

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE FERHAT ABBAS-SETIFUFAS(ALGERIE)

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

THESE

PRÉSENTEE À LA FACULTÉ DES SCIENCES DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES EN VUE
DE L'OBTENTION DU DIPLÔME

DOCTORAT EN SCIENCES

OPTION : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

PRÉSENTÉE PAR

MOHAMED KARA

Thème

**CALCUL DES MODES DE TORSION ET LA MÉTHODE DE DOMAINE FICTIF
POUR LES PROBLÈMES D'ÉLASTICITÉ PLANE AVEC DES CONDITIONS
AUX LIMITES GÉNÉRALES**

SOUTENUE PUBLIQUEMENT LE : **28/09/2013**

DEVANT LE JURY COMPOSÉ DE

Président	AIBECHÉ AÏSSA	PROF.	UNIV DE SÉTIF
Rapporteur	BOUBAKEUR MEROUANI	PROF.	UNIV DE SÉTIF
Examineur	F.Z. NOURI	PROF.	UNIV DE ANNABA
	A. BRADJI	M. C.	UNIV DE ANNABA
Invité	S. DRABLA	PROF.	UNIV DE SÉTIF

Je dédie ce travail à mes parents, ma femme, à mes enfants, et mes frères.

Remerciements

Le temps est aux remerciements. Je dois en premier lieu exprimer toute ma reconnaissance et mes remerciements au Professeur Boubakeur Merouani qui m'a fait l'honneur de diriger ce travail. Je le remercie pour ses conseils, ses encouragements et sa disponibilité. Qu'il trouve l'aboutissement de ce travail le témoignage de ma plus profonde gratitude. Je tiens également à exprimer ma plus profonde reconnaissance au Professeur L. Chorfi pour m'avoir tendu la main dans les moments difficiles et avoir toujours pris de mes nouvelles. Un énorme merci à lui pour sa disponibilité et ses remarques pertinentes qui ont permis de faire aboutir la préparation de l'article. Le Professeur A. Aibèche me fait l'honneur de présider mon jury de thèse. Je tiens à lui exprimer ma profonde gratitude et le remercier vivement. Mes remerciements s'adressent également au Professeur Phillippe Angot qui m'a fait l'honneur d'accepter de participer à mon jury et bien sûr par sa parfaite connaissance du domaine étudié m'a permis de mener à son terme ce travail de même que Hamid Bensiridi pour les riches entretiens que l'on a eus.

Je suis très satisfait d'avoir dans mon jury un des spécialistes de la méthode des volumes finis Abdellah Bradji qui a accepté de participer au jury en tant qu'examinateur. Je suis aussi très heureux que le Professeur F.Z. Nouri, spécialiste en analyse numérique, ait accepté de faire partie de ce jury en tant qu'examinateur. Que le Professeur S. Drabla trouve ici mes sincères remerciements pour avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse. Je présente maintenant mes remerciements aux personnes qui m'ont aidé plus particulièrement lors de la rédaction de ce mémoire, Yacine Slimani et Abdelmalek Guessoum les enseignants d'informatiques. Je remercie toute l'équipe du LATP de Marseille pour m'avoir aidé et soutenu durant les stages que j'ai passé avec eux, notamment le professeur Philippe Angot. Merci aux ingénieurs d'informatique et aux membres du secrétariat pour avoir mis à ma disposition les moyens nécessaires au bon déroulement de la simulation numérique de ma thèse. Je finirai par mes amis et particulièrement Pr. Roumili Abdelkrim pour le soutien qu'il m'a donné durant la période de rédaction de cette thèse. Je n'oublierai pas ma petite famille ainsi que ma mère qui ont une valeur inestimable à mes yeux. Je dédie ce travail à la mémoire de mon père.

Résumé

Cette thèse est composée de deux parties, la première est consacrée à l'étude numérique d'un problème aux valeurs propres modélisant les modes de torsion dans une couche infinie et axisymétrique élastique. Dans les coordonnées cylindriques (r, z) , sans θ , le problème est posé dans une bande semi-infinie $\Omega = \mathbb{R}_+^* \times]0, L[$. Pour l'approximation numérique, nous formulons le problème dans le domaine borné $\Omega_R =]0, R[\times]0, L[$. À cette fin, nous utilisons la méthode des éléments finis localisés, qui relie deux représentations de la solution : la solution analytique dans le domaine extérieur $\Omega'_R =]0, \infty[\times]0, L[$ et la solution numérique dans le domaine intérieur Ω_R . Cette méthode est numériquement testée sur des cas de test différents. L'objectif de la deuxième partie de cette thèse est de résoudre le problème d'élasticité plane dans un domaine d'origine physique en utilisant une méthode du domaine fictif avec une approche d'interface fine combinant les sauts du flux et de solutions avec les conditions aux limites immergées comme proposé dans [9]. L'idée principale de l'approche du domaine fictif consiste à immerger le domaine de l'étude originale en un domaine plus grand et plus simple géométriquement appelé le domaine fictif. Ici, nous présentons une méthode centrée sur la cellule de volumes finis pour la discrétisation du problème de domaine fictif. La méthode proposée est numériquement validée pour des cas de test différents.

Table des matières

Notations	1
Introduction	5
1 Calcul des Modes de Torsion dans une Couche Élastique Axisymétrique	9
1.1 Configuration géométrique et position du problème	10
1.2 Problème spectral	13
1.3 Formulation variationnelle	15
1.4 Formulation dans un domaine borné	17
1.4.1 Problème extérieur	17
1.4.2 L'opérateur de Dirichlet-Neumann	20
1.4.3 Problème (P_R)	21
1.4.4 Etude de la non-linéarité	21
1.5 Discrétisation	24
1.5.1 Le problème Semi-discrétisé	24
1.5.2 Discrétisation par éléments finis	25
2 Tests et Résultats Numériques	29
2.1 La mise en oeuvre de la méthode	30
2.2 Validation de la méthode	31
2.2.1 Profil constant par morceaux	33
2.2.2 Un exemple avec profil linéaire	50
2.2.3 L'influence du longueur de la couche sur le nombre des valeurs propres	52
3 Méthode de Domaine Fictif pour un Problème d'Élasticité Linéaire	63
3.1 Introduction et motivation	64
3.2 Position du problème	66

3.3	Modèle fictif unifié avec les conditions de sauts immergées sur Σ	69
3.3.1	Formulation variationnelle du problème de domaine fictif	70
3.3.2	Conditions aux limites de Fourier ou de Neumann immergées sur Σ	72
3.3.3	Conditions aux limites immergées de Dirichlet sur Σ	74
3.4	Discrétisation par volumes finis et l'algorithme de résolution	75
3.4.1	Discrétisation du domaine de calcul et notations	75
3.4.2	Discrétisation des équations	78
3.4.3	Le système algébrique associé au problème et solveurs	85
3.4.4	Caractérisation du domaine fictif (Original et auxiliaire)	86
3.5	Les résultats numériques	86
3.5.1	Normes Discrètes	87
3.5.2	Validation de la méthode (M.V.F) pour le problème d'élasticité	87
3.6	La méthode de domaine fictif pour le problème de Diffusion	92
3.7	La méthode de domaine fictif pour le problème d'élasticité linéaire	103
3.7.1	Premier problème de test. Un domaine carré	103
3.7.2	Deuxième problème de test. Un domaine de forme L.	111
3.7.3	Troisième problème de test. Un domaine quart de disque	125
	Conclusion et Perspectives	137
	Annexes	139
1	Fonctions de Bessel	139
2	Calcul des éléments des matrices A, B et $D^N(\alpha)$	141
3	Théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints	145
4	Le principe du " <i>Min-Max</i> "	147
5	Décomposition spectrale de l'opérateur B	149
	Bibliographie	153

Notations

Les principales notations introduites dans cette thèse sont regroupées dans cette nomenclature. Nous notons **en gras** les grandeurs vectorielles et les matrices.

Géométrie

Ω	la bande élastique non bornée $]0, L[\times]0, +\infty[$,
Ω_R	la partie bornée de la couche élastique sur laquelle on applique la méthode des éléments finis,
$\tilde{\Omega}$	la partie non bornée de la couche élastique complément de Ω_R dans Ω ,
Γ_R	l'interface entre Ω_R et $\tilde{\Omega}$ telle que $\Omega = \Omega_R \cup \Sigma_R \cup \tilde{\Omega}$,
Γ_0, Γ_L	les parties de la frontière de Ω pour $(r = 0)$ et $(z = L)$ repectivement,
d	dimension de l'espace,
$\Omega, \tilde{\Omega}$	ouvert borné de $\mathbf{R}^d$, généralement domaine physique ou domaine fictif,
Ω_e	domaine extérieur (complémentaire du domaine physique par rapport au domaine fictif),
$\Gamma, \tilde{\Gamma}, \Gamma_e$	frontière ou partie de la frontière de $\Omega, \tilde{\Omega}$ ou Ω_e ,
Σ	frontière immergée,
$\mathbf{n}$	normale extérieure unitaire ,
T_h	maillage de Ω (adapté ou non),
K	élément du maillage rectangle ou triangle : volume fini ou élément fini,
σ	face d'un élément K du maillage,
h_K	diamètre de K : distance maximale entre deux points de K ,
h	pas du maillage : maximum du diamètres $h_K, K \in T_h$,
Ω_h	domaine polygonale approchant Ω , $\bar{\Omega} = \cup_{K \in T_h} K$,
$\Omega_{e, h}$	domaine polygonale approchant Ω_e ,
$\tilde{\Omega}_h$	domaine polygonal approchant $\tilde{\Omega}$,
Γ_h	frontière ou partie de la frontière de Ω_h ,

Σ_h	interface approchant Σ par des faces d'élément K du maillage T_h ,
$\omega_{h,\Sigma}, \omega_{h,\Gamma}$	interface diffuse : union des mailles $K \in T_h$ traversées par Σ ou Γ ,

Paramètres et Coefficients

$J_\nu(z), K_\nu(z)$	les fonctions de <i>Bessel</i> et <i>Bessel modifiées</i> d'ordre ν ,
λ, μ	les coefficients de Lamé qui dépendent des variables de l'espace ,
ρ	la densité du milieu élastique, dépend des variables de l'espace,
$\lambda_\infty, \mu_\infty, \rho_\infty$	caractérisent le milieu $\hat{\Omega}$, dépendent seulement de z ,
$\sigma_{dis}, \sigma_{ess}, \sigma_{pon}$	le spectre discret, essentiel, ponctuel de l'opérateur $\mathbf{B}$,
η	paramètre de pénalisation (tendant vers 0),
ϵ	correction géométrique de surface globale,
N	le rang de troncature de la série de Fourier,
M_r, M_z	le nombre des points de discrétisation du domaine Ω_R suivant l'axe (or) , l'axe (oz) respectivement,
$M_r \times M_z$	la dimension de l'espace des éléments finis,
M_x, M_y	le nombre des points de discrétisation du domaine fictif Ω suivant l'axe (ox) , l'axe (oy) respectivement,

Espaces fonctionnels, normes et semi-normes

Les espaces fonctionnels et les normes associées sont définis sur un ouvert quelconque $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ pour une fonction v mesurable.

$$\begin{aligned}
H(\Omega) &= \{u \in L_{loc}^2(\Omega), \sqrt{r}u \in L^2(\Omega)\} \\
(u, v)_{H(\Omega)} &= \iint_{\Omega} uv \rho r dr dz, \\
\|u\|_{H(\Omega)} &= (u, v)_{H(\Omega)}^{1/2}, \\
V(\Omega) &= \left\{ u \in H(\Omega), \frac{u}{\sqrt{r}} \in L^2(\Omega), \sqrt{r}|\nabla u| \in L^2(\Omega), u(r, 0) = 0 \right\}, \\
\|u\|_{V(\Omega)}^2 &= \iint_{\Omega} (|\nabla u|^2 + \frac{|u|^2}{r^2} + |u|^2) r dr dz, \\
H_0^{\frac{1}{2}}(]0, L[) &= \left\{ \varphi \in H^{\frac{1}{2}}(]0, L[), \frac{\varphi}{\sqrt{z}} \in L^2(]0, L[) \right\}, \\
H_0^s(]0, L[) &= \left\{ v(z) = \sum_{p=1}^{+\infty} v_p g_p(z); \|v\|_s^2 = \sum_{p=1}^{+\infty} |v_p|^2 p^{2s} < +\infty, s \in \mathbb{R} \right\}, \\
\langle v, u \rangle_s &= L \sum_{p=1}^{+\infty} v_p \bar{u}_p, \text{ est le produit de dualité entre } H_0^s \text{ et } H_0^{-s}, \\
L^p(\Omega) &= \{v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, v \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |v|^p dx < \infty\}, 1 \leq p < \infty, \\
\|v\|_{L^p(\Omega)} &= \left(\int_{\Omega} |v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty; \\
L^\infty(\Omega) &= \{v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; v \text{ mesurable et il existe } C \text{ telle que } |v| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}, \\
\|v\|_{L^\infty(\Omega)} &= \inf \{C; |v| \leq C \text{ p. p. sur } \Omega\}, \\
\alpha &= (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \text{ multi-indice dans } \mathbb{N}^d, \\
|\alpha| &= \sum_{i=1}^d \alpha_i, \text{ utilisé pour la définition des espaces de Sobolev,} \\
\partial^\alpha v &= \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_d} x_d}, \\
\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)} &= \begin{cases} \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}, \text{ norme sur } W^{m,p}(\Omega), \\ \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ norme équivalente sur } W^{m,p}(\Omega), 1 \leq p < \infty; \end{cases} \\
H^m(\Omega) &= W^{m,2}(\Omega), \text{ espace de Hilbert,} \\
\|v\|_{W^{m,2}(\Omega)} &= \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ norme sur } H^m(\Omega), \\
|v|_{W^{m,2}(\Omega)} &= \left(\sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ semi-norme sur } H^m(\Omega), \text{ équivalente à } |v|_{W^{m,2}(\Omega)}
\end{aligned}$$

Algorithmes et Solveurs

- GMRES* Generalized Minimum RESidual method,
solves the linear system $Ax=b$ using the Generalized Minimal residual
method with restarts. Authors Sage Group, (IRISA, 2005).
- QMR* Quasi Minimal Residual method with preconditioning,
solves the linear system $Ax=b$ using the Quasi Minimal Residual Method with
preconditioning. Authors SAGE Group, IRISA 2005.
- spec* Calcul des éléments propres d'une matrice.
[X, diagevals]=spec(A), X matrice des vecteurs propres.
diagevals : les éléments diagonaux sont les valeurs propres.
- sparse* is used to build a sparse matrix. Only non-zero entries are stored.

Introduction

L'approche numérique est à l'origine de très nombreuses études mathématiques dans le domaine de l'élasticité (en particulier, cas de propagation des ondes). Ici, on ne considère, dans la première partie de notre thèse, que le phénomène de propagation d'ondes dans un milieu élastique isotrope et hétérogène. Plus précisément, les modes propres d'une couche élastique infinie qui possède une symétrie de révolution. Un mode propre est une onde harmonique dont l'énergie est localisée au voisinage d'une perturbation due aux hétérogénéités du milieu. Ce type de problème intervient en géophysique lorsqu'on utilise la technique de sismique de puits en exploration pétrolière. Cette technique s'appuie, sur la propagation des ondes mécaniques dans le milieu à investir. Les ondes sont provoquées par une source (explosion) placée dans un puits, alors le signal est reçu à la surface. La modélisation mathématique de ce phénomène est un problème direct, c'est à dire étant donné l'ensemble des paramètres physiques (l'épaisseur des couches géologiques, la vitesse des ondes dans chaque couche, le diamètre du puits, etc...) on calcule le signal qui sera reçu par le récepteur. Dans cette direction, on cite les travaux de [15, 12, 24, 64] dans lesquels les auteurs proposent des méthodes analytiques ou approchées, basées sur les formulations intégrales, pour calculer le champ de déplacement créé par une source placée dans un puits contenant un fluide. Dans ces travaux, le milieu considéré est l'espace entier. Dans ce travail, on considère un modèle réaliste. On impose la condition d'encastrement à la base de la couche et la condition de surface libre sur la face supérieure, ce qui complique l'étude. Cependant, on s'intéresse seulement aux modes propres créés dans la couche (en absence de la source). La connaissance des modes propres (i.e. fonctions propres) et des modes de radiation (i.e. fonctions propres généralisées) est essentielle pour la construction de la fonction de Green qui sert par la suite à résoudre des problèmes transitoires (i.e. avec source). Pour la couche homogène les premiers travaux sont ceux de [45] qui a établi l'équation de dispersion de Rayleigh-Lamb. Pour les milieux homogènes de géométrie cylindrique, on peut citer le travail de Mindlin [46] qui étudie les modes guidés par l'extérieur d'une cavité cylindrique et celui de [57] qui construit un système complet de modes propres associés à un demi-espace homogène entourant une

cavité. En élasticité hétérogène, il y a la contribution de L. Chorfi [17], qui considère les modes guidés par l'espace élastique avec symétrie de révolution. C'est à dire lorsque les coefficients élastiques du milieu dépendent seulement de la variable radiale. On peut citer aussi les travaux de [20, 51] consacrés à l'analyse spectrale d'une bande acoustique.

Le milieu que nous considérons ici est une couche axisymétrique et les solutions sont harmoniques en θ . En développant le champ en série de Fourier par rapport à la variable azimutale θ , la recherche des modes propres se ramène à la résolution d'une suite de problèmes spectraux indexés par n . Dans le cas des modes axisymétriques ($n = 0$), le mouvement se décompose en deux modes indépendants, un mode de compression (solution d'un problème vectoriel) et un mode de torsion (solution d'un problème scalaire). Nous présentons une étude numérique ainsi qu'une simulation numérique du mode de torsion basée sur un schéma des éléments finis (S. E. F.). Une des principales difficultés de la discrétisation est d'effectuer le calcul sur un domaine borné alors que le problème est posé sur un domaine non borné noté Ω . La méthode la plus simple consiste à imposer la condition $u = 0$ sur la frontière fictive $r = R$ et discrétiser le problème dans le domaine borné noté Ω_R ; cette technique est peu précise surtout lorsque le mode est mal confiné (i.e. le champ décroît lentement quant $r \rightarrow \infty$). En effet, dans ce cas il faut choisir R assez grand ce qui augmente la taille du système algébrique. Nous proposons une méthode consistant à écrire un problème équivalent en domaine borné avec une condition de transmission sur le bord $r = R$. Cette méthode, appelée méthode des éléments finis localisés, a été utilisée par [41] dans la résolution de l'équation de Helmholtz dans un domaine extérieur, par [50] pour l'équation de Schrödinger dans le plan puis par Bonnet [13], Gmati et Mahi [52], dans le cadre de l'opérateur intégré pour un problème de valeurs propres. Nous mentionnons aussi le rapport [16] pour le calcul des modes guidés en élasticité et [13, 52, 18] pour le calcul des fréquences de coupure en électromagnétisme. Notre étude est complétée par une simulation numérique permettant de visualiser les modes de torsion ainsi que leurs principales caractéristiques, et de mettre en évidence des courbes de dispersion (c'est à dire la représentation graphique des fonctions $\omega \rightarrow \omega(\alpha)$) de l'opérateur associé à ces modes. Ces résultats, confirment les théorèmes de convergence. Dans la deuxième partie de notre travail, nous avons utilisé une méthode originale de type domaine fictif pour la résolution des problèmes d'élasticité linéaire avec des conditions aux limites générales : Dirichlet, Robin ou Neumann, plus précisément, en se focalisant sur les approches de type interface fine. La frontière immergée est approchée par une interface dite fine. Ces dernières années, les méthodes numériques de type domaine fictif sont très utilisées, notamment dans le milieu industriel pour la simulation numérique en mécanique des fluides. L'idée de base des méthodes de type domaine fictif est d'immerger le domaine original d'étude (ou domaine physique) dans un

domaine fictif de forme géométrique plus simple (souvent rectangulaire en 2D) qui devient le domaine de calcul.

Cette approche nous permet d'utiliser des méthodes numériques basées sur des maillages structurés réguliers (principalement cartésiens). L'objectif est de pouvoir bénéficier des nombreux avantages de ces méthodes (solveurs rapides, bonnes propriétés de convergence, formulation tensorielle naturelle...) tout en essayant d'en limiter les inconvénients (difficulté de prendre en compte les frontières complexes des domaines physiques) qui font que jusqu'à présent la majorité des logiciels industriels utilisent des maillages non structurés. Cependant, afin de recouvrir une solution approchée satisfaisante sur le domaine physique, il faut pouvoir tenir compte de façon précise des frontières immergées dans le domaine de calcul. Les différentes modélisations des frontières immergées peuvent se regrouper en deux grands types d'approches. Ces approches se distinguent par la dimension de l'espace dans lequel est approchée l'interface immergée réelle : l'interface approchée est de même dimension que l'interface immergée réelle (i.e. une courbe en 2D ou une surface en 3D), on parlera alors d'interface approchée fine ; ou elle est élargie par rapport à l'interface immergée réelle (i.e. une surface en 2D ou un volume en 3D), on parlera alors d'interface approchée diffuse.

Le plan de la thèse est le suivant :

Dans le premier chapitre, on présente le problème, la configuration géométrique de la couche sur laquelle on va travailler ainsi que la modélisation mathématique proposée. L'interprétation mathématique permet de se ramener à l'étude d'un problème de recherche de valeurs propres. Dans une première étape, on donne une formulation équivalente du problème initial sur un domaine borné, dans la deuxième étape, on formule le problème semi-discrétisé correspondant.

Dans le deuxième chapitre, notre objectif est de visualiser les modes propres et les valeurs propres de l'opérateur associé ainsi que les courbes de dispersion. En suite, on mettra en évidence, sous certaines hypothèses, une monotonie des courbes de dispersion. Ainsi, on pourra isoler les pulsations prolongées dans le spectre essentiel de l'opérateur associé.

Dans le troisième chapitre, on utilise une méthode numérique du type domaine fictif pour étudier les problèmes aux limites d'élasticité défini dans le domaine physique noté $\tilde{\Omega}$, avec des conditions aux limites soit de Dirichlet, Fourier ou de Neumann.

Dans le quatrième chapitre, on introduit un schéma aux volumes finis localement modifié. Cela consiste à discrétiser le domaine fictif à l'aide d'une grille cartésienne et à répartir les noeuds de discrétisation en deux familles selon leur position par rapport à l'interface (la frontière immergée). Ce schéma présente l'avantage de conserver une unique grille cartésienne (non modifiée) pour résoudre le problème sur le domaine fictif. De plus, le stencil

de discrétisation est le même pour tous les noeuds du maillage, ce sont les coefficients du schéma qui sont modifiés localement pour tenir compte de façon précise les conditions de transmission sur l'interface.

Chapitre 1

Calcul des Modes de Torsion dans une Couche Élastique Axisymétrique

1.1 Configuration géométrique et position du problème

On considère une couche élastique infinie d'épaisseur L , qui occupe le domaine $\tilde{\Omega} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } : 0 < x_3 < L\}$, cette couche est isotrope caractérisée par une densité ρ et des coefficients de lamé (λ, μ) . On suppose que la couche est axisymétrique. Plus précisément, la densité ρ et les coefficients (λ, μ) sont des fonctions de $L^\infty(\tilde{\Omega})$ du type $f(r, z)$ si $r < R$ et $f(z)$ si $r > R$ où (r, θ, z) désignent les coordonnées cylindriques. La couche est donc stratifiée horizontalement lorsqu'on s'éloigne de l'axe de symétrie (voir la figure 1.1). On s'intéresse à la recherche des modes propres (vibrations) de la couche, c'est à dire à un champ de déplacement $U(x_1, x_2, x_3, t)$ crée dans le milieu en l'absence de source, harmonique par rapport au temps et dont l'amplitude $|u| \in L^2(\tilde{\Omega})$ (i.e. l'énergie du mode est confinée autour de l'axe de la couche). On suppose aussi que la face $z = 0$ est fixe ($u = 0$) et la face $z = L$ est libre (i.e la contrainte normale est nulle). L'ouvert $\tilde{\Omega}$ peut s'écrire sous la forme $\tilde{\Omega} = \Omega \times]0, 2\pi[$, où $\Omega = \{(r, z) : r \in \mathbb{R}^+ \text{ et } 0 < z < L\}$. Toute fonction $\tilde{u} \in \tilde{H} = L^2(\tilde{\Omega})^3$ peut être décomposée partiellement en série de Fourier de la façon suivante :

$$\tilde{u}(r, z, \theta) = \sum_{n \geq 0} u_n(r, z) e^{in\theta}, \quad (1.1)$$

les fonctions u_n sont appelées modes de Fourier de $\tilde{u}$ avec $u_n \in \overline{H}$ où

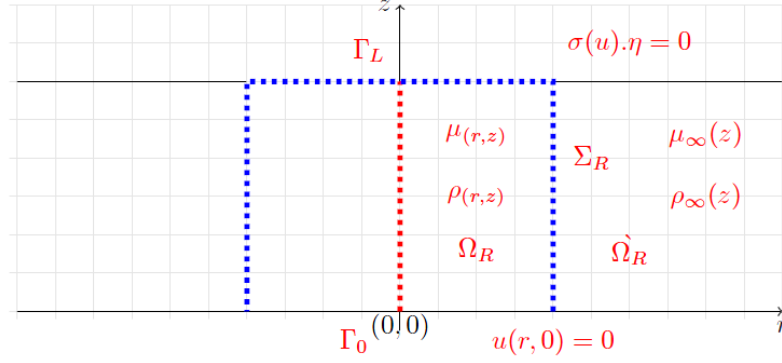
$$\overline{H} = \{u \in L^2_{loc}(\Omega)^3, \sqrt{r}u \in L^2(\Omega)^3\} = H^3. \quad (1.2)$$

La recherche des modes propres de la couche se ramène à déterminer des champs de déplacement $\tilde{u} \in H(\tilde{\Omega})$ de la forme suivante :

$$\tilde{u}(r, z, \theta, t) = [u_1^n(r, z), u_2^n(r, z), u_3^n(r, z)] \exp(in\theta - i\omega t), \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \omega > 0. \quad (1.3)$$

En coordonnées cylindriques, on a ([1]) :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_{rr}) & + & \frac{\partial}{\partial \theta}(\sigma_{\theta r}) + r \frac{\partial}{\partial z}(\sigma_{zr}) - \sigma_{\theta\theta} = r\rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \sigma_{r\theta}) & + & \frac{\partial}{\partial \theta}(\sigma_{\theta\theta}) + r \frac{\partial}{\partial z}(\sigma_{z\theta}) = r\rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \\ \frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_{rz}) & + & \frac{\partial}{\partial \theta}(\sigma_{\theta z}) + r \frac{\partial}{\partial z}(\sigma_{zz}) = r\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \end{array} \right. \quad (1.4)$$

Fig. 1.1 – La méridienne d’une couche élastique infinie et axisymétrique Ω .

où $\sigma(\tilde{u})$ est le tenseur des contraintes (symétrique) lié au déplacement par la loi de Hooke :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda \nabla \cdot u + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} & ; & \quad \sigma_{\theta\theta} = \lambda \nabla \cdot u + 2\mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) \\ \sigma_{r\theta} &= \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) \right) & ; & \quad \sigma_{\theta z} = \mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \\ \sigma_{rz} &= \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + r \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) & ; & \quad \sigma_{zz} = \lambda \nabla \cdot u + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.5)$$

avec

$$\nabla \cdot u = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad (1.6)$$

et λ et μ sont les coefficients de Lamé.

En substituant (1.3) dans (1.4), le champ $u(r, \theta, z, t) = (u_r(r, z), u_\theta(r, z), u_z(r, z)) \exp(in\theta - i\omega t)$ doit vérifier le système suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rr}^n) &+ in(\sigma_{\theta r}^n) + r \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{zr}^n) - \sigma_{\theta\theta}^n &= -\omega^2 r \rho u_r \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sigma_{r\theta}^n) &+ in(\sigma_{\theta\theta}^n) + r \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{z\theta}^n) &= -\omega^2 r \rho u_\theta \\ \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rz}^n) &+ in(\sigma_{\theta z}^n) + r \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{zz}^n) &= -\omega^2 r \rho u_z \end{aligned} \quad (1.7)$$

où on a posé :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^n &= \lambda \nabla^n \cdot u + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} & ; & \quad \sigma_{\theta\theta}^n = \lambda \nabla^n \cdot u + 2\mu \frac{1}{r} (in u_\theta + u_r) \\ \sigma_{r\theta}^n &= \mu \left(\frac{in}{r} u_r + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) \right) & ; & \quad \sigma_{\theta z}^n = \mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_z}{r} \right) \\ \sigma_{rz}^n &= \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + r \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) & ; & \quad \sigma_{zz}^n = \lambda \nabla^n \cdot u + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.8)$$

avec

$$\nabla^n \cdot u = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (ru_r) + inu_\theta \right) + \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (1.9)$$

Le changement d'inconnues suivant 1.10 :

$$(u_r(r, z), u_\theta(r, z), u_z(r, z)) = (u_1(r, z), iu_2(r, z), u_3(r, z)) \quad (1.10)$$

transforme le système (1.7) formellement en (1.11)

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n(u) = \frac{1}{\rho r} \left[-\frac{\partial}{\partial r} \left(B \frac{\partial u}{\partial r} + B_2 u \right) + B_1 \frac{\partial u}{\partial r} + B_3 u + \frac{\partial}{\partial r} \left(B_6 \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(B_7 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(B_8 \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \right. \\ \left. B_4 \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} (B_5 u) \right], \end{aligned} \quad (1.11)$$

où $\mathcal{A}_n$ est un opérateur aux dérivées partielles défini au sens des distributions et les matrices B , B_i , $i = 1, \dots, 8$ sont telles que :

$$\begin{aligned} B &= \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu)r & 0 & 0 \\ 0 & \mu r & 0 \\ 0 & 0 & \mu r \end{bmatrix}; B_1 = B_2^t = \begin{bmatrix} \lambda & 0 - n\mu & 0 \\ n\lambda & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; B_8 = \begin{bmatrix} -\mu r & 0 & 0 \\ 0 & -\mu r & 0 \\ 0 & 0 & -(\lambda + 2\mu)r \end{bmatrix}; \\ B_3 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{r}(\lambda + (n^2 + 1)\mu) & \frac{n}{r}(\lambda + 3\mu) & 0 \\ \frac{n}{r}(\lambda + 3\mu) & \frac{1}{r}(n^2\lambda + (2n^2 + 1)\mu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n^2}{r}\mu \end{bmatrix}; B_4 = -B_5^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & n\lambda \\ 0 & -n\mu & 0 \end{bmatrix}; \\ B_6 = -B_7^t &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\lambda r \\ 0 & 0 & 0 \\ -r\mu & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Le système (1.11) a l'avantage d'avoir des coefficients réels, donc les composantes u_1 , u_2 et u_3 sont des fonctions réelles.

Le vecteur des contraintes suivant l'axe (oz), est donné par :

$$\sigma_z^n(u) = \begin{cases} \sigma_{rz}^n(u) &= \mu \left(\frac{\partial u_3}{\partial r} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) \\ \sigma_{\theta z}^n(u) &= \mu \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{n}{r} u_3 \right) \\ \sigma_{zz}^n(u) &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_3}{\partial z} + \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{1}{r} (u_1 + nu_2) \right) \end{cases}$$

et les conditions aux limites se traduisent par :

$$\sigma_z^n(u) \big|_{z=L} = 0, \quad \text{et } u \big|_{z=0} = 0. \quad (1.12)$$

Dans le cas $n = 0$, le système se découple en un système

$$(P_0^c) \quad C\bar{u} = \omega^2 \bar{u}, \quad \bar{u} = (u_1, u_3), \quad \text{avec}$$

$$(C\bar{u})_1 = \frac{1}{\rho r} \left[-\frac{\partial}{\partial r} \left((\lambda + 2\mu)r \frac{\partial u_1}{\partial r} + \lambda u_1 + \lambda r \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) + \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) + \frac{(\lambda + 2\mu)}{r} u_1 - \frac{\partial}{\partial z} \left(r\mu \frac{\partial u_3}{\partial r} + r\mu \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) \right];$$

$$(C\bar{u})_3 = \frac{1}{\rho r} \left[-\frac{\partial}{\partial r} \left(\mu r \frac{\partial u_3}{\partial r} + \mu r \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left((\lambda + 2\mu)r \frac{\partial u_3}{\partial z} + \lambda u_1 + \lambda r \frac{\partial u_1}{\partial r} \right) \right],$$

et en une équation scalaire

$$(P_0^t) \quad Bu_2 = \omega^2 u_2,$$

avec

$$Bu_2 = \frac{1}{\rho r} \left[-\frac{\partial}{\partial r} \left(\mu r \frac{\partial u_2}{\partial r} - \mu u_2 \right) - \mu \frac{\partial u_2}{\partial r} + \frac{\mu}{r} u_2 - \frac{\partial}{\partial z} \left(r\mu \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) \right].$$

Dans ce cas, on constate que le mouvement se décompose en deux modes indépendants :

Un mode de torsion

$$\begin{cases} u_r &= u_z &= 0, \\ u_\theta &= u_2(r, z) \exp(in\theta - i\omega t), \end{cases} \quad (1.13)$$

Un mode de compression

$$\begin{cases} u_r &= u_1(r, z) \exp(in\theta - i\omega t), \\ u_\theta &= 0, \\ u_z &= u_3(r, z) \exp(in\theta - i\omega t). \end{cases} \quad (1.14)$$

1.2 Problème spectral

La détermination des solutions analytiques associées aux modes de torsion dans les milieux hétérogènes est généralement impossible, dans ce travail, nous allons essayer de les simuler par une méthode numérique, le problème spectral associé à ceux modes s'énonce

comme suit.

Pour $L > 0$, on pose $\Omega = \mathbb{R}_+^* \times]0, L[$, et on considère le problème aux valeurs propres suivant :

$$(P_0) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in D'(\Omega), u \neq 0 \text{ et } \omega \in \mathbb{R}_+ \text{ telle que,} \\ B_0 u = \omega^2 \rho u \text{ pour } (r, z) \in \Omega, \\ u(r, 0) = 0, (\mu \frac{\partial u}{\partial z})(r, L) = 0, \forall r > 0. \end{cases}$$

où l'opérateur différentiel B_0 est défini par

$$B_0 u = -\frac{1}{\rho r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\mu r \frac{\partial u}{\partial r} - \mu u \right) + \mu \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu r \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \mu \frac{u}{r} \right]. \quad (1.15)$$

Nous utilisons les définitions $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ et $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$.

Ce problème, modélise les vibrations des modes de torsion $u_\theta(r, \theta, z, t) = u(r, z)e^{i\omega t}$ dans une couche élastique infinie et axisymétrique occupant le domaine $\tilde{\Omega} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 < z < L\}$ or $\tilde{\Omega} = \Omega \times [0, 2\pi[$ dans les coordonnées cylindriques (r, θ, z) ([1]), ω est la fréquence. Nous supposons que la couche est stratifiée et perturbée avec une perturbation locale, ce qui signifie qu'elle est caractérisée par une densité $\rho(r, z)$ et un coefficient de cisaillement $\mu(r, z)$ qui vérifient les hypothèses :

$$(A1) \quad \mu, \rho \in L^\infty(\Omega), 0 < \mu_- = \inf \mu \text{ et } 0 < \rho_- = \inf \rho,$$

$$(A2) \quad \exists R > 0 \text{ tel que : } (\mu(r, z), \rho(r, z)) = (\mu_\infty(z), \rho_\infty(z)) \text{ pour } r > R.$$

Les conditions aux limites signifient que la couche est fixée sur la face $z = 0$ et libre sur la face $z = L$.

Dans la première partie de ce travail, nous proposons une méthode numérique pour calculer les valeurs propres et les modes propres du problème (P_0) . Comme le domaine Ω est non borné, la méthode la plus simple consiste à imposer la condition $u = 0$ sur la frontière fictive $r = R$ puis discrétiser le problème dans Ω_R . Cette technique est peu précise surtout lorsque le mode est mal confiné. En effet, dans ce cas il faut choisir R assez grand, ce qui augmente la taille du système algébrique. Pour surmonter cette difficulté, nous proposons une méthode qui consiste à écrire un problème équivalent en domaine borné via une condition de transmission sur le bord fictif $r = R$ (R étant la taille de la perturbation). L'idée consiste à utiliser l'opérateur de Dirichlet-Neumann qui sert à relier la solution analytique dans le domaine extérieur $\Omega'_R =]R, +\infty[\times]0, L[$ à la solution numérique du domaine intérieur $\Omega_R =]0, R[\times]0, L[$. La condition de transmission est exprimée à l'aide d'une série qui sera tronquée à un ordre N lors de l'approximation numérique. Cette méthode est bien connue par la méthode des éléments finis localisés qui a été utilisée par plusieurs auteurs. Nous nous

référons aux travaux [35, 41, 50], respectivement pour les problèmes de hydrodynamique, la résolution de l'équation de Helmholtz et l'équation de Schrödinger. Nous mentionnons également le rapport [16] pour le calcul des modes guidés dans l'élasticité et [13, 52, 18] pour le calcul des fréquences de coupure dans l'électromagnétisme. Notons que l'opérateur différentiel B_0 dans notre modèle est singulier à l'origine, ce qui rend l'analyse plus difficile.

1.3 Formulation variationnelle

Le problème (P_0) a été introduit dans [2], comme un problème spectral : $Bu = \omega^2 u$, où B est un opérateur auto-adjoint caractérisé par un triplet variationnel (H, V, b) . Nous rappelons les résultats essentiels qui y figurent. Nous avons introduit l'espace de Hilbert réel (L^2 avec poids) :

$$H(\Omega) = \{u \in L^2_{loc}(\Omega), \sqrt{r}u \in L^2(\Omega)\}$$

avec le produit scalaire $(u, v)_{H(\Omega)} = \iint_{\Omega} uvprdrdz$ et la norme associée $\|u\|_{H(\Omega)} = (u, v)_{H(\Omega)}^{1/2}$, et l'espace de Sobolev à poids

$$V(\Omega) = \left\{ u \in H(\Omega), \frac{u}{\sqrt{r}} \in L^2(\Omega), \sqrt{r}|\nabla u| \in L^2(\Omega), u(r, 0) = 0 \right\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{V(\Omega)}^2 = \iint_{\Omega} (|\nabla u|^2 + \frac{|u|^2}{r^2} + |u|^2)rdrdz.$$

Nous pouvons écrire le problème (P_0) sous la forme variationnelle suivante :

$$(P_1) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in V(\Omega), u \neq 0, \text{ et } \omega > 0 \text{ telle que :} \\ b(u, v) = \omega^2(u, v)_{H(\Omega)}, \quad \forall v \in V(\Omega). \end{cases}$$

où la forme bilinéaire est définie par

$$b(u, v) = \iint_{\Omega} \mu(r \nabla u \cdot \nabla v + \frac{u v}{r} - u \frac{\partial v}{\partial r} - v \frac{\partial u}{\partial r})drdz, \quad \forall u, v \in V(\Omega).$$

Cette forme est évidemment continue et symétrique. En utilisant l'inégalité de Poincaré

$$\forall u \in V(\Omega) \quad \iint_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2 r dr dz \geq \frac{L^2}{2} \iint_{\Omega} |u|^2 r dr dz, \quad (1.16)$$

nous pouvons établir que $b(., .)$ est V-coercitive. Ainsi, à partir du théorème de représentation ([21]), il existe un opérateur non borné B auto-adjoint tel que $b(u, v) = (Bu, v)_{H(\Omega)}$ pour tous $u \in D(B)$ et $v \in V$. Le domaine de définition de B est donné par

$$D(B) = \left\{ u \in V(\Omega), B_0 u \in L^2(\Omega), \mu \frac{\partial u}{\partial z}(r, L) = 0 \right\} \text{ et } Bu = B_0 u.$$

La formulation spectrale du problème (P_0) est alors :

$$(P) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in D(B), u \neq 0, \text{ et } \omega > 0 \text{ tels que :} \\ B(u) = \omega^2 u \end{cases}$$

Remarque 1.3.1. Nous pouvons voir pour $u \in D(B)$ que $\operatorname{div}(\mu \nabla u) \in H(\Omega)$, d'où la trace $(\mu \frac{\partial u}{\partial z})(r, L)$ existe au sens généralisé (dans l'espace $H_{loc}^{-1/2}(R_+^*)$).

Le spectre de B est décrit dans la proposition suivante.

Proposition 1.3.1. Le spectre de B est $\sigma = \sigma_{ess} \cup \sigma_{dis}$ tel que

(i) le spectre essentiel de B est

$$\sigma_{ess} = [\gamma, +\infty[$$

où

$$\gamma = \inf_{g \in W(0, L), g \neq 0} \frac{\int_0^L \mu_\infty(z) |g'(z)|^2 dz}{\int_0^L \rho_\infty(z) |g(z)|^2 dz} \quad (1.17)$$

avec $W(0, L) = \{g \in H^1(0, L), g(0) = 0\}$.

(ii) Le spectre discret satisfait

$$\sigma_{dis} \subset [C, \gamma[, \quad \text{avec la borne inférieure} \quad C = \left(\frac{\mu_-}{\rho_+}\right) \frac{L^2}{2} \text{ et } \rho_+ = \sup \rho.$$

Proof. L'assertion (i) est prouvée dans [2]. L'inclusion (ii) découle de (1.16), en effet, nous avons pour $u \in V(\Omega)$

$$b(u, u) \geq \mu_- \iint_{\Omega} \left(r \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2 - 2u \frac{\partial u}{\partial r} \right) dr dz.$$

Puisque $D(\Omega)$ est dense dans $V(\Omega)$ il s'ensuit que

$$\iint_{\Omega} 2u \frac{\partial u}{\partial r} dr dz = \int_0^L (|u(\infty, z)|^2 - |u(0, z)|^2) dz = 0,$$

donc

$$b(u, u) \geq \mu_- \iint_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2 r dr dz \geq \left(\frac{\mu_-}{\rho_+} \right) \frac{L^2}{2} \iint_{\Omega} |u|^2 r \rho dr dz.$$

1.4 Formulation dans un domaine borné

Avant de présenter la méthode, nous introduisons quelques notations. Nous mettons

$$\Omega_R =]0, R[\times]0, L[\text{ et } \Omega'_R =]R, +\infty[\times]0, L[,$$

pour $D = \Omega_R$ ou Ω'_R , on désigne par $H(D)$ (resp. $V(D)$) l'espace des fonctions qui sont les restrictions à D des éléments de $H(\Omega)$ (resp. $V(\Omega)$) muni de la norme induite. Pour plus de simplicité nous faisons également l'hypothèse suivante :

$$(A3) \quad \text{La vitesse } c_{\infty}(z) = \left(\frac{\mu_{\infty}(z)}{\rho_{\infty}(z)} \right)^{1/2}, \quad 0 < z < L, \text{ est constante, notée } c_{\infty}.$$

On pose

$$u(r, z) = \begin{cases} u_1(r, z) & \text{pour } (r, z) \in \Omega_R, \\ u_2(r, z) & \text{pour } (r, z) \in \Omega'_R. \end{cases}$$

Si $u \in D(B)$ est solution de (P) , alors le couple (u_1, u_2) satisfait le problème de transmission

$$\begin{cases} B_0 u_1 = \omega^2 u_1 & \text{si } (r, z) \in \Omega_R \\ B_0 u_2 = \omega^2 u_2 & \text{si } (r, z) \in \Omega'_R \\ u_1(R, z) = u_2(R, z) & \text{pour } 0 < z < L \\ \mu t(u_1)(R, z) = \mu_{\infty} t(u_2)(R, z) & \text{pour } 0 < z < L \end{cases} \quad (1.18)$$

$$\text{où } t(u) = r \frac{\partial u}{\partial r} - u.$$

1.4.1 Problème extérieur

Nous avons la forme analytique de la solution dans le domaine extérieur Ω'_R . Si $u \in V(\Omega)$, alors la trace $u(R, z)$ appartient à l'espace

$$H_0^{\frac{1}{2}}(]0, L[) = \left\{ \varphi \in H^{\frac{1}{2}}(]0, L[), \frac{\varphi}{\sqrt{z}} \in L^2(]0, L[) \right\}. \quad (1.19)$$

Pour $\omega^2 \in \mathbb{R}^+$ et $\varphi(z) \in H_0^{\frac{1}{2}}(]0, L[)$ données, on considère le problème aux limites suivant

$$Q(\omega) \quad \begin{cases} B_0 u_2 = \omega^2 u_2 & \text{dans } \Omega'_R, \\ u_2(R, z) = \varphi(z) & \text{pour } z \in]0, L[. \end{cases}$$

Nous introduisons également le problème de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} \text{Trouver } g \in H^1(0, L), g \neq 0, \text{ et } \beta > 0 \text{ tels que :} \\ -\frac{d}{dz}(\mu_\infty(z) \frac{dg}{dz}) = \beta \mu_\infty(z) g, \quad \forall z \in]0, L[, \\ g(0) = (\mu_\infty \frac{dg}{dz})(L) = 0, \end{cases} \quad (1.20)$$

Puisque $\mu_\infty(z) \geq \mu_- > 0$, le problème (1.20) est régulier dans le sens où il admet une suite de valeurs propres ($\beta_n > 0, \beta_n \rightarrow +\infty$) et un système orthogonal de fonctions propres ($g_n(z)$) qui est complet dans $L^2(0, L)$.

Remarque 1.4.1. Nous remarquons que sous l'hypothèse (A3), la borne inférieure du spectre essentiel est $\gamma = \beta_1 c_\infty^2$. Par ailleurs, si $c_-^2 = \inf_\Omega(\frac{\mu}{\rho}) < c_\infty^2$ nous prouvons par le principe de Min-Max que le spectre discret n'est pas vide (voir [2]).

Proposition 1.4.1. Pour tout réel $\omega^2 \in [\beta_1 c_-^2, \beta_1 c_\infty^2[$,

1. $Q(\omega)$ a une unique solution $u_2(r, z) = R(\omega)\varphi(z)$, par ailleurs, l'opérateur $R(\omega)$ est linéaire et continu de $H_0^{\frac{1}{2}}(]0, L[)$ dans $V(\Omega'_R)$.
2. $u_2(r, z)$ a la représentation suivante pour $r > R$:

$$u_2(r, z) = \sum_{n \geq 1} c_n \frac{K_1(\lambda_n(\omega)r)}{K_1(\lambda_n(\omega)R)} g_n(z) \quad (1.21)$$

où $\lambda_n(\omega) = (\beta_n - \frac{\omega^2}{c_\infty^2})^{1/2}$, $c_n = \frac{1}{L} \int_0^L \mu_\infty(z) \varphi(z) g_n(z) dz$, et K_1 est la fonction de Bessel modifiée du premier ordre. La série converge dans $V(\Omega'_R)$.

Proof. La première partie résulte de la formulation variationnelle et de la coercivité de la forme bilinéaire associée au problème $Q(\omega)$. Plus précisément, il existe $v_\varphi \in V(\Omega'_R)$ telle que $v_\varphi|_{r=R} = \varphi$. On pose $\tilde{u} = u_2 - v_\varphi$, $f = (B_0 - \omega^2)v_\varphi$ et $X = \{v \in V(\Omega'_R), v(R, z) = 0\}$, alors $Q(\omega)$ est équivalent à

$$\begin{cases} \text{Trouver } \tilde{u} \in X, \text{ telle que :} \\ b_\infty(\omega, \tilde{u}, v) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in X, \end{cases} \quad (1.22)$$

où

$$b_\infty(\omega, \tilde{u}, v) = \iint_{\Omega'_R} \mu_\infty(r \nabla \tilde{u} \cdot \nabla v + \frac{\tilde{u}}{r} v) dr dz - \omega^2(\tilde{u}, v) \quad \text{et} \quad (\tilde{u}, v) = \iint_{\Omega'_R} \rho_\infty \tilde{u} v r dr dz.$$

Les crochets $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désignent la dualité entre X et X' .

Si $\omega^2 < \beta_1 c_\infty^2$, alors $b_\infty(\omega, \tilde{u}, v)$ est X -coercive et bornée et $L(v) = \langle f, v \rangle$ est linéaire continue. Par le théorème de Lax-Milgram, il existe une solution unique $\tilde{u}$ telle que :

$$\|\tilde{u}\|_X \leq C_1 \|f\|_{X'} \leq C_2 \|v_\varphi\|_X \leq C_3 \|\varphi\|_{H^{\frac{1}{2}}(0,L)},$$

ce qui signifie que

$$\|u_2\|_{V(\Omega'_R)} \leq \|\tilde{u}\|_X + \|v_\phi\|_{V(\Omega'_R)} \leq C \|\varphi\|_{H^{\frac{1}{2}}(0,L)}.$$

Pour la deuxième partie, nous utilisons la méthode de séparation des variables. À cette fin, nous introduisons l'espace suivant :

$$W_R = \{u \in L^2(R, +\infty), \sqrt{r}u \in H^1(R, +\infty)\}$$

équipé de la norme $\|u\|_{W_R} = \|\sqrt{r}u\|_{H^1(R, +\infty)}$.

La solution u_2 admet le développement de Fourier $u_2(r, z) = \sum_{n \geq 1} u_n(r) \cdot g_n(z)$ qui converge dans $V(\Omega'_R)$, avec les coefficients de Fourier $u_n \in W_R$ et avec $g_n(z)$ la suite des fonctions propres du problème de Sturm-Liouville (1.20) (Pour plus de détails, voir le lemme (3.5.1) dans l'annexe 2). Insérant cette forme dans l'équation de $Q(\omega)$ nous voyons que, pour tout $n \geq 1$, u_n est une solution de l'équation de Bessel modifiée

$$u_n''(r) + \frac{1}{r} u_n'(r) + \left(-\frac{1}{r^2} + \lambda_n^2(\omega)\right) u_n(r) = 0 \quad \text{pour } r > R \text{ avec } \lambda_n^2(\omega) = \beta_n - \frac{\omega^2}{c_\infty^2}.$$

Comme $u_n \in W_R$, nous avons $\sqrt{r}u_n \in L^2(R, +\infty)$ et $u_n(r) = d_n K_1(\lambda_n(\omega)r), \forall n \geq 1$ (d'après les formules asymptotiques de Bessel). La constante d_n est déterminée par la condition au limite. Enfin, nous obtenons :

$$u_2(r, z) = \sum_{n \geq 1} c_n \frac{K_1(\lambda_n(\omega)r)}{K_1(\lambda_n(\omega)R)} g_n(z), \quad r > R.$$

où c_n est le coefficient de Fourier de φ . La série précédente converge dans $V(\Omega_R)$ si la série numérique $\sum n^2 \|u_n\|_{W_R}^2$ converge. Nous pouvons voir que $\|u_n\|_{W_R}^2 = \lambda_n^2 \|\sqrt{r}u_n\|_{L^2(R,+\infty)}^2$ et $\lambda_n = O(n)$, où $\sum n^2 \|u_n\|_{W_R}^2 \leq C_1 \sum n c_n^2 \leq C_2 \|\varphi\|_{\frac{1}{2}}$.

Notons que l'hypothèse (A3) est essentielle pour la séparation des variables dans l'équation $B_0 u = \omega^2 u$ dans Ω'_R .

1.4.2 L'opérateur de Dirichlet-Neumann

Nous avons d'abord introduit quelques outils. Pour $s \in \mathbb{R}$, nous avons la (équivalente) définition

$$H_0^s([0, L]) = \left\{ v(z) = \sum_{p=1}^{+\infty} v_p g_p(z); \|v\|_s^2 = \sum_{p=1}^{+\infty} |v_p|^2 p^{2s} < +\infty \right\}.$$

Le produit de dualité entre H_0^s et $H_0^{-s} = (H_0^s)'$ est $\langle v, u \rangle_s = L \sum_{p=1}^{+\infty} v_p \bar{u}_p$.

