MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE FERHAT ABBAS – SETIF
UFAS (ALGERIE)

MEMOIRE

Présenté à l'institut d'optique et de mécanique de précision
Pour l'obtention du diplôme de

MAGISTER

Option : Mécanique appliquée

Par

Mr : Mertani Boubekeur Med Bilel

Thème

Modélisation numérique et expérimentale du comportement des panneaux sandwichs a âme en nids d'abeilles

Soutenu le : 07/07/2011 devant un Jury composé de :

Pr : ZEGADI Rabah	Professeur à l'université de Sétif	Président
Dr : KESKES Boualem	M.C. à l'université de Sétif	Rapporteur
Dr : DJEDDOU Ferhat	M.C. à l'université de Sétif	Examinateur
Dr : OUAKDI El Hadj	M.C. à l'université de Sétif	Examinateur

Résumé

Le but de ce travail est la modélisation numérique et expérimentale du comportement en flexion 3 points des panneaux sandwiches à âme en nids d'abeilles. Cette modélisation passe par deux étapes cruciales, l'homogénéisation et le développement d'un modèle raffiné pour la flexion 3 points.

L'homogénéisation nous a permis la détermination des 9 constantes élastiques du matériau. Deux méthodes en été utilisé, une numérique à l'aide du logiciel « Ansys » et l'autre analytique basé sur le modèle de « Gibson ».

La modélisation en flexion 3 points de panneaux sandwiches à âme en nids d'abeilles nous a permis de comparer nos résultats numériques et analytiques avec les résultats expérimentaux afin de valider la démarche théorique suivie.

MOTS-CLÉS: Sandwich multicouche, nid d'abeille, homogénéisation, modélisation, flexion 3 point.

ملخص

الهدف من هذا العمل هو وضع النماذج التجريبية والعددية لسلوك الانحناء ثلاث نقاط للألواح الساندويتش بلب عش النحلة. وضع هذه النماذج يمر بخطوتين أساسيتين، التجريس ووضع نموذج للانحناء ثلاث نقاط.

وقد سمح التجنيس بتحديد تسع ثوابت مرنة للألواح ساندويتش بلب عش النحلة . استعملت طريقتين ،وهي رقمية باستخدام برنامج " Ansys " والآخرى تحليلية استنادا إلى النموذج التحليلي" Gibson "

سمح وضع نماذج للانحناء ثلاث نقاط للالواح ساندويتش بلب عش النحلة بمقارنة النتائج العددية والتحليلية المتحصل عليها مع النتائج التجريبية للتحقق من صحة المنهج النظري المتبع.

الكلمات المفتاحية : متعدد الطبقات، ساندويتش، عش النحلة ، التجانس، النمذجة، الانحناء

REMERCIMENTS

Mes remerciements les plus sincères vont au docteur KESKES Boualem qui a initié et dirigé la recherche avec beaucoup de patience et une compétence professionnelle remarquable. Je tiens à lui exprimer ma profonde gratitude pour m'avoir permis de terminer ce mémoire dans de bonnes conditions.

Je tiens également à remercier les membres du jury, Monsieur ZEGADI Rabah professeur à l'Université de Sétif, Monsieur DJEDDOU Ferhat, M.C. à l'Université de Sétif et Monsieur OUAKDI El Hadj, M.C à l'Université de Sétif d'avoir accepté de participer et de juger ce travail.

Mes meilleures salutations sont adressées à tout le personnel administratif, technique. Aussi, je remercie tous mes collègues pour leur soutien moral, ainsi que tous ceux et toutes celles qui m'ont aidé de prés ou de loin à accomplir ce travail.

J'aimerais exprimer ma gratitude et mes remerciements à ma femme qui m'a toujours soutenu et encouragé dans les moments difficiles.

Table des matières

Nomenclature

Liste des figures

Liste des tableaux

Introduction générale 01

Chapitre I

Panneaux sandwichs à âme en nid d'abeille

I-1 Introduction 03

I-2 Définition 04

I-3 Technique d'élaboration du nid d'abeille 05

I-4 Historique des domaines d'utilisation des structures sandwichs 06

I-5 Sollicitations mécaniques des panneaux sandwichs 09

I-6 Propriétés mécaniques des panneaux sandwichs 13

I-7 Descriptions des différents types de matériaux 15

I-8 Propriétés mécaniques de l'âme 15

I-9 Propriétés mécaniques des peaux 17

Chapitre II

Homogénéisation des panneaux sandwichs à âme en nid d'abeille

II-1 Introduction 18

II-2 Concept d'homogénéisation 19

II-3 Homogénéisation du nid d'abeilles 20

II-4 Géométrie et notations 21

II-5 Principales caractéristiques élastiques du nid d'abeilles 22

II-6 Différentes approches existantes dans la littérature pour la détermination des caractéristiques élastiques 22

II-7 Approches analytiques 23

II-7-1 Modèles de Gibson 23
II-7-1-1 Propriétés dans le plan X_1X_2 24
II-7-1-1-1 Calcul de E_x 24
II-7-1-1-2 Calcule de E_y 26
II-7-1-1-3 Calcul de G_{xy} 28
II-7-1-2 Propriétés hors du plan (X_1, X_2) 31
II-7-1-2-1 Détermination du module E_z 31
II-7-1-2-2 Détermination des coefficients de Poisson ν_{13}, ν_{23} 31
II-7-1-2-3 Détermination des modules de cisaillement transverse G_{yz} 32
II-7-1-2-3-a Détermination de la borne supérieure 32
II-7-1-2-3-b Détermination de la borne inferieur 34
II-8 Approches numériques 38
II-8-1 Le volume élémentaire représentatif « V.E.R. » 38
II-8-2 Méthode d'homogénéisation numérique 39

Chapitre III

Développement d'un model raffiné pour panneaux sandwichs à âme en nid d'abeille

III-1 Introduction 41
III-2 Modélisation des panneaux sandwichs en flexion 42
III-2-1 Hypothèses de la théorie des sandwichs et notations 42
III-2-2 Formulation variationnelles 44
III-2-3 Equations d'équilibre et conditions aux limites naturelles 47
III-3 Mise en œuvre d'une solution analytique dans le cas de cette étude 48
III-3-1 Solution du système homogène 51
III-3-2 Solution particulière 52
III-3-3 Solution générale 54
III-3-4 Calcul des constantes 54
III-3-5 Conditions aux limites 56
III-4 Conclusion 57

Chapitre IV

Simulation et analyse des résultats

IV-1 Présentation des logiciels de calcul Ansys et Matlab 58

IV-1-1 Présentation du code de calcul Ansys 12.1 58

IV-1-2 Présentation du logiciel de calcul Matlab 60

IV-2 Homogénéisation des panneaux sandwichs à âme en nid d'abeille par la méthode analytique 63

IV-3 Homogénéisation des panneaux sandwichs à âme en nid d'abeille par la méthode numérique 64

IV-3-1 Le volume élémentaire représentatif « V.E.R » 64

IV-3-2 Homogénéisation des propriétés $E_i$et υ_{ij} 65

IV-3-2-1 Détermination du module E_x 66

IV-3-2-2 Résultats du module E_x 68

IV-3-2-3 Détermination du module E_y 70

IV-3-2-4 Résultats du module E_y 71

IV-3-2-5 Détermination du module E_z 73

IV-3-2-6 Résultats du module E_z 74

IV-3-3 Homogénéisation des propriétés G_{ij} 77

IV-3-3-1 Détermination du module G_{xy} 77

IV-3-3-2 Résultats du module G_{xy} 78

IV-3-3-3 Détermination du module G_{xz} 79

IV-3-3-4 Résultats du module de cisaillement G_{xz} 79

IV-3-3-5 Détermination du module G_{yz} 80

IV-3-3-6 Résultats du module de cisaillement G_{yz} 80

IV-3-4 Recapulatif pour les resultats du modules élastiques homogénéisés par la methode numerique 81

IV-3-5 Confrontation des résultats des modèles analytiques à ceux obtenus par éléments finis 81

IV-3-6 Analyse des resultats 84

IV-4 Modélisation numérique et analytique du comportement en flexion des panneaux sandwichs 86
IV-4-1 Modélisation numérique par éléments finis 87
IV-4-2 Modélisation analytique 87
IV-4-3 Résultats des simulations numériques et analytiques 87
IV-4-3-1 Résultats pour la distance entre appuis L=200 mm et F=250 88
IV-4-3-2 Résultats pour la distance entre appuis L=400 mm et F=250 89
IV-4-3-3 Analyse des résultats 94
IV-4-3-4 Présentations des courbes expérimentales 94
IV-4-3-5 Comparaison des flèches théoriques et expérimentales 96
IV-4-3-6 Interprétations des courbes 101
Conclusion générale 103
Références bibliographiques 105
Annexe A (Programme Matlab) 108
Annexe B (Programme Ansys) 121

Nomenclature

VER Volume élémentaire représentatif.

MEF Méthode des éléments finis.

CL Conditions aux limits .

M_i Moment de flexion.

T_i Force transversale.

I Moment d'inertie.

F Force.

U Déplacement.

E_x Module d'élasticité suivant l'axe X.

E_y Module d'élasticité suivant l'axe Y.

E_z Module d'élasticité suivant l'axe Z.

ε_x Déformation suivant l'axe X.

ε_y Déformation suivant l'axe Y.

ε_z Déformation suivant l'axe Z.

G_{ij} Module de cisaillement.

ν_{ij} Coefficients de poisson.

τ_{ij} Contrainte de cisaillement.

σ_i Contrainte de traction.

γ_{ij} Déformation de cisaillement.

θ Angle de la cellule du nid d'abeille.

Φ Diamètre de la cellule du nid d'abeille.

b Longueur de la paroi centrale de la cellule du nid d'abeille.

a Longueur de la paroi inclinée de la cellule du nid d'abeille.

t Epaisseur de la paroi centrale de la cellule du nid d'abeille.

t' Epaisseur de la paroi inclinée de la cellule du nid d'abeille.

h Hauteur du nid d'abeille.

W Fleche.

L Distance entres les appuis (flexion 3 points).

V_0 Volume avant déformation.

V_f Volume après déformation.

Liste des figures

Chapitre I

Figure 1-I : Panneaux sandwichs à âme en nid d'abeille 4
Figure 2-I : Etapes d'élaboration du nid d'abeille 5
Figure 3-I : Différentes sollicitations des panneaux sandwichs 9
Figure 4-I : Flambement généralisé des peaux 9
Figure 5-I : Rupture des peaux en traction ou en compression 10
Figure 6-I: Modes locaux de rupture 10
Figure 7-I: Rupture de l'âme en cisaillement 11
Figure 8-I: Flambement généralisé de l'âme ou crimping. 11
Figure 9-I: Flambement localisé, « wrinkling » ou « dimpling » 12
Figure 10-I: Matrices de rigidités des différents types de matériaux 14

Chapitre II

Figure 1-II : Géométrie d'une cellule en nid d'abeille vue de dessus 21
Figure 2-II : Vue en perspective du nid d'abeilles 23
Figure 3-II: Déformation des cellules par flexion des clinquants sous une charge dirigée suivantX_1 24
Figure 4-II: Déformation des cellules par flexion des clinquants sous une charge dirigée suivantX_2 26
Figure 5-II : Déformation des cellules par flexion et rotation dans le plan(X_1, X_2) 29
Figure 6-II : La structure hexagonale d'un nid d'abeilles 33
Figure 7-II : V.E.R. du nid d'abeilles 38
Figure 8-II : Simulations d'une sollicitation de traction sur le V.E.R 39
Figure 9-II : Simulations d'une sollicitation de cisaillement sur le V.E.R 40

Chapitre III

Figure 1-III : Configuration de la flexion trois points 32

Chapitre IV

Figure 1-IV : Organigramme de programmation par d'éléments finis 60

Figure 2-IV : Organigramme de la résolution analytique 62

Figure 3-IV : V.E.R. du nid d'abeille 65

Figure 4-IV : Conditions aux limites pour une traction suivant la direction X 66

Figure 5-IV : Déformée après simulation de la traction suivant X 67

Figure 6-IV : Conditions aux limites pour une traction suivant la direction Y 70

Figure 7-IV : Déformée après simulation de la traction suivant Y 71

Figure 8-IV : CL pour la traction suivant l'axe Z 74

Figure 9-IV : Déformée pour un déplacement imposé suivant l'axe Z 74

Figure 10-IV : CL pour la détermination du module de cisaillement G_{xy} 78

Figure 11-IV : Déformée du cisaillement dans le plan XY 78

Figure 12-IV : CL pour la détermination du module de cisaillement G_{xz} 79

Figure 13-IV : Déformée en cisaillement dans le plans XZ 79

Figure 14-IV : CL pour la détermination du module de cisaillement G_{yz} 80

Figure 15-IV : Déformée en cisaillement dans le plan YZ 80

Figure 16-IV : Histograme de l'erreur relative du modèle analytique par rapport au modèle numérique pour chaque densité 83

Figure 17-IV : Histograme de l'erreur moyenne relative du modèle analytique par rapport au modèle numérique 84

Figure 18-IV : Représentation schématique de l'essai de flexion 3 points 86

Figure 19-IV : Maillage du panneau sandwich 87

Figure 20-IV : Configuration de l'essai de flexion 3 points 87

Figure 21-IV : Evolution de la flèche pour les pannaux sandwichs de densité 29 (Kg/m^3) 89

Figure 22-IV : Evolution de la flèche pour les pannaux sandwichs de densité 55 (Kg/m^3) 89

Figure 23-IV : Evolution de la flèche pour les pannaux sandwichs de densité 82 (Kg/m^3) 90

Figure 24-IV : Evolution de la flèche pour les pannaux sandwichs de densité 130 (Kg/m^3) 90

Figure 25-IV : Evolution de la flèche pour les pannaux sandwichs de densité 29 (Kg/m^3) 92

Figure 26-IV : Evolution de la flèche pour les pannaux sandwichs de densité 55 (Kg/m^3) 92

Figure 27-IV : Evolution de la flèche pour les pannaux sandwichs de densité 82 (Kg/m^3) 93

Figure 28-IV : Evolution de la flèche pour les pannaux sandwichs de densité 130 (Kg/m^3) 93

Figure 29-IV : Courbes d'essai flexion 3 points en fonction des densités du sandwich Alu-Alu pour L (entre appuis)=400mm 94
Figure 30-IV : Courbes d'essai flexion 3 points en fonction des densités du sandwich Alu-Alu pour L (entre appuis)=200mm 95
Figure 31-IV : Partie élastique des courbes d'essai expérimental de la flexion 3 points pour différentes densités du sandwich Alu-Alu L (entre appuis)=200mm. 95
Figure 32-IV : Partie élastique des courbes d'essai expérimental de la flexion 3 points pour différentes densités du sandwich Alu-Alu L (entre appuis)=400mm 96
Figure 33-IV : Courbes d'évolution des flèches pour différentes méthodes de résolutions de la flexion 3 points Sandwich Alu-Alu (29kg/m^3) L (entre appuis)=200mm 96
Figure 34-IV : Courbes d'évolution des flèches pour différentes méthodes de résolutions de la flexion 3 points Sandwich Alu-Alu (55kg/m^3) L (entre appuis)=200mm. 97
Figure 35-IV : Courbes d'évolution des flèches pour différentes méthodes de résolutions de la flexion 3 points Sandwich Alu-Alu (82kg/m^3) L (entre appuis)=200mm. 97
Figure 36-IV : Courbes d'évolution des flèches pour différentes méthodes de résolutions de la flexion 3 points Sandwich Alu-Alu (130kg/m^3) L (entre appuis)=200mm. 98
Figure 37-IV : Courbes d'évolution des flèches pour différentes méthodes de résolutions de la flexion 3 points Sandwich Alu-Alu (29kg/m^3) L (entre appuis)=400mm 98
Figure 38-IV : Courbes d'évolution des flèches pour différentes méthodes de résolutions de la flexion 3 points Sandwich Alu-Alu (55kg/m^3) L (entre appuis)=400mm 99
Figure 39-IV : Courbes d'évolution des flèches pour différentes méthodes de résolutions de la flexion 3 points Sandwich Alu-Alu (82kg/m^3) L (entre appuis)=400mm 99
Figure 40-IV : Courbes d'évolution des flèches pour différentes méthodes de résolutions de la flexion 3 points Sandwich Alu-Alu (130kg/m^3) L (entre appuis)=400mm 100

Figure 41-IV : Courbes d'évolution de la flèche élastique en fonction de la densité de l'âme pour L (entre appuis)=200 mm 100

Figure 42-IV Courbes d'évolution de la flèche élastique en fonction de la densité de l'âme pour L (entre appuis)=400 mm 101

Liste des tableaux

Chapitre II

Tableau 1-II : Paramètres géométriques d'une cellule en nida 21
Tableau 2-II: Modules élastiques de Gibson 37

Chapitre IV

Tableau 1-IV : Propriétés des panneaux sandwichs utilisés 58
Tableau 2-IV : Modules de Gibson 63
Tableau 3-IV : Modules élastiques homogénéisés par la méthode analytique 64
Tableau 4-IV : Résultats du module E_x pour le panneau sandwich de densité 29 (Kg/m^3) 68
Tableau 5-IV : Résultats du module E_x pour le panneau sandwich de densité 55 (Kg/m^3) 68
Tableau 6-IV : Résultats du module E_x pour le panneau sandwich de densité 82 (Kg/m^3) 69
Tableau 7-IV : Résultats du module E_x pour le panneau sandwich de densité 130 (Kg/m^3) 69
Tableau 8-IV : Résultats du module $E_y$pour les deux conditions aux limites densité 29(Kg/m^3) 71
Tableau 9-IV : Résultats du module $E_y$pour les deux conditions aux limites densité 55 (Kg/m^3) 72
Tableau 10-IV : Résultats du module E_y pour les deux conditions aux limites densité 82 (Kg/m^3) 72
Tableau 11-IV : Résultats du module $E_y$pour les deux conditions aux limites densité 130 (Kg/m^3) 73
Tableau 12-IV : Résultats du module E_z pour les deux conditions aux limites densité 29(Kg/m^3) 75
Tableau 13-IV : du module $E_z$pour les deux conditions aux limites densité 55 (Kg/m^3). 75
Tableau 14-IV : Résultats du module $E_z$pour les deux conditions aux limites densité 82 (Kg/m^3) 76
Tableau 15-IV : Résultats du module $E_z$pour les deux conditions aux limites densité 130 (Kg/m^3) 76
Tableau 16-IV : Résultats du module G_{xy} (plan XY) 78
Tableau 17-IV : Résultats Résultats du module G_{xz} (plan XZ) 79

Tableau 18-IV : Résultats du module de cisaillement G_{yz} (plan YZ) 80
Tableau 19-IV : Modules élastiques homogénéisés par la méthode numérique 81
Tableau 20-IV : Erreur relative du modèle analytique par rapport au modèle numérique 81
Tableau 21-IV : Erreur relative du modèle analytique par rapport au modèle numérique 82
Tableau 22-IV : Erreur relative du modèle analytique par rapport au modèle numérique 82
Tableau 23-IV : Erreur relative du modèle analytique par rapport au modèle numérique 83
Tableau 24-IV : Caractéristiques mécaniques homogénéisées des panneaux sandwichs 86
Tableau 25-IV : panneau sandwich de densité 29 Kg/m^3 88
Tableau 26-IV : panneau sandwich de densité 55 Kg/m^3 88
Tableau 27-IV : panneau sandwich de densité 82 Kg/m^3 88
Tableau 28-IV : panneau sandwich de densité 130 Kg/m^3 88
Tableau 29-IV : panneau sandwich de densité 29 Kg/m^3 91
Tableau 30-IV : panneau sandwich de densité 55 Kg/m^3 91
Tableau 31-IV : panneau sandwich de densité 82 Kg/m^3 91
Tableau 32-IV : panneau sandwich de densité 130 Kg/m^3 91

Introduction générale

Le développement des technologies modernes exige que l'on utilise des matériaux présentant des propriétés mécaniques spécifiques élevées à leur emploi, mais dont les masses volumiques soient faibles. En raison de leur faible densité, grande résistance, rigidité importante et de leur excellente durabilité, les panneaux sandwichs sont utilisées dans de nombreuses composantes structurales, notamment dans le domaine de l'aéronautique. Plusieurs études ont été faites et se poursuivent sur les matériaux sandwiches dans le but de maîtriser leurs comportements dans des environnements spécifiques.

L'optimisation fine de ces structures composites sandwiches nécessite de mettre en place des outils de modélisation du comportement mécanique de plus en plus sophistiqués et prenant en compte les spécifités de ces matériaux-structure. D'un point de vue pratique, les méthodes numériques, notamment les calculs éléments finis sont indispensables pour prédire et calculer le comportement de ces structures composites complexe dans des environnements spécifiques et variés. C'est dans cet ordre d'idée que s'insère le présent projet de thèse.

L'objectif principal de ce travail est la modélisation du comportement mécanique dans le domaine élastique des panneaux sandwiches soumis à la flexion trois points. Deux approches l'une numérique, l'autre analytique de l'homogénéisation de l'âme du sandwich permettant la détermination des neuf constantes élastiques (trois modules d'élasticités E, trois module de cisaillement G et trois coefficients de Poisson) ont été présentées. Un développement d'une solution analytique basée sur un modèle raffiné pour panneau sandwich dans le cas de chargement en flexion trois points a été proposé. Enfin, une modélisation et des simulations numériques du comportement de panneaux sandwiches à différentes densités de l'âme sollicités en flexion trois points ont été proposés et analysées. Les résultats du modèle analytique obtenus à partir de l'utilisation du code MATLAB sont ensuite corrélés avec les simulations par éléments finis développées sur le code de calcul (FEM) ANSYS. Les simulations numériques et analytiques du comportement en flexion 3 points sont validées par des résultats expérimentaux obtenus auparavant.

Le manuscrit est structuré en quatre chapitres :

Le premier chapitre intitulé « Panneaux sandwich à âme en nid d'abeille » est un rappel bibliographique concernant les panneaux sandwich à âme en nid d'abeille (définition, domaines d'utilisation, technique de fabrication, propriétés mécaniques...etc.).

Le deuxième chapitre intitulé « Homogénéisation des panneaux sandwich à âme en nid d'abeille » traite les différentes méthodes d'homogénéisations du cœur en nid d'abeille. La méthode analytique basé sur le modèle de Gibson et la méthode numériques utilisant le code de calcule par élément fini Ansys.

Le troisième chapitre intitulé « Développement d'un modèle raffiné pour panneaux sandwich à âme en nid d'abeille» regroupe le développement analytique basé sur des théories des plaques de types Kirchoff, Reddy. Mindlin et Touratier qui traite la flexion trois point.

Le quatrième chapitre intitulé « Simulation et analyse des résultats» est l'application des différents modèles analytique et numérique sur des panneaux sandwich à âme en nid d'abeille (aluminium-aluminium) de différente densités .Le modèle analytique implémenté sur Matlab est basé sur des théories des plaques de types Kirchoff, Reddy. Mindlin et Touratier. Il permet de calculer des solutions analytiques pour le comportement en flexion 3 points. Pour le modèle numérique le code de calcul par éléments finis Ansys a été utilisé pour modéliser l'essai de flexion trois point. La modélisation et la simulation en flexion 3 points de panneaux sandwiches à âme en nids d'abeilles nous a permis de comparer les résultats numériques et analytiques de la flèche (W) avec les résultats expérimentaux pour les différentes densités, afin de valider la démarche théorique suivie.

Enfin, notre travail est clôturé par une conclusion générale.

Chapitre I

Panneaux sandwichs à âme en nid d’abeille

Chapitre I

Panneaux sandwichs à âme en nid d'abeille

Ce chapitre est un rappel bibliographique sur les panneaux sandwichs à âme en nid d'abeille.

I-1 Introduction :

Les panneaux sandwichs sont aujourd'hui fréquemment employés dans la fabrication de structures complexes telles que les navires, les avions ou encore les transports terrestres. Il en existe de nombreux types, mais le principe est toujours le même: placer un matériau léger et très rigide en compression et cisaillement, l'âme, entre deux peaux supportant de grands efforts dans leur plan. De cette manière, le panneau sandwich obtenu constitue un matériau structurel à la fois léger et très raide en flexion/torsion du fait de l'utilisation optimisée de la matière.

Les matériaux constitutifs disponibles sont extrêmement variés offrant ainsi de nombreux champs d'applications aux panneaux sandwichs : panneaux de structure, d'isolation acoustique, thermique, d'absorption d'énergie (amortisseurs de chocs). Les peaux peuvent être métalliques : aluminium haute performance, titane; ou encore composites stratifiés à fibres de carbone ou de verre noyées dans une résine époxyde par exemple. Les âmes sont en général des matériaux alvéolaires comme des mousses ou des nids d'abeilles métalliques ou plastiques: mousses d'aluminium, de polyuréthane, nids d'abeilles aluminium, titane.

Un type particulier de nids d'abeilles est également très employé, il s'agit des nids d'abeilles réalisés en aluminium. Ils font l'objet de ces travaux.

L'omniprésence des structures sandwichs, ne s'explique pas seulement par leurs très bonnes qualités mécaniques. Les enjeux environnementaux et de sécurité favorisent également la diffusion de ces matériaux, la diminution des masses dans les transports présente en effet le double avantage de limiter la consommation d'énergie et l'énergie cinétique à vitesse donnée, ceci se traduit par une baisse des émissions de gaz à effet de serre et de particules et par une amélioration de la sécurité passive.

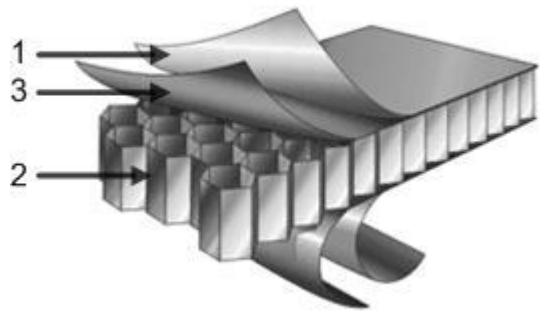
Enfin il faut signaler que leur utilisation massive est également rendue possible par une meilleure compréhension et modélisation de leur comportement mécanique. [Marguet,2007]

I-2 Définition :

Un panneau sandwich typique en nids d'abeilles se compose de deux couches minces et rigides, formants les «peaux», collées sur un noyau épais, léger et à parois minces avec une structure cellulaire plane et périodique en deux dimensions, appelé " l'âme".

Fondamentalement, un sandwich est une structure à trois couches se composant de peaux (faces) inférieure et supérieure et d'une âme intermédiaire. Aux interfaces, l'âme et les faces sont collées ensemble. Le rôle principal des peaux est de supporter les charges dans le plan tendit que le rôle principal de l'âme, est de maintenir la distance respective entre les faces, assurant de ce fait une rigidité à la flexion élevée avec un faible poids, une tâche additionnelle de l'âme peut être la reprise des forces transversales.

Les faces ou peaux et l'âme du sandwich peuvent se composer de divers matériaux ; une situation de conception courante est que les peaux soient des stratifiés en plastique renforcés par des fibres de carbone et que l'âme soit une structure régulière de cellules en nids d'abeilles en aluminium.



1-peau

2-cœur

3-interface

Figure 1-I : Panneaux sandwichs à âme en nid d'abeille

Tirant profit de leur rigidité spécifique élevée à la flexion (par masse structurale), les sandwichs sont utilisés de plus en plus fréquemment avec des faces relativement minces et des âmes de nids d'abeilles plutôt épais.

L'âme ne doit plus seulement intervenir dans le maintien de la distance entre les faces mais doit également contribuer à la rigidité globale de la structure entière.

Avec le développement des matériaux composites et de la technologie de fabrication, l'application de cette structure, efficace, a été introduite dans chaque champ possible. Les sandwichs en nids d'abeilles peuvent être optimisés (géométrie, matériaux) globalement et localement, un choix important d'âmes en nids d'abeilles est disponible ; la taille, la forme, l'épaisseur, la topologie, et le type de matériaux peuvent être optimisés en tenant compte des interactions locales et des comportements globaux conséquents, les structures cellulaires ont ainsi bénéficié de beaucoup de travaux de recherches.

I-3 Technique d'élaboration du nid d'abeille :

Le nid d'abeille est élaboré à partir de feuilles en aluminium d'une épaisseur de quelques dizaines de micromètres, le feuillard (1) (figure I.2) en aluminium est imprime avec de la colle (2), coupé en feuilles et empilé (3), cette pile est mise sous pression et sous température, puis elle est coupée en tranches suivant l'épaisseur d´désirée (4), elle est ensuite étirée jusqu'à obtention d'une structure à cellules hexagonales (5),les paramètres principaux du nid d'abeille sont la taille de la cellule, l'épaisseur de la paroi et l'angle entre les parois adjacentes, qui peut être facilement contrôlé par le déplacement de la machine dans le processus d'étirage.

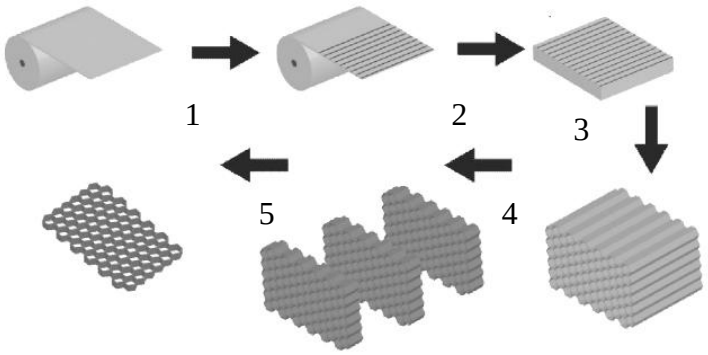


Figure 2-I : Etapes d'élaboration du nid d'abeille.

I-4 Historique des domaines d'utilisation des structures sandwichs:

Le concept sandwich est très répondu dans la nature. Les branches d'un arbre ou les os d'un squelette sont certainement de bons exemples. Ces structures répondent, naturellement, à un principe d'optimisation structurelle : usage minimum de matière pour des performances maximales. Historiquement, l'utilisation du concept de la construction type sandwich revient à Fairbairn en Angleterre en 1849. En 1924, Von T. Karman et P. Stock ont breveté un avion planeur avec un fuselage en sandwich. En suivant son prédécesseur Von Karman, Mautner a conçu un avion ayant des éléments sandwichs dans la structure des ailes. Toujours en Angleterre, la construction du sandwich a été utilisée pour la première fois dans la conception du bombardier de nuit (Mosquito) durant la seconde guerre mondiale. En 1943, Wright and Patterson a conçu et a fabriqué le fuselage du BT-15 en sandwich. Il a utilisé du polyester renforcé de fibre de verre comme matériau pour les faces associées à un cœur en nids d'abeilles. Le sandwich avec une combinaison métal-bois a été utilisé pour la première fois dans les panneaux du plus vieux Fokker : le F27. Dans cette configuration, les éléments en sandwich avaient un cœur en balsa et des peaux en aluminium. L'usage du matériau sandwich dans le projet Apollo, qui a débarqué avec succès sur la lune en 1969, a montré et mis au grand jour les grandes possibilités offertes par les structures sandwichs dans le champ d'aérospatiale. Avec l'aide de cette technologie nouvelle, il a été possible construire la capsule Apollo légère et capable de supporter les accélérations importantes subies par la structure pendant la phase de lancement. Les applications des composites pour des grandes structures comme celles de l'Airbus a commencé par la conception de l'A310. Ce dernier est le premier avion de la flotte à s'être équipé d'un gouvernail en sandwich avec un cœur en nid d'abeilles. En 1992, Bitzer de Hexcel a donné une excellente vue d'ensemble des matériaux en nids d'abeilles et leurs applications. Bitzer affirme que les matériaux sandwichs avec des cœurs en nids d'abeilles sont utilisés dans au moins un avion à moteur sur deux et que l'utilisation des matériaux sandwichs qui était seulement de 8% de la surface mouillée du Boeing 707 est passée aujourd'hui à 46% dans la conception du Boeing 757/767 et une proportion majeure de la navette spatiale est un composite sandwich en nids d'abeilles. En outre, presque la totalité de la structure d'un satellite est conçue avec un matériau sandwich. La Marine Nationale des Etats Unis utilise des panneaux sandwichs dans la construction de cloisons et hangars d'hélicoptères pour réduire le poids au-dessus de la ligne de flottaison. La Marine Royale suédoise fut la première à avoir utilisé le concept sandwich il y a vingt ans et continue à utiliser les sandwichs dans la conception de l'ensemble de ces bateaux. De la

même façon, la Marine Royale australienne utilise des matériaux composites en sandwich avec un cœur en mousse dans la construction de ses chasseurs côtiers. Depuis 1980, les matériaux sandwichs sont utilisés dans les wagons de trains et dans les structures des locomotives comme la XPT en Australie, les locomotives ETR 500 en Italie, le TGV français et la locomotive 2000 en Suisse. Le critère de conception majeur est la résistance à pression subie pendant la traversée de deux trains de grande vitesse dans un tunnel. Au Japon, les nouveaux trains Nozomi 500 utilisent un sandwich avec un cœur en nids d'abeille comme structure porteuse. En 1995, Starlinger et Reif ont rapporté cette construction du sandwich est maintenant elle est utilisée dans les autobus.

Aux Etats-Unis, approximativement 40% des ponts sont structurellement défectueux ou incapables de répondre aux demandes actuelles. La société américaine des ingénieurs des travaux publics a publié un rapport en 2005 ou elle donne la note "D" pour l'ensemble de l'infrastructure routière et ouvrages et déclare que des milliards de dollars seront exigés pour les prochaines cinq années. La moitié de ces couts seront affectés au déroutage de la circulation pendant les périodes de travaux. En utilisant des constructions composites de type sandwich, les panneaux en sandwich préfabriqués peuvent être mis en place pendant des jours, plutôt que des semaines par des méthodes conventionnelles. En Europe, COBRAE (Composite Bridge Alliance Europe) a été fondée pour mener et encourager la construction de ponts en matériaux composites dans l'Union européenne. Un autre usage majeur des matériaux composites sandwichs, pendant la dernière décennie, est les éoliennes. General Electrics Energy ont récemment déclaré qu'ils ont réalisé 6900 installations dans le monde et que le taux de croissance annuel de cette activité est de 20%.

