وزارة التـــــعليم العـــالي والبحـــث العـلمي

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

جامعة فرحات عباس- سطيف 1

UNIVERSITE FERHAT ABBAS- SETIF 1

MEMOIRE

Présenté à la Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Pour l'obtention du Diplôme de

MAGISTER

Option: Mathématiques Appliquées

Par

Mr. YAZID FARES

THEME

Sur les Vibrations Non Régulières des Plaques Simplement Supportées

Soutenu le : 06 / 01/ 2015

Devant le Jury

Président :	**Mr. DRABLA Salah**	**Prof Université Ferhat Abbas SETIF1**
Encadreur :	**Mr. MEROUANI Boubakeur**	**Prof Université Ferhat Abbas SETIF1**
Examinateurs:	**Mr. BENSERIDI Hamid**	**Prof Université Ferhat Abbas SETIF1**

Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à Mr. Le professeur Merouani Boubakeur à l'université de Sétif 1, mon Directeur de thèse pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé, pour son aide ; sa patience, ses conseils, ses encouragements, sa grande disponibilité et son ouverture d'esprit qui m'ont aidé à mener à bien ce travail.
Et Mr. Drabla Salah, Je lui suis également reconnaissant pour la confiance qu'il ma accordée. Il m'est impossible de lui exprimer toute ma gratitude en seulement quelques lignes.
J'adresse mes plus vifs remerciements aux Mr. Le Professeur Benseridi Hamid à l'université de Sétif 1 pour avoir accepté d'examiner ce travail et Mr. Le Professeur Drabla Salah à l'université de Sétif 1 qui me fait l'honneur d'être président de mon jury.
Je voudrais également remercier tous les membres du département de mathématique
et tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin pour achever ce travail.
Que tous les enseignants qui ont contribué à ma formation reçoivent ma gratitude et
en particulier ceux du département des mathématique et informatique à l'université de Sétif 1
Je tiens à remercier aussi tous mes amis et mes collègues et sur tout Saadallah Abdelkader .
Mes remerciement vont également à tous mes camarades et à tous ceux qui m'ont aidé ou soutenu au cours de ce travail.

Dédicaces

A titre posthume pour mon père

A ma chère mère

A mon épouse Sara, et fils Mohamed Amine

A mon frère Zouaoui

A mes sœurs, et belles sœurs

A mes beaux frères et leur sœurs

Je dédie mon mémoire de magistère de mathématiques avec toute gratitude, ma reconnaissance et mon amour, pour tout aux qui m'ont aidé, et que sans soutien et leur patience ce travail ne pourrait jamais voir le jour.

Yazid Fares

ملخص. العمل الأساسي في هذه المذكرة يتمثل في اقتراح مشاركة لدراسة المسألة المتعلقة بالاهتزاز غير الخطي لصفيحة، من أجل هذه المسألة وضعنا بعض نتائج الوجود، المذكرة تتألف من ثلاث فصول، الفصل الأول يتألف من التذكير و التمهيدات، تفحصنا في الفصل الثاني بعض المسائل الخطية، في الفصل الثالث تفحصنا مسألتين تتعلقان بالاهتزاز غير الخطي لصفيحة.

كلمات مفتاحية. صياغة التغيرية، صفيحة، اهتزاز غير خطي، وجود ، وحدانية، نظامية، تراص.

Résumé. Le but de cette thèse est de proposer une contribution à l'étude de quelques problèmes aux limites pour le bilaplacien. Pour cela on considère un modèle mathématique en vibration non linéaire d'une plaque , pour ces problèmes on établit quelque résultats d'existence. La thèse comporte trois chapitres. Le premier chapitre est comporte destiné à les rappels et préliminaires. On rappelle également les outils mathématiques qui on servi pour établir les résultats présentées ici. On considère au deuxième chapitre quelques problèmes pour le bilaplacien dans un ouvert borné à frontière suffisamment régulière. Dans le troisième chapitre on considère deux problèmes de vibration non linéaire d'une plaque.

Mots-clès. Formulation Variationnelle, Plaque, Vibration non Linéaire, Existence de Solution, Unicité, Régularité , Compacité.

Abstract. The purpose of this thesis is the study of some problems related to bilaplacien. For this aim, we consider a mathematical model in vibration in a non linear srface, for these problems, we use some existence results.This thesis is composed of three chapters. The first chapter deals with some reninders and preliminiries.We also mention the mahtematical outils used for the given results. We deal in the second chapter some problems for the bilaplacien in an open frontier that is regular enough. In the third chapter we talk about two problems of nonlinear vibration of plate .

Key-words. Variational Formulation, Plate, Nonlinear Vibration, Existence of Solution, Uniqueness, Regularity, Compactness.

Table des matières

Notations géométriques **4**

Introduction **6**

1 Rappels et préliminaires **8**

1.1 L'espace $\mathfrak{D}(\Omega)$ des fonctions tests 8

1.2 L'espace des distributions $\mathfrak{D}'(\Omega)$ 9

1.2.1 Dérivation des distributions 10

1.2.2 Support d'une distribution 11

1.3 Les espaces de Sobolev 12

1.3.1 Les espaces $W^{s,p}(\Omega)$, avec $s \in \mathbb{R}_+$ 13

1.3.2 Injections de Sobolev 13

1.3.3 Traces de l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ 14

1.4 Espace de Lebesgue à valeurs vectorielles 15

2 Existence et Unicité des Solutions de Quelques Problèmes Linéaires **22**

2.1 Formulation des problèmes (P_k), $k = 1$ *à* 3 23

2.1.1 Interprétation physique des problèmes (P_k), $k = 1$ à 3 24

2.1.2 Théorème de Lax-milgram 24

2.2 Problème p_1 27

2.2.1 Formulation du problème P_1 27

2.2.2 Interprétation physique du problème (P_1) 27
2.2.3 Existence et unicité de la solution du problème (P_1) 27

2.3 Problème P_2 30

2.3.1 Formulation du problème (P_2) 30
2.3.2 Interprétation physique du problème (P_2) 30
2.3.3 Existence et unicité de la solution du problème (P_2) 31
2.3.4 Formulation variationnelle du problème (P_2) 31
2.3.5 Interprétation de la solution du problème (P_2) 41

2.4 Problème P_3 43
2.4.1 Formulation du problème (P_3) 43
2.4.2 Interprétation physique du problème (P_3) 43
2.4.3 Existence et unicité de la solution du problème (P_3) 44
2.4.4 Formulation variationnelle du problème (P_3) 44

2.4.5 Interprétation de la solution du problème (P_3) 45

3 Quelques Problèmes de Vibrations non Linéaires d'une Plaque 49

3.1 Problème P_4 49
3.1.1 Position du problème (P_4) 49
3.1.2 Interprétation physique du problème (P_4) 50
3.1.3 Etude de l'opérateur bilinéaire L 51
3.1.4 Théorème d'existence 52
3.1.5 Formulation variationnelle du problème (P_4) 54

3.1.6 Définition des solutions approchées 55
3.1.7 Estimations a priori 56
3.1.8 Passage a la limite 58
3.2 Problème P_5 59

3.2.1 Position du problème (P_5) 59
3.2.2 Interprétation physique du problème (P_5) 60
3.2.3 Formulation variationnelle du problème (P_5) 61
3.2.4 Définition des solutions approchées 61
3.2.5 Estimations a priori 62
3.2.6 passage a la limite 65

Conclusion **68**

Bibliographie **69**

Notations géométriques

Ω	: ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.
x	$= (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega,$ point générique.
t	: le temps $t \in]0, T[$, T fini.
Γ	: frontière de Ω.
Q	$= \Omega \times]0, T[$.
Σ	$= \Gamma \times]0, T[$.
$\Bbbk$	: le corps $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).
f	: la densité des forces volumiques.
ν	: le coefficient de poisson des plaques.
η	: le vecteur unitaire normal sortant.
τ	: le vecteur unitaire tangente.
$\frac{\partial}{\partial \eta}$	: dérivée normal extérieure.
$\frac{\partial}{\partial \tau}$	: dérivée tangente.
∇u	$= \operatorname{grad} u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n})$.
Δu	$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.
L	: opérateur différentiel.
Δ^2	$= \Delta.\Delta$.
G_2	: l'operateur de Green.
α	$= (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$.
$\lvert\alpha\rvert$	$= \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_N$.
(x, y)	$= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.
$\lVert x \rVert_2$	$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.
$B(a, r)$	$= \{x \in \mathbb{R}^n, \lVert a - x \rVert_2 \leq r\}$.
$\overline{B}(a, r)$	$= \{x \in \mathbb{R}^n, \lVert a - x \rVert_2 < r\}$.
$d\gamma$	: la mesure de surface sur Γ.

Les espaces fonctionnels

$L^p(\Omega)$ $= \left\{ f : \Omega \to \mathbb{k}; \int_\Omega |f|^p \, dx < \infty \right\},\ 1 \leq p < \infty.$

$\|f\|_{L^p(\Omega)}$ $= \left(\int_\Omega |f|^p \, dx \right)^{1/p},\ 1 \leq p < \infty.$

$L^\infty(\Omega)$ $= \left\{ f : \Omega \to \mathbb{k}; \sup_{x \in \Omega} |f| < \infty \right\}.$

$\|f\|_{L^\infty(\Omega)}$ $= \sup_{x \in \Omega} |f|.$

(f, g) $= \int_\Omega f g dx,$ produit scalaire dans $L^2(\Omega)$.

$|f|$ $= \sqrt{(f, f)},$ norme dans $L^2(\Omega)$.

D^α $= \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n.$

∂_i^k $= \frac{\partial^k}{\partial x_i},\ k \in \mathbb{N}^*$ et $i = 1 \ldots n.$

$W^{m,p}(\Omega)$ $= \left\{ u \in L^p(\Omega); \mathrm{D}^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m \right\}.$

$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}$ $= \left(\sum_{\alpha=0}^{m} \|\mathrm{D}^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}.$

$H^m(\Omega)$ $= W^{m,2}(\Omega).$

$(u, v)_{H^m(\Omega) \times H^m(\Omega)}$ $= \left(\sum_{\alpha=1}^{m} (\mathrm{D}^\alpha u, \mathrm{D}^\alpha v) \right)^{1/2}.$

$W_0^{m,p}(\Omega)$ $= \left\{ u \in W^{m,p}(\Omega) ; \mathrm{D}^\alpha \, u|_\Gamma = 0, |\alpha| \leq m - 1 \right\}.$

$H_0^m(\Omega)$ $= \left\{ u \in H^m(\Omega); \mathrm{D}^\alpha \, u|_\Gamma = 0, |\alpha| \leq m - 1 \right\}.$

$\|u\|_{H_0^m(\Omega)}$ $= \left(\sum_{\alpha=m} \|\mathrm{D}^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$

$W^{-m,q}(\Omega)$: le dual topologique de $W^{m,p}(\Omega)$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1.$

V' : le dual topologique de V.

$L^p(0, T; V)$ $= \left\{ f : [0, T] \to V; \int_0^T \|f\|_V^p \, d\sigma < \infty \right\},\ 1 \leq p < \infty.$

$\|f\|_{L^p(0,T;V)}$ $= \left(\int_0^T \|f\|_V^p \, d\sigma \right)^{1/p},\ 1 \leq p < \infty.$

$\|f\|_{L^\infty(0,T;V)}$ $= \sup_{t \in [0,T]} \|f\|_V.$

$\mathcal{L}(W, V)$: l'espace des applications linéaires continus de W dans V.

Introduction

Le problème de vibration non linéaire d'une plaque mince, dans un domaine régulier, est un problème aux limites gouvernées par un système d'équation non linéaire avec des conditions aux limites. Ce problème modélise le phénomène des vibrations non linéaires de la plaque.

Dans ce travail, on s'intéresse à la justification de ce modèle, c'est à dire a l'existence de la solution par la méthode de compacité. Pour cela, on utilise l'opérateur de Green, i.e. l'inverse de bilaplacien pour les conditions aux limites en question, et on ramène le système à une équation d'un seul inconnu.

Pour cette équation, il ya différents types de conditions aux bords peuvent être considérées :

Les conditions de Dirichlet

$$u = \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

Et celle d'une plaque simplement supportée dont :

$$u = M(u) = 0,$$

Et celle d'une plaque libre dont :

$$N(u) = M(u) = 0.$$

Où

$$N(u)\,|_{\Gamma} = N(u) = -(\frac{\partial}{\partial \eta}\Delta u + (1-\upsilon)\frac{\partial^3 u}{\partial \eta \partial \tau^2}),$$

$$M(u)\,|_{\Gamma} = M\,(u) = \upsilon \Delta u + (1-\upsilon)\,\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Ce travail, ce décompose en trois chapitres :

Le premier chapitre, est consacré essentiellement aux rappels des résultats principaux sur les distributions et les espaces de Sobolev classiques pour mieux comprendre le contenu de ce travail. Puis, on rappelle quelques résultats théoriques généraux, a la fin de ce chapitre, on définie les espace de Lebesgue à valeurs vectorielles, que nous utiliserons, et on terminer par le théorème de Rellich qui est le principe de la méthode de compacité.

Au deuxième chapitre, nous avons traité quelques problèmes pour le bilaplacien dans un ouvert borné à frontière suffisamment régulière avec les conditions d'une plaque encastrée , simplement supportée et libre. Dans le but de définir l'opérateur de Green correspondant.

Dans le troisième chapitre, on se propose d'étudier deux problèmes de vibration non linéaire, avec les conditions d'une plaque encastrée et libre. Dans le but de définir l'opérateur de Green correspondant.

On démontre un théorème d'existence par la méthode de compacité.

Chapitre 1

Rappels et préliminaires

1.1 L'espace $\mathfrak{D}(\Omega)$ des fonctions tests

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.1 *Soit $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction continue.*

On appelle support de φ ($\mathrm{supp}(\varphi)$) l'adhérence en $\mathbb{R}^n$ de l'ensemble

$$\{x \in \Omega / \varphi(x) \neq 0\}.$$

Notation 1.1 *On note par $C_c^\infty(\Omega)$ ou encore $D(\Omega)$ l'ensemble des fonctions φ de Ω dans $\mathbb{R}$ vérifient :*

1. indéfiniment dérivables.

2. à support compact et inclus en Ω.

$$i.e.\ \mathfrak{D}(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega),\ \mathrm{supp}(u)\ \text{compact}\}.$$

Exemple 1.1 On définit la fonction $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par :

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x\|_2^2 - 1}} & \text{si } \|x\|_2 \leq 1, \\ 0 & \text{si } \|x\|_2 > 1. \end{cases} \tag{1.1}$$

Elle évide que $\rho(x)$ est un élément de $\mathfrak{D}(\Omega)$ tell que $\text{supp}(\rho) = \overline{B}(0,1)$.

