

EPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE Ferhat ABBAS SETIF 1

THESE

Présentée à la faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Option : Mathématiques Appliquées

Par

Mr. YUCEF DJENAIHI

THEME

***Un nouveau critère de minimisation des normes de l'opérateur intégrale
et de la fonction de Green modifiés en élasticité linéaire***

Soutenue le : 14/03/2019

Devant le jury :

H.BENSERIDI	Professeur	UFA- Setif1	Président
B.SAHLI	MCA	UFA- Setif1	Rapporteur
F.ELLAGGOUNE	Professeur	U-8 Mai 1945 Guelma	Examineur
S.BOULAARAS	Professeur	U -Qassim Arabie Saoudite	Examineur
MOHAMED EL AMINE	MCA	CU-Tamanrasset	Examineur
BENCHEICK LE HOCINE			

Je dédie cette thèse à la mémoire de mon père,
qui nous a quitté le 18 mai 2007,
qui ne m'a jamais quitté dans les moments les plus difficiles,
Ainsi que ma mère.

Je n'oublierai pas mes sœurs ; le sang dans mes veines
et les bougies qui s'illuminent pour moi

Ma femme est la plus chère que j'ai. Ainsi que mon cher fils Elbarae.

Tous mes enseignants à l'université de Biskra , l'université de Annaba
et l'université de Setif.

Remerciements

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات

Je voudrais tout d'abord remercier mon directeur de thèse **Dr. Belkacem Sahli**, qui est à l'origine de ce travail. C'est un honneur pour moi de travailler avec lui et je ne peux qu'admirer son talent. Je lui suis très reconnaissant, non seulement parce qu'il a accepté de me prendre en thèse, mais aussi parce qu'il a partagé ses idées avec moi. Il a dirigé ma thèse avec beaucoup de patience et il a dédié beaucoup de temps à mon travail en étant toujours très disponible, ce qui m'a énormément encouragée. Depuis le début de ma thèse, Il a aussi dédié beaucoup de son temps à discuter avec moi à propos de mon avenir et je lui en suis très reconnaissant.

Mr **Benseridi Hamid** Professeur à l'université de Sétif, Ses encouragements, dans les moments difficiles que j'ai eu à confronter. Je le remercie vivement de me faire l'honneur de présider mon jury de thèse.

Mes remerciements vont également à Monsieur **Mohamed El Amine Bencheikh Le Hocine**, Maître de conférence au centre universitaire de Tamanrasset, qui m'a soutenu dans les épreuves difficiles et a toujours eu une oreille attentive. Je le remercie d'accepter d'examiner mon travail.

Tous mes remerciements vont également à Messieurs, **Salah Boulaaras**, Professeur à l'université de Qassim en Arabie Saoudite, et **Fateh Ellaggoun**, Professeur à l'université de Guelma, qui ont bien voulu se joindre au jury et examiner mon travail.

Je remercie toute l'équipe du département de Mathématiques, en particulier Dr. Kara Mohamed qui m'a accueilli de façon très chaleureuse. Je remercie aussi Pr. Merikhi Bachir d'être toujours disponible.

Durant ces années, j'ai partagé le bureau avec des personnes exceptionnelles, je remercie M. Abdelouheb Didi, M. Tarek Rouabhi et M. Fares Gherbi et je leur souhaite tout le bonheur qu'ils méritent et j'espère ne pas les perdre de vue.

SOMMAIRE

Introduction	01
Chapitre 1 : Formulation du problème	04
Chapitre 2 : Etude du cas général.....	11
- Optimisation des coefficients des multipôles simples (Dérivation).....	12
- Optimisation des coefficients des multipôles simples (majoration).....	39
- Vérification de la condition large (1.24)	49
Chapitre 3 : Cas du cercle.....	63
- Coefficients des multipôles simples	63
- Coefficients des multipôles croisés	66
- Calcul de la fonction de Green modifiée	70
Chapitre 4 :Cas du cercle légèrement déformé	74
- Coefficients des multipôles croisés	75
- Calcul de la fonction de Green modifiée	76
Conclusion	80
Annexe 1	83
Annexe 2	86
Références	88

ملخص

في هذا العمل ، قمنا بدراسة تحديد الخيار الأمثل لمعاملات متعددة الأقطاب من خلال إيجاد القيمة الصغرى لتنظيم نواة المعادلة التكاملية والذي يصف معادلة انحراف الموجات المرنة ، على حسب تنظيم الشد لتابع قرين المعدل.

الكلمات المفتاحية:

معاملات متعددة الأقطاب المتقاطعة ، مؤثر الشد المعدل ، تابع قرين ، المعادلات التكاملية ، المرونة الخطية .

Résumé

Dans ce travail , nous avons étudié la détermination du choix optimal des coefficients des multipôles en minimisant la norme du noyau de l'opérateur intégral décrivant l'équation de diffraction des ondes élastiques en deux dimensions , à savoir la norme de la traction de la fonction de Green modifiée.

Mots clés:

coefficients des multiples croisés, opérateur de traction modifié, fonction de Green, équations intégrales, élasticité linéaire.

Abstract

In this work, we have studied the determination of the optimal choice of the multipole coefficients by minimizing the norm of the kernel of the modified integral operator. describing the elastic wave diffraction equation in two dimensions, namely the modified Green traction norm.

Keywords:

Cross multipole coefficients, modified traction operator, Green's function, integral equations, linear elasticity.

INTRODUCTION

Les problèmes de diffraction des ondes (de gravité, acoustiques, élastiques et électromagnétiques) dans un milieu contenant une partie non homogène (cavité, inclusion ou autres ...) se formule très souvent sous la forme d'un problème aux limites. La résolution de ce problème peut se faire par diverses méthodes (différences finies, éléments finis, etc...). Dans le cas de milieu infini, la méthode des représentations intégrales semble être la mieux adaptée pour la résolution de ce type de problèmes. Cette méthode réduit la résolution du problème à celle d'une équation intégrale sur la frontière délimitant le domaine. Cette équation intégrale peut être soit de premier espèce ou bien de second espèce. Cependant, un problème d'unicité de la solution de l'équation intégrale apparaît. Cette anomalie est liée à la méthode de résolution utilisée plutôt qu'à la nature physique du problème. Certaines solutions ont été proposées pour contourner cette anomalie (voir [7] pour une discussion détaillée des solutions proposées). Certaines de ces solutions sont basées sur la modification du noyau de l'équation intégrale, c'est-à-dire, la modification de la solution fondamentale connue sous le nom de fonction de Green. Cette modification fait intervenir des coefficients complexes appelés coefficients des multipôles, et qui doivent satisfaire à une condition large (1.24). Dans le cas d'ondes acoustiques, KLEINMAN et ROACH [20] ont présenté une méthode de détermination d'un choix optimal de ces coefficients. Cette méthode s'appuie sur la minimisation de la norme de l'opérateur intégral qui définit l'équation intégrale modifiée. La minimisation de la norme de cet opérateur est liée à la convergence de la méthode itérative utilisée pour la résolution de cette équation intégrale modifiée, à savoir la méthode des approximations successives. SAHLI [30, 34], a utilisé cette même méthode,