Le futur de la construction en matériau sandwich semble, en effet, clair. Le sandwich continuera à être la structure fondamentale pour les satellites. Dans l'industrie aéronautique, le sandwich sera utilisé de plus en plus et en particulier pour les grands avions. Plusieurs pays utilisent maintenant les composites sandwichs dans la construction de coques des bateaux de leur marine. Cependant un des plus grands usages sera, selon les experts, dans le secteur du génie civil et plus particulièrement dans le domaine de la construction de ponts. A ce titre, un énorme marché existe dans les pays en voie de développement qui souhaitent construire leurs ouvrages du 21éme siècle en profitant des avantages de couts et de délais que n'offrent pas les méthodes conventionnelles. Dans le domaine de la construction maritime, le concept du sandwich n'a été utilisé que sur de petits navires mais, dans le futur, le matériau sera introduit dans une variété de bateaux plus grands comme les frégates, les destroyers, etc. La marine

norvégienne étudie actuellement la possibilité de construire une nouvelle génération de bateaux-torpilleurs en sandwich.

Quelques-uns des avantages de cette construction sont: un bâtiment plus léger, une plus grande vitesse opérationnelle, une plus grande portée, un moindre cout de fonctionnement. On ne peut pas ignorer ces avantages même si le cout initial de la conception peut, pour quelques bâtiments, être quelque peu plus élevé que pour un navire avec une coque en acier ou en aluminium. Puisque le cout de fonctionnement sera bien plus bas pour un bâtiment en sandwich, les différences avec le cout initial seront rattrapées à long terme. Ceci est bien sur du aux économies de fuel, mais aussi au moindre cout de maintenance de la coque (corrosion et peinture).

Dans le domaine de l'automobi1e, les structures sandwiches sont aussi bien utilisées au niveau de la carrosserie que du châssis pour diminuer le poids d'une part et d'autre part pour assurer une bonne résistance à la fatigue du fait des vibrations mécaniques.

I-5 Sollicitations mécaniques des panneaux sandwiches :

Un sandwich peut être soumis aux sollicitations mécaniques données par la figure suivante:



- Un moment de flexion M.
- Un effort normal N.
- Un effort tranchant T.

Figure 3-I : Différentes sollicitations des panneaux sandwichs.

Ces derniers provoquent différents modes de rupture:

- Flambement généralisé des peaux:

Le flambement généralisé survient quand les contraintes dans les peaux et dans l'âme sont inférieures aux résistances à la rupture. La charge qui cause le flambement du sandwich dépend de paramètres tels que les dimensions dans le plan de la poutre et les conditions aux limites, qui ne peuvent être modifiées que partiellement lors de la conception. D'autres grandeurs, également importantes dans la définition de la charge de flambement, dépendent, directement du type de sandwich, comme par exemple la rigidité de f1xion du sandwich, l'épaisseur des peaux, les propriétés élastiques des peaux, l'épaisseur de l'âme, ou le module de cisaillement de l'âme.

Si l'on craint un flambement généralisé, on peut utiliser des peaux ayant un module d'élasticité plus élevé, et pour l'âme un matériau avec un module cisaillement plus élevé. [Keskes, 2007]

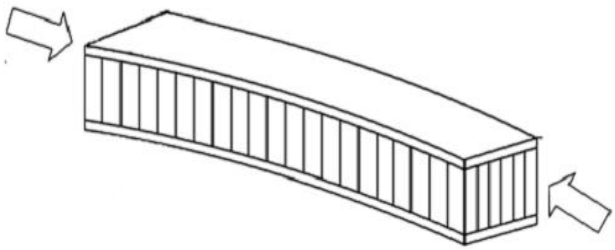


Figure 4-I : Flambement généralisé des peaux.

- Rupture des peaux en traction ou en compression :

Il s'agit du cas où les contraintes dans les peaux sont supérieures aux contraintes admissibles pour le matériau constituant les peaux.

Ce phénomène peut être évité en utilisant un matériau dont les contraintes à la rupture sont plus élevées, en augmentant 1'épaisseur des peaux, ce qui réduit les contraintes appliquées, ou en augmentant l'épaisseur de l'âme ce qui permet également de réduire les contraintes dans la peau.

La manière la plus adéquate de résoudre le problème est souvent d'augmenter l'épaisseur de l'âme par contre une âme de plus forte densité (plus rigide) n'affecte pas les contraintes dans la peau.



Figure 5-I : Rupture des peaux en traction ou en compression.

- Modes locaux de rupture :

L'indentation locale est un mode localisé de rupture dû à une concentration de contraintes résultant, soit de l'application d'une charge localisée soit de la position d'un appui de type ponctuel ou linéique.

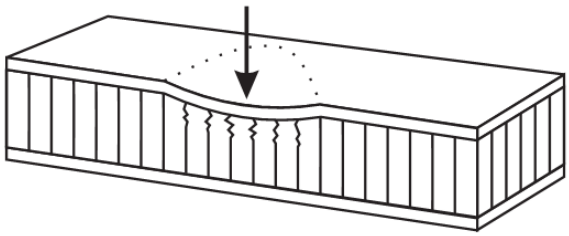


Figure 6-I: Modes locaux de rupture.

- Rupture de l'âme en cisaillement:

Si la contrainte de cisaillement (prépondérante dans l'âme) dépasse la résistance au cisaillement du matériau de l'âme, il y a rupture de l'âme.

Si l'on se trouve dans ce cas, on peut soit utiliser un matériau pour l'âme qui possède une résistance au cisaillement plus élevée, soit augmenter l'épaisseur de l'âme.

Par contre, utiliser un matériau différent pour les peaux, ou changer leur épaisseur n'aura pas d'effet. [Keskes, 2007]

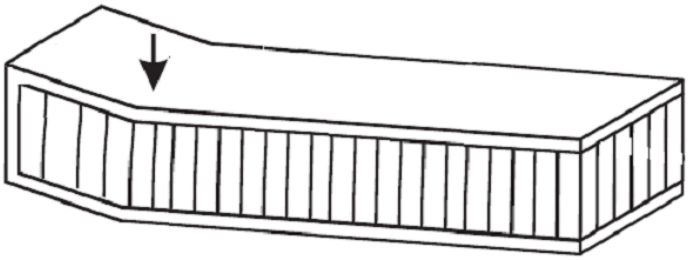


Figure 7-I: Rupture de l'âme en cisaillement.

- Flambement généralisé de l'âme ou crimping :

Si le rapport longueur/épaisseur est relativement fiable et que la rigidité de cisaillement est négligeable devant la rigidité de flexion, le flambement généralisé prend la forme du flambement de l'âme.

Le flambement de l'âme ne dépend pratiquement pas des propriétés des peaux par contre, il augmente de façon linéaire avec 1'épaisseur de l'âme et le module de cisaillement dans l'âme.

Pour augmenter la résistance a cette charge critique il faut donc soit augmenter 1'épaisseur de l'âme, soit utiliser une âme avec un module de cisaillement plus élevé. [Keskes, 2007]

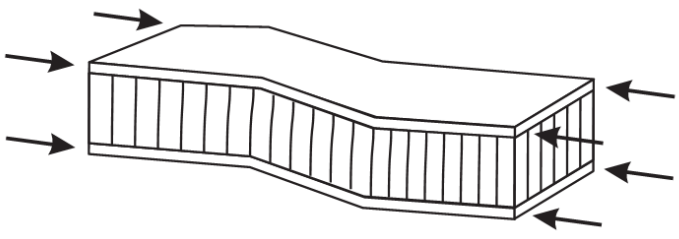


Figure 8-I: Flambement généralisé de l'âme ou crimping.

- Flambement localisé, « wrinkling » ou « dimpling » :

Les peaux, considérées par elles-mêmes, sans connexion avec l'âme, flambent très facilement a cause de leur faible épaisseur C'est l'âme qui empêche leur flambement Cependant, si on atteint les contraintes limites, il se peut que l'âme ne soit plus capable d'empêcher le flambement

Dans ce cas, le flambement localisé des peaux, ou « wrinkling » se produit.

Contrairement au flambement généralisé, le flambement localisé peut prendre des configurations différentes qui ne dépendent ni de la géométrie de la structure ni des conditions aux limites Par contre, il est influencé par les modules élastiques des peaux et de l'âme et le module de cisaillement dans l'âme. [Keskes, 2007]

Si l'on craint un flambement localisé de la peau, on peut soit utiliser des matériaux avec un module élastique plus élevé, soit utiliser pour l'âme un matériau présentant des propriétés élastiques plus élevées. [Teti, 1989], [Cetim, 1991], [Manet, 1998]

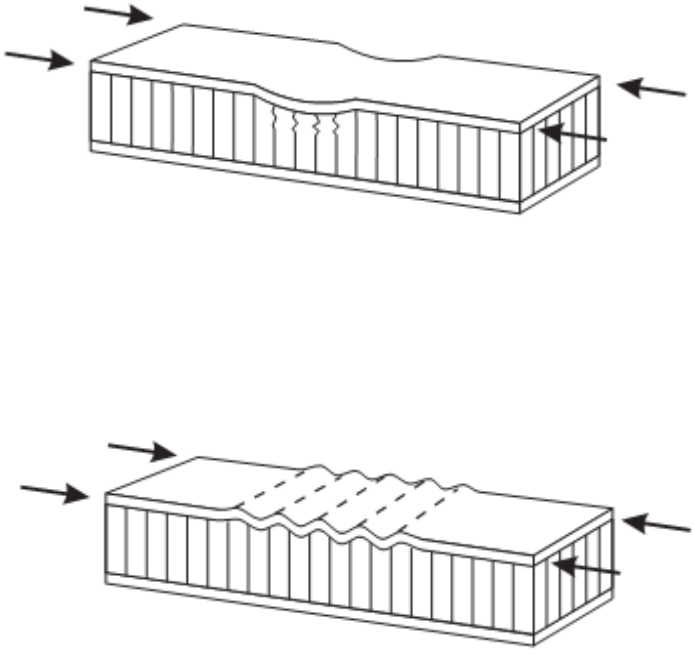


Figure 9-I: Flambement localisé, « wrinkling » ou « dimpling ».

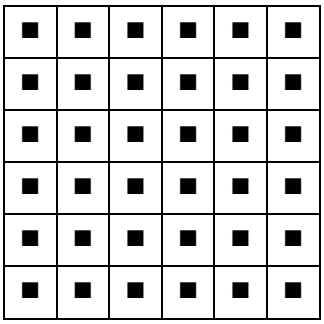
I-6 Propriétés mécaniques des panneaux sandwichs :

Une conception optimale nécessite une détermination précise des caractéristiques mécaniques du matériau, dans le cas de matériaux composites, la caractérisation est beaucoup plus complexe que dans le cas de matériaux isotropes de par la nature même de ces matériaux il est souvent possible de connaître les propriétés des constituants pris séparément à partir des caractéristiques fournisseurs ou d'une base de données matériaux.

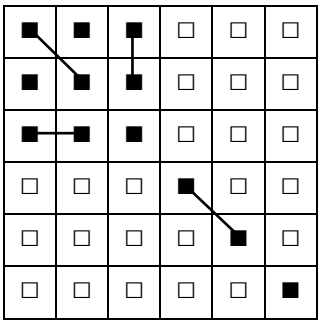
Un matériau composite est constitué de l'assemblage de deux matériaux de natures différentes, se complétant et permettant d'obtenir un matériau dont l'ensemble des performances est supérieur à celui des composants pris séparément, des techniques d'homogénéisations permettent alors de déterminer les propriétés du matériau composite idéalisé en fonction de l'architecture de la fraction volumique de chaque constituant, grâce aux méthodes de caractérisation mécanique destructives ou non destructives appliquées, directement sur le matériau composite, les informations recueillies sont plus précises. [Berthelot, 1996]

Dans le cas le plus général, cas d'un matériau à comportement anisotrope, la matrice de rigidité et la matrice de souplesse sont déterminées chacune par 21 constantes indépendantes, ce cas correspond à un matériau possédant une seule propriété de symétrie (centre de symétrie), un tel matériau est appelé matériau à symétrie triclinique, la plupart des matériaux anisotropes possèdent une structure présentant une ou plusieurs symétries (axe ou plan de symétrie), les propriétés de symétrie géométrique réduisent le nombre de constantes indépendantes nécessaires pour décrire le comportement du matériau considéré.

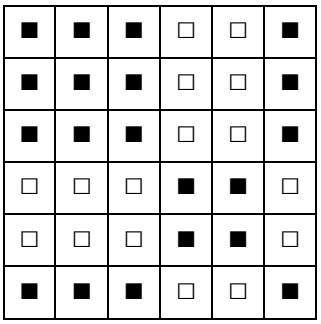
Les matrices suivantes représentent la relation entre six symétries géométriques des matériaux, le nombre de constantes indépendantes de la matrice de rigidité et la disposition des composantes nulles et non nulles dans cette matrice [Royei, 1996].



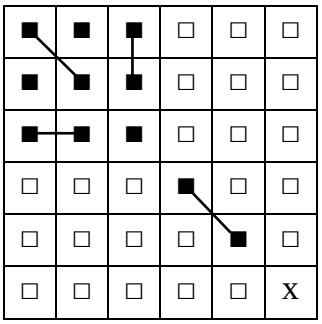
Triclinique : 21 constantes



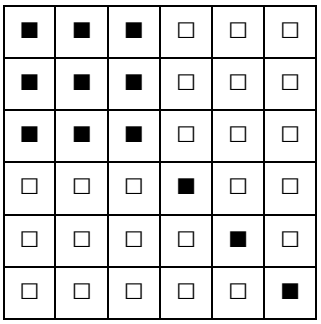
Tétragonal : 6 constantes



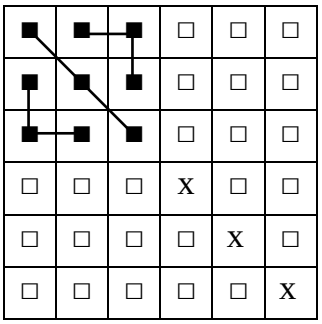
Monoclinique : 13 constantes



Hexagonal : 5 constantes



Orthorhombique : 9 constantes



Isotrope : 2 constantes

■ : Composante non nulle;

□ : Composante nulle ;

x : Composante égale à $(C_{11}-C_{12})/2$

■—■ : Composante égale ;

Figure 10-I: Matrices de rigidités des différents types de matériaux.

I-7 Descriptions des différents types de matériaux :

Un matériau monoclinique est un matériau qui possède un plan de symétrie. La forme de la matrice de rigidité ou de souplesse doit être telle qu'un changement de base effectué par symétrie par rapport à ce plan ne modifie pas la matrice.

Un matériau orthorhombique, ou orthotrope possède trois plans de symétrie perpendiculaires deux à deux; il est à noter que l'existence de deux plans de symétrie perpendiculaires implique l'existence du troisième, la forme de la matrice de rigidité est déduite en ajoutant au matériau monoclinique un plan de symétrie perpendiculaire au précédent.

Un matériau tétragonal, ou quasi isotrope transverse possède un plan de symétrie de plus de (45°) que le matériau orthotrope.

Un matériau hexagonal se comporte comme un matériau orthotrope possédant de plus un axe de révolution, ce matériau est alors appelé matériau orthotrope de révolution ou isotrope transverse.

Enfin, un matériau est isotrope si ses propriétés sont indépendantes du choix des axes de référence.

I-8 Propriétés mécaniques de l'âme :

La détermination des propriétés mécaniques est la première étape dans la compréhension du comportement des matériaux sandwichs.

Dans le cas général l'âme du sandwich peut être constituée en métal ou en matériaux composites unidirectionnels, dans la plupart des cas, le comportement d'un matériau composite à symétrie orthorhombique suffit pour représenter le comportement du matériau, la matrice de rigidité, ou de souplesse est caractérisée par neuf termes indépendants.

Ces neuf termes sont les constantes de l'ingénieur:

Trois modules d'élasticité.

Trois modules de cisaillement.

Trois coefficients de Poisson dans chaque direction.

La matrice de rigidité [C_{ij}] d'un matériau orthotrope est de la forme suivante:

$$\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \sigma_4\\ \sigma_5\\ \sigma_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0\\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0\\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \gamma_{23}\\ \gamma_{13}\\ \gamma_{12}\end{bmatrix}$$

La matrice de souplesse du matériau orthotrope exprimée avec les neuf constantes de l'ingénieur prend la forme suivante :

$$[S_{ij}]=\begin{bmatrix}\frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0\\ -\frac{\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0\\ -\frac{\nu_{31}}{E_3} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}}\end{bmatrix}$$

Cette matrice est aussi symétrique, ce qui implique la relation de symétrie : $\frac{\nu_{ij}}{E_i}=\frac{\nu_{ji}}{E_j}$

Le nid d'abeilles est assimilable à un matériau orthotrope de par ses propriétés directionnelles et ses plans de symétrie. Son homogénéisation passe tout d'abord par la détermination des constantes élastiques de l'ingénieur.

Dans notre cas le cœur du sandwich est en nids d'abeilles, pour le caractériser, il faut donc déterminer les constantes de l'ingénieur:

- Les modules d'élasticité : *Ex, Ey, Ez.*
- Les 6 coefficients de Poisson : v_{xy}, v_{yz}, v_{xz}, v_{yx}, v_{zy}, v_{zx}.
- Les 6 modules de cisaillement : *Gxy, Gyz, Gxz, Gyx, Gzy, Gzx.*

L'estimation de ce comportement consiste à s'appuyer la structure des nids d'abeilles pour réaliser des calculs d'homogénéisation, on peut alors prédire de nombreux coefficients élastiques [Gibson, 1988].

Toutefois, dans le cas général, les modules de cisaillement peuvent seulement être bornés avec ce type d'approche [Grédiac, 1993].

La détermination des caractéristiques mécaniques peut être effectuée grâce à deux méthodes différentes

- la modélisation analytique [Kelsey, 1958], [Grédiac, 1993], [Gibson, 1988],
- la modélisation numérique

En comparant les résultats obtenus à partir de ces deux méthodes, on peut espérer déterminer avec précision les constantes de l'ingénieur du nida.

I-9 Propriétés mécaniques des peaux:

La peau d'un sandwich peut être un matériau orthotrope (comme le cas précédent) ou un matériau isotrope.

La matrice de rigidité d'un matériau isotrope transverse a la forme suivante :

$$[C_{ij}]=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22}-C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

La matrice de souplesse d'un matériau isotrope transverse a la forme suivante :

$$[S_{ij}]=\begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_{23})}{E_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}$$

Chapitre II

Homogénéisation des panneaux sandwich à âme en nid d’abeille

Chapitre II

Homogénéisation des panneaux sandwichs à âme en nid d'abeille

Ce chapitre regroupe différentes méthodes d'homogénéisations, analytique et numérique du cœur en nid d'abeille.

II-1 Introduction :

Les matériaux sandwichs à structure nid d'abeilles sont un bon compromis entre résistance et légèreté. Etant donné le coût de l'utilisation de ces matériaux pour des prototypes, il est intéressant de connaître leurs propriétés mécaniques pour prédire et calculer leur comportement dans des environnements spécifiques et variés.

L'homogénéisation passe tout d'abord par la détermination des constantes élastiques de l'ingénieur qui sont les modules d'élasticité, les coefficients de Poisson et les modules de cisaillement.

La connaissance du comportement mécanique des âmes est indispensable lors de la phase de conception des structures sandwichs. L'estimation de ce comportement consiste à s'appuyer sur la structure répétitive des nids d'abeilles pour réaliser des calculs d'homogénéisation. On peut alors prédire de nombreux coefficients élastiques, [Gibson, 1991]. Toutefois, dans le cas général, les modules de cisaillement peuvent seulement être bornés avec ce type d'approche [Grédiac, 1993].

Les couches d'un sandwich peuvent être constituées du matériau isotrope ou orthotrope. On peut avoir les propriétés mécaniques des matériaux isotropes directement du fournisseur ou par des essais de traction, par contre pour les propriétés mécaniques des matériaux orthotropes on peut avoir les propriétés du fournisseur et on peut déterminer les restes par homogénéisation, puis on choisit les propriétés les plus intéressantes. [Gibson, 1988]

Apres avoir déterminé les propriétés mécaniques de la peau et du cœur on peut déterminer les propriétés mécaniques du sandwich entier.

II-2 Concept d'homogénéisation :

Le concept d'homogénéisation consiste à remplacer un matériau réel non homogène par un matériau fictif homogène avec des propriétés macroscopiques équivalentes. Ces propriétés peuvent être utilisées dans des modèles de calculs où les effets locaux, phénomènes qui interviennent à l'échelle microstructurale, peuvent être négligés. C'est typiquement le cas quand on considère le matériau composite sans les effets locaux dans un but d'exploiter tout le potentiel de la structure. Les procédures d'homogénéisation peuvent être appliquées pour déterminer une large gamme de propriétés physiques qui peuvent être mécanique, électrique, acoustique, thermique et autres.

Dans sa forme la plus élémentaire, une procédure d'homogénéisation consiste en une série d'expériences (de simulations) réalisées sur le plus petit volume élémentaire représentatif (VER) et d'un modèle mathématique permettant la détermination des propriétés du matériau homogène équivalent. Dans le cas d'une structure répétitive, comme le panneau en nids d'abeilles, le VER peut être choisi comme étant la cellule unitaire (avec ses plaques de couverture) et le reste de la structure est modélisé à travers l'adoption de conditions aux limites appropriées. Le chargement sur la cellule doit être considéré de manière que tous les modes de déformation en question soient pris en compte. Des restrictions sur le chargement doivent être appliquées de manière à ce que les deux faces opposées de la cellule se déforment de la même manière, et que le vecteur de traction agissant sur les faces opposées du VER soit le même en module et direction mais de sens opposé. La première restriction est une condition aux limites périodiques garantissant la continuité d'une cellule par rapport à une cellule voisine, alors que la deuxième condition assure le respect de l'équilibre entre les cellules.

Il est clair, que la géométrie de VER est compliquée pour permettre une solution analytique du problème posé par les équations de l'élasticité et des conditions aux limites déjà mentionnées. Toutefois, une procédure numérique peut être appliquée pour ce problème. La méthode des éléments finis (MEF) est généralement la plus adaptée à ce contexte. En plus, les données utilisées dans la MEF peuvent être exploitées dans le schéma de calcul des propriétés moyennes du matériau homogène équivalent.

Il existe une multitude de méthodes de calcul des valeurs moyennes des caractéristiques homogènes du matériau. Par exemple, les propriétés du matériau homogène peuvent être déterminées de façon que l'énergie de déformation emmagasinée soit la même que celle dans le matériau non homogène. Une autre manière serait de calculer la valeur

moyenne du champ de contraintes dans la cellule de base et de déterminer les propriétés du matériau homogène permettant de recréer ce même champ de contraintes dans le matériau homogène équivalent. Si les dimensions de la cellule sont effectivement petites devant les dimensions globales de la partie considérée, les résultats des divers schémas sont souvent les mêmes.[Jrad]

II-3 Homogénéisation du nid d'abeilles :

Pour caractériser le nida assimilé à un matériau orthotrope, il faut déterminer ces constantes élastiques indépendantes.

Les calculs d'homogénéisation du nida s'appuient sur sa structure répétitive. La caractérisation peut se faire grâce à la modélisation analytique et numérique.

La modélisation analytique s'appuie sur des modèles mathématiques en faisant des hypothèses simplificatrices, elle permet cependant de décrire le comportement élastique du nida et de montrer le rôle puis l'influence des paramètres géométriques.

La modélisation numérique utilise la démarche de calcul par éléments finis (E.F) ; elle est définie par les étapes suivantes :

- Identification du Volume Elémentaire Représentatif (VER),
- Réduction du VER en tenant compte des symétries,
- Maillage du VER en utilisant des types et des nombres d'éléments judicieusement choisis,
- Application des conditions aux limites en termes de déplacements et d'efforts,
- Résolution des équations d'équilibre :$[K] \quad \{U\} = \{F\}$
  Avec $[K]$ la matrice de rigidité (assemblée), $\{U\}$ le vecteur déplacement, $\{F\}$ le vecteur force,
- Traitement des résultats obtenus.

II-4 Géométrie et notations :

Il est à noter que suivant les littératures, les dénominations et indices peuvent varier. La géométrie ainsi que les notations utilisées par la suite sont détaillées ci-après.

- Les modules d'élasticité : E_x où X_1 est la direction de traction
- Les coefficients de Poisson : v_{xy} où X_1 est la direction de traction et X_2 est la direction de contraction.
- Les modules de cisaillement :G_{xy} module de cisaillement dans le plan X_1X_2.

Les modules sont calculés dans le repère (X_1, X_2, X_3). Les résultats obtenus seront donnés dans le repère de la figure II-1.

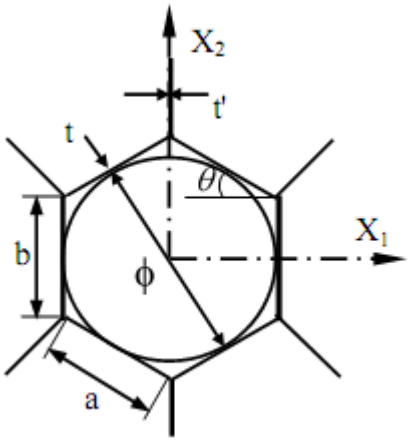


Figure 1-II : Géométrie d'une cellule en nid d'abeille vue de dessus.

Un nid d'abeille peut être caractérisé par un angle de cellule et quatre paramètres définis à partir des caractéristiques données dans le tableau suivant :

Paramètre	Définition
θ	Angle de la cellule
ϕ	Diamètre de la cellule
b	Longueur de la paroi centrale
a	Longueur de la paroi inclinée
t'	Epaisseur de la paroi centrale
t	Epaisseur de la paroi inclinée
h	Hauteur du nid d'abeilles

Tableau 1-II : Paramètres géométriques d'une cellule en nida

II-5 Principales caractéristiques élastiques du nid d'abeilles :

Le nid d'abeilles peut être assimilé à un matériau orthotrope. Pour le caractériser, il faut connaître les modules de l'ingénieur :

- Les 3 modules d'élasticité.
- Les 6 coefficients de Poisson
- Les 6 modules de cisaillement.

La détermination de ces caractéristiques mécaniques peut être effectuée grâce à 2 méthodes différentes :

- la modélisation analytique
- la modélisation numérique

En comparant les résultats obtenus à partir de ces deux méthodes, on peut approximer les constantes de l'ingénieur du nida.

II-6 Différentes approches existantes dans la littérature pour la détermination des caractéristiques élastiques :

Trois constants élastiques caractérisent principalement le comportement du nid d'abeilles, ce sont le module d'élasticité E_z dans la direction perpendiculaire au plan, et les deux modules transverses de cisaillement G_{xz} et G_{yz} (hors du plan), les autres modules de cisaillement sont généralement faibles, de plus, il s'avère que les nids d'abeilles n'ont pas de coefficients de Poisson connu [Hexcel 1994].

1. Une première solution proposée par Bitzer est de prendre les deux modules d'élasticité dans le plan (E_x-E_y) égaux à un pour cent du module de la troisième direction. Le module de cisaillement G_{xy} égal à un pour cent de la moyenne de G_{xz} et G_{yz} et tous les coefficients de poisson égaux à 0.1. [Bitzer, 1994]

2. Une deuxième solution proposée par Chamis est de réaliser un modèle éléments finis tridimensionnel détaillé de la structure nids d'abeilles dans l'objectif de déterminer les propriétés équivalentes du cœur avec des chargements spécifiques. [Chamis 1988]

3. Une troisième solution proposée par [Grédiac, 1993], [Mistou, 2000] est d'effectuer la même analyse que celle proposée par [Chamis 1998] mais sur une seule cellule de base et d'en déduire les modules transverses de cisaillement équivalents.

4. Une quatrième solution est celle proposé par Gibson .Elle s'appuie sur la théorie de l'élasticité pour les différents modules et coefficients des nids d'abeilles en fonction des paramètres géométrique et mécanique. [Gibson, 1988], [Gibson, 1991].

II-7 Approches analytiques :

La modélisation analytique s'appuie fondamentalement sur des modèles mathématiques. Elle se base principalement, vu la complexité du problème, sur des hypothèses simplificatrices. Cette approche a un intérêt particulier puisqu'elle permet de montrer le rôle de chaque paramètre de conception (*a*,*b*,*h*,*t*). Nous allons exposer dans cette partie, un modèle très populaire celui de Gibson.

II-7-1 Modèles de Gibson:

Le modèle de Gibson s'appuie sur les équations de l'élasticité pour déterminer les principaux modules et coefficients du nida en fonction de leurs paramètres géométriques.

Les propriétés sont définies dans le plan (X_1, X_2) et hors plan.

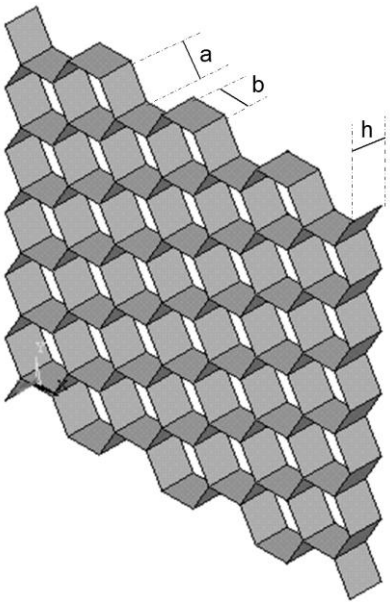


Figure 2-II : Vue en perspective du nid d'abeilles.

II-7-1-1 Propriétés dans le plan X_1X_2:

L'hypothèse introduite par Gibson : les déplacements sont uniquement dus à la flexion élastique des parois des cellules et que les effets de compression et de traction sont négligeables. Les propriétés concernées sont les suivantes :E_x,E_y,G_{xy} et les coefficients de Poisson v_{xy} et v_{yx}.

II-7-1-1-1 Calcul de E_x :

Le module d'Young E_x est calculé en exerçant une pression suivant X_1 qui induit un effort P suivant l'axe X_1et donc un moment de flexion M_x.

On considère le clinquant comme une poutre de longueur a, d'épaisseur t (Figure 19), de profondeur h et de module d'Young E_0 [Gibson, 1988], [Elspass, 1990], [Gibson, 1991].

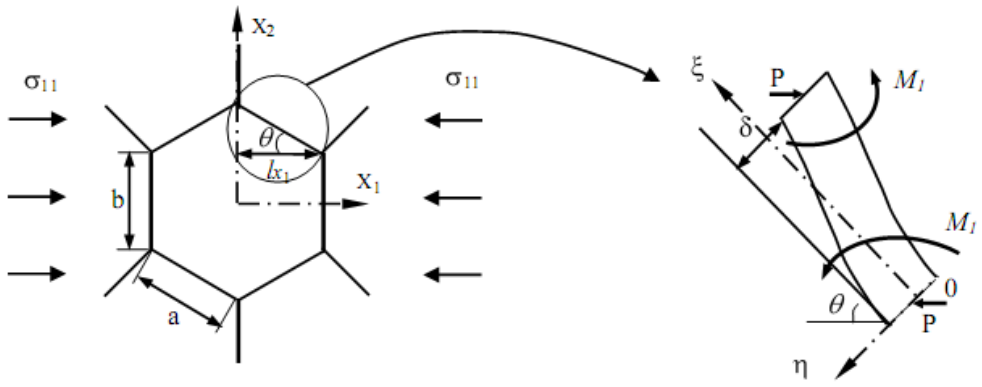


Figure 3-II: Déformation des cellules par flexion des clinquants sous une charge dirigée suivantX_1.

L'étude de la poutre permet d'obtenir l'équation du moment de flexion dans le repère local (η, ξ) tel que :

$$M_1 = P.sin\theta\left(\frac{a}{2} - \xi\right) \qquad (1-\text{II})$$

$0 \leq \xi \leq a$

L'expression de la déformée $\eta(\xi)$peut être obtenue par intégration de la relation.

$$E_0.I\frac{d^2\eta(\xi)}{d\xi^2} = P.sin\theta\left(\frac{a}{2} - \xi\right) \qquad (2-\text{II})$$

Une double intégration, et la condition aux limites

$$\eta(0) = 0 \qquad (3-\text{II})$$

$$\frac{d\eta(0)}{d\xi} = 0 \qquad (4-\text{II})$$

Permettent d'obtenir :

$$E_0 I\eta(\xi) = P.sin\theta\left(\frac{-\xi^3}{6} + \frac{a}{4}\xi^2\right) \qquad (5-\text{II})$$

Le module de Young E_x est défini en utilisant les relations suivantes :

$$E_x = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} \qquad (6-\text{II})$$

Avec

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l_{x_1}}{l_{x_1}} = \frac{\delta.sin\theta}{a.cos\theta} \qquad (7-\text{II})$$

$$\delta = \eta(a) = \frac{P.sin\theta.a^3}{12.E_0.I} \qquad (8-\text{II})$$

La déformation ε_x s'écrit :

$$\varepsilon_x = \frac{P.a^2}{12.E_0.I} \times \frac{sin^2\theta}{cos\theta} \qquad (9-\text{II})$$

Avec

$$I = \frac{h.t^3}{12} \qquad (10-\text{II})$$

$$P = \sigma_x - (b + a.sin\theta).h \qquad (11-\text{II})$$

Le module d'Young E_x devient :

$$E_x = E_0 \left(\frac{t}{a}\right)^3 . \frac{cos}{\left(\frac{b}{a} + sin\theta\right) . sin^2\theta} \qquad (12 - II)$$

II-7-1-1-2 Calcule de E_y :

Le module d'Young E_y est calculé en exerçant une pression suivant X_2 qui induit un effort W suivant l'axe X_2 et donc un moment de flexion M_2.

On considère comme précédemment le clinquant comme une poutre de longueur a, d'épaisseur t (Figure II-4), de profondeur *h* et de module d'Young E_0.

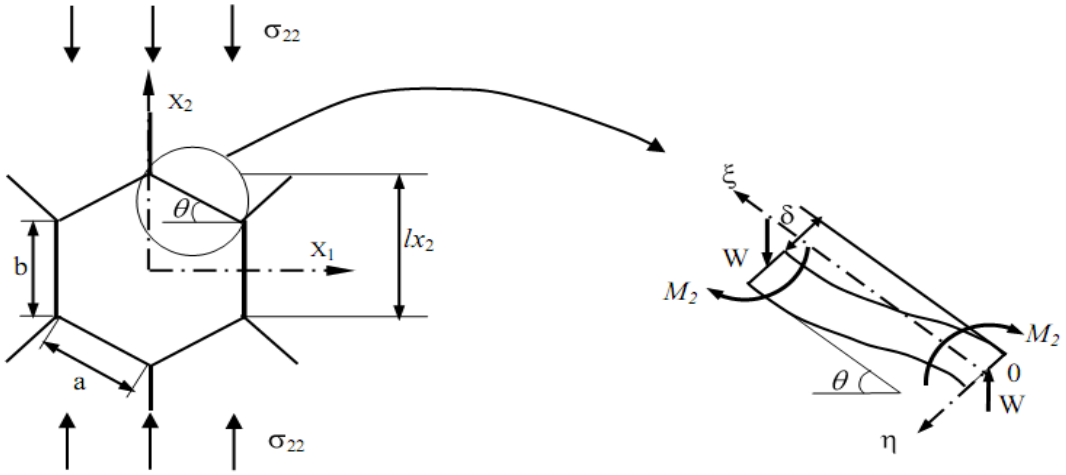


Figure 4-II: Déformation des cellules par flexion des clinquants sous une charge dirigée suivant X_2.