Remarque1.1 *Par des translations et des homothéties sur la variable, on déduit l'existence des fonctions tests dont le support est une boule $\overline{B}(a,r)$ où $a \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}_+$. On peut alors construire une infinité de fonctions test dont les supports sont deux à deux disjoints, d'où il résulte que $D(\Omega)$ est un espace vectoriel de dimension infinie, dont l'ensemble $D(\Omega)$ ne se réduit pas à zéro.*

Proposition 1.1 *Si $f \in D(\Omega)$ et $g \in C^\infty$ alors $fg \in D(\Omega)$.*

Définition 1.2 *Soit $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite des éléments de $D(\Omega)$. On dit que φ_j converge vers φ dans $D(\Omega)$ si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. Il existe un compact K de Ω tel que $\text{supp}(\varphi_j) \in K$, $\forall j \in \mathbb{N}$.

2. Pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ la suite $(D^\alpha \varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur K vers $D^\alpha\varphi$, c'est à dire :

$$\sup \left| D^\alpha \varphi_j(x) - D^\alpha \varphi(x) \right| \to 0, \text{ lorsque } j \to \infty.$$

Remarque1.2 *Si $\varphi \in D(\Omega)$, comme $\text{supp}(D^\alpha\varphi) \subset \text{supp}(\varphi)$, on aura aussi $D^\alpha\varphi \in D(\Omega)$. Quel que soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Pour la même raison, si $\varphi_j \to 0$ dans $D(\Omega)$, alors $D^\alpha\varphi_j \to 0$ dans $D(\Omega)$ quel que soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$.*

1.2 L'espace des distributions $\mathfrak{D}'(\Omega)$

Définition 1.3 *On appelle distribution sur Ω toute application linéaire continue de $D(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$, c'est à dire, une application T est une distribution sur Ω si et seulement si $T : D(\Omega) \to \mathbb{R} : \varphi \to \langle T, \varphi\rangle$ satisfait :*

1. T est une application linéaire, i.e.

$$\langle T, \alpha\varphi + \beta\psi\rangle = \alpha\langle T, \varphi\rangle + \beta\langle T, \psi\rangle, \ \forall\varphi, \psi \in \mathfrak{D}(\Omega), \forall\alpha, \beta \in \Bbbk.$$

2. T est continue, i.e. Si $\varphi_j \to 0$ dans $D(\Omega)$, alors $\langle T, \varphi_j \rangle \to 0$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.4 *Soit $(T_n)_{n\in N}$ une suite d'éléments de $D'(\Omega)$. On dit que $T_n \to 0$ dans $D'(\Omega)$, si et seulement si $\langle T_n, \varphi \rangle \to 0, \forall \varphi \in D(\Omega)$.*

Notaion 1.2 *On note par $D'(\Omega)$ l'ensemble de toutes les distributions sur Ω on dit aussi que $D'(\Omega)$ est le dual topologique de $D(\Omega)$.*

Définition 1.5 *Soit p un réel, $p \geq 1$.*

$$L^p_{loc}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}, \text{ pour tout compact } K \subset \Omega \text{ on a } u \in L^p(K)\}.$$

Définition 1.6 *pour toute fonction $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ on définit la distribution T_u de la manière suivante :*

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx, \ \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega).$$

La distribution T_u s'appelle distribution régulière associée à u.

Définition 1.7 *Si $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tel que*

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = 0, \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega).$$

Alors $u = 0$ p.p.

Définition 1.8 *Soit $(T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite des éléments de $D'(\Omega)$ et $T \in D'(\Omega)$. On dit que $T_j \to T$ dans $D'(\Omega)$ si*

$$\langle T_j, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle \text{ pour } j \to \infty, \ \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega).$$

1.2.1 Dérivation des distributions

On peut définir la dérivée d'une distribution, de telle manière que si en particulier cette distribution est une fonction de classe C^1 alors la dérivée au sens des distributions soit tout simplement la dérivée au sens habituel.

Plus précisément, on a : $\frac{\partial}{\partial_{x_i}}(T_u) = T\frac{\partial u}{\partial_{x_i}}$ si $u \in C^1(\Omega)$. Alors pour tout $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ on aurait :

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial}{\partial_{x_i}}(T_u), \varphi \right\rangle &= \int_\Omega \frac{\partial u(x)}{\partial_{x_i}}\varphi(x)dx \\ &= \int_{\partial\Omega} u(x)\varphi(x)d\gamma - \int_\Omega u(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial_{x_i}}dx \\ &= \left\langle T_u, \frac{\partial}{\partial_{x_i}}\varphi \right\rangle.\end{aligned}$$

On va prendre cette dernière relation comme définition de dérivée pour toute distribution T. Il y a un calcul analogue pour la dérivation à un ordre $k \in \mathbb{N}^*$ arbitraire. On fait plusieurs intégrations par parties successivement on avoir la définition suivante :

Définition 1.9 *Soit $T \in D'(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$. On définit la dérivée à l'ordre α de T par la formule :*

$$\langle D^\alpha T_u, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T_u, D^\alpha\varphi\rangle, \ \forall\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega).$$

Remarque1.3 *La dérivée à l'ordre α de T définit bien une distribution sur Ω*

1.2.2 Support d'une distribution

Définition 1.10 *Soit $T \in D'(\mathbb{R}^n)$. On dit que T est nulle sur Ω, et on écrit : $T = 0$ sur Ω si*

$$\langle T_u, \varphi\rangle = 0, \ \forall\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$$

Définition 1.11 *Le support d'une distribution T, est le plus petit fermé tel que T nulle dans son complémentaire. On le note* $\mathrm{supp}(T)$.

1.3 Les espaces de Sobolev

Avant de parler sur les espaces de Sobolev on va définir les espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$.

Définition 1.12 *Soit p un nombre réel positive tel que $1 \leq p \leq \infty$.*

1. $1 \leq p < +\infty$.

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R}, \int_\Omega |u(x)|^p \, dx < +\infty \right\}.$$

Est un espace de Banach muni de la norme $\|u\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx\right)^{1/p}$.

2. $p = 2$

$$L^2(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \Bbbk, \int_\Omega |u(x)|^2 \, dx < +\infty \right\}.$$

Est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(u, v)_{L^2} = \int_\Omega u(x)v(x)dx$.

3. $p = +\infty$.

$$L^\infty(\Omega) = \{ u : \Omega \to \Bbbk, \|u(x)\|_\infty < +\infty \}.$$

Est un espace de Banach muni de la norme :

$$\|u\|_\infty = \inf \{ c \geq 0, |u(x)| \leq c, \ p.p. \ x \in \Omega \}.$$

Définition 1.13 *Soit $m \geq 1$ un entier et p un réel tel que $1 \leq p \leq \infty$.*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \ avec \ |\alpha| \leq m, \ D^\alpha u \in L^p(\Omega) \}.$$

Est un espace de Banach muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq \alpha \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{1/p}.$$

Si $p = 2$ on note $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$, est un espace de Hilbert muni du produit scalaire :

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{0 \leq \alpha \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v).$$

Définition 1.14 *On définit $W_0^{m,p}(\Omega)$ comme étant la fermeture de $D(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$ c'est-à-dire $W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{\mathfrak{D}(\Omega)}$.*

Définition 1.15 *Soit $1 \leq p < \infty$, alors on peut identifier $W_0^{m,p}(\Omega)$ a l'ensemble des fonctions $u \in W^{m,p}(\Omega)$ qui sont nulles presque partout sur le bord de Ω :*

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m,p}(\Omega), \left. \frac{\partial^k u}{\partial \eta^k} \right|_\Gamma = 0, \ \forall k = 0, \ldots, (m-1) \right\}.$$

1.3.1 Les espaces $W^{s,p}(\Omega)$, avec $s \in \mathbb{R}_+$

Soit Ω un ouvert à frontière régulière.

Définition 1.16 *On note $W^{s,p}(\Omega)$ l'espace de toutes les distributions u définies dans Ω telles que : $u \in W^{m,p}(\Omega)$ et*

$$\iint_{\Omega \times \Omega} |D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p \frac{dxdy}{|x-y|^{n+\sigma p}} < +\infty$$

Pour $|\alpha| = m$ lorsque $s = m + \sigma$ est non entier et positive, m entier, $0 < \sigma < 1$

1.3.2 Injections de Sobolev

Théorème 1.1 *Soit $0 \leq s \leq n/2$:*

1. *Si $s = n/2$ alors*

$$H^s(\Omega) \underset{continue}{\hookrightarrow} L^q(\Omega), \ \text{pour tout } q \in [2, \infty[.$$

2. Si $0 \leq s < n/2$ *alors*

$$H^s(\Omega) \underset{continue}{\hookrightarrow} L^q(\Omega), \text{ pour tout } q \in \left[2, \frac{2n}{n-2s}\right].$$

Théorème 1.2 *Soient* $s \in \mathbb{R}$ *et* $k \in \mathbb{N}$ *vérifiant* $s > n/2 + k$. *Alors :*

$$H^s(\Omega) \underset{continue}{\hookrightarrow} C^k(\Omega).$$

1.3.3 Traces de l'espace $W^{m,p}(\Omega)$

La description des traces de l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est un sujet de polémique. Il serait intéressant de définir $W^{m-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$ comme espace des restrictions à Γ des éléments de $W^{m,p}(\Omega)$ par analogie avec le cas des ouverts à frontière régulière. On s'attendrait alors à ce que l'application :

$$u \longmapsto \frac{\partial u}{\partial \nu}$$

Applique $W^{2,p}(\Omega)$ sur $W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$. On verra plus loin que cela n'est pas possible, Pour expliquer cette difficulté nous allons utiliser l'analogie avec les espaces de fonctions continûment dérivables. On notera $C^m\left(\overline{\Omega}\right)$ (resp $C^m\left(\overline{\Gamma}\right)$) l'espace des restrictions à $\overline{\Omega}$ (resp$^{\text{t}}$ $\overline{\Gamma}$) des fonctions m fois continûment dérivables dans $\mathbb{R}^2$ (resp.$\mathbb{R}$). Il est clair que l'application :

$$\gamma : u \longmapsto u\,|_{\Gamma}$$

applique $C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ sur $C^0(\Gamma)$. on n'obtient pas nécessairement un élément de $C^0(\Gamma)$. En d'autres termes la dérivée normale au bord d'une fonction u de $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ n'appartient pas à l'espace des restrictions au bord des éléments de $C^0\left(\overline{\Gamma}\right)$.

Théorème 1.3 *L'application* $u \longmapsto \left(\gamma_j\right)_{j=0,\ldots,m-}$ *qui est définie pour* $u \in D\left(\overline{\Omega}\right)$ *par :*

$$\gamma_j = \frac{\partial^j u}{\partial \eta^j}\,|_{\Gamma}, \; j = 0, \ldots, m-1. \tag{1.2}$$

admet un prolongement par densité qui est un opérateur linéaire continu surjectif de $W^{m,p}(\Omega)$ *sur le sous-espace de* $W^{m-j-\frac{1}{p},p}(\Omega)$.

Théorème 1.4 *(formule de Green) Soit* Ω *un ouvert borné de classe* C^1. *Alors pour toutes fonctions* $u \in C^2(\Omega)$ *et* $v \in C^1(\Omega)$ *on a :*

$$\int_\Omega \Delta u(x)v(x)dx = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta}(x)v(x)d\gamma - \int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx. \tag{1.3}$$

Corollaire 1.1 *Soit* Ω *un ouvert borné de classe* C^1. *Alors pour toutes fonctions* $u, v \in C^2(\Omega)$ *on a :*

$$\int_\Omega \Delta u(x)v(x) - \Delta v(x)u(x)dx = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta}(x)v(x) - \frac{\partial v}{\partial \eta}(x)u(x)d\gamma \tag{1.4}$$

1.4 Espace de Lebesgue à valeurs vectorielles

Définition 1.17 *Soit* V *un espace de Banach,* p *un élément de* $[1,\infty]$, T *un élément de* $\mathbb{R}_*^+$, $(0;T)$ *un intervalle de* $\mathbb{R}$. *On appelle espace de Lebesgue à valeurs dans* V, *et on note :* $L^p(0,T;V)$, *l'espace des fonctions*

$$f :]0;T[\to V,\ t \to f(t),$$

Mesurables .i.e.

1. *Si* $1 \leq p < \infty$ $\left(\int_0^T \|f(t)\|_V^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L^p(0,T;V)} < \infty$.
2. *Si* $p = \infty$, $\sup\limits_{t\in[0,T]} \|f\|_V = .\,\|f\|_{L^\infty(0,T;V)} < \infty$.

1. *Pour tout* p *élément de* $[1;\infty]$, $\|f\|^p$ *est une norme sur* $L^p(0;T;V)$.
2. $L^p(0,T;V)$ *de Banach pour cette norme.*
3. *Si l'espace* V *est de plus réflexif, pour* $1 \leq p < \infty$, *si* q *vérifie* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *alors dual de* $L^p(0,T;V)$ *s'identifie algébriquement et topologiquement à* $L^q(0;T;V')$.

4. *Si V et W désignent deux espaces de Banach, V inclus dans W, avec injection continue, alors il existe une injection continue de $L^p(0,T;V)$ dans $L^p(0,T;W)$.*

5. *Si Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$, pour $1 \leq p < \infty$, on a l'équivalence algébrique et topologique entre les espaces $L^p(0,T;L^p(\Omega))$ et $L^p((0,T)\times\Omega)$.*

Définition 1.18 *Soit $]0,T[$ un intervalle de $\mathbb{R}$, V un espace vectoriel normé, on appelle espace des distributions sur $]0,T[$ à valeurs dans V, et on note $D'(0,T;V)$ l'espace des applications linéaires continues de $D(0,T)$ dans V.*

Propriété 1.1 *Pour tout f de $D'(0,T;V)$, tout φ de $D(0,T)$, la valeur de f en φ, notée $\langle f,\varphi\rangle$ appartient à V.*

1. Dérivation : Soit f un élément de $D'(0,T;V)$, on définit la dérivée de f :

$$f : D(0,T) \to V,\ \left\langle \frac{d^n f}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle f, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle.$$

En effet : soit $\varphi \in D(0,T)$ .i.e. $\varphi \in C^\infty(0,T)$ et $\varphi(0) = \varphi(T) = 0$,

$$\left\langle \frac{df}{dt}, \varphi \right\rangle = \int_0^T \frac{df}{dt}\varphi dt = f\varphi|_0^T - \int_0^T f\frac{d\varphi}{dt}dt = -\left\langle f, \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle.$$

2. Distribution régulière. Si f appartient à $L^1_{loc}(0,T;V)$ on peut lui associer une distribution dite distribution régulière associée à f encore notée f définie par :

$$f : D(0T) \to V, \varphi \longmapsto \langle f,\varphi\rangle = \int_0^T f(t)\,\varphi(t)\,dt,$$

3. limite : On dit qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet f pour limite dans $D'(0,T;V)$ si on a :

$$\forall \varphi \in \mathfrak{D}(0T), \langle f,\varphi\rangle = \langle f,\varphi\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f_n,\varphi\rangle.$$

Propriété 1.2 *Soit p un réel, $1 \leq p \leq \infty$, pour tout $f \in L^p(0,T;V)$ et $f' \in L^p(0,T;V)$, f admet un représentant continu sur $[0,T]$.*

Fonction de Green associée à l' opérateur biharmonique Δ^2 avec condition de Dirichlet, dans un ouvert Ω borné régulier, $\Omega \in \mathbb{R}^n$.

considérons le cadre variationel :

$$\begin{cases} V = H_0^2(\Omega),\ H = L^2(\Omega) \\ a(u,v) = \int\limits_{\Omega} \Delta u \Delta v dv; \forall v \in V \end{cases}$$

a est une forme bilinéaire V-coercive, et définit un isomorphisme : $\Delta^2 = \Delta.\Delta$ de $H_0^2(\Omega)$ dans $H^{-2}(\Omega)$.

