons d'abord que N soit sans torsion, et soit $x \in G$. Il existe donc un sous-groupe normal $H(x)$ d'indice fini dans G tel que $\langle x, h \rangle \in \mathcal{FN}$ pour tout

$h \in H(x)$. Posons $K = H(x) \cap N$, donc K est un sous-groupe normal d'indice fini dans G tel que $\langle x, y \rangle \in \mathcal{FN}$ pour tout $y \in K$. Soit $y \in K$ et soit T le sous-groupe de torsion de $\langle x, y \rangle$. Par suite T est fini et $\langle x, y \rangle / T$ est un groupe nilpotent sans torsion dans la classe $\mathcal{N}_c \mathcal{F}$, où c est la classe de nilpotence de N , donc il est dans $\mathcal{N}_c$ par [35, Lemme 6.33]. On en déduit que $\langle x, y \rangle \in \mathcal{FN}_c$, i.e. $\gamma_{c+1}(\langle x, y \rangle)$ est fini. Comme K est normal dans G , on a $\gamma_{c+1}(\langle x, y \rangle) \leq \gamma_{c+1}(\langle x \rangle K) \leq K$. Or K est sans torsion, donc $\gamma_{c+1}(\langle x, y \rangle) = 1$, et par suite $\langle x, y \rangle \in \mathcal{N}_c$. Il s'ensuit que $G \in \mathcal{FN}_c$, d'où $G \in \mathcal{FN}$ par [12, Théorème 3.2 (a)].

On suppose maintenant que T_N , le sous-groupe de torsion de N , soit non trivial. Alors T_N est fini, et comme les hypothèses sur G sont fermées par quotients, $G/T_N \in \mathcal{FN}$ par la première partie de la preuve. Par suite $G \in \mathcal{FN}$, et c'est ce que nous voulons. ■

Notons que le Théorème 2.3.1 n'est pas vrai pour tous les groupes. En effet, soit le groupe localement diédral $G = A \rtimes \langle x \rangle$ où $A \simeq C_{2^\infty}$, $x^2 = 1$ et $a^x = a^{-1}$ pour tout $a \in A$. Il est clair que $G' = A$ et G est localement nilpotent, donc $G \in \mathcal{FN}$. Si $G \in \mathcal{FN}$, alors $G \in \mathcal{FA}$ par [35, Lemme 3.13] ce qui donne la contradiction que G' est fini. Par suite $G \notin \mathcal{FN}$ et on ne peut pas donc supprimer la condition "de type fini" du Théorème 2.3.1.

Aussi, soit G l'exemple de Golod [16] d'un groupe infini engendré par 3 éléments dont tous les sous-groupes 2-engendrés sont p -groupes finis, pour un certain nombre premier p . Donc $G \in \mathcal{FN}$, mais G , étant infini, n'est pas dans la classe $\mathcal{FN}$. Par suite le Théorème 2.3.1 n'est pas vrai pour tous les groupes (résiduellement finis) de type fini.

Notons que le Théorème 2.3.1 généralise un résultat qui est dû à J. C. Lennox [25, Théorème A] affirmant qu'un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini dont tout sous-groupe à deux générateurs est fini-par-nilpotent est lui-même fini-par-nilpotent.

Maintenant, on va caractériser les classes des groupes $F(\mathcal{FN}_k)$, $F(\mathcal{FA})$, $F(\mathcal{FN}_2)$ et $F(\mathcal{FN}_3)$; où k est un entier positif. En combinant le Théorème 2.3.1 et les résultats [12, Théorème 3.2 (a)], le fait que tout groupe de type fini dans la classe $\mathcal{FA}$ est dans $\mathcal{FA}$, Lemme 2.2.2 et Lemme 2.2.3, on a les conséquences suivantes :

Corollaire 2.3.1 *Soit $k > 0$ un entier et soit G un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini. On a :*

- (i) *Si G est dans la classe $F(\mathcal{FN}_k)$, alors il existe un entier positif $c = c(k)$, ne dépendant que de k , tel que G soit dans $\mathcal{FN}_c$.*
- (ii) *Si G est dans la classe $F(\mathcal{FA})$, alors G est dans $\mathcal{FA}$.*
- (iii) *Si G est dans la classe $F(\mathcal{FN}_2)$, alors G est dans $\mathcal{FN}_2$.*
- (iv) *Si G est dans la classe $F(\mathcal{FN}_3)$, alors G est dans $\mathcal{FN}_3^{(2)}$.*

Preuve. Soit $k > 0$ un entier et soit G un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini.

(i) Supposons que G soit dans la classe $F(\mathcal{FN}_k)$, donc d'après le Théorème 2.3.1, G est dans la classe $\mathcal{FN}$. Soit T le sous-groupe de torsion de G , donc T est fini et G/T est un groupe nilpotent de type fini et sans torsion ; ainsi que dans la classe $\mathcal{FN}_k$. Il s'ensuit, par [12, Théorème 3.2 (a)], qu'il existe un entier $c = c(k)$, ne dépendant que de k , tel que G/T soit dans $\mathcal{FN}_c$, d'où $G \in \mathcal{FN}_c$.

(ii) Si G est dans la classe $F(\mathcal{FA}) = F(\mathcal{FN}_1)$, alors par le Théorème 2.3.1, G est dans la classe $\mathcal{FN}$. Nous procédons comme dans (i) jusqu'à ce que nous obtenons G/T est dans la classe $\mathcal{FA}$, donc G/T est dans $\mathcal{FA}$ et par suite G est dans la classe $\mathcal{FA}$.

(iii) Si G est dans la classe $F(\mathcal{FN}_2)$, alors par le Théorème 2.3.1, G est dans la classe $\mathcal{FN}$. Nous procédons comme dans (i) jusqu'à ce que nous obtenons G/T est dans la classe $\mathcal{FN}_2$. Il s'ensuit, par le Lemme 2.2.2, que G/T est dans la classe $\mathcal{N}_2$; d'où G est dans la classe $\mathcal{FN}_2$.

(iv) Si G est dans la classe $F(\mathcal{FN}_3)$, alors par le Théorème 2.3.1, G est dans la classe $\mathcal{FN}$. Nous procédons comme dans (i) jusqu'à ce que nous obtenons G/T est dans la classe $\mathcal{FN}_3$. Il s'ensuit, par le Lemme 2.2.3, que G/T est dans la classe $\mathcal{N}_3^{(2)}$; d'où G est dans la classe $\mathcal{FN}_3^{(2)}$. ■

L. C. Kappe et W. P. Kappe, dans [24], ont construit un groupe G de type fini, sans torsion, 3-Engel et nilpotent de classe égale exactement à 4. Par suite, en utilisant une conséquence d'un résultat de Gupta et Newman [19, Théorème 3.5], G est dans la classe $\mathcal{FN}_3$; d'où $G \in F(\mathcal{FN}_3)$. Puisque G est sans torsion, $G \notin \mathcal{FN}_3$, car G est nilpotent de classe égale exactement à 4. Ceci signifie qu'un groupe G hyper-(Abélien-par-fini) de type fini et appartenant à la classe $F(\mathcal{FN}_k)$, n'est pas forcément être dans la classe $\mathcal{FN}_k$ pour un entier positif $k \geq 3$.