mais pour le cas d'ondes élastiques en deux dimensions, et Dans [3], ARGYROPOULOS et KIRIAKI ont étudié le même cas, mais en trois dimensions. La particularité de ces ondes élastiques est la relative complexité de l'équation différentielle régissant le phénomène de diffraction.

D'autres travaux [4, 31, 32, 33], ont développé un deuxième critère d'optimalité pour les coefficients des multipôles, en minimisant la norme du noyau de l'opérateur intégral modifié, à savoir, la norme de la fonction de Green. Ce deuxième critère d'optimalité, est motivé par le fait, qu'à travers la minimisation de la norme de la fonction de Green, on minimise aussi la différence entre la fonction de Green modifié et la fonction de Green exacte.

Un troisième critère d'optimalité des coefficients des multipôles, a fait l'objet d'un récent développement, dans lequel ARGYROPOULOS, KIRIAKI et GINTIDES [2, 14], SAHLI et BENCHEIKH [28, 29], ainsi que GINTIDES et MINDRINOS [12], ont déterminé un autre choix optimal des coefficients des multipôles, en prenant comme critère d'optimalité, la minimisation du nombre de conditionnement de l'opérateur intégral modifié associé au problème aux limites régissant le phénomène de diffraction. Le choix de ce troisième critère d'optimalité, est lié directement à la stabilité numérique de la solution de l'équation intégrale modifiée.

On se propose dans ce travail de développer un nouveau critère d'optimalité pour les coefficients des multipôles, basé cette-fois-ci, sur la minimisation de la norme de l'opérateur traction lié à la fonction de Green modifiée. L'étude de ce nouveau critère d'optimalité, est motivée par le fait, qu'à travers la minimisation de la norme de l'opérateur traction appliqué à la fonction de Green, on minimise ainsi la norme de la différence entre le noyau modifié et le noyau exact de l'opérateur intégral

modifié. Notre travail qui porte sur les choix optimaux des coefficients des multipôles dans le cas d'ondes élastiques en deux dimensions, est structuré en quatre parties. La première partie est consacrée à la formulation mathématique du problème. Dans la deuxième partie, on détermine le choix optimal des coefficients des multipôles dans le cas d'une frontière quelconque, en minimisant la norme de la traction de la fonction de Green modifiée, dans le but énoncé ci-dessus, mais également, afin d'assurer la convergence de la méthode itérative utilisée pour la résolution de l'équation intégrale modifiée régissant le phénomène de diffraction d'ondes élastiques, pour un rayon de convergence aussi grand que possible. Dans cette partie, la fonction de Green sera modifiée de deux façons différentes, l'une en utilisant des coefficients des multipôles simples, et l'autre en utilisant les coefficients des multipôles croisés. La troisième partie traite à titre indicatif, le cas d'une frontière ayant la forme d'un cercle, des résultats intéressants sont obtenus. Et dans la dernière partie, on étudie le cas d'une frontière ayant la forme d'un cercle légèrement déformé. Le travail se termine par une conclusion avec un résumé des principaux résultats obtenus.

CHAPITRE 1

FORMULATION DU PROBLEME

Dans ce qui suit, on présente la formulation mathématique du problème. Nous commencerons tout d'abord par introduire les notations que nous utiliserons. On considère un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$, homogène, élastique, illimité extérieurement et limité intérieurement par une frontière ∂D (figure 1).

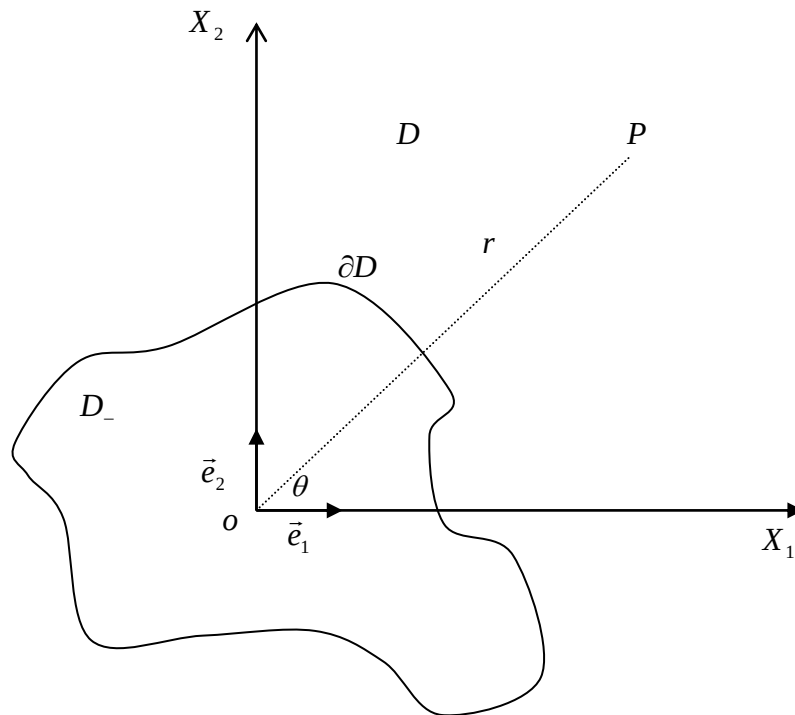


Figure 1 : représentation du domaine

On note par D_- l'intérieur de ∂D tel que $\mathbb{R}^2 = D \cup \partial D \cup D_-$

On note par P, Q les points de D , p, q les points de ∂D et par P_-, Q_- les points de D_-