Soit G l'isomorphisme réciproque, et $G_{x,y}$ son noyau, qui est donc défini par :

$$\langle Gu, v\rangle = \langle G_{x,y}, u(x)v(y)\rangle\ , \forall u, v \in D(\Omega).$$

On peut montrer que

- $G_{x,y}$ est symétrique et trés régulier,
- G se prolonge en un isomorphisme de $H^{-2}(\Omega)+\xi'(\Omega)$ sur $H_0^2(\Omega)+\xi'(\Omega)$ et enfin que pour tout $v \in \Omega$, $G_{x,y}$ noté aussi $G(x,y)$ est l'unique solution dans $H_0^2(\Omega) + \xi'(\Omega)$ de l'équation :

$$\Delta_x^2 G(x,y) = \delta_v, \text{ dans } \Omega;$$

$G(x,y)$ apparait ainsi comme la fonction de Green du problème $P(\Omega, f, g, h)$:

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f \text{ dans } \Omega \\ u\backslash_{\Gamma} = g \text{ sur } \Gamma \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\backslash_{\Gamma} = h \text{ sur } \Gamma. \end{cases}$$

avec f, g, h données telles que $f \in H^{-2}(\Omega), g \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma), h \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Utilisons la formule de Green :

$$\begin{aligned}\int_\Omega (u\Delta^2 v - v\Delta^2 u)dx &= \int_\Omega [(u\Delta^2 v - \Delta u\Delta v) + (\Delta u\Delta v - v\Delta^2 u)]dx \\ &= \int_\Gamma (u\frac{\partial \Delta v}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n}\Delta v + \Delta u\frac{\partial v}{\partial n} - \frac{\partial \Delta u}{\partial n}v)d\Gamma\end{aligned}$$

(formellement) avec $v = G(.,y)$; la solution u du problème de Dirichlet $P(\Omega, f, g, h)$ s'écrit alors :

$$u(x) = +\int_\Omega G(x,y)f(y)dy + \int_\Gamma g(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\Delta_y G(x,y)d\Gamma(y) - \int_\Gamma h(y)\Delta_y G(x,y)d\Gamma(y).$$

Dans le cas où Ω est le disque unité du plan $\mathbb{R}^2$, on peut donner une exprission explicite :

$$\begin{aligned}G(x_1,x_2,y_1,y_2) &= -\frac{|\zeta-\eta|^2}{8\pi}\log\left|\frac{\bar\eta-\zeta}{\eta-\bar\zeta}\right| - \frac{1}{16\pi}(|\eta|^2-1)(|\zeta|^2-1) \\ x &= (x_1,x_2)\in\Omega,\ y=(y_1,y_2)\in\Omega,\end{aligned}$$

où l'on a posé $\zeta = x_1 + ix_2$, $\eta = y_1 + iy_2$, $\bar\zeta = x_1 - ix_2$, $\bar\eta = y_1 - iy_2$.

Lemme 1.1 *(Gronwall) Soit T un réel positif, C une constante positive, f et g deux fonctions vérifiant :*

$$\begin{aligned}f &\in L^\infty(0,T),\ f\geq 0,\ p.p.\ t, \\ g &\in L^1(0,T),\ g\geq 0,\ p.p.\ t.\end{aligned}$$

Et

$$f(t) \leq \int_0^t g(\sigma)f(\sigma)d\sigma + C,\ p.p.\ t. \tag{1.5}$$

Alors f vérifie :

$$f(t) \leq C\exp\left(\int_0^t g(\sigma)d\sigma\right).$$

Preuve Comme $f \in L^\infty(0,T)$ et $g \in L^1(0,T)$ donc

$$F(t) = \int_0^t g(\sigma) f(\sigma) d\sigma + C,$$

est absolument continue, d'ou $F^{'}(t) = f(t)g(t)$, *p.p.* t.

D'après (1.5) on a :

$$F^{'}(t) \leq g(t)F(t) \ p.p.t,$$

$$\int_0^t \frac{F^{'}(\sigma)}{F(\sigma)} d\sigma \leq \int_0^t g(\sigma) d\sigma \ p.p.t,$$

$$f(t) \leq F(t) \leq C \exp\left(\int_0^t g(\sigma) d\sigma \right).$$

Lemme 1.2 *L'espace $H^2(\Omega)$ est séparable i.e. admet une base dénombrable dense.*

Théorème 1.5 *(Rellich) Soit Ω un borné de $\mathbb{R}^n$, alors pour tout $m \in \mathbb{N}$, l'injection de $H_0^{m+1}(\Omega)$ dans $H_0^m(\Omega)$ est compact.*

Preuve Soit B un ensemble borné dans $H_0^{m+1}(\Omega)$, nous devons montrer que de toute suite B, on peut extraire une sous-suite convergente dans $H_0^m(\Omega)$. Soit $(u_k)_k \subset B$, alors $\|u_k\|_{H_0^{m+1}(\Omega)} \leq C$ où C est indépendant de k. Comme une boule dans un espace de Hilbert est faiblement compacte, on peut, de la suite (u_k) extraire une sou-suite, notée (w_j), faiblement convergente dans $H_0^{m+1}(\Omega)$ vers w. Posons $v_j = w_j - w$, Désignons par $\tilde{v}_j$ le prolongement de v_j par zéro hors de Ω. Alors, $v_j \to \tilde{v}_j$ étant continue, on a

$$\tilde{v}_j \in H_0^{m+1}(\mathbb{R}^n) \text{ et } \ \|v_j\|_{H_0^m(\Omega)} = \|\tilde{v}_j\|_{H_0^m(\mathbb{R}^n)}.$$

Il suffit donc de montrer que $\tilde{v}_j \to 0$ dans $H_0^m(\Omega)$.

En notant $\mathcal{F}$ la transformation de Fourier, il vient

$$\begin{aligned}\|v_j\|_{H_0^m(\Omega)} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^m |\mathcal{F}\tilde{v}_j(\xi)|^2\, d\xi. \\ &= \int_{|\xi|\leq R} \left(1+|\xi|^2\right)^m |\mathcal{F}\tilde{v}_j(\xi)|^2\, d\xi + \int_{|\xi|>R} \left(1+|\xi|^2\right)^m |\mathcal{F}\tilde{v}_j(\xi)|^2\, d\xi\end{aligned}$$

On pose

$$J_{1,j} = \int_{|\xi|\leq R} \left(1+|\xi|^2\right)^m |\mathcal{F}\tilde{v}_j(\xi)|^2\, d\xi.$$

$$J_{2,j} = \int_{|\xi|>R} \left(1+|\xi|^2\right)^m |\mathcal{F}\tilde{v}_j(\xi)|^2\, d\xi.$$

Estimons le terme $J_{2,j}$

$$\begin{aligned}J_{2,j} &= \int_{|\xi|>R} \left(1+|\xi|^2\right)^m |\mathcal{F}\tilde{v}_j(\xi)|^2\, d\xi \\ &\leq \frac{1}{(1+R^2)} \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^{m+1} |\mathcal{F}\tilde{v}_j(\xi)|^2\, d\xi\end{aligned}$$

$$J_{2,j} \leq \frac{1}{(1+R^2)} \|v_j\|^2_{H_0^{m+1}(\Omega)}.$$

Étant donné $\varepsilon > 0$ et puisque (v_j) est bornée dans $H^{m+1}(\Omega)$ on peut toujours choisir R assez grand pour que

$$J_{2,j} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.6}$$

Estimons le terme $J_{1,j}$.

L'ouvert Ω est borné, on a $L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ et donc pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\tilde{v}_j(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}\, \tilde{v}_j(x)\, dx = \int_{\Omega} \mathrm{e}^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}\, \tilde{v}_j(x)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, \mathrm{e}^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}\, \tilde{v}_j(x)\, dx\end{aligned}$$

Où φ est la fonction indicatrice de Ω, Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, la fonction

$$x \longmapsto \varphi(x)\, \mathrm{e}^{-2\pi i \langle x,\xi \rangle} \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

$$\mathcal{F}\tilde{v}_j\,(\xi) = \left(\varphi(x)\, \mathrm{e}^{-2\pi i \langle x,\xi \rangle}, \tilde{v}_j\,(x)\right)_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.7}$$

Lorsque j tend vers l'infini, $\tilde{v}_j$ converge faiblement vers zéro dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, donc

$$\lim_{J\to\infty} \mathcal{F}\tilde{v}_j\,(\xi) = 0,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{1.8}$$

D'autre part, d'après (1.7) on a :

$$|\mathcal{F}\tilde{v}_j\,(\xi)| \leq \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\, \|\tilde{v}_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\, \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

D'après(1.7) et(1.8), on peut appliquer le théorème de la convergence domaine de Lebesgue, de sorte que l'on peut choisir j assez grand pour que

$$J_{1,j} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.9}$$

D'après (1.6) et(1.9), la suite v_j converge vers zéro dans $H_0^m(\Omega)$.

Chapitre 2

Existence et Unicité des Solutions de Quelques Problèmes Linéaires

Dans ce chapitre on étudie l'existence et l'unicité des solutions faibles de quelques problèmes aux limites gouvernés par le bilaplacien dans un ouvert borné à frontière suffisamment régulière.

On mettra en évidence, dans chaque cas, un théorème d'existence et d'unicité de la solution faible.

Notations 2.1

Ω désigne un corps homogène, occupant un domaine borné de $\mathbb{R}^2$, à frontière suffisamment régulière Γ.

Par suite, tous les résultats sur ce type de domaine sont valables. Il suffit, dans toute la suite de faire l'étude dans le secteur Ω ouvert borné, de frontière suffisamment régulière Γ .

$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix}$ sont respectivement la normale unitaire sortante et la tangente unitaire dans le sens positif sur la frontière Γ.

$M(u)$ et $N(u)$ désignent les opérateurs différentiels frontières suivant :

$$M\ (u)\,|_\Gamma = M\ (u) = \nu\Delta u + (1-\nu)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

et

$$N(u)\,|_\Gamma = N(u) = -(\frac{\partial}{\partial \eta}\Delta u + (1-\nu)\frac{\partial^3 u}{\partial \eta \partial \tau^2}),$$

où $\nu \in]0,1[$est le coefficient de Poisson du matériau constituant la plaque.
Les dérivées normale et tangentielle sont données par :

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \eta_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \eta_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \text{ et } \frac{\partial}{\partial \tau} = -\eta_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + \eta_2 \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

2.1 Formulation des problèmes (P_k), $k = 1$ à 3

On considère ici une famille de 3 problèmes gouvernés par le bilaplacien, c'est- à-dire pour $f \in L^2(\Omega)$ on cherche u, si possible dans $H^4(\Omega)$, solution de :

$$(P_k)\begin{cases} \triangle^2 u = f \ \text{ dans } \Omega, \\ B_0^k u = 0 \ \text{ sur } \Gamma, \end{cases} (k = 1 \text{ à } 3),$$

où les opérateurs frontières sont :

$$\begin{cases} B_0^1 u = \begin{cases} u \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{cases} \text{ sur } \Gamma, \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} B_0^2 u = \begin{cases} u \\ M(u) \end{cases} \text{ sur } \Gamma, \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\begin{cases} B_0^3 u = \begin{cases} M(u) \\ N(u) \end{cases} \text{ sur } \Gamma \ , \end{cases} \tag{2.3}$$

2.1.1 Interprétation physique des problèmes (P_k), $k = 1$ à 3

Physiquement, $M(u)$ est le moment de flexion et $N(u)$ est la force transversale composée de la force de cisaillement et du moment de torsion.

Ces problèmes représentent différents modèles mathématiques d'une plaque, $u(x)$ étant le déplacement perpendiculaire à la plaque au point x (sous l'hypothèse de petits déplacements),

f est la densité de force et les conditions au bord (2.1) à (2.3) signifient que la plaque est :

- Encastrée aux bord Γ,pour le premier problème.

- Simplement supportée aux bord Γ,pour le deuxième problème.

- Libre aux bord Γ,pour le troisième problème.

La méthode variationnelle usuelle, étant valable dans les domaines bornés à frontière suffisamment régulière ainsi que dans le cas des fissures. On est assuré de l'existence et de l'unicité d'une solution variationnelle $u \in H^{\,2}(\Omega)$.

On s'intéresse à l'existence et à l'unicité de la solution variationnelle $u^{(k)} \in H^2(\Omega)$ de (P_k), $k = 1$ *à* 3, et $\nu \in]0, 1[$est le coefficient de Poisson du matériau constituant la plaque.

2.1.2 Théorème de Lax-milgram

Dans cette section, on considère un problème général pouvant se mettre sous la forme variationnelle

$$(pb) \text{ trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = F(v) \text{ pour tout } v \in V.$$

Le théorème de Lax-Milgram apporte une réponse a l'existence, l'unicité de la solution dans un cadre précis.

Théorème 2.1 *On suppose que V est un espace de Hilbert et que les formes a et F vérifient les hypothèses suivantes*

1. *continuité de F :*

$$|F(v)| \leq C_F \|v\|_V \text{ pour tout } v \in V,$$

2. *continuité de a :*

$$|a(u,v)| \leq C_a \|u\|_V \|v\|_V \text{ pour tout } u, v \in V,$$

3. *coercivité de a :*

$$a(u,u) \geq \alpha \|u\|_V^2 \text{ pour tout } u \in V, \text{ avec } \alpha \succ 0.$$

Alors il existe une solution unique u au problème (Pb) qui vérifie l'estimation a priori

$$\|u\|_V \leq \frac{\|F\|_{V'}}{\alpha},$$

avec $\|F\|_{V'} = \sup_{\|v\|_V=1} |F(v)|$ la norme de F dans le dual V' de V.