L'étude de la poutre permet d'obtenir l'équation du moment de flexion dans le repère local (η, ξ) tel que :

$$M_1 = -W.cos\theta \left(\frac{a}{2} - \xi\right) \qquad (13 - II)$$

$0 \leq \xi \leq a$

L'expression de la déformée $\eta(\xi)$ peut être obtenue par intégration de la relation (14-II).

$$E_0.I\frac{d^2\eta(\xi)}{d\xi^2} = W.cos\theta\left(\frac{a}{2}-\xi\right) \quad (14-\text{II})$$

Une double intégration, et le condition aux limites $\eta(0)=0$,$\frac{d\eta(0)}{d\xi}=0$ permettent d'obtenir :

$$E_0 I\eta(\xi) = W.cos\theta\left(\frac{-\xi^3}{6}+\frac{a}{4}\xi^2\right) \quad (15-\text{II})$$

Le module de Young E_y est défini en utilisant les relations suivantes :

$$E_y = \frac{\sigma_y}{\varepsilon_y} \quad (16-\text{II})$$

Avec

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta l_{x_2}}{l_{x_2}} = \frac{\delta.cos\theta}{b+a.sin\theta} \quad (17-\text{II})$$

$$\delta = \eta(a) = \frac{w.cod\theta.a^3}{12.E_0.I} \quad (18-\text{II})$$

La déformation ε_y s'écrit :

$$\varepsilon_y = \frac{W.a^2}{12.E_0.I}\times\frac{cos^2\theta}{b+a.sin\theta} \quad (19-\text{II})$$

Avec :

$$I = \frac{h.t^3}{12} \quad (20-\text{II})$$

Et:

$$W = \sigma_y.a.cos\theta.h \quad (21-\text{II})$$

Le module d'Young E_y devient :

$$E_y = E_0\left(\frac{t}{a}\right)^3.\frac{\frac{b}{a}+sin\theta}{cos^3\theta} \quad (22-\text{II})$$

Les coefficients de poisson sont calculés de la manière suivante :

$$\nu_{yx} = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y} \qquad (23-\text{II})$$

$$\nu_{yx} = \frac{\left(\frac{b}{a} + sin\theta\right).sin\theta}{cos^2\theta} \qquad (24-\text{II})$$

Ou : $P.cos\theta = -Wsin\theta$

$$\nu_{xy} = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \qquad (25-\text{II})$$

$$\nu_{xy} = \frac{cos^2\theta}{\left(\frac{b}{a} + sin\theta\right).sin\theta} \qquad (26-\text{II})$$

Remarque : On peut aussi déterminer ν_{yx} avec la relation de réciprocité à savoir :

$$E_x.\nu_{yx} = E_y.\nu_{xy}$$
$$= E_0\left(\frac{t}{a}\right)^3.\frac{1}{sin\theta.cos\theta} \qquad (27-\text{II})$$

II-7-1-1-3 Calcul de G_{xy} :

Le module de cisaillement dans le plan (X_1, X_2) peut être calculé à partir du schéma de Figure 5-II.

On considère que les points A, B, C n'ont pas de mouvements relatifs quand on exerce un état de cisaillement sur le nida.

A cause de la symétrie la déviation U_s est uniquement due à la flexion et à la rotation du clinquant (rotation d'angle φ) autour de B [Gibson, 1988].

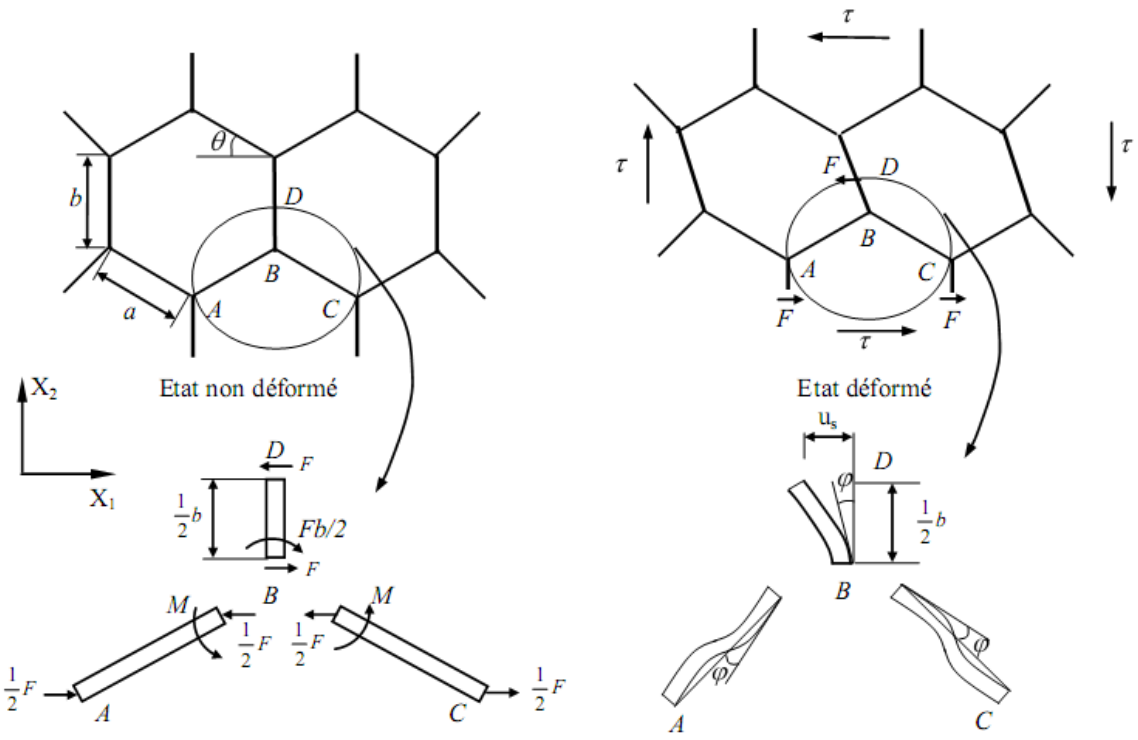


Figure 5-II : Déformation des cellules par flexion et rotation dans le plan(X_1, X_2).

La déviation $U_s$est alors de la forme :

$$U_s = \frac{1}{2}\,.\varphi.b + \frac{F.\left(\frac{b}{2}\right)^3}{3.E_0.I} \qquad (28-\text{II})$$

Avec I moment d'inertie suivant X_3du clinquant central BD :

$$I = \frac{ht^3}{12} \qquad (29-\text{II})$$

En écrivant que la somme des moments au point B est nulle, on en déduit le moment M au niveau de AB et BC :

$$M = \frac{F.b}{4} \qquad (30-\text{II})$$

On déduit l'angle φ

$$\varphi = \tan\varphi = \frac{\delta}{a} \qquad (31-\text{II})$$

Avec

$$\delta = \frac{M.a^2}{6.E_0 I'} \qquad (32-\text{II})$$

I' est le moment d'inertie des clinquants inclinés AB et BC :

$$I' = \frac{ht^3}{12} \qquad (33-\text{II})$$

D'où

$$\varphi = \frac{F.a.b}{24.E_0 I'} \qquad (34-\text{II})$$

En remplaçant φ dans l'expression de U_s, on obtient :

$$U_s = \frac{F.b^2}{48.E_0.I'}.\left(\frac{a}{I'} + \frac{2b}{I}\right) \qquad (35-\text{II})$$

La relation de comportement en cisaillement s'écrit :

$$G_{xy} = \frac{\tau}{\gamma} \qquad (36-\text{II})$$

Avec

$$\tau = \frac{F}{2.a.cos\theta.h} \qquad (37-\text{II})$$

Et

$$\gamma = \frac{2.U_s}{b + a.sin\theta} \qquad (38-\text{II})$$

On obtient l'expression de G_{xy} :

$$G_{xy} = E_0\left(\frac{t}{a}\right)^3.\frac{\frac{b}{a} + sin\theta}{\left(\frac{b}{a}\right)^2.\left(1+\frac{2b}{a}\right).cos\theta} \qquad (39-\text{II})$$

II-7-1-2 Propriétés hors du plan (X_1, X_2) :

Ces propriétés sont intéressantes et jouent un rôle important dans les caractéristiques mécaniques des panneaux sandwiches une fois le nida et les peaux assemblées. Les cinq constantes (E_z, v_{xz}, v_{yz}, G_{xz}, G_{yz}) sont nécessaires pour décrire les déformations hors du plan.

II-7-1-2-1-Détermination du module E_z :

Ce module est donné par la relation suivante :

$$E_z = E_0 . \frac{\text{Section de la la cellule}}{2.\text{Surface de l'hexagone}} \qquad (40-\text{II})$$

$$E_z = E_0 \left(\frac{t}{a}\right)^3 . \frac{\frac{b}{a} + sin\theta}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 . \left(1 + \frac{2b}{a}\right) . cos\theta} \qquad (41-\text{II})$$

II-7-1-2-2- Détermination des coefficients de Poisson v_{xz}, v_{yz} :

Les coefficients de Poisson v_{zx}, v_{zy} sont supposés égaux à ν le coefficient de Poisson du matériau constituant le feuillard [Gibson, 1988] (cas de la traction suivant l'axeX_3).

$$v_{zx} = v_{zy} = \nu \qquad (42-\text{II})$$

On déduit les deux autres coefficients v_{xy} et v_{yz} grâce à la relation de réciprocité :

$$v_{xz} = \frac{E_x}{E_z} v_{zx} \qquad (43-\text{II})$$

$$v_{yz} = \frac{E_y}{E_z} v_{zy} \qquad (44-\text{II})$$

II-7-1-2-3 Détermination des modules de cisaillement transverse G_{yz} :

La tâche pour déterminer les modules de cisaillement est difficile, car la distribution des contraintes est complexe. Les faces sur lesquelles on applique un cisaillement ne sont plus planes après déformation. On peut cependant utiliser des méthodes énergétiques pour borner ces modules. Cette approche initiée par Kelsey s'est développée avec les approches micro-macro. [Kelsey, 1958]

Rappelons ici, les théorèmes des bornes :

Le principe des bornes est basé sur le concept de l'énergie minimale.

Borne Supérieure : Pour déterminer la borne supérieure, on utilise le principe du travail maximal. Il indique que l'énergie de déformation calculée à partir d'un champ de déplacement virtuel compatible avec les conditions aux limites est supérieure à l'énergie utilisée par le champ de déplacement réel.

Borne inférieure : L'énergie de déformation calculée à partir d'un champ de contraintes statiquement admissible (continu et vérifiant les conditions de bords) est inférieure à l'énergie de déformation obtenue par un champ de contraintes réelles.

II-7-1-2-3-a Détermination de la borne supérieure :

$$\frac{1}{2} G_{jz} . \gamma^2{}_{jz} . V \leq \frac{1}{2} \sum_i G . \gamma_i^2 . V_i \qquad (45 - \text{II})$$

J=x,y i =nombre de paroi.

G : le module de cisaillement du matériau constituant les parois.

V : volume de l'hexagone.

Dans notre cas, on peut écrire :

$$\frac{1}{2} G_{jz} . \gamma^2{}_{jz} . S . h \leq \frac{1}{2} \sum_i G . \gamma_i^2 . S_i . h \qquad (46 - \text{II})$$

J=x,y i =nombre de paroi.

S: projection dans le plan (X_1, X_2) de l'hexagone,

S_i: projection dans le plan (X_1, X_2) de la paroi *i*.

Si on considère une contrainte de cisaillement τ_{xz}, agissant sur la surface de normale X_1 dans la direction X_3. Les déformations dans les parois k, l et m sont présentées sur la figure 6-II, les angles de cisaillement définis comme suit :

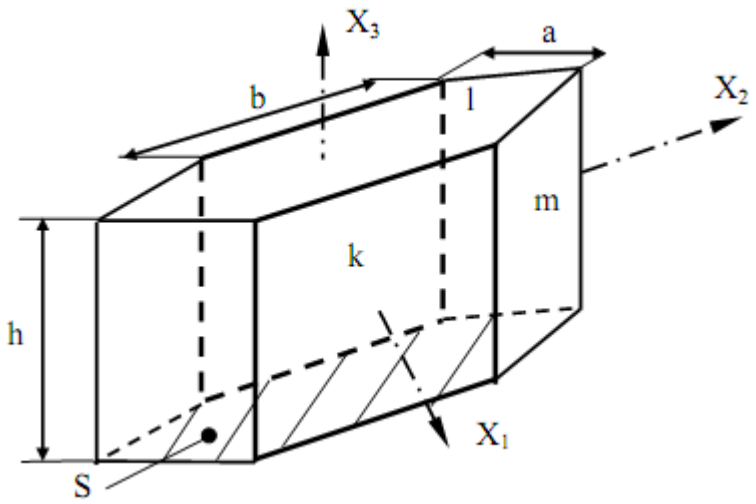


Figure 6-II : La structure hexagonale d'un nid d'abeilles.

$$\gamma_k = 0$$

$$\gamma_l = \gamma_{xz}.cos\theta \qquad (47-II)$$

$$\gamma_m = \gamma_{xz}.cos\theta$$

$$G_{xz}.\gamma^2{}_{yz}.S \leq G.(\gamma_l^2.S_l + \gamma_m^2.S_m) \qquad (48-II)$$

$$G_{yz}.\gamma^2{}_{yz}.S \leq G.(\gamma_k^2.S_{ki} + \gamma_l^2.S_l + \gamma_m^2.S_m) \qquad (49-II)$$

Soit

$$G_{xz}.\gamma^2{}_{xz}.2a.cos\theta.(b + a.sin\theta) \leq G.\gamma_{xz}^2.cos^2\theta.2a.t \qquad (50-II)$$

Où : S_l et S_m sont respectivement les sections des parois l et m on obtient :

$$G_{xy} \leq G.\frac{cos\theta}{\frac{b}{a} + sin\theta}.\left(\frac{t}{a}\right) \qquad (51-II)$$

Si on considère une contrainte de cisaillement τ_{yz}, agissant sur la surface de normale X_2 dans la direction X_3. Les déformations dans les parois k, l et m sont présentées sur la figure 6-II, les angles de cisaillement définis comme suit :

$$\gamma_k = \gamma_{yz}$$

$$\gamma_l = \gamma_{yz}.sin\theta \qquad (52-\text{II})$$

$$\gamma_m = \gamma_{yz}.sin\theta$$

$$G_{yz}.\gamma^2{}_{yz}.S \leq G.(\gamma_k^2.S_{ki} + \gamma_l^2.S_l + \gamma_m^2.S_m) \qquad (53-\text{II})$$

Où : S_k est la section de parois k.

Soit

$$G_{yz}.\gamma^2{}_{yz}.2a.cos\theta.(b + a.sin\theta) \leq G.\left(\gamma_{yz}^2.t.b. + \gamma_{yz}^2.sin^2\theta.2a.t\right) \qquad (54-\text{II})$$

On obtient :

$$G_{yz} \leq G.\frac{\frac{b}{a} + 2.sin^2\theta}{2.cos\theta.\left(\frac{b}{a} + 2.sin\theta\right)}.\left(\frac{t}{a}\right) \qquad (55-\text{II})$$

II-7-1-2-3-b Détermination de la borne inferieur :

$$\frac{1}{2}.\frac{\tau_{Jz}^2}{G_{Jz}}.V \leq \frac{1}{2}\sum_i \left[\frac{\tau_l^2}{G}.V_i\right] \qquad (56-\text{II})$$

J =1,2

Si on considère une contrainte de cisaillement τ_{xz}, elle induit des contraintes dans les trois parois. Par symétrie,$\tau_l = \tau_m$ La paroi k est simplement fléchie :

L'équilibre implique :

$$\tau_{xz}.S = \tau_x.2.a.t.cos\theta \qquad (57-\text{II})$$

Avec

$$S = 2.a.cos\theta.(b + a.sin\theta) \qquad (58-\text{II})$$

$$\frac{\tau_{xz}^2}{G_{xz}}.S \leq \sum_i \left[\frac{\tau_l^2}{G}.S_i\right] \qquad (59-\text{II})$$

$$\frac{1}{G_{xz}}.\left[\frac{2.t.a.\tau_x.cos\theta}{2.a.cos\theta.(b+a.sin\theta)}\right]^2.2.a.cos\theta.(b+a.sin\theta) \leq \frac{2}{G}.\tau_x^2.t.a \qquad (60-\text{II})$$

On obtient :

$$G_{xz} \leq G.\frac{cos\theta}{\frac{b}{a}+sin\theta}.\left(\frac{t}{a}\right) \qquad (61-\text{II})$$

On remarque que la borne inférieure est identique à la borne supérieure.

On a donc :

$$G_{xz} = G.\frac{cos\theta}{\frac{b}{a}+sin\theta}.\left(\frac{t}{a}\right) \qquad (62-\text{II})$$

Si on considère maintenant une contrainte de cisaillement τ_{yz}.

Par symétrie, $\tau_l = \tau_m$ $(63-\text{II})$

L'équilibre implique :$\tau_k = \tau_m + \tau_l = 2\tau_l$ $(64-\text{II})$

$$\tau_{yz}.S = \tau_k.t.b + \tau_l.2.a.t.sin\theta \qquad (65-\text{II})$$

Soit :

$$\tau_{yz}.2.cos\theta.(b+a.sin\theta) = 2\tau_l.t.(b+a.sin\theta) \qquad (66-\text{II})$$

On obtient :

$$G.\left(\frac{t}{a}\right).\frac{\frac{b}{a}+sin\theta}{\left(1+\frac{2b}{a}\right).cos\theta} \leq G_{yz} \leq G\left(\frac{t}{a}\right).\frac{\frac{b}{a}+2.sin^2\theta}{2.cos\theta.\left(\frac{b}{a}+sin\theta\right)} \qquad (67-\text{II})$$

Où *G* est le module de cisaillement du matériau constituant les parois.

Le cas le plus courant correspond à des nids d'abeilles fabriqués à partir de feuilles de métal découpées, embouties et collées les unes sur les autres. On a dans ce cas t'= 2t et les relations qui changent sont les suivantes :

I moment d'inertie suivant X_3 du clinquant centrale BD :

$$I = \frac{h.(2t)^3}{12} \qquad (68-\text{II})$$

$$G_{xy} = E_0\left(\frac{t}{a}\right)^3 . \frac{\frac{b}{a} + sin\theta}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(1 + \frac{b}{4a}\right)cos\theta} \qquad (69-\text{II})$$

$$E_z = E_0\left(\frac{t}{a}\right) . \frac{\frac{b}{a} + 1}{\left(\frac{b}{a} + sin\theta\right).cos\theta} \qquad (70-\text{II})$$

$$G.\left(\frac{t}{a}\right) . \frac{\frac{b}{a} + sin\theta}{\left(1 + \frac{b}{a}\right).cos\theta} \leq G_{yz} \leq G\left(\frac{t}{a}\right) . \frac{\frac{b}{a} + sin^2\theta}{cos\theta.\left(\frac{b}{a} + sin\theta\right)} \qquad (71-\text{II})$$

On peut observer que la hauteur des cellules h n'intervient pas dans les expressions précédentes.

Le tableau qui suit regroupe les modules élastiques homogénéisé du panneau sandwich.

E_x	$E_x = E_0\left(\frac{t}{a}\right)^3 . \frac{cos}{\left(\frac{b}{a} + sin\theta\right) . sin^2\theta}$
E_y	$E_y = E_0\left(\frac{t}{a}\right)^3 . \frac{\frac{b}{a} + sin\theta}{cos^3\theta}$
E_z	$E_z = E_0\left(\frac{t}{a}\right)^3 . \frac{\frac{b}{a} + sin\theta}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 . \left(1 + \frac{2b}{a}\right) . cos\theta}$
ν_{xy}	$\nu_{xy} = \frac{cos^2\theta}{\left(\frac{b}{a} + sin\theta\right) . sin\theta}$
ν_{yx}	$\nu_{yx} = \frac{\left(\frac{b}{a} + sin\theta\right) . sin\theta}{cos^2\theta}$
$\nu_{zx}\ \nu_{zy}$	$\nu_{zx} = \nu_{zy} = \nu$
ν_{xz}	$\nu_{xz} = \frac{E_x}{E_z}\nu_{zx}$
ν_{yz}	$\nu_{yz} = \frac{E_y}{E_z}\nu_{zy}$
G_{xy}	$G_{xy} = E_0\left(\frac{t}{a}\right)^3 . \frac{\frac{b}{a} + sin\theta}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 . \left(1 + \frac{2b}{a}\right) . cos\theta}$
G_{yz}	$G . \left(\frac{t}{a}\right) . \frac{\frac{b}{a} + sin\theta}{\left(1 + \frac{2b}{a}\right) . cos\theta} \leq G_{yz} \leq G\left(\frac{t}{a}\right) . \frac{\frac{b}{a} + 2 . sin^2\theta}{2 . cos\theta . \left(\frac{b}{a} + sin\theta\right)}$

Tableau 2-II: Modules élastiques de Gibson.

II-8 Approches numériques:

L'objectif est la détermination des constantes élastiques par une méthode d'homogénéisation numérique appliquée à l'échelle d'un volume élémentaire représentatif du nid d'abeilles est de comparer les résultats avec ceux obtenus analytiquement.

Neuf simulations sont nécessaires pour déterminer les neuf constantes :

- trois simulations de traction simple, chacune permettant de calculer un module d'élasticité et deux coefficients de Poisson.
- six simulations de cisaillement, une pour chaque module de cisaillement.

Les propriétés mécaniques du nida étant intimement liées à ses caractéristiques géométriques, il est important de bien les définir.

II-8-1 Le volume élémentaire représentatif « V.E.R. » :

Il est nécessaire pour des raisons de temps et de puissance de calcul de réduire les modèles en utilisant les symétries. La modélisation d'une structure en nids d'abeilles peut s'effectuer sur une seule cellule de base : Une cellule de base est le motif à partir duquel l'ensemble de la structure est obtenue par des translations dans le plan. Dans les structures en nida, le nombre de motifs pouvant être crée est abondant. Nous présenterons plusieurs modèles sur la base de modélisations déjà effectués dans plusieurs équipes de recherche [Chamis, 1988], [Grédiac 1993], [Bourgeois 2001].

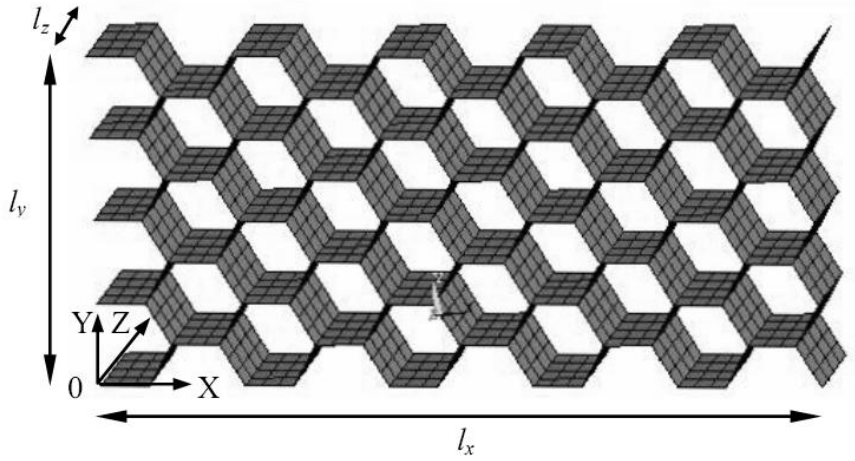


Figure 7-II : V.E.R. du nid d'abeilles.

II-8-2 Méthode d'homogénéisation numérique :

Les simulations ont été effectuées sur le code de calcul Ansys. Le modèle de nida prend en compte 40 cellules qui ont été maillées avec des éléments plaques à 4 nœuds à 6 degrés de liberté par nœud (shell 63).

Pour ce modèle, le maillage choisi permet de ne pas trop alourdir le calcul tout en gardant une bonne précision au niveau des résultats. Un raffinement excessif ne donne pas de meilleurs résultats donc le maillage présenté sur la figure précédente convient relativement bien. Il compte 1500 éléments et 1725 nœuds.

Chaque clinquant contient 12 éléments, 4 suivant l'axe Z et 3 suivant l'axe X.

Pour calculer les différents modules, un déplacement est imposé sur une face du V.E.R. dans une direction donnée, la face opposée étant fixe. Les symétries sont prises en compte au niveau des conditions limites.

Neuf simulations sont nécessaires pour déterminer les neuf constantes élastiques du nida : La simulation d'une sollicitation de traction suivant une direction i (i = x, y, z) permet de déterminer les 3 modules de rigidité E_x, E_y et E_z et les 6 coefficients de poisson (Figure 8-II).

V_0 : volume avant déformation,

V_f : volume après déformation.

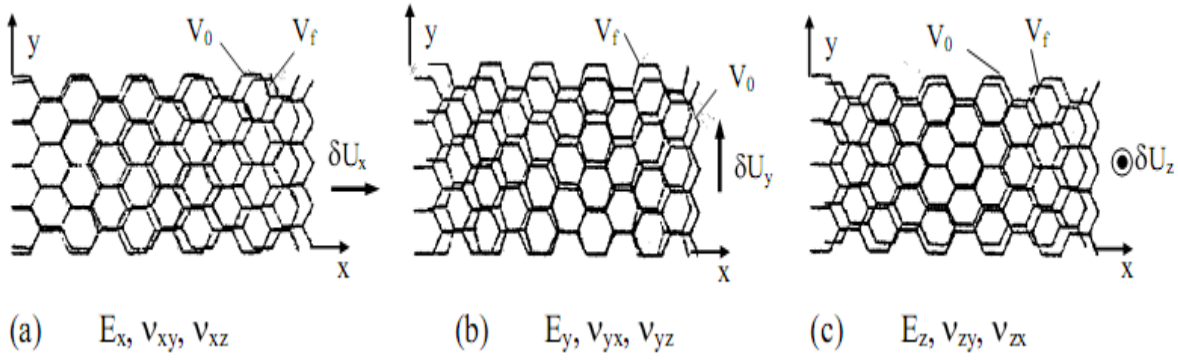


Figure 8-II : Simulations d'une sollicitation de traction sur le V.E.R.

La simulation des sollicitations de cisaillement suivant les plans XY, YZ, XZ (2 simulations par plan) permet de déterminer les 6 coefficients de cisaillement (Figure II-9).

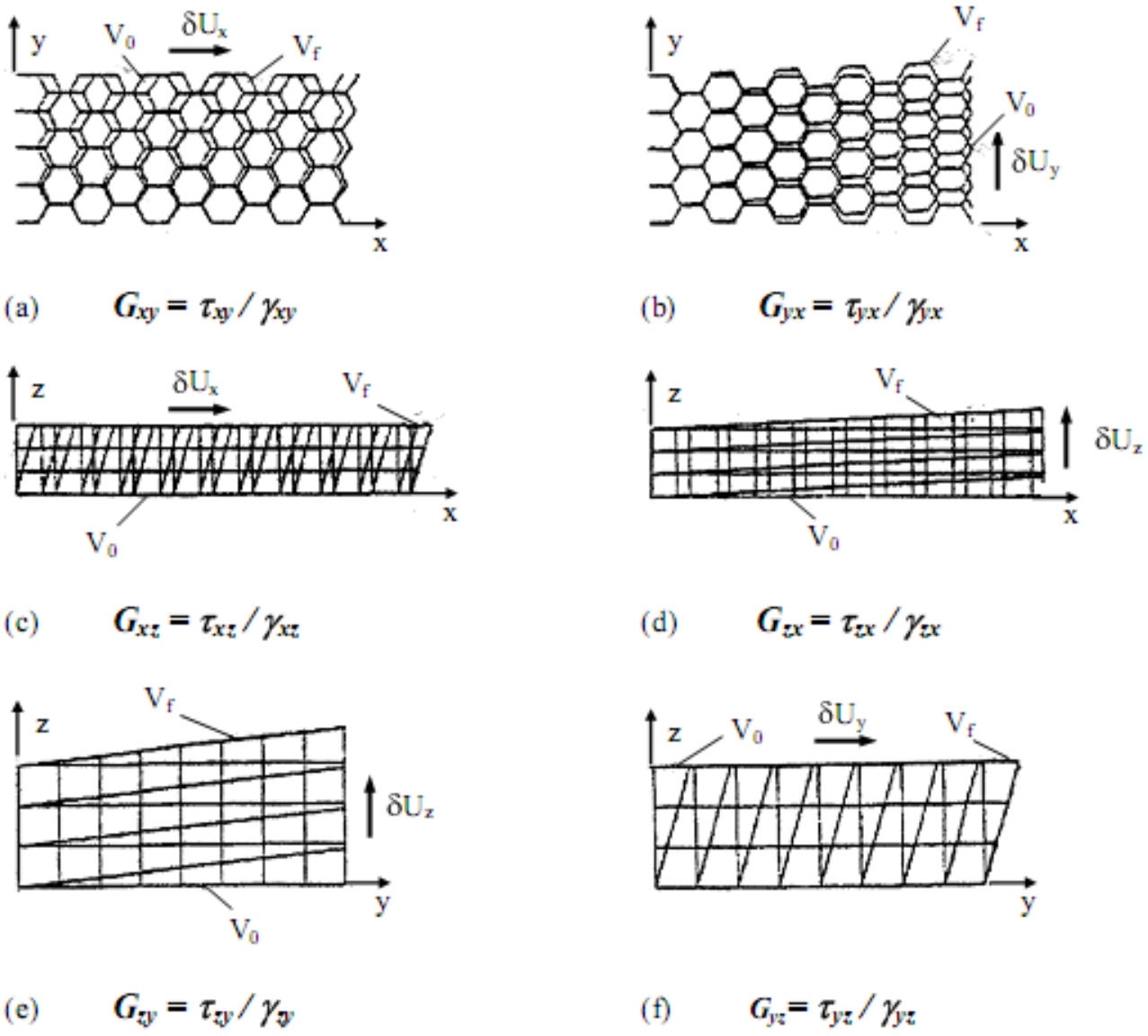


Figure 9-II : Simulations d'une sollicitation de cisaillement sur le V.E.R.

Cette méthode basée sur l'analyse des efforts aux liaisons, à partir d'un déplacement imposé, permet par l'utilisation des lois de comportement de déduire les constantes élastiques.

Chapitre III

Développement d’un model raffiné pour panneaux sandwichs à âme en nid d’abeille

Chapitre III

Développement d'un model raffiné pour panneaux sandwich à âme en nid d'abeille.

Le but de cette partie est de développer des essais de flexion trois point pour les matériaux composites de type sandwich. Le développement des solutions analytiques avec l'application au panneau sandwich à âme en nid d'abeille y est présenté.

III-1 Introduction :

La difficulté pour les industriels est le dimensionnement des panneaux sandwich car ce dernier son des composite multicouche qui comporte des singularités qui sont le siège d'états de contraintes complexes. Pour abordé ce problème il excite deux type d'approches analytique.

Plusieurs théories ont été développés les premières furent celles de Kirchhoff-Love [Love, 1927]. Ces théories qualifiées de premier ordre en raison de leur dépendance linéaire suivant la surface moyenne, sont des théories de flexion applicables essentiellement à des structures minces, pour lesquelles les effets de flexion correspondant aux rotations des fibres autour des tangentes à la surface de référence prédominent par rapport à ceux dus au cisaillement.

Des théories développées par Reissner-Mindlin sont applicables à des structures épaisses ou non elles permettent d'assurer la continuité du cisaillement transverse à la traversée des interfaces [Reissner, 1945], [Mindlin, 1951].

Touratier met en place une théorie simple mais raffinée permettant la prise en compte du cisaillement transverse, pour des structures composites multicouches, épaisses ou non. La nouveauté par rapport aux approches antérieures réside dans l'introduction d'une fonction sinusoïdale pour représenter la part due au cisaillement dans le champ de déplacements. [Touratier, 1989].

III-2 Modélisation des panneaux sandwichs en flexion :

III-2-1 Hypothèses de la théorie des sandwichs et notations :

Pour les plaques sandwichs, Il s'agit de déterminer les équations permettant de calculer les valeurs maximales de la flèche.

Dans le cas de cette étude, l'épaisseur des peaux sera notée *hp* ; l'épaisseur du cœur sera notée *hc*. Le système de coordonnées est choisi de sorte que le plan (X_1, X_2) soit le plan moyen.

La théorie des plaques sandwiches repose sur les hypothèses fondamentales suivantes [Berthelot, 1999] :

- L'épaisseur de l'âme est bien plus élevée que celle des peaux :*hc>>hp* .
- Les déplacements de l'âme suivant les directions X_1 et X_2 sont des fonctions linéaires de la coordonnée z (X_3).
- Les déplacements suivant les directions X_1 et X_2 sont uniformes dans l'épaisseur des peaux.
- Le déplacement transverse est indépendant de la variable z : la déformation ε_z est négligée.
- L'âme ne transmet que les contraintes de cisaillement transverse τ_{xz} et τ_{yz} , les contraintes $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xz}, \sigma_z$ sont négligées.
- Les contraintes de cisaillement transverse τ_{xz} et τ_{yz} sont négligées dans les peaux.

Enfin, la théorie traite les problèmes d'élasticité de faibles déformations.

Les essais en flexion sont ici effectués en configuration trois et points dans le repère défini par la figure suivante :

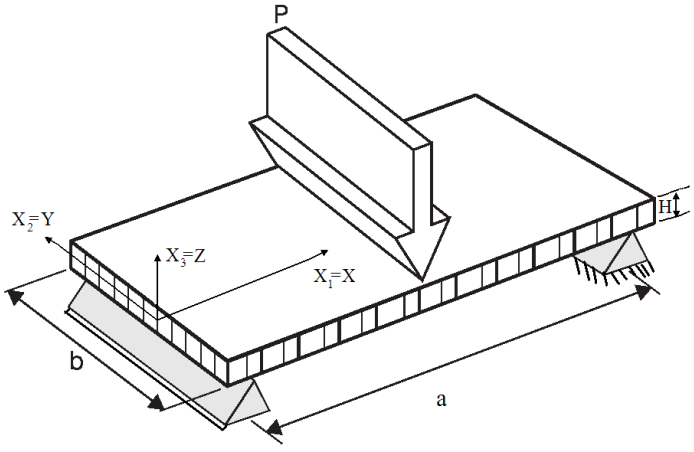


Figure 1-III : Configuration de la flexion trois points.

