People's Democratic Republic of Algeria
Ministry of Higher Education and Scientific Research
University of Ferhat Abbas - Setif 1

Faculty of Sciences / Department of Mathematics

Master's Thesis

Field: Mathematics and Computer Science | **Branch:** Mathematics
Specialty: Nonlinear Analysis and PDE

Asymptotic characterization of generalized problems in Sobolev spaces with variable exponents

Presented by:

Boussekine Rihab

The present thesis has been submitted in accordance with the stipulated requirements for the award of a master's degree.

Presented in front of the jury members:

President:	Abdelbaki MAROUANI	Prof	UFA Setif 1
Supervisor:	Hamid BENSERIDI	Prof	UFA Setif 1
Examiner:	Mustafa DERGUINE	MCA	UFA Setif 1

Promotion: 2025 / 2026

ABSTRACT

This thesis addresses a stationary nonlinear elasticity contact problem in a thin three-dimensional domain, characterized by Tresca friction and variable exponent nonlinearities. The model incorporates a generalized Lamé-type reaction term within the framework of variable exponent Sobolev spaces $W^{1,p(x)}$. We first establish the existence and uniqueness of the three-dimensional weak solution using the Minty-Browder theorem and monotonicity arguments.

Subsequently, we perform a rigorous asymptotic analysis as the thickness parameter ζ tends to zero. By employing a rescaling technique and deriving uniform a priori estimates, we justify the convergence toward an effective two-dimensional limit model. The results show that both the material's heterogeneous structure and the non-smooth contact laws are preserved in the limit, providing a solid mathematical foundation for reduced-order modeling in nonlinear media with non-standard growth.

Key Words. A priori estimates, Boundary value problem, Generalized boundary conditions, Weak equations, Variational formulation, Asymptotic analysis, Variable exponent spaces, Thin domains, Tresca friction, Variational inequalities, Non-standard growth, Existence and uniqueness.

RÉSUMÉ

Ce mémoire porte sur l'étude d'un problème de contact en élasticité non linéaire stationnaire dans un domaine tridimensionnel mince, caractérisé par le frottement de Tresca et des non-linéarités à exposants variables. Le modèle intègre un terme de réaction de type Lamé généralisé dans le cadre fonctionnel des espaces de Sobolev à exposants variables $W^{1,p(x)}$. Dans un premier temps, nous établissons l'existence et l'unicité de la solution faible tridimensionnelle en utilisant le théorème de Minty-Browder et des arguments de monotonie.

Ensuite, nous menons une analyse asymptotique rigoureuse lorsque le paramètre d'épaisseur ζ tend vers zéro. En employant une technique de changement d'échelle (rescaling) et en dérivant des estimations a priori uniformes, nous justifions la convergence vers un modèle limite bidimensionnel effectif. Les résultats démontrent que la structure hétérogène du matériau ainsi que les lois de contact non lisses sont préservées à la limite, fournissant ainsi un fondement mathématique solide pour la modélisation réduite dans les milieux non linéaires à croissance non standard.

Mots-clés. Estimations a priori, Problème aux limites, Conditions aux limites généralisées, Équations faibles, Formulation variationnelle, Analyse asymptotique; Espaces à exposants variables, Domaines minces, Frottement de Tresca, Inéquations variationnelles, Croissance non standard, Existence et unicité.

ملخص

تتناول هذه المذكرة مسألة تماس في المرونة غير الخطية الساكنة ضمن مجال ثلاثي الأبعاد رقيق، تتميز باحتكاك من نوع تريسكا ولاخطيات ذات أس متغير. يتضمن النموذج حدُّ تفاعل من نوع لامي المعمم ضمن إطار فضاءات سوبوليف ذات الأس المتغير.

نبدأ أولاً بإثبات وجود ووحدانية الحل الضعيف ثلاثي الأبعاد باستعمال مبرهنة مينتي-براودر وحجج الرتابة.

بعد ذلك، نقوم بإجراء تحليل تقاربي صارم عندما يؤول معامل السُمك ε إلى الصفر. ومن خلال استعمال تقنية إعادة التحجيم واستخراج تقديرات قبلية منتظمة، نبرر التقارب نحو نموذج حدّي فعال ثنائي الأبعاد. وتظهر النتائج أن كُلاً من البنية غير المتجانسة للمادة وقوانين التماس غير الملساء تبقى محفوظة في النموذج الحدي، مما يوفر أساساً رياضياً متيناً للنمذجة منخفضة الأبعاد في الأوساط غير الخطية ذات النمو غير القياسي.

الكلمات المفتاحية: التقديرات القبلية، مسائل القيم الحدية، الشروط الحدية المعممة، المعادلات الضعيفة، الصياغة التغايرية، التحليل التقاربي، فضاءات ذات الأس المتغير، المجالات الرقيقة، احتكاك تريسكا، المتراجحات التغايرية، النمو غير القياسي، الوجود والوحدانية.

CONTENTS

Notations **3**

General Introduction **5**

1 Preliminaries and basic properties **9**
1.1 Functional Spaces . . . 10
1.1.1 Lebesgue Spaces Theory . . . 10
1.1.2 The Sobolev space $W^{1,p}(\Omega)$ . . . 10
1.1.3 The Sobolev space $W^{m,p}(\Omega)$ . . . 11
1.1.4 Green Formula . . . 12
1.2 Variable Exponent Spaces $(L^{p(\cdot)}(\Omega), W^{1,p(\cdot)}(\Omega))$ . . . 12
1.2.1 A Variable Exponent Lebesgue Space $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ . . . 12
1.2.2 A Variable Exponent Sobolev Space $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ . . . 14
1.3 Embedding Theorem . . . 15
1.4 Different Inequalities . . . 16
1.4.1 Hölder's Inequality . . . 16
1.4.2 Young's Inequality . . . 18
1.4.3 Poincaré's Inequality . . . 18
1.4.4 Korn's Inequality . . . 19
1.5 Convergence of $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ . . . 19
1.5.1 Weak convergence . . . 21
1.6 Monotone and Pseudo-monotone . . . 22
1.6.1 Monotone . . . 22
1.6.2 Pseudo-monotone . . . 22
1.6.3 Hemicontinuity . . . 22
1.6.4 Coercivity . . . 22
1.6.5 Generalized Minty Browder Theorem . . . 23

2 Variational study of an elastic body in a thin domain **24**
2.1 Geometric setting and mathematical formulation . . . 25
2.2 The model and its variational formulation . . . 28
2.2.1 Variational formulation . . . 28
2.3 Existence and uniqueness of the weak solution . . . 32

3 Asymptotic study of problem $\mathcal{P}^\zeta$ **39**
3.1 Asymptotic analysis of the problem $\mathcal{P}^\zeta$ . . . 40
3.1.1 Rescaled formulation in a fixed domain. . . . 40
3.1.2 Uniform a priori estimates. . . . 41
3.2 Convergence results and limit problem . . . 44

General conclusion **54**

Bibliography **55**