Preuve L'estimation a priori s'établit en prenant $v = u$ dans (Pb) puis en appliquant la continuité de L et la coercivité de a ce qui donne :

$$\alpha \|u\|_V^2 \leq C_L \|u\|_V .$$

Il suffit alors de prendre $C_L = \|u\|_{V'}$.Cette estimation nous donne aussi l'unicité de la solution. Pour l'existence, considérons d'abord le cas simple ou a est une forme symétrique. Dans ce cas la continuité et la coercivité de a montrent qu'il s'agit d'un produit scalaire sur $V * V$ et que la norme

$$\|v\|_a = \sqrt{a(v,v)}$$

est équivalente a la norme $\| \ \|_V$. puisque L est continue, elle est aussi par rapport a $\| \ \|_a$ et le théorème de représentation de Reisz nous assure donc l'existence d'un unique $u \in V$ tel que

$$L(v) = a(u, v) \text{ pour tout } v \in V$$

Dans le cas non-symétrique, on remarque que puisque

$$v \to a(u, v) \text{ et } v \to L(v)$$

Sont continues, on peut écrire

$$a(u, v) = \langle Au, v \rangle \text{ et } L(v) = \langle f, v \rangle$$

où A est opérateur continu sur $V, f \in V'$ et $\langle , \rangle$ un produit scalaire dans V.

Le problème (pb) s'écrit donc

$$Au = f \text{ dans } V.$$

L'hypothèse de coercivité nous permet d'affirmer que

$$\alpha \|v\|_V \leq \|Av\|_{V'},$$

Pour tout $v \in V$, ce qui entraine que $Im(A)$ est un sous-espace fermé de V qui se décompose donc suivant :

$$V = Im(A) \oplus (Im(A))^{\perp}.$$

Considérons à présent $w \in (Im(A))^{\perp}$. La coercivité nous montre que

$$\alpha \|w\|_X^2 \leq a(w, w) = \langle Aw, w \rangle = 0$$

Par conséquent $Im(A) = V$ ce qui prouve l'existence de la solution u.

Nous allons considérer trois problèmes types, soient les cas $\mathbf{k = 1}$à $\mathbf{3}$.

2.2 Problème p_1

2.2.1 Formulation du problème P_1

On considère ici un problème aux limites intermédiaire pour le bilaplacien, c'est-à-dire pour $f \in L^2(\Omega)$. On cherche u, si possible dans $H^4(\Omega)$, solution de :

$$(P_1) \begin{cases} \triangle^2 u = f \ \text{ dans } \Omega, & (1) \\ u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \end{cases} \text{ sur } \Gamma, \qquad (2) \quad .$$

2.2.2 Interprétation physique du problème (P_1)

Physiquement, ce problème représente un modèle mathématique d'une plaque : $u(x)$ étant le déplacement perpendiculaire à la plaque au point x (sous l'hypothèse de petits déplacements), f est la densité de force et les conditions au bord sur Γ signifient que la plaque est encastrée sur Γ.

2.2.3 Existence et unicité de la solution du problème $(\mathbf{P_1})$

Ω étant un domaine à frontière suffisamment réguliére, la méthode variationnelle usuelle est applicable ici pour s'assurer de l'existence et de l'unicité d'une solution variationnelle $u \in H_0^2(\Omega)$,
tel que

$$a(u, v) = F(v) \qquad \text{pour tout } v \in H_0^2(\Omega),$$

$$a(u,v)=\int_\Omega \triangle u\triangle v dx \quad \text{et} \quad F(v)=\int_\Omega fv dx,$$

soit u une solution régulière de (p_1) pour tout $v \in H_0^2(\Omega)$ on a

$$a(u,v)=\int_\Omega \triangle(\triangle u)(x)v(x)dx \quad =\int_\Omega f(x)v(x)dx, \tag{2.4}$$

par intégration par partie,

$$\int_\Omega \triangle(\triangle u)(x)v(x)dx \quad =-\int_\Omega \nabla(\Delta u).\nabla v(x)dx \ +\int_\Gamma \frac{\partial(\Delta u)}{\partial \eta}(x)v(x)ds,$$

comme $v=0$ sur Γ, on en déduit que

$$\int_\Omega \triangle(\triangle u)(x)v(x)dx \quad =-\int_\Omega \nabla(\Delta u).\nabla v(x)dx,$$

puis par une nouvelle intégration par partie que

$$\int_\Omega \triangle(\triangle u)(x)v(x)dx \quad =\int_\Omega \Delta u(x).\Delta v(x)dx \ -\int_\Gamma \Delta u(x)\frac{\partial v}{\partial \eta}(x)ds,$$

comme $\frac{\partial v}{\partial \eta}(x)=0$ sur Γ, le dernier terme de cette équation est nulle. Ainsi, on déduit de (2.4) que

$$\int_\Omega \triangle(\triangle u)(x)v(x)dx \quad =\int_\Omega f(x)v(x)dx,$$

don, pour tout $v \in H_0^2(\Omega)$, ainsi $\Delta(\Delta u)-f=0$.

Afin d'appliquer le Théorème de Lax-Milgram, la seule hypothèse non trivialement vérifiée est la coercivité de la forme biliniéaire $a(.,.)$.Or pour tout $u \in H_0^2(\Omega)$, on établit suite à deux intégrations par partie successives que

$$a(u,v) = \sum_{i,j} \int_\Omega \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right|^2 dx \ = \left\| \nabla^2 u \right\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

En appliquant deus fois l'inégalité de Poincaré, on obtient qu'il existe des constantes C et C' positives telles que pour tout élément $u \in H_0^2(\Omega)$

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \ \leq C \left\|\nabla u\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C' \left\|\nabla^2 u\right\|^2_{L^2(\Omega)} = C' a(u,v),$$

Par conséquent, il existe $C > 0$ tel que pour tout $u \in H_0^2(\Omega)$

$$\|u\|^2_{H^2(\Omega)} \leq C \ a(u,u).$$

La coercivité de la forme bilinéaire $a(.,.)$ est don établie et il existe une unique solution au problème variationnel.

Reste à établir que la solution du problème variationnel est solution du problème aux limites (p_1).

Soit ω un ouvert inclus dans un compact de Ω . Il existe $\theta \in C_c^\infty(\Omega)$ telle que $\theta = 1$ sur ω.Pour toute fonction $v \in C_c^\infty(\Omega)$ de support inclus dans ω

$$\int_\Omega \theta(x) \Delta u(x) \Delta v(x) dx = \int_\Omega \Delta u(x) \Delta v(x) dx = \int_\Omega f(x) v(x) dx.$$

D'aprés le résultat de régularité admit, $\theta \Delta u$ est un élément de $H^2(\Omega)$. Il est donc licite d'éffectuer deux intégrations par partie successives sur le membre de gauche de l'équation précédente. On en déduit que

$$\int_\Omega \Delta(\theta(x)\Delta u(x))v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx.$$

Cette équation étant vérifiée por toute fonction $v \in C_c^\infty(\Omega)$ de support inclus dans ω, on en déduit que pour presque tout $x \in \omega$

$$\Delta(\Delta u)(x) = f(x).$$

Cette relation reste valable pour presque tout $x \in \Omega$: il suffit de considérer une suite ω_n de compacts tels que $\cup_n \omega_n = \Omega$. Enfin, comme $u \in H_0^2(\Omega)$, la solution de problème variationnel vérifie automatiquement les conditions au bord $u = \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$.

2.3 Problème P_2

2.3.1 Formulation du problème (P_2)

On considère ici un problème aux limites intermédiaire pour le bilaplacien, c'est-à-dire pour $f \in L^2(\Omega)$. On cherche u, si possible dans $H^4(\Omega)$, solution de :

$$(P_2) \begin{cases} \triangle^2 u = f, \ \textbf{dans } \Omega & (1) \\ u = 0, \ \textbf{sur } \Gamma & (2) \\ M(u) = 0, \ \textbf{sur } \Gamma & (3) \end{cases} \tag{2.5}$$

2.3.2 Interprétation physique du problème (P_2)

Physiquement, $M(u)$ est le moment de flexion et $N(u)$ est la force transversale composée de la force de cisaillement et du moment de torsion.

Ce problème représente un modèle mathématique d'une plaque, $u(x)$ étant le déplacement perpendiculaire à la plaque au point x (sous l'hypothèse de petits déplacement), f est la densité de force et les conditions au bord (2) et (3) signifient que la plaque est simplement supportée.

2.3.3 Existence et unicité de la solution du problème (P_2)

Ω étant un domaine à frontière régulier, la méthode variationnelle usuelle est applicable ici pour s'assurer de l'existence et de l'unicité d'une solution variationnelle $u \in H^2(\Omega)$.

2.3.4 Formulation variationnelle du problème (P_2)

Supposons qu'une solution u de (P_2) existe et qu'elle appartient à $H^4(\Omega)$. Alors en multipliant l'équation (1) de (2.5) par une "fonction test" $v \in H^2(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} (\Delta^2 u) v dx = \int_{\Omega} f v dx \tag{2.6}$$

Lemme 2.1 *Soit $u \in H^4(\Omega)$ et $v \in H^2(\Omega)$, on a la formule de Green suivante :*

$$\int_{\Omega} \Delta^2 u v dx = a(u,v) - \int_{\Gamma} \left[\gamma_0 (Mu) \gamma_0 \frac{\partial v}{\partial \eta} + \gamma_0 (Nu) \gamma_0 v \right] d\gamma \tag{2.7}$$

Où $a(u,v)$ est une forme bilinéaire symétrique définie sur $H^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \int_{\Omega} \Delta u \Delta v dx - \int_{\Omega} (1-\nu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right) dx. \\ &= \int_{\Omega} \Delta u \Delta v dx - \int_{\Omega} (1-\nu) L(u,v) dx \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\Delta^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^4}{\partial x_i^2 \partial x_j^2}.$$

Où $L(u,v)$ *définie par*

$$L(u,v) = \partial_1^2 u.\partial_2^2 v + \partial_2^2 u.\partial_1^2 v - 2\partial_1\partial_2 u.\partial_1\partial_2 v, \tag{2.9}$$

Preuve On effet la décomposition suivante du bilaplacien :

$$\begin{aligned}\Delta^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right) + 2\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\left((1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\nu\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) \\ &\quad + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\nu\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Delta^2 uv &= \int_\Omega \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right) + 2\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\left((1-\nu)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right)\right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)\right] v dx\end{aligned}$$

On applique la formule de Green deux fois à chaque terme de l'intégrale séparément :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right) v dx &= \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right) v\eta_1 d\gamma - \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)\frac{\partial v}{\partial x_1} dx \\ &= \int_\Gamma \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right) v\eta_1 - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial v}{\partial x_1}\eta_1\right] d\gamma + \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} dx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right) v dx &= \int_\Gamma \tfrac{\partial}{\partial x_2}\left(\tfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right) v\eta_1 d\gamma - \int_\Omega \tfrac{\partial}{\partial x_2}\left(\tfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right)\tfrac{\partial v}{\partial x_1} dx \\ &= \int_\Gamma \left[\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right) v\eta_1 - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_1}\eta_2\right] d\gamma \\ &\quad + \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} dx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}\right) v dx &= \int_\Gamma \tfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\tfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}\right) v\eta_2 d\gamma - \int_\Omega \tfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\tfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}\right)\tfrac{\partial v}{\partial x_2} dx \\ &= \int_\Gamma \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right) v\eta_2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_2}\eta_1\right] d\gamma \\ &\quad + \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} dx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) v dx &= \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) v\eta_1 d\gamma - \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)\frac{\partial v}{\partial x_2} dx \\ &= \int_\Gamma \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) v\eta_1 - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial v}{\partial x_2}\eta_1\right] d\gamma + \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial v}{\partial x_2} dx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right) v dx &= \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right) v\eta_2 d\gamma - \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)\frac{\partial v}{\partial x_2} dx. \\ &= \int_\Gamma \left[\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right) v\eta_2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial v}{\partial x_2}\eta_2\right] d\gamma + \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} dx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) v dx &= \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) v\eta_2 d\gamma - \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)\frac{\partial v}{\partial x_2} dx \\ &= \int_\Gamma \left[\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) v\eta_2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)\frac{\partial v}{\partial x_2}\eta_2\right] d\gamma \\ &\quad + \int_\Omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)\frac{\partial v}{\partial x_2} dx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Delta^2 uv &= \int_\Omega \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}}_{\Delta u \Delta v} dx \\ &\quad - (1-\nu)\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} dx + I_1 - I_2.\end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_\Gamma \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)\eta_1 + (1-\nu)\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right)\eta_1 + \nu\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)\eta_1\right. \\ &\quad \left. + (1-\nu)\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}\right)\eta_2 + \nu\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)\eta_2 + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)\eta_2\right] v d\gamma. \\ I_2 &= \int_\Gamma \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial v}{\partial x_1}\eta_1 + (1-\nu)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_1}\eta_2 + (1-\nu)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_2}\eta_1\right. \\ &\quad \left. + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial v}{\partial x_1}\eta_1 + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial v}{\partial x_2}\eta_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial v}{\partial x_2}\eta_2\right] d\gamma.\end{aligned}$$

Calculons l'intégrale I_1 :On calculons d'abord $\frac{\partial}{\partial \eta}\Delta u$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \eta}\Delta u &= \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right). \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)\eta_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)\eta_2 + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)\eta_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\right)\eta_2.\end{aligned}$$

$$I_1 = \int_\Gamma \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right) \eta_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \eta_1 + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} \right) \eta_2 + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) \eta_2 \right] v d\gamma$$

$$= \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial \eta} \Delta u v d\gamma.$$

Calculons l'intégrale I_2on exprimer les dérivées partielle en fonction des dérivées normale et tangente.