Le champ de déplacement est défini par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_\alpha = u_\alpha^0 - z.w_{,\alpha} + f(z).\gamma_\alpha \\ u_3 = w \end{cases} \quad \gamma_\alpha = \omega_\alpha + w_{,\alpha}\ , \quad \alpha \in \{1,2\} \qquad (1-\text{III})$$

On peut l'écrire de la façon suivante :

$$\begin{cases} u_1 = u_1^0(X,Y) - Z.\dfrac{\partial w(X,Y)}{\partial X} + f(Z).\gamma_1 \\ u_2 = u_2^0(X,Y) - Z.\dfrac{\partial w(X,Y)}{\partial Y} + f(Z).\gamma_2 \\ u_3 = w \end{cases} \qquad (2-\text{III})$$

Avec

$$\gamma_1 = \omega_1(X,Y) + \frac{\partial w(X,Y)}{\partial X}, \qquad (3-\text{III})$$

$$\gamma_2 = \omega_2(X,Y) + \frac{\partial w(X,Y)}{\partial Y}.$$

u_α Représentent les déplacements de membrane,

γ_α Les déformations de cisaillement transverse dans le plan moyen,

ω_α les rotations de la normale au plan moyen par rapport aux axes x_α.

La fonction $f(Z)$ peut être considérée comme la ''fonction de cisaillement'' car sa dérivée représente la répartition des contraintes de cisaillement transverse.

Le choix de $f(Z)$ est basé sur les résultats de l'élasticité tridimensionnelle il influe sur le raffinement de la théorie.

Les expressions considérées ici pour $f(Z)$ sont :

1.$f(Z) = 0$, Kirchhoff-Love [Love, 1927];

2.$f(Z) = z$, Mindlin [Mindlin, 1951] ;

3.$f(Z) = z\left[1 - 4/3(\frac{z}{H})^2\right]$, Reddy [Reddy, 1984] ;

4.$f(Z) = \frac{H}{\pi}\sin(\frac{\pi z}{H})$, Touratier [Touratier, 1989].

III-2-2 Formulation variationnelles :

Pour calculer le comportement des différents model on utilise la formulation variationnelles.

Le champ de déplacements virtuels est défini par les relations suivantes :

$$U^* = \begin{cases} u^*{}_1 = u^{*0}_1(X,Y) - Z.\dfrac{\partial w^*(X,Y)}{\partial X} + f(Z).\gamma^*{}_1 \\ u^*{}_2 = u^{*0}_2(X,Y) - Z.\dfrac{\partial w^*(X,Y)}{\partial Y} + f(Z).\gamma^*{}_2 \\ u^*{}_3 = w^* \end{cases} \quad (4-\text{III})$$

On peut l'écrire de la façon suivante :

$$U^* = \begin{cases} u^*_\alpha = u^{*0}_\alpha - z.w^*_{,\alpha} + f(z).\gamma^*_\alpha \\ u^*{}_3 = w^* \end{cases} \alpha \in \{1,2\} \quad (5-\text{III})$$

La formulation variationnelles s'appuie sur le principe de puissances virtuelles qui s'écrit :

$$P^*_{(a)} = P^*_{(i)} + P^*_{(e)} \quad (6-\text{III})$$

Où $P^*_{(a)}$: puissance virtuel des quantités d'accélérations, $P^*_{(i)}$celui des efforts intérieurs, et $P^*_{(e)}$ celui des forces extérieures.

- Calcul de $P^*_{(a)}$

La puissance virtuelle des quantités d'accélération est définie par :

$$P^*_{(a)} = \int \rho U^{*T}.\ddot{U}.dV \quad (7-\text{III})$$

En utilisant le théorème de la divergence et en introduisant les vecteurs généralisés pour $n \in \{0,1,2\}$

$$(I_n, J_n, k) = \int_{-H/2}^{H/2} \rho.\left(z^n, f(z)^n, z.f(z)\right).dz, \quad (8-\text{III})$$

On obtient :

$$P^*_{(a)} = \int_\Omega [\left(I_0.\ddot{u}^0_\alpha - I_1.\ddot{w}_{,\alpha} + J_1.\ddot{\gamma}_\alpha\right).\ddot{u}^0_\alpha + \left(I_1.\ddot{u}^0_{\alpha,\alpha} - I_2.\ddot{w}_{,\alpha\alpha} + K.\ddot{\gamma}_{\alpha,\alpha} + I_0.\ddot{w}\right).w^*$$

$$+\left(J_1.\ddot{u}^0_\alpha - K.\ddot{w}_{,\alpha} + J_2.\ddot{\gamma}_\alpha\right).\gamma^*_\alpha].d\Omega - \int_\Gamma \left(I_1.\ddot{u}^0_\alpha - I_2.\ddot{w}_{,\alpha} + K.\ddot{\gamma}_\alpha\right).n_\alpha.w^*.d\Gamma\,. \quad (9-\text{III})$$

- Calcul de $P^*_{(i)}$

$$P^*_{(i)} = -\int_V \varepsilon^{*T}.\sigma.dV\,. \qquad (10-\text{III})$$

L'hypothèse de petites déformations donne la relation suivante pour les déformations virtuelles :

$$\varepsilon^*_{i,j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^*_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u^*_j}{\partial x_i}\right) i,j \in \{1,2,3\}. \qquad (11-\text{III})$$

Soit :

$$P^*_{(i)} = \int_V \left(\left(\ddot{u}^{*0}_{\alpha,\beta} - z.w^*_{,\alpha\beta} + f(z).\gamma^*_{\alpha,\beta}\right).\sigma_{\alpha\beta} + f'(z).\gamma^*_{\alpha}\sigma_{\alpha 3}\right).dV\,. \qquad (12-\text{III})$$

On obtient on utilisant le théorème de la divergence :

$$P^*_{(i)} = \int_V \left(\sigma_{\alpha\beta,\beta}.u^{*0}_{\alpha} + \sigma_{\alpha\beta,\beta\alpha}.z.w^* + \sigma_{\alpha\beta,\beta}.f(z).\gamma^*_{\alpha} - \sigma_{\alpha 3}.f'^{(z)}.\gamma^*_{\alpha}\right).dV -$$

$$\int_{\Gamma_f} \left(\sigma_{\alpha\beta}.n_{\beta}.u^{*0}_{\alpha} - \sigma_{\alpha\beta}.n_{\beta}.z.w^*_{,\alpha} + \sigma_{\alpha\beta,\beta}.n_{\alpha}.z.w^* + \sigma_{\alpha\beta}.n_{\beta}.f(z).\gamma^*_{\alpha}\right).d\Gamma_f. \qquad (13-\text{III})$$

On introduit dans cette relation

Les efforts généralisés :

$$\left(N_{\alpha\beta}, M_{\alpha\beta}, \widetilde{M}_{\alpha\beta}\right) = \int_{-H/2}^{H/2} \left(1, z, f(z)\right)\sigma_{\alpha\beta}.dz, \qquad (14-\text{III})$$

$$\tilde{Q}_{\alpha} = \int_{-H/2}^{H/2} f'^{(z)}.\sigma_{\alpha 3}.dz. \qquad (15-\text{III})$$

Et on remplace $w^*_{,\alpha}$ par $n_{\alpha}.w^*_{,\alpha} + t_{\alpha}.w^*_{,l}$, suivie d'une intégration par partie du deuxième membre,

On aura la relation suivant $P^*_{(i)}$:

$$P^*_{(i)} = \int_V \left(\sigma_{\alpha\beta,\beta}.u^{*0}_{\alpha} + \sigma_{\alpha\beta,\beta\alpha}.z.w^* + \sigma_{\alpha\beta,\beta}.f(z).\gamma^*_{\alpha} - \sigma_{\alpha 3}.f'^{(z)}.\gamma^*_{\alpha}\right).dV -$$

$$\int_{\Gamma_f} \left(\sigma_{\alpha\beta}.n_{\beta}.u^{*0}_{\alpha} - \sigma_{\alpha\beta}.n_{\beta}.z.w^*_{,\alpha} + \sigma_{\alpha\beta,\beta}.n_{\alpha}.z.w^* + \sigma_{\alpha\beta}.n_{\beta}.f(z).\gamma^*_{\alpha}\right).d\Gamma_f. \qquad (16-\text{III})$$

Puis on introduit loi de comportement dans la relation (16-III):

$$\sigma_{\alpha\beta} = \mathcal{Q}_{\alpha\beta ij} \cdot \varepsilon_{ij} \,. \qquad \alpha, \beta, i, j \in \{1,2,3\} \qquad (17-\text{III})$$

Qui nous donnera la relation suivante :

$$\begin{aligned} P^*_{(i)} = \int_V & \left(\mathcal{Q}_{\alpha\beta ij} \cdot \left(u^0_{i,j\beta} - z.w_{,ij\beta} + \mathrm{f}(z).\gamma_{i,j\beta}\right).u^{*0}_{\alpha}\right. \\ & + \mathcal{Q}_{\alpha\beta ij} \cdot \left(u^0_{i,j\beta} - z.w_{,ij\beta} + \mathrm{f}(z).\gamma_{i,j\beta}\right).z.w^* \\ & \left. + \mathcal{Q}_{\alpha\beta ij} \cdot \left(u^0_{i,j\beta} - z.w_{,ij\beta} + \mathrm{f}(z).\gamma_{i,j\beta}\right).\mathrm{f}(z).\gamma^*_{\alpha} - \mathcal{Q}_{\alpha 3i3}.\gamma_i.\mathrm{f}'(z)^2.\gamma^*_{\alpha}\right).dV \\ & - \int_{\Gamma_\mathrm{f}} \left(\mathcal{Q}_{\alpha\beta ij} \cdot \left(u^0_{i,j\beta} - z.w_{,ij\beta} + \mathrm{f}(z).\gamma_{i,j}\right).n_\beta.u^{*0}_{\alpha}\right. \\ & - \mathcal{Q}_{\alpha\beta ij} \cdot \left(u^0_{i,j\beta} - z.w_{,ij\beta} + \mathrm{f}(z).\gamma_{i,j}\right).n_\beta.z.w^*_{,\alpha} \\ & + \mathcal{Q}_{\alpha\beta ij} \cdot \left(u^0_{i,j\beta} - z.w_{,ij\beta} + \mathrm{f}(z).\gamma_{i,j\beta}\right).n_\beta.z.w^* \\ & \left. + \mathcal{Q}_{\alpha\beta ij} \cdot \left(u^0_{i,j\beta} - z.w_{,ij\beta} + \mathrm{f}(z).\gamma_{i,j\beta}\right).\mathrm{f}(z).n_\beta.\gamma^*_{\alpha}\right).d\Gamma_\mathrm{f} \end{aligned} \qquad (18-\text{III})$$

On introduit les matrices de comportement généralisées :

$$\left(A_{\alpha\beta ij}, \widetilde{A}_{\alpha\beta ij}, B_{\alpha\beta ij}, \widetilde{B}_{\alpha\beta ij}, D_{\alpha\beta ij}, \widetilde{D}_{\alpha\beta ij}, E_{\alpha\beta ij}\right) = \int_{-H/2}^{H/2} \left(1, \mathrm{f}'(z)^2, \mathrm{f}(z), z^2, \mathrm{f}(z)^2, z.\mathrm{f}(z)\right).\mathcal{Q}_{\alpha\beta ij}\,.dz.$$

Et on applique la même démarche que pour l'obtention de (16-III) On obtient l'expression final de $P^*_{(i)}$:

$$\begin{aligned} P^*_{(i)} = \int_\Omega & \left(\left(A_{\alpha\beta ij}.u^0_{i,j\beta} - B_{\alpha\beta ij}.w_{,ij\beta} + \tilde{B}_{\alpha\beta ij}.\gamma_{i,j\beta}\right)\right. \\ & + \left(B_{\alpha\beta ij}.u^0_{i,j\beta\alpha} - D_{\alpha\beta ij}.w_{,ij\beta\alpha} + E_{\alpha\beta ij}.\gamma_{i,j\beta\alpha}\right).w^* \\ & \left. + \left(\tilde{B}_{\alpha\beta ij}.u^0_{i,j\beta} - E_{\alpha\beta ij}.w_{,ij\beta} + \widetilde{D}_{\alpha\beta ij}.\gamma_{i,j\beta}\right).\gamma^*_{\alpha} - A_{\alpha 3i3}.\gamma_i.\gamma^*_{\alpha}\right).d\Omega \\ & - \int_\Gamma \left(\left(A_{\alpha\beta ij}.u^0_{i,j} - B_{\alpha\beta ij}.w_{,ij} + \tilde{B}_{\alpha\beta ij}.\gamma_{i,j}\right).n_\beta.u^{*0}_{\alpha}\right. \\ & - \left(B_{\alpha\beta ij}.u^0_{i,j} - D_{\alpha\beta ij}.w_{,ij} + E_{\alpha\beta ij}.\gamma_{i,j}\right).n_\beta.n_\alpha.w^*_{,n} \\ & + \left(\left(B_{\alpha\beta ij}.u^0_{i,j} - D_{\alpha\beta ij}.w_{,ij} + E_{\alpha\beta ij}.\gamma_{i,j}\right).n_\beta.t_\alpha\right)_{,l}.w^* \\ & + \left(B_{\alpha\beta ij}.u^0_{i,j\beta} - D_{\alpha\beta ij}.w_{,ij\beta} + E_{\alpha\beta ij}.\gamma_{i,j\beta}\right).n_\alpha.w^* \\ & \left. + \left(\tilde{B}_{\alpha\beta ij}.u^0_{i,j} - E_{\alpha\beta ij}.w_{,ij} + \widetilde{D}_{\alpha\beta ij}.\gamma_{i,j}\right).n_\alpha.\gamma^*_{\alpha}\right).d \end{aligned} \qquad (19-\text{III})$$

- Calcul de $P^*_{(e)}$

$$P^*_{(e)} = \int_V U^{*T}.\mathfrak{f}.dV + \int_{\Gamma_\mathfrak{f}} U^{*T}.F.d\Gamma_\mathfrak{f} \ . \qquad (20-\text{III})$$

En introduisant les vecteurs généralisés :

$$(P_\alpha, m_\alpha, \widetilde{m}_\alpha) = \int_{-H/2}^{H/2} \big(1, z, \mathfrak{f}(z)\big)\mathfrak{f}_\alpha.dz, \qquad (21-\text{III})$$

$$q = \int_{-H/2}^{H/2} \mathfrak{f}_3.dz,$$

$$\big(T_\alpha, C_\alpha, \tilde{C}_\alpha\big) = \int_{-H/2}^{H/2} \big(1, z, \mathfrak{f}(z)\big)F_\alpha.dz,$$

$$et \quad T_z = \int_{-H/2}^{H/2} F_3.dz.$$

Puis moyennant le théorème de la divergence et des intégrations par parties, on obtient :

$$P^*_{(e)} = \int_\Omega \big(P_\alpha.u^{*0}_\alpha + \big(q + m_{\alpha,\alpha}\big).w^* + \widetilde{m}_\alpha.\gamma^*_\alpha\big).d\Omega +$$

$$\int_\Gamma \big(T_\alpha.u^{*0}_\alpha + \big(T_z + (C_\alpha.t_\alpha)_{,l} - m_\alpha.n_\alpha\big).w^* - C_\alpha.n_\alpha.w^*_{,n} + \tilde{C}_\alpha.\gamma^*_\alpha\big).dl \ . \qquad (22-\text{III})$$

III-2-3 Equations d'équilibre et conditions aux limites naturelles :

Par identification des termes de l'intégration $\forall u^*_\alpha, \gamma^*_\alpha$ et w^*sur la surface Ω, on obtient les équations d'équilibres :

$$I_0.\ddot{u}^0_\alpha - I_1.\ddot{w}_{,\alpha} + J_1.\ddot{\gamma}_\alpha = A_{\alpha\beta ij}.u^0_{i,j\beta} - B_{\alpha\beta ij}.w_{,ij\beta} + \tilde{B}_{\alpha\beta ij}.\gamma_{i,j\beta} + P_\alpha \qquad (23-\text{III})$$

$$J_1.\ddot{u}^0_\alpha - K.\ddot{w}_{,\alpha} + J_2.\ddot{\gamma}_\alpha = \tilde{B}_{\alpha\beta ij}.u^0_{i,j\beta} - E_{\alpha\beta ij}.w_{,ij\beta} + \widetilde{D}_{\alpha\beta ij}.\gamma_{i,j\beta} + \tilde{A}_{\alpha 3i3}.\gamma_i + \widetilde{m}_\alpha,$$

$$I_1.\ddot{u}^0_{\alpha,\alpha} - I_2.\ddot{w}_{,\alpha\alpha} + K.\ddot{\gamma}_{\alpha,\alpha} + I_0.\ddot{w} = B_{\alpha\beta ij}.u^0_{i,j\alpha\beta} - D_{\alpha\beta ij}.w_{,ij\beta\alpha} + E_{\alpha\beta ij}.\gamma_{i,j\beta\alpha} + q + m_{\alpha,\alpha}.$$

De la même façon $\forall u^*_\alpha, \gamma^*_\alpha w^*$et $w^*_{,n}$, on peut écrire les conditions aux limites naturelles :

$$0 = -\big(A_{\alpha\beta ij}.u^0_{i,j} - B_{\alpha\beta ij}.w_{,ij} + \tilde{B}_{\alpha\beta ij}.\gamma_{i,j}\big).n_\beta.T_\alpha,$$

$$0 = -\big(\tilde{B}_{\alpha\beta ij}.u^0_{i,j} - E_{\alpha\beta ij}.w_{,ij} + \widetilde{D}_{\alpha\beta ij}.\gamma_{i,j}\big).n_\beta + \tilde{C}_\alpha,$$

$$\left(I_1.\ddot{u}_\alpha^0 - I_2.\ddot{w}_{,\alpha} + K.\ddot{\gamma}_\alpha\right).n_\alpha$$
$$= -\left(B_{\alpha\beta ij}\,.u_{i,j\beta}^0 - D_{\alpha\beta ij}\,.w_{,ij\beta} + E_{\alpha\beta ij}\,.\gamma_{i,j\beta}\right).n_\alpha$$
$$-\left(\left(B_{\alpha\beta ij}\,.u_{i,j}^0 - D_{\alpha\beta ij}\,.w_{,ij} + E_{\alpha\beta ij}\,\right).n_\beta.t_\alpha\right)_{,l} + T_z + (C_\alpha + t_\alpha)_{,l} - m_\alpha.n_\alpha,$$

$$0 = -\left(B_{\alpha\beta ij}\,.u_{i,j}^0 - D_{\alpha\beta ij}\,.w_{,ij} + E_{\alpha\beta ij}\,.\gamma_{i,j}\right).n_\beta.n_\alpha - C_\alpha.n_\alpha. \qquad (24-\text{III})$$

III-3 Mise en œuvre d'une solution analytique dans le cas de cette étude :

Les panneaux sandwiches ont une symétrie miroir. Dans ce cas, puisque la fonction $f(Z)$ est impaire, les matrices de comportement généralisées B et $\widetilde{\mathrm{B}}$ sont nulles. Si l'on considère que les forces de volume F sont dirigées suivant l'axe z alors on a :

$$P_\alpha = m_\alpha = \widetilde{m}_\alpha = 0 \qquad (25-\text{III})$$

En adoptant la contraction d'indice $\sigma_i = Q_{ij}\,.\varepsilon_j$ sur la loi de comportement et en travaillant en statique, les équations d'équilibre deviennent :

$\forall u_\alpha^*, \gamma_\alpha^*\ et\ w^*$

$$0 = -E_{11}.w_{,111} - (E_{12} + 2.E_{66}).w_{,122} + \widetilde{D}_{11}.\gamma_{1,11} + \left(\widetilde{D}_{12} + \widetilde{D}_{66}\right).\gamma_{2,12} + \widetilde{D}_{66}.\gamma_{2,12}$$
$$- \tilde{A}_{55}.\gamma_1,$$

$$0 = -(E_{12} + 2.E_{66}).w_{,122} - E_{22}.w_{,222} + \left(\widetilde{D}_{12} + \widetilde{D}_{66}\right).\gamma_{2,12} + \widetilde{D}_{66}.\gamma_{2,11} + \widetilde{D}_{22}.\gamma_{2,22}$$
$$- \tilde{A}_{44}.\gamma_2,$$

$$0 = -D_{11}.w_{,1111} - 2.(D_{12} + 2.D_{66}).w_{,1122} - D_{22}.w_{,2222} + E_{11}.w_{1,111}$$
$$+ (E_{12} + 2.E_{66}).\left(\gamma_{1,122} + \gamma_{2,112}\right) + E_{22}.\gamma_{2,222} + q. \qquad (26-\text{III})$$

Pour une plaque rectangulaire, les conditions aux limites naturelles sur les bords libres $y = -b/2$ et $y = b/2$ s'écrivent :

$$0 = E_{66}.w_{,12} - \widetilde{D}_{66}.\gamma_{1,2} - \widetilde{D}_{66}.\gamma_{1,2} + \tilde{C}_1,$$

$$0 = E_{12}.w_{,11} + E_{22}.w_{,22} - \widetilde{D}_{12}.\gamma_{1,1} - \widetilde{D}_{22}.\gamma_{2,2} + \tilde{C}_2, \qquad (27-\text{III})$$

$$0 = (D_{12} + 4.D_{66}).w_{,112} + D_{22}.w_{,222} - (E_{12} + 2.E_{66}).\gamma_{1,12} - 2.E_{22}.\gamma_{2,11} - E_{22}.\gamma_{2,22}$$
$$+ T_z.C_{1,1},$$

$$0 = -D_{12}.w_{,11} - D_{22}.w_{,22} + E_{22}.\gamma_{2,2} + E_{12}.\gamma_{1,1} - C_2.$$

Un changement de variable permet d'obtenir un système adimensionnel :

$$W = \frac{w}{H}$$

$$X = \frac{x}{a} \qquad (28 - \text{III})$$

$$Y = \frac{y}{b}$$

$$Z = \frac{z}{H}$$

On aura alors un système d'équation d'équilibre sous la forme :

$$0 = -\frac{E_{11}}{H^2}.\left(\frac{H}{a}\right)^3.W_{,111} - \frac{(E_{12}+2.E_{66})}{H^2}.\left(\frac{H}{a}\right).\left(\frac{H}{b}\right)^2.W_{,122} + \frac{\widetilde{D}_{11}}{H^2}.\left(\frac{H}{a}\right)^2.\gamma_{1,11} + \frac{(\widetilde{D}_{12}+\widetilde{D}_{66})}{H^2}.\left(\frac{H}{a}\right).\left(\frac{H}{b}\right).\gamma_{2,12} + \frac{\widetilde{D}_{66}}{H^2}.\left(\frac{H}{b}\right)^2.\gamma_{1,22} - \tilde{A}_{55}.\gamma_1,$$

$$0 = -\frac{(E_{12}+2.E_{66})}{H^2}.\left(\frac{H}{a}\right)^2.\left(\frac{H}{b}\right).W_{,122} - \frac{E_{22}}{H^2}.\left(\frac{H}{b}\right)^3.W_{,222} + \frac{\widetilde{D}_{66}}{H^2}.\left(\frac{H}{a}\right)^2.\gamma_{2,11} + \frac{(\widetilde{D}_{12}+\widetilde{D}_{66})}{H^2}.\left(\frac{H}{a}\right).\left(\frac{H}{b}\right).\gamma_{1,12} + \frac{\widetilde{D}_{22}}{H^2}.\left(\frac{H}{b}\right)^2.\gamma_{2,22} - \tilde{A}_{44}.\gamma_2, \qquad (29 - \text{III})$$

$$0 = -\frac{D_{11}}{H^3}.\left(\frac{H}{a}\right)^4.W_{,1111} - \frac{2.(D_{12}+2.D_{66})}{H^3}.\left(\frac{H}{a}\right)^2.\left(\frac{H}{b}\right)^2.W_{,1122} + \frac{(E_{12}+2.E_{66})}{H^3}.\left[\left(\frac{H}{a}\right).\left(\frac{H}{b}\right)^2.\gamma_{1,122} + \left(\frac{H}{a}\right)^2\left(\frac{H}{b}\right).\gamma_{2,112}\right] - \frac{D_{22}}{H^2}.\left(\frac{H}{b}\right)^4.W_{,2222} + \frac{E_{11}}{H^3}.\left(\frac{H}{a}\right)^3.\gamma_{1,111} + \frac{E_{22}}{H^3}.\left(\frac{H}{b}\right)^3.\gamma_{2,222} + q.$$

On introduit les solutions de Lévy [Idlbi, 1997]

$$\gamma_1(X,Y) = \sum_{m=1}^{\infty} X_m\,(Y).cos(m\pi X),$$

$$\gamma_2(X,Y) = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m\,(Y).sin(m\pi X),$$

$$W(X,Y) = \sum_{m=1}^{\infty} W_m\,(Y).\,sin(m\pi X),$$

$$q(X,Y) = \sum_{m=1}^{\infty} Q_m\,(Y).\,sin(m\pi X). \qquad (30-\text{III})$$

$X_m(Y), Y_m(Y), W_m(Y)$sont des fonctions a déterminer.

$Q_m(Y)$est le développement en série de Fourier de l'amplitude du chargement.

Dans le cas d'un chargement constant $Q_m(Y)$ prend l'expression suivante :

$$Q_m = \frac{-8.q_0}{\pi.m}.sin\left(\frac{\pi.m.l}{a}\right).sin\left(\frac{\pi.m.e}{2.a}\right) \qquad (31-\text{III})$$

avec : m=1,3,5,……..,

$$q_0 = \frac{p}{2.b.e}$$

En introduisant les solutions de Lévy les équations d'équilibres deviennent :

$$0 = -\frac{E_{11}}{H^2}.\alpha^3.W_m - \frac{(E_{12}+2.E_{66})}{H^2}.\alpha.\beta^2.W"_m - \frac{\widetilde{D}_{11}}{H^2}.\alpha^2.X_m + \frac{\left(\widetilde{D}_{12}+\widetilde{D}_{66}\right)}{H^2}.\alpha.\beta.Y'_m + \frac{\widetilde{D}_{66}}{H^2}.\beta^2.X"_m - \tilde{A}_{55}.X_m,$$

$$0 = -\frac{(E_{12}+2.E_{66})}{H^2}.\alpha^2.\beta.W'_m - \frac{E_{22}}{H^2}.\beta^3.W'''_m - \frac{\widetilde{D}_{66}}{H^2}.\alpha^2.Y_m - \frac{\left(\widetilde{D}_{12}+\widetilde{D}_{66}\right)}{H^2}.\alpha.\beta.X'_m + \frac{\widetilde{D}_{22}}{H^2}.\beta^2.Y''_m - \tilde{A}_{44}.Y_m,$$

$$0 = -\frac{D_{11}}{H^3}.\alpha^4.W_m - \frac{2.(D_{12}+2.D_{66})}{H^3}.\alpha^2.\beta^2.W''_m - \frac{(E_{12}+2.E_{66})}{H^3}.[\alpha.\beta^2.X''_m + \alpha^2\beta.Y'_m] - \frac{D_{22}}{H^3}.\beta^4.W""_m + \frac{E_{11}}{H^3}.\alpha^3.X_m + \frac{E_{22}}{H^3}.\beta^3.Y'''_m + Q_m. \qquad (32-\text{III})$$

Avec :

$$\alpha = \frac{m\pi H}{a} \;\; et \;\; \beta = \frac{H}{b} \qquad (33-\text{III})$$

III-3-1 Solution du système homogène :

Le système différentiel des fonctions $X_m(Y), Y_m(Y)\ et\ W_m(Y)$ obtenu est linéaire et à coefficients constants. Ainsi la solution du système homogène associé à une forme exponentielle. On peut donner cette solution comme :

$$W_m(Y) = A_i.e^{P_i.Y},$$

$$X_m(Y) = B_i.e^{P_i.Y}, \qquad (34-\text{III})$$

$$Y_m(Y) = C_i.e^{P_i.Y},$$

Où A_i, B_i et $C_i$sont des constantes à déterminer, les P_i sont les racines du polynôme caractéristique associé au système homogène.

Introduisant cette solution dans le système différentiel homogène obtenu à partir des équations d'équilibre, on trouve un système algébrique linéaire pourA_i, B_i et C_i :

$$\left[a_{ij}(P_i)\right]\begin{Bmatrix}A_i\\B_i\\C_i\end{Bmatrix}.e^{P_i.Y} = \begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix} \qquad (35-\text{III})$$

Ce système admet une solution non triviale si $det\left[a_{ij}(P_i)\right] = 0$; ceci conduit à une équation polynomiale en P_i Ce polynôme caractéristique (bicarré) peut être de degré 4, 6 ou 8 selon le choix de la fonction de cisaillement. f(z).

Les solutions peuvent prendre l'une des deux formes suivantes :

$$W_m(Y) = \sum_{i=1}^{n} A_i.e^{P_i.Y},$$

$$X_m(Y) = \sum_{i=1}^{n} B_i.e^{P_i.Y},$$

$$Y_m(Y) = \sum_{i=1}^{n} C_i.e^{P_i.Y}, \qquad (36-\text{III})$$

$$W_m(Y) = \sum_{i=1}^{n} (A_i.Y + A_{i+1}).e^{P_i.Y},$$

$$X_m(Y) = \sum_{i=1}^{n} (B_i.Y + B_{i+1}).e^{P_i.Y},$$

$$Y_m(Y) = \sum_{i=1}^{n} (C_i.Y + C_{i+1}).e^{P_i.Y}.$$

n est le nombre de racines simples ou multiples.