2.4 Groupes des classes $F(\mathcal{TN})$ et $F(\mathcal{TN}_k)$

Dans cette section on caractérisera les classes $F(\mathcal{TN})$ et $F(\mathcal{TN}_k)$. Le résultat principal ici indique qu'un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini et dans la classe $F(\mathcal{TN})$ est périodique-par-nilpotent. Pour le montrer, on a besoin de quelques lemmes préliminaires. Notons que notre résultat principal de la section précédente a été utilisé dans la démonstration, mais sous des hypothèses faibles.

Lemme 2.4.1 *Un groupe Abélien-par-nilpotent, de type fini et dans la classe $F(\mathcal{TN})$ est périodique-par-nilpotent.*

Preuve. Soit G un groupe Abélien-par-nilpotent de type fini dans la classe $F(\mathcal{TN})$. Soit A un sous-groupe normal Abélien de G tel que G/A soit nilpotent et supposons que A soit sans torsion. Comme G vérifie la condition maximale sur les sous-groupes normaux [35, Théorème 5.34], $A = a_1^G \dots a_r^G$ pour certains $a_1, \dots, a_r \in A$. Par suite, pour tout $1 \leq i \leq r$, il existe un sous-groupe normal $H(a_i)$ d'indice fini dans G tel que $\langle a_i, h_i \rangle \in \mathcal{TN}; \forall h_i \in H(a_i)$. Posons $H = \cap_{1 \leq i \leq r} H(a_i)$, donc H est un sous-groupe normal d'indice fini dans G , et pour tout $1 \leq i \leq r$ et pour tous $h \in H$ on a $\langle a_i, h \rangle \in \mathcal{TN}$. Soit i avec $1 \leq i \leq r$ et soit $h \in H$, il existe donc un entier positif $n = n(a_i, h)$ tel que $\gamma_{n+1}(\langle a_i, h \rangle)$ soit périodique. Or $\langle a_i, h \rangle \leq \langle A, h \rangle = \langle h \rangle A$, donc $\gamma_{n+1}(\langle a_i, h \rangle) \leq \gamma_{n+1}(\langle h \rangle A) \leq A$ qui est sans torsion, par suite $\gamma_{n+1}(\langle a_i, h \rangle) = 1$, d'où $\langle a_i, h \rangle$ est nilpotent. Soit $a \in A$, donc $a = b_1 \dots b_s$ où $b_j = a_{i_j}^{g_j}$ pour certains $g_j \in G$, $1 \leq i_j \leq r$ et $1 \leq j \leq s$. Il existe un entier positif $c_{i_j} = c_{i_j}(a_{i_j}, h^{g_j^{-1}})$ tel que $\langle a_{i_j}, h^{g_j^{-1}} \rangle \in \mathcal{N}_{c_{i_j}}$, ainsi $[a_{i_j, c_{i_j}} h^{g_j^{-1}}] = 1$. En posant $c = \max\{c_{i_j} \mid 1 \leq i_j \leq r, 1 \leq j \leq s\} = c(a, h)$, on obtient

$$\begin{aligned} [a, {}_c h] &= [b_1 \dots b_s, {}_c h] = [b_1, {}_c h] \dots [b_s, {}_c h] = [a_{i_1}^{g_1}, {}_c h] \dots [a_{i_s}^{g_s}, {}_c h] = \\ &= [a_{i_1, c} h^{g_1^{-1}}]^{g_1} \dots [a_{i_s, c} h^{g_s^{-1}}]^{g_s} = 1. \end{aligned}$$

Comme $[a, {}_c b h] = [a, {}_c h] = 1$ pour tout $b \in A$, on en déduit que pour tous $a \in A$ et $x \in AH$, il existe un entier $c = c(a, x) > 0$ tel que $[a, {}_c x] = 1$ et par suite $A \leq R(AH)$ l'ensemble des éléments d'Engel à droite de AH . De plus, comme G/AH est fini, AH est un groupe Abélien-par-nilpotent de type fini, donc par un résultat de Brookes [6] on a $R(AH) = \bar{Z}(AH)$ l'hypercentre de AH . Or AH vérifie la condition maximale sur les sous-groupes normaux,

par suite $R(AH) = Z_k(AH)$ pour un certain entier positif k . Il s'ensuit que $A \leq Z_k(AH)$, mais $AH/Z_k(AH) \leq G/Z_k(AH) \simeq (G/A)/(Z_k(AH)/A) \in \mathcal{N}$ car G/A est nilpotent, donc $AH/Z_k(AH) \in \mathcal{N}$; d'où AH est nilpotent. Par conséquent $G \in \mathcal{NF}$. On en déduit que G vérifie la condition maximale sur les sous-groupes et par suite il est dans la classe $F(\mathcal{FN})$. Maintenant, le Théorème 2.3.1 nous permet de conclure que $G \in \mathcal{FN}$.

Supposons maintenant que T_A , le sous-groupe de torsion de A , soit non trivial. Par la première partie de la preuve, nous avons que $G/T_A \in \mathcal{FN}$ et par suite $G \in \mathcal{TN}$. Ce qui achève la démonstration. ■

Lemme 2.4.2 *Un groupe résoluble, Abélien-par-périodique et dans $F(\mathcal{TN})$ est périodique-par-Abélien.*

Preuve. Soit G un groupe résoluble, Abélien-par-périodique dans la classe $F(\mathcal{TN})$. On va montrer que G' , le sous-groupe dérivé de G , est périodique. En effet, soit $g \in G'$, donc $g = [x_1, y_1] \dots [x_r, y_r]$ pour certains $x_i, y_i \in G$ avec $1 \leq i \leq r$. On pose $H = \langle x_i, y_i \mid 1 \leq i \leq r \rangle$ qui est de type fini, donc $H \in \mathcal{AF}$ et par suite il vérifie la condition maximale sur les sous-groupes, mais H est dans $F(\mathcal{TN})$, ainsi H est dans la classe $F(\mathcal{FN})$. Il s'ensuit, par le Théorème 2.3.1, que $H \in \mathcal{FN}$. Soit T le sous-groupe de torsion de H . Alors T est fini et H/T est un groupe nilpotent sans torsion dans la classe $\mathcal{AF}$, d'où H/T est Abélien par [35, Lemme 6.33], autrement dit $H \in \mathcal{FA}$. Par suite H' , le sous-groupe dérivé de H , est fini, or $g \in H'$, donc g est d'ordre fini. Cela signifie que G' est périodique, ainsi $G \in \mathcal{TA}$. ■

Lemme 2.4.3 *Un groupe résoluble, de type fini et dans la classe $F(\mathcal{TN})$ est périodique-par-nilpotent.*

Preuve. Soit G un groupe résoluble de type fini dans la classe $F(\mathcal{TN})$. On montrera par récurrence sur la longueur dérivée d de G que G est périodique-par-nilpotent. Si $d = 1$, alors G est Abélien et donc le résultat est vrai. Supposons maintenant que $d > 1$ et que tout groupe résoluble de type fini dans la classe $F(\mathcal{TN})$ et de longueur dérivée strictement inférieure à d soit périodique-par-nilpotent. Notre groupe G étant résoluble, il a un sous-groupe normal Abélien $A = G^{(d-1)}$, donc G/A est un groupe résoluble de type fini dans la classe $F(\mathcal{TN})$ et de longueur dérivée $d - 1$. Par l'hypothèse de récurrence, on obtient que $G/A \in \mathcal{TN}$. Par suite G est dans la classe $\mathcal{A}(\mathcal{TN})$, c'est-à-dire que $G \in (\mathcal{AT})\mathcal{N}$.