En effet :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\eta_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\eta_2. \\ \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\eta_2 - \frac{\partial u}{\partial x_2}\eta_1. \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial \eta}\eta_1 + \frac{\partial u}{\partial \tau}\eta_2. \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial u}{\partial \eta}\eta_2 - \frac{\partial u}{\partial \tau}\eta_1. \end{cases}$$

On applique ainsi ces formules pour obtenir :

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_\Gamma \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\eta_1 - \frac{\partial v}{\partial \tau}\eta_2 \right) \eta_1 + (1-\upsilon) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\ \eta_2 + \frac{\partial v}{\partial \tau}\eta_1 \right) \eta_1 \right. \\
&\quad + (1-\upsilon) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\eta_1 - \frac{\partial v}{\partial \tau}\eta_2 \right) \eta_2 + \upsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\eta_1 - \frac{\partial v}{\partial \tau}\eta_2 \right) \eta_1 \\
&\quad \left. + \upsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\eta_2 + \frac{\partial v}{\partial \tau}\eta_1 \right) \eta_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\eta_2 + \frac{\partial v}{\partial \tau}\eta_1 \right) \eta_2 \right] d\gamma. \\
&= \int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \eta} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\eta_1^2 + 2(1-\upsilon) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\eta_1\eta_2 + \upsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\eta_1^2 + \upsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\eta_2^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\eta_2^2 \right] d\gamma \\
&\quad + \int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \tau} \left[-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\eta_1\eta_2 + (1-\upsilon) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\eta_1^2 - \eta_2^2 \right) - \upsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\eta_1\eta_2 \right. \\
&\quad \left. + \upsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\eta_1\eta_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\eta_1\eta_2 \right] d\gamma. \\
&= \int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \eta} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \left(\eta_1^2 + \upsilon\eta_2^2 \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \left(\upsilon\eta_1^2 + \eta_2^2 \right) + 2(1-\upsilon) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\eta_1\eta_2 \right] d\gamma \\
&\quad + (1-\upsilon) \int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \tau} \left[-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\eta_1\eta_2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\eta_1^2 - \eta_2^2 \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\eta_1\eta_2 \right] d\gamma. \\
&= \int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \eta} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \left(\eta_1^2 + \upsilon(1-\eta_1^2) \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \left(\upsilon(1-\eta_2^2) + \eta_2^2 \right) + 2(1-\upsilon) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\eta_1\eta_2 \right] d\gamma \\
&\quad - (1-\upsilon) \int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial s} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\eta_1\eta_2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\eta_1^2 - \eta_2^2 \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\eta_1\eta_2 \right] d\gamma. \\
&= \int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \eta} \left[(1-\upsilon) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\eta_1^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\eta_1\eta_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\eta_2^2 \right) + \upsilon \Delta u \right] d\gamma \\
&\quad - (1-\upsilon) \int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial s} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\eta_1\eta_2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\eta_1^2 - \eta_2^2 \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\eta_1\eta_2 \right] d\gamma.
\end{aligned}
$$

La seconde intégrale de I_2 peut être calculée par parties. Etant donné qu'elle est prise sur un contour fermé, les limites d'intégration sont confondues en un point, on obtient

tout simplement :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \eta}\left[\upsilon\Delta u + (1-\upsilon)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\eta_1^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\eta_1\eta_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\eta_2^2\right)\right] d\gamma \\ &\quad + (1-\upsilon)\int_\Gamma \upsilon\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\eta_1\eta_2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\left(\eta_1^2 - \eta_2^2\right) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\eta_1\eta_2\right] d\gamma. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$\int_\Omega \Delta^2 uv dx = a(u,v) - \left(\int_\Gamma \left[\gamma(Mu)\gamma\frac{\partial v}{\partial \eta} + \gamma(Nu)\gamma v\right] d\gamma\right).$$

On choisissant :

$$V = \left\{v \in H^2(\Omega), v = 0, \text{ sur } \Gamma\right\}, \tag{2.10}$$

On a V est bien un sous-espace fermé de $H^2(\Omega)$ contenant

$$H_0^2(\Omega) = \left\{v \in H^2(\Omega) : v = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0, \text{ sur } \Gamma\right\}.$$

$$H_0^2(\Omega) \underset{continue}{\hookrightarrow} V,$$

i.e.

$$\|u\|_V \leq C\|u\|_{H_0^2(\Omega)}$$

.

Pour $u \in H^4(\Omega)$ solution du problème (P_2) et $v \in V$ on obtient :

$$\int_\Omega \Delta^2 uv dx = a(u,v) \tag{2.11}$$

Où $a(u,v)$ est définie en (2.8).

Une formulation variationnelle du problème (P_2).

$$a(u,v) = \int_{\Omega} fv dx \tag{2.12}$$

On pose :

$$F(v) = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx \tag{2.13}$$

Alors, on a le problème variationnel :

$$(P_v) \begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(u,v) = F(v), \ \forall v \in V \end{cases} \tag{2.14}$$

Grâce au Lemme de Lax-Milgram, le problème (P_v) a une solution unique $u \in H^2(\Omega)$.

En effet, la linéarité des formes a et F sont facile à vérifier. Pour la continuité de la forme linéaire a sur V :

$$
\begin{aligned}
a(u,v) &= \int_\Omega \Delta u \Delta v dx - (1-\nu)\int_\Omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right) dx. \\
&= \int_\Omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right) dx. \\
&\quad -(1-\nu)\int_\Omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right) dx. \\
&= \int_\Omega \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right. \\
&\quad \left. +2(1-\nu)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \right] dx. \\
|a(u,v)| &\leq \int_\Omega \left[\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right| \left|\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\right| + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right| \left|\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\right| + \left|\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\right| \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right| + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right| \left|\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\right| \right. \\
&\quad \left. +2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right| \left|\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}\right| \right] dx. \\
&\leq \int_\Omega \left[\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right| + \left|\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\right| + 2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right| \right] \left[\left|\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\right| + \left|\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\right| + 2\left|\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}\right| \right]. \\
&\leq \|u\|_V \|v\|_V .
\end{aligned}
$$

D'où la continuité de la forme a.

En établie la coercivité de a :

$$
\begin{aligned}
a(u,u) &= \int_\Omega \left[\left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right|^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right|^2 - 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right|^2 \right) \right] dx \\
&= \int_\Omega \left[\left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right|^2 + 2\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right|^2 + 2(1-\nu) \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right|^2 \right] dx \\
&= (1-\nu) \int_\Omega \left[2 \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right|^2 \right] dx \\
&\quad + \nu \int_\Omega \left[\left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right|^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right|^2 \right] dx \\
&= (1-\nu) \int_\Omega \left[2 \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right|^2 \right] dx + \nu \int_\Omega |\Delta u|^2 \, dx. \\
&\geq (1-\nu) \int_\Omega \left[\left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right|^2 + 2 \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right|^2 \right] dx \\
&\geq (1-\nu) |u|_V^2
\end{aligned}
$$

Où $|u|_V = \left(\sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}$ désigne la semi-norme de V qui est équivalente à la norme de $H^2(\Omega)$.

Donc la forme a est bien coercive.

En établie la continuité de F :

$$|F(v)| \leq \int_\Omega |f(x)| \, |v(x)| \, dx$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$|F(v)| \leq C \|v(x)\|_V .$$

2.3.5 Interprétation de la solution du problème (P_2)

En choisissant $v = \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ dans (2.13), on obtient immédiatement

$$\triangle^2 u = f, \text{ dans } \mathfrak{D}'(\Omega). \tag{2.15}$$

Par ailleurs, d'après la définition de V, on sait que

$$u = 0, \text{ sur } \Gamma. \tag{2.16}$$

Il reste à interpréter la condition aux limite $M(u) = 0$, sur Γ.

Nous allons montrer que (P_v) implique que

$$M(u) = 0, \text{ sur } \Gamma. \tag{2.17}$$

Soit

$$H\left(\Delta^2, \Omega\right) = \left\{v \in H^2(\Omega) : \Delta^2 v \in L^2(\Omega)\right\}$$

Muni de la norme

$$\|v\|_{H(\Delta^2,\Omega)} = \left(\|v\|^2_{H^2(\Omega)} + \left\|\Delta^2 v\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Démontrons que l'application trace

$$\begin{aligned} T &: D\left(\overline{\Omega}\right) \longrightarrow D(\Gamma) \\ u &\mapsto Tu = M(u). \end{aligned}$$

Se prolonge en une application linéaire continue, encore notée T, de $H(\Delta^2, \Omega)$ dans $\tilde{H}^{\frac{-1}{2}}(\Gamma)$.

En effet, soit $u \in \mathfrak{D}(\Omega)$, pour $w \in \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ on pose

$$\ell(w) = \int_\Gamma \gamma M(u) \gamma(\frac{\partial w}{\partial \eta}) d\gamma.$$

D'après le théorème de trace (cf : [2] lemme 2.1 et 2.2) il existe $v \in H^2(\Omega)$ tel que

$$\|v\|_{H^2(\Omega)} \leq C \left\| \frac{\partial w}{\partial \eta} \right\|_{\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C' \|w\|_{\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

On peut alors écrire par utilisation de la formule de Green

$$\ell(w) = \int_\Omega (\Delta^2 u) v dx. \tag{2.18}$$

On a donc (en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz)

$$\begin{aligned} \ell(w) &\leq \|u\|_{H(\Delta^2,\Omega)} \|v\|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq C' \|u\|_{H(\Delta^2,\,\Omega)} \|w\|_{\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Ce qui preuve que $\ell \in \tilde{H}^{\frac{-1}{2}}(\Gamma)$, et de plus l'application

$$T : u \in D\left(\overline{\Omega}\right) \longrightarrow \ell \in \tilde{H}^{\frac{-1}{2}}(\Gamma),$$

est bornée sur $D\left(\bar{\Omega}\right)$ muni de la norme de $H(\Delta^2, \Omega)$, elle peut donc être prolongée par densité, vu que $D\left(\bar{\Omega}\right)$ est dense dans $H(\Delta^2, \Omega)$ ($cf.$[1]) en une application linéaire continue de $H(\Delta^2, \Omega)$ dans $\tilde{H}^{\frac{-1}{2}}(\Gamma)$.

Pour $u \in H(\Delta^2, \Omega)$ et $v \in H^2(\Omega)$ on a la formule de Green généralisée

$$\langle \gamma(Tu), \gamma v \rangle_{\tilde{H}^{\frac{-1}{2}}(\Gamma) \times \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \int_\Omega (\Delta^2 u) v dx, \tag{2.19}$$

Démontrons à présent que (2.17) a bien lieu si u est la solution du problème (P_v). D'après (2.15), on voit que $u \in H(\Delta^2, \Omega)$. La formule de Green généralisée (2.19) entraîne

$$\int_\Omega (\Delta^2 u) v dx + \langle \gamma(Tu), \gamma v \rangle_{\tilde{H}^{\frac{-1}{2}}(\Gamma) \times \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \int_\Omega f(x) v(x) dx. \tag{2.20}$$

Pour tout $v \in H^2(\Omega)$. D'après (2.15) on a donc

$$\langle \gamma(Tu), \gamma v \rangle_{\tilde{H}^{\frac{-1}{2}}(\Gamma) \times \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = 0, \ \forall v \in H^2(\Omega).$$

D'où

$$Tu = Mu = 0 \text{ dans } \tilde{H}^{\frac{-1}{2}}(\Gamma).$$

L'interprétation du problème variationnel (P_v) en terme de problème aux limites est donc la suivante :

$$\begin{cases} \triangle^2 u = f, \text{ dans } \Omega \\ u = 0, \text{ dans } H^{\frac{-3}{2}}(\Gamma) \\ M(u) = 0, \text{ dans } H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma) \end{cases} \tag{2.21}$$

2.4 Problème P_3

2.4.1 Formulation du problème (P_3)

On considère ici un problème aux limites intermédiaire pour le bilaplacien, c'est-à-dire pour $f \in L^2(\Omega)$, on cherche u, si possible dans $H^4(\Omega)$, solution de :

$$(P_3) \begin{cases} \triangle^2 u = f \ \text{ dans } \Omega, \\ N(u) = 0 \text{ sur } \Gamma, \\ M(u) = 0 \text{ sur } \Gamma. \end{cases}$$

2.4.2 Interprétation physique du problème (P_3)

Physiquement, $M(u)$ est le moment de flexion et $N(u)$ est la force transversale composée de la force de cisaillement et du moment de torsion. Ce problème représente un modèle mathématique d'une plaque : $u(x)$ étant le déplacement perpendiculaire à la plaque au point x (sous l'hypothèse de petits déplacement), f est la densité de force volumique et les conditions au bord sur Γ signifient que la plaque est libre au bord Γ

2.4.3 Existence et unicité de la solution du problème (P_3)

Ω étant un domaine ouvert borné à frontière suffisamment régulière, la méthode variationnelle usuelle est applicable ici pour s'assurer de l'existence et de l'unicité d'une solution variationnelle $u \in H^{\,2}(\Omega)$.

Supposons qu'une solution u de (P_3) existe et qu'elle appartient à $H^4(\Omega)$. Alors en multipliant l'équation (1) par une "fonction test" $v \in H^2(\Omega)$, on obtient par la formule de Green :

$$\begin{aligned}\int_\Omega (\Delta^2 u)v dx &= \int_\Omega \nu \Delta u \Delta v dx - \int_\Omega \left[(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\right)\right] dx \\ &\quad - \int_\Gamma \left[(Mu)\frac{\partial v}{\partial \eta} + (Nu)v\right] d\sigma\end{aligned}$$

2.4.4 Formulation variationnelle du problème (P_3)

Une formulation variationnelle du problème (P_3) est obtenue en choisissant :

$$V = H^2(\Omega),$$

$$a(u,v) = \int_\Omega \Delta u \Delta v dx - \int_\Omega \left[(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\right)\right] dx, \tag{2.22}$$

et

$$F(v) = \int_\Omega f(x)v(x)dx + \int_\Gamma \left[(Nu)v + (Mu)\frac{\partial v}{\partial \eta}\right] d\sigma. \tag{2.23}$$

On a aussi montré que si $u \in H^4(\Omega)$ est solution de (P_3) , alors il est solution du problème variationnel :

$$(P_v)\ \begin{cases} \text{Trouver } u \in V \ \text{ tel que} \\ a(u,v) = F(v),\ \forall v \in V. \end{cases} \tag{2.24}$$

Grâce au théorème de **Lax-LMilgram**, le problème (P_v) a une solution unique $u \in H^2(\Omega)$. En effet, la linéarité des formes a et F et la continuité de a sont faciles à vérifier. Pour la continuité de la forme linéaire F sur$V$, on utilise le fait que l' application trace

$$\gamma : H^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma), u \longrightarrow \gamma(v) = v_{|\Gamma}\,,$$

sont linéaires continues.

La coercivité de la forme a est une conséquence du lemme (2.2)

Lemme 2.2

$$a(u,u) \geq \alpha \left\|u\right\|^2_{H^2(\Omega)},\ \forall u \in H^2(\Omega). \tag{2.25}$$

Preuve En tilisant l'inégalité $2Re(ab) \geq -(|a|^2 + |b|^2)$, vérifiée par deux nombres complexes arbitraires a, b, on voit que

$$a(u,u) \geq (1-\nu)\left|u\right|^2_{H^2(\Omega)}, \forall u \in H^2(\Omega), \tag{2.26}$$

où $|u|_{H^2(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=2} \left\|D^\alpha u\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}$ désigne la semi-norme de $H^2(\Omega)$. Par un argument standard de contradiction, on en déduit que (2.26) implique (2.25).

2.4.5 Interprétation de la solution du problème (P_3)

En choisissant $v = \varphi \in D(\Omega)$ dans (2.15) on obtient immédiatement

$$\triangle^2 u = f \ \text{ dans } D'(\Omega)\ . \tag{2.27}$$

Il reste à interpréter la condition aux limite $Nu = Mu = 0$ sur Γ.

Nous allons montrer que (2.15)implique que

$$Nu = Mu = 0 \text{ sur } \Gamma. \tag{2.28}$$

Soit $H(\Delta^2, \Omega) = \{v \in H^2(\Omega) : \Delta^2 v \in L^2(\Omega)\}$ muni de la norme
$\|v\|_{H(\Delta^2,\Omega)} = \left(\|v\|^2_{H^2} + \|\Delta^2 v\|^2_{L^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ .Démontrons que l'application trace

$$T : D\left(\bar{\Omega}\right) \longrightarrow D(\Gamma) \times D(\Gamma)$$
$$u \mapsto Tu = (Nu_{|\Gamma}, Mu_{|\Gamma}),$$

se prolonge en une application continue, encore notée T, de $H(\Delta^2, \Omega)$ dans $H^{\frac{-3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma)$.