Le problème aux limites auquel nous nous intéresserons se formule comme suit :

i) L'équation dans D :

$$\frac{1}{k^2} \text{grad} (\text{div } u(P)) - \frac{1}{K^2} \text{rot} (\text{rot } u(P)) + u(P) = 0 \quad P \in D \quad (1.1)$$

ii) La condition sur la frontière ∂D :

$$T u(p) = f(p) \quad p \in \partial D \quad (\text{Condition de Neumann})$$

ou bien : (1.2)

$$u(p) = g(p) \quad p \in \partial D \quad (\text{Condition de Dirichlet})$$

iii) Les conditions de radiation :

Elles s'expriment sous la forme suivante [24]:

$$\lim_{r_p \rightarrow +\infty} u'(P) = 0$$

$$\lim_{r_p \rightarrow +\infty} u''(P) = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{r_p \rightarrow +\infty} r_p^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{\partial u'(P)}{\partial r_p} - i.k.u'(P) \right\} &= 0 \\ \lim_{r_p \rightarrow +\infty} r_p^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{\partial u''(P)}{\partial r_p} - i.K.u''(P) \right\} &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

où :

$$u'(P) = -\frac{1}{k^2} \text{grad} (\text{div } u(P))$$

$$u''(P) = \frac{1}{K^2} \text{rot} (\text{rot } u(P)) \quad (1.4)$$

avec :

$$k^2 = \frac{\rho \omega^2}{\lambda + 2\mu} \quad \text{et} \quad K^2 = \frac{\rho \omega^2}{\mu}$$

ρ est la masse volumique, λ, μ sont les constantes de Lamé.

ω^2 la fréquence des ondes.

T est l'opérateur traction qui agit sur la fonction $u(p)$ par rapport au point p . Dans le cas d'un milieu isotrope T prend la forme suivante :

$$Tu(p) = \lambda \cdot \hat{n}(p) \cdot \text{div } u(p) + 2\mu \frac{\partial u(p)}{\partial n_p} + \mu \cdot \hat{n}(p) \times \text{rot } u(p) \quad p \in \partial D \quad (1.5)$$

où $\hat{n}(p)$ est la normale en p dirigée vers l'extérieur de D_- .

Le problème aux limites tel qu'il est défini possède une solution unique pour toutes les valeurs de la fréquence des ondes ω^2 [24].

Pour obtenir une représentation intégrale de la solution de notre problème, une solution fondamentale et singulière est nécessaire. Cette solution est connue sous le nom de tenseur de Green. Dans le cas d'un milieu homogène et isotrope, ce tenseur s'exprime comme suit [24] :

$$G_0(P, Q) = \frac{i}{4\mu} \cdot \left\{ \psi \cdot I + \frac{1}{K^2} \text{grad}(\text{grad}(\psi - \phi)) \right\} \quad (1.6)$$

où I est le tenseur d'unité, $\psi = H_0^1(K \cdot R)$ et $\phi = H_0^1(k \cdot R)$, $H_0^1(\cdot)$ désigne la fonction de Hankel d'ordre zéro et de premier espèce et R est la distance séparant les deux points P et Q .

Ayant défini la solution fondamentale, les représentations intégrales pour la solution de notre problème peuvent être maintenant obtenues. Il y'a deux méthodes pour l'obtention des représentations intégrales, la méthode directe et la méthode indirecte. La méthode directe s'appuie sur l'utilisation de la formule de Green [35], la méthode indirecte s'appuie sur la notion de potentiel simple couche ou double couche. Nous commencerons par la méthode indirecte. Pour le problème de Dirichlet, la solution est recherchée sous la forme d'un potentiel double couche :

$$u(P) = \int_{\partial D} T_q G_0(P, q) \cdot W(q) \cdot ds_q = (DW)(P) \quad P \in D \quad (1.7)$$

où $W(q)$ est une fonction densité définie sur ∂D . Cette représentation conduit à l'équation intégrale suivante :

$$\frac{1}{2}W(p) + \int_{\partial D} T_q G_0(q, p) \cdot W(q) \cdot ds_q = \frac{1}{2}W(p) + (\overline{K}_0^* W)(p) = g(p) \quad p \in \partial D \quad (1.8)$$

où K_0 est l'opérateur intégral défini par :

$$(K_0 W)(p) = \int_{\partial D} T_p G_0(p, q) \cdot W(q) \cdot ds_q \quad p \in \partial D \quad (1.9)$$

Pour le problème de Neumann, la solution est recherchée sous la forme d'un potentiel simple couche :

$$u(P) = \int_{\partial D} G_0(P, q) \cdot W(q) \cdot ds_q = (SW)(P) \quad P \in D \quad (1.10)$$

où $W(q)$ désigne toujours une fonction densité inconnue définie sur ∂D .

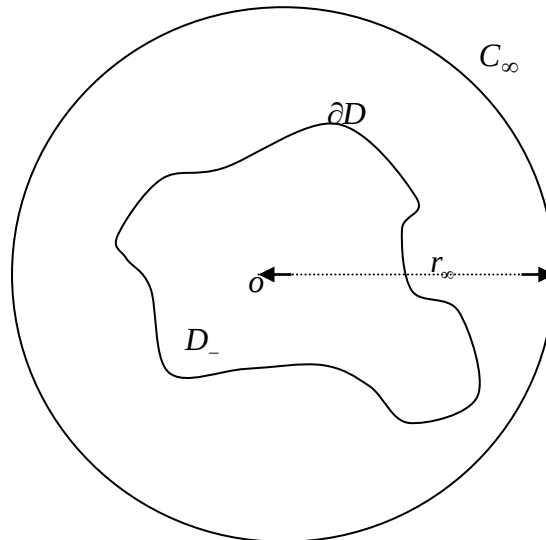
Cette représentation conduit à l'équation intégrale suivante :

$$-\frac{1}{2}W(p) + \int_{\partial D} G_0(P, q) \cdot W(q) \cdot ds_q = f(P) \quad P \in \partial D \quad (1.11)$$

Ou oncore sous la forme :

$$-\frac{1}{2}W(p) + (K_0 W)(p) = f(p) \quad p \in \partial D . \quad (1.12)$$

Pour la méthode directe, l'application de la formule de Green à la solution recherchée u et au tenseur de green G_0 dans le domaine limité intérieurement par ∂D et par un cercle de grand rayon r_∞ (figure 2),



conduit aux relations suivantes, où il a été tenu compte du fait que u et G_0 satisfont à l'équation (1.1) et aux conditions de radiation (1.3) :

$$u(P) = \int_{\partial D} [u(q).T_q G_0(q, P) - T u(q).G_0(q, P)].ds_q \quad P \in D \quad (1.13)$$

et

$$\frac{1}{2} u(p) = \int_{\partial D} [u(q).T_q G_0(q, p) - T u(q).G_0(q, p)].ds_q \quad p \in \partial D \quad (1.14)$$

Ce qui conduit à l'équation intégrale suivante :

$$\frac{1}{2} u(p) - \left(\overline{K_0^*} u \right)(p) = - (S f)(p) \quad p \in \partial D \quad (1.16)$$

Les deux équations intégrales (1.12) et (1.16) correspondantes respectivement aux représentations intégrales (1.10) et (1.13) du problème donné sont des équations intégrales adjointes. Donc, en vertu des théorèmes de Fredholm [22] si l'une des deux possède une solution unique il en sera de même pour l'autre. Or il est connu et établi (voir par exemple [7]) que ces deux équations intégrales ne possèdent pas des solutions uniques pour un spectre discret des valeurs de la fréquence des ondes ω^2 . Ce qui est en contradiction avec ce qui a été énoncé un peu plus haut.