Rappelons que $t(u) = r \frac{\partial u}{\partial r} - u$, pour $u \in D(B)$. L'opérateur de Dirichlet-Neumann est défini comme suit :

$$T_\omega : H_0^{\frac{1}{2}}([0, L]) \rightarrow H_0^{-\frac{1}{2}}([0, L]) \quad \text{telle que} \quad T_\omega(\varphi) = t(R(\omega)\varphi)|_{r=R}$$

où $R(\omega)\varphi$ est la solution du problème $Q(\omega)$ associée à la donnée $\varphi(z)$.

Proposition 1.4.2. *Nous avons :*

1. T_ω est linéaire continu et la forme bilinéaire $\langle -T_\omega(u_0), v_0 \rangle$ est symétrique positive.
2. T_ω admet l'expression

$$T_\omega(u_0)(z) = \sum_{n \geq 1} (u_0)_n \left(\frac{\lambda_n(\omega) R K_1'(\lambda_n(\omega) R)}{K_1(\lambda_n(\omega) R)} - 1 \right) g_n(z) \quad \text{pour } r > R, \quad (1.23)$$

où la série converge dans l'espace $H_0^{-\frac{1}{2}}(0, L)$.

Démonstration. La première partie découle de l'identité

$$\langle -T_\omega(u_0), v_0 \rangle = \iint_{\Omega'_R} \mu_\infty \nabla u \cdot \nabla v \, r dr dz - \omega^2(u, v) + \sum_{p \geq 1} (u_0)_p (v_0)_p$$

où u est la solution du problème $Q(\omega)$ associée à la donnée u_0 . La deuxième partie est un résultat de l'application de l'opérateur différentiel t à la série 1.21. $\square$

Remarque 1.4.2. Si le milieu est homogène, nous avons :

$$g_n(z) = \sin((n + 0.5)\frac{\pi z}{L}), \quad \lambda_n^2(\omega) = -\frac{\omega^2}{c_\infty^2} + (n + 0.5)^2(\frac{\pi}{L})^2, \quad n \geq 1. \quad (1.24)$$

1.4.3 Problème (P_R)

Les conditions de transmission (1.18) nous permettent de formuler le problème :

$$(P_R) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u_1 \in V(\Omega_R), \quad u_1 \neq 0, \text{ et } \omega^2 \in I = [\beta_1 c_-^2, \beta_1 c_\infty^2[\text{ telles que :} \\ B_0 u_1 = \omega^2 u_1 \text{ dans } \Omega_R, \\ \mu t(u_1)|_{r=R} = \mu_\infty T_\omega(u_1|_{r=R}). \end{cases}$$

Les problèmes (P_R) et (P) sont équivalents dans le sens suivant :

Proposition 1.4.3. Nous avons :

1. Si la paire (ω^2, u) est une solution du problème (P) alors $(\omega^2, u|_{\Omega_R})$ est une solution du problème (P_R) .
2. Inversement, si la paire (ω^2, u_1) est une solution du problème (P_R) alors u_1 peut être prolonger de manière unique à une solution (ω^2, u) du problème (P) .

Remarque 1.4.3. Le problème aux valeurs propres (P_R) n'est pas linéaire puisque ω est intervient dans l'expression de $T(\omega)$ de manière non-linéaire.

1.4.4 Etude de la non-linéarité

Pour $\alpha \in I = [\beta_1 c_-^2, \beta_1 c_\infty^2[$ fixé, nous considérons le problème linéaire :

$$(P_R(\alpha)) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u_1 \in V(\Omega_R), \quad u_1 \neq 0, \text{ et } \omega^2(\alpha) \in I \text{ telles que :} \\ B_0 u_1 = \omega^2(\alpha) u_1 \text{ dans } \Omega_R, \\ \mu t(u_1)|_{r=R} = \mu_\infty T_\alpha(u_1|_{r=R}). \end{cases}$$

Supposons que $\alpha \rightarrow \omega^2(\alpha)$ est une courbe ayant un point fixe $\alpha_0 \in I$ ($\omega^2(\alpha_0) = \alpha_0$), alors (u_1, α_0) est une solution du problème (P_R) . Nous allons examiner la question de l'existence de telle courbe. À cette fin, nous utilisons la forme variationnelle de $P_R(\alpha)$:

$$(\tilde{P}_R(\alpha)) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in V(\Omega_R), \quad u \neq 0, \text{ et } \omega^2 \in I \text{ telles que :} \\ C(\alpha, u, v) = A(u, v) + D(\alpha, u, v) = \omega^2(u, v)_{H(\Omega_R)}, \quad \forall v \in V(\Omega_R). \end{cases}$$

où

$$A(u, v) = \iint_{\Omega_R} \mu(r \nabla u \cdot \nabla v + \frac{u}{r} v - u \frac{\partial v}{\partial r} - v \frac{\partial u}{\partial r}) dr dz$$

et

$$D(\alpha, u, v) = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{\lambda_n(\alpha) R K_1'(\lambda_n(\alpha) R)}{K_1(\lambda_n(\alpha) R)} - 1 \right) (u_0)_n (v_0)_n.$$

Nous prouvons dans [28] que $C(\alpha, u, v)$ est coercitive et caractérise une famille d'opérateurs $C(\alpha)$.

Proposition 1.4.4. ([28]) $C(\alpha)$ est un opérateur auto-adjoint positif à résolvante compacte. Ces valeurs propres forment une suite croissante ayant les propriétés :

1. $\omega_m^2(\alpha) \leq \omega_{m+1}^2(\alpha)$, $\omega_1^2(\alpha) \geq c_-^2 \beta_1$,
2. $\omega_m^2(\alpha) = \min_{V_m \in F_m} \max_{u \in V_m} \frac{C(\alpha, u, u)}{\|u\|^2}$, où F_m désigne la famille de sous-espaces $V_m \subset V(\Omega_R)$ de dimension m .
3. Les fonctions $\alpha \rightarrow \omega_m^2(\alpha)$, $m \in \mathbb{N}^*$, Sont strictement décroissantes et Lipschitziennes continues sur l'intervalle I .

Démonstration. Ces propriétés sont des conséquences des résultats de coercivité suivante :

1. $C(\alpha, u, u) \geq c_-^2 \beta_1 (u, u)_{H(\Omega_R)}$,
2. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe deux constantes positives $C_1(\epsilon)$ et $C_2(\epsilon)$ telles que :

$$C(\alpha, u, u) + C_1(\epsilon) (u, u)_{H(\Omega_R)} \geq C_2(\epsilon) \|u\|_{V(\Omega_R)}^2.$$

Ensuite, nous utilisons le principe de *Min-Max* [56]. □

En conséquence de la proposition précédente Nous avons

Corollaire 1.4.5. Pour $\alpha \in I$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\alpha = \omega^2$ est une valeur propre de B .
2. $\exists m \in \mathbb{N}$ tel que $\omega_m^2(\alpha) = \alpha$.

Nous concluons avec le résultat de régularité suivant.

THÉORÈME 1.4.6 (Régularité). Supposons que $\mu \in C^{0,1}(\Omega_R)$. Soit $u \in V(\Omega_R)$ une fonction propre de $P_R(\alpha)$, alors

1. $\sqrt{r} u \in H^2(\Omega_R)$, et $\|\sqrt{r} u\|_2 \leq C \|u\|_{H(\Omega_R)}$,
2. $\forall r \in \left] 0, \frac{R}{2} \right[$, $|u(r)| \leq C r \|u\|_{H(\Omega_R)}$.

Démonstration. La preuve est assez technique, Nous reproduisons ici les principales étapes de ([28]).

1) Soit $u \in V(\Omega_R)$ une solution de $P_R(\alpha)$, alors $v = \sqrt{r}u \in H^1(\Omega_R)$ satisfait le problème

$$\begin{cases} -\Delta v + \frac{3}{4} \frac{v}{r^2} = f(v) & \text{dans } \Omega_R, \\ v(r, 0) = \frac{\partial v}{\partial z}(r, L) = 0, & 0 \leq r \leq R, \\ v(0, z) = 0, \quad R \frac{\partial v}{\partial r}(R, z) = \frac{3v(R, z)}{2R} + T_\alpha(v|_{r=R}), & 0 \leq z \leq L. \end{cases} \quad (1.25)$$

où $f(v) = [\rho\omega^2 + \frac{\partial\mu}{\partial r}(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{3v}{2r}) + \frac{\partial\mu}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial r}]\mu^{-1}$. Nous pouvons voir que $f(v) \in L^2(\Omega_R)$ et $\|f(v)\|_0 \leq C\|u\|_{V(\Omega_R)}$.

2) On peut décomposer $v = v_1 + v_2$ telle que la paire (v_1, v_2) résout les systèmes

$$\begin{cases} -\Delta v_1 + \frac{3}{4} \frac{v_1}{r^2} = f(v) & \text{dans } \Omega_R, \\ v_1(r, 0) = \frac{\partial v_1}{\partial z}(r, L) = 0, & 0 \leq r \leq R, \\ v_1(0, z) = \frac{\partial v_1}{\partial r}(R, z) = 0, & 0 \leq z \leq L. \end{cases} \quad (1.26)$$

$$\begin{cases} -\Delta v_2 + \frac{3}{4} \frac{v_2}{r^2} = 0 & \text{dans } \Omega_R, \\ v_2(r, 0) = \frac{\partial v_2}{\partial z}(r, L) = 0, & 0 \leq r \leq R, \\ v_2(0, z) = 0, \quad R \frac{\partial v_2}{\partial r}(R, z) = \frac{3v(R, z)}{2R} + T_\alpha(v|_{r=R}), & 0 \leq z \leq L. \end{cases} \quad (T) \quad (1.27)$$

3) En utilisant la méthode de séparation des variables nous pouvons exprimer v_1 et $f(r, z) = f(v(r, z))$ comme des séries

$$v_1(r, z) = \sum_{n \geq 0} v_{1n} \sin(\sqrt{\beta_n} z), \quad f(r, z) = \sum_{n \geq 0} f_n(r) \sin(\sqrt{\beta_n} z) \quad (\beta_n = (2n+1)^2 \frac{\pi^2}{4L^2}),$$

où v_{1n} est la solution du problème aux limites *BVP*

$$\begin{cases} -v_{1n}'' + (\beta_n + \frac{3}{4r^2})v_{1n} = f_n(r), & r \in]0, R[, \\ v_{1n}(0) = v_{1n}'(R) = 0. \end{cases} \quad (1.28)$$

La solution de (1.28) est donnée par

$$v_{1n}(r) = \int_0^R G(r, r') f_n(r') dr'$$

où $G(r, r')$ est la fonction de Green de (1.28) ce qui implique les fonctions de Bessel modifiées $I_1(\sqrt{\beta_n}r)$ et $K_1(\sqrt{\beta_n}r)$. En utilisant les formules asymptotiques, nous pouvons prouver les inégalités

$$|v_{1n}(r)| \leq Cr \|f_n\|_{L^2(0,R)} \quad \text{et} \quad \|v_{1n}\|_{H^2(0,R)} \leq C \|f_n\|_{L^2(0,R)},$$

et en conséquence nous obtenons

$$|v_1(r)| \leq Cr \|f\|_{L^2(\Omega_R)} \quad \text{et} \quad \|v_1\|_{H^2(\Omega_R)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega_R)}.$$

4) De la même manière, on obtient l'expression

$$v_2(r, z) = \sqrt{\frac{r}{R}} \sum_{n \geq 0} \psi_{2n} \frac{I_1(\sqrt{\beta_n}r)}{I_1(\sqrt{\beta_n}R)} \sin(\sqrt{\beta_n}z)$$

avec $\psi_{jn} = (\psi_j, \sin(\sqrt{\beta_n}z))_{L^2(0,L)}$ et $\psi_j(z) = v_j(R, z)$, pour $j = 1, 2$. En utilisant la condition au limite (T) qui relie v_1 à v_2 , nous établissons que $\psi_2 \in H^{3/2}$ et $\|\psi_2\|_{3/2} \leq C \|\psi_1\|_{3/2}$. Puis, par un calcul direct nous prouvons que $\Delta v_2 \in L^2$ et $\|\Delta v_2\|_0 \leq C \|\psi_2\|_{3/2}$. Enfin, une étude asymptotique, quand $r \rightarrow 0$, montre que $|u_2(r)| \leq Cr \|\psi_2\|_{3/2}$.

Qui conclut la preuve. $\square$

1.5 Discrétisation

1.5.1 Le problème Semi-discrétisé

Pour l'approximation numérique du problème $P_R(\alpha)$, nous avons d'abord tronquer la série (1.23) dans l'expression de T_α . Cela nous amène à définir le problème *semi-discrétisé* suivant :

$$P_R^N(\alpha) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V(\Omega_R), \quad u \neq 0, \text{ et } \omega^2 \in I \text{ telles que :} \\ C^N(\alpha, u, v) = A(u, v) + D^N(\alpha, u, v) = \omega^2(u, v)_{H(\Omega_R)}, \quad \forall v \in V(\Omega_R), \end{array} \right.$$

où

$$D^N(\alpha, u, v) = \sum_{n=1}^{n=N} \left(\frac{\lambda_n(\alpha) R K_1'(\lambda_n(\alpha) R)}{K_1(\lambda_n(\alpha) R)} - 1 \right) (u_0)_n (v_0)_n. \quad (1.29)$$

Ce problème possède une suite de valeurs propres $(\mu_m^N(\alpha) = \omega_m^N(\alpha)^2)$, $m = 1, 2, \dots$, et des fonctions propres $(u_m^N(\alpha))$ ayant toutes les propriétés du problème exact. Par ailleurs, la suite $\mu_m^N(\alpha)$ converge vers $\omega_m(\alpha)^2$ quand $N \rightarrow +\infty$. Plus précisément, nous avons le résultat

suivant :

THÉORÈME 1.5.1. ([28]) Supposons que $\mu \in C^{0,1}(\Omega_R)$ et $(u_m(\alpha), \omega_m^2(\alpha))$ est une solution du problème $P_R(\alpha)$, alors, nous avons :

$$0 \leq \omega_m^2(\alpha) - \omega_m^N(\alpha)^2 \leq \frac{C}{N^2}, \quad (1.30)$$

et

$$\|u_m^N(\alpha) - u_m(\alpha)\|_{V(\Omega_R)} \leq \frac{C}{N^2}. \quad (1.31)$$

Démonstration. La preuve est similaire à celle de [13, 14]. $\square$

1.5.2 Discrétisation par éléments finis

Le but ici est d'approcher la solution du problème $P_R^N(\alpha)$ par la méthode des éléments finis. Pour cela, nous considérons un sous-espace $V_h \subset V(\Omega_R)$ de dimension finie $M = M(h)$, où h est un paramètre de discrétisation et nous considérons le problème discrétisé suivant :

$$P_R^{N,h}(\alpha) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V_h, u \neq 0, \text{ et } \omega^2 \in I \text{ telles que :} \\ C^N(\alpha, u, v_h) = \omega^2(u, v_h)_{H(\Omega_R)}, \quad \forall v_h \in V_h. \end{array} \right.$$

Nous noterons par $(\mu_{m,h}^N, u_{m,h}^N)$, $m = 1, \dots, M$ les éléments propres de $P_R^{N,h}(\alpha)$.

Dans la pratique, nous définissons V_h comme suit : Soit h un nombre réel positif destiné à tendre vers 0, on lui associe une *triangulation* $\mathcal{T}_h = \{K_i\}_{i=1}^M$ de sommets $\{a_i\}_{i=1}^M$, vérifiant les conditions suivantes :

- 1) les éléments de $\mathcal{T}_h$ sont des triangle de diamètre égal à h ,
- 2) la réunion des triangle de $\mathcal{T}_h$ forme un polygone $\Omega_{Rh} \subset \Omega_R$ dont la frontière contient les cotés horizontaux de Ω_R et la partie Γ_0 de l'axe de symétrie située entre ces deux cotés,
- 3) les sommets frontières de Ω_{Rh} sont situés sur la frontière $\Gamma_0 \cup \Gamma_R$ de Ω_R , où $\Gamma_0 = \{(0, z), 0 < z < L\}$ et $\Gamma_1 = \{(r, 0), 0 < r < R\}$.

Ensuite, nous définissons les espaces

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \{\varphi \in C^0(\overline{\Omega_R}), \varphi \equiv 0, \text{ sur } \Gamma_0 \cup \Gamma_1\} \text{ et} \\ V_h &= \{\varphi \in \mathcal{M} \cap V(\Omega_R), \varphi|_{K_i} \in P_1(K_i) \text{ pour } 1 \leq i \leq M\}. \end{aligned}$$

L'espace V_h est un espace d'éléments finis de degré 1, sa dimension est égale au nombre $\mathcal{N}(h)$ de sommets de $\mathcal{T}_h$ qui ne sont pas situés sur la frontière $\Gamma_{0h} \cup \Gamma_{1h}$.

Nous introduisons l'opérateur d'interpolation :

$$\Pi_h : \mathcal{M} \longrightarrow V_h, \text{ tel que } (\Pi_h \varphi)(a_i) = \varphi(a_i).$$

Comme dans la théorie classique ([55, 19]), nous pouvons montrer la propriété d'interpolation suivante : pour $u \in V(\Omega_R)$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{v_h \in V_h(\Omega_R)} \|u - v_h\|_{V(\Omega_R)} = 0. \quad (1.32)$$

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert régulier de $\mathbb{R}_+^2 = \{(r, z); \ r > 0\}$. Pour $l \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, nous rappelons les espaces de Sobolev à poids suivants :

$$W_\alpha^{l,2}(\mathcal{O}) = \{u \in D'(\mathcal{O}) : r^\alpha D^\beta u \in L^2(\mathcal{O}) \text{ pour } 0 \leq |\beta| \leq l\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{l,\alpha} = \left(\sum_{|\beta| \leq l} \|r^\alpha D^\beta u\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

et

$$X_\alpha^{l,2}(\mathcal{O}) = \{u \in D'(\mathcal{O}) : r^{\alpha-l+|\beta|} D^\beta u \in L^2(\mathcal{O}) \text{ pour } 0 \leq |\beta| \leq l\}$$

équipée de la norme naturelle

$$\|u\|_{l,\alpha} = \left(\sum_{|\beta| \leq l} \|r^{\alpha-l+|\beta|} D^\beta u\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ces espaces sont étudiés dans ([42]).

Nous rappelons maintenant un résultat d'interpolation utile.

THÉORÈME 1.5.2. ([42]) *Si la triangulation T_h est régulière, alors il existe une constante $C > 0$ telle que, pour chaque $u \in W_{1/2}^{2,2}(\Omega_R) \cap X_{1/2}^{1,2}(\Omega_R)$, Nous avons*

$$\|u - \Pi_h u\|_{1,\frac{1}{2}} \leq Ch \|u\|_{2,\frac{1}{2}} \quad (1.33)$$

et tel que pour tout $u \in W_{1/2}^{2,2}(\Omega_R) \cap X_{1/2}^{1,2}(\Omega_R)$, de plus Nous avons

$$\left\| r^{-\frac{1}{2}}(u - \Pi_h u) \right\|_0 \leq Ch \|u\|_{2,\frac{1}{2}}. \quad (1.34)$$

THÉORÈME 1.5.3. *Supposons que $\mu \in C^{0,1}(\Omega_R)$ et la triangulation est régulière. Supposons*

que u est une solution de $P_R^N(\alpha)$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|u - \Pi_h u\|_{V(\Omega_R)} \leq C \|u\|_{1, \Omega_R}. \quad (1.35)$$

Proof. Comme μ est lisse, il résulte du théorème 1.4.6 et l'inégalité de Hardy que $u \in W_{\frac{1}{2}}^{2,2}(\Omega_R) \cap X_{\frac{1}{2}}^{1,2}(\Omega_R)$. Pour conclure on utilise le théorème 1.5.2 en observant les plongements (inclusions) suivants :

$$W_{\frac{1}{2}}^{2,2}(\Omega_R) \cap X_{\frac{1}{2}}^{1,2}(\Omega_R) \subset X_{1/2}^{2,2}(\Omega_R) \subset H^1(\Omega_R), \quad (1.36)$$

qui sont continues ; par ailleurs, la norme de $\|u\|_{V(\Omega_R)}$ est équivalente à $(\|u\|_{1, \frac{1}{2}}^2 + \|r^{-1/2}u\|_0^2)^{1/2}$.

Nous introduisons la projection $\tilde{\Pi}_h$ définie par l'équation variationnelle :

$$C^N(\alpha, \tilde{\Pi}_h u - u, u_h) + \beta_0(\tilde{\Pi}_h u - u, u_h)_{H(\Omega_R)} = 0, \forall u_h \in V_h(\Omega_R). \quad (1.37)$$

La coercivité conduit au résultat d'interpolation suivant.

THÉORÈME 1.5.4. *Supposons que $\mu \in C^{0,1}(\Omega_R)$ et soit u une fonction propre de $P_R^N(\alpha)$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\|u - \tilde{\Pi}_h u\|_{V(\Omega_R)} \leq Ch \|u\|_{1, \Omega_R}. \quad (1.38)$$

THÉORÈME 1.5.5. *[Convergence] Nous avons*

$$\lim_{h \rightarrow 0} |\mu_m^N(\alpha) - \mu_{m,h}^N(\alpha)| = 0, \quad (1.39)$$

par ailleurs, si la valeur propre $\mu_m^N(\alpha)$ est simple, alors :

$$0 \leq \mu_m^N(\alpha) - \mu_{m,h}^N(\alpha) \leq Ch^2 \text{ et } \|u_m^N(\alpha) - u_{m,h}^N(\alpha)\|_V \leq Ch. \quad (1.40)$$

Le théorème précédent est analogue au théorème 6.5.1 dans [55].

THÉORÈME 1.5.6 (Erreur Globale). *Supposons que $\mu \in C^{0,1}(\Omega_R)$. Pour chaque solution $(\mu_m(\alpha), u_m(\alpha))$ du problème $P_R(\alpha)$ nous avons, pour tout $\alpha \in I$:*

1. $0 \leq \mu_m(\alpha) - \mu_{m,h}^N(\alpha) \leq C(h^2 + \frac{1}{N^2})$,
2. $\|u_m(\alpha) - u_{m,h}^N(\alpha)\|_{V(\Omega_R)} \leq C(h + \frac{1}{N^2})$.

Démonstration. Est une conséquence directe des théorèmes (1.5.5) et (1.5.1). $\square$

Chapitre 2

Tests et Résultats Numériques

2.1 La mise en oeuvre de la méthode

Le but de ce chapitre consiste à approcher numériquement les pulsations et les modes propres de l'opérateur $C^N(\alpha)$. Pour cela, nous allons construire un sous-espace des éléments finis $V_h \subset V(\Omega_R)$ de dimension finie $M = M_z \times M_r$, où M_r et $M_z \in \mathbb{N}^*$ sont les nombres des points de discrétisation de Ω_R suivant l'axe (oz) et (or) respectivement. Soit $h_1 = \frac{R}{M_r}$ et $h_2 = \frac{L}{M_z}$ deux paramètres destinés à tendre vers 0. On cherche la solution du problème $P_R^{N,h}(\alpha)$ sous la forme $u_h(\alpha) = \sum_j Y_j \varphi_j$, où $\{\varphi_j\}$ est la base de V_h , ce qui conduit au système linéaire algébrique suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } Y \in \mathbb{R}^M, Y \neq 0, \text{ et } \lambda \in I \text{ tels que :} \\ (A + D^N(\alpha))Y = \lambda BY, \end{cases} \quad (2.1)$$

avec les matrices $A = (a_{ij})$, $D^N(\alpha) = (d_{ij}(\alpha))$ et $B = (b_{ij})$ sont telles que

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= A(\varphi_i, \varphi_j) = \iint_{K_{i,j}} \mu(r \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j + \frac{\varphi_i \varphi_j}{r} - \varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial r} - \varphi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial r}) dr dz, \\ d_{i,j}(\alpha) &= D^N(\alpha, \varphi_i, \varphi_j) = \sum_{n=1}^{n=N} \left(\frac{\lambda_n(\alpha) R K_1'(\lambda_n(\alpha) R)}{K_1(\lambda_n(\alpha) R)} - 1 \right) (\varphi_{i0})_n (\varphi_{j0})_n, \\ b_{i,j} &= \iint_{K_{i,j}} r \rho \varphi_i \varphi_j dr dz, \\ K_{i,j} &= \text{supp}(\varphi_i) \cap \text{supp}(\varphi_j). \end{aligned}$$

$(\varphi_{i0})_n$ sont les coefficients de Fourier d'ordre n de $\varphi_{i0}(z) = \varphi_i(z, R)$ associés au système $\{g_n(z)\}$ (fonctions propres de (1.20)) donnés par :

$$(\varphi_{i0})_n = \frac{2}{L} \int_0^L \mu_\infty(z) \varphi_i(z, R) g_n(z) dz.$$

Les éléments des matrices de rigidité $A = (a_{ij})$ et $D^N(\alpha) = (d_{ij}(\alpha))$ et de masse $B = (b_{ij})$ sont calculés dans l'annexe (A1), les matrices A et B sont tridiagonales par bloc, les éléments $d_{ij}(\alpha)$ de $D(\alpha)$ sont nuls sauf ceux qui sont situés à la fin des diagonales des blocs.

Remarque 2.1.1. Si $(\mu(z), \rho(z))$ ne sont pas constants nous approximations $g_n(z)$ en discrétisant le problème de Sturm-Liouville (1.20) par la méthode des éléments finis dans l'intervalle $]0, L[$.

Pour chaque α^2 dans $[c_-^2 \beta_1, c_\infty^2 \beta_1[$, Nous résolvons le problème aux valeurs propres gé-

néralisé (2.1). Pour cela, on utilise la factorisation de Cholesky $B = LL^T$ et le changement de coordonnées $Z = L^T Y$ qui transforme le système en

$$(L^T)^{-1}(A + D^N(\alpha))L^{-1}Z = \lambda Z . \quad (2.2)$$

Ce dernier système a une suite de valeurs propres $\lambda_m^N(\alpha)$, $1 \leq m \leq M$. Pour m fixé, on pose $g(\alpha) = \lambda_m^N(\alpha)$. La fonction g est décroissante (voir la Proposition 1.4.4), donc, g possède un point fixe si et seulement si

$$g(c_-^2 \beta_1) < c_\infty^2 \beta_1. \quad (2.3)$$

Si l'inégalité (2.3) est satisfaite, nous rapprochons ce point par la méthode de la sécante qui consiste à les itérations :

$$\alpha_0 = c_-^2 \beta_1, \quad \alpha_{s+1} = \frac{c_\infty^2 \beta_1 g(\alpha_s) - \alpha_s g(c_\infty^2 \beta_1)}{g(\alpha_s) + c_\infty^2 \beta_1 - g(c_\infty^2 \beta_1) - \alpha_s} \quad \text{pour } s = 0, 1, \dots$$

Nous nous arrêtons le processus lorsque $|\alpha_{s+1} - \alpha_s| < \epsilon$, ϵ étant la précision souhaitée. Nous répétons le processus pour tout entier m pour lequel l'inégalité (2.3) est vérifiée.

Dans ce qui suit, nous présentons les résultats obtenus à partir de la simulation numérique effectuée sur des milieux stratifiés de profils particuliers. Nous avons mené les calculs pour les modèles suivants :

1. Profil constant par morceaux,
2. Profil en forme linéaire.

2.2 Validation de la méthode

Afin de valider le schéma des éléments finis proposé, on considère un modèle simple (profil constant par morceaux) pour lequel le problème des modes de torsion (P_0^t) admet une solution analytique. Pour cela, on considère un milieu homogène stratifié. Autrement dit, un milieu où les coefficients de Lamé μ et ρ sont constants par morceaux :

$$(\mu, \rho)(r, z) = \begin{cases} (\mu_1, \rho_1) & \text{si } (r, z) \in \Omega_R \\ (\mu_2, \rho_2) & \text{si } (r, z) \in \Omega'_R \end{cases} \quad \text{avec } c_1^2 = \frac{\mu_1}{\rho_1} < c_2^2 = \frac{\mu_2}{\rho_2},$$

où le domaine $\Omega_R =]0, R[\times]0, L[$. Dans ce cas, il existe une hiérarchie des modes propres, en effet, par la méthode de séparation des variables, on cherche $u(r, z)$ sous la forme :

$$u(r, z) = \sum_{i=1}^{i=N} u_i(r, z) = u_p(r, z) = u(r)g_p(z)$$

où $g_p(z) = \sin(\lambda_p z)$, $\lambda_p = \frac{(2p+1)}{2}\pi$.

Posons

$$u(r) = \begin{cases} u_1(r) & \text{si } r \in]0, R[, \\ u_2(r) & \text{si } r \in]R, +\infty[. \end{cases}$$

Le problème (P_0^t) avec $\omega^2 \in I_P = [c_1^2\lambda_p^2, c_2^2\lambda_p^2[$ est équivalent au problème de transmission suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} r^2 \frac{d^2 u_1}{dr^2} + r \frac{du_1}{dr} + (\alpha_p^2 r^2 - 1)u_1 = \omega^2 u_1 & \text{si } r \in]0, R[, \\ r^2 \frac{d^2 u_2}{dr^2} + r \frac{du_2}{dr} + (\beta_p^2 r^2 - 1)u_2 = \omega^2 u_2 & \text{si } r \in]R, +\infty[, \\ u_1(R) = u_2(R), \\ \mu_1 \left(\frac{du_1}{dr}(R) + u_1(R) \right) = \mu_2 \left(\frac{du_2}{dr}(R) + u_2(R) \right) \end{array} \right.$$

où

$$\alpha_p^2 = \frac{\omega^2}{c_1^2} - \lambda_p^2 \text{ et } \beta_p^2 = \lambda_p^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2}.$$

La solution générale du système précédent s'écrit sous la forme suivante :

$$u(r) = \begin{cases} A \frac{J_1(\alpha_p r)}{J_1(\alpha_p R)} & \text{si } r < R \\ B \frac{K_1(\beta_p r)}{K_1(\beta_p R)} & \text{si } r > R \end{cases} \quad (2.4)$$

où $\{J_\nu(z), K_\nu(z)\}$ sont des fonctions de *Bessel* et *Bessel modifiées* d'ordre ν .

Le vecteur $u(r)$ vérifie le problème (P_0^t) si et seulement si ω est la racine de l'équation caractéristique suivante :

$$G_p(\omega) = \alpha_p R \frac{J_0(\alpha_p R)}{J_1(\alpha_p R)} + \frac{\mu_2}{\mu_1} \beta_p R \frac{K_0(\beta_p R)}{K_1(\beta_p R)} + 2\left(\frac{\mu_2}{\mu_1} - 1\right) = 0.$$

L'équation $G_p(\omega) = 0$ admet au moins p racines positives dans l'intervalle I_p .

Remarque 2.2.1. *L'étude spectrale de l'opérateur du test est bien détaillée dans l'annexe A2.*

2.2.1 Profil constant par morceaux

On va présenter deux expériences numériques simples pour deux domaines Ω_R différents, nous allons calculer numériquement les premières fréquences et nous les comparées avec celles exactes. Pour ce profil, les constantes élastiques prennent les valeurs suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1(r, z) = 1.0E \ 3 \text{ kg/m}^3 \\ \mu_1(r, z) = 0.5E11 \text{ N/m}^3 \\ c_-^2 = \frac{\mu_1}{\rho_1} \end{array} \right. \quad \text{dans } \Omega_R =]0, R[\times]0, L[,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_2(z) = 1.0E \ 3 \text{ kg/m}^3 \\ \mu_2(z) = 1.0E11 \text{ N/m}^3 \\ c_\infty^2 = \frac{\mu_2}{\rho_2} \end{array} \right. \quad \text{dans } \Omega'_R =]R, +\infty[\times]0, L[.$$

On fait la discrétisation du domaine $\Omega_R = [0, R] \times [0, L]$, l'épaisseur de la couche est fixé $L = 1$, pour le pas de discrétisation h_2 (resp. h_1), tel que $h_2 = \frac{L}{M_z}$ (resp. $h_1 = \frac{R}{M_R}$), les calculs sont effectués pour $h_1 = \frac{1}{50}$ et $h_2 = \frac{1}{50}$.

Dans ce cas nous allons tester la méthode pour les trois premières valeurs propres (v.p.) et leurs fonctions propres (f.p.) associées. La première (v.p) exacte du problème modèle $P_R^{N,h}(\alpha)$ (voir (2.1)) est obtenue en résolvant l'équation caractéristique $G_1(\alpha) = 0$ (voir la figure (2.1)). La racine de cette dernière équation est $\omega_{1,ex} = 40877.764$. En substituant $\omega_{1,ex}$ dans la formule (2.4), on obtient l'expression analytique de la fonction propre exacte associée soit $u_{1,ex}$ (voir la figure (2.9)).

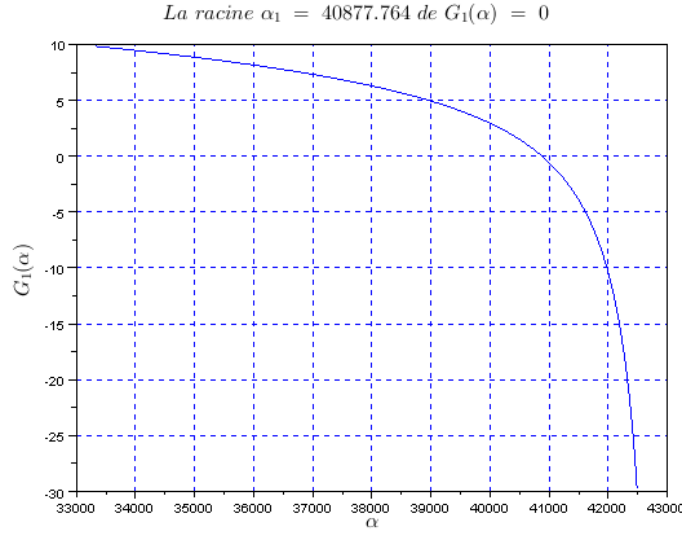


Fig. 2.1 – La fonction caractéristique $G_1(\alpha)$ associée au premier mode propre

Le problème semi-discrétisé approché est donc résolu dans le domaine $\Omega_{R,h}$, (h étant le pas de discrétisation), en suivant les étapes de l'algorithme indiqué précédemment.

Premier exemple

Le domaine $\Omega_R = [0, 1] \times [0, 1]$

1^{ère} étape : L'existence des solutions du problème approché :

D'après (2.3) les valeurs propres à chercher sont celles qui sont situées dans l'intervalle $I_1 = [a = \lambda_1 C_- , b = \lambda_1 c_\infty[$ avec $\lambda_1 = \frac{3\pi}{2h}$. L'hypothèse (2.3) est une condition nécessaire d'existence des valeurs propres pour le problème posé. Pratiquement, on résout le problème matriciel (2.1) pour $\alpha = \lambda_1 c_\infty$, les valeurs propres obtenues sont notées par $gb_i(\alpha)$. D'après le corollaire (1.4.5) le nombre des valeurs propres $N(\alpha)$ du problème est égal au nombre des $gb_i(\alpha)$ situées dans I_1 , c'est à dire $Card(N(\alpha)) = Card(\{i \text{ tel que : } gb_i(\alpha) \in I_1\})$.

En pratique, on constate qu'il existe un entier ($i = 3$) tel que $gb_i(\alpha) \in I_1, \forall \alpha \in I_1$.

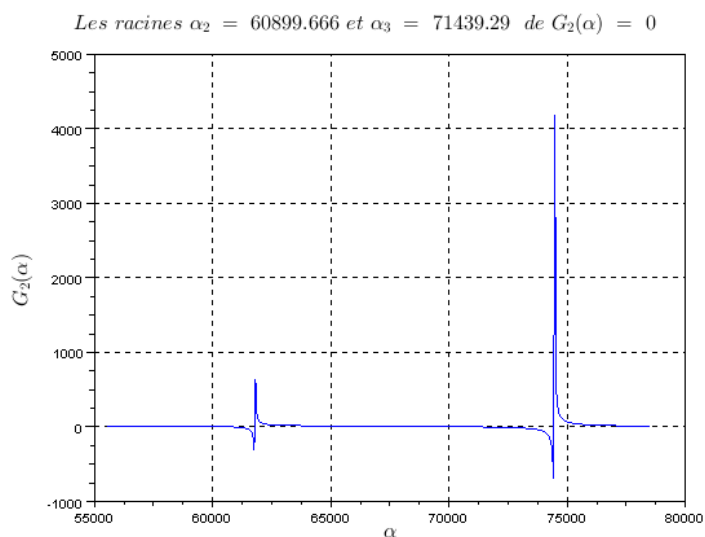


Fig. 2.2 – La fonction caractéristique $G_2(\alpha)$ associée aux deuxième et troisième modes

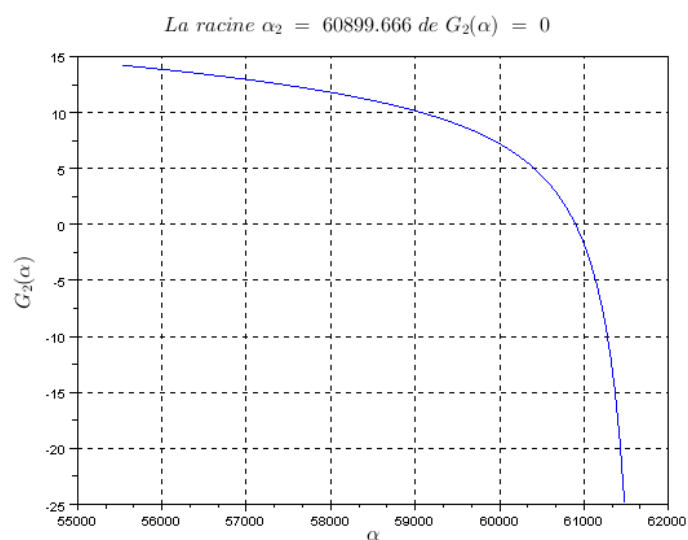
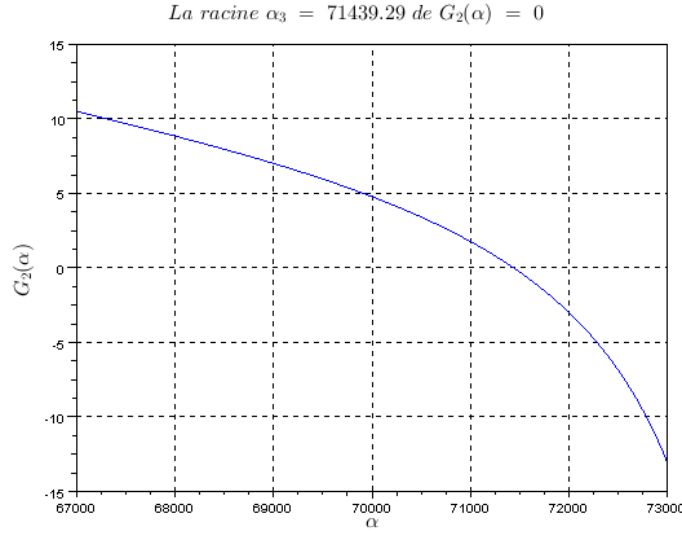


Fig. 2.3 – La fonction caractéristique $G_2^{(2)}(\alpha)$ associée au deuxième mode propre

Fig. 2.4 – La fonction caractéristique $G_2^{(3)}(\alpha)$ associée au troisième mode propreTABLE 2.1 – La variation de la première fonction de dispersion $\alpha_i \rightarrow \omega_1(\alpha_i)$.

α_i	33550.	34895.	36240.	37585.	38930.	40275.	41620.	42965.	44310.	45655.	47000
$\omega_{1,h}(\alpha_i)$	41541.	41471.	41387.	41285.	41156.	40990.	40766.	40442.	39922.	38901.	38002.

2^{ième} étape : Détermination des courbes numériques de dispersion : Pour cela, on construit une suite $\{\alpha_k\}_k$ dans l'intervalle I_1 et on résout une suite des problèmes spectraux matriciels $\{P(\alpha_k)\}_k$ (2.1). On aura donc une suite des valeurs propres notée $\{\omega_i(\alpha_k)\}_k$, les courbes numériques correspondantes sont $\{\omega_{i,h}(\alpha_k)\}_k$, $i \in N(\alpha)$. Ces courbes vérifient les hypothèses du théorème du point fixe.

Le tableau suivant (2.1) illustre les résultats obtenus.

La figure 2.5 montre que la $\alpha_k \rightarrow \omega_{3,h}(\alpha_k)$ est décroissante et vérifie $\omega_{3,h}(I_1) \subset I_1$.

3^{ième} étape : On détermine le point fixe de chaque courbe de dispersion et on le note par $\omega_{i,h}$, ce dernier point est une valeur propre approchée de la valeur propre exacte ω_i du problème posé.

Le point fixe de l'équation de dispersion $\omega_{3,h}(\alpha_k)$ noté aussi $\omega_{1,h} = 40887.764$ est une approximation de la valeur propre exacte $\omega_1 = 40877.764$ avec une erreur relative donnée par $err_{rel.} = 0.0002633$.

Le tableau (2.4) illustre l'erreur de convergence de $\omega_{1,h}$ vers ω_1 en fonction du pas de discrétisation h . De plus, la figure (2.8) montre que la convergence du schéma est d'ordre

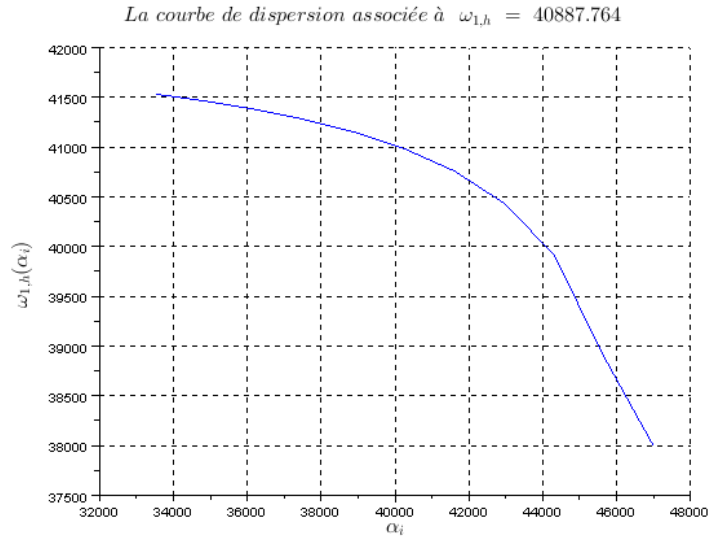


Fig. 2.5 – La première courbe numérique de dispersion $\alpha \rightarrow \omega_{1,h}(\alpha)$.

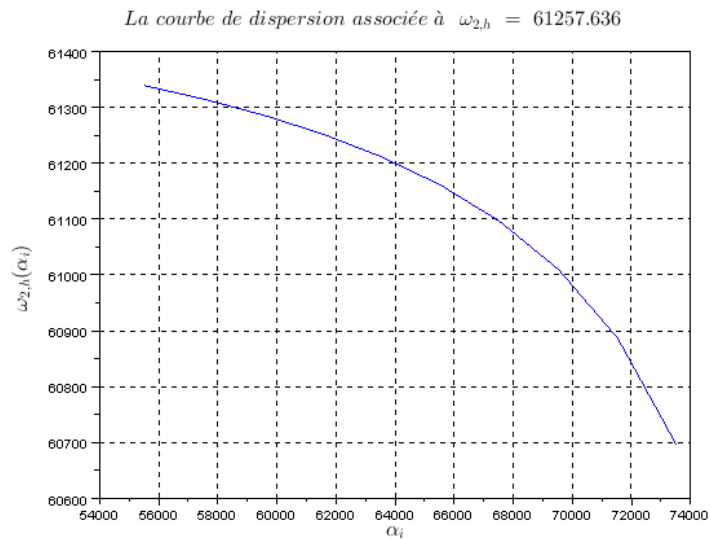


Fig. 2.6 – La deuxième courbe numérique de dispersion $\alpha \rightarrow \omega_{2,h}(\alpha)$.

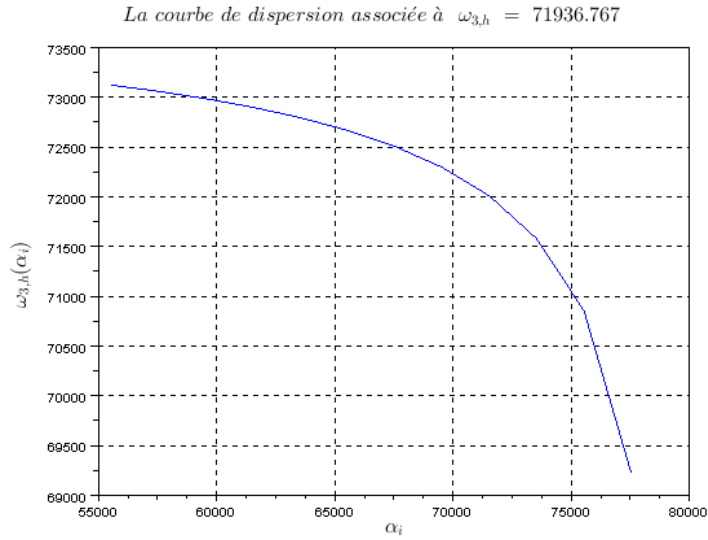


Fig. 2.7 – La troisième courbe numérique de dispersion $\alpha \rightarrow \omega_{3,h}(\alpha)$.

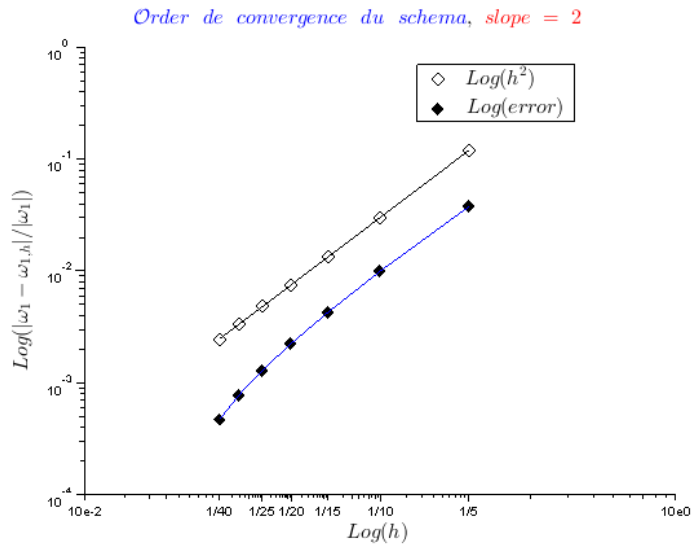


Fig. 2.8 – L'ordre de convergence du schéma pour le premier mode propre associé à $\omega_{1,h}$.

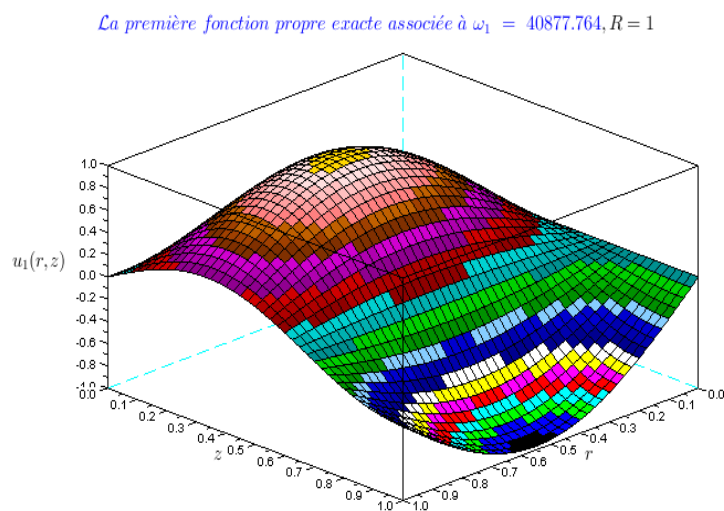


Fig. 2.9 – Le premier mode propre exact associé à ω_1

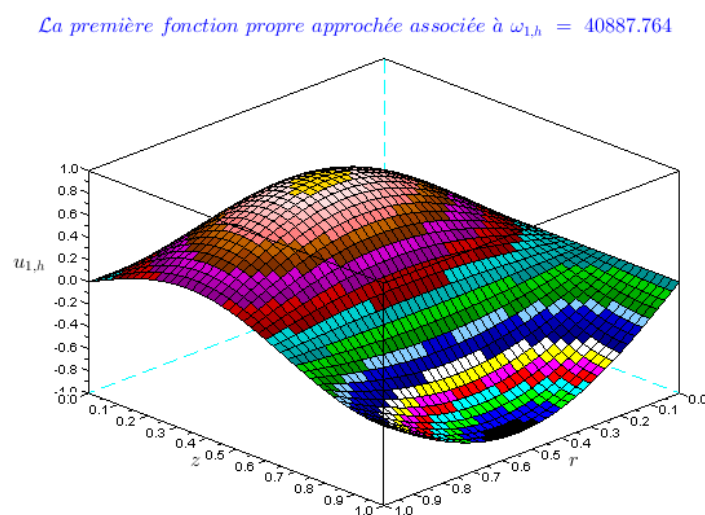


Fig. 2.10 – Le premier mode propre approché associé à la valeur propre approchée $\omega_{1,h} = 40887.764$, maillage $40 \cdot 40$.

TABLE 2.2 – Convergence de la méthode pour les premières valeurs propres.

p	1	2	3
ω	40877	60899 71439	81840 90600 102303
ω_h	40916	60794 71992	81865 89956 100915
$\frac{ \omega - \omega_h }{\omega}$	0.0010	0.0017 0.0077	0.0003 0.0071 0.0135

TABLE 2.3 – La variation des fonctions de dispersion $\alpha_i \mapsto \omega_j(\alpha_i)$ ($j = 2, 3$).

α_i	55536.	57536.	59536.	61536.	63536.	65536.	67536.	69536.	71536.	73536.	75536.
$\omega_{2,h}(\alpha_i)$	61376.	61352.	61323.	61289.	61248.	61197.	61132.	61045.	60922.	60729.	60665.
$\omega_{3,h}(\alpha_i)$	73194.	73131.	73057.	72970.	72865.	72736.	72575.	72364.	72074.	71643.	70916.

deux (2) pour cette valeur propre.

4^{ème} étape : Pour chaque $\omega_{i,h}$, on calcule la fonction propre associée $u_{i,h}$ qui était le mode propre approché de notre problème.

La fonction propre approchée est illustrée dans la figure (2.10), on constate qu'elle est très proche à celle exacte représentée dans la figure (2.9). La comparaison entre la fonction propre exacte et celle approchée sur l'interface fictive $\Gamma_R = \{(r, z) / r = R\}$ et la frontière libre $\Gamma_L = \{(r, z) / z = L\}$ est présenté dans les figures (2.13) et (2.14).

Remarque 2.2.2. Cette valeur propre est située dans le spectre discret σ_{dis} du problème, c'est à dire dans l'intervalle $I_1^2 = [\lambda_1^2 c_-^2, \lambda_1^2 c_\infty^2[$.

Comme dans le cas de la première valeur propre, les deux valeurs propres exactes $\omega_2 = 60899.7$ et $\omega_3 = 71439.3$ sont obtenues l'orsqu'on résoud l'équation $G_2(\alpha) = 0$. (voir figures (2.2), (2.3) et (2.4)) dans l'intervalle $I_2 = [\lambda_2 c_-^2, \lambda_2 c_\infty^2[$ avec $\lambda_2 = \frac{5\pi}{2L}$.

Remarque 2.2.3. Les deux valeurs propres $\omega_2 = 60899.7$ et $\omega_3 = 71439.3$ sont des valeurs propres isolées situées dans le spectre essentiel σ_{ess} .

Dans ce cas, il existe deux entiers ($i = 5$) et ($i = 8$) tels que $\omega_{i,h}(\alpha_k) \in I_2, \forall \alpha \in I_2$, et les fonctions de dispersion numériques associées $\alpha_k \rightarrow \omega_{i,h}(\alpha_k)$ sont décroissantes et vérifient $\omega_{i,h}(I) \subset I_2$, les résultats numériques sont enregistrés dans le tableau (2.3).