En effet, soit $u \in D(\Omega)$; pour $w \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, on pose

$$l(w) = \int_\Gamma \left[(Nu)w + (Mu)\frac{\partial w}{\partial \eta}\right] d\sigma.$$

D'après le théorème de trace (cf : [5]), il existe $v \in H^2(\Omega)$ tel que

$$\|v\|_{H^2(\Omega)} \leq c \|\gamma w\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)\times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)},$$

où

$$\gamma w = (w_{|\Gamma}, \frac{\partial w}{\partial \eta}_{|\Gamma}).$$

On peut alors écrire par utilisation de la formule de Green

$$l(w) = \int_\Omega (\Delta^2 u) v dx. \tag{2.29}$$

On a donc (en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz)

$$\begin{aligned} l(w) &\leq \|u\|_{H(\Delta^2,\Omega)} \|v\|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq c \|u\|_{H(\Delta^2,\Omega)} \|\gamma w\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)\times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}, \end{aligned}$$

ce qui prouve que $l \in H^{\frac{-3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma)$, et de plus l'application

$$T : u \in D\left(\bar{\Omega}\right) \longrightarrow l \in H^{\frac{-3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma)$$

est bornée sur $D\left(\bar{\Omega}\right)$ muni de la norme de $H(\Delta^2, \Omega)$; elle peut donc être prolongée par densité en une application linéaire continue de $H(\Delta^2, \Omega)$ dans $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Corollaire 2.1 *Pour $u \in H(\Delta^2, \Omega)$ et $v \in H^2(\Omega)$, on a la formule de Green généralisée*

$$\langle Tu, v\rangle = \int_\Omega (\Delta^2 u) v dx, \tag{2.30}$$

où $< , >$ désigne le crochet de dualité entre $H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma)$ et $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Démontrons à présent que 2.25 a bien lieu si u est la solution du problème (2.24). D'apès (2.25), on voit que $u \in H(\Delta^2, \Omega)$. La formule de Green généralisée (2.30) entraîne

$$\int_\Omega (\Delta^2 u) v dx + \langle Tu, v\rangle = \int_\Omega f(x) v(x) dx, \tag{2.31}$$

pour tout $v \in H^2(\Omega)$. D'après (2.25), on a donc

$$\langle Tu, v\rangle = 0, \ \forall v \in H^2(\Omega),$$

d'où

$$\begin{pmatrix} Nu \\ Mu \end{pmatrix} = 0, \text{ dans } H^{\frac{-3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma).$$

L'interprétation du problème varitionnel (2.24) en termes de problème aux limites est donc la suivante :

$$\begin{cases} \triangle^2 u = f \ \text{ dans } \Omega, \\ N(u) = 0 \text{ dans } H^{\frac{-3}{2}}(\Gamma), \\ M(u) = 0 \text{ dans } H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma). \end{cases} \tag{2.32}$$

Chapitre 3

Quelques Problèmes de Vibrations non Linéaires d'une Plaque

3.1 Problème P_4

3.1.1 Position du problème (P_4)

On considère un ouvert Ω borné de $\mathbb{R}^2$ (Ω est la plaque vibrante),
On cherche une fonction $u = (u_1, u_2) = (u_1(x,t), u_2(x,t))$, $x \in \Omega$, $t \in]0,T[$ dans $\mathbb{R}^2$, qui vérifie :

$$(P_4)\begin{cases} u_1'' + a_1\Delta^2 u_1 - L(u_1,u_2) = f, \text{ dans } \Omega \times]0,T[, & (3.1)\\ a_2\Delta^2 u_2 + L(u_1,u_1) = 0, \text{ dans } \Omega \times]0,T[, & (3.2)\\ u_1 = \frac{\partial u_1}{\partial \eta} = 0, u_2 = \frac{\partial u_2}{\partial \eta} = 0, \text{ sur } \Sigma, & (3.3)\\ u_1(x,0) = u_{01}(x), u_1'(x,0) = u_{11}(x), x \in \Omega, & (3.4) \end{cases}$$

Où les fonctions u_{01} et u_{11} sont données, les a_i sont des constantes strictement positifs, f est une fonction donnée de Q dans $\mathbb{R}$.

3.1.2 Interprétation physique du problème (P_4)

On considère une plaque mince élastique homogène occupons un domaine Ω borné de $\mathbb{R}^2$ à frontière suffisamment régulière. Les équations (3.1) et (3.2) est l'équation d'équilibre de la plaque, f désigne la densité des forces volumiques donnée, u_1 désigne le déplacement vertical d'un point matériaux x à l'instant t, et u_2 désigne le déplacement transversal d'un point matériaux x à l'instant t.

et les conditions au bord , signifient que la plaque est encastrée au bord Γ.

Définition 3.1 *(Système de Cauchy-Kowaleska) : Un système d'équations aux dérivées partielles est appelé système de Cauchy-Kowaleska s'il est de la forme :*

$$\begin{cases} \frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}} = F_i(t, x_1, ..., x_n, u_1, ..., u_N, ..., \frac{\partial^k u_j}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} ... \partial x_n^{k_n}}, ...) \\ i, j = 1, 2, ..., N;\ k_0 + k_1 + ... + k_n = k \leq n_i;\ k_0 < n_i \\ \frac{\partial^k u_i}{\partial t^k} = \Phi_{i,k}(x_1, ..., x_n), k = 0, 1, ..., n_i - 1; t = t^0. \end{cases} \tag{3.1}$$

où les fonctions F_i et $\Phi_{i,k}$ analytiques dans un voisinage du point $(t^0, x_1^0, x_2^0, ..., \Phi^0_{j,k_0,k_1,...,k_n})$ dans lequel

$$\left(\frac{\partial^{k-k_0} \Phi_{i,k_0}}{\partial x_1^{k_1} ... \partial x_n^{k_n}} \right)_{x_i = x_i^0} = \Phi^0_{i,k_0,k_1,...,k_n}; \tag{3.2}$$

$$i = 1, 2, ..., N;$$

$$k_0 + k_1 + ... + k_n = k \leq n_i.$$

Remarque 3.1 *Dans (P_4) Il n'y a pas de condition initiale sur u_2, cela tient au faite que le système d'équations aux dérivées partielles ne contient pas de dérivée en t de u_2. Donc, le système (P_4) il n'est pas du type de Cauchy-Kowaleska, on peut l'y ramener à condition que l'opérateur de GREEN, i. e. l'opérateur inverse de Δ^2 dans Ω pour les conditions aux limites correspondantes, existe. L'existence de ce dernier dépend des conditions aux limites et de la forme géométrique de la plaque Ω. Par exemple, lorsque Ω est à frontière polygonale, l'existence de l'opérateur de GREEN dépend de l'ouverture*

des angles de la plaque.

Dans ce travail, on ne considère que le problème (P_4) avec Ω borné et à frontière suffisamment régulière. Si G_2 désigne **l'opérateur de GREEN** pour les conditions aux limites de Dirichlet, alors (3.2) équivaut à

$$u_2 = -\frac{1}{a_2} G_2(L(u_1, u_1)) \tag{3.3}$$

Et alors (3.1) devient

$$u_1^{''} + a_1 \Delta^2 u_1 + \frac{1}{a_2} L(u_1, G_2(L(u_1, u_1))) = f \tag{3.4}$$

3.1.3 Etude de l'opérateur bilinéaire L

On définie l'opérateur bilinéaire L de $H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$ dans $H^{-2}(\Omega)$ par :
Soit $u, v \in H_0^2(\Omega)$,

$$L(u, v) = \partial_1^2 u . \partial_2^2 v + \partial_2^2 u . \partial_1^2 v - 2\partial_1 \partial_2 u . \partial_1 \partial_2 v.$$

Lemme 3.1 *l'application* $u, v \to L(u, v)$ *est bilinéaire continue de*

$$H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega) \to H^{-2}(\Omega).$$

Preuve Soit $w \in L^\infty(\Omega)$ on a

$$\begin{aligned} (L(u, v), w) &\leq \|w\|_\infty \int_\Omega \left|\partial_1^2 u\right| \left|\partial_2^2 v\right| + \left|\partial_2^2 u\right| \left|\partial_1^2 v\right| + 2 \left|\partial_1 \partial_2 u\right| \left|\partial_1 \partial_2 v\right| dx \\ &\leq C \|w\|_{H_0^2(\Omega)} \|u\|_{H_0^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Corollaire 3.1 *La forme* $u, v, w \to (L(u, v), w)$ *est trilinéaire continue sur* $H_0^2(\Omega)$.

Lemme 3.2 *La forme trilinéaire* $u, v, w \to (L(u, v), w)$ *est symétrique sur* $H_0^2(\Omega)$.

Preuve Puisque $L(u,v) = L(v,u)$, il suffit de montrer que

$$(L(v,u),w) = (L(w,u),v), \tag{3.5}$$

et d'après le **Corollaire 3.1**, il suffit de vérifier (3.5) pour $u, v, w \in \mathfrak{D}(\Omega)$.

On a

$$\begin{aligned}
L(v,u) &= \partial_1^2 u.\partial_2^2 v + \partial_2^2 u.\partial_1^2 v - 2\partial_1\partial_2 u.\partial_1\partial_2 v \\
&= \partial_1^2 u.\partial_2^2 v - 2\partial_1\partial_2 u.\partial_1\partial_2 v + \underbrace{\partial_1^2\partial_2^2 u.v + \partial_2^2\partial_1^2 u.v - 2\partial_1\partial_2\partial_1\partial_2 u.v}_{0} \\
&\quad \underbrace{+2\left(\partial_1\partial_2^2 u.\partial_1 v + \partial_2\partial_1^2 u.\partial_2 v\text{-}\partial_2\partial_1\partial_2 u.\partial_1 v - \partial_1^2\partial_2 u.\partial_2 v\right)}_{0} + \partial_2^2 u.\partial_1^2 v \\
&= \left(\partial_2^2\partial_1^2 u.v + 2\partial_2\partial_1^2 u.\partial_2 v + \partial_1^2 u.\partial_2^2 v\right) + \left(\partial_1^2\partial_2^2 u.v + 2\partial_1\partial_2^2 u.\partial_1 v + \partial_2^2 u.\partial_1^2 v\right) \\
&\quad -2\left(\partial_1\partial_2\partial_1\partial_2 u.v + \partial_2\partial_1\partial_2 u.\partial_1 v + \partial_1^2\partial_2 u.\partial_2 v + \partial_1\partial_2 u.\partial_1\partial_2 v\right) \\
&= \partial_1^2\left(\partial_2^2 u.v\right) - 2\partial_1\partial_2\left(\partial_1\partial_2 u.v\right) + \partial_2^2\left(\partial_1^2 u.v\right).
\end{aligned}$$

Alors, par intégrations par parties

$$\begin{aligned}
(L(v,u),w) &= \left(\partial_2^2 u.v, \partial_1^2 w\right) - 2\left(\partial_1\partial_2 u.v, \partial_1\partial_2 w\right) + \left(\partial_1^2 u.v, \partial_2^2 w\right) \\
&= \left(\partial_1^2 w.\partial_2^2 u - 2\partial_1\partial_2 w.\partial_1\partial_2 u + \partial_2^2 w.\partial_1^2 u, v\right) \\
&= (L(w,u),v).
\end{aligned}$$

3.1.4 Théorème d'existence

Théorème 3.1 *On suppose f, u_{01}, u_{11} donnés avec*

$$f \in L^2(Q), \tag{3.6}$$

$$u_{01} \in H_0^2(\Omega),\ u_{11} \in L^2(\Omega). \tag{3.7}$$

Il existe alors u_1 *et* u_2 *solutions de* (P_4) *avec*

$$u_1 \in L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)), \tag{3.8}$$

$$u_1^{'} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.9}$$

$$u_2 \in L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)). \tag{3.10}$$

Remarque 3.2 *Il résulte de* (3.8) *et* (3.10)*que*

$$L(u_1,u_2) \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega)), \tag{3.11}$$

Et (3.1) *entraine*

$$u_1^{''} = L\left(u_1,u_2\right) - a_1\Delta^2 u_1 + f,$$

$$\Delta^2 \in \mathcal{L}(H_0^2(\Omega);H^{-2}(\Omega)),$$

$$\Delta^2 u_1 \in L^\infty\left(0,T;H^{-2}(\Omega)\right),$$

$$u_1^{''} \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega)) - L^\infty\left(0,T;H^{-2}(\Omega)\right) + L^2(Q),$$

$$u_1^{''} \in L^\infty(0,T;H^{-2}(\Omega)), \tag{3.12}$$

$$u_1^{'} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \subset L^2(0,T;H^{-2}(\Omega)),$$

$$u_1 \in L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)) \subset L^2(0,T;H^{-2}(\Omega)),$$

et donc les conditions initiales dans (P_4) *ont un sens.*

Remarque 3.3 *La fonction* u_2 *du Théorème 3.1 vérifie*

$$u_2 \in L^\infty(0,T;H^{3-\varepsilon}(\Omega)) \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{3.13}$$

En effet, soit $\varepsilon > 0$ *fixé arbitrairement petit. Alors*

$$L^1(\Omega) \subset H^{-1-\varepsilon}(\Omega) \tag{3.14}$$

car si $f \in L^1(\Omega)$ *on a :*

$$|(f,\varphi)| \leq \|f\|_{L^1(\Omega)} \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c \|f\|_{L^1(\Omega)} \|\varphi\|_{H_0^{1+\varepsilon}(\Omega)}$$

vu que $H_0^{1+\varepsilon}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ *si* $n = 2$ *et* $\varepsilon > 0$. *Alors*

$$L(u_1,u_1) \in L^\infty(0,T;H^{-1-\varepsilon}(\Omega))$$

et comme $a_2 u_2 = -L(u_1,u_1)$, *on en déduit* (3.13) *(Notons que* $(\Delta^2)^{-1}$ *envoie* $H^s(\Omega)$ *dans* $H^{s+4}(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$, $s \geq 0$*).*

3.1.5 Formulation variationnelle du problème (P_4)

En multipliant l'équation (3.1) et (3.2) par une "fonction test" $v \in V$, on obtient par la formule de Green :

$$\left(u_1^{''}, v\right) + a_1 a\left(u_1, v\right) - \left(L\left(u_1, u_2\right), v\right) = \left(f, v\right), \tag{3.15}$$

$$a_2 a\left(u_2, v\right) + \left(L\left(u_1, u_1\right), v\right) dx = 0. \tag{3.16}$$

Où

$$a\left(u, v\right) = \int_\Omega \Delta u \Delta v dx - \left(1 - \nu\right) \int_\Omega L\left(u, v\right) dx.$$

Démonstration du Théorème 3.1

3.1.6 Définition des solutions approchées

On introduit une suite $w_1, \ldots, w_m, \ldots$ de fonctions ayant les propriétés suivantes :

$$w_i \in H_0^2(\Omega) \quad \forall i$$

$\forall m, w_1, \ldots, w_m$ sont linéairement indépendantsles combinaisons linéaires finies des w_i sont denses dans $H_0^2(\Omega)$.