III-3-2 Solution particulière :

L'introduction des solutions de Lévy dans les équations d'équilibre les transforme en système d'équations différentielles du premier ordre:

$$A.X' + B.X + C = 0. \qquad (37-\text{III})$$

Avec

$$X = \begin{Bmatrix} W'''_m \\ W'_m \\ W_m \\ X'_m \\ X_m \\ Y''_m \\ Y_m \end{Bmatrix}, X' = \begin{Bmatrix} W''''_m \\ W''_m \\ W'_m \\ X''_m \\ X'_m \\ Y'''_m \\ Y'_m \end{Bmatrix}, C = \begin{Bmatrix} Q_m \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \qquad (38-\text{III})$$

Les termes des matrices A :

$$A_{11} = -\frac{D_{22}.\beta^4}{H^3}$$

$$A_{12} = -\frac{2.(D_{12}+2.D_{66})\alpha^2.\beta^2}{H^3}$$

$$A_{13} = 0$$

$$A_{14} = -\frac{(E_{12}+2.E_{66})\alpha.\beta^2}{H^3}$$

$$A_{15} = 0$$

$$A_{16} = \frac{E_{22}.\beta^2}{H^3}$$

$$A_{17} = -\frac{(E_{12}+2.E_{66})\alpha^2.\beta}{H^3} \qquad (39-\text{III})$$

$$A_{21} = 0$$

$$A_{22} = -\frac{(E_{12}+2.E_{66})\alpha.\beta^2}{H^2}$$

$$A_{23} = 0$$

$$A_{24} = -\frac{\widetilde{D}_{66}.\beta^2}{H^2}$$

$$A_{25} = 0$$

$$A_{26} = 0$$

$$A_{27} = \frac{\left(\widetilde{D}_{12} + \widetilde{D}_{66}\right)\alpha.\beta}{H^2}$$

$$A_{31} = 0$$

$$A_{32} = 0$$

$$A_{33} = \frac{(E_{12} + 2.E_{66})\alpha^2.\beta}{H^2}$$

$$A_{34} = 0$$

$$A_{35} = -\frac{\left(\widetilde{D}_{12} + \widetilde{D}_{66}\right)\alpha.\beta}{H^2}$$

$$A_{36} = 0$$

$$A_{37} = 0$$

Les termes des matrices B :

$$B_{11} = 0$$

$$B_{12} = 0$$

$$B_{13} = -\frac{D_{11}.\alpha^4}{H^3}$$

$$B_{14} = 0$$

$$B_{15} = -\frac{E_1.\alpha^3}{H^3}$$

$$B_{16} = 0$$

$$B_{17} = 0$$

$$B_{21} = 0$$

$$B_{22} = 0$$

$$B_{23} = \frac{E_1.\alpha^3}{H^2} \qquad (40 - \text{III})$$

$$B_{24} = 0$$

$$B_{25} = -\frac{\widetilde{D}_{11}.\alpha^2}{H^2} - \tilde{A}_{55}$$

$$B_{26} = 0$$

$$B_{27} = 0$$

$$B_{31} = -\frac{E_{22}.\beta^3}{H^2}$$

$$B_{32} = 0$$

$$B_{33} = 0$$

$$B_{34} = 0$$

$$B_{35} = 0$$

$$B_{36} = -\frac{\widetilde{D}_{22}.\beta^2}{H^2}$$

$$B_{37} = -\frac{\widetilde{D}_{66}.\alpha^2}{H^2} - \tilde{A}_{44}$$

Le choix judicieux d'une solution particulière constante réduit le système à résoudre à :

$$\begin{bmatrix} B_{13} & B_{15} & 0 \\ B_{23} & B_{25} & 0 \\ 0 & 0 & B_{37} \end{bmatrix}.\begin{Bmatrix} W_p \\ X_p \\ Y_p \end{Bmatrix} + .\begin{Bmatrix} Q_m \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (41 - \text{III})$$

III-3-3 Solution générale :

La solution générale décrivant le comportement du sandwich est la superposition de la solution homogène et de la solution particulière. Dans le cas général où les solutions (P_i) du polynôme caractéristique peuvent être simples ou doubles, la solution générale s'écrit :

$$W(X,Y) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} A_i.e^{P_i.Y} + \sum_{i=1}^{n}(A_i.Y + A_{i+1})e^{P_i.Y} + W_P\right).\sin(m\pi X)$$

$$\gamma_1(X,Y) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} B_i.e^{P_i.Y} + \sum_{i=1}^{n}(B_i.Y + B_{i+1})e^{P_i.Y} + \gamma_{1P}\right).\cos(m\pi X) \qquad (42 - \text{III})$$

$$\gamma_2(X,Y) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} C_i.e^{P_i.Y} + \sum_{i=1}^{n}(C_i.Y + C_{i+1})e^{P_i.Y} + \gamma_{2P}\right).\sin(m\pi X)$$

$m = 1,3, \ldots.$

III-3-4 Calcul des constantes :

Les inconnues de la solution générale sont les constantes A_i, B_i, C_i, A_{i+1}, B_{i+1}, C_{i+1}. Des relations entre constantes sont déduites, en introduisant les solutions trouvées dans le système homogène:

$$B_i = B_S(P_i).A_i$$

$$C_i = C_S(P_i).A_i \qquad (43 - \text{III})$$

$$B_{i+1} = f_{m1}(P_i).A_i + f_{m2}(P_i).A_{i+1}$$

$$C_{i+1} = f_{m3}(P_i).A_i + f_{m4}(P_i).A_{i+1}$$

Où

$$f_{m1}(P_i) = \frac{\bar{R}_1(P_i)}{\Delta\bar{R}(P_i)}$$
$$f_{m2}(P_i) = \frac{\bar{R}_2(P_i)}{\Delta\bar{R}(P_i)} \qquad (44-\text{III})$$
$$f_{m3}(P_i) = \frac{\bar{R}_3(P_i)}{\Delta\bar{R}(P_i)}$$
$$f_{m4}(P_i) = \frac{\bar{R}_4(P_i)}{\Delta\bar{R}(P_i)}$$

Avec

$$B_s(P_i) = \frac{a_{23}(P_i).a_{31}(P_i) - a_{21}(P_i).a_{33}(P_i)}{a_{22}(P_i).a_{33}(P_i)6 - a_{23}(P_i).a_{32}(P_i)} \qquad (45-\text{III})$$
$$C_s(P_i) = \frac{a_{21}(P_i).a_{33}(P_i) - a_{22}(P_i).a_{31}(P_i)}{a_{22}(P_i).a_{33}(P_i)6 - a_{23}(P_i).a_{32}(P_i)}$$

$$R_1(P_i) = \bar{a}_{21} + B_s(P_i).\bar{a}_{22}(P_i) + C_s(P_i).\bar{a}_{23}(P_i) \qquad (46-\text{III})$$
$$R_2(P_i) = \bar{a}_{31} + B_s(P_i).\bar{a}_{32}(P_i) + C_s(P_i).\bar{a}_{33}(P_i)$$
$$\Delta\bar{R}(P_i) = a_{22}(P_i).a_{33}(P_i) - a_{23}(P_i).a_{32}(P_i)$$
$$\bar{R}_1(P_i) = R_2(P_i).a_{23}(P_i) - R_1(P_i).a_{33}(P_i)$$
$$\bar{R}_2(P_i) = a_{31}(P_i).a_{23}(P_i) - a_{21}(P_i).a_{33}(P_i)$$
$$\bar{R}_3(P_i) = R_1(P_i).a_{32}(P_i) - R_2(P_i).a_{22}(P_i)$$
$$\bar{R}_4(P_i) = a_{21}(P_i).a_{32}(P_i) - a_{31}(P_i).a_{22}(P_i)$$

$$\bar{a}_{11}(P_i) = \frac{4.(D_{12} + 2.D_{66})}{H^3}.\alpha^2.\beta^2.P_i - \frac{4..D_{22}}{H^3}.\beta'^4.P_i^3 \qquad (47-\text{III})$$
$$\bar{a}_{12}(P_i) = -\frac{2.(E_{12} + 2.E_{66})}{H^3}.\alpha.\beta^2.P_i$$
$$\bar{a}_{13}(P_i) = -\frac{(E_{12} + 2.E_{66})}{H^3}.\alpha^2.\beta + \frac{3..E_{22}}{H^3}.\beta'^3.P_i^2$$
$$\bar{a}_{21}(P_i) = -\frac{2.(E_{12} + 2.E_{66})}{H^2}.\alpha.\beta^2.P_i$$
$$\bar{a}_{22}(P_i) = -\frac{2.\widetilde{D}_{66}}{H^2}.\beta^2.P_i$$
$$\bar{a}_{23}(P_i) = \frac{(\widetilde{D}_{12} + \widetilde{D}_{66})}{H^2}.\alpha.\beta$$
$$\bar{a}_{31}(P_i) = \frac{(E_{12} + 2.E_{66})}{H^2}.\alpha^2.\beta - \frac{3..E_{22}}{H^2}.\beta'^3.P_i^2$$

$$\bar{a}_{32}(P_i) = -\frac{(\widetilde{D}_{12} + \widetilde{D}_{66})}{H^2}.\alpha.\beta$$

$$\bar{a}_{33}(P_i) = \frac{2.\widetilde{D}_{66}}{H^2}.\beta^2.P_i$$

Ainsi la détermination des constantes A_i et A_{i+1} permet de calculer B_i, B_{i+1}, C_i et C_{i+1}. Les constantes A_i et A_{i+1} sont calculées en tenant compte des conditions aux limites du problème.

III-3-5 Conditions aux limites :

Pour tenir compte des bords libres, les résultantes $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, T_3, C_2$ sont considérées nulles pour :

$$y = \pm \frac{b}{2}\ , \forall\ x\ et\ z$$

En effectuant un changement de variable et en introduisant les solutions de Lévy, on obtient les huit équations permettant de déterminer les huit constantes de la solution de Lévy.

$$2.E_{66}.\alpha.\beta.W_m'\left(X,-\frac{1}{2}\right) - \widetilde{D}_{66}.\beta.X_m'\left(X,-\frac{1}{2}\right) - \widetilde{D}_{66}.\alpha.Y_m\left(X,-\frac{1}{2}\right) = 0 \qquad (48-\text{III})$$

$$2.E_{66}.\alpha.\beta.W_m'\left(X,\frac{1}{2}\right) - \widetilde{D}_{66}.\beta.X_m'\left(X,-\frac{1}{2}\right) - \widetilde{D}_{66}.\alpha.Y_m\left(X,\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$-E_{12}.\alpha^2.W_m\left(X,-\frac{1}{2}\right) + E_{22}.\beta^2.W''\left(X,-\frac{1}{2}\right) + \widetilde{D}_{12}.\alpha.X_m\left(X,-\frac{1}{2}\right)$$

$$-\widetilde{D}_{22}.\beta.Y_m'\left(X,-\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$-E_{12}.\alpha^2.W_m\left(X,\frac{1}{2}\right) + E_{22}.\beta^2.W''\left(X,\frac{1}{2}\right) + \widetilde{D}_{12}.\alpha.X_m\left(X,\frac{1}{2}\right) - \widetilde{D}_{22}.\beta.Y_m'\left(X,\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$-(D_{12}+4.D_{66}).\alpha^2.\beta.W_m'\left(X,-\frac{1}{2}\right) + D_{22}.\beta^3.W_m''''\left(X,-\frac{1}{2}\right)$$

$$+ (E_{12}+2.E_{66}).\alpha.\beta.X_m'\left(X,-\frac{1}{2}\right) + 2.E_{66}.\alpha^2.Y_m\left(X,-\frac{1}{2}\right)$$

$$- E_{22}.\beta^2.Y_m''\left(X,-\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$-(D_{12}+4.D_{66}).\alpha^2.\beta.W_m'\left(X,\frac{1}{2}\right) + D_{22}.\beta^3.W_m''''\left(X,\frac{1}{2}\right) + (E_{12}+2.E_{66}).\alpha.\beta.X_m'\left(X,\frac{1}{2}\right)$$

$$+ 2.E_{66}.\alpha^2.Y_m\left(X,\frac{1}{2}\right) - E_{22}.\beta^2.Y_m''\left(X,\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$D_{12}.\alpha^2.W_m\left(X,-\frac{1}{2}\right)-D_{22}.\beta^2.W''\left(X,-\frac{1}{2}\right)-E_{12}.\alpha.X_m\left(X,-\frac{1}{2}\right)+E_{22}.\beta.Y'\left(X,-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$D_{12}.\alpha^2.W_m\left(X,\frac{1}{2}\right)-D_{22}.\beta^2.W''\left(X,\frac{1}{2}\right)-E_{12}.\alpha.X_m\left(X,\frac{1}{2}\right)+E_{22}.\beta.Y'\left(X,\frac{1}{2}\right)=0$$

III-4 Conclusion :

Pour les modèles de Reddy et Touratier, le polynôme caractéristique est de degré **8**, et les conditions aux limites sont les mêmes. Seule la fonction de cisaillement change. On peut remarquer que le modèle de Mindlin conduit à :$E_{ij}=D_{ij}=\widetilde{D}_{ij}$; le polynôme caractéristique est de degré **6** et il faut alors les six dernières relations pour déterminer les six constantes. Pour le modèle de Kirchhoff-Love, le polynôme caractéristique est de degré **4** et les quatre dernières relations sont nécessaires pour déterminer les quatre constantes du problème.

Chapitre IV

Simulation et analyse des résultats

Chapitre IV

Simulation et analyse des résultats.

Le but de ce chapitre est l'application des différentes méthodes d'homogénéisations (analytiques est numériques) et la modélisation en flexion 3 points de structures sandwichs avec pour objectif la validation de nos résultats avec les résultats expérimentaux.

Les calculs ont été effectué sur plusieurs enchantions de panneaux sandwich à âme en nid d'abeille (aluminium/aluminium) de différente densité fourni par EURO-COMPSITE.

	ECM 19.2-29	ECM 9.6-55	ECM 6.4-82	ECM 3.2-130
Epaisseur du feuillard (µm)	76	76	75	75
Diamètre des cellules (mm)	19.2	9.6	6.4	3.2
Densité (Kg/m^3)	29	55	82	130

Tableau 1-IV : Propriétés des panneaux sandwichs utilisés.

IV-1 Présentation des logiciels de calcul Ansys et Matlab :

Pour la modélisation des panneaux sandwichs en flexion deux logiciels ont été utilisé : Ansys pour la modélisation numérique et Matlab pour la modélisation analytique.

IV-1-1 Présentation du code de calcul Ansys 12.1 :

Ansys 12.1 est un code d'éléments finis d'usage général dédié à la résolution numérique d'une large variété de problèmes physique en général et de mécanique en particulier. Ces problèmes portent notamment sur: l'analyse structurale en statique et en dynamique (linéaire et non linéaire), transfert de chaleur, dynamique des fluides, acoustique, électromagnétique. ANSYS 12.1 a été développé à Canonsburg en Pennsylvanie il est l'un des plus grands développeurs et fournisseur de logiciels de simulation numérique.

De façon générale, une résolution par éléments finis comporte trois étapes :

Première étape : Préparation des données ou Pré-processing pour définir le problème; les étapes majeurs sont données ci-dessous:

- définition des points clés (keypoints) /lignes/surfaces/volumes ;
- définir le type d'élément fini, ses propriétés géométriques et les propriétés physiques des matériaux;
- maillage des lignes /surfaces/volume si cela est requis.

Les données nécessaires dépendent évidemment de la de la dimension du problème. (1D, 2D, axisymétrique, 3D).

Deuxième étape : Traitement ou Processing: assigner les charges, contraintes (conditions aux limites) et résolution; on spécifie notamment la nature des charges (localisées et/ou distribuées), contraintes ou conditions aux limites (translation et rotation) et, finalement, on résout le système d'équations.

Troisième étape : Post-processing: analyse et visualisation des résultats; lors de cette étape, on peut examiner:

- la liste des déplacements nodaux ;
- les forces et des moments au niveau des éléments;
- tracé des Déformées.

Dans le cadre de notre étude des programmes en Fortran ont été développés pour permettre de calculé les modules homogénéisés du panneau sandwich. Ainsi qu'un programme dédier a la flexion 3 points. Le but de cette démarche est de facilité l'utilisation d'Ansys car il sufi de changer les paramètres du programme (propriétés mécaniques, dimansion et force appliqué) pour avoir les résultats des différents panneaux sandwichs. Sans avoir a recrée la géométrie du panneau sandwich pour chaque simulation.

Les programmes développés sont présentés dans l'annexe B.

L'organigramme du code par éléments finis est décrit par la figure 1-IV

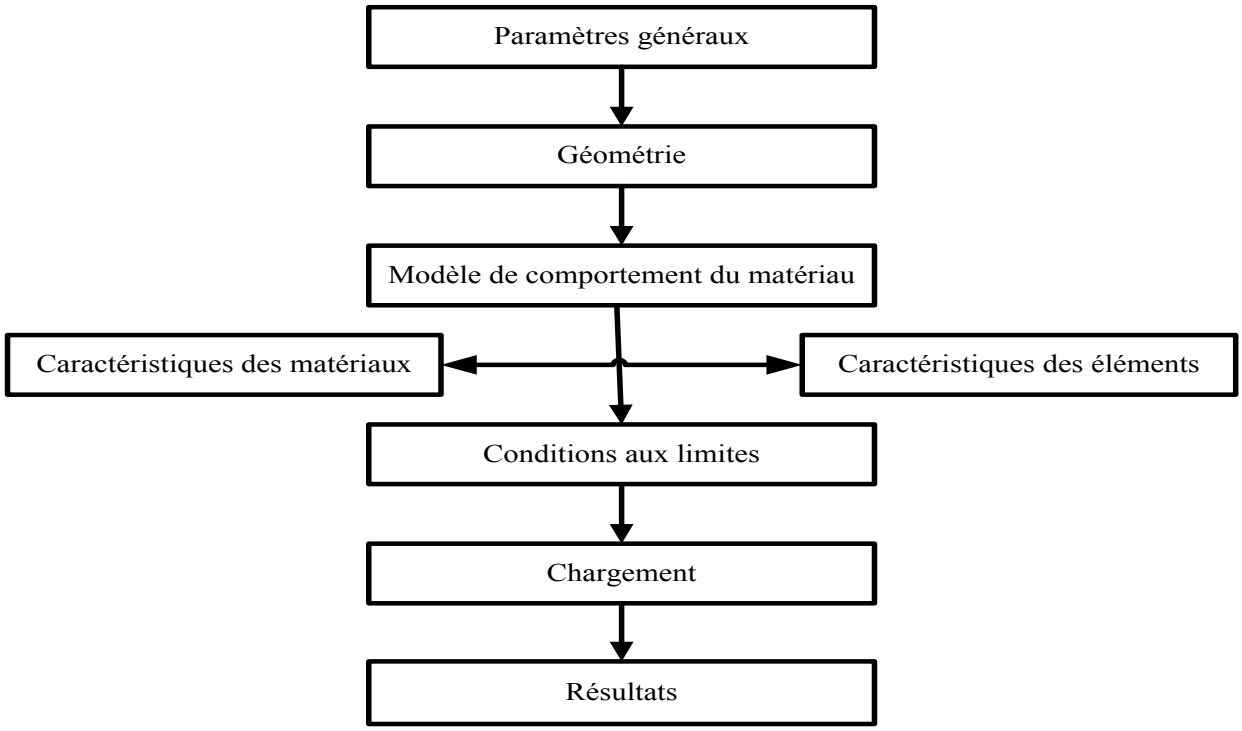


Figure 1-IV : Organigramme de programmation par d'éléments finis.

IV-1-2 Présentation du logiciel de calcul Matlab :

Matlab est une abréviation de Matrix Laboratory. Écrit à l'origine, en Fortran, par *C.* Moler, Matlab était destiné à faciliter l'accès au logiciel matriciel développé dans les projets LINPACK et EISPACK. La version actuelle, écrite en C par the MathWorks Inc., existe en version professionnelle et en version étudiant. Sa disponibilité est assurée sur plusieurs plates-formes : Sun, Bull, HP, IBM, compatibles PC (DOS, Unix ou Windows), Macintoch, iMac et plusieurs machines parallèles.

Matlab est un environnement puissant, complet et facile à utiliser destiné au calcul scientifique. Il apporte aux ingénieurs, chercheurs et à tout scientifique un système interactif intégrant calcul numérique et visualisation. C'est un environnement performant, ouvert et programmable qui permet de remarquables gains de productivité et de créativité.

Matlab est un environnement complet, ouvert et extensible pour le calcul et la visualisation. Il dispose de plusieurs centaines (voire milliers, selon les versions et les modules optionnels autour du noyeau Matlab) de fonctions mathématiques, scientifiques et techniques.

L'approche matricielle de Matlab permet de traiter les données sans aucune limitation de taille et de réaliser des calculs numériques et symboliques de façon fiable et rapide. Grâce aux fonctions graphiques de Matlab, il devient très facile de modifier interactivement les différents paramètres des graphiques pour les adapter selon nos souhaits.

L'approche ouverte de Matlab permet de construire un outil sur mesure. On peut inspecter le code source et les algorithmes des bibliothèques de fonctions (Toolboxes), modifier des fonctions existantes et ajouter d'autres.

Matlab possède son propre langage, intuitif et naturel qui permet des gains de temps de CPU spectaculaires par rapport à des langages comme le C, le TurboPascal et le Fortran. Avec Matlab, on peut faire des liaisons de façon dynamique, à des programmes C ou Fortran, échanger des données avec d'autres applications (via la DDE : Matlab serveur ou client) ou utiliser Matlab comme moteur d'analyse et de visualisation.

Matlab comprend aussi un ensemble d'outils spécifiques à des domaines, appelés Toolboxes (ou Boîtes à Outils). Indispensables à la plupart des utilisateurs, les Boîtes à Outils sont des collections de fonctions qui étendent l'environnement Matlab pour résoudre des catégories spécifiques de problèmes. Les domaines couverts sont très variés et comprennent notamment le traitement du signal, l'automatique, l'identification de systèmes, les réseaux de neurones, la logique floue, le calcul de structure, les statistiques, etc.

Matlab permet le travail interactif soit en mode commande, soit en mode programmation ; tout en ayant toujours la possibilité de faire des visualisations graphiques. Considéré comme un des meilleurs langages de programmations (C ou Fortran), Matlab possède les particularités suivantes par rapport à ces langages :

- la programmation facile,
- la continuité parmi les valeurs entières, réelles et complexes,
- la gamme étendue des nombres et leurs précisions,
- la bibliothèque mathématique très compréhensive,
- l'outil graphique qui inclut les fonctions d'interface graphique et les utilitaires,
- la possibilité de liaison avec les autres langages classiques de programmations (C ou Fortran).

L'implémentation de la démarche de résolution du problème de flexion 3 ponts s'est faite selon les étapes du tableau le programme développé sera présenté en annexe.

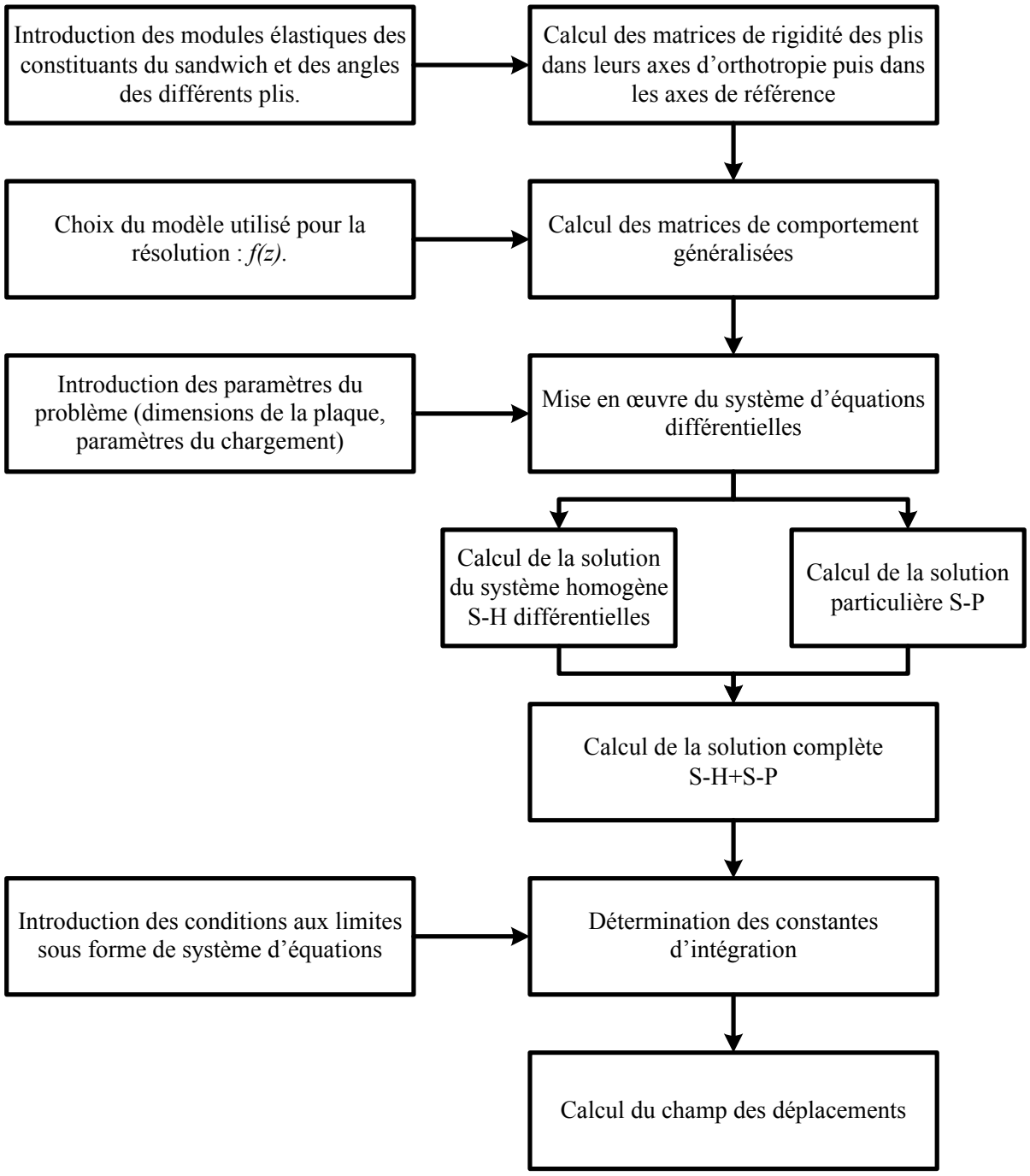


Figure 2-IV : Organigramme de la résolution analytique.

IV-2 Homogénéisation des panneaux sandwichs à âme en nid d'abeille par la méthode analytique :

L'objectif de l'homogénéisation analytique est la détermination des constantes élastiques par la méthode de Gibson développée précédemment dans le chapitre II. Un rappel des équations est présenté dans le tableau qui suit :

E_x	$E_x = E_0\left(\frac{t}{a}\right)^3 . \frac{cos}{\left(\frac{b}{a}+sin\theta\right).sin^2\theta}$
E_y	$E_y = E_0\left(\frac{t}{a}\right)^3 . \frac{\frac{b}{a}+sin\theta}{cos^3\theta}$
E_z	$E_z = E_0\left(\frac{t}{a}\right)^3 . \frac{\frac{b}{a}+sin\theta}{\left(\frac{b}{a}\right)^2.\left(1+\frac{2b}{a}\right).cos\theta}$
ν_{xy}	$\nu_{xy} = \frac{cos^2\theta}{\left(\frac{b}{a}+sin\theta\right).sin\theta}$
ν_{yx}	$\nu_{yx} = \frac{\left(\frac{b}{a}+sin\theta\right).sin\theta}{cos^2\theta}$
$\nu_{zx}\ \nu_{zy}$	$\nu_{zx} = \nu_{zy} = \nu$
ν_{xz}	$\nu_{xz} = \frac{E_x}{E_z}\nu_{zx}$
ν_{yz}	$\nu_{yz} = \frac{E_y}{E_z}\nu_{zy}$
G_{xy}	$G_{xy} = E_0\left(\frac{t}{a}\right)^3 . \frac{\frac{b}{a}+sin\theta}{\left(\frac{b}{a}\right)^2.\left(1+\frac{2b}{a}\right).cos\theta}$
G_{yz}	$G.\left(\frac{t}{a}\right).\frac{\frac{b}{a}+sin\theta}{\left(1+\frac{2b}{a}\right).cos\theta} \leq G_{yz} \leq G\left(\frac{t}{a}\right).\frac{\frac{b}{a}+2.sin^2\theta}{2.cos\theta.\left(\frac{b}{a}+sin\theta\right)}$

Tableau 2-IV: Modules de Gibson.

Les résultats de l'homogénéisation analytique des modules sont présentés dans le tableau qui suit :

	29 (Kg/m^3)	55 (Kg/m^3)	82 (Kg/m^3)	130 (Kg/m^3)
$E_x(MPa)$	0.05135	0.41082	1.33252	10.66017
$E_y(MPa)$	0.05135	0.41082	1.33252	10.66017
$E_z(MPa)$	546.249	1092.5	1617.187	3234.375
$G_{xy}(MPa)$	0.01283	0.1027	0.333	2.665
$G_{yz}(MPa)$	102.67916	205.35833	303.98437	607.96875
ν_{xy}	1	1	1	1
ν_{xz}	0.0000232	0.000093	0.000203	0.000815
ν_{yz}	0.0000232	0.000093	0.000203	0.000815

Tableau 3-IV : Modules élastiques homogénéisés par la méthode analytique de Gibson.

IV-3 Homogénéisation des panneaux sandwichs à âme en nid d'abeille par la méthode numérique:

L'objectif est la détermination des constantes élastiques par une méthode d'homogénéisation numérique appliquée à l'échelle d'un volume élémentaire représentatif du nid d'abeille afin de comparer les résultats avec ceux obtenus analytiquement.

IV-3-1 Le volume élémentaire représentatif « V.E.R » :

Il est nécessaire pour des raisons de temps et de puissance de calcul de réduire les modèles en utilisant les symétries. La modélisation d'une structure en nids d'abeilles peut s'effectuer sur une seule cellule de base qui est le motif à partir duquel l'ensemble de la structure est obtenue par des translations dans le plan. Dans les structures en nida, le nombre de motifs pouvant être crée en abondant. Le choix de V.E.R est dicté par le souci de comparaison et de vérification de nos résultats. Le nombre de cellules est le même pour chaque densité, 4 suivant Y et 10 suivant X (figure 1-IV).

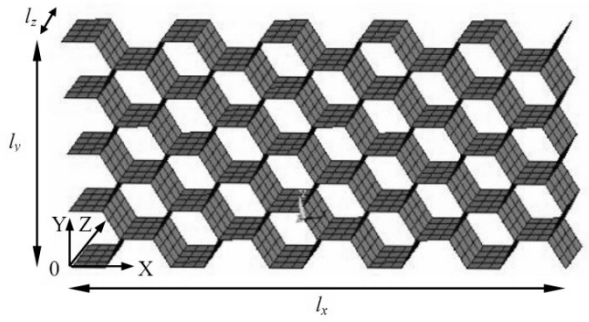


Figure 3-IV : V.E.R. du nid d'abeille.

IV-3-2 Homogénéisation des propriétés $E_i$et υ_{ij} :

Trois simulations de traction permettent de déterminer les modules d'élasticité et les coefficients de Poisson.

On utilisera la relation simple de comportement dans le cas d'une sollicitation uni axiale :

$$E_i = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \quad i = x, y, z \qquad (1-\text{IV})$$

$\sigma_i$est déduite à partir des efforts de liaisons :

$$\sigma_i = \frac{F_i}{S} \qquad (2-\text{IV})$$

F_i est la force de liaison du V.E.R. suivant la direction *i* (déduite à partir du déplacement δU_i imposé). *S* est la surface perpendiculaire au déplacement imposéδU_i.

Les déformations $\varepsilon_i, \varepsilon_j$ sont :

$$\varepsilon_i = \frac{\delta U_i}{l_i} \varepsilon_j = \frac{\delta U_j}{l_j} \qquad i \neq j \quad i, j = x, y, z \qquad (3-\text{IV})$$

Les coefficients de Poisson sont déterminés par la relation :

$$\nu_{ij} = -\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_j} \qquad i \neq j \quad i, j = x, y, z \qquad (4-\text{IV})$$

IV-3-2-1 Détermination du module E_x:

- Conditions aux limites :

La face de gauche est arrêtée en translation suivant X (Ux = 0) et un déplacement de 1mm est imposé sur la face de droite (face opposée). Les nœuds des plans de symétrie du nida servent pour bloquer les déplacements Uy et Uz (Figure 4-IV).

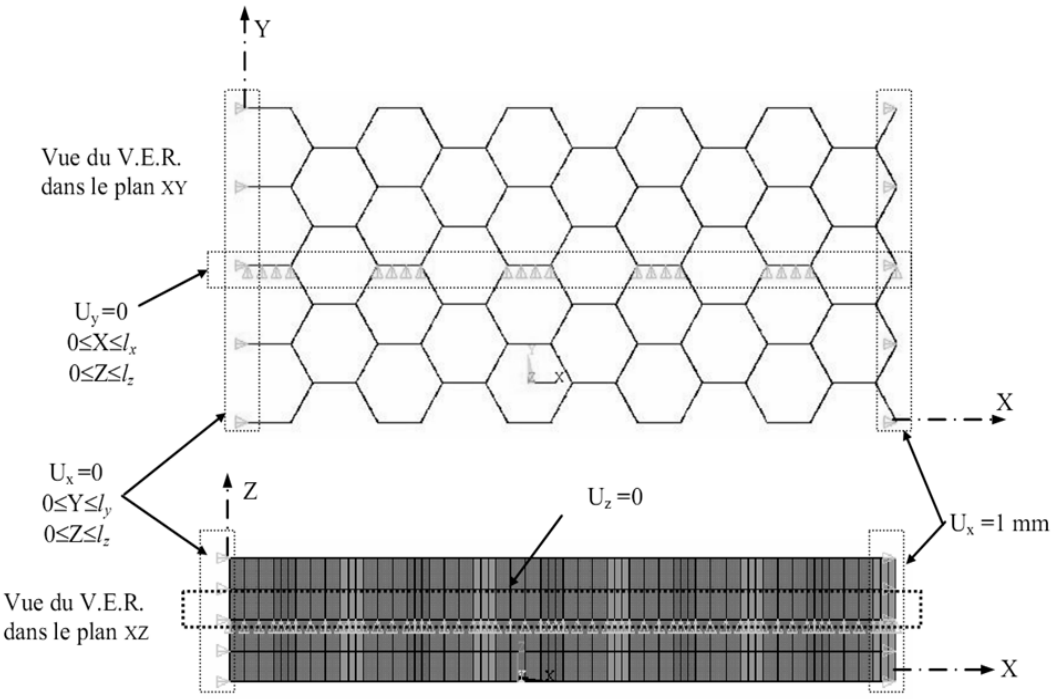


Figure 4-IV : Conditions aux limites pour une traction suivant la direction X.

- Sans couplage

Les conditions aux limites appliquées sont :

Pour X=0 on bloque le déplacement suivant X (Ux=0) pour tous les nœuds allant d'Y=0 à Y=ly et de Z=0 à Z=lz.

Pour X=lx on impose un déplacement suivant X (Ux=1 mm) pour tous les nœuds allant d'Y=0 à Y=ly et de Z=0 à Z=lz.

Pour Y=ly/2 on bloque le déplacement suivant Y (Uy=0) pour tous les nœuds allant de X=0 à X=lx et de Z=0 à Z=lz.

Pour Z=lz/2, on bloque le déplacement suivant Z (Uz=0) pour tous les nœuds allant de X=0 à X=lx et de Y=0 à Y=ly.

- Avec couplage

Les conditions aux limites appliquées sont :

Pour X=0 on bloque le déplacement suivant X (*Ux*=0) pour tous les nœuds allant d'Y=0 à Y=*ly* et de Z=0 à Z=*lz*.

Pour X=*lx* on impose un déplacement suivant X (*Ux*=1mm) pour tous les nœuds allant d'Y=0 à Y=*ly* et de Z=0 à Z=*lz*.

Pour Y=*ly*/2 on bloque le déplacement suivant Y (*Uy*=0) pour tous les nœuds allant de X=0 à X=*lx* et de Z=0 à Z=*lz*.

Pour Z=*lz*/2, on bloque le déplacement suivant Z (*Uz*=0) pour tous les nœuds allant de X=0 à X=*lx* et de Y=0 à Y=*ly*.

Pour Y=0 on couple en *Uy* les nœuds de la face latérale 2.

Pour Y=*ly* on couple en *Uy* les nœuds de la face latérale 1.

Pour Z=0 on couple en *Uz* les nœuds de la face inférieure.

Pour Z=*lz* on couple en *Uz* les nœuds de la face supérieure.

Déformée : la Figure 5-IV illustre le V.E.R. du nida la déformée suivante Sous l'effet de la traction uni axiale

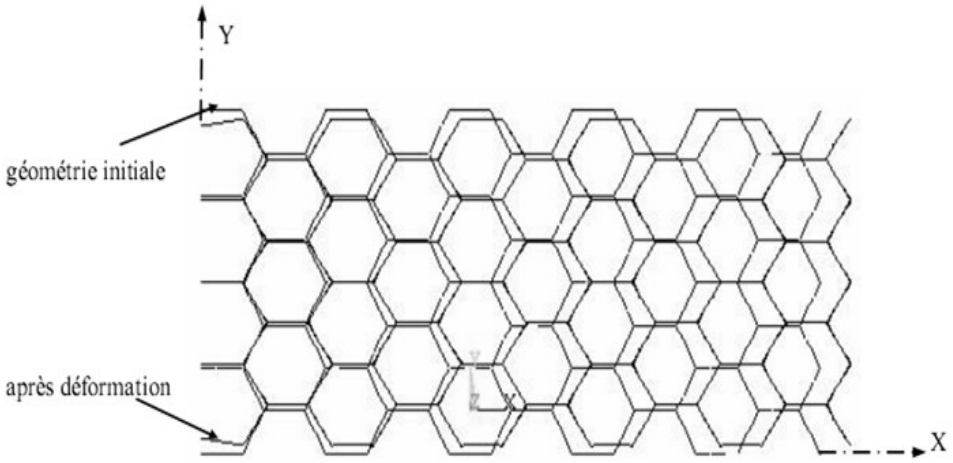


Figure 5-IV : Déformée du V.E.R. pour une sollicitation de la traction suivant la direction X.

IV-3-2-2 Résultats du module E_x :

Les tableaux qui suit présente les résultats obtenus par simulations numériques avec et sans couplage (conditions aux limites) pour les panneaux sandwichs de densité 29 (Kg/m^3), 55 (Kg/m^3), 82 (Kg/m^3) et 130 (Kg/m^3).