Les valeurs propres approchées associées sont les points fixes des courbes numériques de dispersion $\omega_{i=5,h}(\alpha_k)$ et $\omega_{i=8,h}(\alpha_k)$.

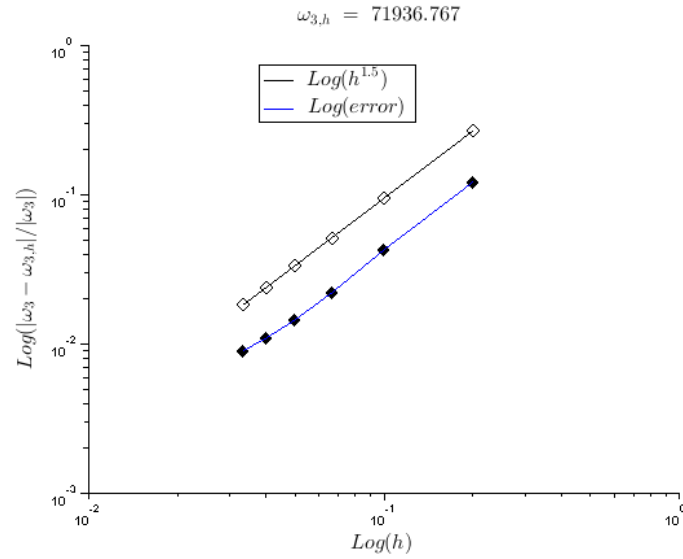


Fig. 2.11 – L'erreur relative en fonction du pas de discrétisation associée à $\omega_{3,h}$.

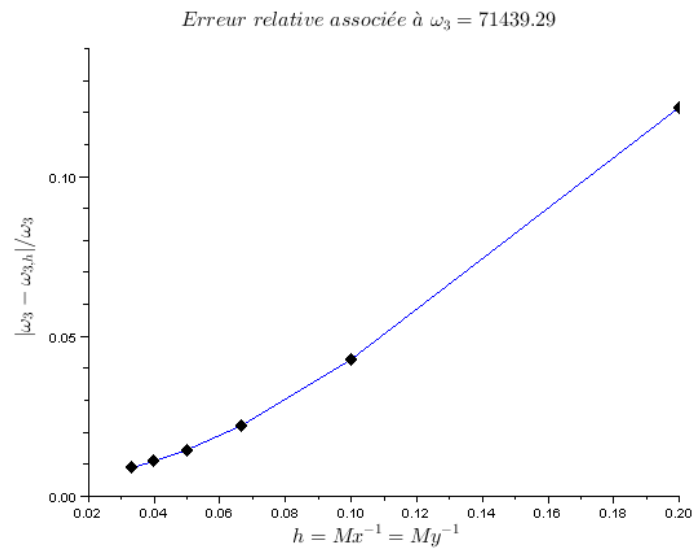
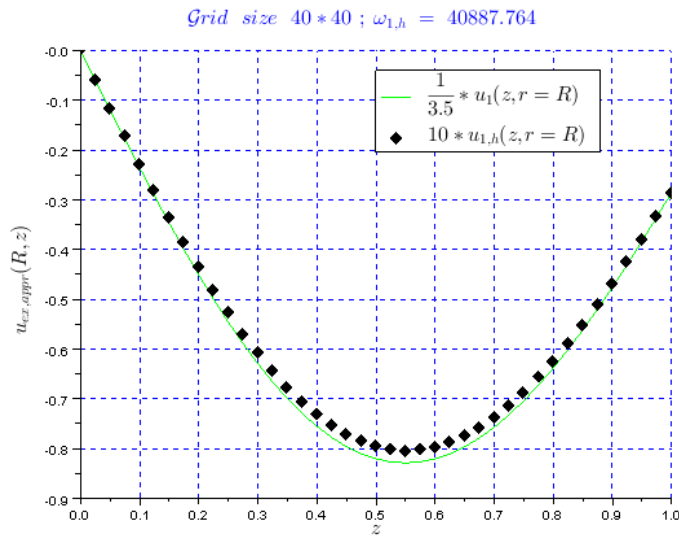


Fig. 2.12 – L'erreur relative en fonction du pas de discrétisation associée à ω_3 .

TABLE 2.4 – Variation d'erreur relative en fonction du pas de discrétisation pour la valeur propre $\omega_{1,h}$

Le pas de discrétisation h	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{35}$
$\frac{ \omega_{1,h} - \omega_1 }{ \omega_1 }$	0.0376833	0.0099303	0.0042609	0.0022360	0.0012916	0.0007767	0.0004655

Fig. 2.13 – La projection du premier mode propre approché sur $r = R$

Les figures (2.6) et (2.7) montrent que $\omega_{i=5,h}(\alpha_k)$ et $\omega_{i=8,h}(\alpha_k)$ sont décroissantes et lipschitziennes sur l'intervalle I_2 . Les points fixes de ces courbes notés respectivement $\omega_{2,h}$ et $\omega_{3,h}$ convergent vers ω_2 et ω_3 respectivement. La figure (2.12) montre que l'erreur diminue en fonction du pas de la discrétisation. Pour ces valeurs, la précision est moins que celle de $\omega_{1,h}$, on pense qu'on a perdu un peu la précision à cause de leurs positions (situées dans le spectre essentiel) ou de leurs multiplicités (des valeurs propres multiples) ou à cause de la singularité de l'opérateur associé. (voir aussi la figure (2.11)).

Les fonctions propres approchées associées sont représentées dans les figures (2.20, 2.22) et celles des valeurs propres exactes sont représentées dans les figures (2.19, 2.21), et enfin, la comparaison des solutions sur l'interface Γ_R (2.16, 2.18) et la frontière libre Γ_L (2.15, 2.17).

Remarque 2.2.4. 1. L'opérateur B admet une suite de valeurs propres prolongées dans le spectre essentiel qui tend vers $+\infty$,

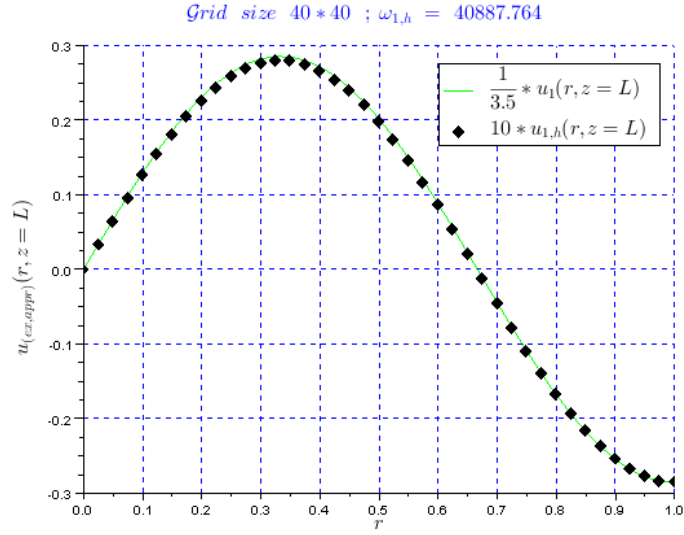


Fig. 2.14 – La projection du premier mode propre approché sur $z = L$

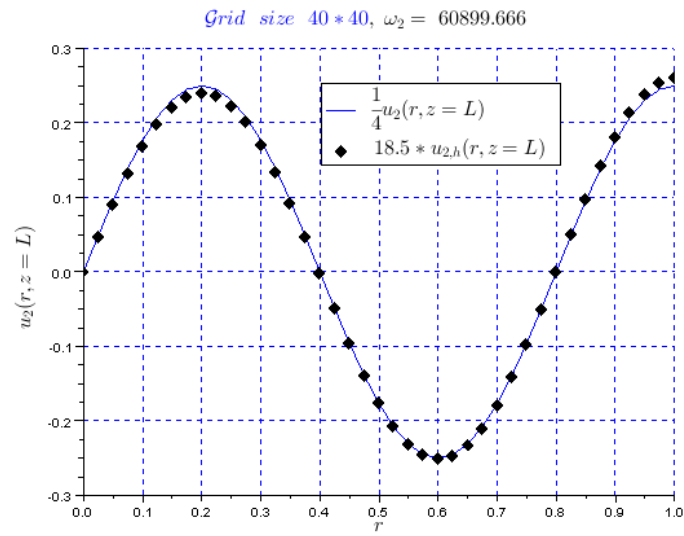


Fig. 2.15 – La projection du deuxième mode sur $r = R$

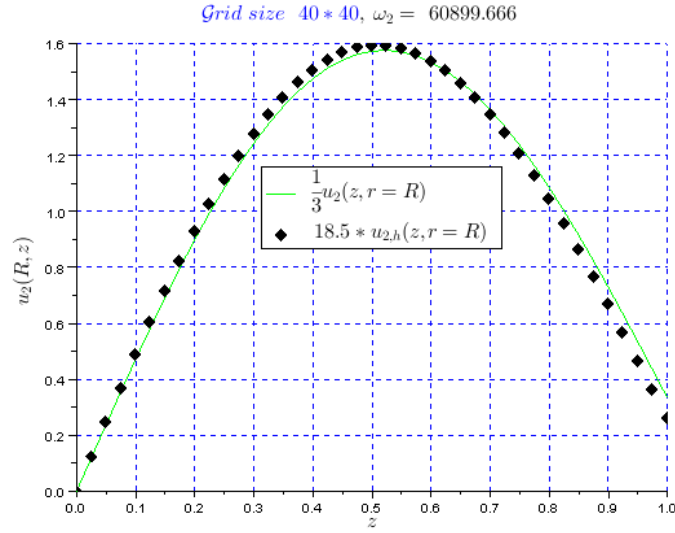


Fig. 2.16 – La projection du deuxième mode propre approché sur $z = L$

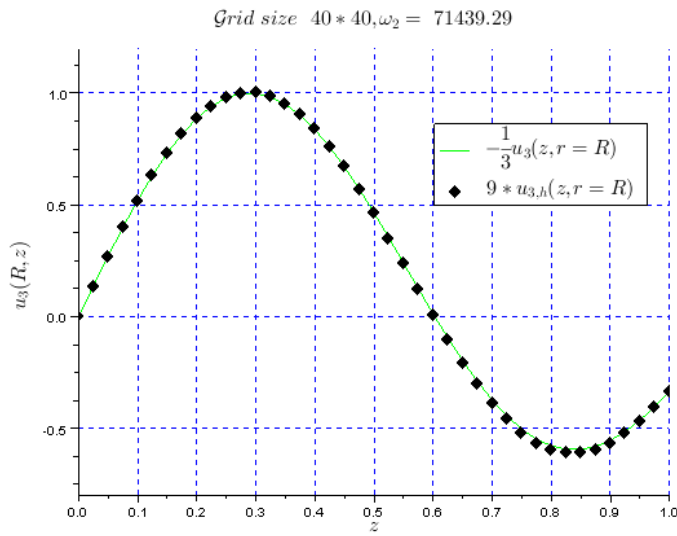


Fig. 2.17 – La projection du troisième mode sur $r = R$

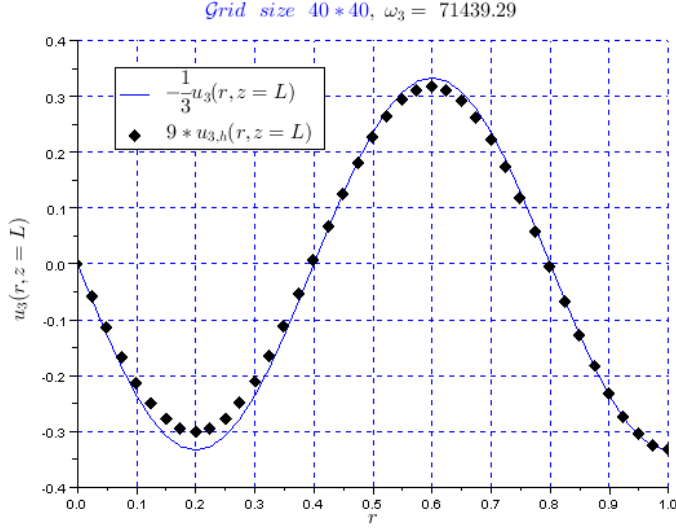


Fig. 2.18 – La projection du troisième mode propre approché sur $z = L$

2. Pour calculer cette suite de $(v.p)$, on applique l'algorithme précédent pour chaque intervalle $I_p = [\lambda_p c_-, \lambda_p c_\infty[$ avec $\lambda_p = \frac{(2p+1)\pi}{2L}$.

Les tableaux suivants illustrent les résultats qu'on a obtenu pour $p = 7$ (resp. $p = 8$). Dans ce cas on a sept fonctions (resp. huit) $\alpha \rightarrow \omega_i(\alpha)$ de dispersion telles que :

1. Ces fonctions sont décroissantes sur l'intervalle I_p ,
2. Sont lipschitziennes sur I_p et $\omega_i(\lambda_p^2 c_1^2) < \lambda_p^2 c_\infty^2$.

Les résultats enregistrés dans les tableaux (2.5) et (2.6) montrent la performance et l'efficacité du schéma proposé.

TABLE 2.5 – Convergence de la méthode pour les valeurs propres prolongées dans I_7 .

p	7						
ω	168676.082	173436.161	180641.	189978.	201085.	213559.	226843.
ω_h	168476.45	174036.01	180952.06	189748.76	201066.59	213097.	226736.86
$\frac{ \omega - \omega_h }{\omega}$	$1.1E - 3$	$3.4E - 3$	$1.7E - 3$	$1.2E - 3$	$9.4E - 5$	$2.1E - 4$	$4.7E - 4$

Deuxième exemple

Le domaine $\Omega_R = [0, 1] \times [0, 1.5]$.

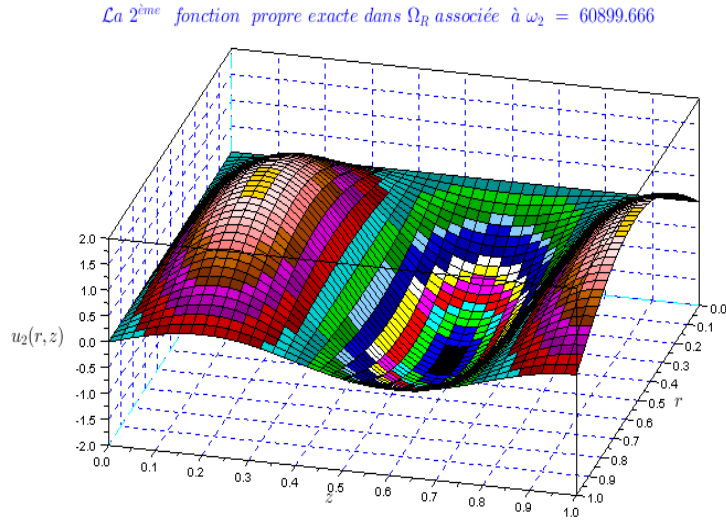


Fig. 2.19 – Deuxième mode propre exact associé à $\omega_2 = 60899.666$

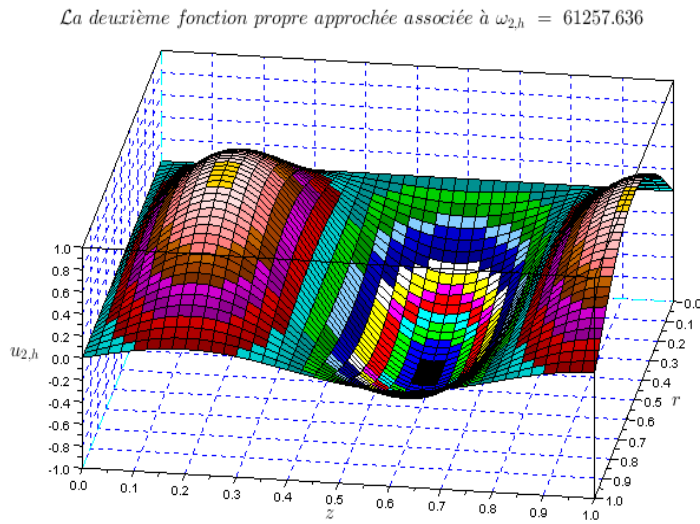


Fig. 2.20 – Deuxième mode propre approché associé à $\omega_{2,h} = 61257.636$

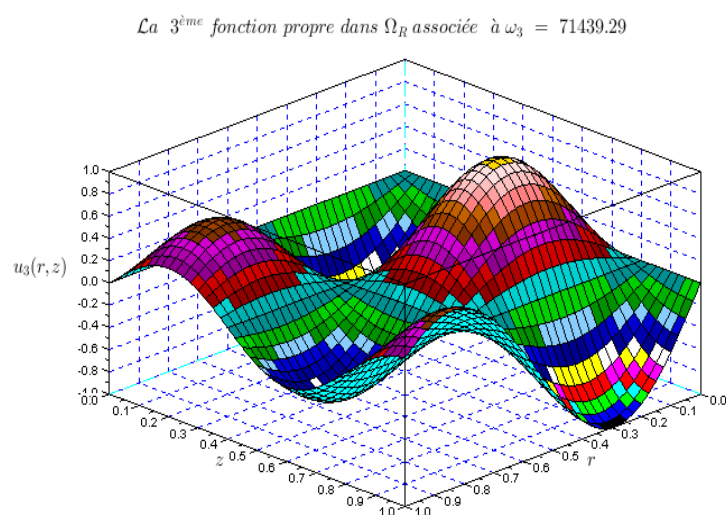


Fig. 2.21 – Troisième mode propre exact associé à $\omega_3 = 71439.29$

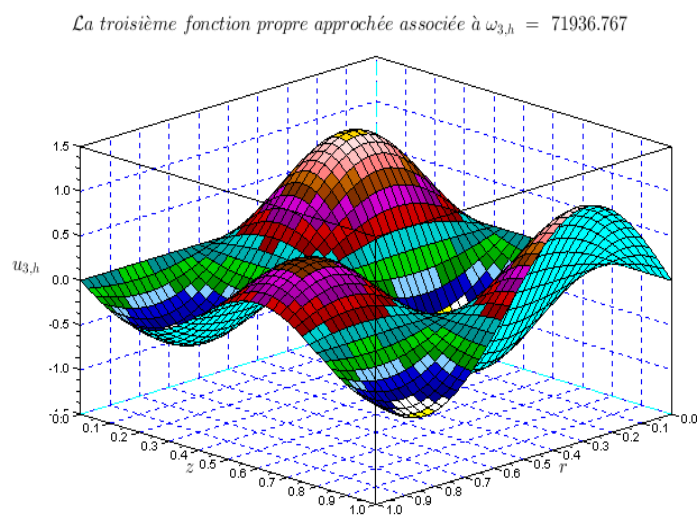
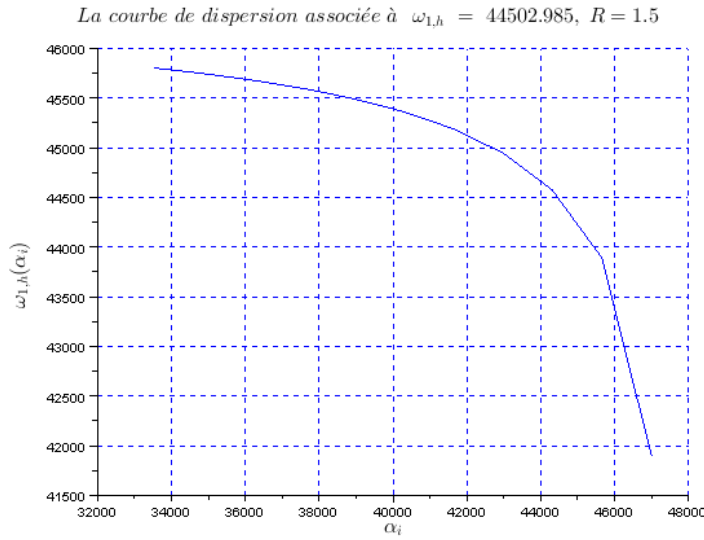


Fig. 2.22 – Troisième mode propre approché associé à $\omega_{3,h} = 71936.767$

TABLE 2.6 – Convergence de la méthode pour les valeurs propres prolongées dans I_8 .

ω	190661.42	194913.92	201402.7	209900	220100.4	231820,	244559.7	258096
ω_h	190724.8	194678.7	201542.2	209172.8	220484.7	232157.1	244526.1	258308.4
$\frac{ \omega - \omega_h }{\omega}$	$3.3E - 4$	$1.2E - 3$	$6.9E - 4$	$3.4E - 3$	$1.7E - 3$	$1.4E - 3$	$1.3E - 4$	$8.2E - 4$

Fig. 2.23 – La courbe de dispersion $\alpha \rightarrow \omega_{2,h}(\alpha)$.

Contrairement au cas précédent, l'équation caractéristique $G_1(\alpha) = 0$ admet deux racines $\omega_1 = 37190.226$ et $\omega_2 = 44453.60$ dans $I_1 = [\lambda_1 c_- , \lambda_1 c_\infty[$ (voir la figure (2.24)). En pratique, on a trouvé deux entiers ($i = 3$) et ($i = 5$) tels que les courbes numériques de dispersion $\omega_{i=3, h}(\alpha_k)$ et $\omega_{i=5, h}(\alpha_k)$ sont représentées dans la figure (2.23) associée à $\omega_{i=5, h}(\alpha_k)$). Chacune de ces courbes admet un point fixe $\omega_{1, h} = 37402.272$ et $\omega_{2, h} = 44502.985$.

Les figures (2.25) et (2.26) montrent que l'ordre de convergence du schéma pour la valeur propre approchée $\omega_{2, h} = 44453.60$ est égal à 2. Les fonctions propres approchées et exactes ainsi que la comparaison des solutions sur l'interface fictive et la frontière libre sont réunies dans les figures 2.27, 2.29, 2.28, 2.30, 2.31, 2.32, 2.41, et 2.42 respectivement.

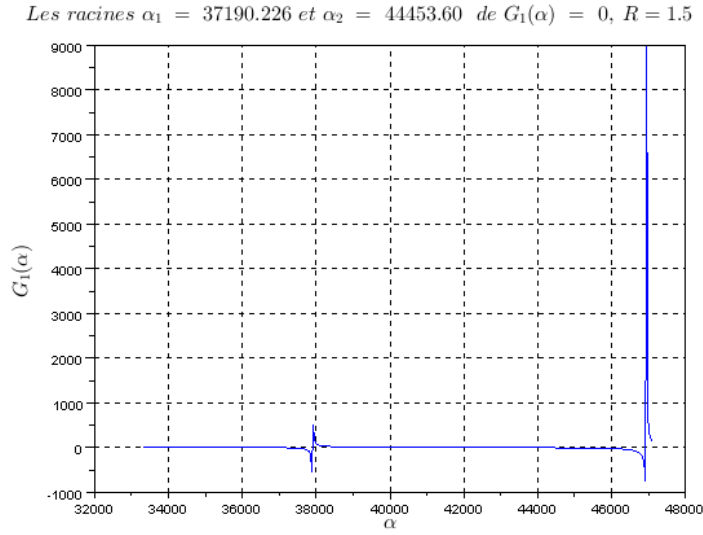


Fig. 2.24 – La fonction caractéristique associée à $\omega_1 = 37190.226$ et $\omega_2 = 44453.60$.

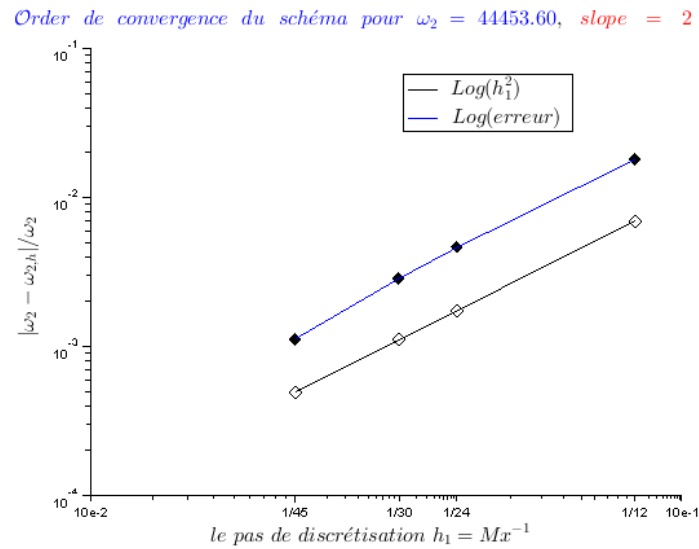


Fig. 2.25 – L'ordre de convergence du schéma pour $\omega_{2,h}$ en fonction du pas h_1 .

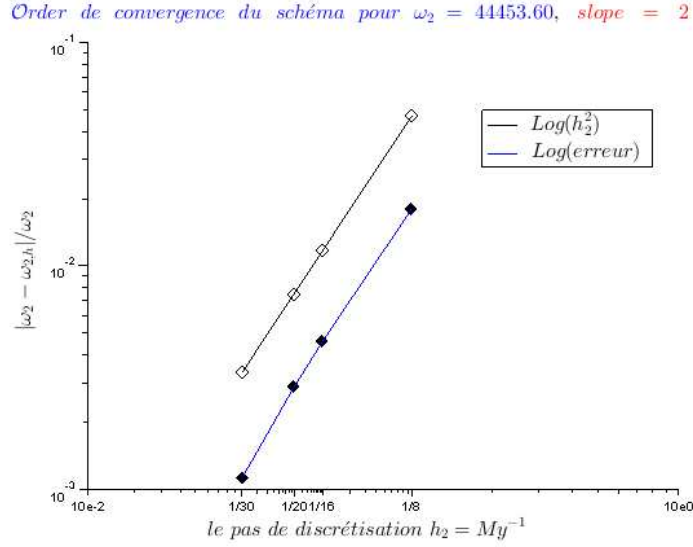


Fig. 2.26 – L'ordre de convergence du schéma pour $\omega_{2,h}$ en fonction du pas h_2 .

2.2.2 Un exemple avec profil linéaire

Comme deuxième exemple, nous considérons un problème avec le coefficient $\mu(r, z)$ qui est affine dans $\Omega_1 =]0, 1[\times]0, 1[$:

$$\mu(r, z) = \begin{cases} a(r + z) + \mu_{\min} & \text{pour } 0 < r < 1 \\ \mu_{\infty} & \text{pour } r > 1 \end{cases}$$

avec $a = 0.2E + 11$, $\mu_{\min} = 0.5E + 11$ et $\mu_{\infty} = 1E + 11$.

Il est nécessaire d'approximer ce coefficient sur chaque élément finis de $\Omega_{h,R}$.

Pour chaque élément $K_{m,l}^{+\frac{1}{2}}$ où $K_{m,l}^{-\frac{1}{2}}$ de la triangulation de $\Omega_{h,R}$, on pose

$$\mu_{m,l}^{+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\text{mes}(K_{m,l}^{+\frac{1}{2}})} \iint_{K_{m,l}^{+\frac{1}{2}}} \mu(r, z) dr dz; \quad \text{et} \quad \mu_{m,l}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\text{mes}(K_{m,l}^{-\frac{1}{2}})} \iint_{K_{m,l}^{-\frac{1}{2}}} \mu(r, z) dr dz$$

où $K_{m,l}^{+\frac{1}{2}}$ (resp. $K_{m,l}^{-\frac{1}{2}}$) est le triangle de sommets $\{((m-1)h_2, (l-1)h_1), ((m-1)h_2, lh_1), (mh_2, lh_1)\}$ (resp. $\{((m-1)h_2, (l-1)h_1), (mh_2, (l-1)h_1), (mh_2, lh_1)\}$) et $\text{mes}(K_{m,l}^{+\frac{1}{2}}) = \text{mes}(K_{m,l}^{-\frac{1}{2}}) = \frac{h_1 h_2}{2}$.

En utilisant l'approximation $\mu_h = \mu_{m,l}^{\pm\frac{1}{2}}$, on a pour tout $(m, l) \in \{ l = M_r, 1 \leq m \leq M_z \}$ on a :

$$\mu_{m,l}^{+\frac{1}{2}} = a \left[(lh_1 + \alpha) - \frac{h_1}{3} + mh_2 - \frac{2L}{3} \right], \mu_{m,l}^{-\frac{1}{2}} = a \left[(mh_2 + \alpha) - \frac{h_2}{3} + lh_1 - \frac{2h_1}{3} \right], \text{ avec } \alpha = \frac{\mu_{\min}}{a}.$$

On suit les mêmes étapes que pour le cas du profil constant par morceaux et avec $N = 10$ et $Mr = Mz = 23$, nous avons calculé les premières fréquences

$$\omega_{1,h} = 45230, \quad \omega_{2,h} = 57054 \text{ et } \omega_{3,h} = 72183.$$

Les vecteurs propres correspondants sont tracés, pour $z = L$ dans la figure (2.33) ainsi que la figure (2.34) montre que la courbe de dispersion $\alpha \rightarrow \omega_1(\alpha)$ est décroissante.

Dans le tableau (2.7), on montre l'évolution de $\omega_{1,h}^N$ en fonction du rang de troncature N , h étant fixe. On remarque que la contribution de rangs $N = 1, 2$ est essentiel.

TABLE 2.7 – Evolution de ω_i^N en fonction de N

N	1	2	3	4	5
ω_1	45227.233	45230.235	45230.237	45230.238	45230.242
ω_2	58321.369	58321.424	58321.443	58321.459	58321.461
ω_3	72296.395	72302.084	72302.100	72302.105	72302.107

On va examiner maintenant l'influence du choix du rang de la troncature de la série de Fourier N . Le tableau suivant (2.8) illustre les variations de ω_i^N en fonction de N , ($R = 1.5$)

TABLE 2.8 – Evolution de ω_i^N en fonction du rang de troncature N

N	5	19	25	50	100
ω_2^N	37586.08	37714.401	37717.747	37719.347	37719.901
ω_3^N	41941.274	42498.853	42519.514	42524.927	42527.79
ω_1^N	45227.233	45230.235	45230.237	45230.238	45230.242

2.2.3 L'influence du longueur de la couche sur le nombre des valeurs propres

Le présent test montre que le nombre des valeurs propres discrètes dépend de ce longueur de symétrie de la couche R . En effet, pour $R = 1$ (resp. $R = 1.5$) on a obtenu une seule valeur propre (resp. deux) comme le démontre l'exemple 1 (resp. 2).

Pour $R = 2$, c'est à dire $\Omega =]0, 2[\times]0, L[$, le problème admet trois valeurs propres qui appartiennent à l'intervalle I_1 telles que : $\omega_1 = 35644.50$, $\omega_2 = 40463.66$ et $\omega_3 = 46358.53$, les approximations de ces valeurs sont obtenues avec les pas de discrétisation $h_1 = \frac{R}{40}$ et $h_2 = \frac{L}{20}$.

$\omega_{i=4,h} = 35810.663$, $\omega_{i=5,h} = 40812.237$ et $\omega_{i=7,h} = 46294.448$. Les figures associées sont représentées dans (2.35), (2.37) et (2.39).

L'exemple suivant est effectué pour les données :

Pour le rang de la troncature $N = 100$, les pas de discrétisation $h_1 = h_2 = 1/40$ et $R = 1, L = 1$, la valeur propre approchée obtenue est $\omega_{i=3,h} = 40887.828$. Et pour $h_1 = R/45 = h_2 = L/30$ c'est à dire $R = 1.5, L = 1$, la valeur propre approchée obtenue est $\omega_{i=5,h} = 44503.167$. On constate que la valeur propre approchée discrète $\omega_{3,h} = 40887.828$ (resp. $\omega_{5,h} = 44503.167$) obtenue avec $R = 1$ (resp. $R = 1.5$) est égale à celle obtenue dans le premier exemple (resp. deuxième exemple) pour $N = 1$. En effet, cette dernière est une valeur propre associée à une fonction propre qui était la projection de la fonction propre associée dans le cas $N = 100$. Pour conclure, on va donner dans l'annexe (3) la décomposition spectrale de l'opérateur associe au problème de tests numériques que nous les avons réalisés.

Les fonctions propres associées sont représentées dans les figures (2.43) et (2.44).

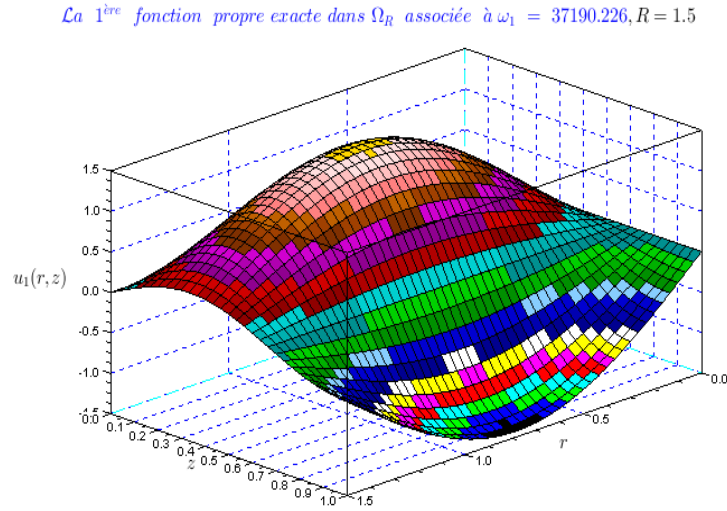


Fig. 2.27 – Le premier mode propre exact associé à $\omega_1 = 37190.226$

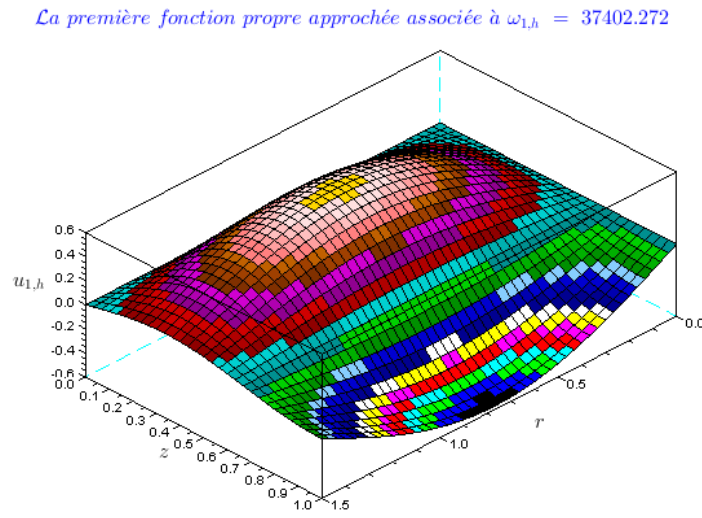


Fig. 2.28 – Le premier mode propre approché associé à $\omega_{1,h} = 37402.272$

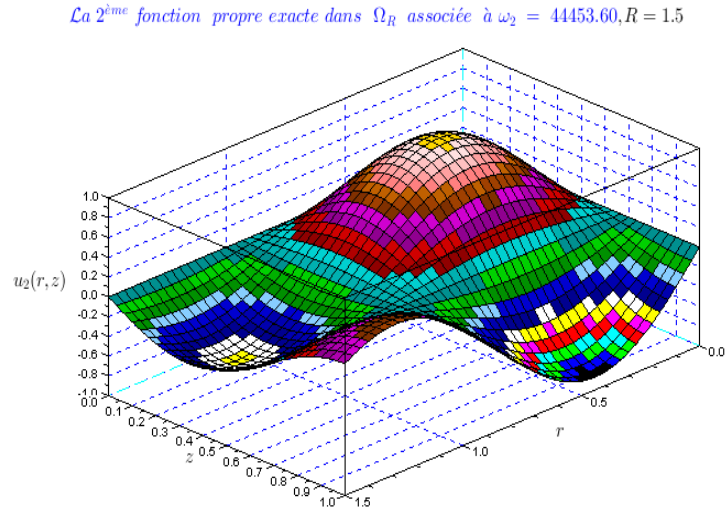


Fig. 2.29 – Le premier mode propre exact associé à $\omega_2 = 44453.60$

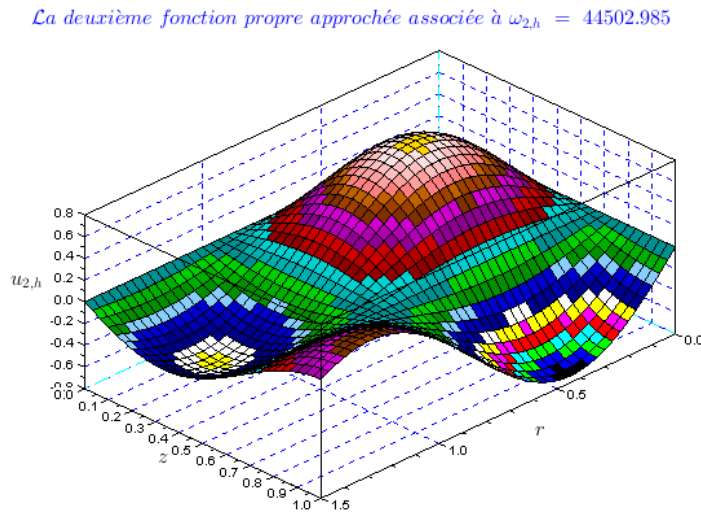
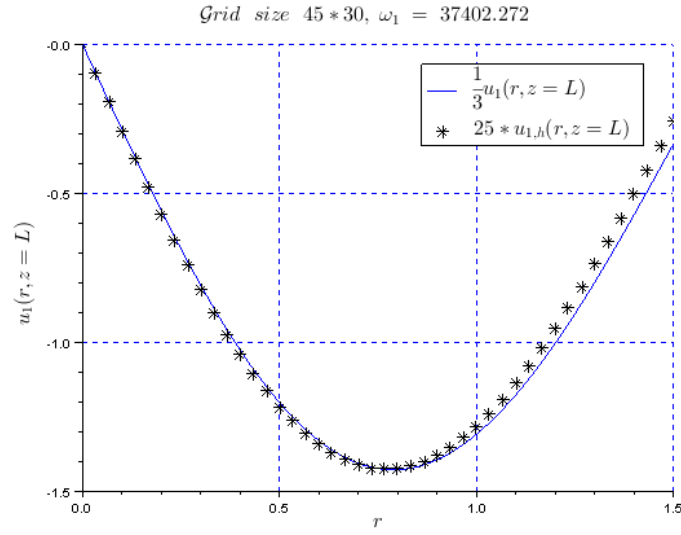
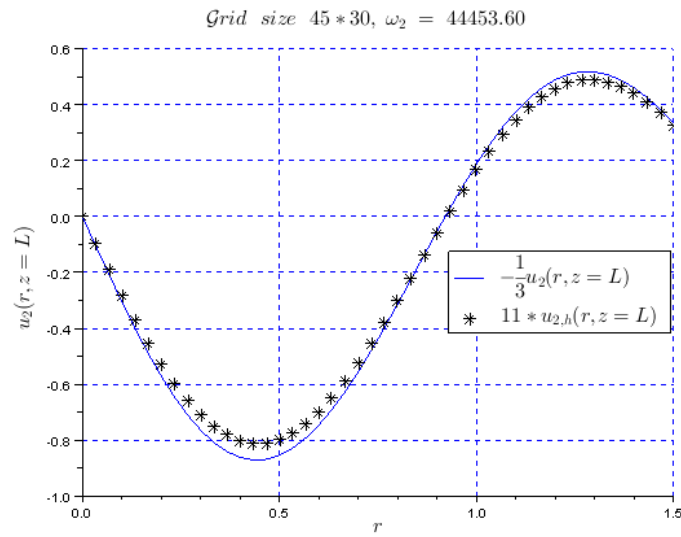


Fig. 2.30 – Le premier mode propre approché associé à $\omega_{2,h} = 44453.60$


 Fig. 2.31 – La projection du premier mode sur $z = L$ pour $R = 1.5$

 Fig. 2.32 – La projection du deuxième mode sur $z = L$ pour $R = 1.5$

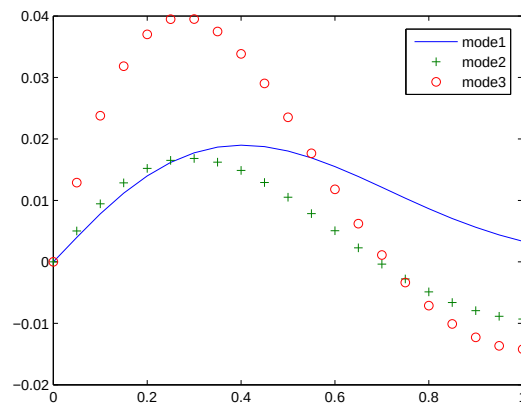


Fig. 2.33 – Les premiers modes pour $z = L$

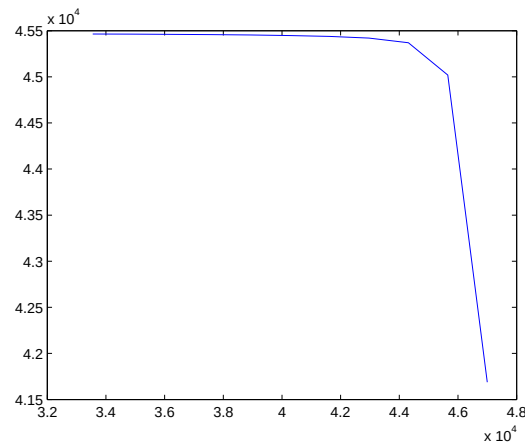


Fig. 2.34 – La première courbe de dispersion $\alpha \rightarrow \omega_{1,h}^N(\alpha)$

La première fonction propre approchée associée à $\omega_{1,h} = 35810.663, R = 2$

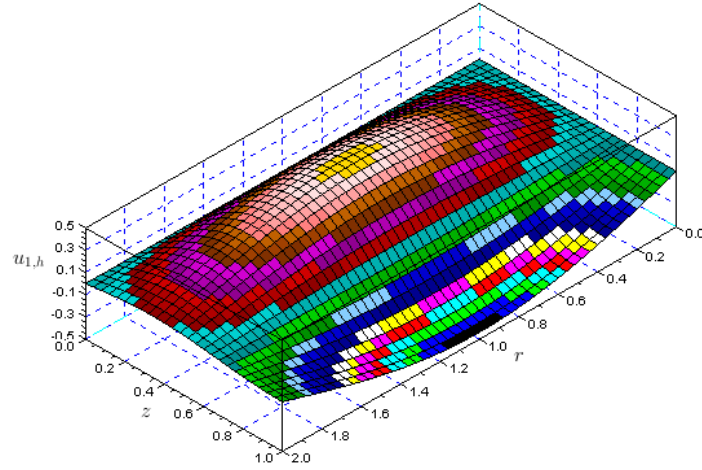


Fig. 2.35 – La première fonction propre approchée associée à la valeur propre approchée $\omega_{1,h} = 35810.663$

La 1^{ère} fonction propre exacte dans Ω_R associée à $\omega_1 = 35644.50, R = 2$

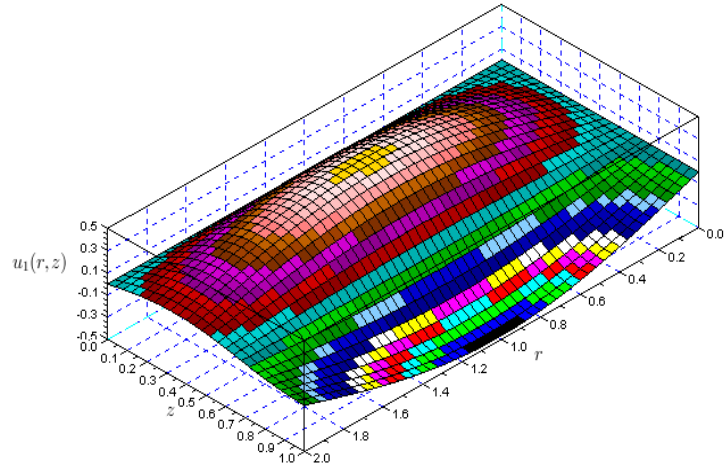


Fig. 2.36 – La première fonction propre exacte associée à $\omega_1 = 35644.50$.

La deuxième fonction propre approchée associée à $\omega_{2,h} = 40812.237, R = 2$

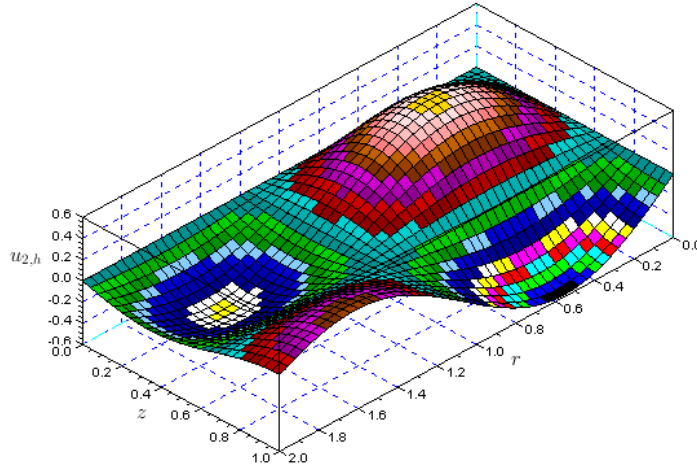


Fig. 2.37 – La deuxième fonction propre approchée associée à la valeur propre approchée $\omega_{2,h} = 40812.237$.

La 2^{ème} fonction propre exacte dans Ω_R associée à $\omega_2 = 40463.66, R = 2$

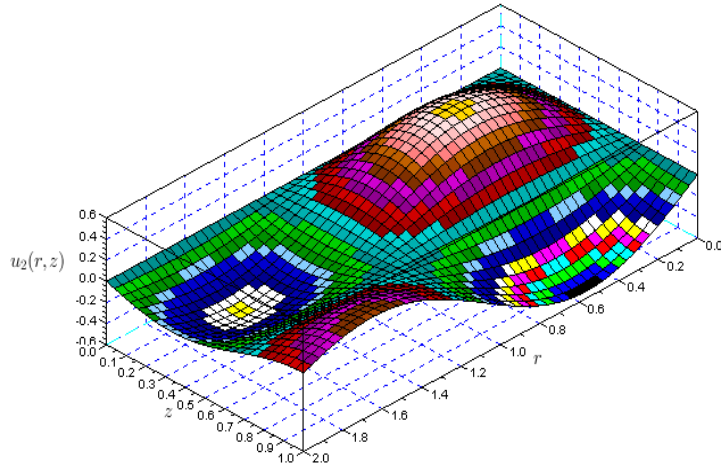


Fig. 2.38 – La deuxième fonction propre exacte associée à $\omega_2 = 40463.66$.

La troisième fonction propre approchée associée à $\omega_{3,h} = 46294.448$

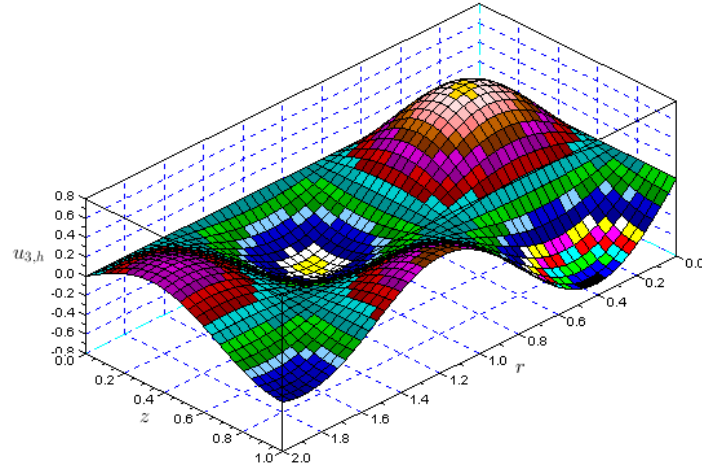


Fig. 2.39 – La troixième fonction propre approchée associée à la valeur propre approchée $\omega_{3,h} = 46292.448$.

La 3^{ème} fonction propre exacte dans Ω_R associée à $\omega_3 = 46358.53, R = 2$

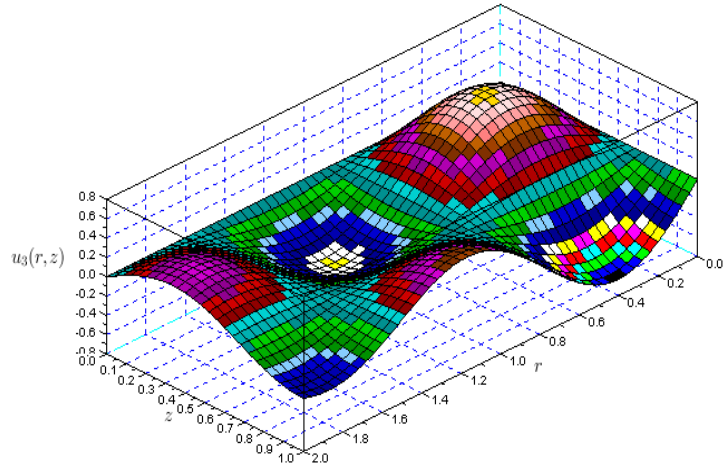


Fig. 2.40 – La troixième fonction propre exacte associée à $\omega_3 = 46358.53$.

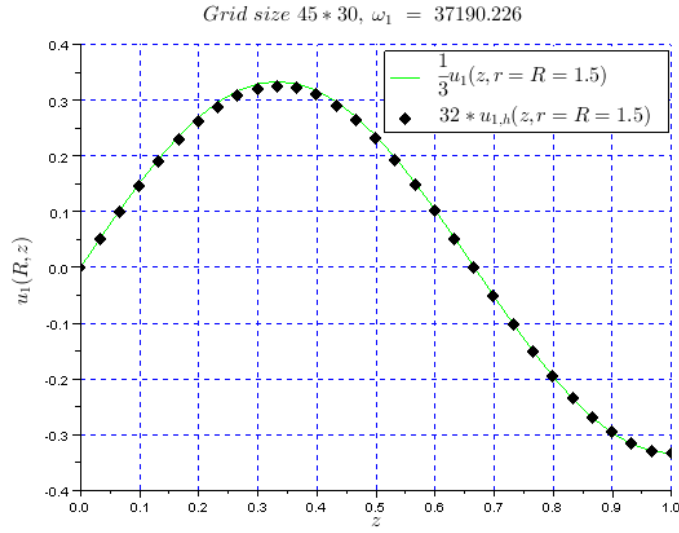


Fig. 2.41 – La projection du deuxième mode sur $r = R$

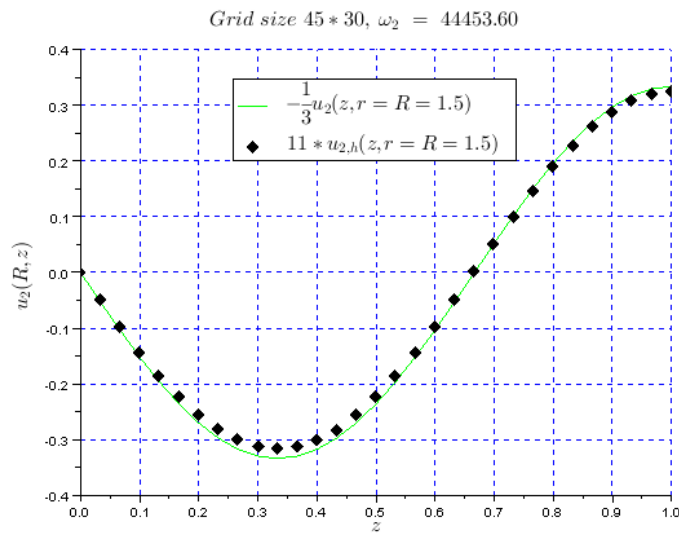


Fig. 2.42 – La projection du troisième mode sur $r = R$

La fonction propre approchée associée à $\omega_{1,h}^N = 40887.828$, $R = 1$, $N = 100$

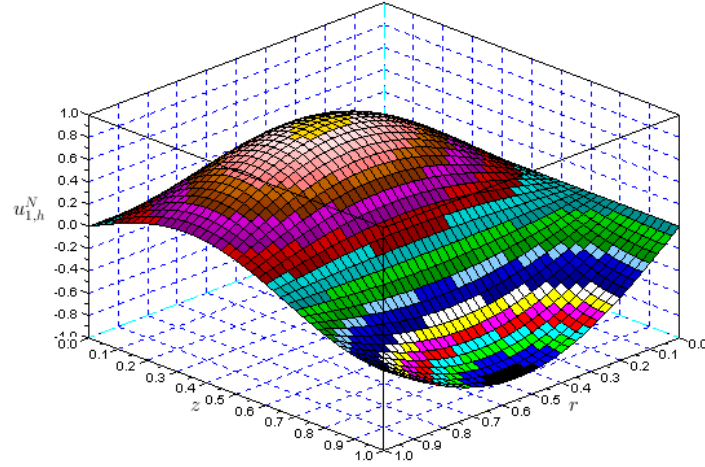


Fig. 2.43 – La fonction propre associée à $\omega_{1,h}^N = 40887.828$ pour $R = 1$, et $N = 100$

La fonction propre approchée associée à $\omega_{2,h}^N = 44503.167$, $R = 1.5$, $N = 100$

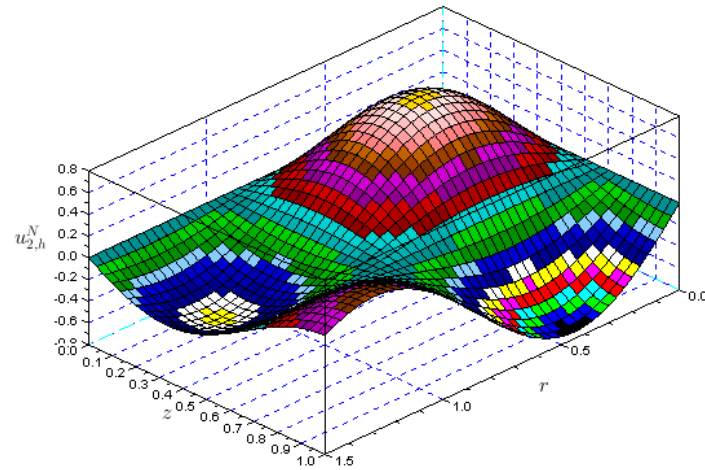


Fig. 2.44 – La fonction propre associée à $\omega_{2,h}^N = 44503.167$ pour $R = \frac{3}{2}$, et $N = 100$

Chapitre 3

Méthode de Domaine Fictif pour un Problème d'Élasticité Linéaire

3.1 Introduction et motivation

Dans cette partie de notre travail, nous allons utiliser une méthode originale de type domaine fictif pour la résolution des problèmes d'élasticité linéaire avec des conditions aux limites générales : Dirichlet, Neumann ou Robin. L'idée est d'immerger le domaine physique dans un domaine plus grand et de forme plus simple (généralement rectangulaire en 2D), appelé domaine fictif qui deviendra le domaine de calcul (cf. figure 3.1).