Soit $u_{1m}(t)$ vérifiant

$$u_{1m}(t) \in \left[w_1, \ldots, w_m\right], \text{ i.e. } u_{1m}(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i, \tag{3.17}$$

$$\begin{gathered} \left(u_{1m}^{''}(t), w_j\right) + a_1\left(\Delta u_{1m}(t), \Delta w_j\right) \\ + \tfrac{1}{a_2}\left(\left[u_{1m}(t), G_2\left(\left[u_{1m}(t), u_{1m}(t)\right]\right)\right], w_j\right) = \left(f(t), w_j\right), \\ 1 \leq j \leq m \end{gathered} \tag{3.18}$$

où on utilise les notations de (3.3) et (3.4), avec

$$u_{1m}(0) = u_{01m} \in \left[w_1, \ldots, w_m\right], \; u_{01m} \to u_{01} \text{ dans } H_0^2(\Omega), \tag{3.19}$$

$$u'_{1m}(0) = u_{11m} \in [w_1, \ldots, w_m]\,,\ u_{11m} \to u_{11} \ \text{ dans } \ L^2(\Omega). \tag{3.20}$$

Si l'on définit $u_{2m}(t)$ par

$$u_{2m}(t) = -\frac{1}{a} G_2 \left(L(u_{1m}(t), u_{1m}(t)) \right) \tag{3.21}$$

ou encore

$$\begin{cases} a_2 \Delta^2 u_{2m}(t) + L(u_{1m}(t), u_{1m}(t)) = 0 \\ u_{2m}(t) \in H_0^2(\Omega), \end{cases} \tag{3.22}$$

alors (3.18) s'écrit

$$\begin{cases} \left(u''_{1m}(t), w_j\right) + a_1 \left(\Delta u_{1m}(t), \Delta w_j\right) \\ + \left(L(u_{1m}(t), u_{2m}(t)), w_j\right) = \left(f(t), w_j\right), 1 \leq j \leq m \end{cases} \tag{3.23}$$

Naturellement $u_{2m}(t)$ n'est pas (en général) à valeurs dans $[w_1, \ldots, w_m]$.

On est assuré de l'existence de $u_{1m}(t)$, et donc de $u_{2m}(t)$, dans un intervalle $[0, t_m]\,, t_m > 0$.

3.1.7 Estimations a priori

On multiplie (3.23) par $g'_{jm}(t)$ et on somme en j. Il vient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left| u'_{1m}(t) \right|^2 + a_1 \left| \Delta u_{1m}(t) \right|^2 \right) - \left(L(u_{1m}(t), u_{2m}(t)), u'_{1m}(t) \right) = \left(f(t), u'_{1m}(t) \right) \quad . \tag{3.24}$$

Mais, d'après le **lemme 3.1** :

$$\begin{aligned}\left(L(u_{1m}(t),u_{2m}(t)),u'_{1m}(t)\right) &= -\left(L(u_{1m}(t),u'_{1m}(t)),u_{2m}(t)\right)\\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}L(u_{1m}(t),u_{1m}(t)),u_{2m}(t)\right)\end{aligned}$$

et d'après (3.22) cela est égal à

$$+\frac{a_2}{2}(\Delta^2 u'_{2m}(t),u_{2m}(t)) = \frac{a^2}{4}\frac{d}{dt}\left|\Delta u_{2m}(t)\right|^2.$$

donc(3.24) s'écrit encore :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\left|u'_{1m}(t)\right|^2 + a_1\left|\Delta u_{1m}(t)\right|^2 + \frac{a_2}{2}\left|\Delta u_{2m}(t)\right|^2)\\ =\ &(f(t),u'_{1m}(t))\end{aligned} \tag{3.25}$$

et donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(|u_{1m}(t)|^2 + a_1\left|\Delta u_{1m}(t)\right|^2 + \frac{a_2}{2}\left|\Delta u_{2m}(t)\right|^2) &= \frac{1}{2}(|u_{11m}|^2 + a_1\left|\Delta u_{01m}\right|^2 + \frac{a_2}{2}\left|\Delta u_{2m}(0)\right|^2\\ &\quad + \int_0^t (f(\sigma),u'_{1m}(\sigma))d\sigma.\end{aligned} \tag{3.26}$$

mais d'après (3.19).

$$|u_{11m}|^2 + a_1\left|\Delta u_{01m}\right|^2 \leq \text{constante};$$

d'après la définition (3.21) on a :

$$u_{2m}(0) = -\frac{1}{a_2}G_2(L(u_{01m},\ u_{01m})). \tag{3.27}$$

mais $L(\ u_{01m},\ u_{01m})$ demeure dans un borné de $L^1(\Omega)$ donc de $H^{-2}(\Omega)$,donc $u_{2m}(0)$

demeure dans un borné de $H_0^2(\Omega)$ et donc dans (3.26)

$$|\Delta u_{2m}(0)| \leq \text{constante}$$

donc(3.26) entraine que $t_m = T$ et que :

$$u_{1m},\ u_{2m} \text{ demeurent dans un borné de } L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)), \tag{3.28}$$

$$u_{1m}^{'} \text{demeurent dans un borné de } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.29}$$

3.1.8 Passage a la limite

d'après (3.28) et (3.29) on peut extraire une suite $u_{1\mu}, u_{2\mu}$ telle que

$$\begin{cases} u_{i\mu} \to u_i \text{ dans } L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)) \text{ faible étoile, } i=1,2 \\ u_{1\mu}^{'} \to u_1^{'} \text{ dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \text{ faible étoile} \\ u_{1\mu} \to u_1 \text{ dans } L^2(Q) \text{ fort} \end{cases} \tag{3.30}$$

soient $\varphi_j, 1 \leq j \leq j_0$ des fonctions $\in C^1([0,T])$,
$\varphi_j(T) = 0$, et $\Psi = \sum_{j=1}^{J_0} \varphi_j \otimes w_j$
on déduit de (3.23) pour $m = \mu \succ j_0$ que

$$-\int_0^T (u_{_{1\mu}}^{'}, \Psi^{'})dt + a_1 \int_0^T (\Delta u_{_{1\mu}}, \Delta\Psi)dt - \int_0^T (L(u_{_{1\mu}}, u_{_{2\mu}}), \Psi)dt = \int_0^T (f,\Psi)dt + (u_{_{11\mu}}(0), \Psi(0)) \tag{3.31}$$

mais d'après le **lemme 3.1** :

$$\int_0^T (L(u_{1\mu}, u_{2\mu}), \psi)\, dt = \int_0^T (L(\psi, u_{2\mu}), u_{1\mu})\, dt; \tag{3.32}$$

$L(\psi, u_{2\mu}) \to L(\psi, u_2)$ dans $L^2(Q)$ faible et donc puisque $u_{1\mu} \to u_1$ dans $L^2(Q)$ fort, on voit que

$\int_0^T (L(u_{1\mu}, u_{2\mu}), \psi)\, dt \to \int_0^T (L(\psi, u_2), u_1)\, dt = \int_0^T (L(u_1, u_2), \psi)\, dt$

donc, (3.32) implique à la limite :

$$-\int_0^T \left(u_1^{'}, \psi^{'}\right) dt + a_1 \int_0^T (\Delta u_1, \Delta\psi)\, dt - \int_0^T (L(u_1, u_2), \psi)\, dt = \int_0^T (f, \psi)\, dt + (u_{11}, \psi(0)) \tag{3.33}$$

et cela $\forall\psi$ de la forme (3.31).

Par passage à la limite on en déduit que (3.33) a encore lieu pour tout $\psi \in L^2(0, T; H_0^2(\Omega))$ tel que $\psi' \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ et $\psi(T) = 0$.

Cela montre que u_1 et u_2 sont liés par la **première équation** de (p_4) et que $u_1^{'}(0) = u_{11}$.

Il reste donc seulement à montrer la **deuxième équation** de (p_4). On peut passer directement à la limite sur (3.22) (pour $m = \mu$) en notant quant que

$L(u_{1\mu}, u_{1\mu}) \to L(u_1, u_1)$ dans $D^{'}(Q)$; en effet, on a

$$\int_0^T (L(u_{1\mu}, u_{1\mu}), \varphi)\, dt = \int_0^T (L(u_{1\mu}, \varphi), u_{1\mu})\, dt, \forall\varphi \in D(Q)$$

et on passe à la limite comme plus haut.

3.2 Problème P_5

3.2.1 Position du problème (P_5)

On considère un ouvert Ω borné de $\mathbb{R}^2$ (Ω est la plaque vibrante),
On cherche une fonction $u = (u_1, u_2) = (u_1(x,t), u_2(x,t))$, $x \in \Omega$, $t \in]0, T[$ dans $\mathbb{R}^2$, qui vérifie :

$$(P_5)\begin{cases} u_1'' + a_1\Delta^2 u_1 - L(u_1,u_2) = f, \text{ dans } \Omega\times]0,T[, & (3.1)' \\ a_2\Delta^2 u_2 + L(u_1,u_1) = 0, \text{ dans } \Omega\times]0,T[, & (3.2)' \\ N(u_1) = M(u_1) = 0, N(u_2) = M(u_2) = 0, \text{ sur } \Sigma, & (3.3)' \\ u_1(x,0) = u_{01}(x), u_1'(x,0) = u_{11}(x),\ x\in\Omega, & (3.4)' \end{cases}$$

Où les fonctions u_{01} et u_{11} sont données, les a_i sont des constantes strictement positifs, f est une fonction donnée de Q dans $\mathbb{R}$.

3.2.2 Interprétation physique du problème (P_5)

Physiquement, $M(u)$ est le moment de flexion et $N(u)$ est la force transversale composée de la force de cisaillement et du moment de torsion.

Ces problèmes représentent différents modèles mathématiques d'une plaque non linéaire vibrante : $u(x,t)$ étant le déplacement au point x et à l'instant t, f est la densité de force.

Et les conditions au bord signifient que la plaque est libre au bord Σ .

Remarque 3.4 *Il n'y a pas de condition initiale sur u_2, cela tient au fiat que le système (P_5) ne contient pas de dérivée en t de u_2, c'est à dire que la vibration de la plaque sont de la direction u_1. Le système (P_5) n'est pas du type de Cauchy-Kowaleska, on peut l'y ramener de la façon suivante, pas élimination de u_2.*

$$u_2 = -\frac{1}{a_2}G_2(L(u_1,u_1)) \tag{3.34}$$

Remarque 3.5 *Soit G_2 désigne ‹‹l'opérateur de Green››, i.e. l'opérateur inverse de Δ^2 dans Ω pour les conditions aux limites d'une plaque libre .*

Et alors $(3.1)'$ *devient*

$$u_1'' + a_1\Delta^2 u_1 + \frac{1}{a_2}L(u_1, G_2(L(u_1,u_1))) = f \tag{3.35}$$

3.2.3 Formulation variationnelle du problème (P_5)

En multipliant l'équation $(3.1)'$ et $(3.2)'$ par une "fonction test" $v \in H^2(\Omega)$, on obtient par la formule de Green :

$$\begin{aligned} \left(u_1^{''}, v\right) + a_1 a\left(u_1, v\right) - \left(L\left(u_1, u_2\right), v\right) &= \left(f, v\right), & (3.36) \\ a_2 a\left(u_2, v\right) + \left(L\left(u_1, u_1\right), v\right) dx &= 0. & (3.37) \end{aligned}$$

Où

$$a\left(u, v\right) = \int_{\Omega} \Delta u \Delta v dx - (1-\nu) \int_{\Omega} L\left(u, v\right) dx.$$

Existence de la solution :

3.2.4 Définition des solutions approchées

On introduit une suite $w_1, \ldots, w_m, \ldots$, de fonctions ayant les propriétés suivantes :

$$w_i \in V, \ \forall i \in \mathbb{N}^*,$$

$\forall m \in \mathbb{N}^*, w_1, \ldots, w_m$ sont linéairement indépendants,les combinaisons linéaires finies des w_i sont denses dans $H_0^2(\Omega)$.

Soit $u_m(t)$ vérifiant

$$u_{1m}(t) \in \left[w_1, \ldots, w_m\right], \text{ i.e. } u_{1m}(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i, \tag{3.38}$$

$$\begin{cases} \left(u_{1m}^{''}(t), w_j\right) + a_1 a\left(u_{1m}(t), w_j\right) - \left(L\left(u_{1m}(t), u_{2m}(t)\right), w_j\right) = \left(f(t), w_j\right), \\ 1 \leq j \leq m \end{cases} \tag{3.39}$$

où on utilise les notations de (2.9) (3.7), avec

$$u_{1m}(0) = u_{01m} \in [w_1, \ldots, w_m], u_{01m} \to u_{01}, \text{ dans } H_0^2(\Omega), \tag{3.40}$$

$$u_{1m}^{'}(0) = u_{11m} \in [w_1, \ldots, w_m], u_{11m} \to u_{11}, \text{ dans } L^2(\Omega). \tag{3.41}$$

Si l'on définit $u_{2m}(t)$ par

$$u_{2m}(t) = -\frac{1}{a_2} G_2 \left(L \left(u_{1m}(t), u_{1m}(t) \right) \right) \tag{3.42}$$

ou encore

$$\begin{cases} a_2 \Delta^2 u_{2m}(t) + L \left(u_{1m}(t), u_{1m}(t) \right) = 0 \\ u_{2m}(t) \in H^2(\Omega), \end{cases} \tag{3.43}$$

alors (3.39) s'écrit

$$\begin{cases} \left(u_{1m}^{''}(t), w_j \right) + a_1 a \left(u_{1m}(t), w_j \right) + \frac{1}{a_2} \left(L \left(G_2 \left(L \left(u_{1m}(t), u_{1m}(t) \right) \right), u_{1m}(t) \right), w_j \right) \\ \qquad = \left(f(t), w_j \right), \\ \qquad 1 \leq j \leq m \end{cases} \tag{3.44}$$

Naturellement (3.43) est assuré de l'existence de $u_{1m}(t)$,

comme $u_{2m}(t)$ n'est pas (en général) à valeurs dans $[w_1, \ldots, w_m]$, et donc de $u_{2m}(t)$.