Plusieurs méthodes ont été proposées pour contourner cette difficulté. On peut citer entre autre celle qui consiste à perturber la fonction de Green G_0 en lui ajoutant une série de fonctions appelées multipôles. Dans ces multipôles intervient des coefficients arbitraires. Le tenseur de Green ainsi modifié est donné par [7] :

- Modification avec coefficients des multipôles simples :

$$G_1(P, Q) = G_0(P, Q) + \frac{i}{4\mu K^2} \cdot \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{l=1}^2 [a_m^{\sigma l} \cdot F_m^{\sigma l}(P) \otimes F_m^{\sigma l}(Q)] \quad (1.17-a)$$

- Modification avec coefficients des multipôles simples et croisés :

$$G_1(P, Q) = G_0(P, Q) + \frac{i}{4\mu K^2} \cdot \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{l=1}^2 \left[a_m^{\sigma l} \cdot F_m^{\sigma l}(P) \otimes F_m^{\sigma l}(Q) + (-1)^{\sigma+l} \cdot b_m \cdot F_m^{\sigma l}(P) \otimes F_m^{(3-\sigma)(3-l)}(Q) \right] \quad (1.17-b)$$

où $a_m^{\sigma l}$ et b_m sont successivement, les coefficients des multipôles simples et croisés, et

$$F_m^{\sigma 1}(P) = \text{grad} \left(H_m^1(k \cdot r_p) \cdot E_m^{\sigma}(\theta_p) \right), \quad F_m^{\sigma 2}(P) = \text{rot} \left(H_m^1(K \cdot r_p) \cdot E_m^{\sigma}(\theta_p) \hat{e}_3 \right)$$

(r_p, θ_p) sont les coordonnées polaires du point, $H_m^1(\cdot)$ représente la fonction de Hankel d'ordre m et de type 1 et

$$E_m^{\sigma}(\theta_p) = \sqrt{\varepsilon_m} \cdot \begin{cases} \cos(m \cdot \theta_p) & \sigma=1 \\ \sin(m \cdot \theta_p) & \sigma=2 \end{cases}$$

avec :

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 1 & m=0 \\ 2 & m > 0 \end{cases}$$

$\otimes$ désigne le produit tensoriel, $\hat{e}_3$ est le vecteur unité dans la direction de z .

Les équations intégrales modifiées correspondantes aux équations (1.12) et (1.16) deviennent alors respectivement :

$$-\frac{1}{2}W(p) + (K_1 W)(p) = f(p) \quad p \in \partial D \quad (1.18)$$

$$\frac{1}{2}u(p) - (\overline{K_1^*} u)(p) = -(S f)(p) \quad p \in \partial D \quad (1.19)$$

où K_1 est l'opérateur intégral modifié défini de la même façon que K_0 mais avec G_0 remplacée par G_1 .

Le tableau ci-dessous résume les formulations directes et indirectes conduisant à des équations intégrales modifiées de second espèce.

Conditions aux limites	Equations intégrales	Représentation dans D
$u=g$	$\frac{1}{2} W + \overline{K}_1^* W = g$	$u=D_1 W \quad (1.20)$
	$\frac{1}{2} W + K_1 W = D_{1n} g$	$u=D_1 g - S_1 W \quad (1.21)$
$T u = f$	$\frac{1}{2} W - \overline{K}_1^* W = -S_1 f$	$u=D_1 W - S_1 f \quad (1.22)$
	$-\frac{1}{2} W + K_1 W = f$	$u=S_1 W \quad (1.23)$

où $(D_{1n} g)(p)=T(D_1 g)(p)$

Afin de garantir l'unicité des solutions des équations intégrales (1.18) et (1.19), une condition suffisante mais pas nécessaire a été établie dans [7]. Cette condition porte sur les coefficients des multipôles et s'exprime sous la forme suivante :

$$\bar{b}_m \cdot \left(a_m^{\sigma 1} + \frac{1}{2} \right) + b_m \cdot \left(\bar{a}_m^{\sigma 2} + \frac{1}{2} \right) = 0$$

$$\text{et} \quad \left| a_m^{\sigma l} + \frac{1}{2} \right|^2 + |b_m|^2 - \frac{1}{4} < 0 \quad (1.24)$$

$$\forall m=0:\infty \quad \text{et} \quad \forall \sigma, l=1:2$$

On remarque alors que la condition (1.24) est une condition large. La question que l'on se pose est parmi toutes les valeurs possibles que peuvent prendre ces coefficients, est ce qu'il existe un choix optimal vis-à-vis d'un critère donné? C'est à cette question que l'on essaiera de répondre en prenant comme critère d'optimalité la minimisation de la norme de l'opérateur traction lié à la fonction de Green modifiée $\|TG_1\|$, autrement dit, la minimisation de la norme de la différence entre le noyau modifié et le noyau exact de l'opérateur intégral modifié K_1 .