Il s'ensuit, par le Lemme 2.4.2, que G est dans la classe $(\mathcal{TA})\mathcal{N}$, or $(\mathcal{TA})\mathcal{N} = \mathcal{T}(\mathcal{AN})$, donc $G \in \mathcal{T}(\mathcal{AN})$. Maintenant, par le Lemme 2.4.1, G est dans la classe $\mathcal{T}(\mathcal{TN}) = \mathcal{TN}$, i.e. $G \in \mathcal{TN}$. ■

Maintenant, nous sommes prêts pour démontrer notre résultat principal dans cette section :

Théorème 2.4.1 *Soit G un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini. Alors G est dans la classe $F(\mathcal{TN})$ si, et seulement si, G est dans la classe $\mathcal{TN}$.*

Preuve. Il est clair que tout groupe périodique-par-nilpotent est dans la classe $F(\mathcal{TN})$. Inversement, soit G un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini de la classe $F(\mathcal{TN})$ et soit $1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_\tau \triangleleft G_{\tau+1} \triangleleft \dots G_\alpha = G$ une série ascendante de sous-groupes normaux de G telle que $G_{\tau+1}/G_\tau \in \mathcal{AF}$ pour tout ordinal τ , et si λ est un ordinal limite, alors $G_\lambda = \cup_{\tau < \lambda} G_\tau$. Par récurrence transfinie sur α , on montre que G est périodique-par-nilpotent. Si $\alpha \leq 1$, alors G est un groupe Abélien-par-fini de type fini. Donc G vérifie la condition maximale sur les sous-groupes et par suite il est dans $F(\mathcal{FN})$. Ainsi par le Théorème 2.3.1, $G \in \mathcal{FN}$. Supposons maintenant que $\alpha > 1$ et que tout groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini dans la classe $F(\mathcal{TN})$ et de type d'ordre strictement inférieur à α , soit dans la classe $\mathcal{TN}$. Si α est un ordinal limite, alors $G = \cup_{\tau < \alpha} G_\tau$. Mais $G = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ pour certains éléments $x_1, \dots, x_n$ de G , donc $G = G_\tau$ pour un certain ordinal $\tau < \alpha$ et par suite $G \in \mathcal{TN}$. On suppose maintenant que α ne soit pas un ordinal limite, il a donc un prédécesseur $\alpha - 1$, d'où par l'hypothèse de récurrence $G_{\alpha-1} \in \mathcal{TN}$. Comme $G/G_{\alpha-1} = G_\alpha/G_{\alpha-1} \in \mathcal{AF}$, alors G est dans la classe $(\mathcal{TN})(\mathcal{AF}) \subset ((\mathcal{TN})\mathcal{A})\mathcal{F} = (\mathcal{T}(\mathcal{NA}))\mathcal{F}$, i.e. $G \in (\mathcal{T}(\mathcal{NA}))\mathcal{F}$. Soit $N \triangleleft G$ tel que $N \in \mathcal{T}(\mathcal{NA})$ et G/N soit fini. Puisque G est de type fini, alors N est un groupe périodique-par-résoluble de type fini dans la classe $F(\mathcal{TN})$, d'où par le Lemme 2.4.3, N est un groupe périodique-par-(périodique-par-nilpotent), i.e. $N \in \mathcal{TN}$. On a donc $G \in (\mathcal{TN})\mathcal{F}$, or $(\mathcal{TN})\mathcal{F} = \mathcal{T}(\mathcal{NF})$, par suite $G \in \mathcal{T}(\mathcal{NF})$. Soit T un sous-groupe normal de G tel que $T \in \mathcal{T}$ et $G/T \in \mathcal{NF}$. Comme les groupes nilpotents-par-finis de type fini vérifient la condition maximale sur les sous-groupes, $G/T \in F(\mathcal{FN})$ et par suite $G/T \in \mathcal{FN}$ par le Théorème 2.3.1, de sorte que $G \in \mathcal{TN}$ et le Théorème est prouvé. ■

Notons que le Théorème 2.4.1 n'est pas vrai pour tous les groupes. En effet, McLain [36, Pages 347 et 348] a construit un groupe $G = M(\mathbb{Q}, F)$ localement

nilpotent, sans torsion et caractéristiquement simple (donc il est parfait et son centre est trivial); en prenant ici F est un corps de caractéristique zéro. Il est clair que G est dans la classe $\mathcal{FN}$; mais $G \notin \mathcal{TN}$, car il est sans torsion et non nilpotent. La condition "de type fini" est donc nécessaire dans le Théorème 2.4.1.

Aussi dans [22, Corollaire 4.2], l'existence d'un exemple de Golod sans torsion a été prouvé; c'est-à-dire qu'il existe un groupe G sans torsion, engendré par 3 éléments, résiduellement nilpotent, non nilpotent et dans lequel tous les sous-groupes 2-engendrés sont nilpotents. En particulier, G est dans la classe $\mathcal{FN}$; mais G , étant sans torsion et non nilpotent, $G \notin \mathcal{TN}$, ce qui montre que le Théorème 2.4.1 n'est pas vrai pour tous les groupes (résiduellement nilpotents) de type fini.

Il est clair que tout groupe appartenant à la classe $\mathcal{FT}$ est périodique. De ceci et le fait que les groupes localement finis sont stables par extension et le fait aussi qu'un groupe hyper-(localement fini) est localement fini [35, Partie 1, page 36], on en déduit que tout groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini et dans la classe $\mathcal{FT}$ est fini.

On va caractériser les classes $F(\mathcal{TN}_k)$, $F(\mathcal{TA})$, $F(\mathcal{TN}_2)$ et $F(\mathcal{TN}_3)$; où k est un entier positif. En combinant le Théorème 2.4.1, le résultat [12, Théorème 3.2 (a)], le fait que tout groupe de type fini dans la classe $\mathcal{FA}$ est dans $\mathcal{FA}$, le Lemme 2.2.2 et le Lemme 2.2.3, on a les conséquences suivantes :

Corollaire 2.4.1 *Soit $k > 0$ un entier et soit G un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini. On a :*

- (i) *Si G est dans la classe $F(\mathcal{TN}_k)$, alors il existe un entier positif $c = c(k)$, ne dépendant que de k , tel que G soit dans $\mathcal{TN}_c$.*
- (ii) *Si G est dans la classe $F(\mathcal{TA})$, alors G est dans $\mathcal{TA}$.*
- (iii) *Si G est dans la classe $F(\mathcal{TN}_2)$, alors G est dans $\mathcal{TN}_2$.*
- (iv) *Si G est dans la classe $F(\mathcal{TN}_3)$, alors G est dans $\mathcal{TN}_3^{(2)}$.*

Preuve. Soit $k > 0$ un entier et soit G un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini.

(i) Supposons que G soit dans la classe $F(\mathcal{TN}_k)$, donc d'après le Théorème 2.4.1, G est dans la classe $\mathcal{TN}$. Soit T le sous-groupe de torsion de G , donc G/T est un groupe nilpotent de type fini et sans torsion; ainsi que dans la classe

$\mathcal{FN}_k$. Il s'ensuit, par [12, Théorème 3.2 (a)], qu'il existe un entier $c = c(k)$, ne dépendant que de k , tel que G/T soit dans $\mathcal{FN}_c$, d'où $G \in \mathcal{TN}_c$.

(ii) Si G est dans la classe $F(\mathcal{TA}) = F(\mathcal{TN}_1)$, alors par le Théorème 2.4.1, G est dans la classe $\mathcal{TN}$. Nous procédons comme dans (i) jusqu'à ce que nous obtenons G/T est dans la classe $\mathcal{FA}$, donc G/T est dans $\mathcal{FA}$ et par suite G est dans la classe $\mathcal{TA}$.