- panneaux sandwichs de densité 29 (Kg/m^3)

Densité(Kg/m^3)	29	
Conditions aux limites	Avec couplage	Sans couplage
$\delta L_x(mm)$	1	1
$\delta L_y(mm)$	0.259	0.294
$\delta L_z(mm)$	-0.000008	-0.00003
ε_x	0.00644	0.00644
ε_y	-0.018	-0.018
ε_z	-0.000002	-0.000002
$F_x(N)$	0.24511	0.22557
$\sigma_x(MPa)$	0.000322	0.000296
Ansys		
$E_x(MPa)$	0.0500	0.0460
ν_{xy}	0.999	0.993
ν_{xz}	0.000016	0.000028

Tableau 4-IV : Résultats du module E_x pour le panneau sandwich de densité 29 (Kg/m^3).

- panneaux sandwichs de densité 55 (Kg/m^3)

Densité(Kg/m^3)	55	
Conditions aux limites	Avec couplage	Sans couplage
$\delta L_x(mm)$	1	1
$\delta L_y(mm)$	-0.443	-0.501
$\delta L_z(mm)$	-0.00021	-0.00029
ε_x	0.01288	0.01288
ε_y	-0.01744	0.01972
ε_z	-0.000022	-0.00003
$F_x(N)$	1.9765	1.8215
$\sigma_x(MPa)$	0.005198	0.00479
Ansys		
$E_x(MPa)$	0.4034	0.3717
ν_{xy}	0.9590	1.0845
ν_{xz}	0.0012	0.0016

Tableau 5-IV : Résultats du module E_x pour le panneau sandwich de densité 55 (Kg/m^3).

- panneaux sandwichs de densité 82 (Kg/m^3)

Densité(Kg/m^3)	82	
Conditions aux limites	Avec couplage	Sans couplage
$\delta L_x(mm)$	1	1
$\delta L_y(mm)$	-0.420	-0.433
$\delta L_z(mm)$	-0.0009	-0.0012
ε_x	0.01933	0.01933
ε_y	-0.0165	-0.01704
ε_z	-0.000056	-0.00012
$F_x(N)$	6.3804	5.8933
$\sigma_x(MPa)$	0.02517	0.02325
Ansys		
$E_x(MPa)$	1.3023	1.2028
ν_{xy}	0.9092	0.9373
ν_{xz}	0.0031	0.0041

Tableau 6-IV : Résultats du module E_x pour le panneau sandwich de densité 82 (Kg/m^3).

- panneaux sandwichs de densité 130 (Kg/m^3)

Densité(Kg/m^3)	130	
Conditions aux limites	Avec couplage	Sans couplage
$\delta L_x(mm)$	1	1
$\delta L_y(mm)$	0.515	0.523
$\delta L_z(mm)$	0.00040	0.00049
ε_x	0.03867	0.03867
ε_y	-0.024133	-0.0205
ε_z	-0.000033	-0.00003
$F_x(N)$	51.087	47.213
$\sigma_x(MPa)$	0.4032	0.37268
Ansys		
$E_x(MPa)$	10.427	9.6367
ν_{xy}	1.1148	1.1321
ν_{xz}	0.0013	0.0016

Tableau 7-IV : Résultats du module E_x pour le panneau sandwich de densité 130 (Kg/m^3).

IV-3-2-3 Détermination du module E_y :

Conditions aux limits :Pour la traction suvant Y les conditions aux limites sont :

- Sans couplage

La face latérale 2 est bloquée (*Uy*=0) et un déplacement est imposé sur la face latérale 1 (*Uy*=1 mm). Le plan médian est utilisé pour bloquer les déplacements des noeuds suivant X pour avoir une déformée homogène. Pour *Uz*, les CL restent inchangées par rapport à la simulation de traction suivant Y.

- Avec couplage

Une deuxième étape concerne la simulation réalisée en imposant des couplages de noeuds en plus des CL initiales. Le principe est identique : on garde les conditions aux limites de la simulation precedante est on ajoute le couplage de *Ux* pour les noeuds des faces 3 et 4 et le couplage de *Uz* pour les noeuds des faces inférieure et extérieure.

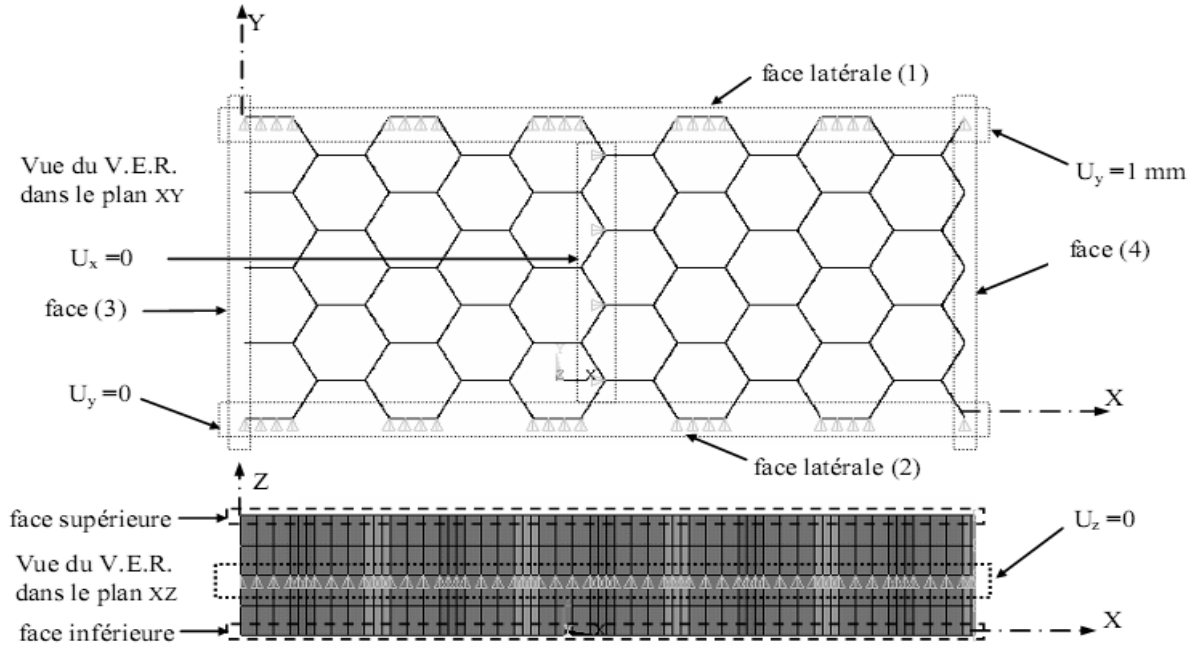


Figure 6-IV : Conditions aux limites pour la traction suivant Y.

Déformée : La figure 7-IV représente la déformée de la structure nida sous l'effet de la traction suivant Y. le comportement est satisfaisant puisque l'on peut noter de l'allongement suivant Y et de la contraction suivant X sont globalement uniformes sur le V.E.R..

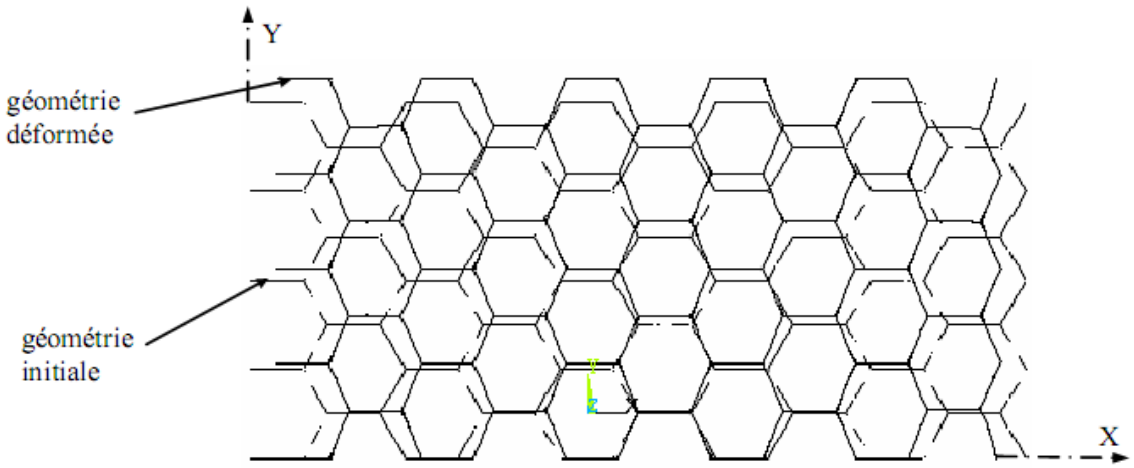


Figure 7-IV : Déformée après simulation de la traction suivant Y.

IV-3-2-4 Résultats du module E_y:

Les tableaux qui suit présente les résultats obtenus par simulations numériques avec et sans couplage (conditions aux limites) pour les panneaux sandwichs de densité 29 (Kg/m^3), 55 (Kg/m^3), 82 (Kg/m^3) et 130 (Kg/m^3).

- Panneaux sandwichs de densité 29 (Kg/m^3)

Densité(Kg/m^3)	29	
Conditions aux limites	Avec couplage	Sans couplage
$\delta L_x (mm)$	2.01	2.30
$\delta L_y (mm)$	1	1
$\delta L_z (mm)$	0.0003	0.00105
ε_x	-0.0365	-0.04183
ε_y	0.01157	0.01157
ε_z	-0.0000189	-0.000066
$F_y (N)$	0.90648	0.89049
$\sigma_y (MPa)$	0.00066	0.00065
Ansys		
$E_y (MPa)$	0.05734	0.05633
ν_{yx}	0.9284	1.0624
ν_{yz}	0.00048	0.0016

Tableau 8-IV : Résultats du module E_y pour les deux conditions aux limites densité 29(Kg/m^3).

- Panneaux sandwichs de densité 55 (Kg/m^3)

Densité(Kg/m^3)	55	
Conditions aux limites	Avec couplage	Sans couplage
$\delta L_x(mm)$	-2.012	-2.156
$\delta L_y(mm)$	1	1
$\delta L_z(mm)$	-0.00025	-0.00028
ε_x	-0.03659	-0.0392
ε_y	0.02314	0.02314
ε_z	-0.00001	-0.00001
$F_y(N)$	7.3097	7.1818
$\sigma_y(MPa)$	0.0107	0.0105
Ansys		
$E_y(MPa)$	0.4624	0.45435
ν_{yx}	0.929	0.9959
ν_{yz}	0.0004	0.0004

Tableau 9-IV : Résultats du module E_y pour les deux conditions aux limites densité 55 (Kg/m^3).

- Panneaux sandwichs de densité 82 (Kg/m^3) :

Densité(Kg/m^3)	82	
Conditions aux limites	Avec couplage	Sans couplage
$\delta L_x(mm)$	-2.311	-2.403
$\delta L_y(mm)$	1	1
$\delta L_z(mm)$	-0.0006	-0.00071
ε_x	-0.0420	-0.04370
ε_y	0.03472	0.03472
ε_z	-0.000037	-0.000044
$F_y(N)$	23.595	23.184
$\sigma_y(MPa)$	0.0518	0.0509
Ansys		
$E_y(MPa)$	1.4927	1.4667
ν_{yx}	1.0675	1.1100
ν_{yz}	0.0009	0.00113

Tableau 10-IV : Résultats du module E_y pour les deux conditions aux limites densité 82 (Kg/m^3).

- Panneaux sandwichs de densité 130 (Kg/m^3)

Densité(Kg/m^3)	130	
Conditions aux limites	Avec couplage	Sans couplage
$\delta L_x(mm)$	2.048	2.152
$\delta L_y(mm)$	1	1
$\delta L_z(mm)$	0.00088	0.00091
ε_x	-0.0372	-0.03913
ε_y	0.0694	0.0694
ε_z	-0.00055	-0.000057
$F_y(N)$	188.84	185.56
$\sigma_y(MPa)$	0.829	0.815
Ansys		
$E_y(MPa)$	11.946	11.739
ν_{yx}	0.9460	0.9940
ν_{yz}	0.0140	0.001456

Tableau 11-IV : Résultats du module E_y pour les deux conditions aux limites densité 130 (Kg/m^3).

IV-3-2-5 Détermination du module E_z:

Conditions aux limites : Pour la traction suivant Y les conditions aux limits sont :

Un déplacement de 0,1 mm suivant l'axe Z est imposé à la face supérieure tout en bloquant la face inférieure. Afin d'empêcher les déplacements *Ux* et *Uy*, les nœuds des plans médians sont bloqués pour avoir une déformée homogène.

Comme pour les deux cas de sollicitations précédents nous avons tenté d'améliorer le modèle en couplant certains noeuds de la structure nous avons constaté que les résultats sont exactement les mêmes. Le couplage des noeuds n'apporte rien lors d'une sollicitation suivant l'axe Z.

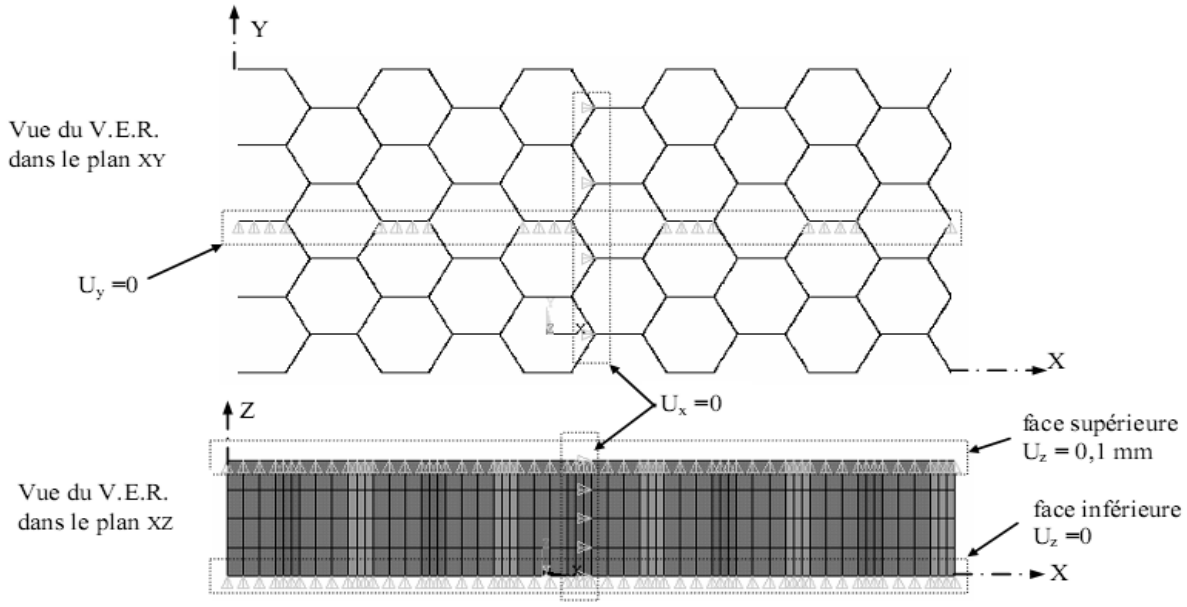


Figure 8-IV : CL pour la traction suivant l'axe Z.

Déformée : Figure 9-IV présente la déformée du nida sous sollicitation suivant l'axe Z.

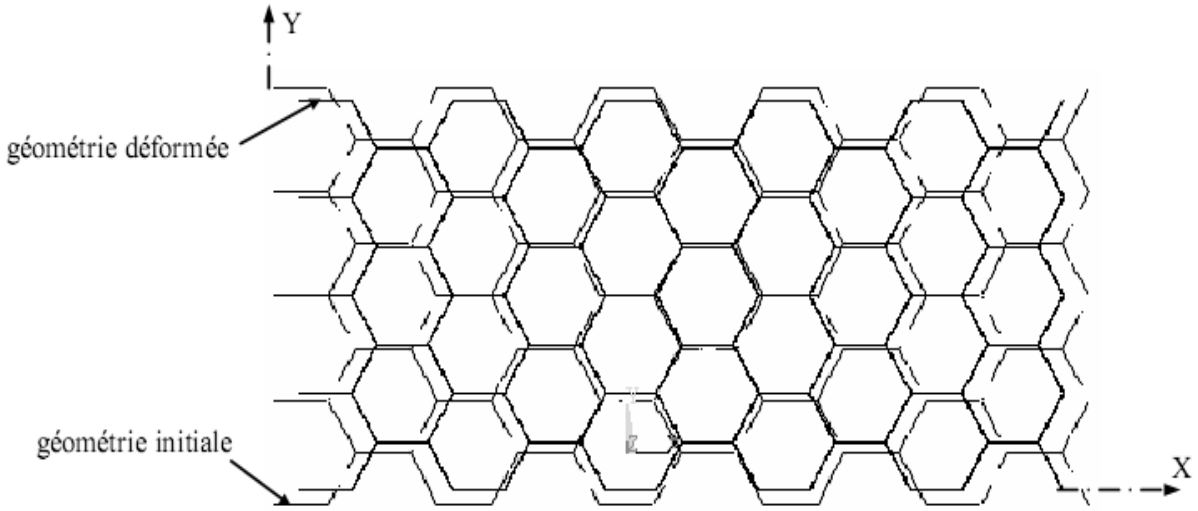


Figure 9-IV : Déformée pour un déplacement imposé suivant l'axe Z.

IV-3-2-6 Résultats du module E_z:

Les tableaux qui suit présente les résultats obtenus par simulations numériques avec et sans couplage (conditions aux limites) pour les panneaux sandwichs de densité 29 (Kg/m^3), 55 (Kg/m^3), 82 (Kg/m^3) et 130 (Kg/m^3).

- Panneaux sandwichs de densité 29 (Kg/m^3)

Densité(Kg/m^3)	29	
Conditions aux limites	Avec couplage	Sans couplage
$\delta L_x(mm)$	-1.236	-1.236
$\delta L_y(mm)$	-0.571	-0.571
$\delta L_z(mm)$	0.1	0.1
ε_x	-0.0224	-0.0224
ε_y	-0.0224	-0.0224
ε_z	0.01136	0.01136
$F_z(N)$	89176	89176
$\sigma_z(MPa)$	6.650	6.650
Ansys		
$E_z(MPa)$	585.26	585.26
ν_{zx}	0.356	0.356
ν_{zy}	0.356	0.356

Tableau 12-IV : Résultats du module E_z pour les deux conditions aux limites densité 29(Kg/m^3).

- Panneaux sandwichs de densité 55 (Kg/m^3)

Densité(Kg/m^3)	55	
Conditions aux limites	Avec couplage	Sans couplage
$\delta L_x(mm)$	-1.275	-1.275
$\delta L_y(mm)$	-0.589	-0.589
$\delta L_z(mm)$	0.1	0.1
ε_x	-0.0231	-0.0231
ε_y	-0.0231	-0.0231
ε_z	0.01136	0.01136
$F_z(N)$	44592	44592
$\sigma_z(MPa)$	13.3	13.3
Ansys		
$E_z(MPa)$	1170.45	1170.45
ν_{zx}	0.367	0.367
ν_{zy}	0.367	0.367

Tableau 13-IV : du module $E_z$pour les deux conditions aux limites densité 55 (Kg/m^3).

- Panneaux sandwichs de densité 82 (Kg/m^3)

Densité(Kg/m^3)	82	
Conditions aux limites	Avec couplage	Sans couplage
$\delta L_x(mm)$	-1.296	-1.296
$\delta L_y(mm)$	-0.598	-0.598
$\delta L_z(mm)$	0.1	0.1
ε_x	-0.0235	-0.0235
ε_y	-0.0235	-0.0235
ε_z	0.01136	0.01136
$F_z(N)$	29334	29334
$\sigma_z(MPa)$	19.68	19.68
Ansys		
$E_z(MPa)$	1732.682	1732.682
ν_{zx}	0.373	0.373
ν_{zy}	0.373	0.373

Tableau 14-IV : Résultats du module $E_z$pour les deux conditions aux limites densité 82 (Kg/m^3).

- Panneaux sandwichs de densité 130 (Kg/m^3)

Densité(Kg/m^3)	130	
Conditions aux limites	Avec couplage	Sans couplage
$\delta L_x(mm)$	-1.345	-1.345
$\delta L_y(mm)$	-0.621	-0.621
$\delta L_z(mm)$	0.1	0.1
ε_x	-0.0244	-0.0244
ε_y	-0.0244	-0.0244
ε_z	0.01136	0.01136
$F_z(N)$	14663	14663
$\sigma_z(MPa)$	39.379	39.379
Ansys		
$E_z(MPa)$	3465.357	3465.357
ν_{zx}	0.388	0.388
ν_{zy}	0.388	0.388

Tableau 15-IV : Résultats du module $E_z$pour les deux conditions aux limites densité 130 (Kg/m^3).

IV-3-3 Homogénéisation des propriétés G_{ij}:

Dans cette méthode comme les précédentes, les caractéristiques élastiques sont déterminées par l'analyse des efforts aux liaisons en utilisant les lois de comportement en hypothèse de petites perturbations.

Le module de cisaillement est défini par la relation :

$$G_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{\gamma_{ij}} \quad i \neq j \; et \; i,j = x,y,z \qquad (5-\text{IV})$$

Avec la contrainte de cisaillement :

$$\tau_{ij} = \frac{F_i}{S_{ik}} \quad i \neq j \neq k \; et \; i,j,k = x,y,z \qquad (6-\text{IV})$$

Et la déformation de cisaillement :

$$\gamma_{ij} \approx \tan\gamma_{ij} = \frac{\delta U_i}{l_j}, i \neq j. \qquad (7-\text{IV})$$

F_i est déterminée par la simulation numérique.

IV-3-3-1 Détermination du module G_{xy}:

Nous allons décrire comment à partir de déplacements imposés dans un plan *ij* nous pouvons obtenir *Gij*.

- Condition aux limites : Pour déterminer G_{xy}, les CL sont les suivantes :

La méthode de détermination des modules consiste à bloquer en translation une face et à appliquer un déplacement sur la face opposée.

Pour Y=0 on bloque le déplacement suivant X, Y et Z (Ux=0, Uy=0, Uz=0) pour tous les nœuds allant de X=0 à X=lx et de Z=0 à Z=lz.

Pour Y=ly on bloque le déplacement suivant Y et Z (Uy=0, Uz=0) pour tous les nœuds allant de X=0 à X=lx et de Z=0 à Z=lz.

Pour Y=ly on impose un déplacement suivant X (Ux=0,1mm) pour tous les nœuds allant de X=0 à X=lx et de Z=0 à Z=lz.

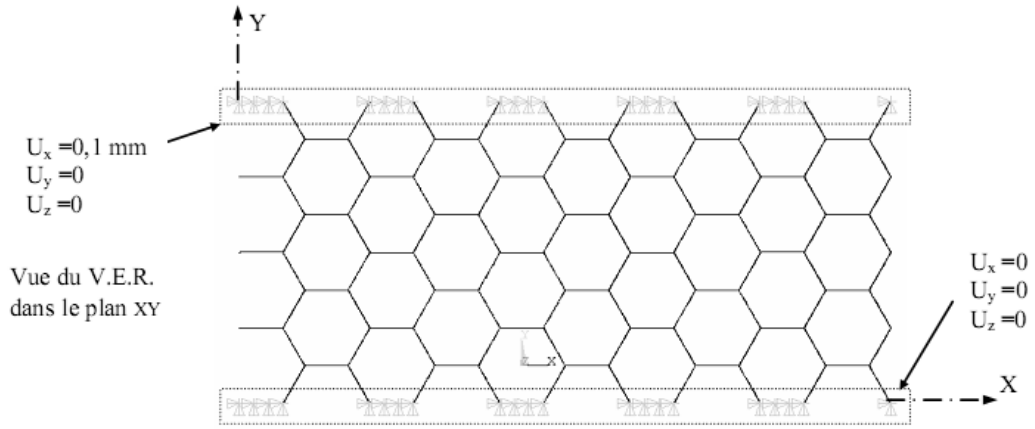


Figure 10-IV : CL pour la détermination du module de cisaillement G_{xy}.

Déformée : Les conditions aux limites précédentes entraînent une déformation globalement homogène comme on peut l'observer sur la figure 11-IV.

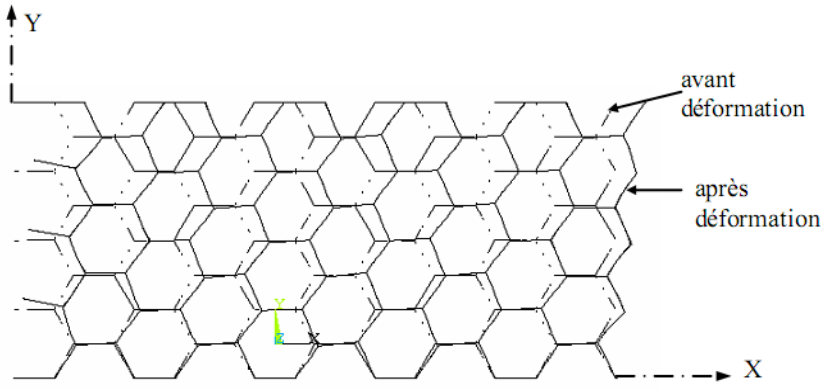


Figure 11-IV : Déformée du cisaillement dans le plan XY.

IV-3-3-2 Résultats du module G_{xy}:

Le tableau suivant présents les résultats obtenus par simulations numériques pour les panneaux sandwich de densité 29 (Kg/m^3), 55 (Kg/m^3), 82 (Kg/m^3), 130 (Kg/m^3).

Densité (Kg/m^3)	29	55	82	130
$\delta L_x (mm)$	0.1	0.1	0.1	0.1
γ_{xy}	0.001157	0.00231	0.00347	0.00694
$F_x (N)$	0.02099	0.16941	0.54763	4.3926
$\tau_{xy} (MPa)$	0.000015	0.00024	0.00120	0.01930
Ansys				
$G_{xy} (MPa)$	0.0133	0.1071	0.3464	2.779

Tableau 16-IV : Résultats du module G_{xy} (plan XY).

IV-3-3-3 Détermination du module G_{xz}:

Pour déterminerG_{xz}, les CL imposées sont les suivantes (Figure 12-IV) :

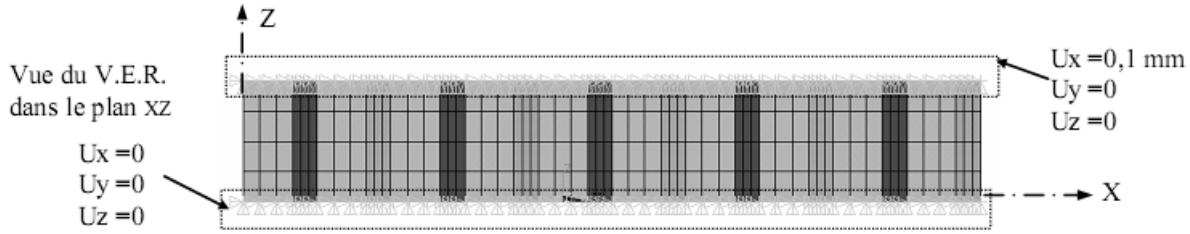


Figure 12-IV : CL pour la détermination du module de cisaillementG_{xz}.

La méthode de détermination des modules consiste à bloquer en translation une face et à appliquer un déplacement parallèle sur la face opposée, comme dans le cas précédent.

Déformée :Les conditions aux limites précédentes entraînent une déformation globalement homogène comme on peut l'observer sur la figure 13-VI .

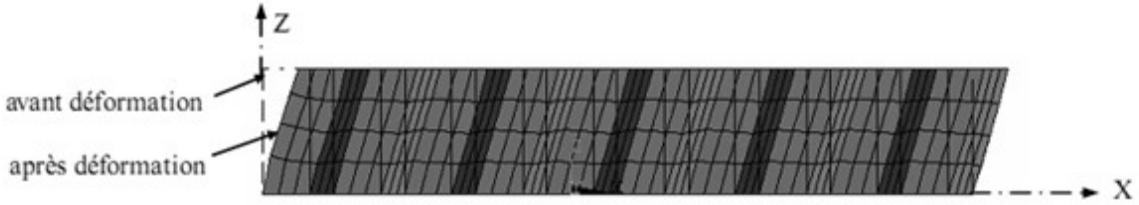


Figure 13-IV : Déformée en cisaillement dans le plans XZ.

IV-3-3-4 Résultats du module de cisaillement G_{xz}:

Le tableau suivant présents les résultats obtenus par simulations numériques pour les panneaux sandwich de densité 29 (Kg/m^3), 55 (Kg/m^3), 82 (Kg/m^3), 130 (Kg/m^3).

Densité (Kg/m^3)	29	55	82	130
$\delta L_x(mm)$	0.1	0.1	0.1	0.1
γ_{xz}	0.01136	0.01136	0.01136	0.01136
$F_x(N)$	16574	8170.9	5302.8	2544.3
$\tau_{xz}(MPa)$	1.236	2.437	3.559	6.837
Ansys				
$G_{xz}(MPa)$	108.78	214.478	313.235	601.747

Tableau 17-IV : Résultats Résultats du module G_{xz} (plan XZ).

IV-3-3-5 Détermination du module G_{yz}:

Conditions aux limites : Pour déterminerG_{yz}, les CL imposées sont les suivantes (Figure 14-IV).

La méthode de détermination des modules consiste à bloquer en translation une face et à appliquer un déplacement parallèle sur la face opposée, comme dans les deux cas précédents.

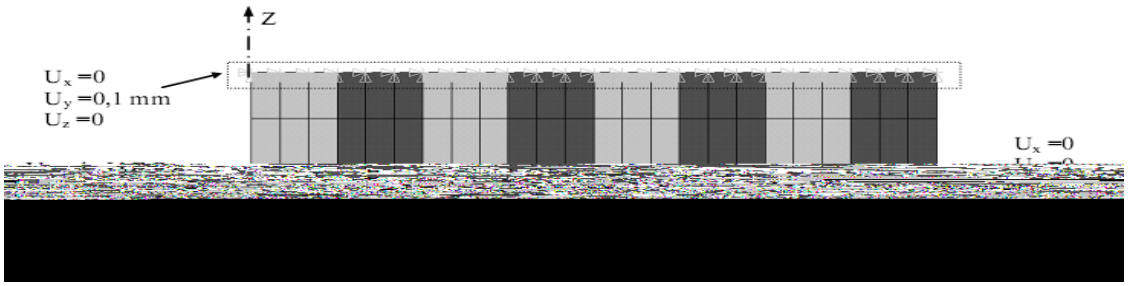


Figure 14-IV : CL pour la détermination du module de cisaillementG_{yz}.

Déformée :Les conditions aux limites précédentes entraînent une déformation globalement homogène comme on peut l'observer sur la figure 15-IV.

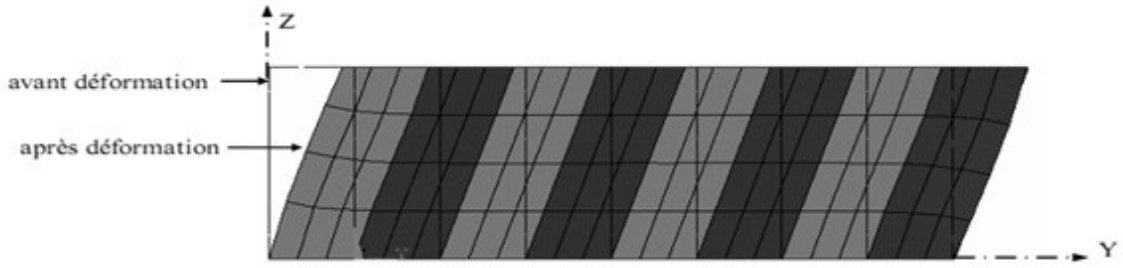


Figure 15-IV : Déformée en cisaillement dans le plan YZ.

IV-3-3-6 Résultats du module de cisaillement G_{yz}:

Le tableau suivant présent les résultats obtenus par résolution simulations numériques pour les panneaux sandwich de densité 29 (Kg/m^3), 55 (Kg/m^3), 82 (Kg/m^3), 130 (Kg/m^3)

Densité (Kg/m^3)	29	55	82	130
$\delta L_y(mm)$	0.1	0.1	0.1	0.1
γ_{yz}	0.01136	0.01136	0.01136	0.01136
$F_y(N)$	16533	8121.6	5235.1	2429.6
$\tau_{yz}(MPa)$	1.233	2.4224	3.514	6.526
Ansys				
$G_{yz}(MPa)$	108.51	213.184	309.237	574.38

Tableau 18-IV : Résultats du module de cisaillement G_{yz} (plan YZ).

IV-3-4 Recapulatif pour les resultats du modules élastiques homogénéisés par la methode numerique :

Le tableau 19-IV regroupe les resltats obtenue par simulation numerique :

	29 (Kg/m^3)	55 (Kg/m^3)	82 (Kg/m^3)	130 (Kg/m^3)
$E_x(MPa)$	0.0500	0.4034	1.3023	10.427
$E_y(MPa)$	0.05734	0.4624	1.4927	11.946
$E_z(MPa)$	585.26	1170.45	1732.682	3465.357
$G_{xy}(MPa)$	0.0133	0.1071	0.3464	2.779
$G_{xz}(MPa)$	108.78	214.478	313.235	601.747
$G_{yz}(MPa)$	108.51	213.184	309.237	574.38
ν_{xy}	0.999	0.9590	0.9092	1.1148
ν_{xz}	0.000016	0.000012	0.000031	0.000013
ν_{yz}	0.000048	0.00004	0.00009	0.000014

Tableau 19-IV : Modules élastiques homogénéisés par la méthode numérique.

IV-3-5 Confrontation des résultats des modèles analytiques à ceux obtenus par éléments finis :

Les tablaux qui suivent donne l'ordre de grandeur des écarts relatifs entre les résultats des modèles en prenant le modèle analytique (Gibson) comme référence.

- Comparaison des resultats pour les pannaux sandwiche de densité 29(Kg/m^3).

	densité 29(Kg/m^3)		
	Modèle numérique (Ansys)	Modèle analytique (Gibson)	Erreur (%)
$E_x(MPa)$	0.0500	0.05135	2.63
$E_y(MPa)$	0.05734	0.05135	11.67
$E_z(MPa)$	585.26	546.249	7.14
$G_{xy}(MPa)$	0.0133	0.01283	3.66
$G_{xz}(MPa)$	108.78	102.67916	5.94
$G_{yz}(MPa)$	108.51	-	-
ν_{xy}	0.999	1	0.1
ν_{xz}	0.000016	0	-
ν_{yz}	0.000048	0	-

Tableau 20-IV : Erreur relative du modèle analytique par rapport au modèle numérique.