CHAPITRE 2

ETUDE DU CAS GENERAL

Dans le chapitre suivant, on se propose de déterminer l'expression des coefficients des multipôles en minimisant la norme de l'opérateur traction lié à la fonction de Green modifiée $\|TG_1\|$, c'est-à-dire, en minimisant la différence entre le noyau modifié et le noyau exact de l'opérateur intégral modifié K_1 . Le choix de ce critère est motivé par le fait, qu'à travers la minimisation de la norme de l'opérateur traction lié à la fonction de Green modifiée $\|TG_1\|_{L_2(\partial D)}$, on minimise aussi la norme de la différence entre le noyau modifié et le noyau exact de l'opérateur intégral modifié, pour le cas du problème de Dirichlet. Ce choix est motivé aussi par le fait que nous voulons garantir la convergence de la méthode itérative qui sera utilisée pour la résolution de l'équation intégrale modifiée (1.18), et ceci pour le plus grand spectre possible de valeurs de la fréquence ω^2 . On rappelle que la condition de convergence de la méthode des approximations successives s'exprime sous la forme suivante [22] :

$$0 < \omega^2 < \frac{1}{\|TG_1\|_{L_2(\partial D)}} \quad (2.1)$$

Considérons maintenant la question de détermination d'un choix optimal des coefficients des multipôles qui minimise la norme de l'opérateur traction lié à la fonction de Green modifiée $\|TG_1\|_{L_2(\partial D)}$, tel que défini dans les relations (1.17a) et (1.17b).

I – Optimisation des coefficients des multipôles simples :

Théorème 01 :

Si le noyau de l'opérateur intégral modifié K_1 , à savoir la traction de la fonction de Green $T_p G_1$ est définie comme suit :

$$T_p G_1(P, Q) = T_p G_0(P, Q) + \frac{i}{4\mu K^2} \cdot \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{l=1}^2 [a_m^{\sigma l} \cdot TF_m^{\sigma l}(P) \otimes TF_m^{\sigma l}(Q)] \quad (2.2)$$

Alors la quantité :

$$\int_{r_p=A} \|T_p G_1\|_{L_2(\partial D)}^2 \cdot ds_p, \quad \forall A \geq \max r_q, q \in \partial D \quad (2.3)$$

est minimisée si les coefficients des multipôles simples sont choisis comme suit :

$$a_m^{\sigma l} = \frac{\left[\alpha_m^{(3-\sigma)(3-l)} \cdot A_m^{(3-\sigma)(3-l)} \right] \left[g_m^{\sigma l} \right] - \left[\bar{\beta}_m^{\sigma l} \cdot \bar{B}_m^{\sigma l} \right] \left[g_m^{(3-\sigma)(3-l)} \right]}{\Delta_m^{\sigma}} \quad (2.4)$$

$\forall m=0:\infty, \quad \forall \sigma, l=1:2$

$$\text{où : } \alpha_m^{\sigma l} = \|TF_m^{\sigma l}\|_A^2, \quad \beta_m^{\sigma l} = \langle TF_m^{\sigma l}, TF_m^{(3-\sigma)(3-l)} \rangle_A \quad (2.5)$$

$$A_m^{\sigma l} = \|TF_m^{\sigma l}\|_{\partial D}^2, \quad B_m^{\sigma l} = \langle TF_m^{\sigma l}, TF_m^{(3-\sigma)(3-l)} \rangle_{\partial D} \quad (2.6)$$

$$\Delta_m^{\sigma} = \alpha_m^{\sigma 1} \cdot A_m^{\sigma 1} \cdot \alpha_m^{(3-\sigma)2} \cdot A_m^{(3-\sigma)2} - \beta_m^{\sigma 1} \cdot B_m^{\sigma 1} \cdot \bar{\beta}_m^{\sigma 1} \cdot \bar{B}_m^{\sigma 1} \quad (2.7)$$

$$\text{et : } g_m^{\sigma l} = -\langle \bar{\beta}_m^{\sigma l}, \hat{TF}_m^{(3-\sigma)(3-l)} \rangle + \alpha_m^{\sigma l} \cdot \hat{TF}_m^{\sigma l}, TF_m^{\sigma l} \rangle_{\partial D} \quad (2.8)$$

Démonstration :

Etape 01 :

On a :

$$\begin{aligned} T_p G_1(P, Q) &= T_p G_0(P, Q) + \frac{i}{4\mu K^2} \cdot \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{l=1}^2 [a_m^{\sigma l} \cdot TF_m^{\sigma l}(P) \otimes TF_m^{\sigma l}(Q)] \\ &= \frac{i}{4\mu K^2} \cdot \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{l=1}^2 [TF_m^{\sigma l}(P) \otimes \hat{TF}_m^{\sigma l}(Q) + a_m^{\sigma l} \cdot TF_m^{\sigma l}(P) \otimes TF_m^{\sigma l}(Q)] \end{aligned}$$

On pose $f_m^{\sigma l}(Q) = [TF_m^{\sigma l}(Q) + a_m^{\sigma l} \cdot TF_m^{\sigma l}(Q)]$

Donc la traction de la fonction de Green modifiée $T_p G_1$ s'écrit sous la forme :

$$T_p G_1(P, Q) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{l=1}^2 [TF_m^{\sigma l}(P) \otimes f_m^{\sigma l}(Q)]$$

Alors, on a :

$$\begin{aligned} \int_{r_p=A} \|T_p G_1\|_{L_2(\partial D)}^2 \cdot dS_p &= \int_{r_p=A} \int_{\partial D} T_p G_1(P, q) : \overline{T_p G_1}(q, P) \cdot dS_p \cdot dS_q \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{l=1}^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\nu=1}^2 \sum_{k=1}^2 \int_{r_p=A} TF_m^{\sigma l}(P) \cdot \overline{TF_n^{\nu k}}(P) \cdot dS_p \cdot \int_{\partial D} f_m^{\sigma l}(q) \cdot \overline{f_n^{\nu k}}(q) \cdot dS_q \end{aligned}$$

Autrement dit :