(iii) Si G est dans la classe $F(\mathcal{TN}_2)$, alors par le Théorème 2.3.1, G est dans la classe $\mathcal{TN}$. Nous procédons comme dans (i) jusqu'à ce que nous obtenons G/T est dans la classe $\mathcal{FN}_2$. Il s'ensuit, par le Lemme 2.2.2, que G/T est dans la classe $\mathcal{N}_2$; d'où G est dans la classe $\mathcal{TN}_2$.

(iv) Si G est dans la classe $F(\mathcal{TN}_3)$, alors par le Théorème 2.3.1, G est dans la classe $\mathcal{TN}$. Nous procédons comme dans (i) jusqu'à ce que nous obtenons G/T est dans la classe $\mathcal{FN}_3$. Il s'ensuit, par le Lemme 2.2.3, que G/T est dans la classe $\mathcal{N}_3^{(2)}$; d'où G est dans la classe $\mathcal{TN}_3^{(2)}$. ■

L. C. Kappe et W. P. Kappe, dans [24], ont construit un groupe G de type fini, sans torsion, 3-Engel et nilpotent de classe égale exactement à 4. Par suite, en utilisant une conséquence d'un résultat de Gupta et Newman [19, Théorème 3.5], G est dans la classe $\mathcal{FN}_3$; d'où $G \in F(\mathcal{TN}_3)$. Puisque G est sans torsion, $G \notin \mathcal{TN}_3$, car G est nilpotent de classe égale exactement à 4. Ceci signifie qu'un groupe G hyper-(Abélien-par-fini) de type fini et appartenant à la classe $F(\mathcal{TN}_k)$, n'est pas forcément être dans la classe $\mathcal{TN}_k$ pour un entier positif $k \geq 3$.

Chapitre 3

Une caractérisation des groupes finis-par-nilpotents

3.1 Introduction

Dans ce dernier chapitre, on donnera une caractérisation des groupes finis-par-nilpotents dans la classe des groupes hyper-(Abélien-par-fini) de type fini. Plus précisément, on établira qu'un groupe G hyper-(Abélien-par-fini) de type fini est dans la classe $F\Omega$ (respectivement $F(\mathcal{ME})$) si, et seulement si, G est dans la classe $\mathcal{FN}$; où Ω , $\mathcal{M}$ et $\mathcal{E}$ sont les classes des groupes introduites au premier chapitre, et $F\mathcal{X}$ est la classe introduite au chapitre précédent. On prouvera aussi que si $k > 0$ est un entier et si G est un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini dans la classe $F\Omega_k$ (respectivement $F(\mathcal{ME}_k)$), alors il existe un entier positif $c = c(k)$ ne dépendant que de k tel que G soit dans la classe $\mathcal{FN}_c$; où Ω_k et $\mathcal{E}_k$ sont les classes des groupes introduites au premier chapitre. Ces quatre résultats généralisent ainsi nos quelques résultats établis dans la troisième section du Chapitre 2, notamment le Théorème 2.3.1.

3.2 Groupes des classes $F\Omega$ et $F\Omega_k$

Dans cette section on caractérisera les classes $F\Omega$ et $F\Omega_k$, où notre résultat principal ici indique qu'un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini dans la classe $F\Omega$ est fini-par-nilpotent. On va commencer par établir quelques résultats préliminaires dont les démonstrations ont été adaptées des techniques de la

preuve du Théorème 3 de Lennox [26].

Lemme 3.2.1 *Soit G un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini dans la classe $F\Omega$. Si G est résiduellement nilpotent, alors G est dans la classe $\mathcal{FN}$.*

Preuve. Soit G un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini dans la classe $F\Omega$, et supposons que G soit résiduellement nilpotent. Soit $x \in G$, il existe donc un sous-groupe normal $H(x)$ d'indice fini dans G tel que $\langle x, h \rangle \in \Omega$ pour tout $h \in H(x)$. Soit $h \in H(x)$, donc il existe un entier positif k tel que $\gamma_k(\langle x, h \rangle) = \gamma_{k+1}(\langle x, h \rangle)$. Mais $\langle x, h \rangle$ est résiduellement nilpotent en tant que sous-groupe de G , i.e. $\bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} \gamma_i(\langle x, h \rangle) = 1$, donc $\gamma_k(\langle x, h \rangle) = \bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} \gamma_i(\langle x, h \rangle) = 1$. Ceci signifie que $\langle x, h \rangle \in \mathcal{N}$, et ainsi G est dans la classe $\mathcal{FN}$. Il s'ensuit, par le Théorème 2.3.1, que G est dans la classe $\mathcal{FN}$; ce qui achève la démonstration. ■

Lemme 3.2.2 *Un groupe hyper-(Abélien-par-fini), de type fini et dans la classe $F\Omega$ est nilpotent-par-fini.*

Preuve. Soit G un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini dans la classe $F\Omega$. Supposons que G ne soit pas nilpotent-par-fini. Comme les groupes nilpotents-par-finis de type fini sont de présentation finie, et comme la classe $F\Omega$ est fermée par passage aux quotients, alors d'après [35, Lemme 6.17] on peut supposer que tout quotient propre de G soit dans la classe $\mathcal{NF}$. Notre groupe G étant hyper-(Abélien-par-fini), il contient un sous-groupe normal non trivial A tel que A soit fini ou Abélien; donc $G/A \in \mathcal{NF}$. Il est clair, dans ce cas, que A est Abélien et donc G est dans la classe $\mathcal{A}(\mathcal{NF})$, or $\mathcal{A}(\mathcal{NF}) \subset (\mathcal{AN})\mathcal{F}$, ainsi G est dans $(\mathcal{AN})\mathcal{F}$. Par suite G admet un sous-groupe normal N d'indice fini tel que N soit Abélien-par-nilpotent. Comme G/N est fini, alors N est un groupe Abélien-par-nilpotent de type fini. Il s'ensuit, par un résultat de Segal [38, Corollaire 1], que N a un sous-groupe normal résiduellement nilpotent d'indice fini, et ainsi G admet un sous-groupe normal résiduellement nilpotent d'indice fini K . Maintenant, comme K est hyper-(Abélien-par-fini) de type fini et résiduellement nilpotent dans la classe $F\Omega$, alors par le Lemme 3.2.1, K est dans la classe $\mathcal{FN}$, et donc il est dans $\mathcal{NF}$, selon un résultat de P. Hall [23, 1.5]. Par suite G est dans la classe $(\mathcal{NF})\mathcal{F} = \mathcal{NF}$, une contradiction et le Lemme est prouvé. ■

Lemme 3.2.3 *Un groupe nilpotent-par-cyclique fini, de type fini et dans la classe $F\Omega$ est fini-par-nilpotent.*