L'objectif est de bénéficier des nombreux avantages de ces méthodes (utilisation des méthodes numériques basées sur des maillages structurés réguliers, solveurs rapides, bonnes propriétés de convergence, ...). Cependant, afin de recouvrer une solution approchée satisfaisante sur le domaine physique, il faut pouvoir tenir compte de façon précise des frontières immergées dans le domaine de calcul. Les différentes modélisations de frontières immergées peuvent se regrouper en deux grands types d'approches. Ces approches se distinguent par la dimension de l'espace dans lequel est approchée l'interface immergée réelle, soit l'interface approchée est de même dimension que l'interface immergée réelle (i.e. une courbe en 2D ou une surface en 3D), on parlera alors d'interface approchée fine, soit l'interface approchée est élargie par rapport à l'interface immergée réelle (i.e. une surface en 2D ou un volume en 3D), on parlera alors d'interface approchée diffuse.

En se focalisant ici sur les approches de type interface fine. La frontière immergée est approchée par une interface dite fine (sharp) s'appuyant sur les faces de cellules du maillage. Afin d'imposer les conditions aux limites du problème physique, des conditions de transmission algébriques combinant les sauts de la solution et du flux sont introduites. Dans ce cas, ces conditions aux limites immergées sont prises en compte par des termes surfaciques ou volumiques ou les deux (technique de pénalisation).

Cette approche de méthode de domaine fictif "Fictitious domain method", a été introduite par V.K. Saul'ev dans [61]. L'idée consiste à modifier localement le maillage cartésien du domaine fictif afin de prendre en compte les conditions aux limites immergées. Cette approche a été reprise et complétée dans [32, 40]. Kopcenov [33] a également utilisé cette approche de maillage localement adapté pour simuler des conditions aux limites de type Robin, en imposant un saut de flux sur la frontière immergée. Par la suite, toujours dans une approche de domaine fictif, les techniques de pénalisation ont été étudiées et employées principalement en mécanique des fluides [3, 30] pour imposer des conditions de type Dirichlet sur une frontière immergée ou dans un domaine (par exemple, pour avoir une vitesse nulle dans les solides). Ces méthodes sont alors souvent combinées à des algorithmes de raffinement local multi-niveaux de maillage (voir [30] par exemple) pour approcher localement de manière plus

précise la frontière immergée.

La formulation variationnelle du problème réduit (le problème posé sur le domaine fictif), assortie des hypothèses d'ellipticité, satisfait la propriété de coercivité sur l'espace de Sobolev associé, ceci assure, l'unicité de la solution faible. Les paramètres du modèle sur l'interface immergée Σ ou dans le domaine auxiliaire Ω_e ($\Omega = \tilde{\Omega} \cup \Omega_e$) sont ensuite déterminés pour satisfaire exactement ou de façon approchée les conditions aux limites du problème initial (physique) imposé par analogie avec la classe de méthodes proposée dans [6] pour un problème elliptique scalaire et numériquement validé dans [53, 54].

Un schéma aux volumes finis localement modifié est déterminé. Cela consiste à discrétiser le domaine fictif à l'aide d'une grille cartésienne et à répartir les noeuds de discrétisation en deux familles selon leur position par rapport à l'interface (la frontière immergée) :

1. les noeuds "réguliers" sont les noeuds du maillage tels que le stencil de discrétisation centré en ces points ne fait intervenir que des noeuds situés d'un même côté de l'interface,
2. les noeuds "irréguliers" sont les noeuds du maillage situés près de l'interface tels que le stencil de discrétisation est composé de noeuds de part et d'autre de l'interface.

Ce schéma présente l'avantage de conserver une unique grille cartésienne (non modifiée) pour résoudre le problème sur le domaine fictif. Ce type de modélisation approché de la frontière immergée conduit à une convergence du premier ordre en norme de L^2 .

On s'intéresse ici, à la validation numérique d'une méthode de domaine fictif appliquée au problème d'élasticité linéaire avec les sauts du flux et de la solution pour des conditions aux limites générales immergées (J. E. B. C.) comme était proposée dans [8]. Pour calculer la solution $\tilde{u}$ du problème posé ($\tilde{P}$) dans le domaine $\tilde{\Omega}$, nous allons exposer brièvement la méthodologie des approches de type domaine fictif ([61, 39]) qui consiste généralement en trois étapes :

1. Le domaine physique $\tilde{\Omega}$ est immergé dans un domaine fictif Ω , généralement plus grand et de forme plus simple tel que $\Omega = \tilde{\Omega} \cup \Sigma \cup \Omega_e$, où Ω_e désigne un domaine auxiliaire et Σ l'interface commune entre les deux sous-domaines. Le domaine Ω est choisi géométriquement de forme simple que $\tilde{\Omega}$. (voir Figure 3.1)
2. Un problème fictif (P) est défini et résolu dans le domaine fictif Ω , avec des conditions de transmission appropriées sur Σ et des données choisies dans Ω_e afin de traiter les conditions aux limites originales de ($\tilde{P}$) sur l'interface immergée Σ . Le problème (P) sur le domaine Ω est alors choisi du même type que ($\tilde{P}$).
3. La solution $\tilde{u}$ du problème original ($\tilde{P}$) est soit trouvée exactement comme : $\tilde{u} = u|_{\tilde{\Omega}}$,

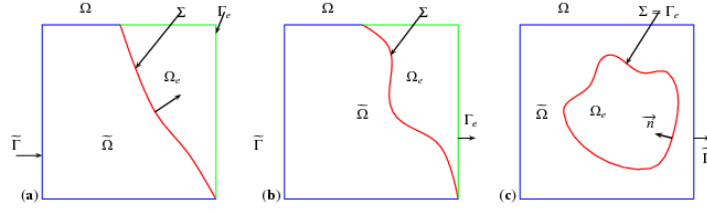


Fig. 3.1 – Exemple des domaines physiques immergés dans un domaine fictif carré.

c'est à dire, la restriction de la solution fictive u du problème (P) dans le domaine $\tilde{\Omega}$, ou au moins $u|_{\tilde{\Omega}} \approx \tilde{u}$.

L'objectif est d'utiliser un maillage uniforme simple et structuré dans Ω , par exemple une grille uniforme cartésienne, indépendante de la forme de l'interface immergée Σ au lieu d'utiliser un maillage adaptatif pour lequel il devient difficile de trouver des solveurs rapides et efficaces.

3.2 Position du problème

Soit Ω un ouvert borné polygonale de $\mathbb{R}^d$ (dans la pratique $d = 2$ ou 3). Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^{d-1}$ une interface assez régulière qui sépare Ω en deux sous-domaines disjoints $\tilde{\Omega}$ et Ω_e telle que $\Omega = \tilde{\Omega} \cup \Sigma \cup \Omega_e$, la frontière de $\tilde{\Omega}$ est défini par $\partial\tilde{\Omega} = \tilde{\Gamma} \cup \Sigma$ et celle de Ω est défini par $\partial\Omega = \tilde{\Gamma} \cup \Gamma_e$. Soit $\mathbf{n}$ la normale extérieure unitaire définie sur Γ_e , ou définie sur Σ orientée de $\tilde{\Omega}$ vers Ω_e . Pour une fonction $\psi \in H^1(\tilde{\Omega} \cup \Omega_e)$, soient ψ^- et ψ^+ les traces de $\psi|_{\tilde{\Omega}}$ et $\psi|_{\Omega_e}$ sur chaque côté de Σ respectivement, $\bar{\psi}|_{\Sigma} = \frac{1}{2}(\psi^- + \psi^+)$ la moyenne arithmétique des traces de ψ , et $[\psi]_{\Sigma} = (\psi^+ - \psi^-)$ est le saut des traces de ψ sur Σ orienté par $\mathbf{n}$. Notre objectif est d'utiliser une méthode de domaine fictif pour résoudre le problème suivant dans le domaine Ω , qui est défini généralement dans le domaine physique $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ avec une condition au limite générale sur Σ : Trouver un vecteur du déplacement $\tilde{\mathbf{u}}$ et un tenseur symétrique des contraintes $\sigma = (\sigma^{i,j})_{i,j=1}^d$ tels que

$$(\tilde{P}) \quad \begin{cases} -\nabla \cdot \sigma(\tilde{\mathbf{u}}) = \rho \mathbf{f} & \text{dans } \tilde{\Omega}, \quad (1) \\ \tilde{\mathbf{u}} = 0 & \text{sur } \tilde{\Gamma}, \quad (2) \\ \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_D, \text{ ou } \sigma(\tilde{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{q} & \text{sur } \Sigma, \quad (3) \end{cases} \quad (A)$$

où $\mathbf{f} \in L^2(\tilde{\Omega})^d$ est la force appliquée sur le corps, $\mathbf{u}_D \in H_{00}^{1/2}(\Sigma)^d$ est la condition de

Dirichlet, $\mathbf{A} \in L^\infty(\tilde{\Omega})^{d \times d}$ est une matrice uniforme définie positive et $\mathbf{q} \in L^{-1/2}(\Sigma)^d$ sont donnés sur Σ . λ et $\mu \in L^\infty(\tilde{\Omega})$ sont les coefficients de Lamé et ρ est la densité volumique, vérifient : $\inf_{\tilde{\Omega}} \lambda(x) = \lambda_- > 0$, $\inf_{\tilde{\Omega}} \mu(x) = \mu_- > 0$, $\inf_{\tilde{\Omega}} \rho(x) = \rho_- > 0$, $\lambda_+ = \sup_{\tilde{\Omega}} \lambda(x)$, $\mu_+ = \sup_{\tilde{\Omega}} \mu(x)$ et $\rho_+ = \sup_{\tilde{\Omega}} \rho(x)$.

L'équation constitutive d'élasticité linéaire pour un milieu isotrope peut s'écrire comme suit

$$\sigma(\tilde{\mathbf{u}}) = \lambda \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} \mathbf{I} + 2\mu \varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}),$$

où

$$\varepsilon = \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T]$$

est le tenseur de déformation linéaire, $\mathbf{I}$ est le tenseur d'identité, les coefficients de Lamé λ et μ sont liés au module de Young E et le ratio de Poisson ν par les relations suivantes :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Remarque 3.2.1. Dans la limite d'incompressibilité $\nu \rightarrow \frac{1}{2}$, le coefficient de Lamé λ devient non borné et la pression ne peut pas être déterminée à partir du champ de déformation, et donc une autre formulation de la loi constitutive sera nécessaire (voir [11]).

Nous définissons les espaces réels de Hilbert :

$$H(\tilde{\Omega}) = L^2(\tilde{\Omega})^3$$

avec le produit scalaire

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_H = \int_{\tilde{\Omega}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^T dx.$$

et

$$V(\tilde{\Omega}) = \left\{ u \in H^1(\tilde{\Omega})^3, u = 0 \text{ sur } \tilde{\Gamma} \right\}$$

avec la norme :

$$\|u\|_V^2 = \|u\|_H^2 + \|\nabla u\|_H^2.$$

La formulation variationnelle du problème $(\tilde{P})$ est :

$$(P_0) \quad \begin{cases} \text{Trouver } \tilde{u} \in V(\tilde{\Omega}), \tilde{u} \neq 0, \text{ telle que :} \\ a(\tilde{u}, v) = (\mathbf{f}, v) + \langle \mathbf{q}, v \rangle_{-\frac{1}{2}, \Sigma}, \quad \forall v \in V(\tilde{\Omega}), \end{cases}$$

avec

$$a(\tilde{u}, v) = \int_{\tilde{\Omega}} \sigma(\tilde{u}) : \nabla v dx + \int_{\Sigma} \mathbf{A} \tilde{u}|_{\Sigma} v|_{\Sigma} ds.$$

La forme bilinéaire $a(.,.)$ est évidemment symétrique et continue.

La coercivité de $a(.,.)$

Nous avons la décomposition suivante :

$$a(u, u) = \int_{\tilde{\Omega}} \lambda |\nabla u|^2 dx + \int_{\tilde{\Omega}} \mu \varepsilon(u, u) dx + \int_{\Sigma} u|_{\Sigma} u|_{\Sigma} ds,$$

où

$$\varepsilon(u, u) = \frac{1}{4} (\nabla u + \nabla u^T) : (\nabla u + \nabla u^T),$$

pour prouver la coercivité de $a(.,.)$ il suffit d'établir l'inégalité suivante :

$$\int_{\tilde{\Omega}} \mu \varepsilon(u, u) dx \geq K \|u\|_V^2 \quad \forall u \in V(\tilde{\Omega}) \text{ avec } K > 0.$$

Pour cela, nous utilisons l'inégalité de Korn dans le domaine $\tilde{\Omega}$ ([47]).

$$\int_{\tilde{\Omega}} \sum_{i,j=1}^3 |\varepsilon_{i,j}(u)|^2 dx \geq C_1 \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla u|^2 dx, \quad \text{pour } u \in H^1(\tilde{\Omega})^3 \text{ avec } C_1 > 0.$$

L'inégalité est également valide pour $u \in V(\tilde{\Omega})$.

En appliquant le théorème de la première représentation de Kato (*voir* [29]), nous afirmons que $a(.,.)$ engendre un opérateur auto-adjoint $\mathcal{A}$ défini dans H par :

$$\begin{cases} D(\mathcal{A}) = \{u \in V ; -\nabla \cdot \sigma(u) \in H \text{ et } \sigma(u)_{\Sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{A}u + \mathbf{q} \quad \text{sur } \Sigma\} \\ \mathcal{A}u = -\nabla \cdot \sigma(u) \text{ pour } u \in D(\mathcal{A}). \end{cases}$$

En utilisant la formule de Green généralisée, nous obtenons

$$a(u, v) = (\mathcal{A}u, v) \quad \text{pour } (u, v) \in D(\mathcal{A}) \times V.$$

Notez que les traces $\sigma(u)_\Sigma \cdot \mathbf{n}$ sur Σ , sont dans l'espace $H^{-1/2}(\Sigma)$.

LEMME 3.2.1. (*existence et l'unicité*) Le problème $(\tilde{P})$ a une solution unique $\tilde{u} \in V(\tilde{\Omega})$.

Démonstration. En appliquant le théorème de Lax-Milgram, le problème $(\tilde{P})$ a une unique solution faible $\tilde{u} \in V(\tilde{\Omega})$ telle que :

$$a(\tilde{u}, v) = l(v), \quad \forall v \in V(\tilde{\Omega}).$$

□

3.3 Modèle fictif unifié avec les conditions de sauts immergées sur Σ

Pour $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^d$, $\mathbf{g}$ et $\mathbf{h}$ sont donnés dans $H^{-1/2}(\Sigma)^d$, on considère le problème d'élasticité linéaire pour le vecteur de déplacement a valeurs réelles $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ défini dans Ω et dont les conditions de transmission immergées sur Σ qui relient le saut des traces du vecteur de la contrainte normale $\sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = (\lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} + 2\mu \varepsilon(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{n}$ et le saut des traces de la solution $\mathbf{u}$ à travers l'interface Σ :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nabla \cdot \sigma(\mathbf{u}) = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega = \tilde{\Omega} \cup \Omega_e, \quad (4) \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \tilde{\Gamma} \cup \Gamma_e, \quad (5) \\ \llbracket \sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \rrbracket_\Sigma = \mathbf{M}\bar{\mathbf{u}}|_\Sigma - \mathbf{h} & \text{sur } \Sigma, \quad (6) \\ \overline{\sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}}|_\Sigma = \mathbf{S}[\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_\Sigma + \mathbf{g} & \text{sur } \Sigma, \quad (7) \end{array} \right. \quad (\text{B})$$

où les coefficients de Lamé μ et λ et les matrices de transfert $\mathbf{S}$ et $\mathbf{M}$ dans les équations algébriques (6-7) sur Σ sont des fonctions mesurables et bornées vérifiant les hypothèses d'ellipticité

$$(A1). \quad \mu, \lambda \in L^\infty(\Omega), \exists \mu_-, \lambda_- > 0, \mu > \mu_-, \lambda > \lambda_- \text{ p.p. dans } \Omega,$$

$$(A2). \quad \mathbf{M}, \mathbf{S} \in L^\infty(\Sigma)^{d \times d}, \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \xi^t \cdot \mathbf{M}(x) \cdot \xi > 0, \xi^t \cdot \mathbf{S}(x) \cdot \xi > 0 \text{ p.p. dans } \Omega.$$

et pour une fonction $\psi \in H^1(\tilde{\Omega} \cup \Omega_e)$, on a défini ψ^- et ψ^+ les traces de $\psi|_{\tilde{\Omega}}$ et $\psi|_{\Omega_e}$ sur chaque côté de Σ respectivement, $\bar{\psi}|_\Sigma = \frac{1}{2}(\psi^- + \psi^+)$ la moyenne arithmétique des traces de ψ , et $\llbracket \psi \rrbracket_\Sigma = (\psi^+ - \psi^-)$ est le saut des traces de ψ sur Σ orienté par $\mathbf{n}$.

Par ailleurs, nous choisissons μ et λ comme des prolongements dans L^∞ de $\tilde{\mu}$ et $\tilde{\lambda}$ respectivement dans Ω et f comme un prolongement dans L^2 de $\tilde{f}$ dans Ω tels que

$$\mu = \begin{cases} \tilde{\mu} & \text{dans } \tilde{\Omega}, \\ \mu_e & \text{dans } \Omega_e, \end{cases} \quad \lambda = \begin{cases} \tilde{\lambda} & \text{dans } \tilde{\Omega}, \\ \lambda_e & \text{dans } \Omega_e, \end{cases} \quad f = \begin{cases} \tilde{f} & \text{dans } \tilde{\Omega}, \\ f_e & \text{dans } \Omega_e, \end{cases}$$

pour recouvrer le problème original (A) dans $\tilde{\Omega}$.

Remarque 3.3.1. *La condition au limite (B5) sur Γ_e est choisie pour assurer la solvabilité du problème de domaine fictif (B).*

Les données μ_e , λ_e et f_e dans Ω_e , $\mathbf{g}$, $\mathbf{h}$, $\mathbf{M}$ et $\mathbf{S}$ sur Σ seront définis encore afin d'obtenir : $\tilde{u} = u|_{\tilde{\Omega}}$, ou au moins $u_\eta|_{\tilde{\Omega}} \approx \tilde{u}$.

3.3.1 Formulation variationnelle du problème de domaine fictif

Nous allons maintenant définir l'espace de Hilbert suivant :

$$W(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega)^d, v|_{\tilde{\Omega}} \in H^1(\tilde{\Omega})^d \text{ et } v|_{\Omega_e} \in H^1(\Omega_e)^d; v = 0 \text{ sur } \tilde{\Gamma} \cup \Gamma_e \right\},$$

muni du produit scalaire usuel et la norme associée dans $H^1(\Omega)^d$.

Pour $u \in W$ satisfaisant (4) et $f \in L^2(\Omega)^d$ telle que $\nabla \cdot \sigma(u) \in L^2(\Omega)^d$, on peut définir $\sigma(u) \cdot \mathbf{n}|_{\Sigma}^{\pm}$ dans $H^{-1/2}(\Sigma)^d$. Ensuite, nous allons prouver, en utilisant le théorème de Lax-Milgram, que le problème (4) – (7) est bien posé dans Ω et qui admet la formulation variationnelle ci-dessous :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in W \text{ telle que :} \\ a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in W, \end{cases} \quad (8)$$

où la forme bilinéaire

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma(u) : \nabla v dx + \int_{\Sigma} \mathbf{M} \bar{u}|_{\Sigma} \bar{v}|_{\Sigma} ds + \int_{\Sigma} \mathbf{S} \llbracket u \rrbracket_{\Sigma} \llbracket v \rrbracket_{\Sigma} ds$$

et la forme linéaire

$$l(v) = \int_{\Omega} f v dx + \langle \mathbf{h}, \bar{v}|_{\Sigma} \rangle_{-\frac{1}{2}, \Sigma} + \langle \mathbf{g}, \llbracket v \rrbracket_{\Sigma} \rangle_{-\frac{1}{2}, \Sigma}.$$

Le théorème suivant montre que le problème de transmission imparfait est admet une solution faible dans Ω .

THÉORÈME 3.3.1. (Solvabilité globale du modèle de domaine fictif avec J.E.B.C.)
Si les hypothèses d'ellipticité (A1) et (A2) sont satisfaits, le problème (4)-(7) avec $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^d$,

et $\mathbf{g}, \mathbf{h} \in L^2(\Sigma)^d$ a une unique solution faible $u \in W(\Omega)$ satisfaisant (8) pour tout $v \in W(\Omega)$, telle que $\exists \alpha_0(\Omega, \Omega_e, \mu, \|\mathbf{S}\|, \|\mathbf{M}\|) > 0$,

$$\|u\|_W \leq \frac{1}{\alpha_0} (\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} + c(\Omega, \Omega_e) (\|\mathbf{g}\|_{-\frac{1}{2}, \Sigma} + \|\mathbf{h}\|_{-\frac{1}{2}, \Sigma})).$$

Démonstration. La preuve est similaire à celle du théorème (11) dans [5]. Nous commençons par dériver la forme faible du problème (4-7). Avec (4-5) et en utilisant la formule de Green-Stokes, ($\langle \cdot, \cdot \rangle_{-\frac{1}{2}, \Sigma}$ étant la dualité entre $H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)^d$ et $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)^d$), nous obtenons respectivement dans $\tilde{\Omega}$ et Ω_e :

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Omega}} \sigma(u) : \nabla v dx - \langle \sigma(u)^- \cdot \mathbf{n}, v^- \rangle_{-\frac{1}{2}, \Sigma} &= \int_{\tilde{\Omega}} f v dx, \quad \forall v \in W, v|_{\Omega_e} = 0, \\ \int_{\Omega_e} \sigma(u) : \nabla v dx + \langle \sigma(u)^+ \cdot \mathbf{n}, v^+ \rangle_{-\frac{1}{2}, \Sigma} &= \int_{\Omega_e} f v dx, \quad \forall v \in W, v|_{\tilde{\Omega}} = 0, \end{aligned}$$

Additionnant maintenant les deux précédentes équations, on obtient :

$$\int_{\tilde{\Omega} \cup \Omega_e} \sigma(u) : \nabla v dx + \langle \sigma(u)^+ \cdot \mathbf{n}, v^+ \rangle_{-\frac{1}{2}, \Sigma} - \langle \sigma(u)^- \cdot \mathbf{n}, v^- \rangle_{-\frac{1}{2}, \Sigma} = \int_{\tilde{\Omega} \cup \Omega_e} f v dx, \quad \forall v \in W.$$

puis, remarquant que, pour toute forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-\frac{1}{2}, \Sigma}$ définie sur Σ nous avons l'égalité clé suivante :

$$\langle u^+, v^+ \rangle_{\Sigma} - \langle u^-, v^- \rangle_{\Sigma} = \langle \llbracket u \rrbracket_{\Sigma}, \bar{v}_{\Sigma} \rangle_{\Sigma} + \langle \bar{u}_{\Sigma}, \llbracket v \rrbracket_{\Sigma} \rangle_{\Sigma}, \quad \forall u, v$$

on obtient la forme faible suivante dans Ω :

$$\int_{\tilde{\Omega} \cup \Omega_e} \sigma(u) : \nabla v dx + \langle \llbracket \sigma(u) \cdot \mathbf{n} \rrbracket_{\Sigma}, \bar{v}_{\Sigma} \rangle_{-\frac{1}{2}, \Sigma} + \langle \overline{\sigma(u) \cdot \mathbf{n}_{\Sigma}}, \llbracket v \rrbracket_{\Sigma} \rangle_{-\frac{1}{2}, \Sigma} = \int_{\tilde{\Omega} \cup \Omega_e} f v dx, \quad \forall v \in W.$$

Puis, en utilisant les conditions de transmission de saut (6-7) sur Σ , nous obtenons la formulation faible suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in W \text{ telle que } \forall v \in W \\ \int_{\tilde{\Omega} \cup \Omega_e} \sigma(u) : \nabla v dx + \int_{\Sigma} \mathbf{M} \bar{u}_{\Sigma} \cdot \bar{v}_{\Sigma} + \int_{\Sigma} \mathbf{S} \llbracket u \rrbracket_{\Sigma} \cdot \llbracket v \rrbracket_{\Sigma} = \int_{\tilde{\Omega} \cup \Omega_e} f v dx + \langle \mathbf{h}, \bar{v}_{\Sigma} \rangle_{-\frac{1}{2}, \Sigma} + \langle \mathbf{g}, \llbracket v \rrbracket_{\Sigma} \rangle_{-\frac{1}{2}, \Sigma} \end{array} \right. \quad (\text{E})$$

Avec les hypothèses d'ellipticité (A1) et (A2), il est maintenant facile de vérifier en utilisant l'inégalité de Korn, dans $\tilde{\Omega}$ et Ω_e , et les lemmes standards de trace [36] que la partie gauche de (E) est une forme bilinéaire continue et coercive dans $W \times W$, tandis que la partie droite est une forme linéaire continue dans W . Donc, par le théorème de Lax-Milgram, nous avons l'existence et l'unicité de la solution faible u dans W .

□

3.3.2 Conditions aux limites de Fourier ou de Neumann immergées sur Σ

Soient $\phi_{\Sigma}^{-} \equiv -\sigma(\mathbf{u})_{\Sigma}^{-} \cdot \mathbf{n}$ et $\phi_{\Sigma}^{+} \equiv -\sigma(\mathbf{u})_{\Sigma}^{+} \cdot \mathbf{n}$ les traces de la contrainte normale sur chaque côté de Σ . Dans le modèle de domaine fictif précédent, les quatre inconnues ϕ_{Σ}^{-} , ϕ_{Σ}^{+} , $\mathbf{u}^{-}$ et $\mathbf{u}^{+}$ sont reliées par les conditions de transmission algébriques (6) et (7) sur Σ , ainsi, en éliminant l'une des deux quantités extérieures, soit ϕ_{Σ}^{+} ou $\mathbf{u}^{+}$, donc ϕ_{Σ}^{-} peut être s'écrire de la manière suivante :

$$\phi_{\Sigma}^{-} = (\mathbf{S} + \frac{1}{4}\mathbf{M})\mathbf{u}_{\Sigma}^{-} - (\mathbf{S} - \frac{1}{4}\mathbf{M})\mathbf{u}_{\Sigma}^{+} + \mathbf{g} - \frac{\mathbf{h}}{2} \quad \text{sur } \Sigma. \quad (9)$$

Puis, avec le choix particulier $\mathbf{S} = \frac{1}{4}\mathbf{M}$ l'équation (9) donne la condition aux limites de Fourier suivante, indépendamment de $\mathbf{u}_{\Sigma}^{+}$ ou ϕ_{Σ}^{+} :

$$\phi_{\Sigma}^{-} = -\sigma(\mathbf{u})_{\Sigma}^{-} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{2}\mathbf{M}\mathbf{u}_{\Sigma}^{-} + \mathbf{g} - \frac{\mathbf{h}}{2} \quad \text{sur } \Sigma, \quad (10)$$

lorsque la condition de Fourier ou de Neumann dans (3) est souhaitée pour le problème initial (A) dans $\tilde{\Omega}$, la condition aux limites immergée suivante sur Σ doit être satisfaite par la solution du problème de domaine fictif dans Ω :

$$\phi_{\Sigma}^{-} = -\sigma(\mathbf{u})_{\Sigma}^{-} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{A}\mathbf{u}_{\Sigma}^{-} - \mathbf{q} \quad \text{sur } \Sigma. \quad (11)$$

Cette formulation nous permet d'en déduire les coefficients de transmission $\mathbf{S}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{g}$ et $\mathbf{h}$ sur Σ et les données μ , λ et $\mathbf{f}$ dans Ω_e , qui sont présentés dans le tableau ci-dessous 3.1.

Remarque 3.3.2. *Le choix particulier $\mathbf{S} = \frac{1}{4}\mathbf{M}$ est l'une des variantes intéressantes sans contrôle dans le domaine extérieur Ω_e , dans ce cas le problème de domaine fictif extérieur n'a aucune influence sur la solution obtenue dans le domaine physique.*

Remarque 3.3.3. *Lorsque $\mathbf{M} = 0$, $\mathbf{g} = \mathbf{h} = 0$ et $\mathbf{S} = \frac{1}{\eta}\mathbf{I} \rightarrow \infty$, le problème de transmission parfait est récupéré avec $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^3$. voir le théorème (3.2) dans [6] et la preuve écrite dans [9] dans le cas scalaire.*

TABLE 3.1 – résumé des données dans Ω_e et sur Σ .

J.E.B.C. Méthode	paramètres dans Ω_e	paramètres sur Σ
Fourier (F)	$\lambda _{\Omega_e} = \mu _{\Omega_e} = 1, f _{\Omega_e} = 0$	$\mathbf{M} = 4\mathbf{S} = 2\mathbf{A}, \frac{\mathbf{h}}{2} - \mathbf{g} = \mathbf{q}$
Neumann, sans contrôle extérieur	$\lambda _{\Omega_e} = \mu _{\Omega_e} = 1, f _{\Omega_e} = 0$	$\mathbf{M} = \mathbf{S} = 0, \frac{\mathbf{h}}{2} - \mathbf{g} = \mathbf{q}$
Dirichlet (D1)	$\lambda _{\Omega_e} = \mu _{\Omega_e} = 1, f _{\Omega_e} = 0$	$\mathbf{M} = 4\mathbf{S} = \frac{2}{\eta}, \frac{\mathbf{h}}{2} - \mathbf{g} = \frac{1}{\eta}u_D$
Dirichlet (D2)	$\lambda _{\Omega_e} = \mu _{\Omega_e} = \frac{1}{\eta}, f _{\Omega_e} = \frac{1}{\eta}u_e$	$\mathbf{S} = \frac{1}{\eta}, \mathbf{M} = \mathbf{g} = \mathbf{h} = \mathbf{0}$

D'autres variantes sont proposées dans [7], elles nécessitent soit $\mathbf{u}_\Sigma^+$ ou ψ_Σ^+ d'être contrôlé par la méthode de pénalisation de type L^2 ou H^1 effectuée avec les paramètres dans Ω_e pour le problème de convection-diffusion.

La condition de Neumann est obtenue comme un cas particulier où $\mathbf{A} = 0$.

THÉORÈME 3.3.2. *(Consistance de la méthode J.E.B.C. de Fourier (F)). Si les hypothèses usuels d'ellipticité sont satisfaits, le problème (4)-(7) avec $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^d$ et $\mathbf{g}, \mathbf{h} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)^d$ pour la méthode J.E.B.C. de Fourier (F) (voir le tableau 3.1), a une unique solution faible $u \in W$ telle que : $u|_{\tilde{\Omega}} = \tilde{u}$ p.p. dans $\tilde{\Omega}$, où $\tilde{u}$ est la solution faible du problème original de Fourier (1)-(3) dans $\tilde{\Omega}$.*

Démonstration. En définissant la forme bilinéaire $a(.,.)$ et la forme linéaire $l(.)$:

$$a(\tilde{u}, v) = \int_{\tilde{\Omega}} \sigma(\tilde{u}) \cdot \nabla v dx + \int_{\Sigma} \mathbf{A} \tilde{u}|_{\Sigma} v|_{\Sigma} ds \quad \text{et} \quad l(v) = \int_{\tilde{\Omega}} f v dx + \int_{\Sigma} \mathbf{q} v ds,$$

et en utilisant le théorème de Lax-Milgram, le problème de Fourier (1)-(3) dans $\tilde{\Omega}$ avec les hypothèses usuels d'ellipticité a une unique solution faible $\tilde{u} \in H_{0\Gamma}^1(\tilde{\Omega})^d$ telle que :

$$a(\tilde{u}, v) = l(v), \quad \forall v \in H_{0\Gamma}^1(\tilde{\Omega})^d.$$

En outre, la formulation faible du problème de domaine fictif (4) - (7) dans Ω s'écrit, de manière équivalente à (8) :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma(u) \cdot \nabla v dx + \langle \sigma(u)_{\Sigma}^{-} \cdot \mathbf{n}, v^{-} \rangle_{-\frac{1}{2}, \Sigma} - \langle \sigma(u)_{\Sigma}^{+} \cdot \mathbf{n}, v^{+} \rangle_{-\frac{1}{2}, \Sigma} = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in W.$$

En particulier, pour une fonction de test $v \in W$ telle que $v|_{\tilde{\Omega}} \in H_{0\Gamma}^1(\tilde{\Omega})^d$ et $v|_{\Omega_e} = 0$, nous avons :

$$\int_{\tilde{\Omega}} \sigma(u) \cdot \nabla v dx + \langle \sigma(u)_{\Sigma}^{-} \cdot \mathbf{n}, v^{-} \rangle_{-\frac{1}{2}, \Sigma} = \int_{\tilde{\Omega}} f v dx, \quad \forall v \in W, \quad v|_{\Omega_e} = 0.$$

Pour la variante (F) vérifiant (10) et par conséquent (11) avec les paramètres donnés dans le tableau 3.1, la solution de domaine fictif u satisfait :

$$a(u, v) = l(v) = a(\tilde{u}, v), \quad \forall v \in W, \quad v|_{\Omega_e} = 0.$$

Donc, nous obtenons $a(u|_{\tilde{\Omega}} - \tilde{u}, v) = 0$ pour tous $v \in H_{0\Gamma}^1(\tilde{\Omega})^d$. Il donne $u|_{\tilde{\Omega}} = \tilde{u}$ p.p. dans $\tilde{\Omega}$ qui s'achève la preuve. □

3.3.3 Conditions aux limites immergées de Dirichlet sur Σ

Les conditions aux limites de Dirichlet sont traitées en pénalisant la condition au limite de Fourier précédente. Donc, lorsque la condition de Dirichlet $u_{\Sigma}^{-} = \mathbf{u}_D$ est d'être traitée, la condition de Fourier dans l'équation (9) ou (10) peut être pénalisée par une pénalité de surface sur Σ avec $\mathbf{M} = \frac{2}{\eta} \mathbf{I} \rightarrow +\infty$ et $\frac{\mathbf{h}}{2} - \mathbf{g} = \frac{1}{\eta} \mathbf{u}_D$ quand $\eta \rightarrow 0$, où η est un paramètre de pénalisation. Ainsi, la précédente variante de Fourier (F) peut alors être pénalisée comme ci-dessus, voir (D1) dans le tableau (3.1). La seconde variante consiste à utiliser une méthode de pénalisation de type L^2 ou H^1 dans le domaine extérieur Ω_e telle que

$\lim_{\eta \rightarrow 0} \mathbf{u}_{\eta\Sigma}^{+} = \mathbf{u}_D$ pour le modèle avec $\mathbf{S} = \frac{1}{\eta} \mathbf{I} \rightarrow +\infty$, $\mathbf{M} = 0$, $\mathbf{h} = 0$ et donc $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{\Sigma} \rightarrow 0$, $\llbracket \phi \cdot \mathbf{n} \rrbracket_{\Sigma} = 0$, comme proposé dans [7]. Dans ce cas, nous considérons un prolongement $\mathbf{u}_e \in H^1(\Omega_e)^3$ de $\mathbf{u}_D$ sur Ω_e telle que $\gamma_0(\mathbf{u}_e) \equiv \mathbf{u}_e|_{\Sigma} = \mathbf{u}_D$, voir (D2) dans le tableau 3.1. La variante (D1) conduit à aucun saut de solution $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{\Sigma} = 0$ indépendamment de $\mathbf{M}$, si on pose

$\mathbf{S} = \frac{1}{\eta} \mathbf{I}$ et $\mathbf{g} = 0$, le modèle peut être utilisé par exemple avec les paramètres $\mathbf{M} = \mathbf{S} = \frac{1}{\eta} \mathbf{I}$, $\mathbf{h} = \frac{1}{\eta} \mathbf{u}_D$ et $\mathbf{g} = 0$.

Remarque 3.3.4. Dans la pratique, le paramètre de pénalisation η est choisi assez petit, typiquement d'ordre de 10^{-10} ou 10^{-12} telle que l'erreur due à la modélisation du problème physique dans le domaine fictif Ω reste inférieure à celle due à l'approximation numérique.

3.4 Discrétisation par volumes finis et l'algorithme de résolution

Pour l'approximation numérique du problème de domaine fictif $(\mathbf{B})$, nous utilisons la méthode des volumes finis, car elle est robuste, relativement bon marché, intrinsèquement conservatrice, et capable de gérer la discontinuité forte dans les opérateurs différentiels. Par souci de simplicité, nous nous limitons au cas à deux dimensions ($d = 2$) dans les coordonnées cartésiennes (x, y) lorsque le domaine Ω est rectangulaire pour un modèle de domaine fictif. La procédure de discrétisation est composée de deux parties : la discrétisation du domaine de calcul et la discrétisation des équations.

3.4.1 Discrétisation du domaine de calcul et notations

Supposons que le domaine fictif (de calcul) est le carré unité $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$ dans $\mathbb{R}^2$. Soit $\bar{\Omega} = [0, 1] \times [0, 1]$ et Δ_x et Δ_y des partitions de $[0, 1]$ données par

$$\Delta_x : 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{N_x} < x_{N_x+1} = 1, \quad N_x \in \mathbb{N}^*,$$

$$\Delta_y : 0 = y_0 < y_1 < \dots < y_{N_y} < y_{N_y+1} = 1, \quad N_y \in \mathbb{N}^*,$$

et soit (x_i, y_j) pour $i = 0, N_x + 1$ et $j = 0, N_y + 1$. La partition $\bar{\Omega}_h = \Delta_x \times \Delta_y$ de $\bar{\Omega}$ est considérée comme un maillage rectangulaire primal. On note par $\Omega_h = \bar{\Omega}_h \cap \Omega$, l'ensemble des points intérieurs de la grille, et par $\Gamma_h = \Omega_h \cap \Gamma$ les points de la grille de la frontière. Soit $(x_{i+\frac{1}{2}})_{i=0, N_x}$ et $(y_{j+\frac{1}{2}})_{j=0, N_y}$ tels que

$$x_{-\frac{1}{2}} = 0 < x_{i-\frac{1}{2}} < x_i < x_{i+\frac{1}{2}} < 1 = x_{N_x+\frac{3}{2}}, \quad i = 1, N_x,$$

$$y_{-\frac{1}{2}} = 0 < y_{j-\frac{1}{2}} < y_j < y_{j+\frac{1}{2}} < 1 = y_{N_y+\frac{3}{2}}, \quad j = 1, N_y.$$

Soit $T_h = (K_{i,j})_{i=0, N_x+1; j=0, N_y+1}$ le dual du maillage de volumes finis composé de vertex-centrés des volumes de contrôle et défini par les cellules compacts contenant les points nodaux (x_i, y_j) appelés les centres de cellules, même s'ils ne sont pas nécessairement les centres des cellules :

$$K_{i,j} = \left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right] \times \left[y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}} \right], \quad \text{pour } i = 0, N_x + 1, j = 0, N_y + 1.$$

Les faces des cellules, les parties de la frontière $\partial K_{i,j}$ qui sont soit parallèle à l'axe (ox) ou l'axe (oy) sont respectivement définis par

$$\gamma_{i,j+\frac{1}{2}} = K_{i,j} \cap K_{i,j+1}, \quad \text{et} \quad \gamma_{i+\frac{1}{2},j} = K_{i,j} \cap K_{i+1,j}.$$

$\mathfrak{S}_h$ est l'ensemble des faces γ de tous les volumes de contrôle K dans T_h , qui est :

$$\mathfrak{S}_h = \{ \gamma = K \cap K' \subset \partial K, \forall K, K' \in T_h \},$$

et $S_h(K)$ est l'ensemble des faces de chaque volume de contrôle K dans T_h , *i.e.* $\mathfrak{S}_h(K) = \{ \gamma \in \mathfrak{S}_h; \gamma \subset \partial K \}$.

La construction du maillage précédent est faite de telle manière que la discontinuité des coefficients de Lamé μ et λ se trouve sur les lignes de la grille du maillage de volumes finis T_h . Les côtés du maillage T_h ne sont pas en générale correspondre à l'interface immergée Σ , une interface approchée Σ_h est donc définie par les côtés des cellules du maillage, qui est une combinaison de lignes droites qui sont parallèles à l'axe (ox) ou l'axe (oy) . Cette interface sépare le domaine physique approché $\tilde{\Omega}_h$ du domaine extérieur approché $\Omega_{e,h}$ est construit de la façon suivante :

$$\Sigma_h = \bigcup_{(i,l) \in S^x(\Sigma), (m,j) \in S^y(\Sigma)} \gamma_{i,l+\frac{1}{2}} \cup \gamma_{m+\frac{1}{2},j},$$

où $S^x(\Sigma)$ et $S^y(\Sigma)$ sont les ensembles d'indices adéquats pour toutes les faces de cellules traversées par Σ et qui sont respectivement parallèles à l'axe (ox) et (oy) , et $S_h(\Sigma)$ est l'ensemble des faces traversées par Σ .

Nous avons défini les pas du maillage par

$$h_i^x = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}} > 0, h_i^{x-} = x_i - x_{i-\frac{1}{2}} > 0, h_i^{x+} = x_{i+\frac{1}{2}} - x_i > 0, \quad i = 1, N_x,$$

$$h_j^y = y_{j+\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{1}{2}} > 0, h_j^{y-} = y_j - y_{j-\frac{1}{2}} > 0, h_j^{y+} = y_{j+\frac{1}{2}} - y_j > 0, \quad j = 1, N_y,$$

$$h_{i+\frac{1}{2}}^x = x_{i+1} - x_i > 0, \quad i = 0, N_x, \quad \text{et} \quad h_{j+\frac{1}{2}}^y = y_{j+1} - y_j > 0, \quad j = 0, N_y,$$

et soit $h = \max \{ (h_i^x, \quad i = 1, N_x), (h_j^y, \quad j = 1, N_y) \} > 0$ le paramètre de discrétisation du maillage T_h .

Un choix particulier est que T_h est un maillage uniforme, pour lequel (x_i, y_j) est aussi le centre du volume de contrôle $K_{i,j}$.

On désigne par $m(K_{i,j}) = h_i^x h_j^y$ la mesure de Lebesgue d'une cellule $K_{i,j}$ et plus généralement par $m(S)$ la mesure de tout ensemble S . Nous avons mis $\lambda_{i,j} = \lambda(x_i, y_j)$, $\mu_{i,j} = \mu(x_i, y_j)$, et $f_{i,j} = \frac{1}{m(K_{i,j})} \int_{K_{i,j}} f(x, y) dx dy$ la valeur moyenne de f sur $K_{i,j}$ pour f dans $L^2(\Omega)$. Le maillage est construit de telle manière que les discontinuités des coefficients de Lamé coïncident avec les interfaces de T_h . Un autre choix est : $\lambda_{i,j} = \frac{1}{m(K_{i,j})} \int_{K_{i,j}} \lambda(x, y) dx dy$, $\mu_{i,j} = \frac{1}{m(K_{i,j})} \int_{K_{i,j}} \mu(x, y) dx dy$. On a également mis sur Σ , à savoir pour $(i, l) \in S^x(\Sigma)$, $(k, j) \in S^y(\Sigma)$, $\lambda_{i,l+\frac{1}{2}} = \lambda(x_i, y_{l+\frac{1}{2}})$, $\lambda_{k+\frac{1}{2},j} = \lambda(x_{k+\frac{1}{2}}, y_j)$, $\mu_{i,l+\frac{1}{2}} = \mu(x_i, y_{l+\frac{1}{2}})$, $\mu_{k+\frac{1}{2},j} = \mu(x_{k+\frac{1}{2}}, y_j)$, et pour g dans $L^2(\Sigma)$

$$\begin{aligned} g_{i,l+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{m(\gamma_{i,l+\frac{1}{2}})} \int_{\gamma_{i,l+\frac{1}{2}}} g(x, y_{l+\frac{1}{2}}) dx, \quad \text{pour } (i, l) \in S^x(\Sigma), \\ g_{k+\frac{1}{2},j} &= \frac{1}{m(\gamma_{k+\frac{1}{2},j})} \int_{\gamma_{k+\frac{1}{2},j}} g(x_{k+\frac{1}{2}}, y) dy, \quad \text{pour } (k, j) \in S^y(\Sigma). \end{aligned}$$

L'ensemble des inconnues discrètes aux centres des cellules (x_i, y_j) , $\mathbf{u}_{i,j} = (u_{i,j}, v_{i,j})_{i=0, N_x+1; j=0, N_y+1}$, où $\mathbf{u}_{i,j}$ est l'approximation de la solution exacte aux points nodaux $\mathbf{u}_{i,j} = \mathbf{u}(x_i, y_j)$, notée par $\mathbf{u}_h$, appelée la solution discrète.

Nous désignons par $(.,.)$ le produit scalaire usuel de la fonction grille dans $\mathbb{R}^{N_x \times N_y}$ et la norme associée euclidienne par $|\cdot|$. Nous définissons le produit scalaire discret suivant et les normes des fonctions grille données v_h et w_h définies dans $\bar{\Omega}_h$, à savoir la discrète norme de L^2 et le produit scalaire associé

$$(v_h, w_h)_{0,h} = \sum_{i,j=1}^{N_x, N_y} v_{i,j} w_{i,j} h_i^x h_j^y, \quad \|v_h\|_{0,h}^2 = \sum_{i,j=1}^{N_x, N_y} |v_{i,j}|^2 h_i^x h_j^y,$$

et la norme discrète de H_0^1 ou la norme discrète de W .

$$\|v_h\|_{1,h}^2 = \sum_{i,j=1}^{N_x, N_y} \frac{|v_{i+1,j} - v_{i,j}|^2}{h_{i+\frac{1}{2}}^x} h_j^y + \sum_{i,j=1}^{N_x, N_y} \frac{|v_{i,j+1} - v_{i,j}|^2}{h_{j+\frac{1}{2}}^y} h_i^x$$

et pour $\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h \in L^2(\Omega)^d$, $(\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h)_{0,h} = \sum_{i=1}^{i=d} (v_h^i, w_h^i)_{0,h}$, $\|\mathbf{v}_h\|_{1,h}^2 = \sum_{i=1}^{i=d} \|v_h^i\|_{1,h}^2$.

3.4.2 Discrétisation des équations

La discrétisation par les volumes finis est basée sur la forme intégrale de l'équation sur le volume de contrôle $K_{i,j}$, l'équation **B4** est intégrée sur chaque volume fini $K_{i,j}$ en utilisant le théorème de Gauss pour le terme de divergence, il fait apparaître les flux sur les bords de chaque cellule qui sont approchés par des différences finies et des formules d'interpolation. Les intégrales sur les arrêtes de volumes (côtés des volumes finis en 2D ou de surface en 3D) sont approchées par des méthodes quadratiques convenables.

Le système des équations est

$$-\nabla \cdot \sigma_*(\mathbf{u}) = f_*, \quad * = 1, 2 \quad (12)$$

où $\mathbf{u} = (u, v)$ et

$$\sigma(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \sigma_1(\mathbf{u}) \\ \sigma_2(\mathbf{u}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^x(\mathbf{u}) & \sigma_1^y(\mathbf{u}) \\ \sigma_2^x(\mathbf{u}) & \sigma_2^y(\mathbf{u}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} & \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Le schéma de volumes finis est trouvé en intégrant l'équation 12 sur chaque volume de contrôle $K_{i,j}$, ce qui donne pour $i = 1, N_x$, et $j = 1, N_y$

$$\int_{K_{i,j}} -\nabla \cdot \sigma_*(\mathbf{u}) dx dy = \int_{K_{i,j}} f_* dx dy, \quad \text{pour } * = 1, 2, \quad (14)$$

avec la formule de Stokes et celle de la valeur moyenne de la fonction sur le volume de contrôle $K_{i,j}$ on a :

$$-\int_{\partial K_{i,j}} \sigma_*(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}_K d\gamma = m(K_{i,j}) f_*(x_i, y_j)$$

où $\mathbf{n}_K$ est la normale sur la frontière ∂K orienté vers l'extérieur de K ,

$$\sum_{\gamma \in \partial K_{i,j}} - \int_{\gamma} \sigma_*(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}_K d\gamma = \sum_{\gamma \in \partial K_{i,j}} F_{K,\gamma}^*(\mathbf{u}) = \sum_{\gamma \in \partial K_{i,j}} (F_{K,\gamma}^*(u) + F_{K,\gamma}^*(v)) = m(K_{i,j}) f_{*,i,j} \quad (16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \sigma_*^y(\mathbf{u}(x, y_{j-\frac{1}{2}})) dx - \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \sigma_*^x(\mathbf{u}(x_{i+\frac{1}{2}}, y)) dy \\ - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \sigma_*^y(\mathbf{u}(x, y_{j+\frac{1}{2}})) dx + \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \sigma_*^x(\mathbf{u}(x_{i-\frac{1}{2}}, y)) dy \end{array} \right. = m(K_{i,j}) f_{*,i,j}, \quad (17)$$

qui peut être s'écrit simplement en introduisant le flux exact sur les parties de la frontière du volume de contrôle, qui sont parallèles à l'axe (ox) où l'axe (oy), et le terme volumique sur $K_{i,j}$, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} -\bar{F}_{i,j-\frac{1}{2}}^*(\mathbf{u}) + \bar{F}_{i+\frac{1}{2},j}^*(\mathbf{u}) + \bar{F}_{i,j+\frac{1}{2}}^*(\mathbf{u}) - \bar{F}_{i-\frac{1}{2},j}^*(\mathbf{u}) = h_x h_y f_{*,i,j} \\ \forall (i,j) \in \{1, \dots, N_x\} \times \{1, \dots, N_y\}, * \in \{1, 2\} \end{array} \right. \quad (18)$$

avec la correspondance évidente entre les différents termes dans les deux équations précédentes. En se rapprochant chaque terme sur le côté gauche de (18) d'une manière approximative, le schéma numérique peut s'écrire comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} -F_{i,j-\frac{1}{2}}^*(\mathbf{u}) + F_{i+\frac{1}{2},j}^*(\mathbf{u}) + F_{i,j+\frac{1}{2}}^*(\mathbf{u}) - F_{i-\frac{1}{2},j}^*(\mathbf{u}) = h_x h_y f_{*,i,j} \\ \forall (i,j) \in \{1, \dots, N_x\} \times \{1, \dots, N_y\}, * \in \{1, 2\} \end{array} \right. \quad (19)$$

où les quantités approximatives sont calculées en utilisant un stencil à 5 points et 9 points par rapport à la solution discrète.