$$\begin{aligned} \int_{r_p=A} \|T_p G_1\|_{L_2(\partial D)}^2 \cdot dS_p &= \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\nu=1}^2 \left[\int_{r_p=A} TF_m^{\sigma 1}(P) \cdot \overline{TF_n^{\nu 1}}(P) \cdot dS_p \cdot \int_{\partial D} f_m^{\sigma 1}(q) \cdot \overline{f_n^{\nu 1}}(q) \cdot dS_q \right. \\ &\quad + \int_{r_p=A} TF_m^{\sigma 1}(P) \cdot \overline{TF_n^{\nu 2}}(P) \cdot dS_p \cdot \int_{\partial D} f_m^{\sigma 1}(q) \cdot \overline{f_n^{\nu 2}}(q) \cdot dS_q \\ &\quad + \int_{r_p=A} TF_m^{\sigma 2}(P) \cdot \overline{TF_n^{\nu 1}}(P) \cdot dS_p \cdot \int_{\partial D} f_m^{\sigma 2}(q) \cdot \overline{f_n^{\nu 1}}(q) \cdot dS_q \\ &\quad \left. + \int_{r_p=A} TF_m^{\sigma 2}(P) \cdot \overline{TF_n^{\nu 2}}(P) \cdot dS_p \cdot \int_{\partial D} f_m^{\sigma 2}(q) \cdot \overline{f_n^{\nu 2}}(q) \cdot dS_q \right] \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\nu=1}^2 \left[\langle TF_m^{\sigma 1}, TF_n^{\nu 1} \rangle_A \cdot \int_{\partial D} f_m^{\sigma 1}(q) \cdot \overline{f_n^{\nu 1}}(q) \cdot dS_q \right. \\ &\quad + \langle TF_m^{\sigma 1}, TF_n^{\nu 2} \rangle_A \cdot \int_{\partial D} f_m^{\sigma 1}(q) \cdot \overline{f_n^{\nu 2}}(q) \cdot dS_q \\ &\quad + \langle TF_m^{\sigma 2}, TF_n^{\nu 1} \rangle_A \cdot \int_{\partial D} f_m^{\sigma 2}(q) \cdot \overline{f_n^{\nu 1}}(q) \cdot dS_q \\ &\quad \left. + \langle TF_m^{\sigma 2}, TF_n^{\nu 2} \rangle_A \cdot \int_{\partial D} f_m^{\sigma 2}(q) \cdot \overline{f_n^{\nu 2}}(q) \cdot dS_q \right] \end{aligned}$$

En utilisant les relations des produits scalaires des fonctions $\{TF_m^{\sigma l}\}_{m=0:\infty}^{\sigma,l=1:2}$ sur le cercle de rayon A [34], on obtient :

$$\begin{aligned}
 & \int_{r_p=A} \|T_p G_1\|_{L_2(\partial D)}^2 \cdot dS_p \\
 &= \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \left[\|TF_m^{\sigma 1}\|_A^2 \cdot \int_{\partial D} f_m^{\sigma 1}(q) \cdot \overline{f}_m^{\sigma 1}(q) \cdot dS_q \right. \\
 &+ \langle TF_m^{\sigma 1}, TF_m^{\sigma 2} \rangle_A \cdot \int_{\partial D} f_m^{\sigma 1}(q) \cdot \overline{f}_m^{(3-\sigma)2}(q) \cdot dS \\
 &+ \langle TF_m^{\sigma 2}, TF_m^{\sigma 1} \rangle_A \cdot \int_{\partial D} \overline{f}_m^{\sigma 1}(q) \cdot f_m^{(3-\sigma)2}(q) \cdot dS \\
 &\left. + \|TF_m^{\sigma 2}\|_A^2 \cdot \int_{\partial D} f_m^{\sigma 2}(q) \cdot \overline{f}_m^{\sigma 2}(q) \cdot dS_q \right] \\
 &= \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \left[\|TF_m^{\sigma 1}\|_A^2 \cdot \langle f_m^{\sigma 1}, f_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} \right. \\
 &+ \langle TF_m^{\sigma 1}, TF_m^{\sigma 2} \rangle_A \cdot \langle f_m^{\sigma 1}, f_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} \\
 &+ \langle TF_m^{\sigma 2}, TF_m^{\sigma 1} \rangle_A \cdot \langle f_m^{(3-\sigma)2}, f_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} \\
 &\left. + \|TF_m^{\sigma 2}\|_A^2 \cdot \langle f_m^{(3-\sigma)2}, f_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} \right]
 \end{aligned}$$

En utilisant : $f_m^{\sigma l}(Q) = [\hat{TF}_m^{\sigma l}(Q) + a_m^{\sigma l} \cdot TF_m^{\sigma l}(Q)]$

Calculons les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
 & \langle f_m^{\sigma 1}, f_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} = \langle \hat{TF}_m^{\sigma 1} + a_m^{\sigma 1} \cdot TF_m^{\sigma 1}, \hat{TF}_m^{\sigma 1} + a_m^{\sigma 1} \cdot TF_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} \\
 &= \|\hat{TF}_m^{\sigma 1}\|_{\partial D}^2 + \overline{a}_m^{\sigma 1} \cdot \langle \hat{TF}_m^{\sigma 1}, TF_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} + a_m^{\sigma 1} \cdot \langle TF_m^{\sigma 1}, \hat{TF}_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} + a_m^{\sigma 1} \cdot \overline{a}_m^{\sigma 1} \cdot \|TF_m^{\sigma 1}\|_{\partial D}^2 \\
 & \langle f_m^{\sigma 1}, f_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} = \langle \hat{TF}_m^{\sigma 1} + a_m^{\sigma 1} \cdot TF_m^{\sigma 1}, \hat{TF}_m^{(3-\sigma)2} + a_m^{(3-\sigma)2} \cdot TF_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} \\
 &= \langle \hat{TF}_m^{\sigma 1}, \hat{TF}_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} + \overline{a}_m^{(3-\sigma)2} \cdot \langle \hat{TF}_m^{\sigma 1}, TF_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} + a_m^{\sigma 1} \cdot \langle TF_m^{\sigma 1}, \hat{TF}_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} \\
 &+ a_m^{\sigma 1} \cdot \overline{a}_m^{(3-\sigma)2} \cdot \langle TF_m^{\sigma 1}, TF_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} \\
 & \langle f_m^{(3-\sigma)2}, f_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} = \langle \hat{TF}_m^{(3-\sigma)2} + a_m^{(3-\sigma)2} \cdot TF_m^{(3-\sigma)2}, \hat{TF}_m^{\sigma 1} + a_m^{\sigma 1} \cdot TF_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} \\
 &= \langle \hat{TF}_m^{(3-\sigma)2}, \hat{TF}_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} + a_m^{(3-\sigma)2} \cdot \langle TF_m^{(3-\sigma)2}, \hat{TF}_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} + \overline{a}_m^{\sigma 1} \cdot \langle \hat{TF}_m^{(3-\sigma)2}, TF_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} \\
 &+ a_m^{(3-\sigma)2} \cdot \overline{a}_m^{\sigma 1} \cdot \langle TF_m^{(3-\sigma)2}, TF_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \langle f_m^{(3-\sigma)2}, f_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} = \langle T\hat{F}_m^{(3-\sigma)2} + a_m^{(3-\sigma)2} \cdot TF_m^{(3-\sigma)2}, T\hat{F}_m^{(3-\sigma)2} + a_m^{(3-\sigma)2} \cdot TF_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} \\
& = \left\| T\hat{F}_m^{(3-\sigma)2} \right\|_{\partial D}^2 + a_m^{-(3-\sigma)2} \cdot \langle T\hat{F}_m^{(3-\sigma)2}, TF_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} + a_m^{(3-\sigma)2} \cdot \langle TF_m^{(3-\sigma)2}, T\hat{F}_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} \\
& \quad + a_m^{(3-\sigma)2} \cdot a_m^{-(3-\sigma)2} \cdot \left\| TF_m^{(3-\sigma)2} \right\|_{\partial D}^2
\end{aligned}$$