3.2.5 Estimations a priori

On multiplie (3.38) par $g_{jm}^{'}(t)$ et on somme en j. Il vient :

$$\begin{cases} \left(u_{1m}^{''}(t), u_{1m}^{'}(t) \right) + a_1 a \left(u_{1m}(t), u_{1m}^{'}(t) \right) - \left(L \left(u_{1m}(t), u_{2m}(t) \right), u_{1m}^{'}(t) \right) \\ \qquad = \left(f(t), u_{1m}^{'}(t) \right), \\ \qquad 1 \leq j \leq m \end{cases} \tag{3.45}$$

On fait les calcules pour simplifie (3.45)

$$\left(u_{1m}^{''}(t), u_{1m}^{'}(t)\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u_{1m}^{'}(t)\right|^2.$$

$$\left(\Delta u_{1m}(t), \Delta u_{1m}^{'}(t)\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\Delta u_{1m}(t)\right|^2.$$

$$\int_\Omega L\left(u_{1m}, u_{1m}^{'}\right)dx = \frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{\partial^2 u_{1m}}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 u_{1m}}{\partial x_2^2} - \left|\frac{\partial^2 u_{1m}}{\partial x_1 \partial x_2}\right|^2 dx.$$

$$\begin{aligned}
\left(L\left(u_{1m}(t), u_{2m}(t)\right), u_{1m}^{'}(t)\right) &= \left(L\left(u_{1m}(t), u_{1m}^{'}(t)\right), u_{2m}(t)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}L\left(u_{1m}(t), u_{1m}(t)\right), u_{2m}(t)\right) \\
&= -\frac{a_2}{2}\left(\Delta^2 u_{2m}^{'}(t), u_{2m}(t)\right) \\
&= \frac{a_2}{4}\frac{d}{dt}\left(2\int_\Omega \frac{\partial^2 u_{2m}}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 u_{2m}}{\partial x_2^2} + \left|\frac{\partial^2 u_{2m}}{\partial x_1 \partial x_2}\right|^2 dx - \left|\Delta u_{2m}(t)\right|^2\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left|u_{1m}^{'}(t)\right|^2 + a_1\left(\left|\Delta u_{1m}(t)\right|^2 - 2(1-\nu)\int_\Omega\left(\frac{\partial^2 u_{1m}}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 u_{1m}}{\partial x_2^2} - \left|\frac{\partial^2 u_{1m}}{\partial x_1 \partial x_2}\right|^2\right)dx\right)\right. \\
&\left. + \frac{a_2}{4}\left(\left|\Delta u_{1m}(t)\right|^2 - 2(1-\nu)\int_\Omega\left(\frac{\partial^2 u_{2m}}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 u_{2m}}{\partial x_2^2} - \left|\frac{\partial^2 u_{2m}}{\partial x_1 \partial x_2}\right|^2\right)dx\right)\right] = \left(f(t), u_{1m}^{'}(t)\right).
\end{aligned} \tag{3.46}$$

On à :

$$\left|\Delta u\right|^2 = \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right|^2 = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right|^2 \geq 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}.$$

Donc

$$\left|\Delta u(t)\right|^2 - (1-\nu)\int_\Omega 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}dx \geq \nu\left|\Delta u(t)\right|^2.$$

Le première membre de (3.46) supérieur à :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left|u_{1m}^{'}(t)\right|^2 + a_1\nu\left|\Delta u_{1m}(t)\right|^2 + \frac{a_2}{2}\nu\left|\Delta u_{1m}(t)\right|^2\right] \leq \left(f(t), u_{1m}^{'}(t)\right), \tag{3.47}$$

on intègre (3.44) sur $[0,t]$ on obtient :

$$\left|u_{1m}^{'}(t)\right|^2 + a_1\nu\left|\Delta u_{1m}(t)\right|^2 + \frac{a_2}{2}\nu\left|\Delta u_{1m}(t)\right|^2 \leq 2\int_0^t (f(s), u_{1m}^{'}(s))ds + C_1, \qquad (3.48)$$

où

$$C_1 = \left|u_{11m}\right|^2 + a_1\nu\left|\Delta u_{01m}\right|^2 + \frac{a_2}{2}\nu\left|\Delta u_{2m}(0)\right|^2.$$

D'après l'égalité (3.42) on a :

$$\Delta^2 u_{2m}(0) = -\frac{1}{a_2}L\left(u_{01m}, u_{01m}\right),$$

mais $L\left(u_{01m}, u_{01m}\right)$ demeure dans un borné de $L^1(\Omega)$ donc de $H^{-2}(\Omega)$,donc $u_{2m}(0)$ demeure dans un borné de $H_0^2(\Omega)$ donc

$$\left|\Delta u_{2m}(0)\right| \leq C.$$

On utilise l'inégalité suivante pour simplifier le second membre de $(3.2)'$:

$$2ab \leq a^2 + b^2,$$

donc $(3.2)'$ entraine :

$$\left|u_{1m}^{'}(t)\right|^2 + a_1\nu\left|\Delta u_{1m}(t)\right|^2 + \frac{a_2}{2}\nu\left|\Delta u_{1m}(t)\right|^2 \leq C_1 + \int_0^t \left|f(s)\right|^2 + \left|u_{1m}^{'}(s)\right|^2 ds.$$

Comme $f \in L^2(Q)$ donc

$$\int_0^t \left|f(s)\right|^2 ds \leq C,$$

$$\left|u_{1m}^{'}(t)\right|^2 + a_1\nu\left|\Delta u_{1m}(t)\right|^2 + \frac{a_2}{2}\nu\left|\Delta u_{1m}(t)\right|^2 \leq C_2 + \int_0^T \left|u_{1m}^{'}(s)\right|^2 ds,$$

$$\leq C_2 + \int_0^T \left|u_{1m}^{'}(s)\right|^2 ds + \int_0^T a_1\nu \left|\Delta u_{1m}(s)\right|^2 + \frac{a_2}{2}\nu \left|\Delta u_{1m}(s)\right|^2 ds.$$

On applique le **lemme 1.1** avec

$$\begin{cases} f(t) = \left|u_{1m}^{'}(t)\right|^2 + a_1\nu \left|\Delta u_{1m}(t)\right|^2 + \frac{a_2}{2}\nu \left|\Delta u_{1m}(t)\right|^2 \\ g(t) = 1 \end{cases}$$

On obtient :

$$\left|u_{1m}^{'}(t)\right|^2 + \left|\Delta u_{1m}(t)\right|^2 + \left|\Delta u_{2m}(t)\right|^2 \leq C_2\, \mathrm{e}^T \leq C. \tag{3.49}$$

On déduit de (3.49)

$$u_{1m},\ u_{2m} \text{ demeurent dans un borné de } L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)) \tag{3.50}$$

$$u_{1m}^{'} \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.51}$$

3.2.6 passage a la limite

D'après (3.50) et (3.51)on peut extraire une suite $u_{1\mu}, u_{2\mu}$ telle que :

$$\begin{aligned} &u_{i\mu} \to u_i \text{ dans } L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)) \text{ faible étoile, } i = 1,2 \\ &u_{1\mu}^{'} \to u_1^{'} \text{ dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \text{ faible étoile.} \end{aligned} \tag{3.52}$$

Donc

$$\begin{aligned} &u_{1\mu} \to u_1 \text{ dans } L^2(0,T;H_0^2(\Omega)) \text{ faible étoile,} \\ &u_{1\mu}^{'} \to u_1^{'} \text{ dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \text{ faible étoile,} \end{aligned} \tag{3.53}$$

donc $u_{1\mu} \to u_1$ dans $H_0^1(Q)$, d'après le **théorème 1.5**

$$u_{1\mu} \to u_1 \text{ dans } L^2(Q) \text{ fort} \tag{3.54}$$

soient $\varphi_j, 1 \leq j \leq j_0$ des fonctions $\in C^1([0,T]), \varphi_j(T) = 0$,et

$$\Psi = \sum_{j=1}^{J_0} \varphi_j w_j \tag{3.55}$$

on déduit de (3.39) pour $m = \mu \geq j_0$ que

$$\begin{aligned} -\int_0^T (u'_{1\mu}, \Psi')dt + a_1 \left(\int_0^T a(\Delta u_{1\mu}, \Delta\Psi)dt - (1-\nu) \int_0^T \left(L(u_{1\mu}, \Psi), 1 \right) dt \right) \\ -\int_0^T \left(L\left(u_{1\mu}, u_{2\mu}\right), \Psi \right) dt = \int_0^T (f, \Psi)dt + (u_{1\mu}(0), \Psi(0)) \end{aligned} \tag{3.56}$$

mais d'après le **lemme 3.2** :

$$\int_0^T \left(L\left(u_{1\mu}, u_{2\mu}\right), \psi \right) dt = \int_0^T \left(L\left(\psi, u_{2\mu}\right), u_{1\mu} \right) dt$$

$L\left(\psi, u_{2\mu}\right) \rightarrow L\left(\psi, u_2\right)$ dans $L^2(Q)$ faible et $u_{1\mu} \rightarrow u_1$ dans $L^2(Q)$ fort, on voit que si μ tend vers l'infinie

$$\int_0^T \left(L\left(u_{1\mu}, u_{2\mu}\right), \psi \right) dt = \int_0^T \left(L\left(u_{1\mu}, \psi\right), u_{2\mu} \right) dt \rightarrow \int_0^T \left(L\left(u_1, u_2\right), \psi \right) dt$$

$$\int_0^T \left(L\left(u_{1\mu}, \Psi\right), 1 \right) dt \rightarrow \int_0^T \left(L\left(u_1, \Psi\right), 1 \right) dt$$

par passage à la limite (3.55) devient :

$$\begin{aligned} -\int_0^T (u'_1, \Psi')dt + a_1 \left(\int_0^T (\Delta u_1, \Delta\Psi)dt - (1-\nu) \int_0^T \left(L(u_1, \Psi), 1 \right) dt \right) \\ -\int_0^T \left(L\left(u_1, u_2\right), \Psi \right) dt = \int_0^T (f, \Psi)dt + (u_1(0), \Psi(0)) \end{aligned} \tag{3.57}$$

et cela $\forall\psi$ de la forme (3.55).

Par passage à la limite on en déduit que (3.56) a encore lié pour tout $\psi \in L^2(0,T;H_0^2(\Omega))$ tel que $\psi^{'} \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ et $\psi(T) = 0$.Cela montre que u_1 et u_2 sont liés par $(3.1)', (3.2)'$ et que $u_1^{'}(0) = u_{11}$.

Il reste donc seulement à montrer$(3.2)'$.

On peut passer directement à la limite sur (3.42) (pour $m = \mu$) en notant quant que$u_{1\mu} \rightarrow u_1$ dans $L^2(Q)$ fort, on voit que si μ tend vers l'infinie

$$L\left(u_{1\mu}, u_{1\mu}\right) \rightarrow L\left(u_1, u_1\right) \text{ dans } \mathfrak{D}^{'}(Q),$$

en effet si $\varphi \in \mathfrak{D}(Q)$

$$\int_0^T \left(L\left(u_{1\mu}, u_{1\mu}\right), \varphi\right) dt = \int_0^T \left(L\left(u_{1\mu}, \varphi\right), u_{1\mu}\right) dt \rightarrow \int_0^T \left(L\left(u_1, u_1\right), \varphi\right) dt$$

G_2 linéaire continue on passe à la limite directement :

$$u_{2\mu}(t) = -\frac{1}{a_2} G_2\left(L\left(u_{1\mu}(t), u_{1\mu}(t)\right)\right) \rightarrow -\frac{1}{a_2} G_2\left(L\left(u_1(t), u_1(t)\right)\right) = u_2(t)$$

Et comme l'injection de $H_0^2(\Omega)$ dans $H^2(\Omega)$ continue donc :

$\forall v \in H^2(\Omega)$

$$\left(u_1^{''} + a_1 \Delta^2 u_1 - L\left(u_1, u_2\right), v\right) = (f, v)$$
$$\left(a_2 \Delta^2 u_2 + L\left(u_1, u_1\right), v\right) = 0$$

Conclusion :

Nous avons traités dans ce mémoire le problème aux limites, modélisant les vibrations d'une plaque mince simplement supportée ou encastrée.

Dans une première étape, nous sommes intéressés à l'inversibilité de l'opérateur bilaplacien, avec les conditions aux limites correspondantes.

Dans la deuxième étape, on a ramèné deux problèmes non linéaire et on a démontré un théorème d'existence par la méthode de compacité.

Bibliographie

[1] A. Amassad, M. Shillor and M. Sofonea, A Quasistatic Contact Problem for An Elastic Perfectly Plastic Body with Tresca's Friction, Nonlin. Anal, (35) (1999), 55 109.

[2] A. Amassad and M. Sofonea, Analysis of A Quasistatic Viscoplastic Problem Involving Tresca Friction Law, Discrete and Continuous Dynamical Systems, 4 (1998), 55-72.

[3] B. Awbi, L. Selmani and M. Sofonea, Variational Analysis of A Frictional Contact Problem for the Bingham Fluid, Int. J. Appl. Math and Comp. Sci. 9, 2 (1999), 371-385.

[4] R.S.Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, New York (1975).

[5] F. Bouzeghaya, Analyse de Quelques Problèmes aux limites en Mécanique des milieux continus, Thèse de Doctorat Sciences, Université de Sétif, 2013.

[6] F. Bouzeghaya, Existence Unicité et Régularité de la Solution de Quelques Problèmes Aux Limites à Frontière Libre par les Méthodes de Compacité et de Monotonie, Mémoire de Magister, Université de Sétif (2005).

[7] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, théorème et application. Masson 1983.

[8] J. Droniou, Quelques Résultats sur les Espaces de Sobolev, Cours de DEA, Département de Mathématiques, Université de Provence, CMI, (2001).

[9] J.Dronniou et C.Imbert, Solutions de Viscocité et Solutions Variationnelle pour EDP Non Linéaires, Cours de DEA, Département de Mathématiques, Montpellier II, (2002).

[10] H. Brezis, Introduction aux équation aux dérivées partielles du seconde ordre, 1 vol, Paris, 1977.

[11] L. Consiglieri, Stationary Solution for A Bingham Flow with Nonlocal Frictions, In Mathematical topics in fluid mechanics, J. F. Rodrigues and A. Sequeira (eds), Pitman Res. Notes in math. Longman (1992).

[12] Gunther Schmidt and Boris N Khoromski, Boundary integral equations for the biharmonic dirichlet problem on nonsmooth domains J, Journal of integral equations and applications, Volume 11, Number 2, Summer 1999.

[13] J.L. Lions,, Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes Aux Limites Non Linéaires, Dunod, 1969.

[14] A. Munnier, Espaces de Sobolev et introduction aux équations aux dérivées partielles, Institut Elie Cartan 2007.

[15] B. Merouani, Méthodes de résolution de quelques problèmes aux limites non linéaires, cours de la première année de la post-graduation (2004-2005).

[16] B. Merouani, F. Messelmi and S. Drabla, Dynamical Flow of a Bingham Fluid with Subdifferential Boundary Condition, Analele of University Oradea, Fasc. Mathematica, Tome XVI (2009), 5-30.

[17] B. Merouani and R. Boufenouche, Coefficients of singularities for a simply supported plate problems in plane sectors, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2013(2013), No. 238, p. 1-8.

[18] S. Nicaise, Analyse numérique et équations aux dérivées partielles. Dunod, Paris, 2000.

[19] P.A. Raviart et J.M.Thomas, Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Paris 1983.

[20] L.Schwartz, Théorie des Distributions, Herman, Paris, (1979).

[21] M.Selmani, B.Merouani and L.Selmani, Analysis of a Class of Frictional Contact Problems for the Bingham Fluid, Mediterr.J.Math 1-12, (2004).

[22] M.Selmani, Etude Mathématique de Quelques Problèmes aux Limites en Mécanique de Contact, Thèse de Doctorat Sciences, Université de Sétif.