Preuve. Soit G un groupe de type fini dans la classe $F\Omega$ admettant un sous-groupe normal nilpotent N tel que G/N soit un groupe cyclique fini. On va montrer par récurrence sur l'ordre du groupe G/N que G est dans la classe $\mathcal{FN}$. On pose $n = |G/N|$. Si $n = 1$, alors $G = N$ et G est nilpotent. Supposons maintenant que $n > 1$, et que tout groupe de type fini dans la classe $F\Omega$ et nilpotent-par-cyclique fini d'ordre r , avec $r < n$, soit fini-par-nilpotent. Soit q un nombre premier divisant n . Comme G/N est cyclique, il admet un sous-groupe normal H/N d'indice q , donc H est un sous-groupe normal dans G d'indice q contenant N . De plus, comme $|H/N| < |G/N|$, alors par l'hypothèse de récurrence, H est dans la classe $\mathcal{FN}$. Soit T le sous-groupe de torsion de H . Comme H est de type fini, T est fini et H/T est un groupe nilpotent sans torsion de type fini. Par suite, par un résultat de Gruenberg [36, 5.2.21], H/T est résiduellement un p -groupe fini pour tous les nombres premiers p et par conséquent, en particulier, H/T est résiduellement un q -groupe fini. Or H est d'indice q dans G , donc cela nous permet de conclure que G/T est résiduellement un q -groupe fini [39, Exercice 10, page 17]. Ceci signifie que G/T est résiduellement nilpotent. Il s'ensuit, par le Lemme 3.2.1, que G/T est dans la classe $\mathcal{FN}$ et donc G est lui-même fini-par-nilpotent. ■

Maintenant, nous sommes prêts pour démontrer notre résultat principal dans cette section :

Théorème 3.2.1 *Soit G un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini. Alors G est dans la classe $F\Omega$ si, et seulement si, G est dans la classe $\mathcal{FN}$.*

Preuve. Il est clair que tout groupe fini-par-nilpotent est dans la classe $F\Omega$. Réciproquement, soit G un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini de la classe $F\Omega$. Par suite, par le Lemme 3.2.2, G est dans la classe $\mathcal{NF}$. Soit K un sous-groupe normal nilpotent de G tel que G/K soit fini. Comme K est un groupe nilpotent de type fini, il admet un sous-groupe normal sans torsion d'indice fini [36, 5.4.15 (i)]. Donc G a un sous-groupe normal nilpotent sans torsion N d'indice fini. Soit x un élément non trivial de G . Comme N est de type fini, $\langle N, x \rangle$ est de type fini dans la classe $F\Omega$, or $\langle N, x \rangle / N$ est cyclique fini, donc par le Lemme 3.2.3, $\langle N, x \rangle$ est fini-par-nilpotent. Il existe donc un sous-groupe normal fini H de $\langle N, x \rangle$ tel que $\langle N, x \rangle / H$ soit nilpotent, ainsi $\gamma_{k+1}(\langle N, x \rangle) \leq H$ pour un certain entier positif k , d'où $\gamma_{k+1}(\langle N, x \rangle)$ est fini. Par suite, il existe un entier positif

m tel que $[g, {}_k x]^m = 1$; pour tout $g \in N$. Soit $g \in N$. Comme $[g, {}_k x]$ est un élément du groupe sans torsion N , on déduit que $[g, {}_k x] = 1$, ainsi g est un élément d'Engel à droite de G et par conséquent $N \subset R(G)$; où $R(G)$ désigne l'ensemble des éléments d'Engel à droite de G . Par ailleurs, comme G est un groupe nilpotent-par-fini de type fini, il vérifie la condition maximale sur les sous-groupes. Donc, par un résultat de Baer [35, Théorème 7.21], $R(G)$ coïncide avec l'hypercentre de G qui est égal à $Z_n(G)$ pour un certain entier positif n , ainsi $N \leq Z_n(G)$ et par suite $Z_n(G)$ est d'indice fini dans G . Il s'ensuit, encore par Baer [23, Théorème 1], que G est dans la classe $\mathcal{FN}$. ■

Notons que le Théorème 3.2.1 n'est pas vrai pour tous les groupes. En effet, Vaughan-Lee et Wiegold, dans [43], ont construit un p -groupe infini G , parfait (i.e. $G' = G$), localement fini et d'exposant un nombre premier $p \geq 5$; donc tout sous-groupe à deux générateurs de G est nilpotent. Par suite $G \in \text{FN}$ et ainsi $G \in \text{F}\Omega$; mais $G \notin \mathcal{FN}$ car il est parfait et infini. On ne peut pas donc supprimer la condition "de type fini" du Théorème 3.2.1.

Aussi, soit G l'exemple de Golod [16] d'un groupe infini engendré par 3 éléments dont tous les sous-groupes 2-engendrés sont p -groupes finis, pour un certain nombre premier p . Donc $G \in \text{FN}$ et par conséquent $G \in \text{F}\Omega$, mais G , étant infini, n'est pas dans la classe $\mathcal{FN}$. Par suite le Théorème 3.2.1 n'est pas vrai pour tous les groupes (résiduellement finis) de type fini.

Notons que le Théorème 3.2.1 généralise un résultat qui est dû à J. C. Lennox [26] affirmant qu'un groupe résoluble de type fini dont tout sous-groupe à deux générateurs est de profondeur finie, est fini-par-nilpotent.

Il est clair qu'un groupe Abélien G dans la classe $\text{F}\Omega_1$ est trivial. En effet, si $G \neq 1$, alors il contient un élément non trivial x , et il existe donc un sous-groupe normal $H(x)$ d'indice fini dans G tel que $\gamma_1(\langle x, h \rangle) = \gamma_2(\langle x, h \rangle) = 1$ pour tout $h \in H(x)$; d'où $x = 1$, ce qui est une contradiction. Il s'ensuit qu'un groupe G hyper-(Abélien-par-fini) dans la classe $\text{F}\Omega_1$ est hyper-(fini), car $\text{F}\Omega_1$ est une classe stable par passage aux sous-groupes et par passage aux quotients. Mais il n'est pas difficile de voir qu'un groupe hyper-(fini) est localement fini [35, Partie 1, page 36], donc G est localement fini. Maintenant si G est infini, il contient un sous-groupe Abélien infini A [35, Théorème 3.43]. Comme A est dans la classe

$F\Omega_1$, il est trivial ; une contradiction et G , donc, est fini. Finalement, on a tout groupe hyper-(Abélien-par-fini) dans la classe $F\Omega_1$ est fini.

Maintenant, on va caractériser les classes $F\Omega_k$, $F\Omega_2$, $F\Omega_3$ et $F\Omega_4$; où k est un entier positif. En combinant le Théorème 3.2.1 et les résultats [12, Théorème 3.2 (a)], le fait que tout groupe de type fini dans la classe $F\mathcal{A}$ est dans $\mathcal{FA}$, Lemme 2.2.2 et Lemme 2.2.3, on a les conséquences suivantes :

Corollaire 3.2.1 *Soit $k > 0$ un entier et soit G un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini. On a :*

- (i) *Si G est dans la classe $F\Omega_k$, alors il existe un entier positif $c = c(k)$, ne dépendant que de k , tel que G soit dans $\mathcal{FN}_c$.*
- (ii) *Si G est dans la classe $F\Omega_2$, alors G est dans $\mathcal{FA}$.*
- (iii) *Si G est dans la classe $F\Omega_3$, alors G est dans $\mathcal{FN}_2$.*
- (iv) *Si G est dans la classe $F\Omega_4$, alors G est dans $\mathcal{FN}_3^{(2)}$.*

Preuve. Soit $k > 0$ un entier et soit G un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini.