Donc nous aurons :

$$\begin{aligned}
& \int_{r_p=A} \left\| T_p G_1 \right\|_{L_2(\partial D)}^2 \cdot dS_p \\
& = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \left[\begin{aligned} & \left\| TF_m^{\sigma 1} \right\|_A^2 \cdot \langle f_m^{\sigma 1}, f_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} \\ & + \langle TF_m^{\sigma 1}, TF_m^{\sigma 2} \rangle_A \cdot \langle f_m^{\sigma 1}, f_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} \\ & + \langle TF_m^{\sigma 2}, TF_m^{\sigma 1} \rangle_A \cdot \langle f_m^{(3-\sigma)2}, f_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} \\ & + \left\| TF_m^{\sigma 2} \right\|_A^2 \cdot \langle f_m^{(3-\sigma)2}, f_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} \end{aligned} \right] \\
& = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \left[\begin{aligned} & \left\| TF_m^{\sigma 1} \right\|_A^2 \cdot \left(\left\| T\hat{F}_m^{\sigma 1} \right\|_{\partial D}^2 + a_m^{-\sigma 1} \cdot \langle T\hat{F}_m^{\sigma 1}, TF_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} + a_m^{\sigma 1} \cdot \langle TF_m^{\sigma 1}, T\hat{F}_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} \right. \\ & \quad \left. + a_m^{\sigma 1} \cdot a_m^{-\sigma 1} \cdot \left\| TF_m^{\sigma 1} \right\|_{\partial D}^2 \right) \\ & + \langle TF_m^{\sigma 1}, TF_m^{(3-\sigma)2} \rangle_A \cdot \left(\langle T\hat{F}_m^{\sigma 1}, T\hat{F}_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} + a_m^{-(3-\sigma)2} \cdot \langle T\hat{F}_m^{\sigma 1}, TF_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} \right. \\ & \quad \left. + a_m^{\sigma 1} \cdot \langle TF_m^{\sigma 1}, T\hat{F}_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} \right. \\ & \quad \left. + a_m^{\sigma 1} \cdot a_m^{-(3-\sigma)2} \cdot \langle TF_m^{\sigma 1}, TF_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} \right) \\ & + \langle TF_m^{(3-\sigma)2}, TF_m^{\sigma 1} \rangle_A \cdot \left(\langle T\hat{F}_m^{(3-\sigma)2}, T\hat{F}_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} + a_m^{(3-\sigma)2} \cdot \langle TF_m^{(3-\sigma)2}, T\hat{F}_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} \right. \\ & \quad \left. + a_m^{-\sigma 1} \cdot \langle T\hat{F}_m^{(3-\sigma)2}, TF_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} \right. \\ & \quad \left. + a_m^{(3-\sigma)2} \cdot a_m^{-\sigma 1} \cdot \langle TF_m^{(3-\sigma)2}, TF_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} \right) \\ & + \left\| TF_m^{(3-\sigma)2} \right\|_A^2 \cdot \left(\left\| T\hat{F}_m^{(3-\sigma)2} \right\|_{\partial D}^2 + a_m^{-(3-\sigma)2} \cdot \langle T\hat{F}_m^{(3-\sigma)2}, TF_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} \right. \\ & \quad \left. + a_m^{(3-\sigma)2} \cdot \langle TF_m^{(3-\sigma)2}, T\hat{F}_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} \right. \\ & \quad \left. + a_m^{(3-\sigma)2} \cdot a_m^{-(3-\sigma)2} \cdot \left\| TF_m^{(3-\sigma)2} \right\|_{\partial D}^2 \right) \end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

Utilisons les notations (2.5) à (2.8), nous aurons :

$$\int_{r_p=A} \left\| T_p G_1 \right\|_{L_2(\partial D)}^2 \cdot dS_p =$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \left[\begin{aligned} & \alpha_m^{\sigma 1} \cdot \left(\left\| \hat{T}F_m^{\sigma 1} \right\|^2 + \bar{a}_m^{-\sigma 1} \cdot \langle \hat{T}F_m^{\sigma 1}, TF_m^{\sigma 1} \rangle + a_m^{\sigma 1} \cdot \langle TF_m^{\sigma 1}, \hat{T}F_m^{\sigma 1} \rangle \right) \\ & + \beta_m^{\sigma 1} \cdot \left(\langle \hat{T}F_m^{\sigma 1}, \hat{T}F_m^{(3-\sigma)2} \rangle + \bar{a}_m^{-(3-\sigma)2} \cdot \langle \hat{T}F_m^{\sigma 1}, TF_m^{(3-\sigma)2} \rangle \right. \\ & \quad \left. + a_m^{\sigma 1} \cdot \langle TF_m^{\sigma 1}, \hat{T}F_m^{(3-\sigma)2} \rangle \right. \\ & \quad \left. + a_m^{\sigma 1} \cdot \bar{a}_m^{-(3-\sigma)2} \cdot B_m^{\sigma 1} \right) \\ & + \bar{\beta}_m^{\sigma 1} \cdot \left(\langle \hat{T}F_m^{(3-\sigma)2}, \hat{T}F_m^{\sigma 1} \rangle + a_m^{(3-\sigma)2} \cdot \langle TF_m^{(3-\sigma)2}, \hat{T}F_m^{\sigma 1} \rangle \right. \\ & \quad \left. + \bar{a}_m^{-\sigma 1} \cdot \langle \hat{T}F_m^{(3-\sigma)2}, TF_m^{\sigma 1} \rangle \right. \\ & \quad \left. + a_m^{(3-\sigma)2} \cdot \bar{a}_m^{-\sigma 1} \cdot \bar{B}_m^{\sigma 1} \right) \\ & + \alpha_m^{(3-\sigma)2} \cdot \left(\left\| \hat{T}F_m^{(3-\sigma)2} \right\|^2 + \bar{a}_m^{-(3-\sigma)2} \cdot \langle \hat{T}F_m^{(3-\sigma)2}, TF_m^{(3-\sigma)2} \rangle \right. \\ & \quad \left. + a_m^{(3-\sigma)2} \cdot \langle TF_m^{(3-\sigma)2}, \hat{T}F_m^{(3-\sigma)2} \rangle \right. \\ & \quad \left. + a_m^{(3-\sigma)2} \cdot \bar{a}_m^{-(3-\sigma)2} \cdot A_m^{(3-\sigma)2} \right) \end{aligned} \right]$$

C'est un problème de minimisation standard, dont la condition nécessaire pour l'existence d'un minimum est l'annulation de la dérivée.