Calcul des flux

a. Flux des volumes qui n'ont pas des côtés communs avec Σ_h (en dehors de Σ_h)

Pour $*$ = 1, nous avons

$$\begin{aligned}
F_{i+\frac{1}{2},j}^1(\mathbf{u}) &= - \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \sigma_1^x(\mathbf{u}(x_{i+\frac{1}{2}}, y)) dy = - \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} (\lambda \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x})(x_{i+\frac{1}{2}}, y) dy \\
&= -(\lambda + 2\mu)_{i+\frac{1}{2},j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_{i+\frac{1}{2}}^x} h_j^y - \lambda_{i+\frac{1}{2},j} \frac{v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - v_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{h_j^y} h_j^y,
\end{aligned}$$

il faut approcher la quantité $v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - v_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}$, qui apparaît dans le flux $F_{i+\frac{1}{2},j}^1$, en utilisant ici, la distribution spatiale linéaire suivante

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}_{i,j}) + \nabla \Phi(\mathbf{x}_{i,j}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{i,j}), \quad (20)$$

où Φ désigne la variable u ou v , $\mathbf{x}_{i,j}$ est le centre du volume de contrôle $K_{i,j}$. Le vecteur inconnu $\nabla \Phi(\mathbf{x}_{i,j})$ est calculé en appliquant la méthode des moindres carrés à l'équation 20, (voir [23, 11, 27]).

La formule 20 est utilisée pour calculer les valeurs de Φ sur les faces des cellules, cette dernière, conduisant à une formule symétrique de second ordre

$$\Phi_\gamma = \frac{1}{2}(\Phi(\mathbf{x}_{i,j}) + \Phi(\mathbf{x}_\gamma)) + \frac{1}{2}[\nabla \Phi(\mathbf{x}_{i,j}) \cdot (\mathbf{x}_\gamma - \mathbf{x}_{i,j}) + \nabla \Phi(\mathbf{x}_{i,j+1}) \cdot (\mathbf{x}_\gamma - \mathbf{x}_{i,j+1})] \quad (21)$$

où $\mathbf{x}_\gamma$ est la position du centre de la face de la cellule $K_{i,j}$.

Remarque 3.4.1. 1. La formule 21 est utilisée pour évaluer la quantité $v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$, cette formule conduit aux mêmes résultats que nous les avons obtenu par la formule d'interpolation suivante 22

$$v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{h_{i+\frac{1}{2}}^x h_{j+\frac{1}{2}}^y} (h_{i+1}^{x-} h_{j+1}^{y-} v_{i,j} + h_{i+1}^{x-} h_j^{y+} v_{i,j+1} + h_i^{x+} h_j^{y+} v_{i+1,j+1} + h_i^{x+} h_{j+1}^{y-} v_{i+1,j}), \quad (22)$$

2. Dans le cas où $h_i^{x+} = h_{i+1}^{x-} = \frac{1}{2}h_{i+\frac{1}{2}}^x$, $h_j^{y+} = h_{j+1}^{y-} = \frac{1}{2}h_{j+\frac{1}{2}}^y$, l'équation 22 est donnée par l'expression simple ci-dessous

$$v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} [v_{i,j} + v_{i+1,j} + v_{i+1,j+1} + v_{i,j+1}],$$

enfin, nous avons

$$F_{i+\frac{1}{2},j}^1(\mathbf{u}) = -(\lambda + 2\mu)_{i+\frac{1}{2},j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_{i+\frac{1}{2}}^x} h_j^y - \frac{1}{4} \lambda_{i+\frac{1}{2},j} [v_{i+1,j+1} + v_{i,j+1} - v_{i,j-1} - v_{i+1,j-1}].$$

Par les mêmes calculs, on aura

$$\begin{aligned} F_{i,j+\frac{1}{2}}^1(\mathbf{u}) &= - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \sigma_1^y(\mathbf{u}(x, y_{j+\frac{1}{2}})) dx = - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) (x, y_{j+\frac{1}{2}}) dx \\ &= -\mu_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_{j+\frac{1}{2}}^y} h_i^x - \frac{1}{4} \mu_{i,j+\frac{1}{2}} [v_{i+1,j+1} + v_{i+1,j} - v_{i-1,j+1} - v_{i-1,j}]. \end{aligned}$$

Aussi, pour $*$ = 2, on a :

$$\begin{aligned} F_{i+\frac{1}{2},j}^2(\mathbf{u}) &= - \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \sigma_2^x(\mathbf{u}(x_{i+\frac{1}{2}}, y)) dy = - \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) (x_{i+\frac{1}{2}}, y) dy \\ &= -\mu_{i+\frac{1}{2},j} \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{h_{i+\frac{1}{2}}^x} h_j^y - \frac{1}{4} \mu_{i+\frac{1}{2},j} [u_{i+1,j+1} + u_{i,j+1} - u_{i,j-1} - u_{i+1,j-1}]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{i,j+\frac{1}{2}}^2(\mathbf{u}) &= - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \sigma_2^y(\mathbf{u}(x, y_{j+\frac{1}{2}})) dx = - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} (\lambda \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}) (x, y_{j+\frac{1}{2}}) dx \\ &= -(\lambda + 2\mu)_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{h_{j+\frac{1}{2}}^y} h_i^x - \frac{1}{4} \lambda_{i,j+\frac{1}{2}} [u_{i+1,j+1} + u_{i+1,j} - u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j}]. \end{aligned}$$

Par souci de simplicité, nous utilisons la décomposition suivante du flux total

$$\begin{cases} F^1(\mathbf{u}) = F^1(u) + F^1(v) \\ F^2(\mathbf{u}) = F^2(u) + F^2(v) \end{cases}$$

en additionnant les flux partiels, on obtient l'expressions du flux total dans chaque volume de contrôle $K_{i,j}$ donnée par

$$\begin{aligned}
F^1(u) &= \left\{ \frac{h_i^x}{h_{j+\frac{1}{2}}^y} (\mu_{i,j-\frac{1}{2}} + \mu_{i,j+\frac{1}{2}}) + \frac{h_j^y}{h_{i+\frac{1}{2}}^x} ((\lambda + 2\mu)_{i+\frac{1}{2},j} + (\lambda + 2\mu)_{i-\frac{1}{2},j}) \right\} u_{i,j} \\
&\quad - \frac{h_j^y}{h_{i+\frac{1}{2}}^x} (\lambda + 2\mu)_{i+\frac{1}{2},j} u_{i+1,j} - \frac{h_j^y}{h_{i+\frac{1}{2}}^x} (\lambda + 2\mu)_{i-\frac{1}{2},j} u_{i-1,j} \\
&\quad - \frac{h_i^x}{h_{j+\frac{1}{2}}^y} \mu_{i,j-\frac{1}{2}} u_{i,j-1} - \frac{h_i^x}{h_{j+\frac{1}{2}}^y} \mu_{i,j-\frac{1}{2}} u_{i,j+1}, \\
F^1(v) &= \frac{1}{4} (\mu_{i,j-\frac{1}{2}} - \mu_{i,j+\frac{1}{2}}) v_{i+1,j} - (\mu_{i,j-\frac{1}{2}} - \mu_{i,j+\frac{1}{2}}) v_{i-1,j} + \frac{1}{4} (\mu_{i,j-\frac{1}{2}} + \lambda_{i+\frac{1}{2},j}) v_{i+1,j-1} \\
&\quad - \frac{1}{4} (\mu_{i,j-\frac{1}{2}} + \lambda_{i-\frac{1}{2},j}) v_{i-1,j-1} - \frac{1}{4} (\mu_{i,j+\frac{1}{2}} + \lambda_{i+\frac{1}{2},j}) v_{i+1,j+1} + \frac{1}{4} (\lambda_{i-\frac{1}{2},j} - \lambda_{i+\frac{1}{2},j}) v_{i,j+1} \\
&\quad + \frac{1}{4} (\lambda_{i+\frac{1}{2},j} - \lambda_{i-\frac{1}{2},j}) v_{i,j-1} + \frac{1}{4} (\mu_{i,j+\frac{1}{2}} + \lambda_{i-\frac{1}{2},j}) v_{i-1,j+1}.
\end{aligned}$$

b. Flux des volumes qu'ont des côtés communs avec Σ_h , (selon les équations de transmission algébriques B6 et B7)

Soit $\gamma_{l+\frac{1}{2},j} \in \Sigma_h$, Nous avons :

$$\sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \sigma_1^x(\mathbf{u}) & \sigma_1^y(\mathbf{u}) \\ \sigma_2^x(\mathbf{u}) & \sigma_2^y(\mathbf{u}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^x(\mathbf{u})n_x + \sigma_1^y(\mathbf{u})n_y \\ \sigma_2^x(\mathbf{u})n_x + \sigma_2^y(\mathbf{u})n_y \end{bmatrix}.$$

Maintenant, nous allons exprimer les conditions de transmission algébrique :

$$\begin{cases} \llbracket \sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \rrbracket_{\Sigma_h} = \mathbf{M} \bar{\mathbf{u}}|_{\Sigma_h} - \mathbf{h} \\ \overline{\sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}}|_{\Sigma_h} = \mathbf{S} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{\Sigma_h} + \mathbf{g} \end{cases},$$

avec $\gamma = \gamma_{l+\frac{1}{2},j}$, $\mathbf{n} = (1, 0)$ sur γ , on a :

$$\llbracket \sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \rrbracket_{\gamma_{l+\frac{1}{2},j}} = \mathbf{M} \bar{\mathbf{u}}|_{\gamma_{l+\frac{1}{2},j}} - \mathbf{h} \implies \begin{cases} \llbracket \sigma_1^x(\mathbf{u}) \rrbracket_{\gamma_{l+\frac{1}{2},j}} = m_{11} \bar{u}|_{\gamma_{l+\frac{1}{2},j}} + m_{12} \bar{v}|_{\gamma_{l+\frac{1}{2},j}} - h_1 \\ \llbracket \sigma_2^x(\mathbf{u}) \rrbracket_{\gamma_{l+\frac{1}{2},j}} = m_{12} \bar{u}|_{\gamma_{l+\frac{1}{2},j}} + m_{22} \bar{v}|_{\gamma_{l+\frac{1}{2},j}} - h_2 \end{cases}$$

et

$$\overline{\sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}}|_{\gamma_{l+\frac{1}{2},j}} = \mathbf{S} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{\gamma_{l+\frac{1}{2},j}} + \mathbf{g} \implies \begin{cases} \overline{\sigma_1^x(\mathbf{u})}|_{\gamma_{l+\frac{1}{2},j}} = s_{11} \llbracket u \rrbracket_{\gamma_{l+\frac{1}{2},j}} + s_{12} \llbracket v \rrbracket_{\gamma_{l+\frac{1}{2},j}} + g_1 \\ \overline{\sigma_2^x(\mathbf{u})}|_{\gamma_{l+\frac{1}{2},j}} = s_{12} \llbracket u \rrbracket_{\gamma_{l+\frac{1}{2},j}} + s_{22} \llbracket v \rrbracket_{\gamma_{l+\frac{1}{2},j}} + g_2 \end{cases}$$

$$\sigma(\mathbf{u})^{-} \cdot \mathbf{n}|_{\gamma_{l+\frac{1}{2},j}} = \begin{cases} -\sigma_1^x(\mathbf{u})_{\gamma_{l+\frac{1}{2},j}}^- &= (s_{11} + \frac{m_{11}}{4})u^-|_{\gamma_{l+\frac{1}{2},j}} - (s_{11} - \frac{m_{11}}{4})u^+|_{\gamma_{l+\frac{1}{2},j}} + (s_{12} + \frac{m_{12}}{4}) \\ &\quad v^-|_{\gamma_{l+\frac{1}{2},j}} - (s_{12} - \frac{m_{12}}{4})v^+|_{\gamma_{l+\frac{1}{2},j}} + g_1|_{\gamma_{l+\frac{1}{2},j}} - \frac{1}{2}h_1|_{\gamma_{l+\frac{1}{2},j}} \\ -\sigma_2^x(\mathbf{u})_{\gamma_{l+\frac{1}{2},j}}^- &= (s_{12} + \frac{m_{12}}{4})u^-|_{\gamma_{l+\frac{1}{2},j}} - (s_{12} - \frac{m_{12}}{4})u^+|_{\gamma_{l+\frac{1}{2},j}} + (s_{22} + \frac{m_{22}}{4}) \\ &\quad v^-|_{\gamma_{l+\frac{1}{2},j}} - (s_{22} - \frac{m_{22}}{4})v^+|_{\gamma_{l+\frac{1}{2},j}} + g_2|_{\gamma_{l+\frac{1}{2},j}} - \frac{1}{2}h_2|_{\gamma_{l+\frac{1}{2},j}} \end{cases}$$

en intégrant les équations ci-dessus sur chaque cellule $\gamma_{l+\frac{1}{2},j} \in \Sigma$, on obtient l'expression du flux suivante

$$F_{l+\frac{1}{2},j}^{1-} = - \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \sigma_x^1(\mathbf{u}(x_{i+\frac{1}{2}}, y))^- dy = h_j^y(s_{11} + \frac{m_{11}}{4})u_{i,j} - h_j^y(s_{11} - \frac{m_{11}}{4})u_{i+1,j} + \\ h_j^y(s_{12} + \frac{m_{12}}{4})v_{i,j} - h_j^y(s_{12} - \frac{m_{12}}{4})v_{i+1,j} + h_j^y(g_1(y_j) - \frac{1}{2}h_1(y_j)),$$

$$F_{l+\frac{1}{2},j}^{2-} = - \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \sigma_x^2(\mathbf{u}(x_{i+\frac{1}{2}}, y))^- dy = h_j^y(s_{12} + \frac{m_{12}}{4})u_{i,j} - h_j^y(s_{12} - \frac{m_{12}}{4})u_{i+1,j} + \\ h_j^y(s_{22} + \frac{m_{22}}{4})v_{i,j} - h_j^y(s_{22} - \frac{m_{22}}{4})v_{i+1,j} + h_j^y(g_2(y_j) - \frac{1}{2}h_2(y_j)),$$

pour $(i, j) \in S^x(\Sigma)$.

Les mêmes calculs pour $\gamma_{i,k+\frac{1}{2}}$, et $(i, j = k) \in S^y(\Sigma)$.

Mêmes calculs pour déterminer $F_{i,k+\frac{1}{2}}^1(\mathbf{u})$ sur l'interface $\gamma = \gamma_{i,k+\frac{1}{2}}$ tel que $(i, k) \in S^y(\Sigma)$, on prend $\mathbf{n} = (0, 1)$, et on utilise le système ci-dessous :

$$\begin{cases} \llbracket \sigma_1^y(u) \rrbracket_{\gamma_{i,j+\frac{1}{2}}} = \mathbf{M}\bar{\mathbf{u}}|_{\gamma_{i,j+\frac{1}{2}}} - \mathbf{h} \\ \overline{\sigma_2^y(u)}|_{\gamma_{i,j+\frac{1}{2}}} = \mathbf{S}\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{\gamma_{i,j+\frac{1}{2}}} + \mathbf{g}. \end{cases}$$

Remarque 3.4.2. nous avons posé $u^-(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j) = u(x_i, y_j)$ (resp. $v^-(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j) = v(x_i, y_j)$) et $u^+(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j) = u(x_{i+1}, y_j)$ (resp. $v^+(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j) = v(x_{i+1}, y_j)$).

Les coefficients de Lamé et la densité de masse sur les interfaces des cellules sont évalués par des moyennes discrètes harmoniques, voir [49], ou par des moyennes intégrales harmoniques, voir [58].

Remarque 3.4.3. Notons que nous pouvons aussi définir : $\mu_{i+\frac{1}{2},j}$ (resp $\lambda_{i+\frac{1}{2},j}$) = $\mu(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j)$ (resp $\lambda(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j)$) que si les coefficients sont des fonctions continues sur $\gamma_{i+\frac{1}{2},j}$.

En remplaçant le flux intérieur $F_{i+\frac{1}{2},j}^1$ par $F_{i+\frac{1}{2},j}^{1-}$ et $F_{i+\frac{1}{2},j}^2$ par $F_{i+\frac{1}{2},j}^{2-}$ dans l'expression du flux total, on en déduit l'expression du flux pour les volumes qui ont des parties communes avec l'interface Σ_h .

Conditions aux limites

Sur les faces coïncidant avec la frontière du domaine fictif, les conditions aux limites doivent être appliquées. En cas des conditions aux limites de Dirichlet, les expressions du flux et de la source restent valables, sauf que $u(x_I, y_J)$ est remplacé par la valeur limite $u_D(x_I, y_J)$, où (I, J) est l'ensemble des indices des noeux situés sur la frontière. Sur la partie de la frontière où les conditions de Neumann sont spécifiées, les flux au bord sont ajoutés au terme source, tandis que les valeurs des variables à la frontière sont obtenues par extrapolation des valeurs de déplacement à l'intérieur du domaine fictif.

La correction géométrique de l'interface approchée Σ_h pour la condition immergée de Robin

Lorsque l'interface Σ est approximée par le maillage en Σ_h , la correction de surface est alors nécessaire pour les conditions aux limites immergées de Robin ou de Neumann non homogène. Comme la forme de Σ n'est pas simple, la frontière immergée Σ est approximée linéairement par morceaux en $\Sigma_l = \cup_{K \in \omega_{h,\Sigma}} \Sigma_{l,K}$, où $\Sigma_{l,K}$ est une approximation par morceaux de Σ sur chaque élément K et $\omega_{h,\Sigma}$ est l'union des volumes finis traversés par Σ . Cette approche entraîne une reconstruction locale linéaire par morceaux de l'interface de Σ dans chaque cellule K du maillage. Il existe plusieurs manières pour estimer le paramètre de correction locale δ_K (voir [53]).

Une approximation locale de δ_K consiste à calculer δ_K sur chaque élément $K \subset \omega_{h,\Sigma}$ par

$$\int_{\Sigma \cap K^*} \sigma(u)_{\Sigma}^- \cdot \mathbf{n} ds = \int_{\Sigma_h \cap K^*} \frac{1}{\delta_K} \sigma(u)_{\Sigma_h}^- ds \quad (23)$$

où K^* est l'ensemble des volumes de contrôle autour de K (pour plus de détails voir [54]).

Une approximation de δ_K lorsque Σ est un cercle, comme dans les problèmes de test suivants (section 6), se trouve dans [10]. Il rend compte de la surface relative considérée dans chaque

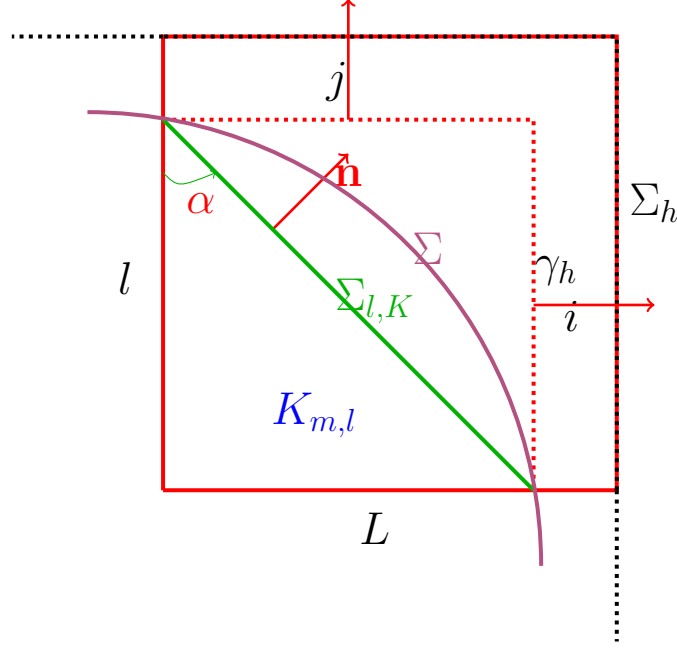


Fig. 3.2 – approximation linéaire par morceaux $\Sigma_{l,K}$ dans un volume fini rectangulaire $K \subset \omega_{h,\Sigma}$.

$K \subset \omega_{h,\Sigma}$ traversé par Σ . Ainsi, pour tout côté κ de $K \subset \omega_{h,\Sigma}$, la valeur discrète de $\sigma(u)_{\Sigma}^{-}$ dans l'équation 11 et par conséquent les données discrètes $\mathbf{A}$ et $\mathbf{q}$ sur les côtés de Σ_h sont divisée par le rapport de la surface δ_K défini avec une erreur $O(h)$ par :

$$\delta_K \equiv \frac{\text{meas}(\gamma_h)}{\text{meas}(\gamma)} = \frac{l + L}{\text{meas}(\gamma)} = \sin(\theta) + \cos(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \quad (24)$$

3.4.3 Le système algébrique associé au problème et solveurs

Le système algébrique qu'on a obtenu est composé de quatre (4) matrices A_{11} , B_{12} , B_{21} et A_{22} et la solution approchée est un vecteur de deux composantes noté $U = (u, v)$. Ces matrices sont associées à la discrétisation des flux partiels $F^1(u)$, $F^1(v)$, $F^2(u)$ et $F^2(v)$, respectivement. Le système linéaire dont les inconnus $(u_K, v_K)_{K \in T_h}$ s'écrit formellement comme suit :

$$AU = b \iff \begin{bmatrix} A_{11}, B_{12} \\ B_{21}, A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Les éléments du système sont présentés dans l'annexe (2).

Remarque 3.4.4. Les matrices A_{11} et A_{22} sont symétriques définies positives, et les matrices B_{12} et B_{21} sont anti-symétriques, i.e. $\frac{1}{4}(B_{12} + B_{12}^T)$ est symétrique.

Remarque 3.4.5. Les deux inconvénients de ce schéma sont le fait qu'il est un schéma de 9 points, et donc coûteux en calcul. et qu'il donne une matrice non symétrique, même si l'opérateur associé au problème continu est symétrique. En outre, son généralisation au trois dimensions est un peu complexe.

3.4.4 Caractérisation du domaine fictif (Original et auxiliaire)

Nous décomposons le domaine de calcul (domaine fictif) Ω en deux sous-domaines $\tilde{\Omega}$ et Ω_e qui sont respectivement associés à la partie domaine physique et domaine auxiliaire. Le principe est de définir une fonction distance dans le domaine de calcul Ω ainsi qu'une fonction caractéristique dans Ω_h . Si l'interface immergée du domaine physique est donnée par Σ , la fonction distance peut être défini par

$$\varphi(x, 0) = \begin{cases} \|x - \Sigma\| & \text{si } x \in \tilde{\Omega}, \\ -\|x - \Sigma\| & \text{si } x \in \Omega_e, \end{cases} \quad (26)$$

La fonction caractéristique est facilement obtenue en regardant le signe de $\varphi(x_i, 0)$ dans les noeuds x_i du maillage :

$$\chi_s(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } \varphi(x_i, 0) > 0, \\ 0 & \text{si } \varphi(x_i, 0) < 0, \end{cases} \quad (27)$$

Enfin, on définit une fonction caractéristique sur chaque volume de contrôle K par la fonction distance comme suit

$$\chi_s|_K = \frac{\Sigma_K^+}{|\Sigma|_K}, \quad (28)$$

où Σ_K^+ est la somme des noeuds d'élément K dont $\varphi(x_i, 0) > 0$, et $|\Sigma|_K$ est la somme des valeurs absolues de $\varphi(x_i, 0)$. Il était alors clair que $\chi_s|_K$ vaut 1 ou 0 selon que tous les noeuds du volume K est positif ou négatif alors que les volumes qui sont traversés par l'interface Σ ont une valeur comprise entre 0 et 1.

3.5 Les résultats numériques

Afin de confirmer la convergence de notre schéma, nous allons considérer donc des problèmes ayant des solutions analytiques. Dans ce qui suit, nous nous focalisons sur les problèmes en 2-D. Nous présentons les résultats obtenus à partir des simulations numériques

effectuées dans un milieu isotrope homogène et hétérogène. Par souci de simplicité, nous avons effectué les calculs pour le modèle où les coefficients de Lamé et la densité volumique sont des fonctions constantes.

Dans les calculs, les propriétés des matériaux choisis sont telles que le module d'Young $E = 1.542$ et le coefficient de Poisson $\nu = 0.285$, ou en fonction des coefficients de Lamé $\lambda = 8000$ et $\mu = 6000$.

3.5.1 Normes Discrètes

Les erreurs entre les solutions numériques et analytiques des problèmes test, peuvent être appréciés soit par le calcul de la norme L^2 ou de L^∞ (norme max) dans Ω_h .

Pour la solution approchée u_h , la norme discrète de L^2 dans le domaine physique approchée Ω_h est définie par

$$\|u_h\|_{L^2(\tilde{\Omega}_h)}^2 = \sum_{K \subset \tilde{\Omega}_h} meas(K) |u_K|^2,$$

et pour la solution analytique $\tilde{u}$ associée au problème de test défini sur le domaine physique

$$\|\tilde{u}\|_{L^2(\tilde{\Omega}_h)}^2 = \sum_{K \subset \tilde{\Omega}_h} meas(K) |\tilde{u}(x_K)|^2.$$

Ensuite, une norme relative discrète L^2 de l'erreur est évaluée par

$$e_r = \frac{\|\tilde{u} - u_h\|_{L^2(\tilde{\Omega}_h)}^2}{\|\tilde{u}\|_{L^2(\tilde{\Omega}_h)}^2}.$$

Par définition, la norme discrète de L^∞ est

$$\|\tilde{u} - u_h\|_{L^\infty(\tilde{\Omega}_h)}^2 = \max_{K \subset \tilde{\Omega}_h} |\tilde{u}(x_K) - u_K|.$$

3.5.2 Validation de la méthode (M.V.F) pour le problème d'élasticité

Nous commençons par la validation du schéma des volumes finis sur des domaines où le domaine de calcul coïncide avec le domaine physique, pour cet effet, le domaine physique est le carré unité $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$, on note par Γ_i , $i = 1, \dots, 4$ les cotés du carré tels que Γ_1 et Γ_3 (resp. Γ_2 et Γ_4) sont parallèles à l'axe (ox) (resp. (oy)). Le domaine Ω est maillé par des cellules carrées uniformes K avec un pas de discrétisation variant de $h = \frac{1}{10}$ à $\frac{1}{120}$.

Problème de Dirichlet homogène

Nous considérons le problème de Dirichlet homogène suivant :

$$(\mathcal{P}_D) \begin{cases} -\mu(\Delta u + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}) - \lambda(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}) = f^1 & \text{dans } \Omega, \\ -\mu(\Delta v + \frac{\partial^2 v}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}) - \lambda(\frac{\partial^2 v}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}) = f^2 & \text{dans } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

qui admet la solution analytique

$u(x, y) = v(x, y) = x(x - 1) \sin(\pi y)$ dans Ω , où les expressions de f^1 et f^2 sont telles que

$$\begin{cases} f^1(x, y) = 2(\lambda + 2\mu) \sin(\pi y) + \pi(\lambda + \mu)(2x - 1) \cos(\pi y) - \pi^2 \mu \sin(\pi y) x(x - 1), \\ f^2(x, y) = -\pi^2(\lambda + 2\mu) \sin(\pi y) x(x - 1) + \pi(\lambda + \mu)(2x - 1) \cos(\pi y) + 2\mu \sin(\pi y). \end{cases}$$

La norme L^2 de l'erreur relative obtenue pour différents pas de discrétisation est reportée dans le tableau 3.2.

TABLE 3.2 – Variation de l'erreur relative en fonction du pas h

h^{-1}	10	30	60	90	120
Pro. de Dirichlet homogène					
$\frac{\ u - u_h\ }{\ u\ }$	$9.906242e^{-3}$	$1.100178e^{-3}$	$3.953979e^{-4}$	$1.213228e^{-4}$	$6.780480e^{-5}$
Pro. de Fourier					
$\frac{\ u - u_h\ }{\ u\ }$	$2.506668e^{-2}$	$2.830998e^{-3}$	$7.147223e^{-4}$	$3.194405e^{-4}$	$1.805569e^{-4}$

Remarque 3.5.1. *Les résultats de l'erreur relative pour la norme L^∞ sont similaires à ceux obtenus pour la norme L^2 .*

La condition de Fourier sur Γ_2

Afin de valider notre schéma pour les problèmes d'élasticité linéaire pour des conditions aux limites générales, nous allons considérer le problème de Fourier ci-dessous :

$$(\mathcal{P}_N) \quad \begin{cases} -\mu(\Delta u + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}) - \lambda(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}) = f^1 & \text{dans } \Omega, \\ -\mu(\Delta v + \frac{\partial^2 v}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}) - \lambda(\frac{\partial^2 v}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}) = f^2 & \text{dans } \Omega, \\ \sigma(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\eta} |_{\Gamma_2} = \mathbf{M} \mathbf{u} |_{\Gamma_2} + \mathbf{g}_N & \text{sur } \Gamma_2, \\ u = v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma_2, \end{cases}$$

où $\mathbf{M}$ est une matrice symétrique telle que $\mathbf{M} = \alpha \mathbf{I} = \mathbf{I}$. Le problème $(\mathcal{P}_N)$ avec les données

$$\begin{cases} f^1(x, y) = 2(\lambda + 2\mu) \sin(\pi y) + (\lambda + \mu)(2x - \frac{1}{2})(2y - 1) - \pi^2 \mu x(x - \frac{1}{2}) \sin(\pi y), \\ f^2(x, y) = 2(\lambda + 2\mu)x(x - \frac{1}{2}) + \pi(\lambda + \mu)(2x - \frac{1}{2}) \cos(\pi y) + 2\mu y(y - 1), \end{cases}$$

et

$$\mathbf{g}_N(y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(\lambda + 2\mu) \sin(\pi y) + \frac{\pi}{2} \lambda \cos(\pi y) - \frac{\alpha}{2} \sin(\pi y) \\ \frac{3}{2} \mu \sin(\pi y) + \frac{\pi}{2} \mu \cos(\pi y) - \frac{\alpha}{2} \sin(\pi y) \end{cases}$$

admet la solution analytique

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{cases} u(x, y) = x(x - \frac{1}{2}) \sin(\pi y) \\ v(x, y) = xy(x - \frac{1}{2})(y - 1). \end{cases}$$

La norme L^2 de l'erreur relative en fonction du paramètre de discrétisation h est illustrée dans le tableau 3.2.

Les figures 3.3 et 3.4 montrent que la convergence du schéma proposé est d'ordre 2 pour le problème étudié quelle que soit la condition aux limites considérée, Dirichlet homogène, non homogène où la condition de Fourier. Dans les figures 3.5 et 3.6, on a présenté les projections des composantes de la solution exacte et celles de la solution approchée sur le bord $\Gamma_2 = \{(x, y) \text{ tel que } x = 1\}$.

Maintenant, nous allons présenter un modèle scalaire de domaine fictif pour le problème de Convection qui déjà étudié et validé numériquement par Ramière et Angot [53]. En effet, ce modèle est un cas particulier de notre problème lorsque on suppose formellement que $\lambda = -\mu$; la comparaison des résultats obtenus par notre schéma avec ceux obtenus par Ramière montre la performance du schéma de domaine fictif proposé dans ce travail.

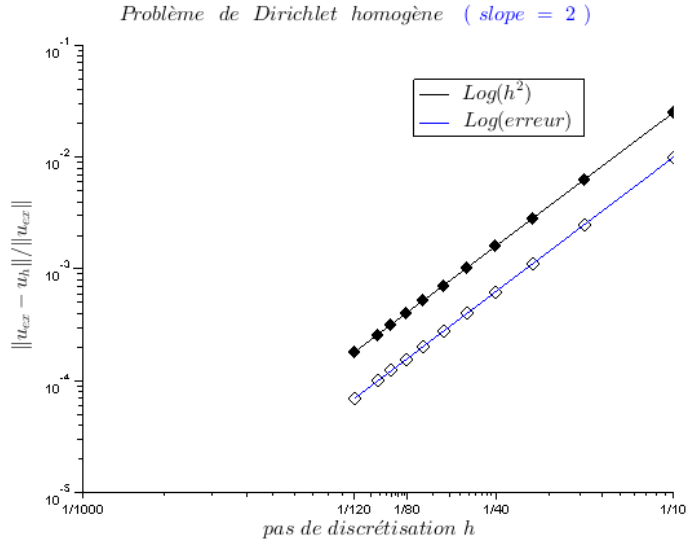


Fig. 3.3 – L'ordre de convergence du schéma des volumes finis pour la condition de Dirichlet homogène

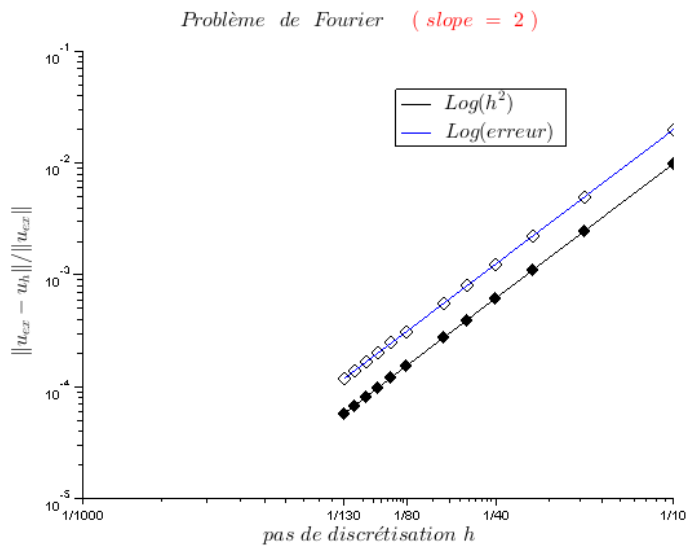
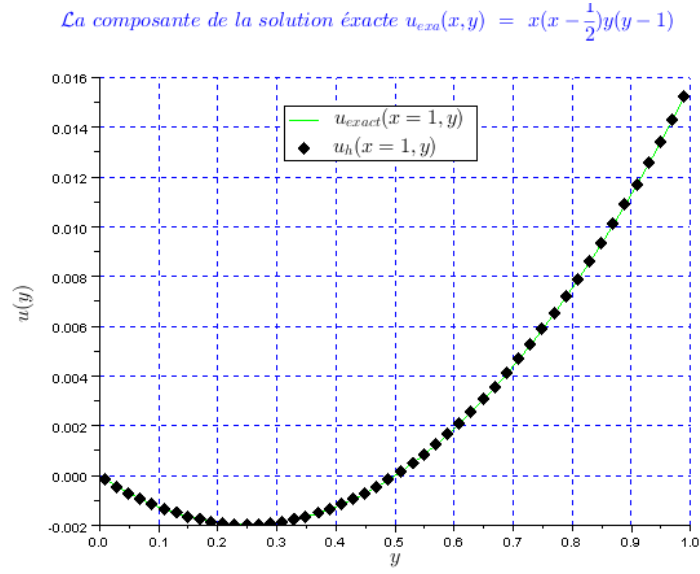
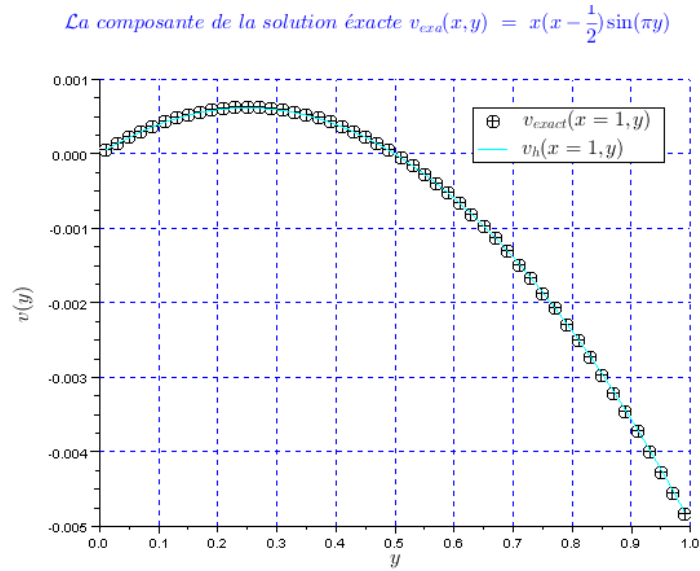


Fig. 3.4 – L'ordre de convergence du schéma des volumes finis pour la condition de Fourier

Fig. 3.5 – Comparaison des solutions exacte et approchée sur Γ_2 . Première composante u Fig. 3.6 – Comparaison des solutions exacte et approchée sur Γ_2 . Deuxième composante v

3.6 La méthode de domaine fictif pour le problème de Diffusion

Dans ce qui suit, on va utiliser la méthode de domaine fictif pour simuler numériquement un problème scalaire (un cas particulier de notre problème) posé sur un domaine de type L , dans ce cas la frontière immergée Σ coïncide avec s'approche Σ_h .

Nous considérons le problème suivant défini dans le domaine original $\tilde{\Omega} =]0, 1[\times]0, 1[\setminus]\frac{3}{4}, 1[\times]\frac{3}{4}, 1[$ par

$$(\tilde{P}_s) \begin{cases} -\nabla \cdot (\mu \nabla \tilde{u}) = \tilde{f} & \text{dans } \tilde{\Omega} \\ \nabla \tilde{u} \cdot \eta|_{\Sigma} = \alpha \tilde{u} + q & \text{sur } \Sigma \\ \tilde{u} = 0 & \text{sur } \partial\tilde{\Omega} \setminus \Sigma, \end{cases}$$

où $\Sigma = \Sigma_x \cup \Sigma_y$ telle que

$$\Sigma_x = \left\{ (x, y) / x = \frac{3}{4}; \frac{3}{4} \leq y \leq 1 \right\} \quad \text{et} \quad \Sigma_y = \left\{ (x, y) / y = \frac{3}{4}; \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \right\}$$

Le problème $(\tilde{P}_s)$ s'obtient en remplaçant formellement λ par $-\mu$ dans le problème $(\mathcal{P}_N)$, qui a, pour les données $\tilde{f} = -2(\lambda + 2\mu)x(x - 1) + 2\mu y(y - 1)$ dans $\tilde{\Omega}$,

$$q(y) = \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)y(y - 1) \text{ sur } \Sigma_x$$

$$\text{et } q(x) = \frac{1}{2}\mu x(x - 1) \text{ sur } \Sigma_y,$$

la solution analytique $u(x, y) = x(x - 1)y(y - 1)$ dans $\tilde{\Omega}$.

Maintenant, nous utilisons la méthode de domaine fictif, pour le domaine $\Omega = \tilde{\Omega} \cup \Omega_e =]0, 1[\cup]0, 1[$,

La condition de Fourier sur l'interface immergée dans le domaine fictif est obtenu par $f|_{\Omega_e} = 0$, $\frac{h}{2} - g = q$, $\frac{h}{2} + g = 0$, $S = \frac{1}{2}I$, $M = 2I$ et $\alpha = 1$, sans pénalisation du domaine extérieur Ω_e (voir le tableau 3.1).

Le tableau 3.3 illustre les résultats d'erreurs relatives de la solution en fonction du paramètre de discrétisation h . La représentation graphique de ceux résultats nous permet de voir que l'ordre de convergence du schéma de la méthode de domaine fictif est optimal.

Le tableau 3.4 illustre l'erreur obtenue pour $\alpha = 0$, (la condition de Neumann).

La comparaison de la solution exacte avec la solution approchée sur les interfaces Σ_x et Σ_y est illustrée dans la figure 3.9, les projections de la solution exacte et celle approchée sur

TABLE 3.3 – Variation de l'erreur relative en fonction du pas h pour la condition de Fourier

$M_x = M_y = h^{-1}$	8	16	32	64
$\frac{\ u - u_h\ }{\ u\ }$	0.0202882	0.0046862	0.0009967	0.0002383

TABLE 3.4 – Variation de l'erreur relative en fonction du pas h pour la condition de Neumann

$M_x = M_y = h^{-1}$	8	16	32	64	80	120
$\frac{\ u - u_h\ }{\ u\ }$	0.0222792	0.0056040	0.0014034	0.0003510	0.0002249451	0.0000993

l'une des interfaces horizontales où verticales qui traversent Ω_e sont représentées dans les figures 3.7 et 3.8.

Deuxième test. On considère le problème scalaire (P_s) avec la condition de Neumann et les données suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{f} &= -2(\lambda + 2\mu) \sin(\pi y) + \pi^2 \mu x(x-1) \sin(\pi y) \text{ dans } \tilde{\Omega} \text{ et} \\ \begin{cases} q(y) = \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)y(y-1) \text{ sur } \Sigma_x, \\ q(x) = \mu\pi x(x-1) \cos(\frac{3\pi}{4}) \text{ sur } \Sigma_y. \end{cases} \end{aligned}$$

La solution analytique de ce problème est donnée par $u(x, y) = x(x-1) \sin(\pi y)$ dans $\tilde{\Omega}$.

En appliquant la variante (F) où les paramètres sur Σ_h et les données dans Ω_e sont choisies à l'aide du tableau 3.1, on montre que la convergence du schéma est d'ordre deux (2). Les résultats de convergence sont donnés dans le tableau 3.5 et représentés graphiquement dans les figures 3.10, 3.11, 3.12, 3.13, et 3.14.

TABLE 3.5 – Variation de l'erreur relative en fonction du pas h pour le problème de Fourier

$M_x = M_y = h^{-1}$	8	16	32	64	128	140
$\frac{\ u - u_h\ }{\ u\ }$	0.0184336	0.0046185	0.0011553	0.0002889	0.0000722	0.0000604

Problème scalaire (P_s) avec la condition de Dirichlet non homogène

On va considérer le problème précédant avec la condition de Dirichlet

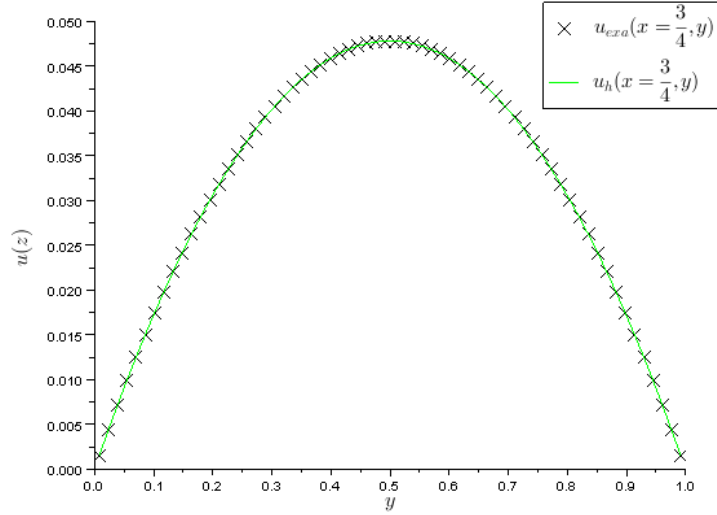


Fig. 3.7 – Comparaison des solutions sur l'interface immergée pour le problème de Fourier par J.E.B.C. méthode (F) sur Σ

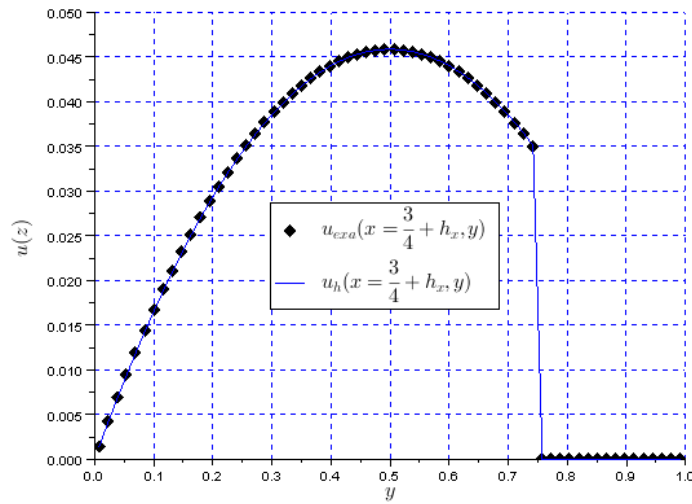


Fig. 3.8 – Comparaison des solutions sur l'interface immergée pour le problème de Fourier par J.E.B.C. méthode (F) sur $\Sigma + h_x$

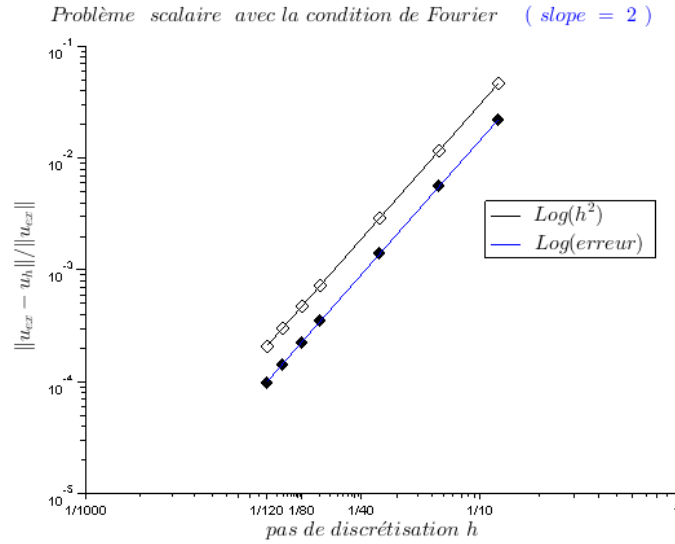


Fig. 3.9 – L'ordre de convergence de la méthode de domaine fictif (F) pour la condition de Fourier

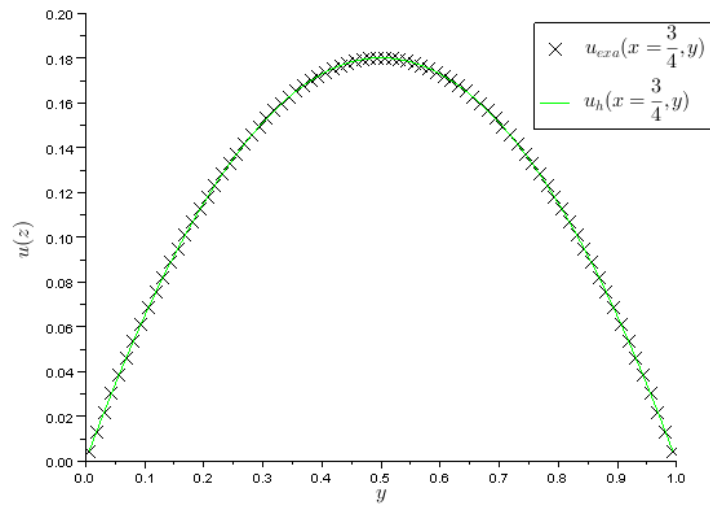


Fig. 3.10 – Comparaison des solutions sur l'interface immergée pour le problème de Neumann par J.E.B.C. méthode sur Σ

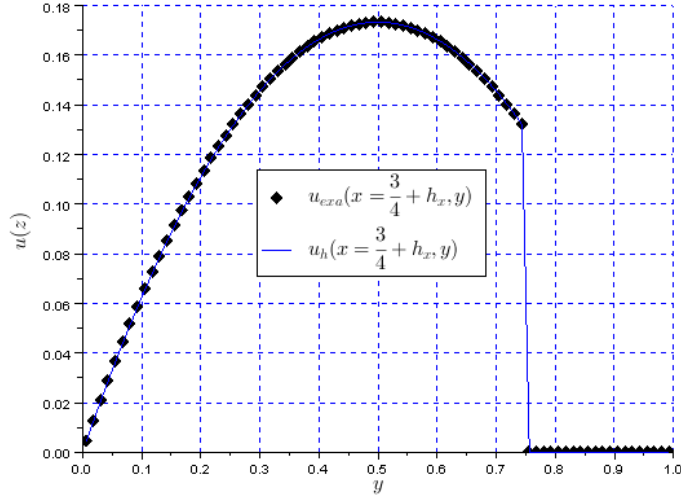


Fig. 3.11 – Comparaison des solutions sur l'interface immergée pour le problème de Neumann par J.E.B.C. méthode sur $\Sigma + h_x$

$$u_D|_{\Sigma} = \begin{cases} u_D(y) = \frac{3}{16}y(y-1) \text{ si } y \in \Sigma_x, \\ u_D(x) = \frac{3}{16}x(x-1) \text{ si } x \in \Sigma_y. \end{cases}$$

Le problème fictif dans Ω est résolu en utilisant la méthode $D1$ (pénalisation de surface avec $\eta = \frac{h}{2(2\mu+\lambda)}$) présentée dans le tableau 3.1. Cette méthode conduit à une convergence d'ordre 2, comme montre la figure 3.15 associée aux résultats du tableau 3.6.