(i) Supposons que G soit dans la classe $F\Omega_k$, donc d'après le Théorème 3.2.1, G est dans la classe $\mathcal{FN}$. Soit N un sous-groupe normal fini de G tel que G/N soit nilpotent de type fini dans la classe $F\Omega_k$. Comme $\Omega_k \cap \mathcal{N} = \mathcal{N}_{k-1}$, alors G/N est dans la classe $F\mathcal{N}_{k-1}$. Il s'ensuit, par [12, Théorème 3.2 (a)], qu'il existe un entier $c = c(k)$, ne dépendant que de k , tel que G/N soit dans $\mathcal{FN}_c$, d'où G est dans la classe $\mathcal{FN}_c$.

(ii) Si G est dans la classe $F\Omega_2$, alors par le Théorème 3.2.1, G est dans la classe $\mathcal{FN}$. Nous procédons comme dans (i) jusqu'à ce que nous obtenons G/N est dans la classe $F\mathcal{N}_1 = F\mathcal{A}$, donc G/N est dans $\mathcal{FA}$ et par suite G est dans la classe $\mathcal{FA}$.

(iii) Si G est dans la classe $F\Omega_3$, alors par le Théorème 3.2.1, G est dans la classe $\mathcal{FN}$. Soit T le sous-groupe de torsion de G , donc T est fini et G/T est un groupe nilpotent de type fini et sans torsion ; ainsi que dans la classe $F\Omega_3 = F\mathcal{N}_2$, car $\Omega_3 \cap \mathcal{N} = \mathcal{N}_2$. Il s'ensuit, par le Lemme 2.2.2, que G/T est dans la classe $\mathcal{N}_2$; d'où G est dans la classe $\mathcal{FN}_2$.

(iv) Si G est dans la classe $F\Omega_4$, alors par le Théorème 3.2.1, G est dans la classe $\mathcal{FN}$. Nous procédons comme dans (iii) jusqu'à ce que nous obtenons G/T est dans la classe $F\mathcal{N}_3$. Il s'ensuit, par le Lemme 2.2.3, que G/T est dans la classe $\mathcal{N}_3^{(2)}$; d'où G est dans la classe $\mathcal{FN}_3^{(2)}$. ■

L. C. Kappe et W. P. Kappe, dans [24], ont construit un groupe G de type fini, sans torsion, 3-Engel et nilpotent de classe égale exactement à 4. Par suite, en utilisant une conséquence d'un résultat de Gupta et Newman [19, Théorème 3.5], G est dans la classe $\mathcal{FN}_3$; d'où $G \in \mathcal{F}\Omega_4$, car $\Omega_4 \cap \mathcal{N} = \mathcal{N}_3$. Puisque G est sans torsion, $G \notin \mathcal{FN}_3$, car G est nilpotent de classe égale exactement à 4. Ceci signifie qu'un groupe G hyper-(Abélien-par-fini) de type fini et appartenant à la classe $\mathcal{F}\Omega_k$, n'est pas forcément être dans la classe $\mathcal{FN}_{k-1}$ pour un entier positif $k \geq 4$.

3.3 Groupes des classes $\mathcal{F}(\mathcal{ME})$ et $\mathcal{F}(\mathcal{ME}_k)$

En utilisant le Théorème 3.2.1, nous allons prouver les résultats suivants concernant les classes $\mathcal{F}(\mathcal{ME})$, $\mathcal{F}(\mathcal{ME}_k)$ et $\mathcal{F}(\mathcal{MA}) = \mathcal{F}(\mathcal{ME}_1)$. Nous commençons par montrer une version plus faible du Théorème 3.2.1 associée à la classe $\mathcal{F}(\mathcal{ME})$. Le résultat principal de cette section indique qu'un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini dans la classe $\mathcal{F}(\mathcal{ME})$ est fini-par-nilpotent.

Lemme 3.3.1 *Un groupe hyper-(Abélien-par-fini), de type fini et dans la classe $\mathcal{F}(\mathcal{MN})$ est fini-par-nilpotent.*

Preuve. Soit G un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini dans la classe $\mathcal{F}(\mathcal{MN})$, et soit $x \in G$. Il existe donc un sous-groupe normal $H(x)$ d'indice fini dans G tel que $\langle x, h \rangle \in \mathcal{MN}$ pour tout $h \in H(x)$. Soit $h \in H(x)$, donc il existe un sous-groupe normal N de $\langle x, h \rangle$ tel que N soit dans $\mathcal{M}$ et $\langle x, h \rangle / N$ soit nilpotent, ainsi $\gamma_{i+1}(\langle x, h \rangle) \leq N$ pour un certain entier positif i . Par suite $\gamma_{i+1}(\langle x, h \rangle) \geq \gamma_{i+2}(\langle x, h \rangle) \geq \dots$ est une série descendante infinie de sous-groupes normaux de N , or N est dans la classe $\mathcal{M}$, donc il y a un entier positif $n \geq i + 1$ tel que $\gamma_n(\langle x, h \rangle) = \gamma_{n+1}(\langle x, h \rangle)$, d'où $\langle x, h \rangle$ est dans Ω . Cela signifie que G est dans la classe $\mathcal{F}\Omega$. Il s'ensuit, par le Théorème 3.2.1, que G est fini-par-nilpotent ; et c'est ce que nous voulons. ■

Lemme 3.3.2 *Un groupe hyper-(Abélien-par-fini), de type fini et dans la classe $\mathcal{F}(\mathcal{ME})$ est nilpotent-par-fini.*

Preuve. Soit G un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini dans la classe $\mathcal{F}(\mathcal{ME})$. Comme les groupes nilpotents-par-finis de type fini sont de présentation

finie, et comme la classe $F(\mathcal{ME})$ est stable par passage aux quotients, alors d'après [35, Lemme 6.17] on peut supposer que tout quotient propre de G soit dans la classe $\mathcal{NF}$, mais que G lui-même ne soit pas nilpotent-par-fini. Notre groupe G est hyper-(Abélien-par-fini), il existe donc un sous-groupe normal non trivial A de G tel que A soit fini ou Abélien, ainsi $G/A \in \mathcal{NF}$. Il est clair, dans ce cas, que A est Abélien et donc G est dans la classe $\mathcal{A}(\mathcal{NF})$, or $\mathcal{A}(\mathcal{NF}) \subset (\mathcal{AN})\mathcal{F}$, ainsi G est dans $(\mathcal{AN})\mathcal{F}$. Par suite G est une extension finie d'un groupe résoluble. Soit K un sous-groupe normal résoluble de G d'indice fini. Comme K est dans la classe $F(\mathcal{ME})$, alors il est dans $F(\mathcal{MN})$, car tout groupe résoluble d'Engel et de type fini est nilpotent [35, Théorème 7.34]. De plus, K est de type fini, car il est d'indice fini dans G . Il s'ensuit, par le Lemme 3.3.1, que K est fini-par-nilpotent, et donc par un résultat de P. Hall [23, Théorème 2], il est nilpotent-par-fini. D'où G est nilpotent-par-fini, une contradiction. La démonstration est maintenant terminée. ■

Comme les groupes nilpotents-par-finis de type fini vérifient la condition maximale sur les sous-groupes, le Lemme 3.3.2 admet la conséquence suivante :

Corollaire 3.3.1 *Un groupe hyper-(Abélien-par-fini), de type fini et dans la classe $F(\mathcal{ME})$ vérifie la condition maximale sur les sous-groupes.*

Maintenant, nous sommes prêts pour démontrer notre résultat principal :

Théorème 3.3.1 *Soit G un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini. Alors G est dans la classe $F(\mathcal{ME})$ si, et seulement si, G est dans la classe $\mathcal{FN}$.*