- Comparaison des resultats pour les pannaux sandwiche de densité 55(Kg/m^3)

	densité 55(Kg/m^3)		
	Modèle numérique (Ansys)	Modèle analytique (Gibson)	Erreur (%)
$E_x(MPa)$	0.4034	0.41082	1.81
$E_y(MPa)$	0.4624	0.41082	12.56
$E_z(MPa)$	1170.45	1092.5	7.14
$G_{xy}(MPa)$	0.1071	0.1027	4.28
$G_{xz}(MPa)$	214.478	205.35833	4.44
$G_{yz}(MPa)$	213.184	-	-
ν_{xy}	0.9590	1	4.10
ν_{xz}	0.000012	0	-
ν_{yz}	0.00004	0	-

Tableau 21-IV : Erreur relative du modèle analytique par rapport au modèle numérique.

- Comparaison des resultats pour les pannaux sandwiche de densité 82(Kg/m^3)

	densité 82 (Kg/m^3)		
	Modèle numérique (Ansys)	Modèle analytique (Gibson)	Erreur (%)
$E_x(MPa)$	1.3023	1.33252	2.27
$E_y(MPa)$	1.4927	1.33252	12.02
$E_z(MPa)$	1732.682	1617.187	7.14
$G_{xy}(MPa)$	0.3464	0.333	4.02
$G_{xz}(MPa)$	313.235	303.98437	3.04
$G_{yz}(MPa)$	309.237	-	-
ν_{xy}	0.9092	1	9.08
ν_{xz}	0.000031	0	-
ν_{yz}	0.00009	0	-

Tableau 22-IV : Erreur relative du modèle analytique par rapport au modèle numérique.

- Comparaison des resultats pour les pannaux sandwiches de densité 130 (Kg/m^3)

	densité 130 (Kg/m^3)		
	Modèle numérique (Ansys)	Modèle analytique (Gibson)	Erreur (%)
$E_x(MPa)$	10.427	10.66017	2.19
$E_y(MPa)$	11.946	10.66017	12.06
$E_z(MPa)$	3465.357	3234.375	7.14
$G_{xy}(MPa)$	2.779	2.665	4.28
$G_{xz}(MPa)$	601.747	607.96875	1.02
$G_{yz}(MPa)$	574.38	-	-
ν_{xy}	1.011	1	1.1
ν_{xz}	0.000013	0	-
ν_{yz}	0.000014	0	-

Tableau 23-IV : Erreur relative du modèle analytique par rapport au modèle numérique.

La figure (16-IV) represante l'histograme de l'erreur relative du modèle analytique par rapport au modèle numérique pour chaque densité.

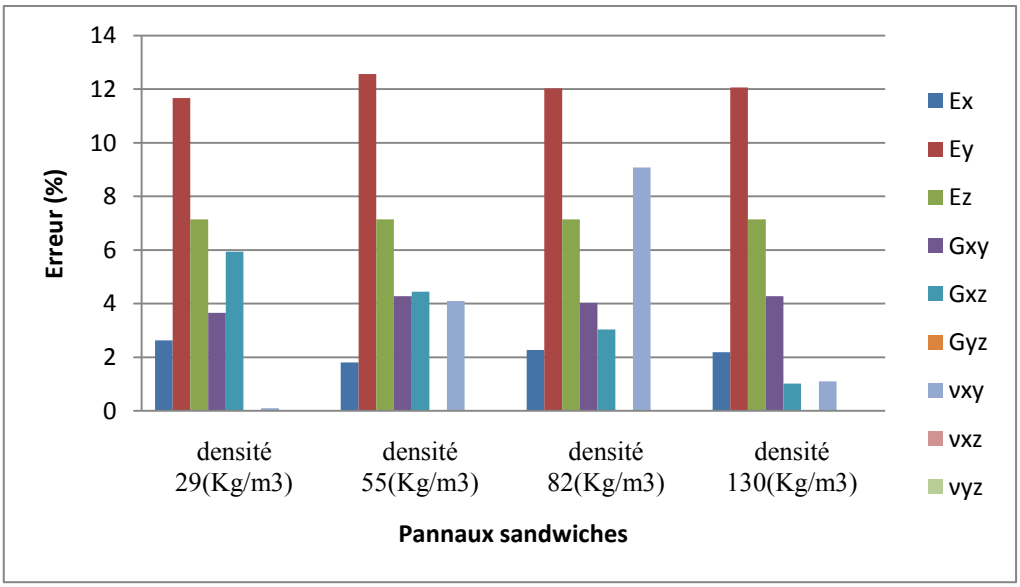


Figure 16-IV : Histograme de l'erreur relative du modèle analytique par rapport au modèle numérique pour chaque densité.

La figure (17-IV) represante l'histograme de l'erreur moyenne relative du modèle analytique par rapport au modèle numérique.

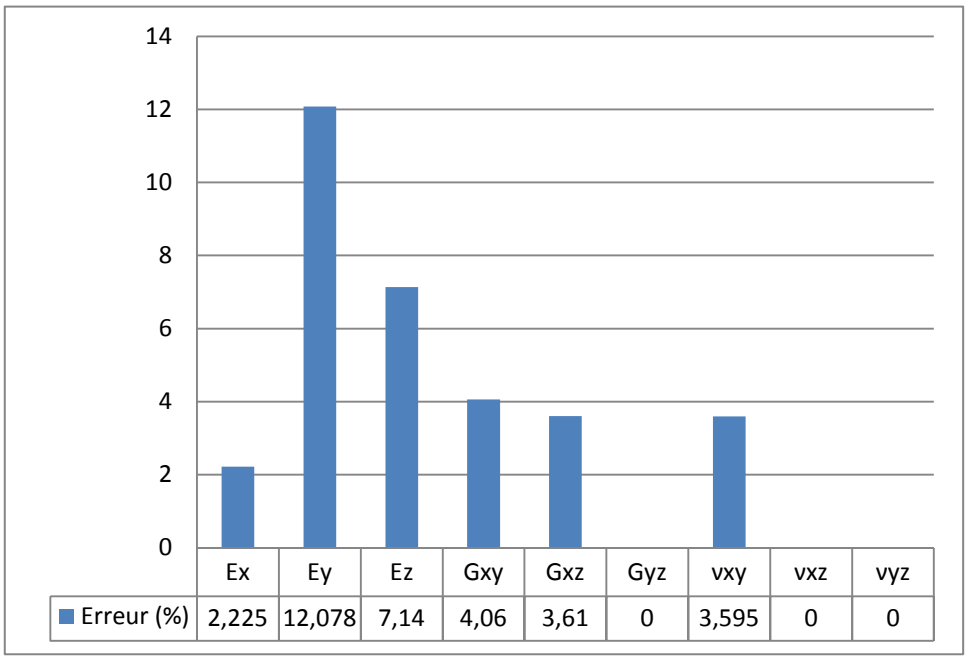


Figure 17-IV : Histograme de l'erreur moyenne relative du modèle analytique par rapport au modèle numérique.

IV-3-6 Analyse des resultats :

Les tableaux (20-IV, 21-IV, 22-IV, 23-IV) regroupent les résultats obtenus par les simulations numériques et les compare aux valeurs analytiques obtenues par les formules de Gibson .

On peut constater que l'écart moyen des résultats entre la simulation numérique et le modèle analytique est d'environ 2.2 % pour E_x et 3.5 % pour le coefficient de Poisson. Ces écarts sont acceptables si on prend le module de Gibson comme référence.

Pour E_y on peut remarquer que l'écart moyen des résultats entre la simulation numérique et le modèle analytique est d'environ 12% pour E_y et 26 % pour le coefficient de Poisson. Concernant les modules de rigidité et d'un point de vue mécanique, les résultats sont acceptables. Par contre pour les coefficients de Poisson, les écarts sont relativement conséquents, ceci s'explique par la méthode de couplage des cellules utilisée dans l'homogénéisation numérique avec le logiciel Ansys .

Concernent E_z on peut remarquer que l'écart moyen des résultats entre la simulation numérique et le modèle analytique est d'environ 7% pour E_z. Par contre l'écart sur le coefficient de Poisson est très faible.

On peut remarquer que l'écart moyen des résultats entre ANSYS et Gibson est d'environ 4% pour G_{xy}. Cette erreur concerne un module de faible valeur donc peu prépondérant dans les propriétés mécaniques des sandwichs.

Pour le module de cisaillement G_{yz} la comparaison des resultats numeriques et ceux obtenus par le modèle de Gibson, donne des résultats proches d'environ 3.6%.

IV-4 Modélisation numérique et analytique du comportement en flexion des panneaux sandwichs :

Le but de cette partie est l'application des modèles analytique et numériques développés dans le chapitre III pour l'essai de flexion 3 points sur les panneaux sandwiches de densités différentes .La modélisation nous a permis de calculer les valeurs maximales de la flèche (W).

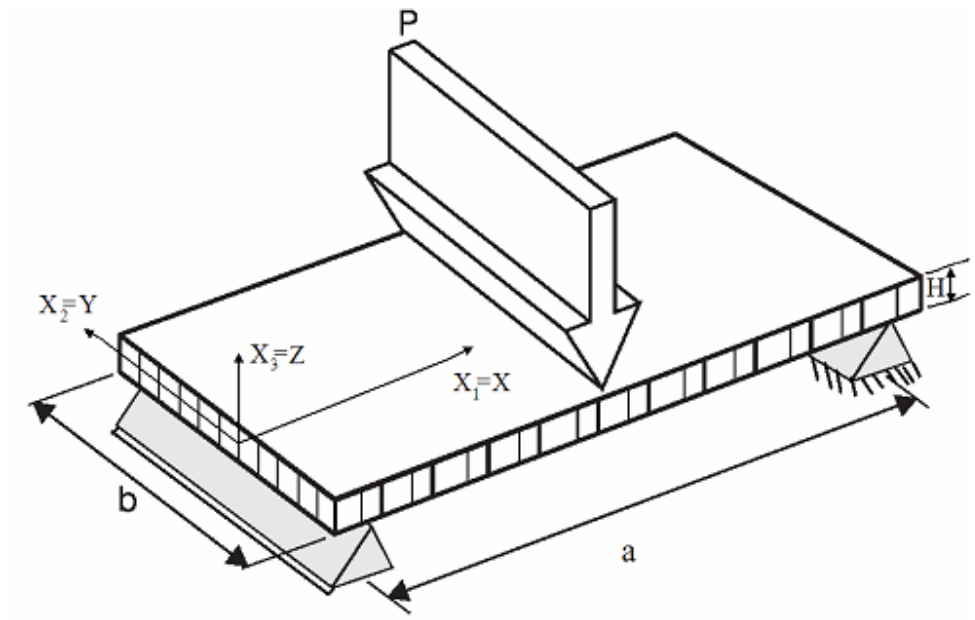


Figure 18-IV : Représentation schématique de l'essai de flexion 3 points.

Le tableau (24-IV) regroupe les caractéristiques mécaniques précédemment calculées, utilisées pour la modélisation:

	29 (Kg/m^3)	55(Kg/m^3)	82(Kg/m^3)	130(Kg/m^3)
$E_x(MPa)$	0.05135	0.41082	1.33252	10.66017
$E_y(MPa)$	0.05135	0.41082	1.33252	10.66017
$E_z(MPa)$	546.249	1092.5	1617.187	3234.375
$G_{xy}(MPa)$	0.0133	0.1071	0.3464	2.779
$G_{yz}(MPa)$	102.67916	205.35833	303.98437	607.96875
$G_{xz}(MPa)$	108.78	214.478	313.235	601.747
ν_{xy}	0.94	0.95	0.92	0.95

Tableau 24-IV : Caractéristiques mécaniques homogénéisées des panneaux sandwichs.

IV-4-1 Modélisation numérique par éléments finis :

La simulation numérique a été réalisée avec le code de calcule Ansys. La modélisation de la flexion trois points a été effectuée en considérant le cœur comme homogénéisé avec les caractéristiques mécaniques précédemment calculées. Les conditions aux limites qui ont été prise sont les suivantes : U_y et U_z bloquées aux deux extrémités de la plaque et U_x bloquées sur une des deux extrémités.

Pour le maillage, l'élément 3D (SOLID45) a été choisi car il est adapté à la modélisation des structures, la convergence du maillage a été acquise a 68506 éléments.

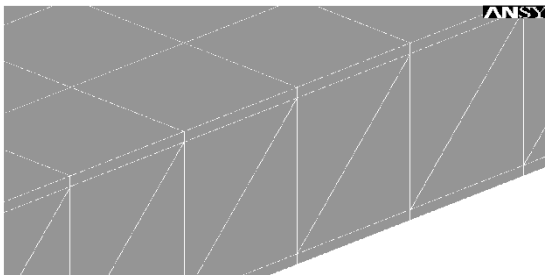


Figure 19-IV : Maillage du panneau sandwich.

IV-4-2 Modélisation analytique :

La méthode analytique de résolution a été programmée à l'aide du langage de programmation Matlab les équations développées dans le chapitre III on été utilisés. Le programme est présenté en annexe.

IV-4-3 Résultats des simulations numériques et analytiques:

Deux séries ont été réalisées, la première avec une distance d'antre appuis de 200 mm et la seconde de 400 mm. Pour un souci de comparaison on a choisi une charge 250 N pour les deux cas.

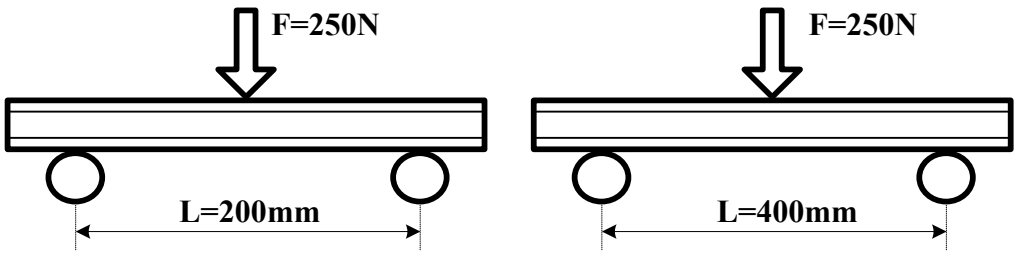


Figure 20-IV : Configuration de l'essai de flexion 3 points.

Les tableaux qui suivent représentent les valeurs des flèches (W) pour les différentes densités de panneaux sandwich, calculés par les méthodes analytiques et numériques.

IV-4-3-1 Résultats pour la distance entre appuis L=200 mm et F=250 :

Les tableaux (25-IV, 26-IV, 27-IV, 28-IV) presantent les resultats de la fleche obtenues par les diferants modeles analytiques et numeriques.

Densité (kg/m^3)	29					
Modèle	Kirchof love	Mindlin	Reddy	Touratier (Sinus)	Numérique (Ansys)	expérimental
W [mm] [a/2,0,0]	1.01	1.06	1.09	1.09	1.05	1.11
Erreur %	9	4.5	1.8	1.8	5.4	réf

Tableau 25-IV : panneau sandwich de densité 29 Kg/m^3.

Densité (kg/m^3)	55					
Modèle	Kirchof love	Mindlin	Reddy	Touratier (Sinus)	Numérique (Ansys)	expérimental
W [mm] [a/2,0,0]	0.91	0.93	1.01	1.01	0.99	1.03
Erreur %	11.7	9.7	2	2	3.9	réf

Tableau 26-IV : panneau sandwich de densité 55 Kg/m^3.

Densité (kg/m^3)	82					
Modèle	Kirchof love	Mindlin	Reddy	Touratier (Sinus)	Numérique (Ansys)	expérimental
W [mm] [a/2,0,0]	0.79	0.81	0.87	0.87	0.85	0.9
Erreur %	12	10	3.3	3.3	5.6	réf

Tableau 27-IV : panneau sandwich de densité 82 Kg/m^3.

Densité (kg/m^3)	130					
Modèle	Kirchof love	Mindlin	Reddy	Touratier (Sinus)	Numérique (Ansys)	expérimental
W [mm] [a/2,0,0]	0.77	0.80	0.86	0.86	0.85	0.87
Erreur %	11.5	8	1.2	1.2	2.3	réf

Tableau 28-IV : panneau sandwich de densité 130 Kg/m^3.

Comparaison de la flèche pour la distance entre appuis L=200 mm et F=250 :

Les figures qui suivent donnent l'évolution de la flèche, du milieu de la plaque au point d'appuis pour une charge de 250 N et une distance entre appuis de 200 mm

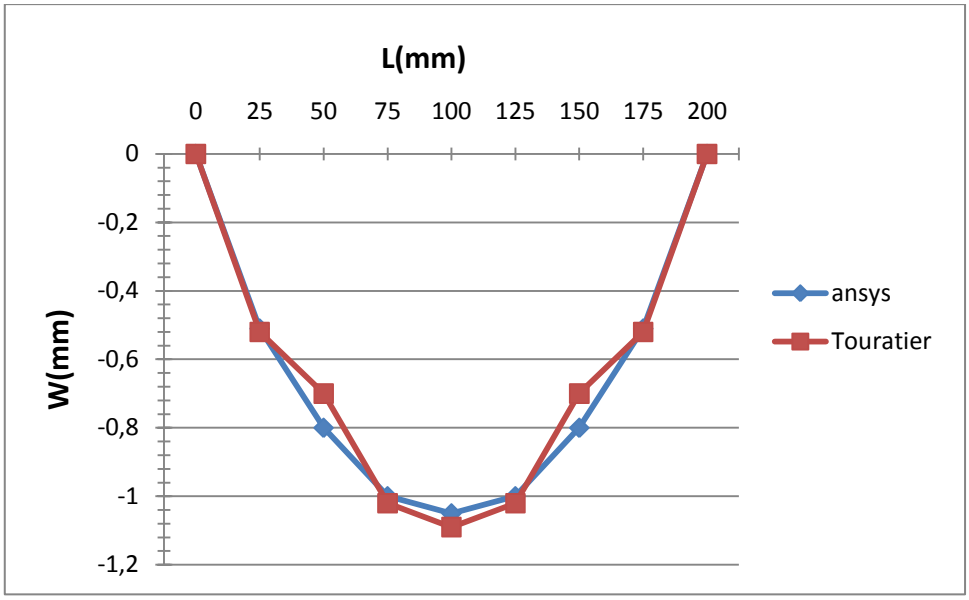


Figure 21-IV : Evolution de la flèche pour les pannaux sandwiches de densité 29 (Kg/m^3)

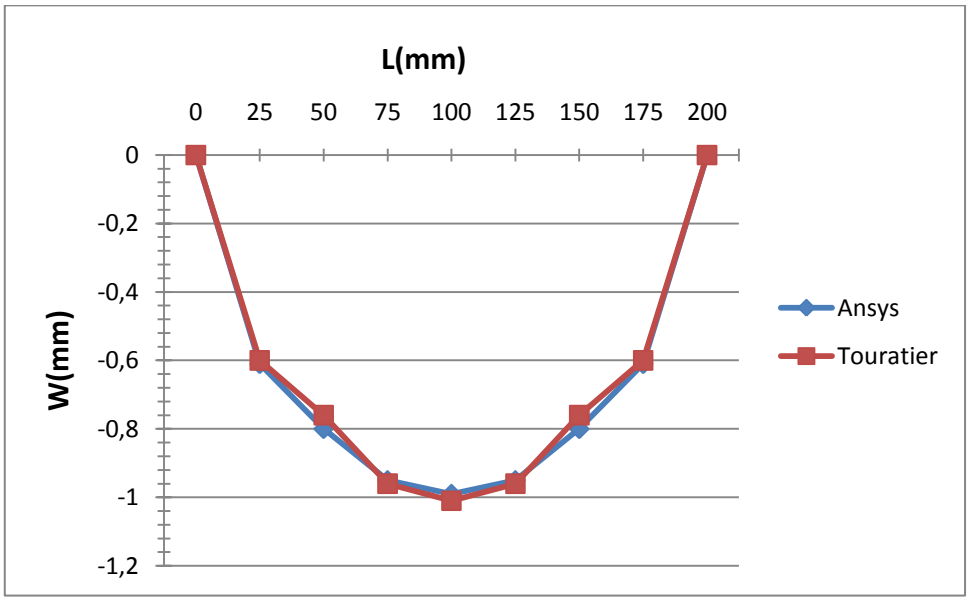


Figure 22-IV : Evolution de la flèche pour les pannaux sandwiches de densité 55 (Kg/m^3)

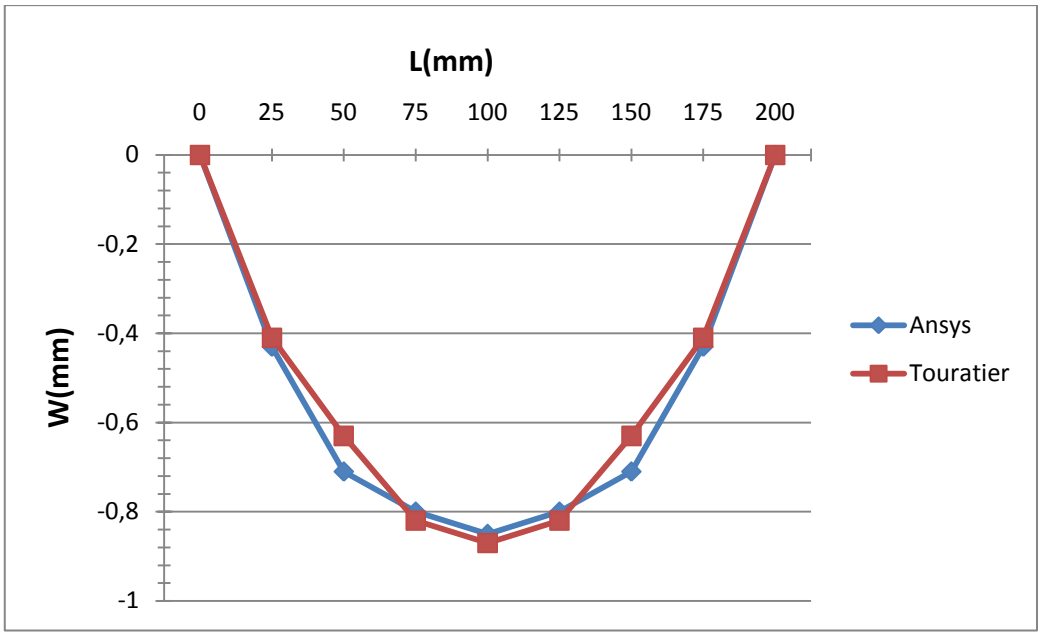


Figure 23-IV : Evolution de la flèche pour les pannaux sandwiches de densité 82 (Kg/m^3)

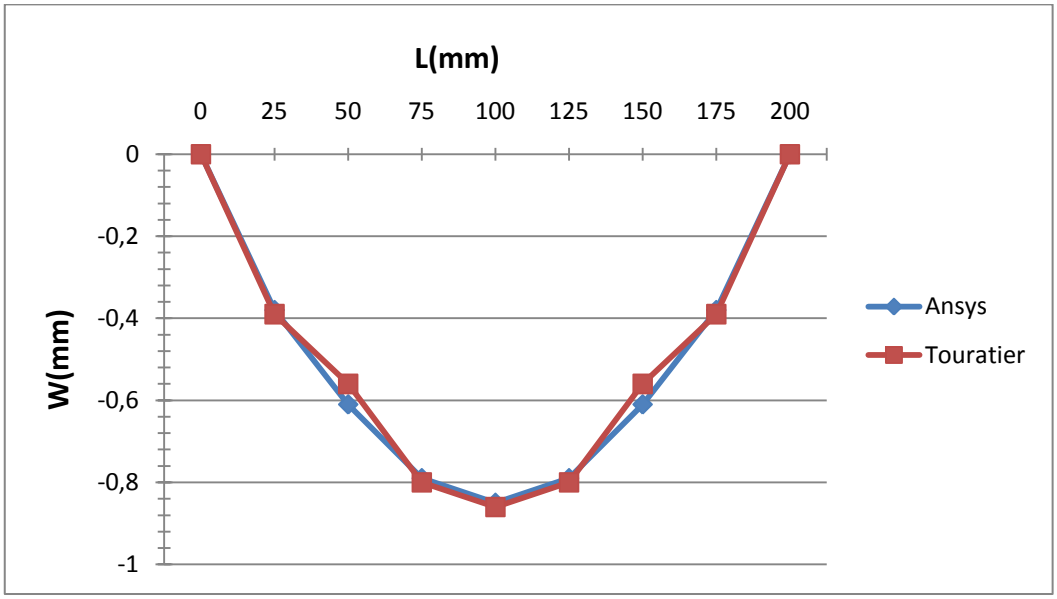


Figure 24-IV : Evolution de la flèche pour les pannaux sandwiches de densité 130 (Kg/m^3)

IV-4-3-2 Résultats pour la distance entre appuis L=400 mm et F=250 :

Les tableaux (29-IV, 30-IV, 31-IV, 32-IV) presantent les resultats de la fleche obtenues par les diferants modéles analytiques et numerique.

Densité (kg/m^3)	29					
Modèle	Kirchof love	Mindlin	Reddy	Touratier (Sinus)	Numérique (Ansys)	expérimental
W [mm] [a/2,0,0]	5.3	5.32	5.40	5.40	5.39	5.47
Erreur %	3.1	2.8	1.3	1.3	1.5	réf

Tableau 29-IV : panneau sandwich de densité 29 Kg/m^3.

Densité (kg/m^3)	55					
Modèle	Kirchof love	Mindlin	Reddy	Touratier (Sinus)	Numérique (Ansys)	expérimental
W [mm] [a/2,0,0]	4.79	4.81	4.88	4.88	4.85	4.99
Erreur %	4.2	3.8	2.4	2.4	3	réf

Tableau 30-IV : panneau sandwich de densité 55 Kg/m^3.

Densité (kg/m^3)	82					
Modèle	Kirchof love	Mindlin	Reddy	Touratier (Sinus)	Numérique (Ansys)	expérimental
W [mm] [a/2,0,0]	4.68	4.70	4.77	4.78	4.75	4.81
Erreur %	2.7	2.3	0.7	0.7	1.3	réf

Tableau 31-IV : panneau sandwich de densité 82 Kg/m^3.

Densité (kg/m^3)	130					
Modèle	Kirchof love	Mindlin	Reddy	Touratier (Sinus)	Numérique (Ansys)	expérimental
W [mm] [a/2,0,0]	4.55	4.58	4.65	4.65	4.61	4.7
Erreur %	3.2	2.6	1	1	1.9	réf

Tableau 32-IV : panneau sandwich de densité 130 Kg/m^3.

Comparaison de la flèche pour la distance entre appuis L=400 mm et F=250 :

Les figures qui suivent donnent l'évolution de la flèche, du milieu de la plaque au point d'appuis pour une charge de 250 N et une distance entre appuis de 400 mm

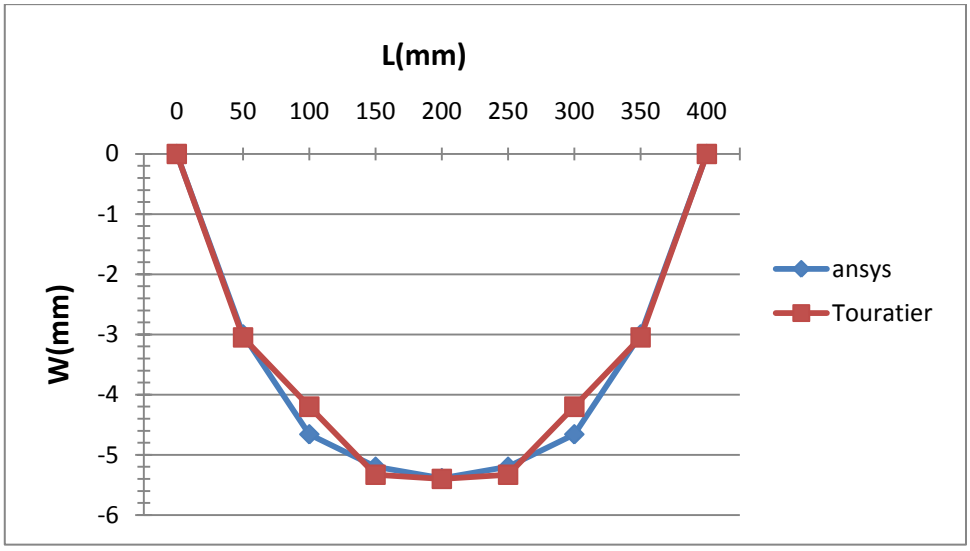


Figure 25-IV : Evolution de la flèche pour les pannaux sandwiches de densité 29 (Kg/m^3)

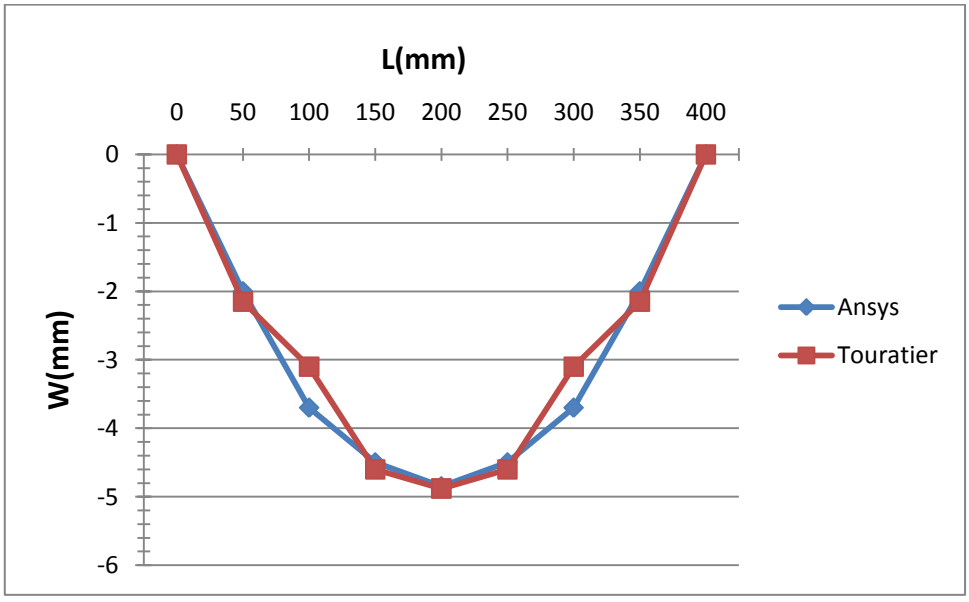


Figure 26-IV : Evolution de la flèche pour les pannaux sandwiches de densité 55 (Kg/m^3)

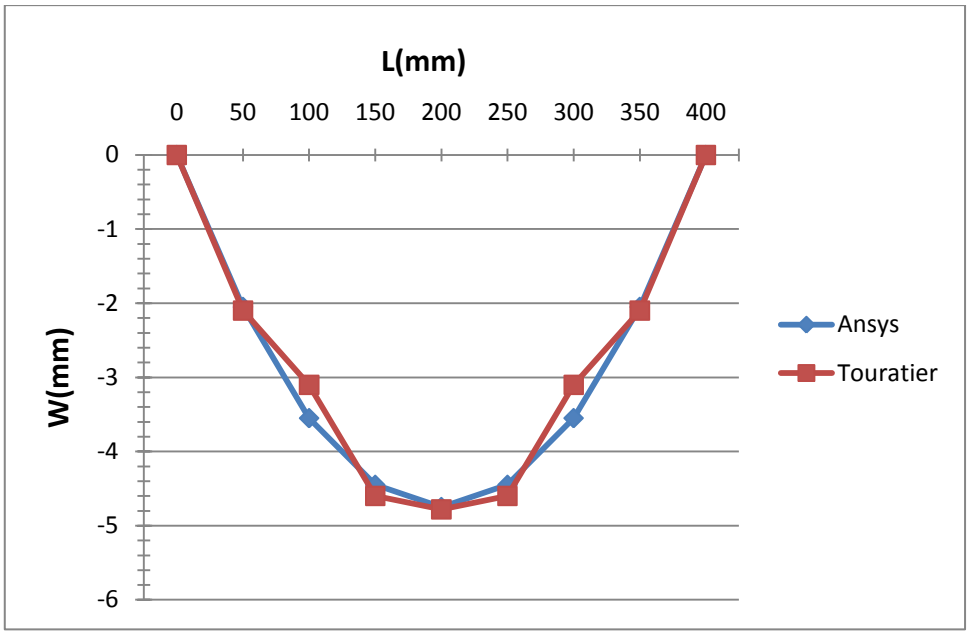


Figure 27-IV : Evolution de la flèche pour les pannaux sandwiches de densité 82 (Kg/m^3)

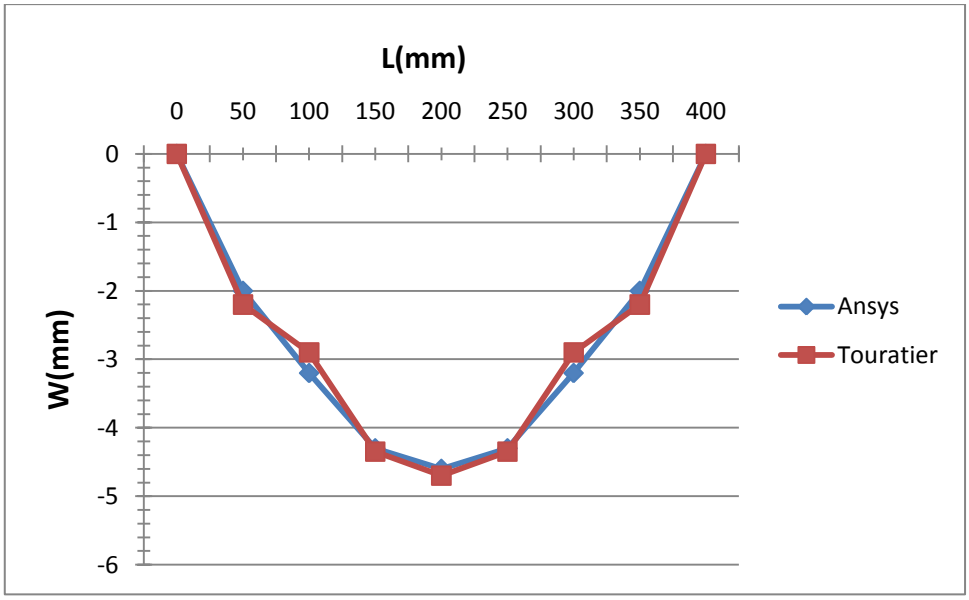


Figure 28-IV : Evolution de la flèche pour les pannaux sandwiches de densité 130 (Kg/m^3)

IV-4-3-3 Analyse des résultats :

La comparaison des résultats obtenus par l'application les différents modèles analytique et la simulation numérique sur Ansys montrent que :

- Les résultats des modèles analytiques de Touratier et Reddy sont toujours les plus proches des résultats expérimentaux.
- Les résultats des modèles analytiques de Touratier et Reddy sont plus fiable que les résultats d'Ansys.
- Les résultats des modèles Reddy et Touratier sont presque identiques.
- Les erreurs relatives de la flèche entre les modèles analytiques et la simulation numérique ne sont pas constantes, elles sont minimales au milieu de la plaque et aux bords.