TABLE 3.6 – Variation de l'erreur relative en fonction du pas h pour le problème de diffusion avec la condition de Dirichlet dans un domaine de type L

$M_x = M_y = h^{-1}$	8	16	32	64	100	120
$\frac{\ u - u_h\ }{\ u\ }$	0.0211287	0.0053269	0.0013321	0.0003161	0.0001024	0.0000528

Domaine quart du cercle

nous allons résoudre le problème scalaire P_s dans un quart du cercle unitaire avec la condition de symétrie sur la frontière $\tilde{\Gamma}$ (voir [53]), le domaine fictif est le carré unitaire (voir Fig. 3.16). Le domaine physique est maillé à l'aide des éléments rectangulaires uniformes dont les côtés sont parallèles aux axes du maillage. Le problème discret est alors posé sur le

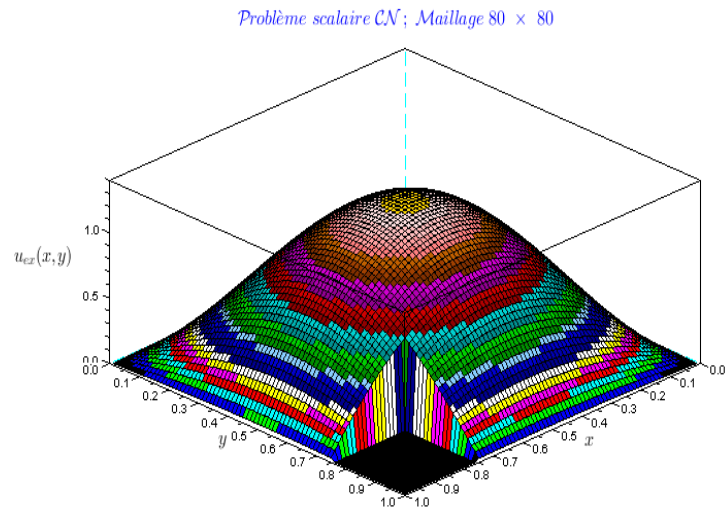


Fig. 3.12 – La solution exacte du problème de diffusion avec la condition de Neumann dans un domaine de forme L

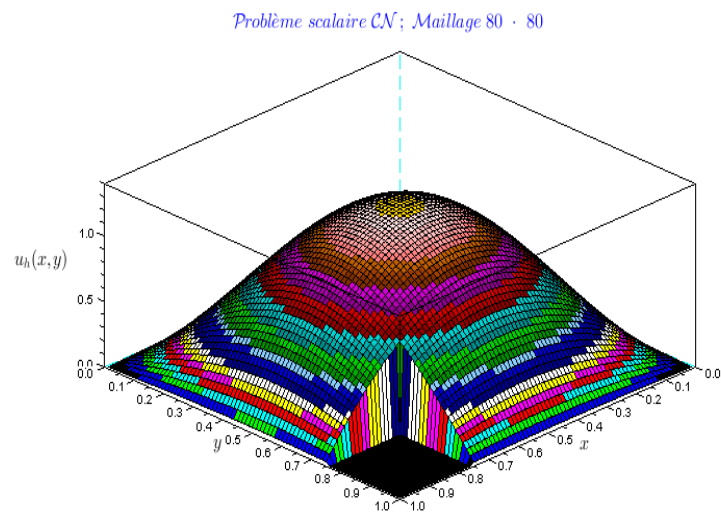


Fig. 3.13 – La solution approchée du problème de diffusion avec la condition de Neumann dans un domaine de forme L

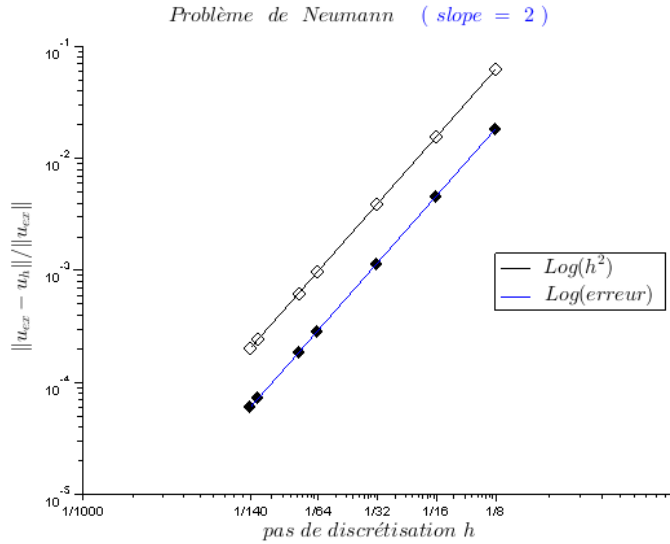


Fig. 3.14 – L'ordre de convergence de la méthode de domaine fictif pour le problème de diffusion avec la condition de Neumann dans un domaine de type L .

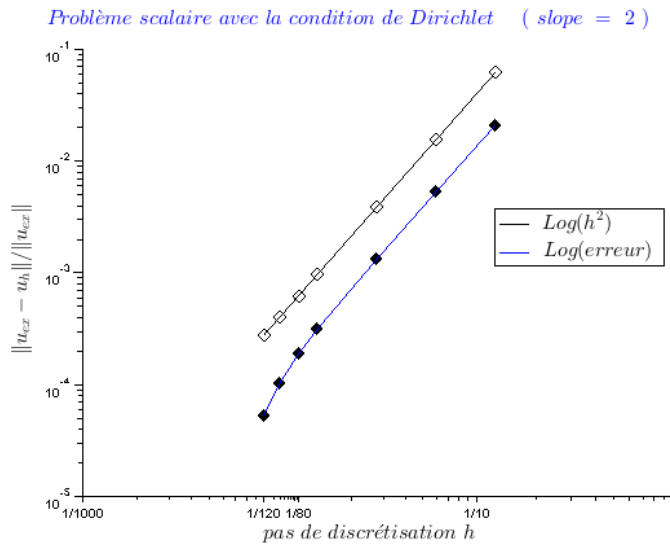
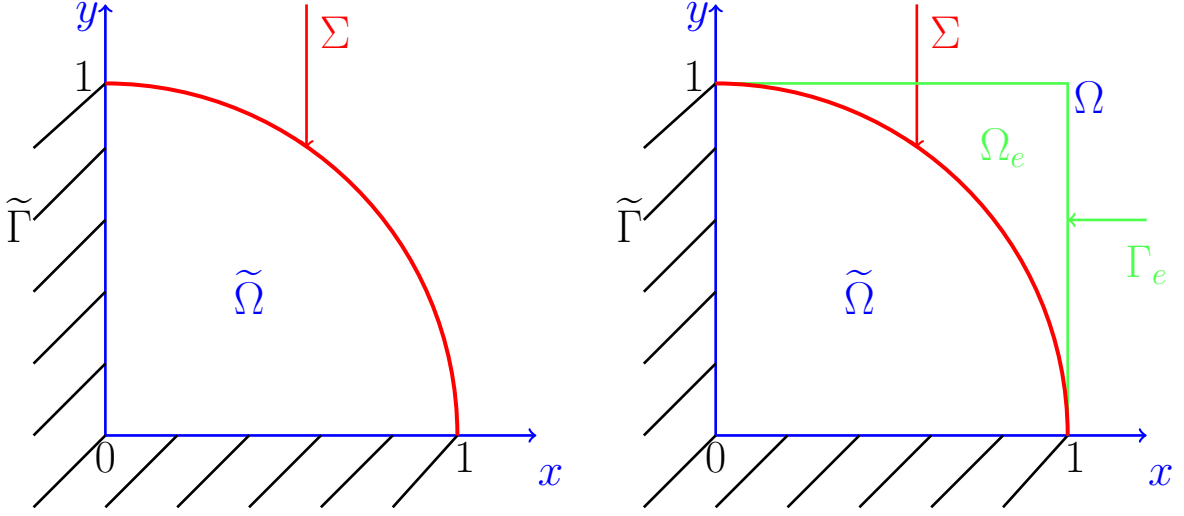


Fig. 3.15 – L'ordre de convergence de la méthode de domaine fictif $D1$ pour le problème scalaire de Dirichlet non homogène dans un domaine de type L

Fig. 3.16 – Le domaine physique $\tilde{\Omega}$ immergé dans le domaine fictif Ω

domaine approché, non adapté à la géométrie du domaine physique, défini par ce maillage. Cela nécessite une modélisation de la frontière immergée. On propose ici deux types d'approximation, la première approche de type interface coupée, qu'est construite par les cotés des mailles traversées par la frontière réelle et tel que $\tilde{\Omega} \subset \tilde{\Omega}_h$, et la deuxième de type interface extérieure, qu'est construite par les cotés des mailles traversées par la frontière réelle et tel que $\Omega_e \subset \Omega_{e,h}$.

Afin de valider notre schéma sur un domaine circulaire, on va considérer des exemples qui ont été étudiés dans les travaux de Ramière et Angot ([7]).

Problème de Diffusion avec la condition de Dirichlet

Premier exemple ([53], page 1362). On considère le problème de Dirichlet homogène suivant :

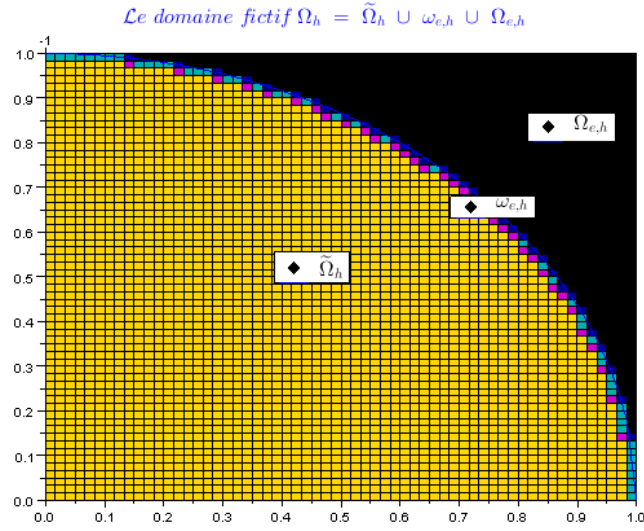
$$(\tilde{\mathcal{P}}_s) \begin{cases} -\Delta \tilde{u} = 4 & \text{dans} & \tilde{\Omega}, \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} = 0 & \text{sur} & \tilde{\Gamma}, \\ \tilde{u} = 0 & \text{sur} & \Sigma, \quad u_D = 0, \end{cases}$$

qui admet la solution analytique $\tilde{u}(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)$ dans $\tilde{\Omega}$.

Le problème de domaine fictif est résolu dans Ω avec la méthode (J. E. B. C.) (D1) (voir le tableau 3.1), en utilisant la pénalisation de la surface coupée Σ_h^{cut} sans contrôle du domaine extérieur $\Omega_{e,h}$.

Le domaine fictif approché est présenté dans la figure 3.17.

Dans les figures 3.18 et 3.19, on présente les solutions exacte et approchée ainsi que dans la figure 3.20 la projection des solutions exacte et approchée sur l'axe $(r, \theta = \frac{\pi}{4})$.

Fig. 3.17 – Maillage rectangulaire uniforme du domaine fictif approché Ω_h , taille 60×60

L'ordre de convergence est 1, comme montre la figure 3.21

Deuxième exemple. On considère le problème de Dirichlet non homogène suivant :

$$(\tilde{\mathcal{P}}_s) \begin{cases} -\Delta \tilde{u} = 4 & \text{dans} & \tilde{\Omega}, \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} = 0 & \text{sur} & \tilde{\Gamma}, \\ \tilde{u} = 1 & \text{sur} & \Sigma, \quad u_D = 1, \end{cases}$$

qui admet la solution analytique $\tilde{u}(x, y) = 2 - (x^2 + y^2)$ dans $\tilde{\Omega}$. En utilisant la méthode $D1$ qui a decrite précédemment.

Le tableau 3.7 illustre la variation de la norme L^2 d'erreur relative en fonction du paramètre de discrétisation h et la figure 3.21 présente l'ordre de la convergence du schéma qu'on a obtenu.

TABLE 3.7 – Variation de l'erreur relative en fonction du pas h pour le P_s avec une condition de Dirichlet non homogène dans un quart de cercle

$M_x = M_y = h^{-1}$	10	20	40	80	120	140
$\frac{\ u - u_h\ }{\ u\ }$	0.0340202	0.0094544	0.00252778	$1.986422e - 3$	$9.567817e - 4$	$5.863457e - 4$

Dans les figures 3.23 et 3.24, on présente les solutions exacte et approchée ainsi que dans la figure 3.22, la projection des solutions exacte et approchée sur l'axe $(r, \theta = \frac{\pi}{4})$.

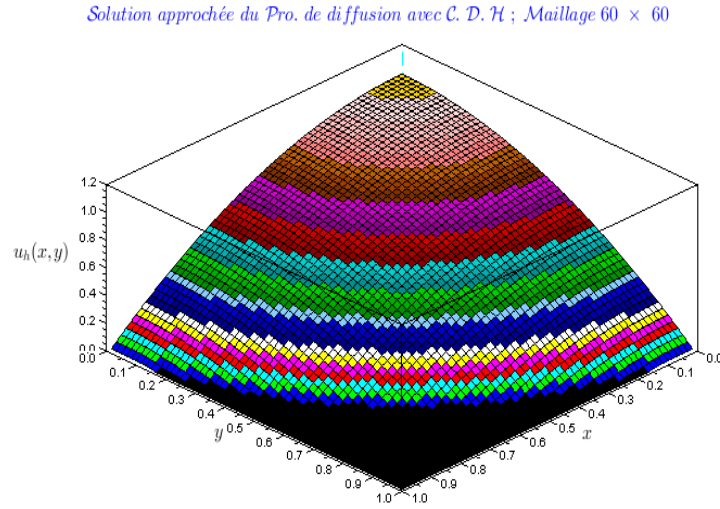


Fig. 3.18 – La solution exacte du problème de diffusion avec la condition de dirichlet homogène dans un quart de cercle

La comparaison des solutions sur les parties de la frontière Γ_e est donnée par les figures 3.25 et 3.26.

Troisième exemple. Afin de valider la méthode de domaine fictif (variante $D1$ avec interface coupée), nous allons maintenant étudier un problème de Dirichlet non homogène

$$(\tilde{\mathcal{P}}_s) \begin{cases} -\Delta \tilde{u} = -(2 + 4x^2) \exp(x^2) & \text{dans} & \tilde{\Omega} \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} = 0 & \text{sur} & \tilde{\Gamma} \\ \tilde{u} = u_D & \text{sur} & \Sigma, \quad u_D = 3 + \exp(x^2) \end{cases}$$

Le tableau 3.8 illustre les variation de la norme L^2 de l'erreur relative selon la variation du paramètre de discrétisation. Les figures 3.29 et 3.30 présentent les solutions exacte et approchée du problème de diffusion avec une condition de Dirichlet, ainsi que la figure 3.27 montre que la convergence est d'ordre 1. La figure 3.28 montre que les projections sont coincide sur l'axe $(r, \theta = \pi/4)$.

Les résultats que nous avons obtenus dans cette section est très similaires à ceux obtenus dans les travaux de Ramière et Angot [7].

la condition Neumann ou de Robin pour le problème de Diffusion

Le problème de test qu'on va considérer ici se trouve dans ([53], page 1367). On considère le problème de Robin suivant :

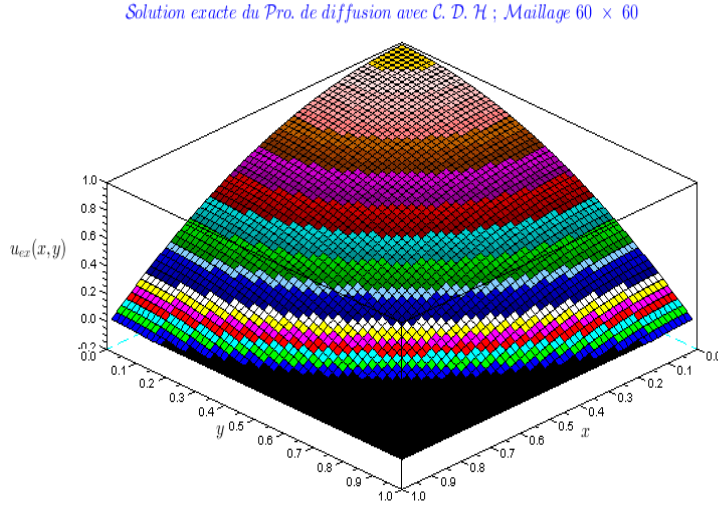


Fig. 3.19 – La solution approchée du problème de diffusion pour la condition de dirichlet homogène dans un quart de cercle

TABLE 3.8 – Variation de l'erreur relative en fonction du pas h pour le P_s du 3^{me} exemple

$M_x = M_y = h^{-1}$	10	20	40	80	120	140
$\frac{\ u - u_h\ }{\ u\ }$	0.0140250	0.0037864	0.0018916	0.0012847	$6.264489e - 04$	$4.990560e - 04$

$$(\tilde{\mathcal{P}}_s^{Rob}) \begin{cases} -\Delta \tilde{u} = 16(x^2 + y^2) & \text{dans} & \tilde{\Omega}, \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} = 0 & \text{sur} & \tilde{\Gamma}, \\ -\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} = \tilde{u} + 3 & \text{sur} & \Sigma, \alpha_R = 1, g_R = 3, \end{cases}$$

qui admet la solution analytique $\tilde{u}(x, y) = 2 - (x^2 + y^2)^2$ dans $\tilde{\Omega}$.

Le problème domaine fictif est résolu dans Ω avec l'E.B.C méthode (F1), sans contrôle extérieur décrite dans le tableau 3.1. Nous examinons dans la Figure 3.33 l'effet de la correction globale $\delta_h = \frac{meas(\Sigma_h)}{meas(\Sigma)} = \frac{4}{\pi}$ de l'interface approximative Σ_h ainsi que la correction locale δ_K dans la figure 3.32, où δ_K est calculée par l'équation 24 dans chaque volume fini traversé par Σ . Pour une correction locale δ_K , appliquée sans tenir compte des volumes de contrôle $K \subset \omega_{h,\Sigma}$ et qui soit n'ont pas des cotés communs avec Σ_h ou $K \subset (\omega_{h,\Sigma} \cap \Omega_{e,h})$ et qu'a un coté commun avec Σ_h (voir la figure 3.31 et les détails dans [53] page 1354), on observe qu'on a une convergence de l'erreur d'ordre 1. Noter que $meas(\Sigma_h) = 2$.

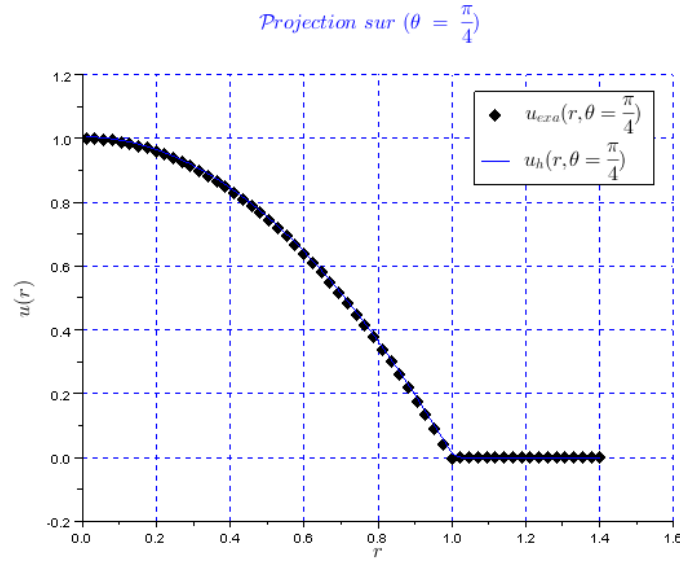


Fig. 3.20 – La projection des solutions exacte et approchée sur l'axe $\theta = \frac{\pi}{4}$

Les résultats numériques sont illustrés dans les tableaux 3.9 et 3.10.

TABLE 3.9 – Variation de l'erreur relative en fonction du pas h pour la condition de Fourier avec une correction locale δ_K de l'interface Σ_h^{Ext}

$M_x = M_y = h^{-1}$	10	20	40	80	120	140
$\frac{\ u - u_h\ }{\ u\ }$	$5.100412e - 1$	$2.861697e - 1$	$1.541659e - 1$	$9.609664e - 2$	$5.319005e - 2$	$4.400452e - 2$

3.7 La méthode de domaine fictif pour le problème d'élasticité linéaire

3.7.1 Premier problème de test. Un domaine carré

Nous résolvons un problème aux limites en 2-D soit avec les conditions de Dirichlet ou de Fourier dans le carré d'unité $\tilde{\Omega} =]0, 1[\times]0, 1[$ avec des conditions de symétrie sur l'axe $\tilde{\Gamma}_e$. Le domaine fictif est le carré $\tilde{\Omega} =]0, 1.5[\times]0, 1[$. (voir Fig. 3.34)

1. Problème de Dirichlet. Premièrement, nous considérons le problème de Dirichlet homogènes suivant défini dans le domaine physique $\tilde{\Omega} =]0, 1[\times]0, 1[$ par :

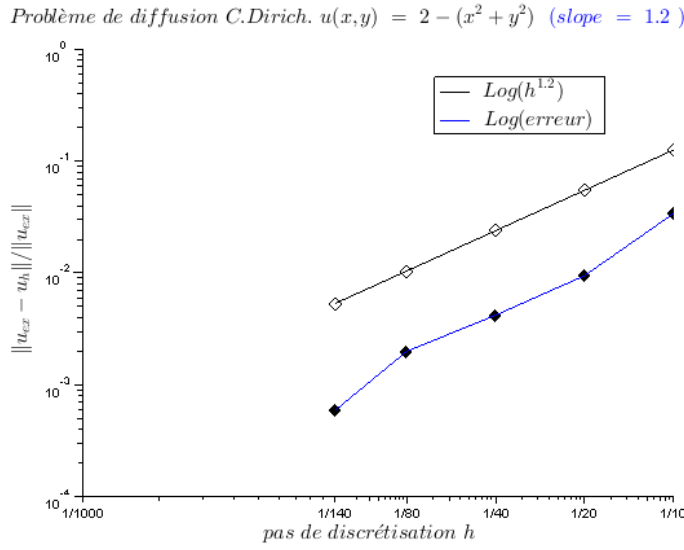


Fig. 3.21 – L'ordre de convergence de la méthode de domaine fictif pour le problème de Dirichlet non homogène dans un quart de cercle

$$(\tilde{P}) \begin{cases} -\nabla \cdot (A_{11} \cdot \nabla \tilde{u}) - \nabla \cdot (B_{12} \cdot \nabla \tilde{v}) = \tilde{f}^1 & \text{dans } \tilde{\Omega}, \\ -\nabla \cdot (A_{22} \cdot \nabla \tilde{v}) - \nabla \cdot (B_{21} \cdot \nabla \tilde{u}) = \tilde{f}^2 & \text{dans } \tilde{\Omega}, \\ \tilde{u} = \tilde{v} = 0 & \text{sur } \tilde{\Gamma}, \\ \tilde{u} = \tilde{v} = 0 & \text{sur } \Sigma(\tilde{u}_D = 0, \text{ en } x = 1), \end{cases}$$

où A_{11} , A_{22} , B_{12} et B_{21} sont définies par les expressions ci-dessous

$$A_{11} = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu) & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & (\lambda + 2\mu) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_{12} = B_{21}^t = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \lambda & 0 \end{pmatrix},$$

où A_{11} , A_{22} , B_{12} et B_{21} sont définies par les expressions ci-dessous

$$A_{11} = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu) & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & (\lambda + 2\mu) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_{12} = B_{21}^t = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \lambda & 0 \end{pmatrix},$$

qui a la solution analytique

$$\tilde{\mathbf{u}}(x, y) = \begin{cases} \tilde{u}(x, y) = x(x-1) \sin(\pi y) \\ \tilde{v}(x, y) = x(x-1)y(y-1), \end{cases}$$

dans $\tilde{\Omega}$, pour un choix convenable de $\tilde{f}^1$ et $\tilde{f}^2$.

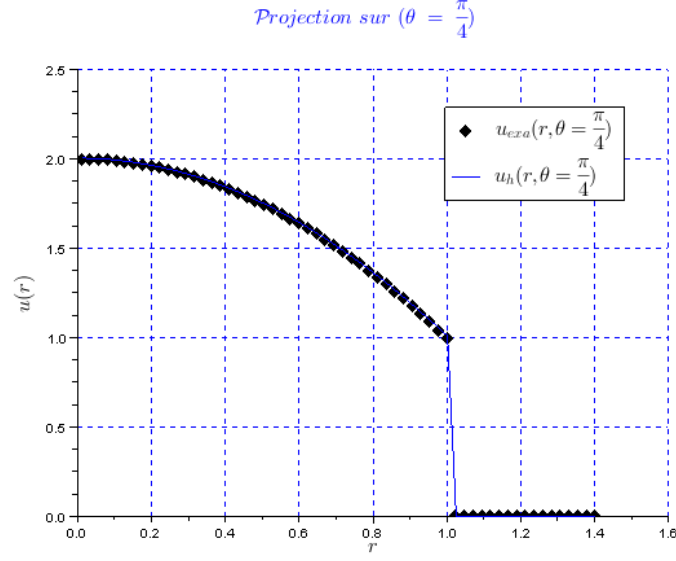


Fig. 3.22 – La projection des solutions exacte et approchée sur l'axe $\theta = \frac{\pi}{4}$

TABLE 3.10 – Variation de l'erreur relative en fonction du pas h pour la condition de Fourier avec une correction globale $\delta_h = \frac{4}{\pi}$ des interfaces Σ_h^{Ext} et Σ_h^{Cut}

$M_x = M_y = h^{-1}$	10	20	40	80	120	140
Interface Σ_h^{Cut}						
$\frac{\ u - u_h\ }{\ u\ }$	$2.520646e - 1$	$6.936182e - 2$	$3.716598e - 2$	$2.294726e - 2$	$2.048464e - 2$	$1.851062e - 2$
Interface Σ_h^{Ext}						
$\frac{\ u - u_h\ }{\ u\ }$	$5.032857e - 1$	$2.839587e - 1$	$1.544346e - 1$	$7.614813e - 2$	$5.653127e - 2$	$4.756058e - 2$

Le problème de domaine fictif est résolu dans $\Omega = \tilde{\Omega} \cup \Omega_e =]0, 1[\cup]1, 1.5[\times]0, 1[$, ($\Sigma_h = \Sigma = \{(x, y) / x = 1\}$) avec la méthode (J. E. B. C.) (D1), en utilisant seulement la pénalisation des paramètres sur Σ_h sans extérieur contrôle, et (D2), en utilisant la pénalité du domaine extérieur Ω_e de type L^2 décrit dans le tableau 3.1 avec $u_e \equiv 0$.

En effet, si $\mathbf{M} = 4\mathbf{S}$, nous avons pour la première équation de $F_{K,\sigma}$

$$\begin{cases} F_{K,\sigma}^1 + F_{L,\sigma}^1 &= m_{11} \frac{u_K + u_L}{2} - h_1 \\ \frac{1}{2}(F_{K,\sigma}^1 + F_{L,\sigma}^1) &= s_{11}(u_K - u_L) + g_1 n \cdot n_{K,L} \end{cases}$$

ce qui implique que

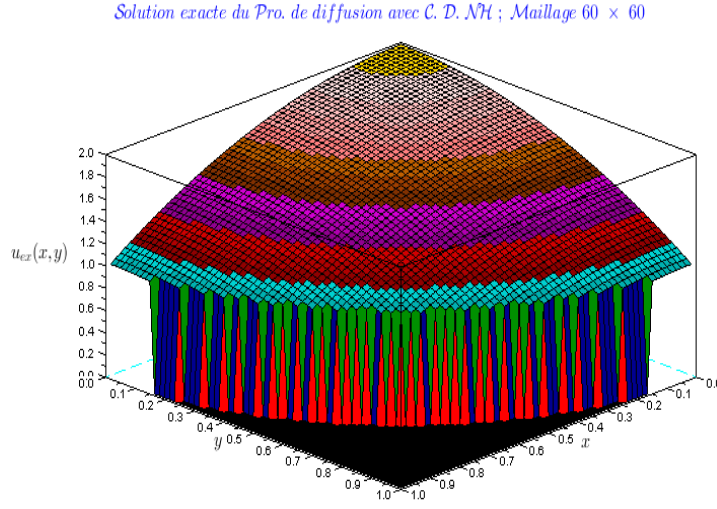


Fig. 3.23 – La solution exacte $u(x) = 2 - (x^2 + y^2)$ du problème de diffusion pour la condition de Dirichlet non homogène dans un quart de cercle

$$\begin{cases} F_{K,\sigma}^1 + F_{L,\sigma}^1 &= 2s_{11}(u_K + u_L) - h_1 \\ F_{K,\sigma}^1 - F_{L,\sigma}^1 &= 2s_{11}(u_K - u_L) + 2g_1 n \cdot n_{K,L} \end{cases}$$

si $\lambda|_{\Omega_e} = \mu|_{\Omega_e} = 1$, $f|_{\Omega_e} = 0$ alors $u_e = 0$ et $F_{L,\sigma}^1 = 0$,

$$\begin{aligned} F_{K,\sigma}^1 &= 2s_{11}u_K - h_1 \\ F_{K,\sigma}^1 &= 2s_{11}u_K + 2g_1 n \cdot n_{K,L} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} 2s_{11} &= \alpha = \frac{m_{11}}{2} \\ -h_1 &= 2g = q_N \end{aligned}$$

et par conséquent

$$-\frac{h_1}{2} + g = q_N.$$

Mêmes calculs pour la deuxième équation du flux $F_{K,\sigma}$, ce qui affirme le choix de la variante (D1).

Les calculs suivants sont effectués avec $\eta = \frac{h}{(\lambda + 2\mu)}$, où h est le pas de discrétisation.

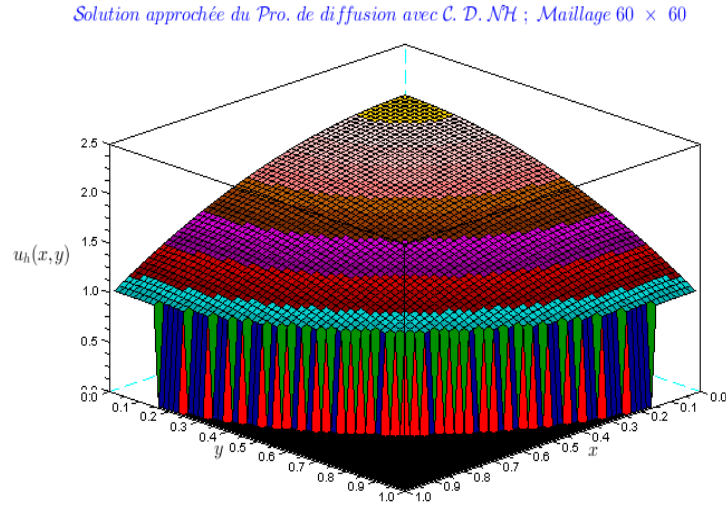


Fig. 3.24 – La solution approchée du problème de diffusion pour la condition de Dirichlet non homogène dans un quart de cercle

TABLE 3.11 – Variation d'erreurs relatives en fonction du nombre des points de discrétisation pour la condition de Dirichlet homogène

(M_x, M_y)	(12,10)	(24,20)	(48,40)	(84,70)	(120, 100)	(144, 120)
$\frac{\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ }{\ \mathbf{u}\ }$	$2.211071e - 2$	$1.216013e - 2$	$6.443567e - 3$	$3.779859e - 3$	$2.674419e - 03$	$2.238080e - 03$

La figure 3.35 montre que la méthode $D1$ converge avec un ordre de convergence égal à 1.

Maintenant, nous étudions un problème de Dirichlet non homogène

$$(\tilde{P}) \begin{cases} -\nabla \cdot (A_{11} \cdot \nabla \tilde{u}) - \nabla \cdot (B_{12} \cdot \nabla \tilde{v}) = \tilde{f}^1 & \text{dans } \tilde{\Omega}, \\ -\nabla \cdot (A_{22} \cdot \nabla \tilde{v}) - \nabla \cdot (B_{21} \cdot \nabla \tilde{u}) = \tilde{f}^2 & \text{dans } \tilde{\Omega}, \\ \tilde{u} = \tilde{v} = 0 & \text{sur } \tilde{\Gamma}, \\ \tilde{u} = \tilde{v} = \frac{1}{2} \sin(\pi y) & \text{sur } \Sigma(\tilde{u}_D = \frac{1}{2} \sin(\pi y)), \end{cases}$$

qui admet la solution analytique

$$\tilde{u}(x, y) = \tilde{v}(x, y) = x(x - 0.5) \sin(\pi y) \quad \text{dans } \tilde{\Omega},$$

Les résultats obtenus sont illustrés dans le tableau 3.12.

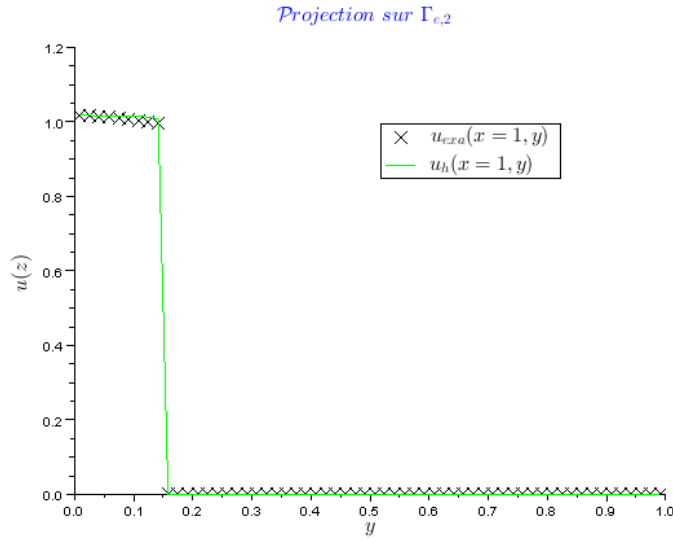


Fig. 3.25 – Les projections des solutions exacte et approchée pour la condition de Dirichlet non homogène sur la partie Γ_2 de Γ_e

TABLE 3.12 – Variation d'erreurs relatives en fonction du nombre des points de discrétisation pour la condition de Dirichlet non homogène

(M_x, M_y)	(12,10)	(24,20)	(48,40)	(72,60)	(84,70)	(144,120)
er	$9.457165e - 002$	$4.417016e - 2$	$2.139500e - 2$	$1.407022e - 2$	$1.198870e - 2$	$7.010340e - 03$

La figure 3.36 montre l'ordre de convergence de la méthode (D1) en utilisant la pénalisation du type L^2 .

Les figures 3.37 et 3.38 présentent la solution approchée obtenue par la méthode (D1) et celle analytique.

La comparaison des solutions exacte et approchée sur l'interface immergée Σ_h est illustrée dans la figure 3.39.

- Maintenant, on va considérer un domaine carré où Σ_h est horizontale, c'est-à-dire un domaine fictif tel que $\Omega =]0, 1[\times]0, 1.2[$, qui présenté dans la figure 3.40.

Considérons le problème précédant 3.7.1 avec la condition de Fourier sur Σ_h ($y = 1$), dont la solution exacte $u(x, y) = v(x, y) = y(y - \frac{1}{2})\sin(\pi x)$. La convergence de la méthode D1 est d'ordre 2, comme démontre la figure 3.41. Mais, pour la condition de Dirichlet soit homogène ou non homogène l'ordre de convergence est égal à 1, ce résultat de convergence est illustré

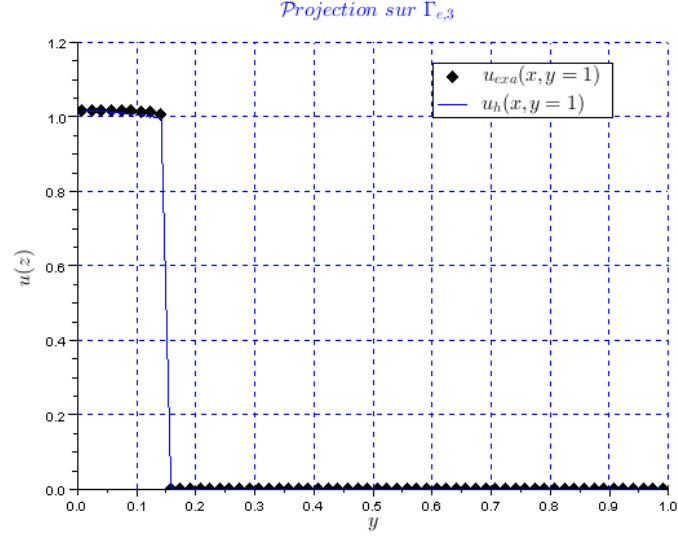


Fig. 3.26 – Les projections des solutions exacte et approchée pour la condition de Dirichlet non homogène sur la partie Γ_2 de Γ_e

dans la figure 3.42. Les résultats de convergence sont illustrés dans le tableau 3.13.

TABLE 3.13 – Variation d’erreur relative en fonction de h pour la condition de Dirichlet non homogène et de Fourier, Γ_h est horizontale

(M_x, M_y)	(10,12)	(20,24)	(40,48)	(80,96)	(120,144)
er_D	$8.717591e - 002$	$4.207636e - 002$	$2.059067e - 002$	$1.010488e - 02$	$6.596540e - 03$
er_F	$9.691022e - 003$	$2.521570e - 003$	$6.419025e - 004$	$1.594850e - 4$	$7.004485e - 5$

2. Problème avec la condition de Robin

Nous considérons le problème suivant défini dans le domaine original $\tilde{\Omega} =]0, 1[\times]0, 1[$ par

$$(\tilde{P}_N) \quad \begin{cases} -\nabla \cdot (A_{11} \cdot \nabla \tilde{u}) - \nabla \cdot (B_{12} \cdot \nabla \tilde{v}) = \tilde{f}^1 & \text{sur } \tilde{\Omega}, \\ -\nabla \cdot (A_{22} \cdot \nabla \tilde{v}) - \nabla \cdot (B_{21} \cdot \nabla \tilde{u}) = \tilde{f}^2 & \text{sur } \tilde{\Omega}, \\ \tilde{u} = \tilde{v} = 0 & \text{sur } \tilde{\Gamma} = \partial\tilde{\Omega} \setminus \Sigma, \\ \sigma(\tilde{\mathbf{u}}) \cdot \boldsymbol{\eta}|_{\Gamma_2} = \alpha I \tilde{\mathbf{u}}|_{\Gamma_2} + \mathbf{q}(y) & \text{sur } \Sigma, \end{cases}$$

Pour les données

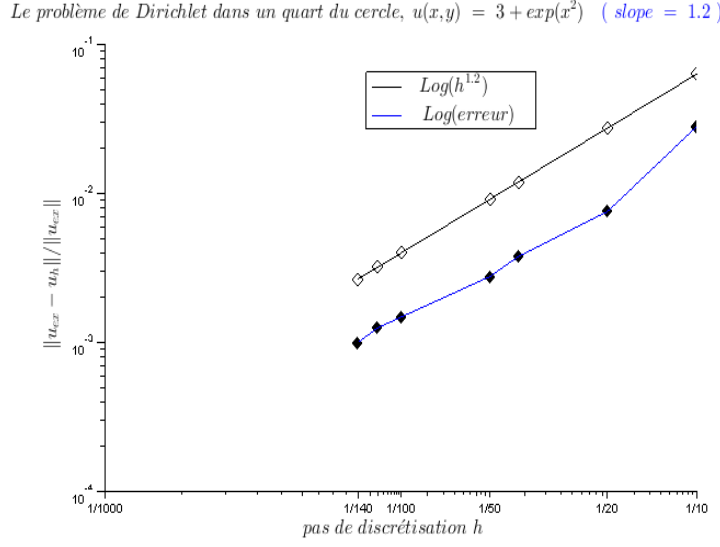


Fig. 3.27 – L'ordre de convergence de la méthode de domaine fictif pour le problème de Fourier

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{f}_1(x, y) = [-2(\lambda + 2\mu) + \pi^2 \mu x(x - \frac{1}{2})] \sin(\pi y) - \pi(\lambda + \mu)(2x - \frac{1}{2}) \cos(\pi y), \\ \tilde{f}_2(x, y) = [-2\mu + \pi^2(\lambda + 2\mu)x(x - \frac{1}{2})] \sin(\pi y) - \pi(\lambda + \mu)(2x - \frac{1}{2}) \cos(\pi y), \\ \mathbf{q}_1(y) = \frac{3}{2}(\lambda + 2\mu) \sin(\pi y) + \frac{1}{2}\pi\lambda \cos(\pi y) - \frac{\alpha}{2} \sin(\pi y), \\ \mathbf{q}_2(y) = \frac{3}{2}\mu \sin(\pi y) + \frac{1}{2}\mu \cos(\pi y) - \frac{\alpha}{2} \sin(\pi y) \end{array} \right.,$$

la solution analytique du problème P_N est donnée par l'expression suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, y) = x(x - 0.5) \sin(\pi y) \\ v(x, y) = x(x - 0.5) \sin(\pi y) \end{array} \right. \quad \text{dans } \tilde{\Omega}.$$

Le problème de domaine fictif est résolu dans Ω avec la condition aux limites immergée de Fourier en utilisant la méthode de pénalisation (F) décrite dans le tableau 3.1, section 3, avec $2\mathbf{S} = \mathbf{I} = \alpha\mathbf{I} = \frac{1}{2}\mathbf{M}$ et $-\mathbf{h} = 2\mathbf{g} = \mathbf{q}$.

Les résultats ci-dessous sont obtenus dans le domaine fictif $\Omega = \tilde{\Omega} \cup \Omega_e =]0, 1.5[\times]0, 1[$, avec (N_x, N_y) variant de (12, 10) à (72, 60) (voir le tableau 3.14).

La figure 3.43 montre que la convergence de la méthode (F) (voir le tableau 3.1) est optimal pour la condition de Fourier immergée. La solution dans le domaine Ω_e n'a pas d'influence sur la solution physique.

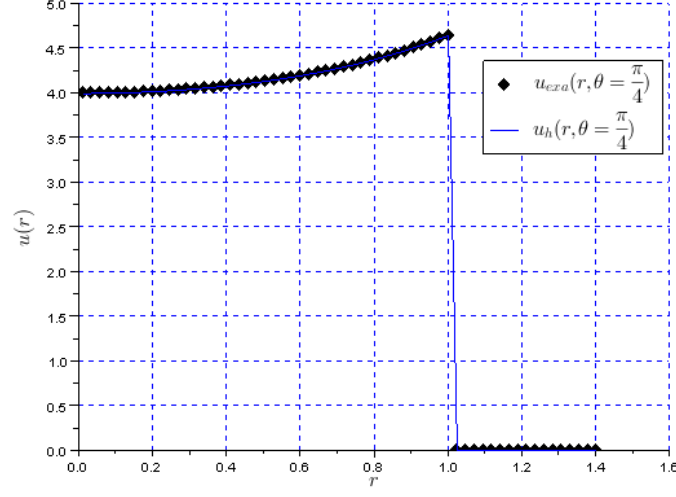
Projection sur $(\theta = \frac{\pi}{4})$ de $u(x,y) = 3 + \exp(x^2)$ et la S . approchéeFig. 3.28 – Comparaison des solutions sur l'axe $\theta = \frac{\pi}{4}$

TABLE 3.14 – Variation d'erreurs relatives en fonction du nombre des points de discrétisation pour la condition de Fourier

(M_x, M_y)	(12,10)	(24,20)	(36,30)	(48,40)	(60,50)	(72,60)
er	$9.424973e-3$	$2.402573e-3$	$1.068479e-3$	$5.968244e-4$	$3.786357e-4$	$2.621634e-4$
$\ u_e\ $	1.447D-14	5.775D-14	1.004D-13	3.864D-13	3.776D-13	

3.7.2 Deuxième problème de test. Un domaine de forme L.

Problème de Dirichlet.

Premièrement, nous considérons le problème de Dirichlet homogène suivant :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \sigma(\tilde{u}) = f & \text{dans } \tilde{\Omega}, \\ \tilde{u} = 0 & \text{sur } \tilde{\Gamma}, \\ \tilde{u} = 0 & \text{sur } \Sigma(u_D = 0), \end{cases}$$

où $\Sigma = \Sigma_x \cup \Sigma_y$ telle que

$$\Sigma_x = \left\{ (x, y) / x = \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \leq y \leq 1 \right\} \quad \text{et} \quad \Sigma_y = \left\{ (x, y) / y = \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \right\},$$

la donnée f est choisie de manière que le problème admet la solution analytique suivante

Solution exacte $u(x, y) = 3 + \exp(x^2)$ du Pro. de diffusion ;

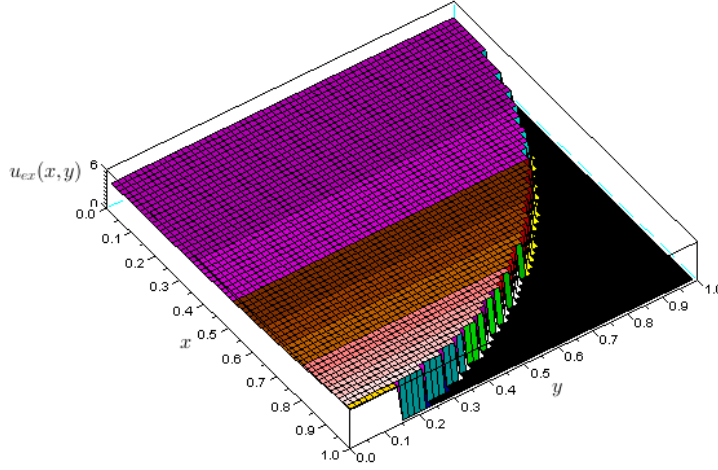


Fig. 3.29 – La solution exacte du problème de diffusion avec la condition de dirichlet non homogène dans un quart de cercle

$$\begin{cases} u(x, y) = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) \\ v(x, y) = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) \end{cases} \quad \text{dans } \tilde{\Omega}.$$

La Figure 3.45 donne un exemple du maillage uniforme rectangulaire et une interface immergée dans le domaine fictif, cette géométrie est utilisée pour les problèmes du test qui nous allons présenter dans la suite.

Les calculs sont effectués avec la valeur du paramètre de pénalisation $\eta = \frac{h}{2(\lambda + 2\mu)} = O(10^{-7})$.

TABLE 3.15 – Variation d'erreurs relatives en fonction du nombre des points de discrétisation pour la condition de Dirichlet pour un domaine de forme L

(M_x, M_y)	10	20	40	80	140
$\frac{ u_{ex} - u_h }{ u_{ex} }$	$6.985083e - 002$	$3.443881e - 002$	$1.679944e - 002$	$8.292075e - 003$	$4.728605e - 03$

La Figure 3.46 montre la convergence de l'erreur numérique relative en norme L^2 par rapport au pas de discrétisation h par la méthode (J. E. B. C.) (D1).

Remarque 3.7.1. Dans le cas où le domaine est de forme L , l'interface Σ est une combinaison de lignes droites qui sont parallèles à l'axe soit (ox) ou l'axe (oy) , l'interface approchée Σ_h est définie exactement, c'est à dire $\Sigma = \Sigma_h = \Sigma_h^{ext} = \Sigma_h^{cut}$.

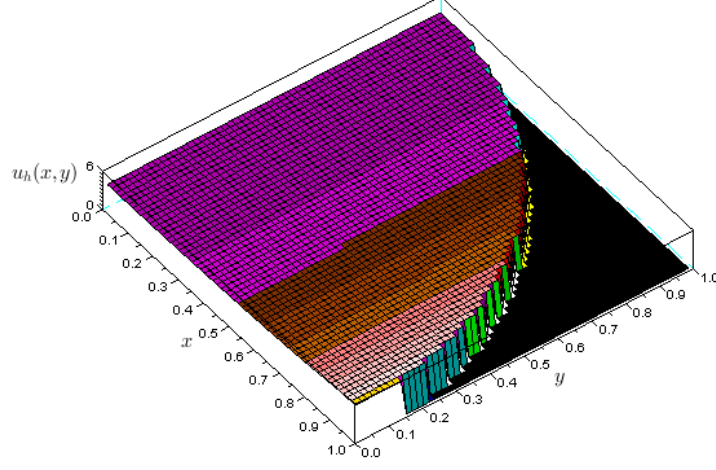
Solution approchée du Pro. de diffusion avec C. D. NH ; Maillage 60×60


Fig. 3.30 – La solution approchée du problème de diffusion avec la condition de dirichlet non homogène dans un quart de cercle

Afin de valider la méthode (D1) pour toute condition de Dirichlet, nous allons maintenant étudier un problème de Dirichlet non homogène

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \sigma(\tilde{u}) = f & \text{dans } \tilde{\Omega}, \\ \tilde{u} = 0 & \text{sur } \tilde{\Gamma}, \\ \tilde{u} = u_D & \text{sur } \Sigma, \end{cases}$$

où

$$u_{D,x} = \begin{cases} \frac{3}{16} \sin(\pi y) \\ \frac{3}{16} \sin(\pi y) \end{cases}, \quad \frac{3}{4} \leq y \leq 1,$$

$$u_{D,y} = \begin{cases} x(x-1) \sin(\frac{3\pi}{4}) \\ x(x-1) \sin(\frac{3\pi}{4}) \end{cases}, \quad \frac{3}{4} \leq x \leq 1,$$

qui a la solution analytique $\tilde{u}(x, y) = \tilde{v}(x, y) = x(x-1) \sin(\pi y)$ dans $\tilde{\Omega}$.

Ensuite, le tableau ci-dessous 3.16 donne la norme de l'erreur relative pour le problème de Dirichlet non homogène dans un domaine de forme L , ici $\eta = \frac{1}{2(\lambda + 2\mu)M_x}$.

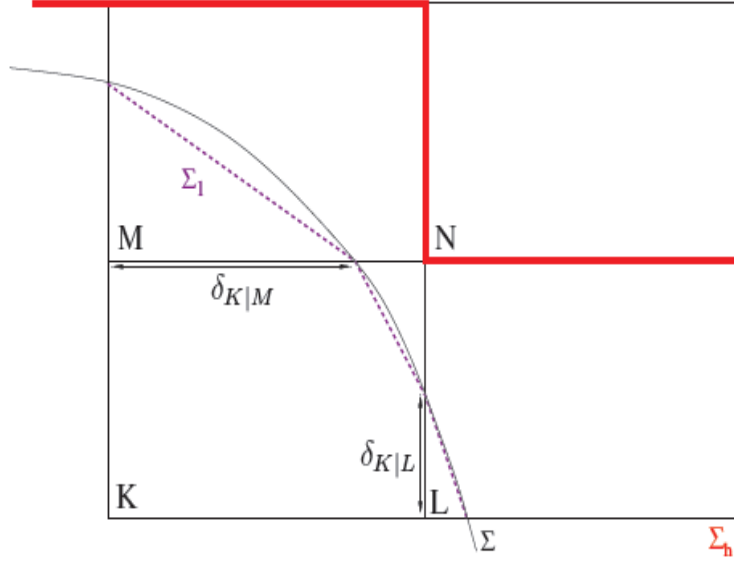


Fig. 3.31 – La correction local δ_K dans le contrôl volume $K \subset \omega_{h,\Sigma}$

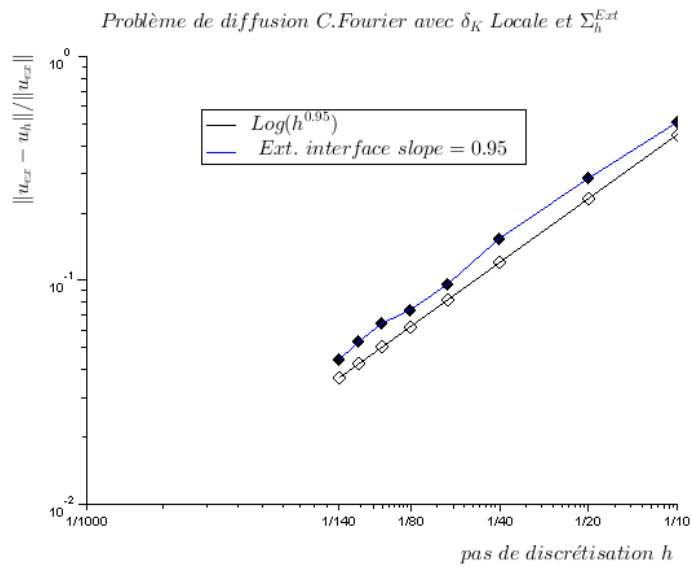


Fig. 3.32 – Ordre de convergence de la méthode E.B.C. (F1) pour la condition de Fourier avec une correction locale δ_K de l'interface Σ_h^{Ext}

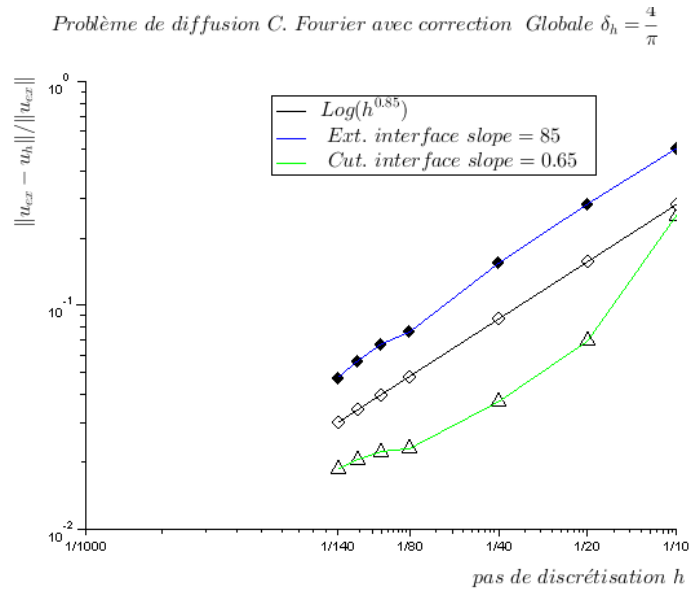


Fig. 3.33 – Ordre de convergence de la méthode E.B.C. (F1) pour la condition de Fourier avec une correction globale δ_h de l'interface

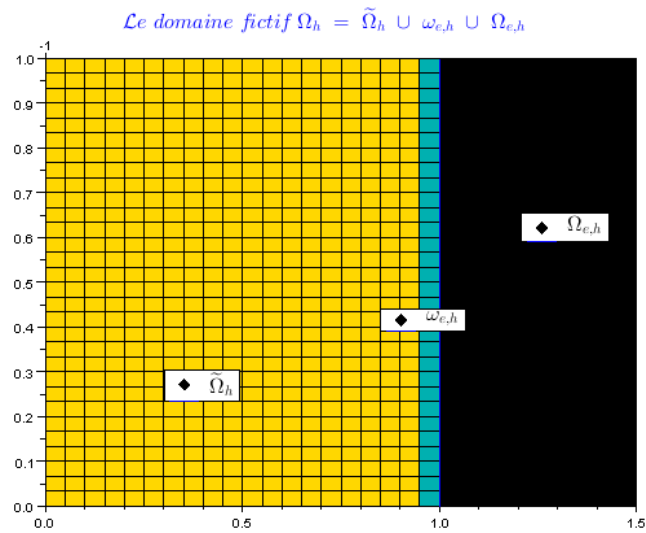


Fig. 3.34 – Le domaine physique immergé dans le domaine fictif $\tilde{\Omega} =]0, 1.5[\times]0, 1[$

La méthode J.E.B.C. pour la C.Dirich. homogène dans un carré (slope = 1.)