Preuve. Il est clair que tout groupe fini-par-nilpotent est dans la classe $F(\mathcal{ME})$. Réciproquement, soit G un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini dans la classe $F(\mathcal{ME})$, donc, grâce au Corollaire 3.3.1, G vérifie la condition maximale sur les sous-groupes. Comme les groupes d'Engel vérifiant la condition maximale sur les sous-groupes sont nilpotent [36, 12.3.7], on déduit que G est dans la classe $F(\mathcal{MN})$, ainsi en vertu du Lemme 3.3.1, G est dans $\mathcal{FN}$. ■

Notons que le Théorème 3.3.1 n'est pas vrai pour tous les groupes. En effet, soit le groupe localement diédral $G = A \rtimes \langle x \rangle$ où $A \simeq C_{2^\infty}$, $x^2 = 1$ et $a^x = a^{-1}$ pour tout $a \in A$. Il est clair que $G' = A$ et G est localement nilpotent, donc $G \in \mathcal{FN}$ et par conséquent $G \in F(\mathcal{ME})$. Si $G \in \mathcal{FN}$, alors $G \in \mathcal{FA}$ par [35, Lemme

3.13] ce qui donne la contradiction que G' est fini. Par suite $G \notin \mathcal{FN}$ et on ne peut pas donc supprimer la condition "de type fini" du Théorème 3.3.1.

Aussi, soit G l'exemple de Golod [16] d'un groupe infini engendré par 3 éléments dont tous les sous-groupes 2-engendrés sont p -groupes finis, pour un certain nombre premier p . Donc $G \in \mathcal{F}$ et par conséquent $G \in \mathcal{F}(\mathcal{ME})$, mais G , étant infini, n'est pas dans la classe $\mathcal{FN}$. Par suite le Théorème 3.3.1 n'est pas vrai pour tous les groupes (résiduellement finis) de type fini.

Notons que le Théorème 3.3.1 améliore le Théorème 2.3.1 du chapitre précédent, car $\mathcal{FN} \subset \mathcal{ME}$.

A l'aide du Théorème 3.3.1, on va caractériser la classe $\mathcal{F}(\mathcal{ME}_k)$ où k est un entier positif. Pour ce faire, nous avons besoin de deux résultats. Le premier, qui est dû à Zelmanov [44], affirme qu'un groupe nilpotent, k -Engel et sans torsion, est nilpotent de classe égale au plus à un entier $c_1 = c_1(k)$ ne dépendant que de k . En revanche le deuxième résultat, trouvé dans [12], affirme qu'un groupe résoluble-par-fini de type fini dans la classe $\mathcal{FN}_k$ est dans la classe $\mathcal{FN}_{c_2}$, où $c_2 = c_2(k)$ est un entier ne dépendant que de k . Pour le cas spécial $k = 1$, nous caractériserons la classe $\mathcal{F}(\mathcal{ME}_1) = \mathcal{F}(\mathcal{AF})$ en utilisant seulement le Théorème 3.3.1 et le fait que tout groupe de type fini dans la classe $\mathcal{FA}$ est dans $\mathcal{FA}$. Maintenant, pour les deux cas particuliers $k = 2$ et $k = 3$, on va donner une caractérisation des classes $\mathcal{F}(\mathcal{ME}_2)$ et $\mathcal{F}(\mathcal{ME}_3)$ en combinant le Théorème 3.3.1 et les deux résultats Lemme 2.2.2 et Lemme 2.2.3; où nous aurons besoin d'utiliser des conséquences des résultats de Levi [35, Théorème 7.13] et Gupta-Newman [19, Théorème 3.5].

Corollaire 3.3.2 *Soit $k > 0$ un entier et soit G un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini. On a :*

- (i) *Si G est dans la classe $\mathcal{F}(\mathcal{ME}_k)$, alors il existe un entier positif $c = c(k)$, ne dépendant que de k , tel que G soit dans $\mathcal{FN}_c$.*
- (ii) *Si G est dans la classe $\mathcal{F}(\mathcal{MA})$, alors G est dans $\mathcal{FA}$.*
- (iii) *Si G est dans la classe $\mathcal{F}(\mathcal{ME}_2)$, alors G est dans $\mathcal{FN}_2$.*
- (iv) *Si G est dans la classe $\mathcal{F}(\mathcal{ME}_3)$, alors G est dans $\mathcal{FN}_3^{(2)}$.*

Preuve. Soit $k > 0$ un entier et soit G un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini.

(i) Supposons que G soit dans la classe $F(\mathcal{ME}_k)$, donc d'après le Théorème 3.3.1, G est dans la classe $\mathcal{FN}$. Soit T le sous-groupe de torsion de G , donc T est fini et G/T est un groupe nilpotent sans torsion et dans la classe $F(\mathcal{ME}_k) = F\mathcal{E}_k$ [35, Théorème 5.25]. En vertu du résultat de Zelmanov [44], il existe un entier $c_1 = c_1(k)$, ne dépendant que de k , tel que G/T soit dans FN_{c_1} . Maintenant, par [12, Théorème 3.2 (a)], il existe un entier $c = c(c_1) = c(c_1(k)) = (c \circ c_1)(k) = c_2(k)$, ne dépendant que de k , tel que G/T soit dans $\mathcal{FN}_c$, ainsi G est dans la classe $\mathcal{FN}_c$.

(ii) Si G est dans la classe $F(\mathcal{MA}) = F(\mathcal{ME}_1)$, alors par le Théorème 3.3.1, G est dans la classe $\mathcal{FN}$. Nous procédons comme dans (i) jusqu'à ce que nous obtenons G/T est dans la classe $F\mathcal{E}_1 = F\mathcal{A}$, donc G/T est dans $\mathcal{FA}$ et par suite G est dans la classe $\mathcal{FA}$.

(iii) Si G est dans la classe $F(\mathcal{ME}_2)$, alors par le Théorème 3.3.1, G est dans la classe $\mathcal{FN}$. Nous procédons comme dans (i) jusqu'à ce que nous obtenons G/T est dans la classe $F\mathcal{E}_2$. Or tout groupe 2-Engel et engendré par 2 éléments appartient à $\mathcal{N}_2$ [35, Théorème 7.14], donc G/T est dans la classe FN_2 . Il s'ensuit, par le Lemme 2.2.2, que $G/T \in \mathcal{N}_2$; d'où G est dans la classe $\mathcal{FN}_2$.

(iv) Si G est dans la classe $F(\mathcal{ME}_3)$, alors par le Théorème 3.3.1, G est dans la classe $\mathcal{FN}$. Nous procédons comme dans (i) jusqu'à ce que nous obtenons G/T est dans la classe $F\mathcal{E}_3$. Comme G/T est sans torsion, alors par un résultat de Gupta et Newman [19, Théorème 3.5], G/T est dans la classe FN_3 . Il s'ensuit, par le Lemme 2.2.3, que $G/T \in \mathcal{N}_3^{(2)}$; d'où G est dans la classe $\mathcal{FN}_3^{(2)}$. ■

Notons que chaque conséquence trouvée dans le Corollaire 3.3.2 améliore ce qui est correspondant dans le Corollaire 2.3.1 du chapitre précédent, car $\mathcal{FN}_k \subset \mathcal{ME}_k$ pour tout entier positif k .