IV-4-3-4 Présentations des courbes expérimentales :

Les 4 figures qui suivent représentent les courbes expérimentales de la flexion 3 points utilisés pour valider les résultats théoriques obtenue par simulation. [Keskes, 2007]

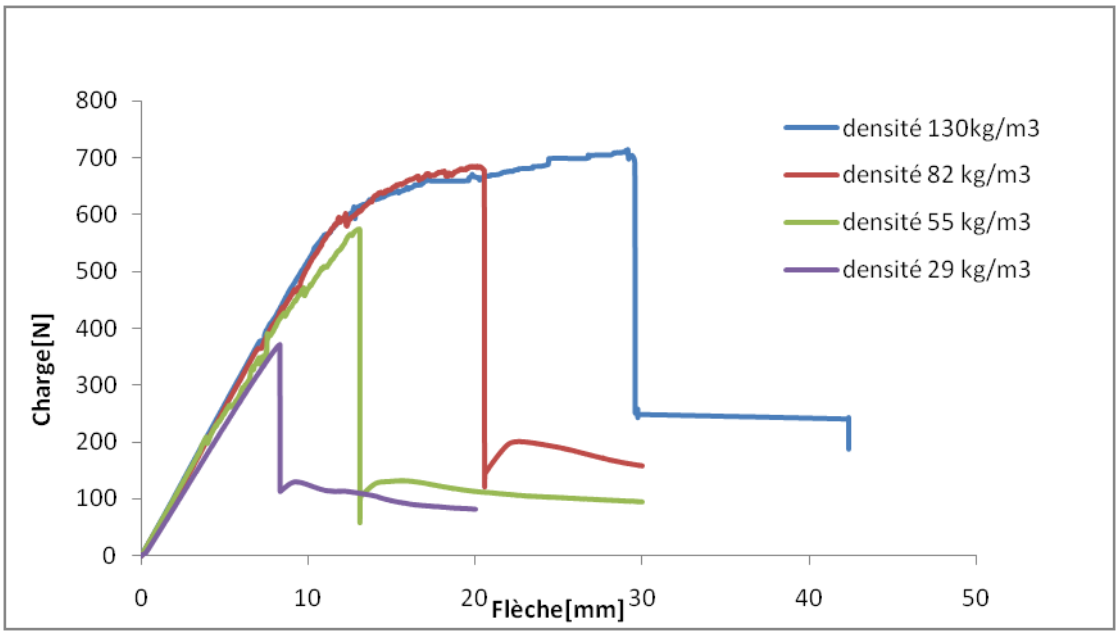


Figure 29-IV : Courbes d'essai flexion 3 points en fonction des densités du sandwich Alu-Alu pour L (entre appuis)=400mm

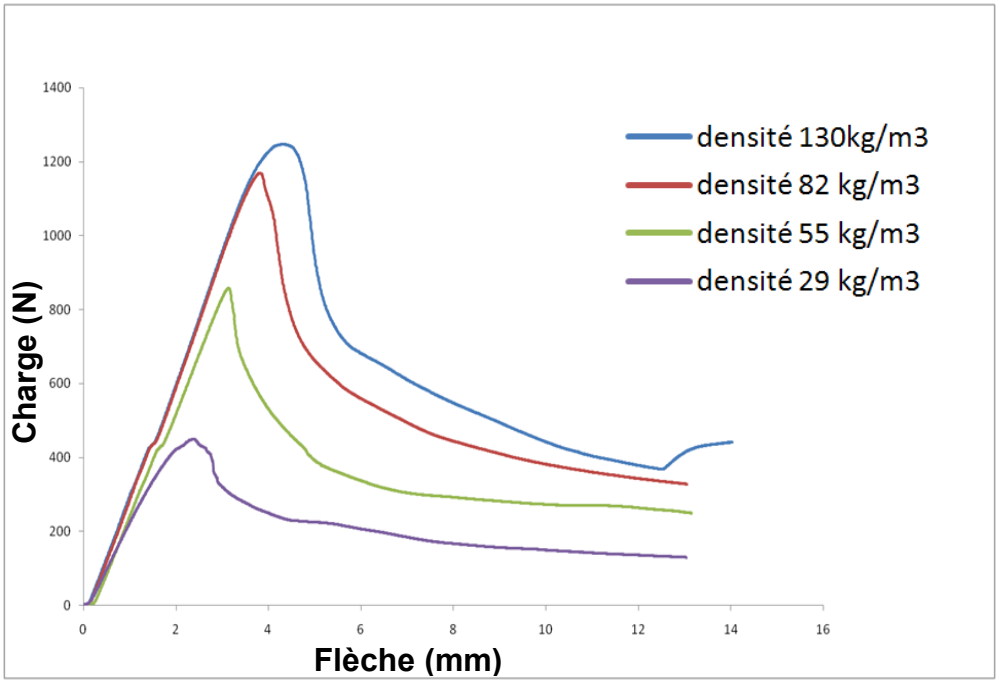


Figure 30-IV : Courbes d'essai flexion 3 points en fonction des densités du sandwich Alu-Alu pour L (entre appuis)=200mm

Les figures (31-IV) et (32-IV) représentent le domaine élastique de la courbe de flexion 3 point.

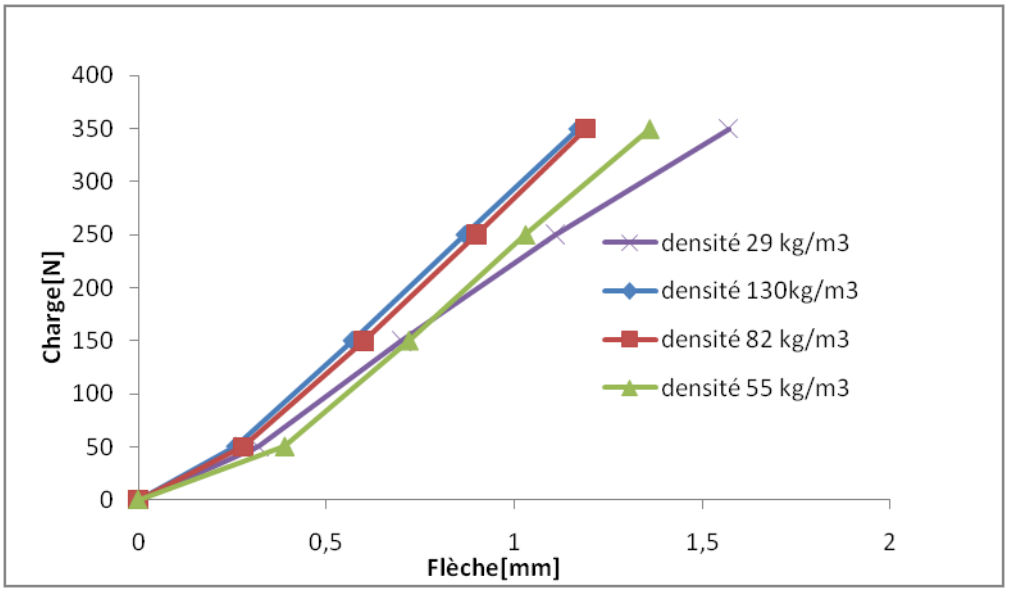


Figure 31-IV : Partie élastique des courbes d'essai expérimental de la flexion 3 points pour différentes densités du sandwich Alu-Alu L (entre appuis)=200mm.

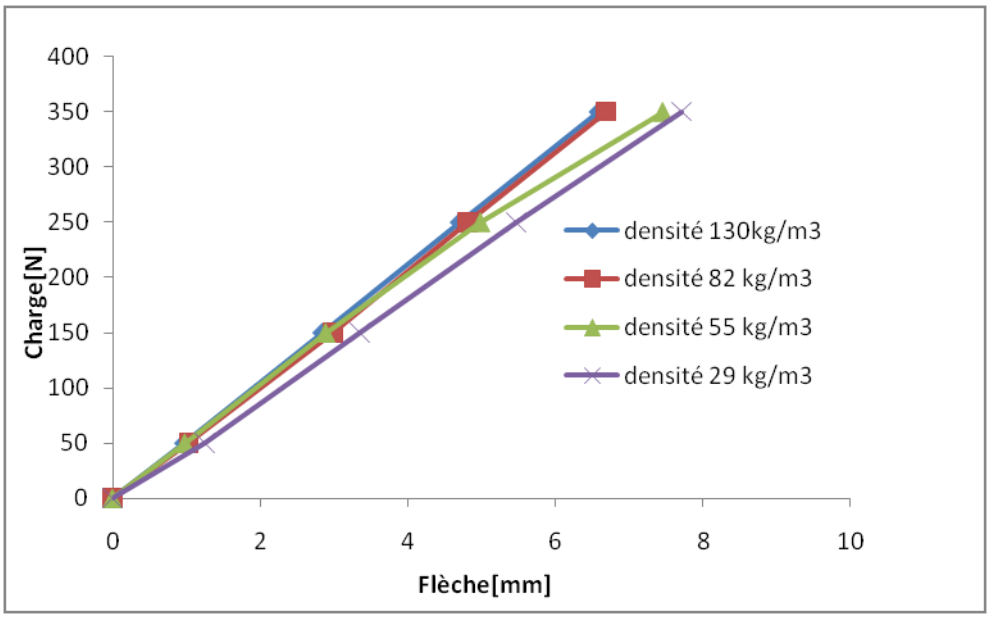


Figure 32-IV : Partie élastique des courbes d'essai expérimental de la flexion 3 points pour différentes densités du sandwich Alu-Alu L (entre appuis)=400mm

IV-4-3-5 Comparaison des flèches théoriques et expérimentales :

Les graphes (33-IV, 34-IV, 35-IV, 36-IV) montrent une comparaison entre les résultats expérimentaux et les résultats théoriques issus du modèle de Touratier ainsi que ce d'Ansys, pour une distance d'entre appuis de 200 mm.

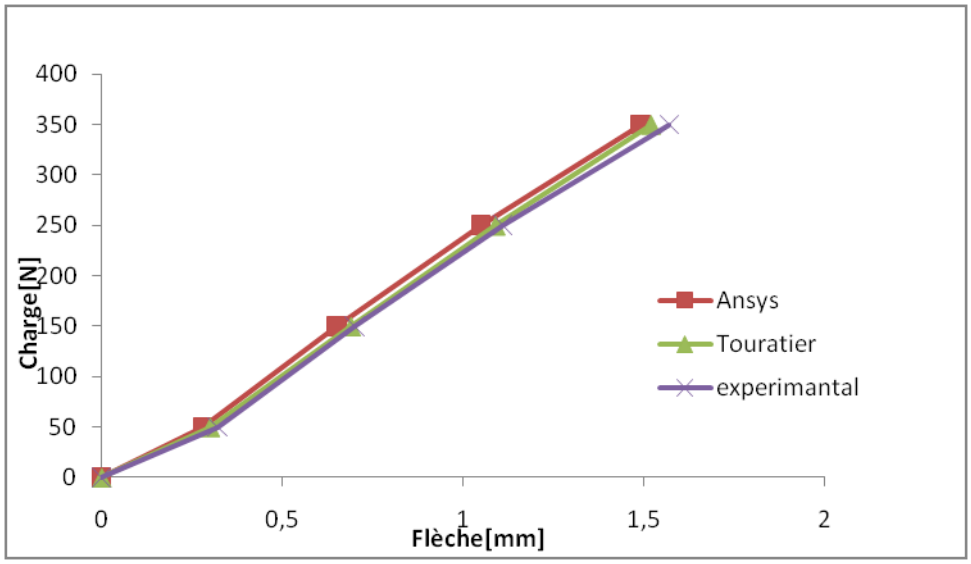


Figure 33-IV : Courbes d'évolution des flèches pour différentes méthodes de résolutions de la flexion 3 points Sandwich Alu-Alu (29kg/m^3) L (entre appuis)=200mm

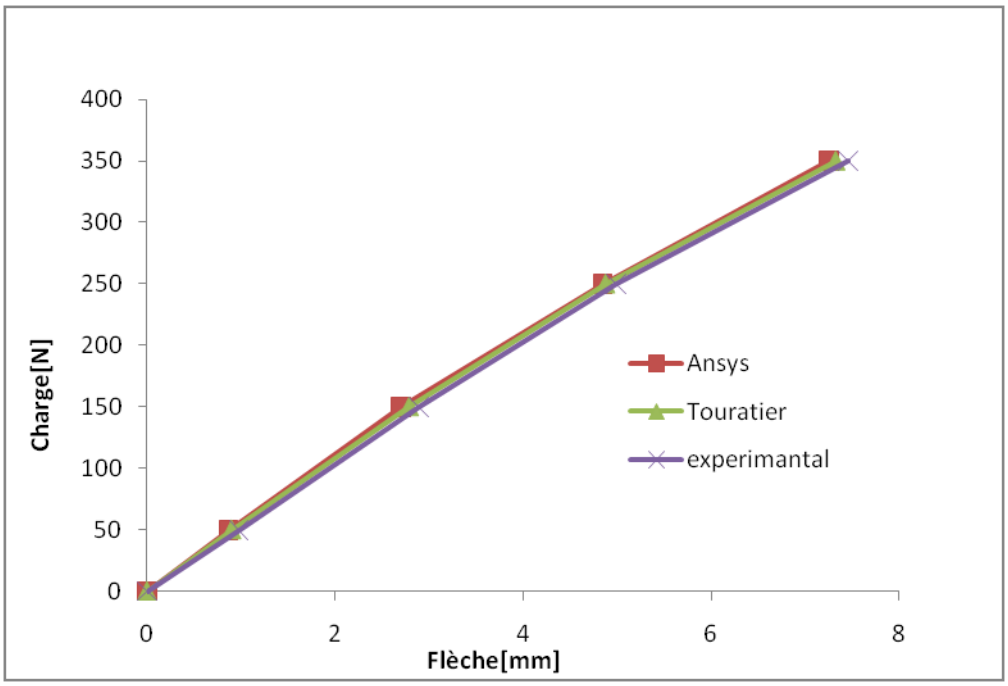


Figure 38-IV : Courbes d'évolution des flèches pour différentes méthodes de résolutions de la flexion 3 points Sandwich Alu-Alu (55kg/m^3) L (entre appuis)=400mm

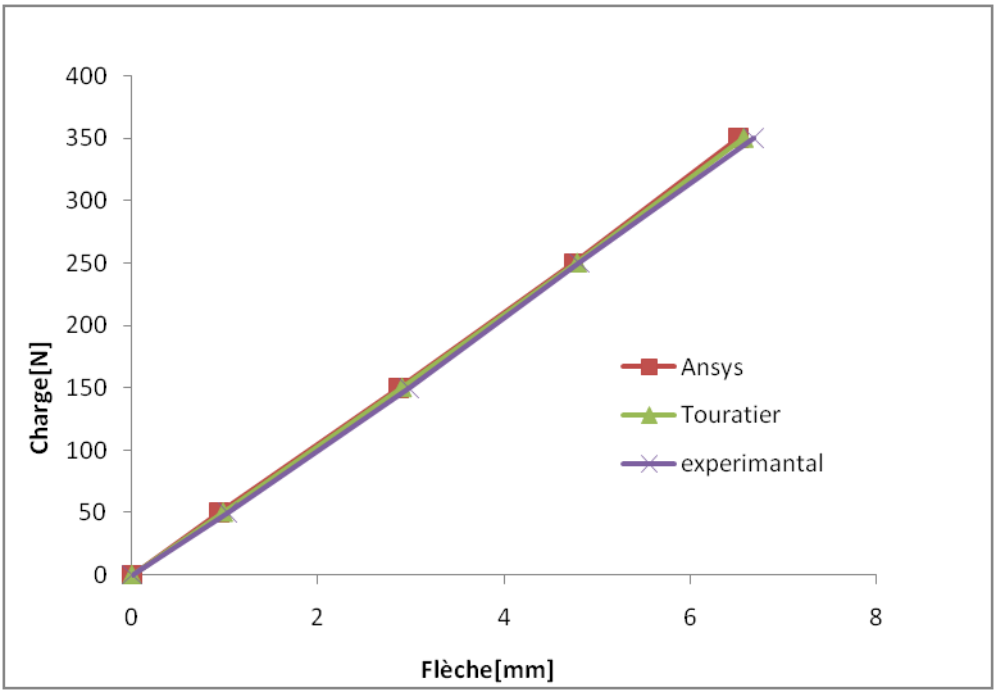


Figure 39-IV : Courbes d'évolution des flèches pour différentes méthodes de résolutions de la flexion 3 points Sandwich Alu-Alu (82kg/m^3) L (entre appuis)=400mm

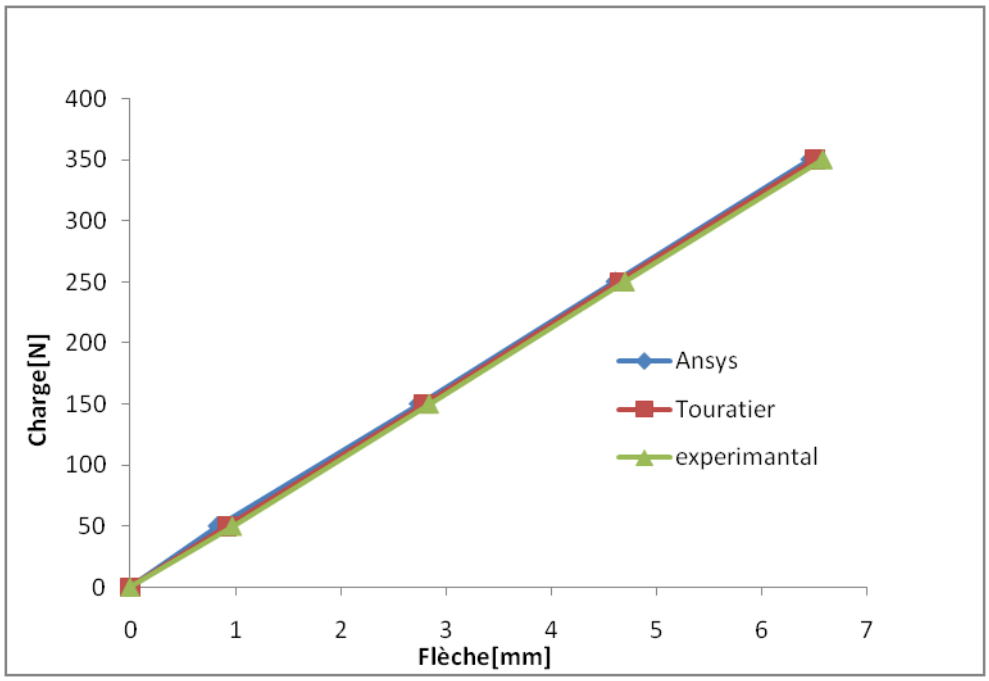


Figure 40-IV : Courbes d'évolution des flèches pour différentes méthodes de résolutions de la flexion 3 points Sandwich Alu-Alu (130kg/m^3) L (entre appuis)=400mm

Les graphes (41-IV, 42-IV) représentent l'évolution de la flèche (W) en fonction de la densité pour une distance d'entre appuis de 200 mm et de 400 mm.

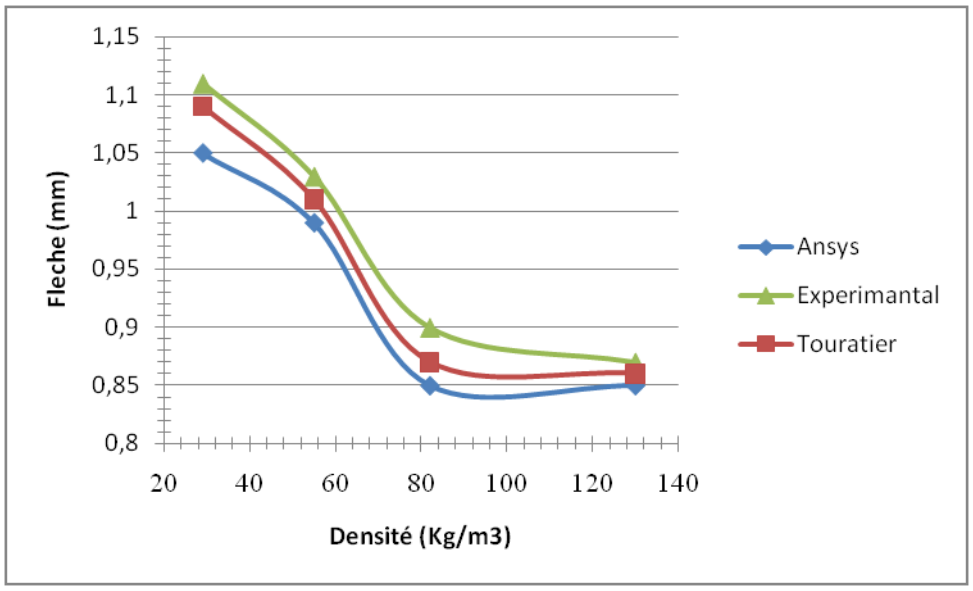


Figure 41-IV : Courbes d'évolution de la flèche élastique en fonction de la densité de l'âme pour L (entre appuis)=200 mm.

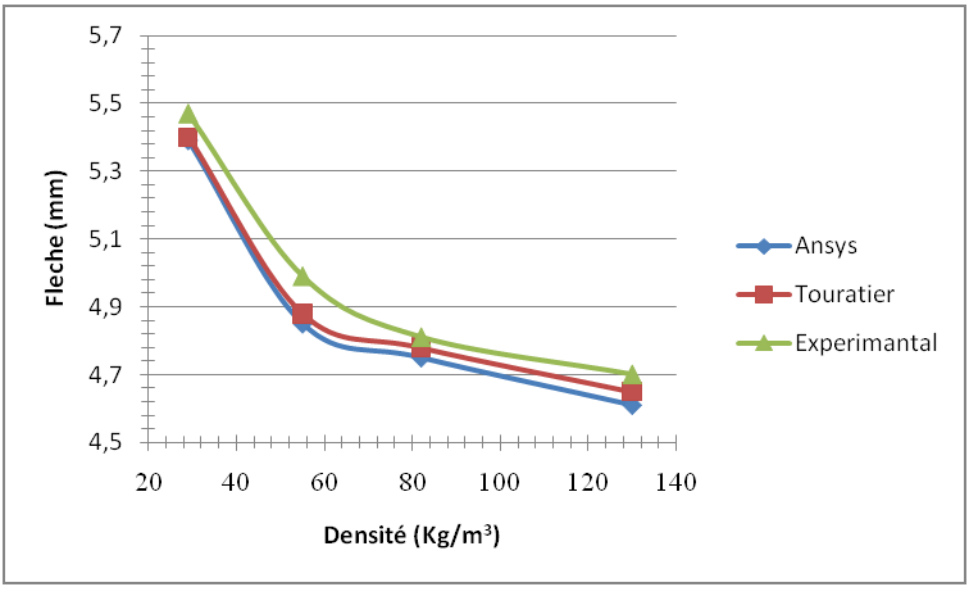


Figure 42-IV : Courbes d'évolution de la flèche élastique en fonction de la densité de l'âme pour L (entre appuis)=400 mm.

IV-4-3-6 Interprétations des courbes :

L'analyse des résultats théoriques par rapport au résultats expérimentaux en flexion 3 points nous permis de caractériser le comportement sous chargement statique de sandwichs a âme en nid d'abeilles (alu-alu), en fonction de la densité. Qualitativement, on a eu à comparer les résultats des différents modèles analytiques avec ceux obtenus par la simulation numérique sur Ansys, et par suite avec ceux obtenus par l'expérience.

L'erreur sur la flèche W pour le modèle de Kirchhoff-Love est de l'ordre de 12% par rapport à la solution de référence (expérimentale) pour la distance d'antre appuis de 200mm, mais elle est moindre pour la distance d'antre appuis de 400mm elle est de l'ordre de 4%. Par contre l'erreur pour les modèles de Reddy, Touratier et Ansys est moins importante dans les deux cas.

Les résultats des modèles de Reddy et Touratier sont très proches dans tous les calculs. Cependant, il faut environ 6 à 8 fois de plus de temps de calcul pour le modèle de Touratier. En effet les calculs sont quasi instantanés pour le modèle de Kirchhoff-Love, environ 2 minutes pour celui de Reddy, puis 10 à 12 minutes pour le modèle de Touratier. Il faut signaler par ailleurs que ces temps de calculs sont susceptibles d'évolution selon la version du logiciel, le système d'exploitation sans oublier le processeur utilisé.

Sur les Figure (33-IV ,34-IV ,35-IV ,36-IV) et (37-IV, 38-IV, 39-IV, 40-IV) sont illustrées les comparaisons entre résultats expérimentaux et simulations numériques. Elles représentent la flèche en fonction de la charge appliquée sur les panneaux sandwichs en nid d'abeille. Nous constatons un léger écart entre la simulation numérique et l'expérience. Cet écart reste très raisonnable en tenant compte des défauts possibles lors du processus de fabrication, et les incertitudes des appareils utilisés.

On remarque que la rigidité des panneaux sandwichs augmente avec la densité. On peut aussi constater que l'erreur entre la simulation numérique et l'expérience est sensiblement la même du point de vue densité des panneaux utilises.

Conclusion générale

Cette étude a permis de montrer que malgré les difficultés que pose le nid d'abeille, on arrive à déterminer son comportement pour la flexion 3 points en utilisant les modélisations analytiques et numériques.

La connaissance des propriétés mécaniques est la première étape dans la maîtrise du comportement des matériaux sandwichs. Les formulations analytiques sur l'homogénéisation ont permis de déterminer la matrice de rigidité du nid d'abeilles, utilisée dans la confection des âmes des sandwiches de l'étude. La comparaison des résultats du modèle analytique (Gibson) avec ceux obtenus par simulation numérique permet de mieux cadrer les valeurs des modules élastiques. On peut constater que les écarts entre résultats de la simulation numérique et du modèle analytique sont acceptables pour le module E_x et pour le coefficient de Poisson sachant que le modèle de Gibson est pris comme référence. Pour le cas de E_y , les écarts sont plus importants. Pour E_z, l'écart sur le coefficient de Poisson est très faible. Pour ce qui concerne le module de cisaillement G_{xy}, l'écart entre simulation Ansys et Gibson est d'environ 4%. Cette erreur pour un module de faible valeur est peu importante dans les propriétés mécaniques des sandwichs. Le module de cisaillement G_{yz}, est obtenu uniquement par simulation numériques.

Une solution analytique pour les problèmes de flexion des plaques sandwichs avec des modèles simples comme Kirchhoff ou raffinés comme ceux de Reddy, et Touratier ont été développé et programmé sur MATLAB.

Les résultats de la modélisation analytique du comportement en flexion trois points des panneaux sandwichs avec les modèles de Reddy et Touratier sont très proches dans tous les calculs de la flèche (W). Ils montrent l'intérêt et les limites des modèles raffinés qui sont plus précis comme celui de Touratier ou Reddy, nécessitant un temps de calcul plus important. Cependant, la précision n'est pas souvent justifiée car un modèle classique comme Kirchoff se montre souvent suffisant. Par contre la modélisation numérique sur Ansys a donnée des résultats très satisfaisants de la flèche du point de vue précision et vitesse de calcul.

La comparaison des résultats expérimentaux de la flèche avec ceux obtenus par la simulation numérique et analytique des panneaux sandwichs en nid d'abeille de différente densité montre que l'erreur sur la flèche W pour le modèle de Kirchhoff-Love est de l'ordre de 12% par rapport à la valeur expérimentale pour la distance entre appuis de 200 mm, mais elle est

moindre pour la distance entre appuis de 400mm qui est de l'ordre de 4%. Par contre l'erreur pour les modèles de Reddy, Touratier et Ansys est moins importante dans les deux cas.

Nous pouvons conclure que les résultats déduits de la modélisation et la simulation effectués avec le code des éléments finis ANSYS sont en bon accord avec les résultats expérimentaux de la flèche dans la partie linéaire.

Références bibliographiques

[Al Bachi, 2002], L. Al Bachi, ‘‘Modélisation numérique et expérimentale du comportement des matériaux sandwiches appliqués à l’aéronautique’’, Thèse de l’ENI de Tarbes, (2002).

[Ansys, 2009], Ansys, version 12.1, "Users manuals" (2009).

[Armstrong, 1974] Armstrong, K.B. (1974).Aircraft floor panel developments at british airways (1967-1973).Composites, pages165–173.

[Berthelot, 1999], J.-M. Berthelot, “Matériaux Composites, Comportement mécanique et analyse des structures’’, Technique&Documentation, 3ième édition, (1999).

[Bitzer, 1994], T.N. Bitzer, "Useful analysis methods for sandwich structures", Hexcel corporation report-SAMPE symposium california-April, (1994).

[Chamis, 1988], C. C. Chamis, R. A. Aiello, L. N. Murthy, "Fiber composite sandwich thermostructural behavior: Computational simulation", Journal of composites thechnology & research, vol. 10, p. 93-99, (1988).

[Elspass, 1990], W Elspass., M Flemming, "Analyses of precision sandwich structures under thermal loading", Institute of design and construction methods (1KB) Suiss Federal Institute of Technology (SFIT) Zurrich Raemistr. 101, CH-8092 Zurich, (1990).

[Gay, 1997], Gay D, Matériaux composites, édition Hermès, (1997).

[Gibson, 1988], L. J. Gibson & M. F Ashby, "Cellular solids, structure and properties", Pergamon Press., (1988).

[Gibson, 1991], L. J. Gibson, "Hierachical cellular materials", Materials research society, Fall Meeting, (1991).

[Grédiac, 1993], M. Grédiac, "A finite element study of the transverse shear in honeycomb cores", Int. J. Solids structures, vol. 30, p. 1777-1788, (1993).

[Hexcel, 1994], Hexcel, "Design of sandwich structures", Structural Materials Hondbook, Section IV, (1994).

[Idlbi, 1997], A. Idlbi, M. Kamara, M. Touratier, ‘‘Comparison of various laminated plate theories”, Composites Structures, (1997), **37**, 173-184.

[Jrad, 2004], M. Jrad, “Approches prévisionnelles des propriétés mécaniques du nid d’abeilles : approche analytique et numérique’’, rapport de DEA MMSP, Université de Metz, (2004).

[Kelsey, 1958], S Kelsey., R Gellatly. & B. K Clark., "The shear modulus of foil honeycomb core", Aircraft Engineering, October 1958, p. 249-302, (1958).

[Keskes, 2007], B. Keskes, ‘‘Comportement en fatigue des composites sandwichs a âme en nids d’abeilles’’, Thèse de doctorat UFAS, (2007).

[Love, 1927], A. E. H. Love, “Treatise on the mathematical theory for elasticity(4th Edn)”, Dover, New York, (1927).

[Manet, 1998], V. Manet, ’’Méthode d’analyse par EF des contrainte aux interfaces dans les structure sandwiches ’’thèse de l’université Blais Pascal-Clairmont II(1998).

[Marguet ,2007] Steven MARGUET ‘’Contributiona lamodelisationdu comportement mécanique des structures sandwichs soumises à l’impact’’ Thèse ÉcoleCentraledeNantes, (2007).

[Mercier; 1999], J. P. Mercier, G. Zambelli, W.Kurz, ‘’Traite des matériaux, Introduction a la science des matériaux’ ’Presse polytechniques et universitaires Romandes,3^{ieme} édition (1999).

[Mindlin, 1951], R.D. Mindlin, ‘’Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates’’,J. Appl.,Mech., vol. 18, p. 31-38, (1997).

[Mistou, 2000], S. Mistou, "Développement d’un élément fini de coque composite a double courbure pour l’implémentation d’une application orientée objet", Thèse de l'université de Bordeaux I, (2000).

[Reddy, 1984], J.N. Reddy, “A simple higher-order theory for laminated composite plates”, J. Appl., Mech., 1984, **51**, 745-752.

[Reissner, 1945], E. Reissner, "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates", J. Appl., Mech., 1945, **12**, 69-77.

[Royei, 1996], D. Royer, E. Dieulesaint, ''Onde élastiques dans les solides'', 2ieme édition, Masson, (1996).

[Teti, 1989], R Teti, G Caprino ''Mechanical behavior of structural sandwiches'',Sdwich Construction, vol. 1,p.53-67 ,(1989).

[Touratier, 1989], M. Touratier, "Un modèle simple et efficace en mécanique des structures composites", C.R. Acad. Sci. Paris, t.309, série II, 933-938, (1989).

Résumé

Le but de ce travail est la modélisation numérique et expérimentale du comportement en flexion 3 points des panneaux sandwiches à âme en nids d'abeilles. Cette modélisation passe par deux étapes cruciales, l'homogénéisation et le développement d'un modèle raffiné pour la flexion 3 points.

L'homogénéisation nous a permis la détermination des 9 constantes élastiques du matériau. Deux méthodes en été utilisé, une numérique à l'aide du logiciel « Ansys » et l'autre analytique basé sur le modèle de « Gibson ».

La modélisation en flexion 3 points de panneaux sandwiches à âme en nids d'abeilles nous a permis de comparer nos résultats numériques et analytiques avec les résultats expérimentaux afin de valider la démarche théorique suivie.

MOTS-CLÉS: Sandwich multicouche, nid d'abeille, homogénéisation, modélisation, flexion 3 point.

ملخص

الهدف من هذا العمل هو وضع النماذج التجريبية والعددية لسلوك الانحناء ثلاث نقاط للألواح الساندويتش بلب عش النحلة. وضع هذه النماذج يمر بخطوتين أساسيتين، التجريس ووضع نموذج للانحناء ثلاث نقاط.

وقد سمح التجنيس بتحديد تسع ثوابت مرنة للألواح ساندويتش بلب عش النحلة . استعملت طريقتين ،وهي رقمية باستخدام برنامج " Ansys " والآخرى تحليلية استنادا إلى النموذج التحليلي" Gibson "

سمح وضع نماذج للانحناء ثلاث نقاط للالواح ساندويتش بلب عش النحلة بمقارنة النتائج العددية والتحليلية المتحصل عليها مع النتائج التجريبية للتحقق من صحة المنهج النظري المتبع.

الكلمات المفتاحية : متعدد الطبقات، ساندويتش، عش النحلة ، التجانس، النمذجة، الانحناء