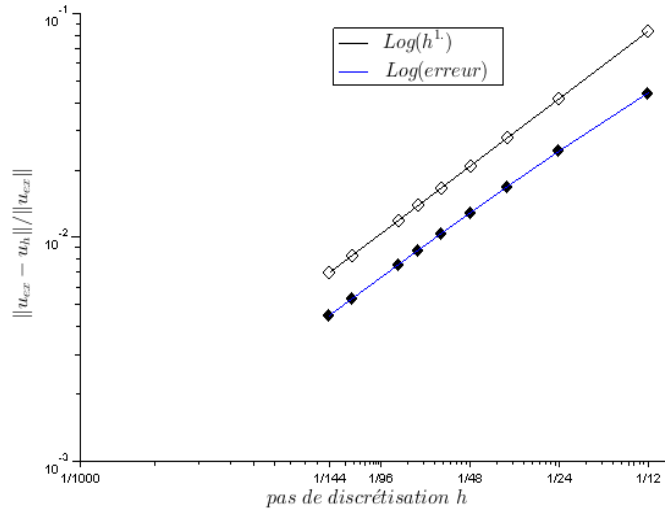


Fig. 3.35 – L'ordre de convergence du méthode $D1$ dans le domaine fictif $\tilde{\Omega} =]0, 1.2[\times]0, 1[$ pour la condition de Dirichlet homogène

La méthode J.E.B.C. pour la C.Dirich. non homogène dans un carré (slope = 1.1)

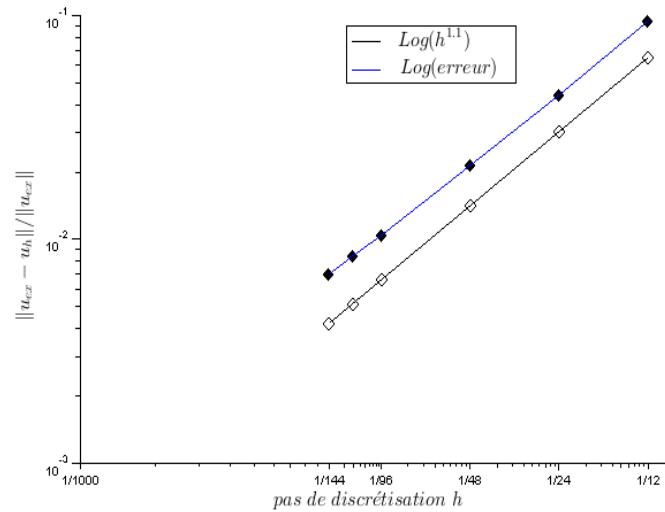


Fig. 3.36 – L'ordre de convergence de la méthode $D1$ dans le domaine fictif $\tilde{\Omega} =]0, 1.2[\times]0, 1[$

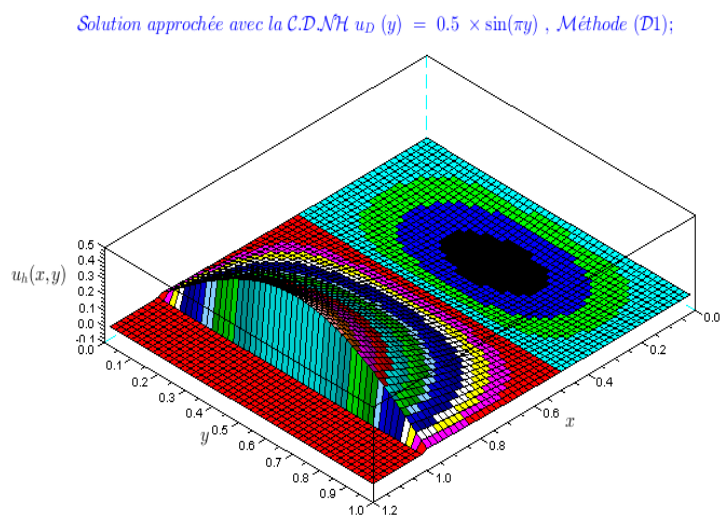


Fig. 3.37 – La solution approchée du problème fictif avec la condtion de Dirichlet non homogène

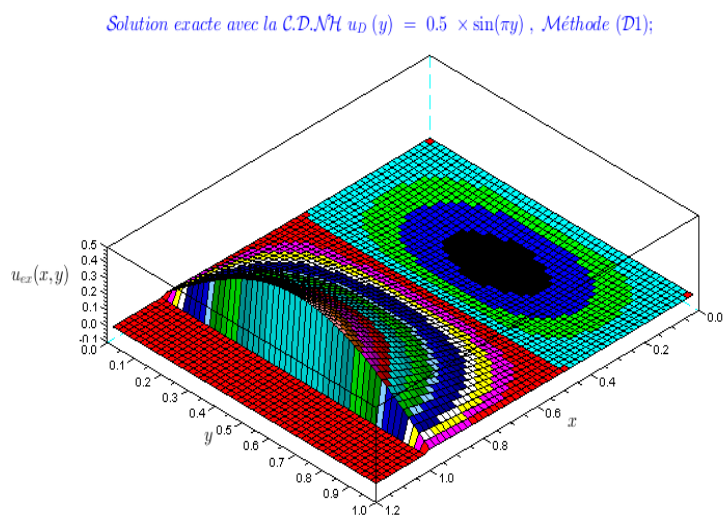


Fig. 3.38 – La solution exacte du problème fictif avec la condition de Dirichlet non homogène

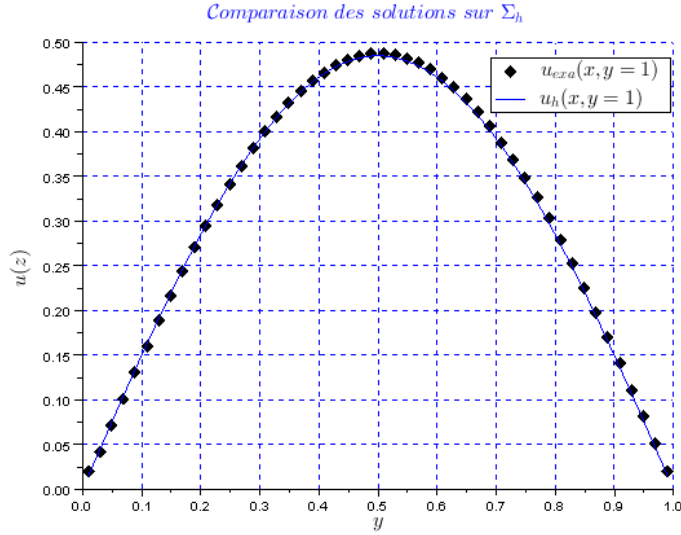


Fig. 3.39 – Les solutions approchée et exacte sur l'interface immergée Σ_h , le domaine fictif est $\tilde{\Omega} =]0, 1.2[\times]0, 1[$

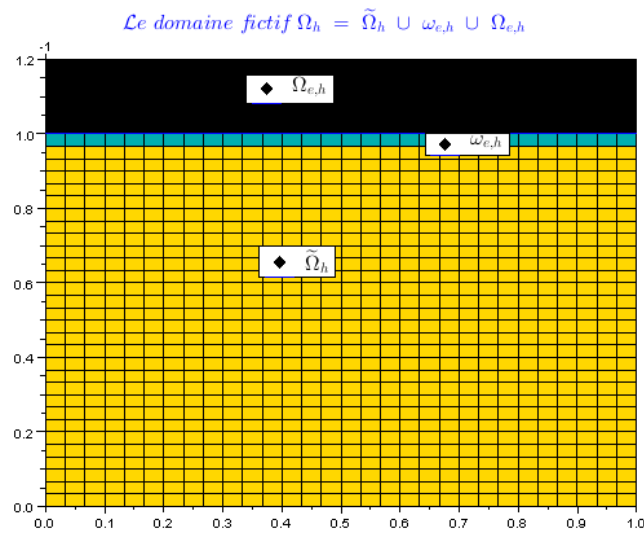


Fig. 3.40 – Domaine fictif de type carré $\Omega =]0, 1[\times]0, 1.2[$ où Σ_h est horizontale

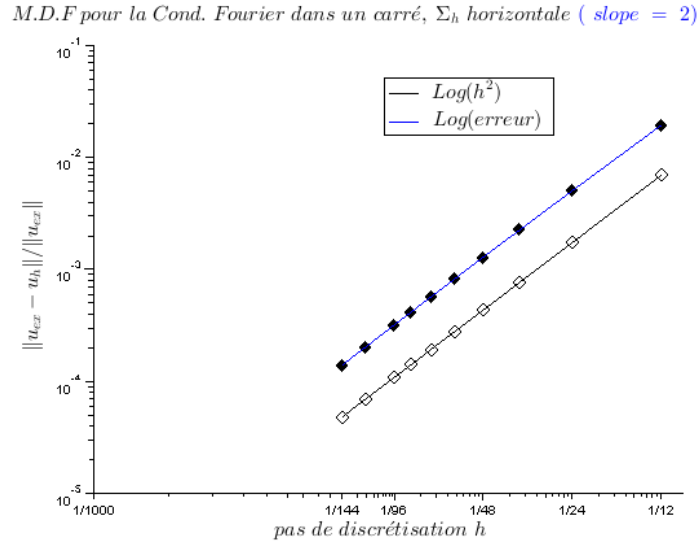


Fig. 3.41 – Ordre de convergence pour le problème fictif avec la condition immergée de Fourier dans le domaine fictif $\Omega =]0, 1[\times]0, 1.2[$

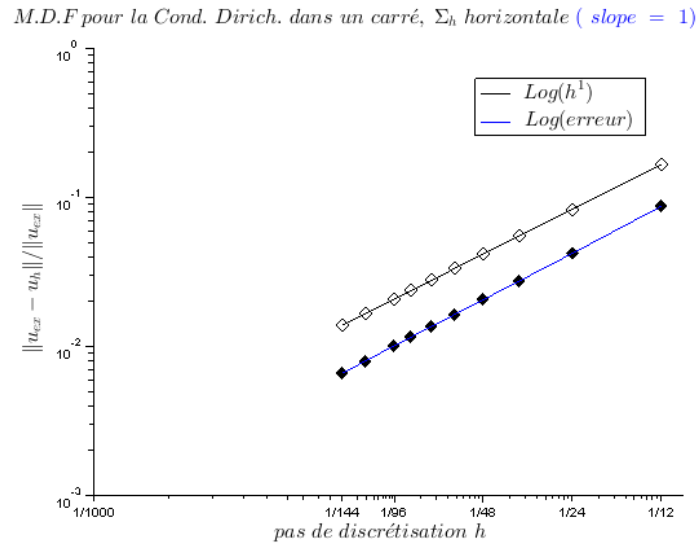


Fig. 3.42 – Ordre de convergence pour le problème fictif avec la condition immergée de Dirichlet non homogène ou non dans $\Omega =]0, 1[\times]0, 1.2[$

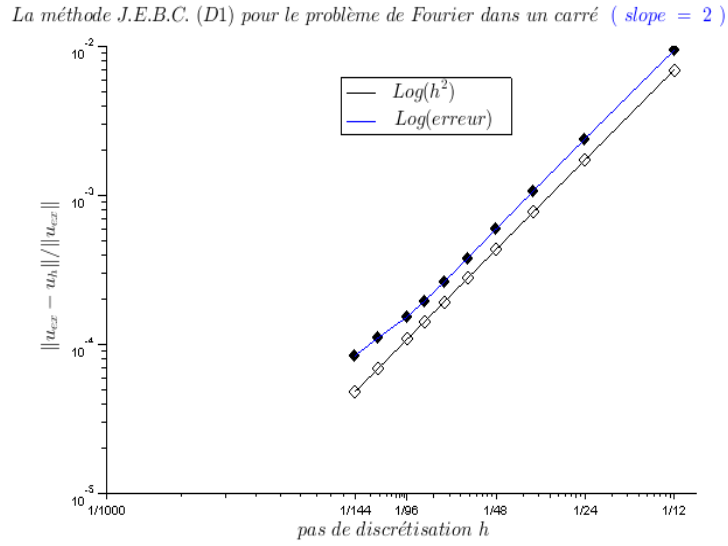


Fig. 3.43 – L'ordre de convergence de la méthode (F) dans le domaine fictif $\tilde{\Omega} =]0, 1.2[\times]0, 1[$

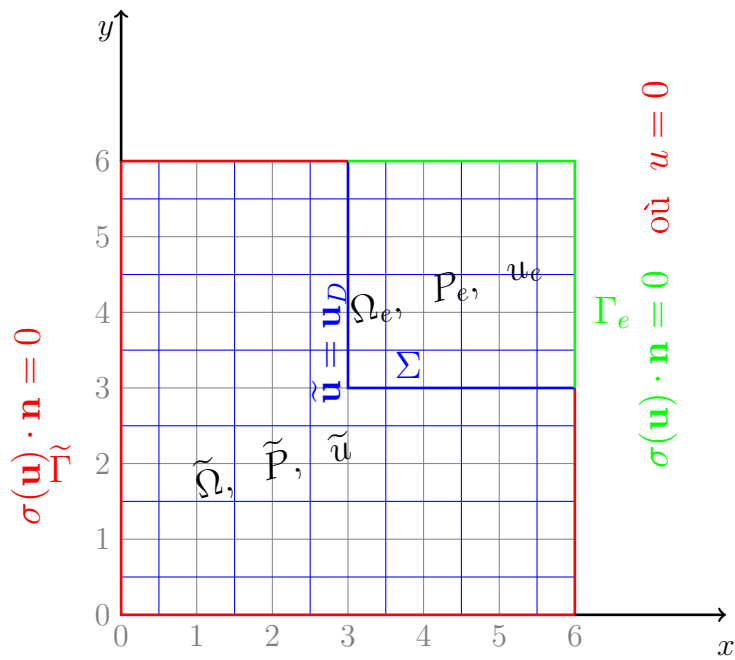


Fig. 3.44 – Discrétisation du domaine fictif $\Omega = \tilde{\Omega} \cup \Omega_e$ par des volumes finis rectangulaires

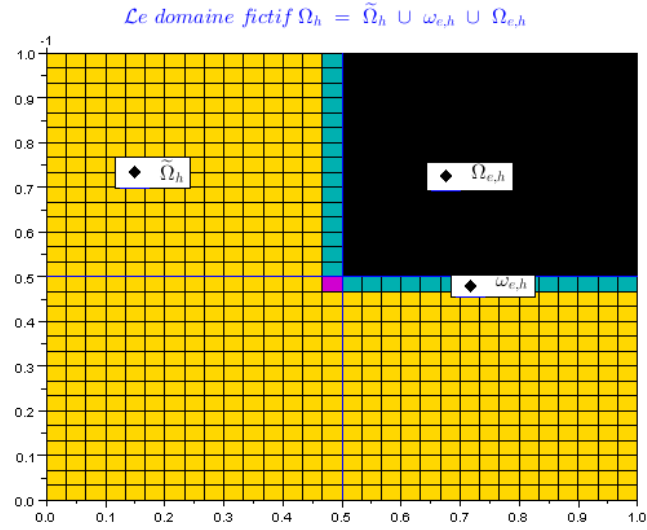


Fig. 3.45 – Le domaine physique immergé dans le domaine fictif $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$

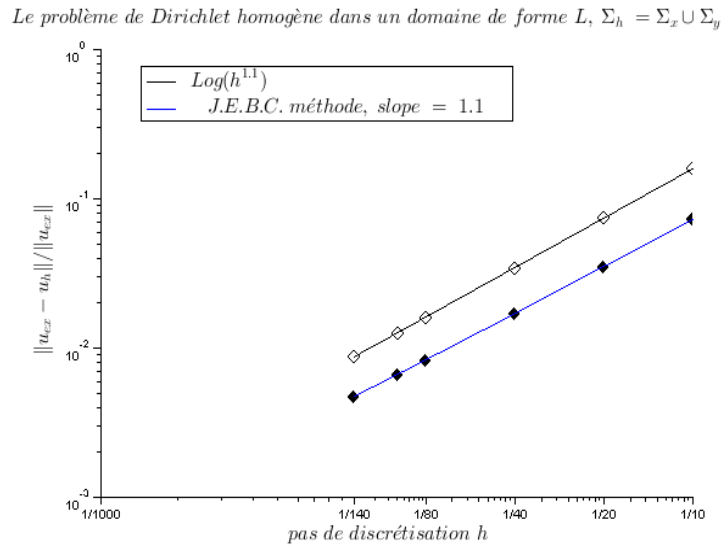
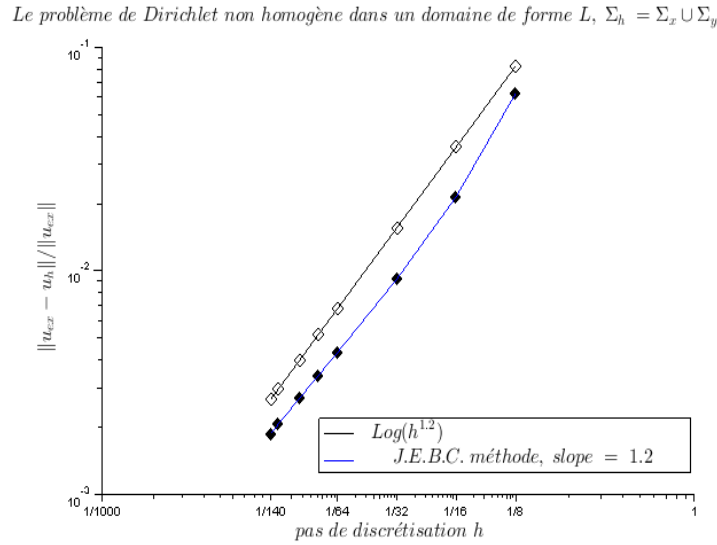


Fig. 3.46 – La convergence de la méthode en fonction du paramètre de discrétisation h , par (J. E. B. C. method (D1)) .

TABLE 3.16 – Variation d'erreur relative en fonction du nombre des points de discrétisation pour la condition de Dirichlet non homogène dans un domaine de forme L

$(M_x = M_y)$	8	16	32	64	128	140
$\frac{ u_{ex} - u_h }{ u_{ex} }$	$3.111604e - 2$	$1.075866e - 2$	$4.604882e - 3$	$2.164175e - 3$	$1.032435e - 3$	$9.361342e - 4$

Fig. 3.47 – La convergence de la méthode en fonction du paramètre de discrétisation h , par la méthode (D1) pour la condition de Dirichlet non homogène dans un domaine de type L .

Remarque 3.7.2. Des résultats similaires sont obtenus avec $\eta = 10^{-10}$.

Le problème fictif dans Ω est résolu en utilisant la méthode (D1). Comme montre la figure 3.47, une précision du premier ordre 1 est atteinte pour la norme L^2 .

Problème de Neumann ou Robin.

Nous allons maintenant examiner le problème de Neumann

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \sigma(\tilde{\mathbf{u}}) = f & \text{dans } \tilde{\Omega} \\ \tilde{\mathbf{u}} = 0 & \text{sur } \tilde{\Gamma} \\ \sigma(\tilde{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{n} = \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{g} & \text{sur } \Sigma = \Sigma_x \cup \Sigma_y (\alpha_R = I, g_R = \mathbf{g}), \end{cases},$$

où

$$f(x, y) = \begin{cases} -2(\lambda + 2\mu) \sin(\pi y) + \pi^2 \mu x(x-1) \sin(\pi y) - \pi(\lambda + \mu)(2x-1) \cos(\pi y) \\ -2\mu \sin(\pi y) + \pi^2(\lambda + 2\mu)x(x-1) \sin(\pi y) - \pi(\lambda + \mu)(2x-1) \cos(\pi y) \end{cases},$$

$$\begin{aligned} \Sigma_x &= \left\{ (x, y) / x = \frac{3}{4} \text{ et } \frac{3}{4} \leq y \leq 1 \right\} \\ \Sigma_y &= \left\{ (x, y) / y = \frac{3}{4} \text{ et } \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g_x(y) &= \begin{cases} -\frac{1}{2}(\lambda + 2\mu) \sin(\pi y) + \frac{3}{16} \lambda \pi \cos(\pi y) + \frac{3}{16} \alpha_R \sin(\pi y) \\ -\mu \left(\frac{1}{2} \sin(\pi y) - \frac{3}{16} \pi \cos(\pi y) \right) + \frac{3}{16} \alpha \sin(\pi y) \end{cases}, & \frac{3}{4} \leq y \leq 1 \\ g_y(x) &= \begin{cases} -\mu \left((2x-1) \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \pi x(x-1) \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right) + \alpha x(x-1) \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\ -\lambda(2x-1) \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \pi(\lambda + 2\mu)x(x-1) \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \alpha x(x-1) \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \end{cases}, & \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

Les résultats obtenus sont illustrés dans le tableau ci-dessous 3.17, et représentés dans la figure 3.48, cette dernière montre que la convergence est d'ordre optimal.

TABLE 3.17 – Variation d'erreur relative en fonction du nombre des points de discrétisation pour la condition de Fourier pour un domaine de forme L

$(M_x = M_y)$	8	16	32	64	128	140
$\frac{ u_{ex} - u_h }{ u_{ex} }$	$2.063301e-2$	$4.914116e-3$	$1.181075e-3$	$2.825945e-4$	$6.513587e-5$	$5.352028e-5$

Pour voir le comportement de la solution au coin $(x = \frac{3}{4}, y = \frac{3}{4})$, il faut tracer et comparer les projections des solutions sur l'axe $(y = x)$. (voir la figure 3.49)

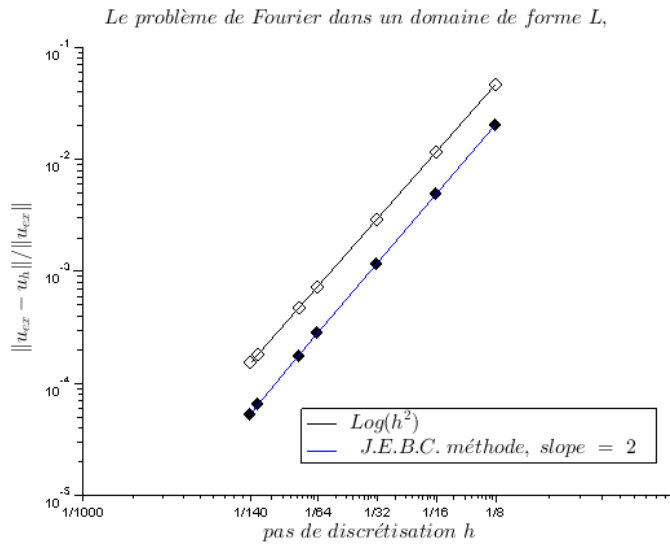


Fig. 3.48 – La convergence de la méthode en fonction du paramètre de discrétisation h , par (E. B. C. method (F)) pour la condition de Fourier.

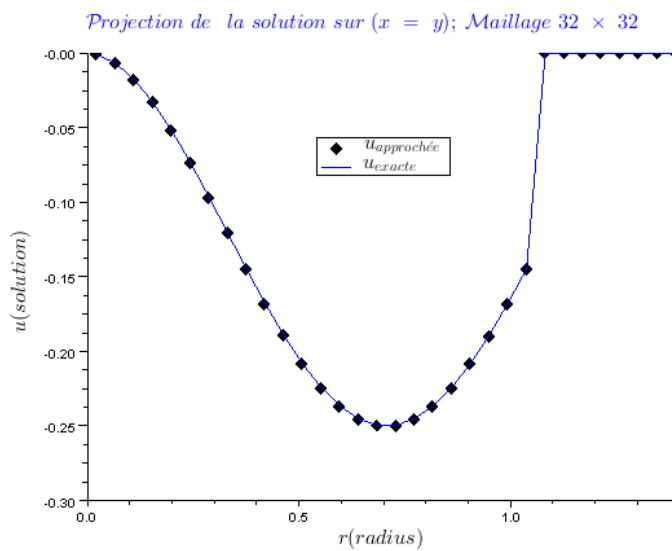


Fig. 3.49 – Comparaison des solutions sur l'axe $x = y$

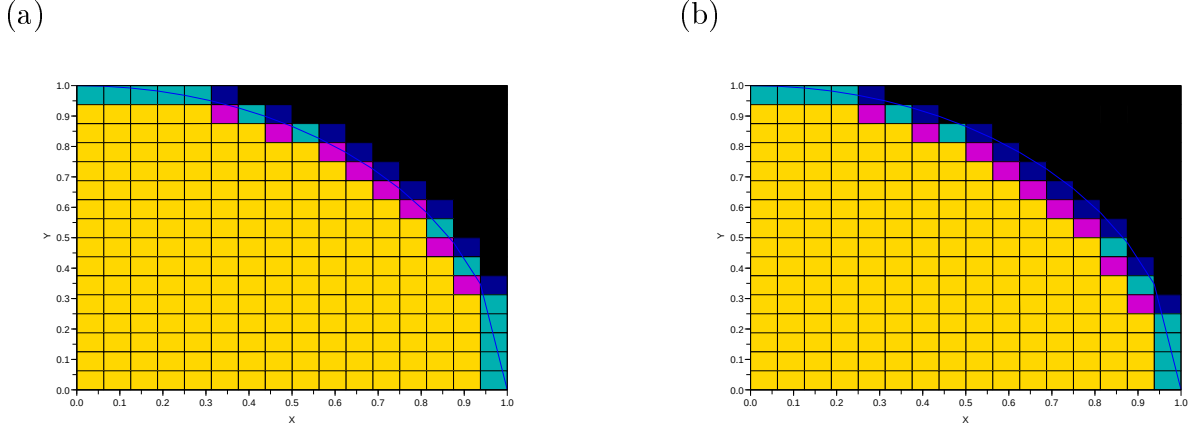


Fig. 3.50 – Maillage non-conforme, l'interface approchée Σ_h et le domaine approché $\tilde{\Omega}_h$. (a) Interface approchée extérieure Σ_h^{ext} , (b) Interface approchée coupée Σ_h^{cut} .

3.7.3 Troisième problème de test. Un domaine quart de disque

Le cas de Dirichlet.

Nous considérons maintenant un domaine de quart de disque $\tilde{\Omega}$ immergé dans un domaine carré $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$. Cela définit une interface immergée Σ pour le domaine original (le quart de disque). Comme dans le cas du domaine de forme L , le domaine fictif Ω est maillé avec un pas de discrétisation uniforme. L'interface approchée Σ_h est composée de côtés des mailles, est choisi de telle sorte qu'il traverse l'interface physique immergée Σ , voir la figure 3.50.

La figure 3.50, présente la description du domaine quart de disque, maillage associé au domaine fictif et l'interface approchée immergée. (a) l'interface approchée extérieure. (b) interface approchée coupée immergée.

• Problème de Dirichlet homogène

Nous considérons le problème de Dirichlet homogène ci-dessous :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \sigma(\tilde{u}) = f & \text{dans } \tilde{\Omega}, \\ \tilde{u} = 0 & \text{sur } \tilde{\Gamma}, \\ \tilde{u} = u_D = 0 & \text{sur } \Sigma, \end{cases}$$

où

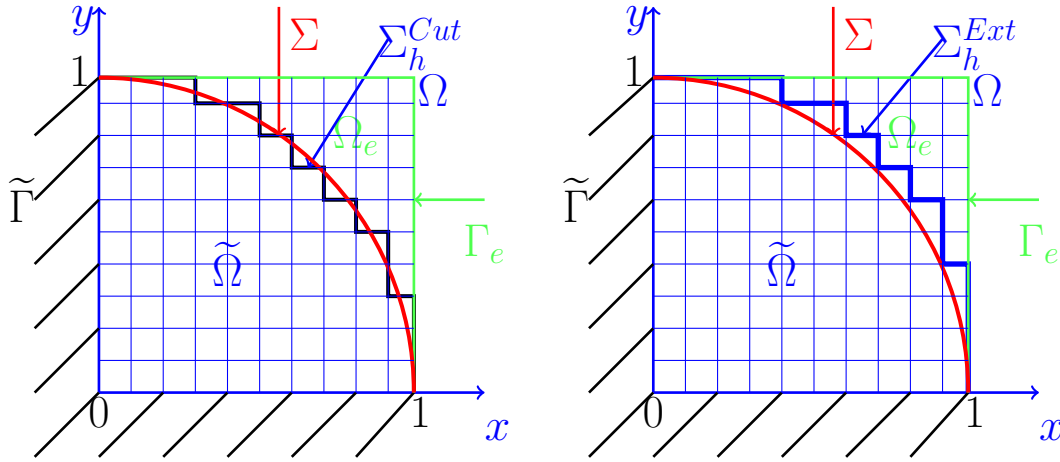


Fig. 3.51 – Interface approchée Σ_h et domaine physique approché $\tilde{\Omega}_h$. Interface approchée Extérieure Σ_h^{ext} (à droite). Interface approchée coupée Σ_h^{cut} (à gauche).

$$\begin{cases} f^1(x, y) = ((\lambda + 2\mu)xy(6 + x^2) + \mu xy(6 + y^2) + ((\lambda + \mu)(1 + 2r^2 + x^2y^2))\exp((r^2 - 1)/4) - 4) \\ f^2(x, y) = ((\lambda + 2\mu)xy(6 + y^2) + \mu xy(6 + x^2) + ((\lambda + \mu)(1 + 2r^2 + x^2y^2))\exp((r^2 - 1)/4) - 4) \end{cases}$$

qui a la solution analytique

$$\tilde{u}(x, y) = \tilde{v}(x, y) = 4xy(1 - \exp(\frac{1}{4}(r^2 - 1))) \quad \text{dans } \tilde{\Omega}, \quad \text{où } r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Avec $\eta = \frac{h}{2(\lambda + 2\mu)}$ et en utilisant une approche coupée Σ_h^{cut} de l'interface, le tableau ci-dessous 3.18, nous donne la norme L^2 de l'erreur relative pour le problème de Dirichlet homogène dans un quart de disque.

TABLE 3.18 – Variation d'erreur relative en fonction du pas de discrétisation pour le problème de Dirichlet homogène dans un quart de disque

Step(h)	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{80}$	$\frac{1}{140}$
$\frac{ u_{ex} - u_h }{ u_{ex} }$	$2.917033e - 001$	$8.566017e - 002$	$3.120639e - 002$	$1.536794e - 002$	$8.227693e - 003$

La figure 3.52 montre que la convergence du schéma est d'ordre 1.

• Maintenant, nous utilisons la variante (D2) $\mathbf{g} = \mathbf{q} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{M} = \mathbf{S} = \frac{1}{\eta}\mathbf{I}$. Les calculs suivants sont effectués avec $\eta = 1.e - 7$ pour que l'erreur de modélisation soit négligeable devant l'erreur de discrétisation, les résultats sont enregistrés dans le tableau 3.19.

La méthode (F) pour la C.Dirich. homogène dans un quart du cercle (*Cut interface*)

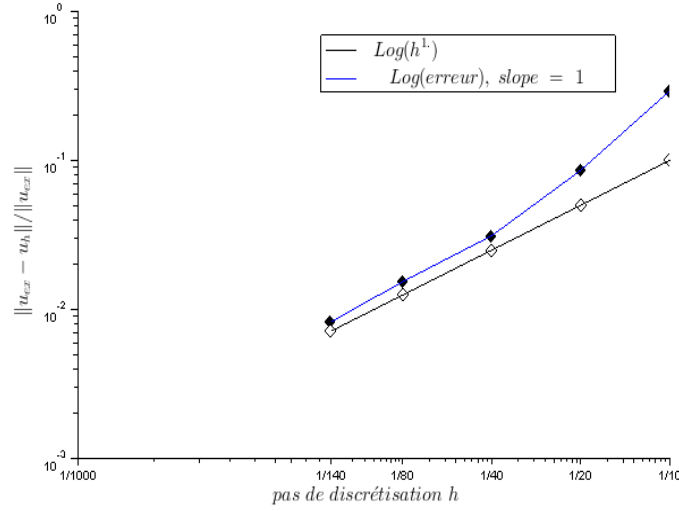


Fig. 3.52 – L'ordre de la convergence de la méthode (F) pour le problème de Dirichlet homogène dans un domaine quart de disque avec une approche coupée de l'interface immergée Σ_h^{Cut}

La méthode (F) pour la C.Dirich. homogène dans un quart du cercle (*Ext interface Σ_h^{Ext}*)

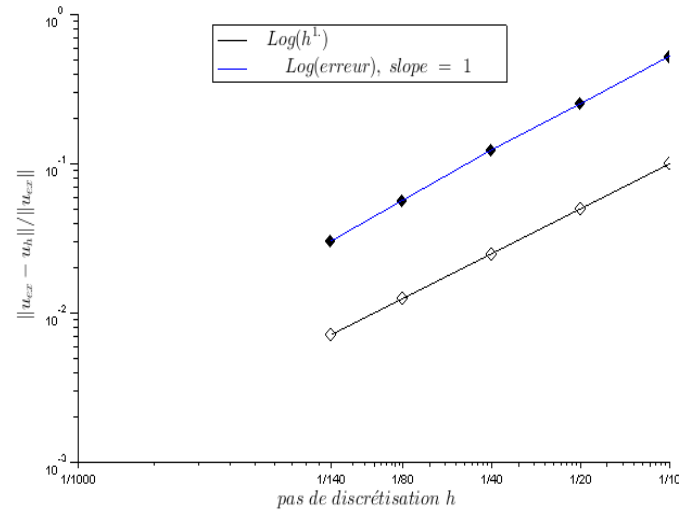
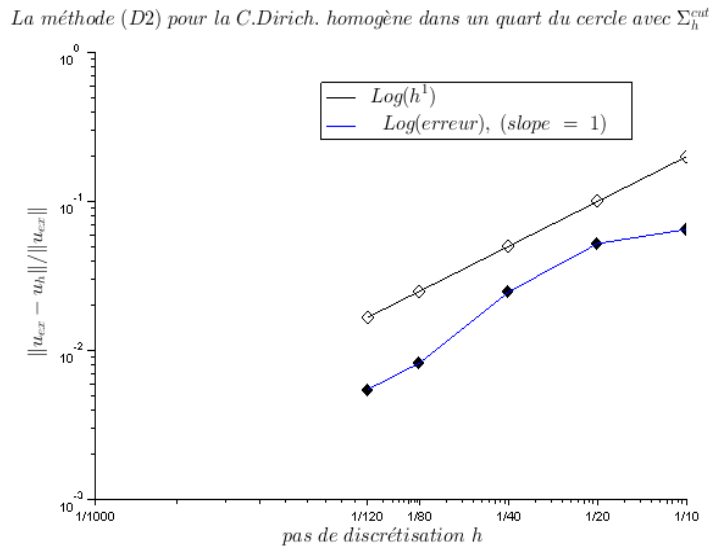


Fig. 3.53 – L'ordre de la convergence de la méthode (F) pour le problème de Dirichlet homogène dans un domaine quart de disque avec une approche extérieur de l'interface immergée Σ_h^{Ext}

TABLE 3.19 – Variation d'erreur relative en fonction du pas de discrétisation pour le problème de Dirichlet homogène dans un quart de disque en utilisant la variante (D2)

Step(h)	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{80}$	$\frac{1}{120}$
$\frac{ u_{ex} - u_h }{ u_{ex} }$	$6.495493e - 002$	$5.215997e - 002$	$2.470691e - 002$	$8.240838e - 003$	$5.464180e - 003$

Fig. 3.54 – L'ordre de la convergence de la méthode ((D1) pour le problème de Dirichlet homogène dans un domaine quart de disque avec une approche coupée de l'interface immergée Σ_h^{Cut}

La figure 3.54 présente la convergence de la méthode (D2) pour la norme de L^2 de l'erreur en fonction du pas de discretisation, pour le problème de dirichlet homogène avec Σ_h^{cut} .

L'erreur relative en norme L^2 en fonction de η , pour le problème de Dirichlet homogène dans un domaine de type quart de disque en utilisant une approche extérieur Σ_h^{ext} de l'interface. Les calculs sont effectués avec un pas de discretisation fixe $h = 1/60$, les résultats sont enregistrés dans le tableau 3.20

• le problème de Dirichlet non homogène

Nous considérons le problème précédant mais avec une condition de Dirichlet non homogène sur Σ telle que la solution exacte est

$$\tilde{u}(x, y) = xy(4 - \sqrt{x^2 + y^2}) \text{ et } \tilde{u} = u_D = \frac{3}{2} \sin(2\theta) \text{ sur } \Sigma, \text{ où } (\theta = \arctan(\frac{y}{x})).$$

TABLE 3.20 – Variation d'erreur relative en fonction du paramètre de pénalisation pour la condition de Dirichlet dans un quart de disque

η	10^{-6}	$\frac{h}{2(\lambda + 2\mu)}$	10^{-8}	10^{-10}	10^{-11}
$\frac{ u_{ex} - u_h }{ u_{ex} }$	0.8239358	0.8117692	0.8021835	0.8019283	0.8019260

TABLE 3.21 – Variation d'erreur relative en fonction du pas de discrétisation pour le problème de Dirichlet non homogène dans un quart de disque

Pas h	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{80}$	$\frac{1}{140}$
$\frac{ u_{ex} - u_h }{ u_{ex} }$	$5.155540e - 002$	$1.908446e - 002$	$9.883820e - 003$	$5.113045e - 003$	$3.390838e - 03$

La figure 3.55 (resp. figure 3.56) présente la solution exacte (resp. approchée) du problème en utilisant la méthode F avec la pénalisation sur la frontière immergée Σ_h^{cut} et un maillage de 40×40 cellules, ainsi que la figure 3.57 montre que les projections des solutions (exacte et approchée) sont identiques.

La figure 3.58 montre que la convergence du schéma est d'ordre 1.

Traitement de la condition de Neumann non homogène.

Lorsque l'interface immergée Σ est approchée par Σ_h , la correction surfacique est nécessaire pour la condition de Robin ou de Neumann non homogène, cela consiste à reconstruire l'interface Σ_h linéairement, en introduisant un paramètre de correction ϵ , soit local ou global. Une correction local lorsque le domaine est un quart de disque est présenté dans [10]. Pour les problèmes d'élasticités plane avec la condition de Neumann on a pu déterminer les composantes du vecteur contrainte sur Σ qui sont les condition aux limites sur l'interface approchée immergée Σ_h . Cette technique conduit à une convergence d'ordre 1.

• Condition de Neumann non homogène.

On considère le problème de Neumann suivant :

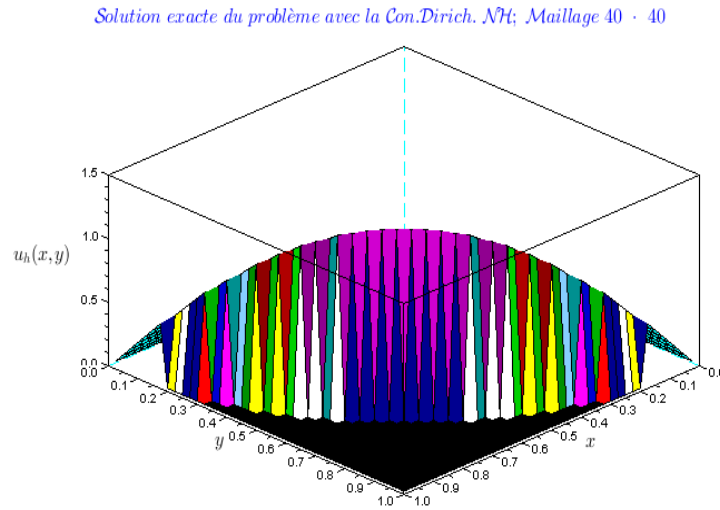


Fig. 3.55 – La solution exacte et approchée du problème fictif avec la C.D. non homogène dans un quart de disque

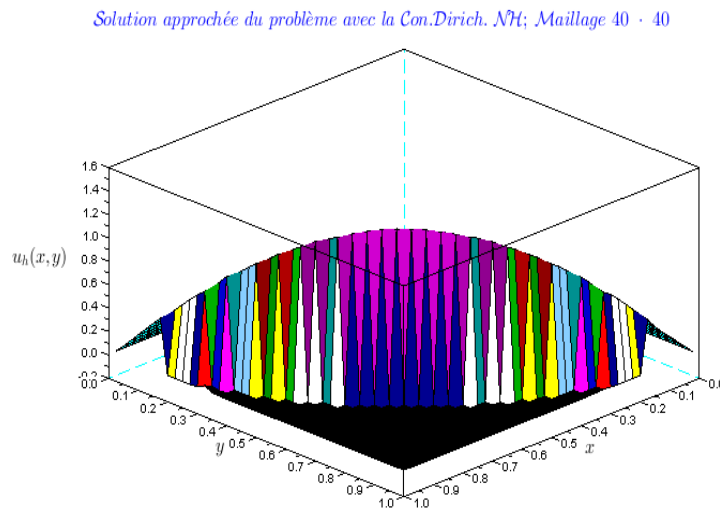


Fig. 3.56 – La solution exacte et approché du problème fictif avec la C.D non homogène dans un quart de disque

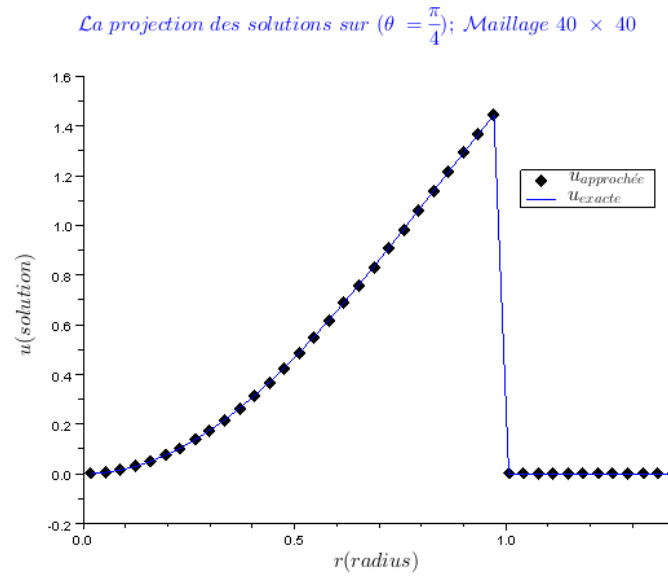


Fig. 3.57 – La projection des solutions pour le problème de Dirichlet non homogène dans un domaine quart de disque avec une approche coupée de l'interface immergée Σ_h^{cut}

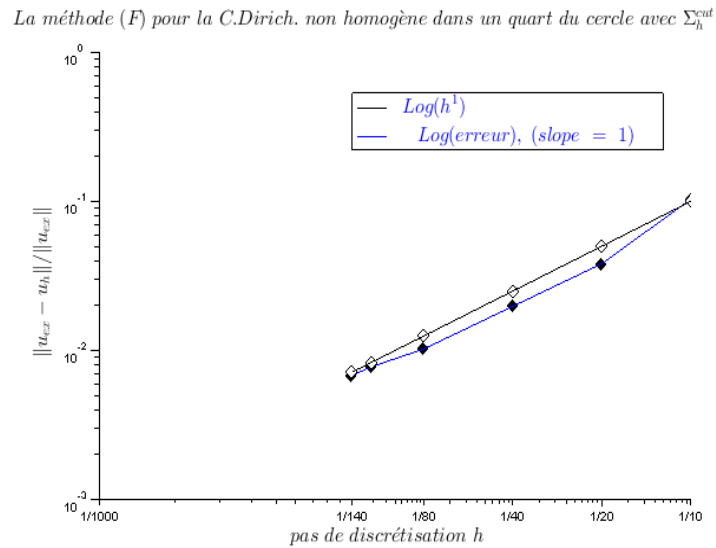


Fig. 3.58 – L'ordre de la convergence de la méthode (F) pour le problème de Dirichlet homogène dans un domaine quart de disque avec une approche coupée de l'interface immergée Σ_h^{cut}

$$(\tilde{\mathcal{P}}_N) \quad \begin{cases} -\nabla \cdot \sigma(\tilde{u}) = f & \text{dans } \tilde{\Omega} \\ \tilde{u} = 0 & \text{sur } \tilde{\Gamma} \\ \sigma(\tilde{u}) \cdot n = \mathbf{q} & \text{sur } \Sigma \end{cases}$$

Nous avons choisi $\tilde{f}$ de sorte que le problème $(\tilde{\mathcal{P}}_N)$ aura la solution analytique $\tilde{u}(x, y) = \tilde{v}(x, y) = 4xy(1 - \exp(\frac{1}{4}(x^2 + y^2 - 1)))$ dans $\tilde{\Omega}$.

$$q = \begin{cases} -\sin(2\theta) \{(\lambda + \mu) \cos(\theta) + \mu \sin(\theta)\} \cdot \mathbf{n}_x - \sqrt{2}\mu \sin(2\theta) \sin(\theta + \pi/4) \cdot \mathbf{n}_y \\ -\sqrt{2}\mu \sin(2\theta) \sin(\theta + \pi/4) \cdot \mathbf{n}_x - \sin(2\theta) \{(\lambda + \mu) \cos(\theta) + \mu \sin(\theta)\} \cdot \mathbf{n}_y \end{cases}$$

avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$,

ou, en coordonnées cartésiennes

$$q = \begin{cases} -2((\lambda + 2\mu)y(1 - y^2) + \lambda y^2 \sqrt{1 - y^2}) \mathbf{n}_x - 2\mu(x(1 - x^2) + x^2 \sqrt{1 - x^2}) \mathbf{n}_y \\ -2\mu(y(1 - y^2) + y^2 \sqrt{1 - y^2}) \mathbf{n}_x - 2((\lambda + 2\mu)x(1 - x^2) + \lambda x^2 \sqrt{1 - x^2}) \mathbf{n}_y \end{cases}$$

Pour le problème de Neumann non homogène associé aux problèmes d'élasticité plane on peut utiliser la décomposition de q suivante :

$$q = \begin{cases} \sigma_{xx} \mathbf{n}_x + \sigma_{xy} \mathbf{n}_y \\ \sigma_{xy} \mathbf{n}_x + \sigma_{yy} \mathbf{n}_y \end{cases}$$

et par suite σ_{xx} (resp. σ_{yy}) est la condition au limite sur les côtés de Σ_h qui sont parallèles à (oy) (resp. ox) (voir la figure 3.59).

Remarque 3.7.3.

1. l'idée de la décomposition consiste à calculer les composantes σ_{xx} et σ_{yy} en fonction de celles de q et les considérées comme des conditions aux limites sur les côtés de l'interface immergée approchée Σ_h .

2. Les résultats numériques obtenus par cette approche de la contrainte normale sur Σ_h sont satisfaisants.

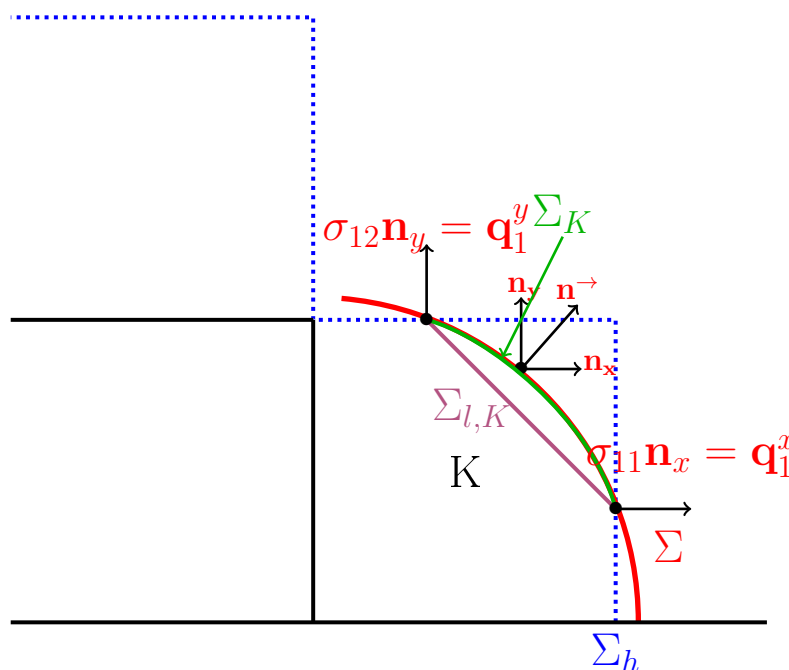


Fig. 3.59 – La décomposition de la contrainte normale $\sigma(u) \cdot \mathbf{n}$ sur les côtes de l'interface immergée Σ_h

Le problème de domaine fictif est résolu dans Ω avec l' E.B.C. méthode (F) sans contrôle extérieur, comme décrit dans le tableau 3.1.

Les résultats d'erreurs relatives pour la norme de L^2 sont enregistrés dans le Tableau 3.23.

TABLE 3.22 – L'erreurs relatives en norme L^2 en fonction du paramètre h pour le problème $\tilde{\mathcal{P}}_N$ dans un quart de disque (F)

Pas de discrétisation h	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{80}$	$\frac{1}{140}$
$\frac{\ u_{ex} - u_h\ }{\ u_{ex}\ }$	$9.777809e - 01$	$3.026692e - 01$	$1.168142e - 01$	$6.250331e - 02$	$3.349663e - 02$

•• Afin de valider l'J.E.B.C. méthode (F) pour des conditions aux limites générales de Neumann, nous étudions maintenant le problème de Neumann suivant :

$$(\tilde{\mathcal{P}}_{N1}) \quad \begin{cases} -\nabla \cdot \sigma(\tilde{u}) = f & \text{dans } \tilde{\Omega} \\ \tilde{u} = 0 & \text{sur } \tilde{\Gamma} \\ \sigma(\tilde{u}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{q} & \text{sur } \Sigma \end{cases}$$

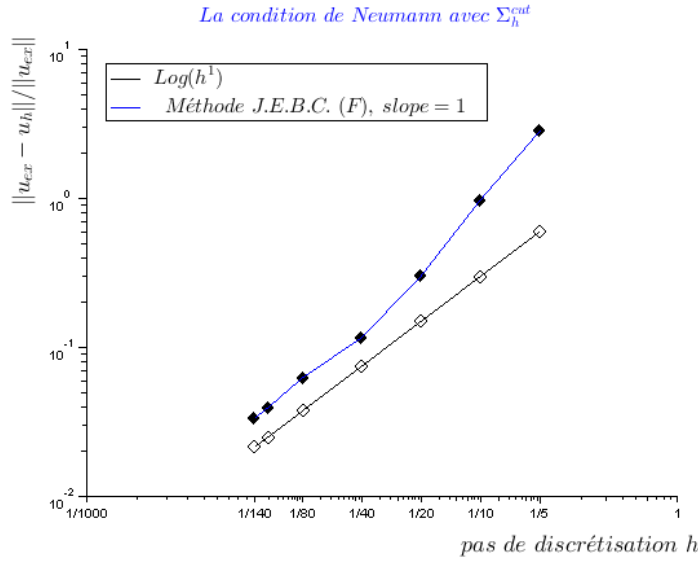


Fig. 3.60 – Ordre de convergence de la méthode J.E.B.C. (F) pour le problème de Neumann non homogène avec l'approche du vecteur contrainte décrite dans la figure 3.59.

qui possède la solution analytique

$$\tilde{u}(x, y) = \tilde{v}(x, y) = xy(4 - (x^2 + y^2)) \quad \text{in } \tilde{\Omega}.$$

Le problème de domaine fictif est résolu dans Ω par la méthode (F) (J.E.B.C.) sans contrôle extérieur décrite dans le Tableau 3.1. Nous examinons dans la Figure 3.61, l'effet de l'approximation du vecteur contrainte sur Σ_h décrite dans la figure 3.59 pour une approche coupée de l'interface Σ_h^{cut} et celle extérieur Σ_h^{ext} où $\delta_h = \frac{4}{\pi}$. On observe que la convergence est d'ordre 1 pour la norme L^2 pour les deux approches de l'interface immergée Σ_h^{cut} et Σ_h^{ext} . Et par suite, la méthode utilisant l'interface coupée est plus précise que celle utilise une approche extérieur de l'interface (voir le Tableau 3.23).