L. C. Kappe et W. P. Kappe, dans [24], ont construit un groupe G de type fini, sans torsion, 3-Engel et nilpotent de classe égale exactement à 4. Il est clair que G appartient à la classe $F(\mathcal{ME}_3)$. Puisque G est sans torsion, $G \notin \mathcal{FN}_3$, car G est nilpotent de classe égale exactement à 4. Ceci signifie qu'un groupe G hyper-(Abélien-par-fini) de type fini et appartenant à la classe $F(\mathcal{ME}_k)$, n'est pas forcément être dans la classe $\mathcal{FN}_k$ pour un entier positif $k \geq 3$.

Bibliographie

- [1] A. Abdollahi, ‘Finitely generated soluble groups with an Engel condition on infinite subsets’, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **103** (2000), 47-49.
- [2] A. Abdollahi, ‘Some Engel conditions on infinite subsets of certain groups’, *Bull. Austral. Math. Soc.* **62** (2000), 141-148.
- [3] A. Abdollahi et B. Taeri, ‘A condition on finitely generated soluble groups’, *Comm. Algebra* **27** (1999), 5633-5638.
- [4] A. Abdollahi et N. Trabelsi, ‘Quelques extensions d’un problème de Paul Erdős sur les groupes’, *Bull. Belg. Math. Soc.* **9** (2002), 1-11.
- [5] A. Boukaroura, ‘Characterisation of finitely generated finite-by-nilpotent groups’, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **111** (2004), 119-126.
- [6] C. J. B. Brookes, ‘Engel elements of soluble groups’, *Bull. London. Math. Soc.* **18** (1986), 7-10.
- [7] C. Delizia, ‘Finitely generated soluble groups with a condition on infinite subsets’, *Rend. Sci. Mat. Appl. Ser. A* **128** (1994), 201-208.
- [8] C. Delizia, ‘On certain residually finite groups’, *Comm. Algebra* **24** (1996), 3531-3535.
- [9] C. Delizia, ‘A nilpotency condition for finitely generated soluble groups’, *Rend. Math. Acc. Lincei. S. 9, V.* **9** (1998), 237-239.
- [10] C. Delizia et C. Nicotera, ‘On residually finite groups with an Engel condition on infinite subsets’, *Houston. J. Math.* **27** (2001), N°4, 757-761.
- [11] C. Delizia, A. H. Rhemtulla et H. Smith, ‘Locally graded groups with a nilpotence condition on infinite subsets’, *J. Austral. Math. Soc. (series A)* **69** (2000), 415-420.
- [12] M. De Falco, F. de Giovanni, C. Musella et N. Trabelsi, ‘A nilpotency-like condition for infinite groups’, *J. Austral. Math. Soc.* **105(1)** (2018), 24-33.

- [13] G. Endimioni, 'Groups covered by finitely many nilpotent subgroups', *Bull. Austral. Math. Soc.* **50** (1994), 459-464.
- [14] F. Gherbi et T. Rouabhi, 'Hyper-(Abelian-by-finite) groups with many subgroups of finite depth', *Annales mathématiques Blaise Pascal* **14** (2007), 17-28.
- [15] F. Gherbi et N. Trabelsi, 'Groups having many 2-generated subgroups in a given class', *Bull. Korean Math. Soc.* **56** (2019), No. 2, 365-371.
- [16] E. S. Golod, 'Some problems of Burnside type', *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2* **84** (1969), 83-88.
- [17] S. Franciosi, F. de Giovanni et Y. P. Sysak, 'Groups with many polycyclic-by-nilpotent subgroups', *Ricerche Mat.* **48** (1999), 361-378.
- [18] J. R. J. Groves, 'A conjecture of Lennox and Wiegold concerning supersoluble groups', *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **35** (1983), 218-220.
- [19] N. D. Gupta et M. F. Newman, 'Third Engel groups', *Bull. Austral. Math. Soc.* **40** (1989), 215-230.
- [20] H. Heineken, 'Engelsche elemente der längs drei', *Illinois J. Math.* **5** (1961), 681-707.
- [21] H. Heineken et I. J. Mohamed, 'A group with trivial centre satisfying the normalizer condition', *J. Algebra* **10** (1968), 368-376.
- [22] L. Hammoudi, 'Burnside and Kuroch Problems', *Internat J. Algebra Comput.* **14** (2004), 197-211.
- [23] P. Hall, 'Finite-by-nilpotent groups', *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **52** (1956), 611-616.
- [24] L. C. Kappe et W. P. Kappe, 'On three-Engel groups', *Bull. Austral. Math. Soc.* **7** (1972), 391-405.
- [25] J. C. Lennox, 'Bigenetic properties of finitely generated hyper-(abelian-by-finite) groups', *J. Austral. Math. Soc.* **16** (1973), 309-315.
- [26] J. C. Lennox, 'Finitely generated soluble groups in which all subgroups have finite lower central depth', *Bull. London. Math. Soc.* **7** (1975), 273-278.
- [27] J. C. Lennox, 'Lower central depth in finitely generated soluble-by-finite groups', *Glasgow. Math. J.* **19** (1978), 153-154.
- [28] J. C. Lennox et J. E. Roseblade, 'Centrality in finitely generated soluble groups', *J. Algebra* **16** (1970), 399-435.

- [29] J. C. Lennox et J. Wiegold, 'Extensions of a problem of Paul Erdős on groups', *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **31** (1981), 459-463.
- [30] P. Longobardi, 'On locally graded groups with an Engel condition on infinite subsets', *Arch. Math.* **76** (2001), 88-90.
- [31] P. Longobardi et M. Maj, 'Finitely generated soluble groups with an Engel condition on infinite subsets', *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **89** (1993), 97-102.
- [32] A. I. Maltsev, 'Homomorphisms onto finite groups', *Ivanov Gos. Ped. Inst. Uchen. Zap. Fiz-Mat. Nauki* **8** (1958), 49-60.
- [33] B. H. Neumann, 'A problem of Paul Erdős on groups', *J. Austral. Math. Soc. ser. A* **21** (1976), 467-472.
- [34] L. Noui, 'On Černikov-by-nilpotent groups', *J. Algebra Appl.* **5** (2006), no. 2, 119-123.
- [35] D. J. S. Robinson, '*Finiteness conditions and generalized soluble groups*', (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1972).
- [36] D. J. S. Robinson, '*A course in the theory of groups*', (Springer-verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1982).
- [37] T. Rouabhi et N. Trabelsi, 'A note on torsion-by-nilpotent groups', *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **117** (2007), 175-179.
- [38] D. Segal, 'A residual property of finitely generated abelian by nilpotent groups', *J. Algebra* **32** (1974), 389-399.
- [39] D. Segal, '*Polycyclic groups*', (Cambridge university press, Cambridge, London, New York, New Rochelle, Melbourne, Sydney 1984).
- [40] N. Trabelsi, 'Finitely generated soluble groups with a condition on infinite subsets', *Algebra Colloq.* **9** (2002), 427-432.
- [41] N. Trabelsi, 'Soluble groups with many 2-generated torsion-by-nilpotent subgroups', *Publ. Math. Debrecen* **67/1-2** (2005), 93-102.
- [42] N. Trabelsi, 'Conditions combinatoires pour qu'un groupe vérifie une identité donnée', *Thèse de doctorat d'état de l'université de Ferhat Abbas de Sétif*, (2002).
- [43] M. R. Vaughan-Lee et J. Wiegold, 'Countable locally nilpotent groups of finite exponent with no maximal subgroups', *Bull. Lond. Math.* **13** (1981), 45-46.

- [44] E. I. Zelmanov, ‘On some problems of group theory and Lie algebras’, *Math. USSR-Sb* **66** (1990), 159-168.