TABLE 3.23 – L'erreurs relatives en norme L^2 en fonction de h pour le problème $\tilde{\mathcal{P}}_{N1}$ en utilisant (F) pour les deux frontières Σ_h^{cut} et Σ_h^{ext}

Pas de discrétisation h	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{80}$	$\frac{1}{140}$
L'interface approchée Σ_h^{cut}					
$\frac{\ u_{ex} - u_h\ }{\ u_{ex}\ }$	$1.120084e - 1$	$3.881485e - 2$	$1.659122e - 2$	$7.018328e - 3$	$3.929775e - 03$
L'interface approchée Σ_h^{ext}					
$\frac{\ u_{ex} - u_h\ }{\ u_{ex}\ }$	$1.685739e - 1$	$7.673013e - 2$	$3.340116e - 2$	$1.449351e - 2$	$7.043891e - 03$

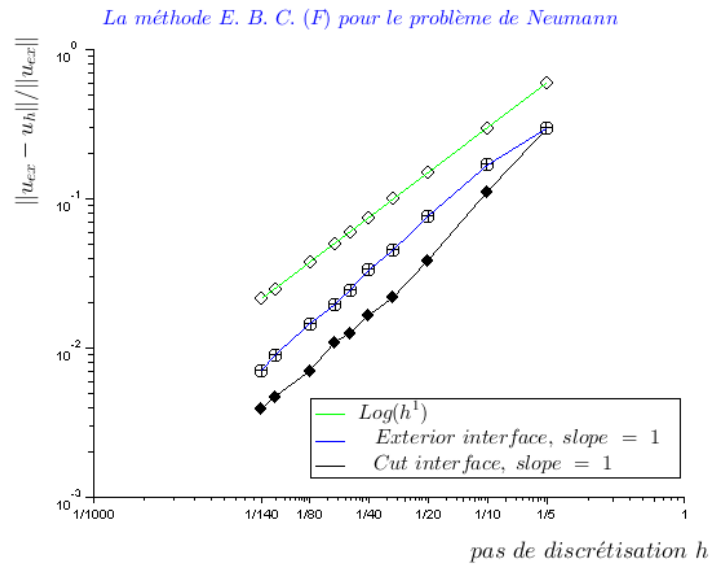


Fig. 3.61 – Convergence de l'E.B.C. méthode (F) pour la norme L^2 pour le problème de Fourier avec les deux approches de l'interface Σ_h^{cut} et Σ_h^{ext} .

Conclusion et Perspectives

La première partie de notre étude est consacrée au calcul des modes de torsion dans un milieu élastique tridimensionnel non borné stratifié et localement perturbé. La modélisation mathématique permet de ramener ce problème à la résolution d'un problème de recherche de valeurs propres pour un opérateur auto-adjoint non borné défini sur un milieu bidimensionnel. Un problème équivalent posé sur un domaine borné est ensuite établi à l'aide des conditions de transmission. Un schéma numérique basé sur la méthode des éléments finis est introduit pour construire un système algébrique de valeurs propres généralisé. Enfin, un algorithme numérique pour calculer les modes propres et leurs pulsations est mis en place. Les résultats numériques que nous avons obtenu confirment et mettent en évidence certains résultats établis théoriquement. Une des approches du domaine fictif pour résoudre les problèmes d'élasticité linéaire a été introduite qui est basée sur une approche d'interface fine et traite des conditions aux limites générales immergées (Dirichlet, Robin et Neumann). Un schéma numérique des volumes finis avec des sauts de flux et de solutions est utilisé pour calculer cette approche. Le principal avantage de cette méthode est son coût faible : la résolution numérique est calculée sur un maillage cartésien simple sans modifier localement le schéma numérique ou introduire des inconnues locales. Cette méthode reste d'une précision du premier ordre.

Dans la prochaine étape de ce travail, nous allons introduire une autre méthode du domaine fictif basée sur une approche d'interface diffuse et nous allons utiliser un schéma numérique d'éléments finis pour traiter des conditions aux limites générales immergées. Ces deux méthodes du domaine fictif restent de premier ordre. Chaque méthode sera alors combinée avec un algorithme de raffinement de maillage multi-niveaux local pour augmenter la précision de la solution.

L'autre perspective va consister à étendre ces méthodes du domaine fictif aux problèmes d'élasticité avec des conditions aux limites mobiles. Ces méthodes du domaine fictif permettent de simuler les frontières mobiles avec un faible coût de calcul et ne nécessitent pas le remaillage du domaine.

Ainsi que les deux perspectives liées à la première partie :

1. On a vu dans la première partie que les valeurs propres associées aux modes de torsion sont les racines de l'équation de dispersion $\mathbf{G}(\alpha, R) = 0$, et que leur nombre est lié à la taille de la perturbation $\mathbf{R}$ que l'on a démontré numériquement. (mettre le cadre théorique).
2. Le cadre théorique des modes propres prolongés dans le spectre essentiel, (L'algorithme que nous avons validé pour le cas présent, reste valable pour calculer ceux modes).

Annexes

1 Fonctions de Bessel

Les fonctions de Bessel sont définies de la manière suivante : considérons l'équation différentielle du second ordre

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad (1)$$

Les solutions de cette équation sont appelées fonctions de Bessel de première et de deuxième espèce : La solution finie à l'origine et notée $J_\nu(x)$ est appelée fonction de Bessel de première espèce et la seconde solution notée $Y_\nu(x)$ est appelée fonction de Bessel de deuxième espèce. Si ν n'est pas un entier, ces fonctions sont reliées par la relation suivante :

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)} \quad (2)$$

Les Figures 1 et 2 représentent graphiquement les fonctions de Bessel de première et de seconde espèces pour les quatre premières valeurs entières de ν . Le comportement asymptotique des fonctions de Bessel de première et de seconde espèce est le suivant

$$J_\nu(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} (\cos(x - \nu\pi/2 - \pi/4)) \quad (3)$$

$$Y_\nu(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} (\sin(x - \nu\pi/2 - \pi/4)) \quad (4)$$

• fonctions de Bessel modifiées

Soit l'équation différentielle du second ordre

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + \nu^2)y = 0 \quad (5)$$

Les solutions de cette équation sont appelées fonctions de Bessel modifiées. La solution finie à l'origine notée $I_\nu(x)$ est appelée fonction de Bessel modifiée de première espèce et la

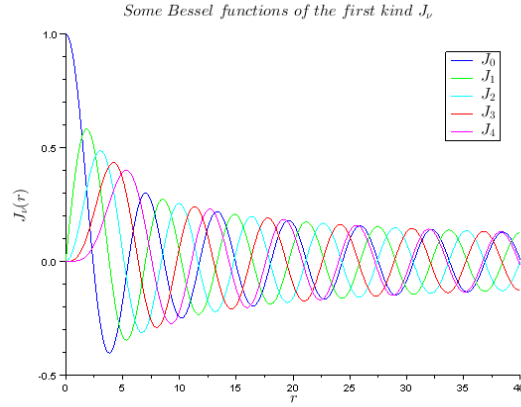


Fig. 1 – Les quatre premières fonctions de Bessel entières de première espèce J_ν .

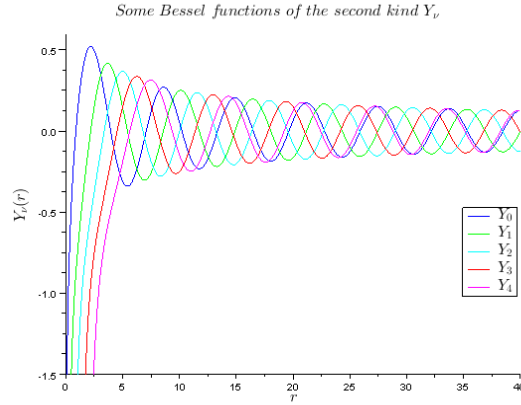


Fig. 2 – Les quatre premières fonctions de Bessel entières de deuxième espèce Y_ν .

seconde solution notée $K_\nu(x)$ est appelée fonction de Bessel modifiée de seconde espèce. Ces fonctions sont reliées par la relation suivante :

$$K_\nu(x) = \frac{\pi(I_\nu(-x) - I_\nu(x))}{2 \sin(\nu\pi)} \quad (6)$$

Les Figures 3 et 4 représentent graphiquement les fonctions de Bessel modifiées de première et de deuxième espèce pour les quatre premières valeurs entières de ν .

Le comportement asymptotique des fonctions de Bessel modifiées est le suivant :

$$I_\nu(x) \simeq \frac{\exp(x)}{\sqrt{2\pi x}} \quad (7)$$

$$K_\nu(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp(-x) \quad (8)$$

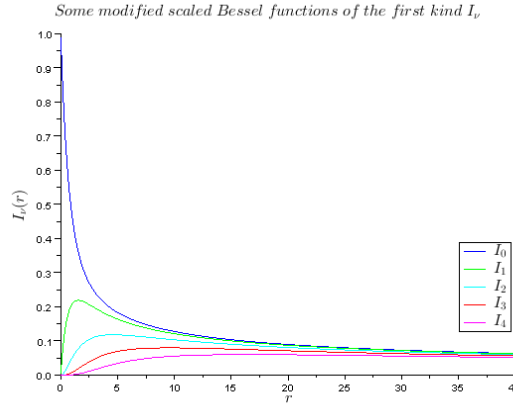


Fig. 3 – Les quatre premières fonctions de Bessel entières modifiées de première espèce I_ν .

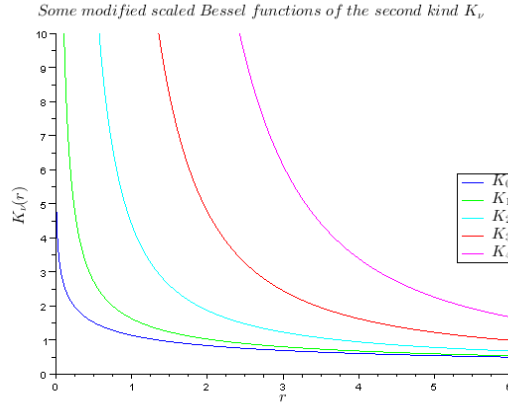


Fig. 4 – Les quatre premières fonctions de Bessel entières modifiées de deuxième espèce K_ν .

Les fonctions de Hankel $H_{1;\nu}$ et $H_{2;\nu}$ sont appelées fonctions de Bessel de troisième espèce et sont définies par la relation

$$H_{1;\nu} = J_\nu(x) + iY_\nu(x) \quad (9)$$

$$H_{2;\nu} = J_\nu(x) - iY_\nu(x) \quad (10)$$

2 Calcul des éléments des matrices A, B et $D^N(\alpha)$

Soit h_2 un paramètre reel qui tend vers 0, tel que $h_2 = \frac{L}{M_z}$, où L est l'épaisseur de la couche.

On fait une numérotation par ligne correspond au choix de la bijection suivante :

$$(m, l) \longrightarrow i = F(m, l) = l + M_r \times (m - 1).$$

Proposition 3.2.1. *Les coefficients de Fourier des fonctions de base sont tels que :*

1. Pour tout $(m, l) \in \{ l = M_r, 1 \leq m \leq M_z \}$ on a :

$$C_{m,l}^p = 0, \quad 0 \leq p \leq N.$$

2. Pour tout $(m, l) \in \{ 1 \leq l \leq M_r - 1, 1 \leq m \leq M_z \}$

$$C_{m,M_r}^p = \frac{2}{h \times h_2 \beta_p^2} [2g(\beta_p m h_2) - g(\beta_p (m - 1) h_2) - g(\beta_p (m + 1) h_2)],$$

$$C_{M_z,M_r}^p = \frac{2}{h \times h_2 \beta_p^2} [2g(\beta_p M_z h_2) - g(\beta_p (M_z - 1) h_2)], \quad 0 \leq p \leq N,$$

$$\text{où } \beta_p = \frac{(2p + 1)}{2h} \pi, \quad g(x) = \sin(x) \quad \text{et} \quad \alpha \in [c_-^2 \beta_1, c_\infty^2 \beta_1[.$$

Les éléments de la matrice $D^N(\alpha)$ sont donnés dans la proposition 3.2.2.

Proposition 3.2.2. 1. Pour tout $(m, l) \in \{ 1 \leq l \leq M_r - 1, 1 \leq m \leq M_z \}$ on a :

$$d(\alpha)[i, j] = 0.$$

2. Pour tout $(m, l) \in \{ l = M_r, 1 \leq m \leq M_z \}$ on a :

$$d(\alpha)[i, j] = \mu_\infty \sum_{p=1_n}^{p=N} \left\{ \frac{\lambda_p(\alpha) R K_1'(\lambda_p(\alpha) R)}{K_1(\lambda_p(\alpha) R)} - 1 \right\} C_i^p C_j^p, \quad \text{où } \lambda_p^2(\alpha) = \beta_p^2 - \frac{\alpha^2}{c_\infty^2}.$$

Les intégrales du coefficient de Lamé μ et la densité ρ sur chaque élément fini sont approximées par leurs valeurs moyennes.

Les éléments des matrices **A** et **B** sont donnés par les expressions suivantes :

• **Les éléments intérieurs**

Pour tout $(m, l) \in \{ 1 \leq l \leq M_r - 1, 1 \leq m \leq M_z \}$ on a :

$$\begin{aligned}
A[i, i] &= -\frac{h_2}{3} [\mu_{m,l}^{-\frac{1}{2}} - \mu_{m,l+1}^{-\frac{1}{2}} + \mu_{m+1,l}^{+\frac{1}{2}} - \mu_{m+1,l+1}^{+\frac{1}{2}}] \\
&\quad + h_2 [\mu_{m,l}^{-\frac{1}{2}} (\frac{l}{2} - \frac{1}{3}) + \mu_{m+1,l+1}^{+\frac{1}{2}} (\frac{l+1}{2} - \frac{1}{6})] \\
&\quad + \frac{h_1^2 + h_2^2}{h_2} [\mu_{m,l+1}^{-\frac{1}{2}} (\frac{l+1}{2} - \frac{1}{3}) + \mu_{m+1,l}^{+\frac{1}{2}} (\frac{l}{2} - \frac{1}{6})] \\
&\quad + \frac{h_1^2}{h_2} [\mu_{m,l}^{+\frac{1}{2}} (\frac{l}{2} - \frac{1}{6}) + \mu_{m+1,l+1}^{-\frac{1}{2}} (\frac{l+1}{2} - \frac{1}{3})] \\
&\quad - \frac{h_2}{3} \mu_{m,l}^{+\frac{1}{2}} [-\frac{l-1}{2} - \frac{1}{3} + (l-1)^2 - (l-1)^3 \ln(\frac{l}{l-1})] \\
&\quad - h_2 \mu_{m,l}^{-\frac{1}{2}} [\frac{l}{2} - \frac{1}{3} - l(l-1) - l(l-1)^2 \ln(\frac{l}{l-1})] \\
&\quad + \frac{h_2}{3} \mu_{m+1,l}^{+\frac{1}{2}} [-\frac{l-1}{2} + \frac{1}{3} + (l-1)^2 - (l-1)^3 \ln(\frac{l}{l-1})] \\
&\quad - \frac{h_2}{3} \mu_{m,l+1}^{-\frac{1}{2}} [\frac{l+1}{2} + \frac{1}{3} + (l+1)^2 - (l+1)^3 \ln(\frac{l+1}{l})] \\
&\quad + h_2 \mu_{m+1,l+1}^{+\frac{1}{2}} [\frac{l}{2} + \frac{1}{3} + l(l+1) - l(l+1)^2 \ln(\frac{l+1}{l})] \\
&\quad - \frac{h_2}{3} \mu_{m+1,l+1}^{-\frac{1}{2}} [\frac{l+1}{2} + \frac{1}{3} + (l+1)^2 - (l+1)^3 \ln(\frac{l+1}{l})]. \\
A[i, i+1] &= -h_2 [\mu_{m,l+1}^{-\frac{1}{2}} (\frac{l+1}{2} - \frac{1}{3}) + \mu_{m+1,l+1}^{+\frac{1}{2}} (\frac{l+1}{2} - \frac{1}{6})] \\
&\quad + \frac{h_2}{2} \mu_{m,l+1}^{+\frac{1}{2}} [\frac{l}{2} + \frac{1}{3} + l(l+1) - l(l+1)^2 \ln(\frac{l+1}{l})] \\
&\quad + \frac{h_2}{2} \mu_{m+1,l+1}^{+\frac{1}{2}} [-\frac{l}{2} + \frac{1}{6} - l^2 - l^2(l+1) \ln(\frac{l+1}{l})], \\
A[i, i+M_r] &= -\frac{h_1^2}{h_2} [\mu_{m+1,l}^{+\frac{1}{2}} (\frac{l}{2} - \frac{1}{6}) + \mu_{m+1,l+1}^{-\frac{1}{2}} (\frac{l+1}{2} - \frac{1}{3})] \\
&\quad + \frac{h_2}{6} \mu_{m+1,l}^{+\frac{1}{2}} [-\frac{l-1}{2} - \frac{2}{3} + (l-1)^2 - (l-1)^3 \ln(\frac{l}{l-1})] \\
&\quad - \frac{h_2}{6} \mu_{m+1,l+1}^{-\frac{1}{2}} [\frac{l+1}{2} - \frac{2}{3} + (l+1)^2 - (l+1)^3 \ln(\frac{l+1}{l})], \\
A[i, i+M_r+1] &= -\frac{h_2}{6} [\mu_{m+1,l+1}^{-\frac{1}{2}} - \mu_{m+1,l+1}^{+\frac{1}{2}}] \\
&\quad + \frac{h_2}{6} \mu_{m+1,l+1}^{-\frac{1}{2}} [\frac{l}{2} + \frac{1}{3} + l(l+1) - l(l+1)^2 \ln(\frac{l+1}{l})] \\
&\quad - \frac{h_2}{2} \mu_{m+1,l+1}^{+\frac{1}{2}} [-\frac{l+1}{2} + \frac{1}{3} + l(l+1) - l^2(l+1) \ln(\frac{l+1}{l})], \\
B[i, i] &= -\frac{2\beta}{3} [\rho_{m,l}^{-\frac{1}{2}} (\frac{l}{4} - \frac{1}{10}) + \rho_{m+1,l+1}^{+\frac{1}{2}} (\frac{l}{4} + \frac{1}{10})] \\
&\quad + \rho_{m,l+1}^{-\frac{1}{2}} (\frac{l}{4} + \frac{1}{20}) + \rho_{m+1,l}^{+\frac{1}{2}} (\frac{l}{4} - \frac{1}{20}) \\
&\quad + \rho_{m,l}^{+\frac{1}{2}} (\frac{l}{4} - \frac{1}{20}) + \rho_{m+1,l+1}^{-\frac{1}{2}} (\frac{l}{4} + \frac{1}{20}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B[i, i+1] &= \beta \left[\rho_{m,l+1}^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{l}{12} + \frac{1}{30} \right) + \rho_{m+1,l+1}^{+\frac{1}{2}} \left(\frac{l}{12} + \frac{1}{20} \right) \right], \\
B[i, i+M_r] &= \frac{\beta}{3} \left[\rho_{m+1,l+1}^{+\frac{1}{2}} \left(\frac{l}{4} - \frac{1}{20} \right) + \rho_{m+1,l+1}^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{l}{4} + \frac{1}{20} \right) \right], \\
B[i, i+M_r+1] &= \beta \left[\rho_{m+1,l+1}^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{l}{12} + \frac{1}{30} \right) + \rho_{m+1,l+1}^{+\frac{1}{2}} \left(\frac{l}{12} + \frac{1}{20} \right) \right],
\end{aligned}$$

où $\beta = \frac{h_2 h_1^2}{2},$

•• Les éléments frontières

Pour $m = M_z$ et $1 \leq l \leq M_r - 1$ on a :

$$\begin{aligned}
A[i, i+1] &= +\frac{h_2}{2} \mu_{m,l+1}^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{l}{2} + \frac{1}{3} + l(l+1) - l(l+1)^2 \ln\left(\frac{l+1}{l}\right) \right] \\
&\quad - h_2 \mu_{m,l+1}^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{l+1}{2} - \frac{1}{3} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A[i, i] &= -\frac{h_2}{3} \left[\mu_{m,l}^{-\frac{1}{2}} + \mu_{m,l+1}^{-\frac{1}{2}} \right] + h_2 \mu_{m,l}^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{l}{2} - \frac{1}{3} \right) \\
&\quad + \frac{h_1^2}{h_2} \mu_{m,l}^{+\frac{1}{2}} \left(\frac{l}{2} - \frac{1}{6} \right) + \frac{h_1^2 + h_2^2}{h_2} \mu_{m,l+1}^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{l+1}{2} - \frac{1}{3} \right) \\
&\quad + \frac{h_2}{3} \mu_{m,l}^{-\frac{1}{2}} \left[-\frac{l-1}{2} + \frac{1}{3} + (l-1)^2 - (l-1)^3 \ln\left(\frac{l}{l-1}\right) \right] \\
&\quad + h_2 \mu_{m,l}^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{l}{2} - \frac{1}{3} - l(l-1) + l(l-1)^2 \ln\left(\frac{l}{l-1}\right) \right] \\
&\quad - \frac{h_2}{3} \mu_{m,l+1}^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{l+1}{2} + \frac{1}{3} + (l+1)^2 - (l+1)^3 \ln\left(\frac{l+1}{l}\right) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B[i, i] &= \frac{2\beta}{3} \left[\rho_{m,l}^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{l}{4} - \frac{1}{10} \right) + \rho_{m+1,l}^{+\frac{1}{2}} \left(\frac{l}{4} - \frac{1}{20} \right) + \rho_{m,l+1}^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{l}{4} + \frac{1}{20} \right) \right], \\
B[i, i+1] &= \beta \rho_{m,l+1}^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{l}{12} + \frac{1}{30} \right).
\end{aligned}$$

Pour $l = M_r$ et $1 \leq m \leq M_z - 1$ on a :

$$\begin{aligned}
A[i, i+M_r] &= -\frac{h_2}{6} \mu_{m+1,l}^{+\frac{1}{2}} \left[\frac{l-1}{2} + \frac{2}{3} - (l-1)^2 + (l-1)^3 \ln\left(\frac{l}{l-1}\right) \right] \\
&\quad - \frac{h_1^2}{h_2} \mu_{m+1,l}^{+\frac{1}{2}} \left(\frac{l}{2} - \frac{1}{6} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A[i, i] = & \frac{h_2}{3} [\mu_{m,l}^{+\frac{1}{2}} + \mu_{m+1,l}^{-\frac{1}{2}}] + h_2 \mu_{m,l}^{-\frac{1}{2}} (\frac{l}{2} - \frac{1}{3}) \\
 & + \frac{h_1^2}{h_2} \mu_{m,l}^{+\frac{1}{2}} (\frac{l}{2} - \frac{1}{6}) + \frac{h_1^2 + h_2^2}{h_2} \mu_{m+1,l}^{+\frac{1}{2}} (\frac{l}{2} - \frac{1}{6}) \\
 & + \frac{h_2}{3} \mu_{m,l}^{-\frac{1}{2}} [-\frac{l-1}{2} + \frac{1}{3} + (l-1)^2 - (l-1)^3 \ln(\frac{l}{l-1})] \\
 & + h_2 \mu_{m,l}^{-\frac{1}{2}} [\frac{l}{2} - \frac{1}{3} - l(l-1) + l(l-1)^2 \ln(\frac{l}{l-1})] \\
 & + \frac{h_2}{3} \mu_{m+1,l}^{+\frac{1}{2}} [-\frac{l-1}{2} + \frac{1}{3} + (l-1)^2 - (l-1)^3 \ln(\frac{l+1}{l})],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A[MrMz, MrMz] = & -\frac{h_2}{3} \mu_{Mz,Mr}^{-\frac{1}{2}} + h_2 \mu_{Mz,Mr}^{-\frac{1}{2}} (\frac{Mr}{2} - \frac{1}{3}) + \frac{h_1^2}{h_2} \mu_{Mz,Mr}^{+\frac{1}{2}} (\frac{Mr}{2} - \frac{1}{6}) \\
 & -\frac{h_2}{3} \mu_{Mz,Mr}^{-\frac{1}{2}} [\frac{Mr-1}{2} - \frac{1}{3} - (Mr-1)^2 + (Mr-1)^3 \ln(\frac{Mr}{Mr-1})] \\
 & + h_2 \mu_{Mz,Mr}^{-\frac{1}{2}} [\frac{Mr}{2} - \frac{1}{3} + Mr(Mr-1) + Mr(Mr-1)^2 \ln(\frac{Mr}{Mr-1})],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B[i, i] &= \frac{2\beta}{3} [\rho_{m,l}^{-\frac{1}{2}} (\frac{l}{4} - \frac{1}{10}) + \rho_{m,l}^{+\frac{1}{2}} (\frac{l}{4} - \frac{1}{20}) + \rho_{m+1,l}^{+\frac{1}{2}} (\frac{l}{4} - \frac{1}{20})], \\
 B[i, i + Mr] &= \frac{1}{3} \beta \rho_{m+1,l}^{+\frac{1}{2}} (\frac{l}{4} - \frac{1}{20}).
 \end{aligned}$$

$$B[MrMz, MrMz] = \frac{2\beta}{3} [\rho_{Mz,Mr}^{-\frac{1}{2}} (\frac{l}{4} - \frac{1}{10}) + \rho_{Mz,Mr}^{+\frac{1}{2}} (\frac{l}{4} - \frac{1}{20})].$$

Les matrices A et B sont des matrices symétriques par blocs, et les éléments de $D(\alpha)$ sont nuls sauf ceux qui sont situés à la fin des diagonals des blocs.

3 Théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints

Il s'agit ici de rappeler des outils mathématiques de la théorie spectrale qui nous les avons utilisés et tout d'abord quelques définitions :

Soit H est un espace de Hilbert séparable de norme $\|\cdot\|_H$ et de produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$.

DÉFINITION 1. Soit A un opérateur fermé non borné dans l'espace H , de domaine de définition $D(A)$, on note $\sigma(A)$ son spectre défini par : $\sigma(A) = C \setminus \rho(A)$ où $\rho(A)$ est l'ensemble résolvant de A défini par :

$\rho(A) = \{z \in C / (A - zI) \text{ est une bijection de } D(A) \text{ sur } H \text{ d'inverse continu}\}$
 on a aussi $\sigma(A) = \{z \in C / (A - zI) \text{ n'admet pas d'inverse borné}\}.$

On rappelle qu'un opérateur auto-adjoint est un opérateur A de domaine $D(A)$ dense, et qui vérifie $A = A^*$ où A^* est l'adjoint de A . Le spectre de tels opérateurs a des propriétés remarquables.

THÉORÈME 3.3.1. *Si A est auto-adjoint alors*

$\sigma(A) \subset \mathbb{R}$, de plus, si A est positif son spectre est également.

Plus précisément, le spectre $\sigma(A)$ est inclus dans l'adhérence de son image

$\sigma(A) \subset \overline{\{ \langle Au, u \rangle \mid u \in D(A), \|u\|_H = 1 \}}$, et il est caractérisé par

$$(\sigma \in \sigma(A)) \iff \left\{ \begin{array}{l} \exists (u_n)_n \in D(A) \text{ telle que :} \\ \|u_n\|_H = 1 \\ \|Au_n - \sigma u_n\|_H \longrightarrow 0 \text{ dans } H. \end{array} \right.$$

Nous rappelons les définitions liées à la compacité d'un opérateur.

DÉFINITION 2. *un opérateur A de H dans H est compacte si l'image par A de la boule unité $\mathcal{B} = \{u \in H : \|u\|_H = 1\}$ est relativement compacte, c'est-à-dire si pour toute suite bornée $(u_n)_n$ de H on peut extraire d'une sous-suite convergente dans H .*

DÉFINITION 3. *Un opérateur A non borné de domaine $D(A) \subset H$ à valeurs dans H est à résolvante compacte si et seulement si sa résolvante, i.e l'opérateur $(A - \lambda I)^{-1}$ définie pour tout λ élément de $\rho(A)$ est un opérateur compact.*

THÉORÈME 3.3.2. *Si A est un opérateur auto-adjoint borné inférieurement (c'est-à-dire : $\exists C \in \mathbb{R}$ tel que $\langle Au, u \rangle \geq C \|u\|_H^2$, $\forall u \in H$) alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

- (i) $(A - \sigma I)^{-1}$ est compact pour tout $\sigma \in \rho(A)$.
- (ii) Il existe $\sigma \in \rho(A)$ tel que $(A - \sigma I)^{-1}$ est compact.

Ce résultat est une conséquence de l'équation de la résolvante.

Remarque 3.3.1. *Un tel opérateur auto-adjoint admet alors un spectre uniquement constitué de valeurs propres de multiplicités finie qui constituent une suite croissante vers $+\infty$.*

Malheureusement pour nous le domaine représenté par la section de la couche n'étant pas borné, on ne travail pas avec un opérateur à résolvante compacte et son spectre n'a donc pas de raison d'être composé uniquement de valeurs propres de multiplicité finie. C'est une des difficultés rencontrés dans notre étude d'où la nécessité de distinguer avec précision les différentes composantes de $\sigma(A)$.

DÉFINITION 4. Soit A un opérateur auto-adjoint non borné de H . On notera $\sigma_d(A)$, le spectre discret de A , qui est composé des valeurs propres de multiplicité finie et isolées dans le spectre de A . On notera $\sigma_{ess}(A)$, le spectre essentiel de A , qui est le complémentaire dans $\sigma(A)$ de $\sigma_d(A)$. On a donc :

$$\begin{cases} \sigma_d(A) \cup \sigma_{ess}(A) = \sigma(A) \\ \sigma_d(A) \cap \sigma_{ess}(A) = \emptyset. \end{cases}$$

THÉORÈME 3.3.3. On a la caractérisation suivante pour les éléments de $\sigma_{ess}(A)$:

$$(\sigma \in \sigma_{ess}(A)) \iff \begin{cases} \exists (u_n)_n \in D(A) \text{ telle que :} \\ \|u_n\|_H = 1 \\ u_n \rightharpoonup 0 \text{ dans } H \text{ faiblement} \\ \|Au_n - \sigma u_n\|_H \longrightarrow 0 \text{ dans } H. \end{cases}$$

La suite $(u_n)_n$ ainsi définie est appelée suite singulière ou suite de Weyl.

4 Le principe du "Min-Max"

Nous rappelons ici un théorème sur lequel beaucoup des résultats établis se sont appuyés. Il s'agit du principe du *Min-Max* que nous utiliserons avec l'énoncé proposé dans [13]. Ce théorème permet de caractériser et d'ordonner les éléments du spectre discret. Si A est un opérateur auto-adjoint borné inférieurement, ses valeurs propres situées en dessous de la borne inférieure de son spectre essentiel peuvent être caractérisées par diverses formules dites du "Min-Max". Nous l'énonçons pour un opérateur A associé à une forme sesquilinéaire $a(.,.)$. Nous avons d'abord le résultat suivant (voir [21]) :

THÉORÈME 3.4.1. Soit $a(.,.)$ une forme sesquilinéaire fermé de domaine $D(a)$, dense dans l'espace de Hilbert H , telle qu'il existe une constante C vérifiant :

$$a(u, u) \geq C \|u\|_H^2, \quad \forall u \in D(a)$$

et que $D(a)$ muni de la norme $\|u\|_{D(a)}^2 = a(u, u) - C \|u\|_H^2$ est un espace de Hilbert. Alors l'opérateur non borné A de H associé à $a(.,.)$ est auto-adjoint.

Les éléments de son spectre qui n'appartiennent pas au spectre essentiel sont des valeurs

propres isolées et de multiplicité finie. Nous allons pouvoir les définir de plusieurs manières. On a :

DÉFINITION 5. Pour tout $m \geq 1$ on définit de plusieurs manières équivalentes les nombres σ_m :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_m = \inf_{E_m \in F_m} \left(\sup_{u \in E_m, u \neq 0} \left(\frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|_H^2} \right) \right) \\ \sigma_1 = \inf_{u \in D(a), u \neq 0} \left(\frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|_H^2} \right) \end{array} \right.$$

où F_m désigne l'ensemble des sous espaces E_m de dimension m de $D(a)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_m = \inf_{E_m \in F_m} \left(\sup_{u \in E_m, u \neq 0} \left(\frac{a(u, u)}{\|u\|_H^2} \right) \right) \\ \sigma_1 = \inf_{u \in D(a), u \neq 0} \left(\frac{a(u, u)}{\|u\|_H^2} \right) \end{array} \right.$$

et enfin :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_m = \sup_{(v_1, v_2, \dots, v_{m-1}) \in V} \left(\inf_{u \in D(a), (u, v_i)=0, 1 \leq i \leq m-1} \left(\frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|_H^2} \right) \right) \quad \text{pour } m > 1 \\ \sigma_m = \sup_{(v_1, v_2, \dots, v_{m-1}) \in V} \left(\inf_{u \in D(a), (u, v_i)=0, 1 \leq i \leq m-1} \left(\frac{a(u, u)}{\|u\|_H^2} \right) \right) \quad \text{pour } m > 1 \end{array} \right.$$

où V est un ensemble tel que $D(a) \subset V \subset H$.

Si on note par σ_e la borne inférieure du spectre essentiel de l'opérateur A , on a alors le théorème suivant :

THÉORÈME 3.4.2. A étant un opérateur auto-adjoint borné inférieurement , pour tout entier m on a deux eventualités :

i) $\sigma_m < \sigma_e$, alors A possède m valeurs propres (comptées avec leur ordre de multiplicité) strictement plus petites que σ_e , σ_j est la $j^{\text{ième}}$ et on a

$$\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \dots \leq \sigma_m < \sigma_e.$$

ii) $\sigma_m = \sigma_e$ alors A possède au plus $(m - 1)$ valeurs propres strictement plus petites que σ_e et, $\forall p \geq m$, $\sigma_p = \sigma_m = \sigma_e$.

5 Décomposition spectrale de l'opérateur B

Dans cette annexe on propose un exemple de l'opérateur B qui admet une suite de valeurs propres prolongées dans le spectre essentiel qui tend vers $+\infty$. Pour cela on suppose que les coefficients

ρ et μ vérifient les hypothèses (A1) et (A2).

Considérons l'espace de Hilbert

$$H_n = \{u \in L^2_{Loc}(\mathbb{R}^+); \sqrt{r}u \in L^2(\mathbb{R}^+)\} \quad (11)$$

muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^+} uv \rho dr \quad (12)$$

et l'espace de Hilbert V_n définit par :

$$V_n = \left\{ u \in H_n ; \frac{u}{r} \text{ et } \frac{du}{dr} \in H_n \right\} \quad (13)$$

LEMME 3.5.1. Soit $u \in V(\Omega_R)$ et $u(r, z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} u_n(r)g_n(z)$ le développement de Fourier qui converge pour presque tout $r \in \mathbb{R}^+$, alors, il existe deux constantes positives c_1 et c_2 telles que :

$$c_1 \sum_{n=1}^{n=\infty} n^2 \|u_n\|_W^2 \leq \|u\|_V^2 \leq c_2 \sum_{n=1}^{n=\infty} n^2 \|u_n\|_W^2 \quad (14)$$

où

$$\|u_n\|_W^2 = \int_0^{+\infty} r(u_n^2 + |u'_n|^2 + \frac{u_n^2}{r^2}) dr. \quad (15)$$

Démonstration. En calculant la norme de u dans V et prenant en compte que :

1. La suite $(g_n)_{n \geq 1}$ forme une base de $L^2(0, L)$ muni du produit scalaire $(f, g) = \int_0^L \mu_\infty(z) f(z) g(z) dz$,
2. $(g'_n, g'_m) = \lambda_n \delta_{n,m}$,
3. $\lambda_n \cong Cn^2$ quand $n \rightarrow +\infty$,

et l'utilisation des formules de Bessel-Parseval.

□

Corollaire 3.5.1. *Si $u \in V(\Omega)$, alors la série $u(r, z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} u_n(r)g_n(z)$ converge dans $V(\Omega)$.*

Nous introduisons l'opérateur non borné B_n défini dans H_n par :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_n u = \frac{1}{\rho r} \left[-\frac{d}{dr} \left(\mu r \frac{du}{dr} - \mu u \right) - \mu \frac{du}{dr} + \mu \left(\frac{1}{r} + \lambda_n r \right) u \right] \\ D(B_n) = \{u \in V_n, B_n u \in H_n\} \end{array} \right. \quad (16)$$

L'opérateur B_n est autoadjoint positif dans H_n .

LEMME 3.5.2. *La décomposition spectrale de l'opérateur associé au modes de torsion est*

$$B \approx \bigoplus_{n=1}^{\infty} B_n \quad (\approx \text{ signifie unitairement équivalent }).$$

Démonstration. Soit $u \in H$, d'après le lemme (3.5.1) $u(r, z)$ peut s'écrire sous la forme

$$u(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(r)g_n(z) \quad \text{avec} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_{H_n}^2 = \|u\|_H^2$$

ce qui nous permet d'identifier H à $\bigoplus_{n=1}^{\infty} H_n$ grâce à l'opérateur unitaire $U : H \longrightarrow \bigoplus_{n=1}^{\infty} H_n$ qui associe $u \in H$ la suite $(u_1, u_2, \dots, u_n, \dots)$.

Soient $u, v \in V$, alors d'après le lemme (3.5.1), on a les représentations en série de Fourier suivantes qui convergent dans V ,

$$u(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(r)g_n(z), \quad v(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(r)g_n(z)$$

où u_n et v_n dans V_n .

D'autre part, on peut vérifier directement que :

$$\langle Bu, v \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle B_n u_n, v_n \rangle, \text{ ce qui prouve que } U(Bu) = (B_1 u_1, B_2 u_2, \dots, B_n u_n, \dots). \quad \square$$

Corollaire 3.5.2. *Comme la transformation unitaire conserve la nature du spectre, on déduit*

que

$$\sigma_p(B) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_p(B_n).$$

THÉORÈME 3.5.3. *le spectre essentiel et ponctuel de l'opérateur B_n sont*

1. $\sigma_{ess}(B_n) = [C_{\infty}^2 \lambda_n, +\infty[$
2. $\sigma_p(B_n) = [C_{-}^2 \lambda_n, C_{\infty}^2 \lambda_n[$
3. Si $C_{-}^2 < C_{\infty}^2$, alors il existe un rang N_0 tel que, $\forall n > N_0$ l'opérateur B_n possède au moins une valeur propre dans l'intervalle $[C_{-}^2 \lambda_n, C_{\infty}^2 \lambda_n[$.

Corollaire 3.5.4. *Sous les hypothèses (A1) et (A2) on a :*

1. $\sigma_p(B_1) \subset \sigma_{dis}(B)$
1. Si $C_-^2 < C_\infty^2$, l'opérateur B possède une suite des valeurs propres qui tend vers $+\infty$.

Remarque 3.5.1.

1. Si l'inégalité $C_-^2 \lambda_2 \geq C_\infty^2 \lambda_1$ est réalisée alors : $\sigma_{dis}(B) \subset \sigma_p(B_1)$ et par suite $\sigma_{dis}(B) = \sigma_p(B_1)$
2. Nous avons $\sigma_{dis}(B) = \bigcup_{n=1}^{n=N_0} \sigma_{dis}(B_n)$, car $C_-^2 \lambda_n > C_\infty^2 \lambda_1$ si $n > N_0$.

Bibliographie

- [1] J. D. ACHENBACH, *Wave propagation in elastic solids*, North-Holland, 1980.
- [2] L. ALEM AND L. CHORFI, *Etude mathématique des modes de torsion dans une couche élastique axisymétrique*, Maghreb Math. Rev. 8 (1999), pp. 11–24.
- [3] Ph. Angot, Analysis of singular perturbations on the Brinkman problem for fictitious domain models of viscous flows. M2AS Math. Meth. in the Appl. Sci., Vol. 22(16), pp. 1395-1412, 1999.
- [4] Ph. Angot, On the well-posed coupling between free fluid and porous viscous flows ; Appl. Math.Lett, avril 2009.
- [5] Ph. Angot, A fictitious domain model for the Stokes/Brinkman problem with jump embedded boundary conditions ; C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 348 (2010) 697-702.
- [6] Ph. Angot, A unified fictitious domain model for general embedded boundary conditions, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I Math. 341(11)(2005)683-688.
- [7] Ph. Angot, Finite volume methods for non smooth solution of diffusion models, application to imperfect contact problems, in : O.P. Iliev, S.D. Margenov, Bl.H Sendov, P.S. Vassilevski (Eds.), Recent Advances in Numerical Methods and Applications. Proc. 4th Int. Conf. NMA'98, Sofia(Bulgarie), World Sci. Pub., 1999,pp.621-629.
- [8] Ph. Angot, Analysis of singular perturbations on the Brinkman problem for fictitious domain models of viscous flows, Math. Methods Appl. Sci. (M2 AS) 22 (16) (1999) 1395–1412.
- [9] Ph. Angot, A model of fracture for elliptic problems with flux and solution jumps, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I Math. 337 (6) (2003) 425–430.
- [10] Ph. Angot, H. Lomonède, I. Ramière, A general fictitious domain method with non-conforming structured meshes, in : F. Benkhaldoun, D. Ouazar, S. Raghay (Eds.), Finite Volume for Complex Application IV, Problems and perspectives, Marrakech, Hermes science, 2005, pp. 261-272.
- [11] I. Bijelonja, I. Demirdzic, S. Muzaferija, A finite volume method for incompressible linear elasticity, Comp. Methods Appl. Mech. Engrg. 195 (2006) 6378-6390.
- [12] J. L. Boelle, Modélisation numérique de la propagation sismique à partir d'un puits, Diagramme de rayonnement et fonction de transfert de sources sismiques , Rapport SNEA(P),1991.
- [13] A. S. BONNET AND R. DJELLOULI, *Calcul des modes guidés d'une fibre optique*, Rapport interne CMAP 82, 1985.

-
- [14] A-S. BONNET AND N. GMATI, *Spectral approximation of a boundary condition for an eigenvalue problem*, SIAM J. Num. Anal. 32 (4) (1995) 1263-1278.
 - [15] M. Bouchon and D.P. Shmitt, Full-wave accoustic logging a irregular borehole, *Geophysics*, 54(6), pp. 758-765, 1989.
 - [16] L. CHORFI, *Calcul des modes guidés dans un milieu élastique à symétrie de révolution*, Rapport de recherche No 2152, I.N.R.I.A, Rocquencourt-Paris, Janvier 1994.
 - [17] L. CHORFI, *Etude mathématique des modes guidés dans un milieu élastique à symétrie de révolution*, M. M. A. N. Vol. 33(3), p. 299-342, 1996.
 - [18] A. CHOUTRI, *Etude de l'erreur de troncature du domaine pour un problème aux valeurs propres*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 346(2008), pp. 233-337.
 - [19] P. G. CIARLET, *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland, 1978.
 - [20] E. Croc and Y. Dermenjian, Analyse spectrale d'une bande acoustique multistratifiée, partie 1 : Principe d'absorption simple, SIAMJ. Math. Anal. Vol. 26(4), p. 880-924, 1995.
 - [21] R. DAUTRAY AND J. L. LIONS, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*; Vol. 4, Masson, 1988.
 - [22] S. DELCOURTE, *Développement de méthodes de volumes finis pour la mécanique des fluides*, Thèse de de docteur de l'université de Toulouse, 2007.
 - [23] I. Demirdzic, D. Martinovic, Finite volume method for thermo-elasto-plastic, *Cump. Methods Appl. Mech. Engrg.* 109 (1993) 331-349.
 - [24] J. Domplerre, Equations intégrales en axisymétrie généralisée, application à la sismique entre puits, Thèse , Ecole centrale Paris, 1993.
 - [25] V. Girault, R. Glowinski, Error analysis of a fictitious domain method applied to a Dirichlet problem, *Japan J. Indust. Appl. Math.* 12 (3) (1995) 487-514.
 - [26] A. Hansbo, P. Hansbo, A finite element method for the simulation of strong and weak discontinuities in solid mechanics, *Cump. Methods Appl. Mech. Engrg.* 193 (2004) 3523-3540.
 - [27] H. Jasak, H. G Weller, Application of th finite volume method and unstructured meshes to linear elasticity, Elsevier (1998).
 - [28] M. KARA, B. MEROUANI, AND L. CHORFI, Computation of the torsional modes in an axisymmetric elastic layer, *Elec. Trans. on Num. Anal.* Vol. 38, pp. 303-316, (2011).
 - [29] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, 2nd edn., Springer-Verlag, New York (1976).

- [30] K. Khadra, Ph. Angot, S. Parneix, and J.-P. Caltagirone. Fictitious domain approach for numerical modelling of Navier-Stokes equations. *Int. J. Numer. Meth. in Fluids*, Vol. 34(8) : 651-684, 2000.
- [31] K. Khadra, Ph. Angot, S. Parneix, J.-P. Caltagirone, Fictitious domain approach for numerical modelling of Navier-Stokes equations, *Int. J. Numer. Math. in Fluids*, 34(8), 651-684, 2000.
- [32] V.D. Kopçenov. Approximate solutions of the Dirichlet problem by the method of fictive domains. *Differential Equations*, vol 4, 1 (in Russian), 1968.
- [33] V.D. Kopçenov. A method of fictitious domains for the second and third value problems. *Trudy Mat. Inst. Steklov*, Vol 131, pp.119-127 (in Russian), 1974.
- [34] P. LASCAUX ET R. THEODOR, *Analyse Numérique Matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur*, Vol 2, Masson, 1984.
- [35] M. LENOIR AND A. TOUNSI, *The localized finite element method and its application to the two-dimensional sea-keeping problem*, *SIAM J. Numer. Anal.*, 25 (1988), pp. 729–752.
- [36] J.-L. Lions, *Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles*, Presses de l'Université de Montreal, 1965.
- [37] J. F. Maitre and L. Tomas. A fictitious domain method for Dirichlet problems using mixed finite elements. *Appl. Math. Let.*, Vol. 12(4), pp. 117-120, 1999.
- [38] F. MAHÉ, *Etude mathématique et numérique de la propagation d'ondes électromagnétiques dans les micro-guides de l'optique intégrée*, Thèse de Doctorat de l'université de Renne 1, 1993.
- [39] G.I. Marchuk, *Methods of Numerical Mathematics, Application of Mathematics*, first ed., 2, Springer, New York, 1982, 1975.
- [40] G.I. Marchuk. *Methods of Numerical Mathematics. Application of Math.* 2, Springer-Verlag New York (1st ed. 1975), 1982.
- [41] M. MASMOUDI. *Résolution numérique de problèmes extérieurs*, Thèse de l'université de Nice, 1979.
- [42] M. MERCIER ET G. RAUGEL, *Résolution d'un problème aux limites dans un ouvert axisymétrique par éléments finis en (r,z) et série de Fourier en θ* , *R.A.I.R.O (Analyse numérique)*, 16(4), 1982, pp. 405–461.
- [43] B. Merouani, Quelques problèmes aux limites pour le système de Lamé dans un secteur plan *C.R.A.S. (PARIS)* t 304, Série I, n 130 1987.

-
- [44] B. Merouani, Solutions singulières du Système de l'élasticité dans un polygone pour différentes conditions aux limites, *Maghreb Math. Rev.*, vol. 5, Nos 1 & 2, 1996, pp 95-112.
 - [45] J. Miklowitz, the theory of elastic waves and waveguides, North-Holland, 1980.
 - [46] I.A. Mindlin, Free elastic waves on the surface of a tube of infinite thickness, *J. Appl. Math. Mech.* Vol. 27, p. 823-828, 1963.
 - [47] J.A Nitsche, On Korn's second inequality, *RAIRO Anal. Numér.* 15 (1981) 237-248.
 - [48] S. Osher, J.A. Sethian, Fronts propagating with curvature-dependent speed : Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations, *J. Comput. Phys.* 79(1)(1988) 12-49.
 - [49] S.V. Patankar, Numerical heat Transfer and fluid flow, Series in compu. Meth. in Mech. and thermal Sciences, Hemisphere Pub. / McGraw-Hill, New York (1980).
 - [50] H. PICO, *Détermination et calcul numérique de la première valeur propre de l'opérateur de Schrödinger dans le plan*, Thèse de l'Université de Nice, 1982.
 - [51] O. Poisson, Study of the operator associated with the propagation of seismic waves in a stratified acoustic medium, Rapport interne, Université de Provence, 1994.
 - [52] I. RAMIÈRE, *Méthodes de domaine fictif pour des problèmes elliptiques avec conditions aux limites générales en vue de la simulation numérique d'écoulements diphasiques*, Thèse de docteur de l'université Aix-Marseille I, 2006.
 - [53] I. Ramière, Ph. Angot, M. Belliard, A fictitious domain approach with spread interface for elliptic problems with general boundary condition, *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.* 196 (2007) 766-781.
 - [54] I. Ramière, Ph. Angot, M. Belliard, A general fictitious domain method with immersed jumps and multilevel structured meshes, *J. C. F* 225(2007) 1347-1387.
 - [55] P. A. RAVIART ET J. M. THOMAS, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson, 1988.
 - [56] M. REED ET B. SIMON, *Methods of modern mathematical physics*, Vol. 1 and 4. Academic Press, New-York, 1978.
 - [57] N. Sahay, Z. Capri, Eigenmodes for an elastic halfspace surrounding a semi-rigid cylinder, *Wave-Motion* 11, p. 407-417, 1989.
 - [58] A.A. Samarskii, V.B. Andreev, Finite differences methods for elliptic problems, Nauka Moscow, 1976 (in Russian), Editions MIR Moscow, 1978.
 - [59] A. Sarthou, S. Vincent, Ph. Angot, J.P. Caltagirone, The sub-mesh penalty method,

- [60] A. Sarthou, S. Vincent, Ph. Angot, J.P. Caltagirone, Eulerian-Lagrangian grid coupling and penalty methods for the simulation of multi-phase flows interacting with complex objects, *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 56 (2008)1093-1099.
- [61] V.K. Saul'ev, On the solution of some boundary value problems on high performance computers by fictitious domain method, *Siberian Math. J.* 4 (4) (1963) 912–925 (in Russian).
- [62] N. Sukumar, D.L. Chopp, N. Moës, T. Belytschko, Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method, *Cump. Methods Appl. Mech.Engrg.*190 (2001) 6183-6200.
- [63] J. Tlili, Calcul d'ondes de surface élastique guidée par une fissure, Thèse, Université de Paris 6, 1991.
- [64] G. A. Winbow, Seismic sources in open cased boreholes. *Geophysysics*, Vol. 56(7), p. 1040-1050, 1991.
- [65] Y. Zhang, A fictitious domain method for acoustic wave propagation problems, *Mathematical and Computer Modeling.* 50 (2009) 351-359.