Donc, si on dérive par rapport aux coefficients $\bar{a}_m^{-\sigma 1}$ et $a_m^{-(3-\sigma)2}$, on obtient le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{aligned} & \alpha_m^{\sigma 1} \cdot \left(\langle \hat{T}F_m^{\sigma 1}, TF_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} + a_m^{\sigma 1} \cdot A_m^{\sigma 1} \right) \\ & + \bar{\beta}_m^{\sigma 1} \cdot \left(\langle \hat{T}F_m^{(3-\sigma)2}, TF_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} + a_m^{(3-\sigma)2} \cdot \bar{B}_m^{\sigma 1} \right) = 0 \\ & \beta_m^{\sigma 1} \cdot \left(\langle \hat{T}F_m^{\sigma 1}, \hat{T}F_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} + a_m^{\sigma 1} \cdot B_m^{\sigma 1} \right) \\ & + \alpha_m^{(3-\sigma)2} \cdot \left(\langle \hat{T}F_m^{(3-\sigma)2}, TF_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} + a_m^{(3-\sigma)2} \cdot A_m^{(3-\sigma)2} \right) = 0 \end{aligned} \right.$$

ou sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{aligned} & \alpha_m^{\sigma 1} \cdot A_m^{\sigma 1} \cdot a_m^{\sigma 1} + \bar{\beta}_m^{\sigma 1} \cdot \bar{B}_m^{\sigma 1} \cdot a_m^{(3-\sigma)2} \\ & = -\bar{\beta}_m^{\sigma 1} \cdot \langle \hat{T}F_m^{(3-\sigma)2}, TF_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} - \alpha_m^{\sigma 1} \cdot \langle \hat{T}F_m^{\sigma 1}, TF_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} \\ & = -\langle \bar{\beta}_m^{\sigma 1} \cdot \hat{T}F_m^{(3-\sigma)2} + \alpha_m^{\sigma 1} \cdot \hat{T}F_m^{\sigma 1}, TF_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} \\ & \beta_m^{\sigma 1} \cdot B_m^{\sigma 1} \cdot a_m^{\sigma 1} + \alpha_m^{(3-\sigma)2} \cdot A_m^{(3-\sigma)2} \cdot a_m^{(3-\sigma)2} \\ & = -\beta_m^{\sigma 1} \cdot \langle \hat{T}F_m^{\sigma 1}, \hat{T}F_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} - \alpha_m^{(3-\sigma)2} \cdot \langle \hat{T}F_m^{(3-\sigma)2}, TF_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} \\ & = -\langle \beta_m^{\sigma 1} \cdot \hat{T}F_m^{\sigma 1} + \alpha_m^{(3-\sigma)2} \cdot \hat{T}F_m^{(3-\sigma)2}, TF_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} \end{aligned} \right.$$

Si on pose : $g_m^{\sigma l} = -\langle \overline{\beta}_m^{\sigma l} \cdot \hat{TF}_m^{(3-\sigma)(3-l)} + \alpha_m^{\sigma l} \cdot \hat{TF}_m^{\sigma l}, TF_m^{\sigma l} \rangle_{\partial D}$

Notre système se réécrit comme suit :

$$\begin{cases} (\alpha_m^{\sigma 1} \cdot A_m^{\sigma 1}) a_m^{\sigma 1} + (\overline{\beta}_m^{\sigma 1} \cdot \overline{B}_m^{\sigma 1}) a_m^{(3-\sigma)2} = g_m^{\sigma 1} \\ (\beta_m^{\sigma 1} \cdot B_m^{\sigma 1}) a_m^{\sigma 1} + (\alpha_m^{(3-\sigma)2} \cdot A_m^{(3-\sigma)2}) a_m^{(3-\sigma)2} = g_m^{(3-\sigma)2} \end{cases}$$

Ce dernier système admet le déterminant non nul suivant :

$$\Delta_m^{\sigma} = \alpha_m^{\sigma 1} \cdot A_m^{\sigma 1} \cdot \alpha_m^{(3-\sigma)2} \cdot A_m^{(3-\sigma)2} - \beta_m^{\sigma 1} \cdot B_m^{\sigma 1} \cdot \overline{\beta}_m^{\sigma 1} \cdot \overline{B}_m^{\sigma 1}$$

En effet, notre déterminant s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \Delta_m^{\sigma} &= \alpha_m^{\sigma 1} \cdot A_m^{\sigma 1} \cdot \alpha_m^{(3-\sigma)2} \cdot A_m^{(3-\sigma)2} - \beta_m^{\sigma 1} \cdot B_m^{\sigma 1} \cdot \overline{\beta}_m^{\sigma 1} \cdot \overline{B}_m^{\sigma 1} \\ &= \|TF_m^{\sigma 1}\|_A^2 \cdot \|TF_m^{(3-\sigma)2}\|_A^2 \cdot \|TF_m^{\sigma 1}\|_{\partial D}^2 \cdot \|TF_m^{(3-\sigma)2}\|_{\partial D}^2 \\ &\quad - \left| \langle TF_m^{\sigma 1}, TF_m^{(3-\sigma)2} \rangle_A \right|^2 \cdot \left| \langle TF_m^{\sigma 1}, TF_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} \right|^2 \end{aligned}$$

Mais d'après l'inégalité de Schwartz et l'indépendance linéaire des fonctions $\{TF_m^{\sigma l}\}_{m=0:\infty}^{\sigma, l=1:2}$, nous avons :

$$\|TF_m^{\sigma 1}\|_A^2 \cdot \|TF_m^{(3-\sigma)2}\|_A^2 > \left| \langle TF_m^{\sigma 1}, TF_m^{(3-\sigma)2} \rangle_A \right|^2$$

Et

$$\|TF_m^{\sigma 1}\|_{\partial D}^2 \cdot \|TF_m^{(3-\sigma)2}\|_{\partial D}^2 > \left| \langle TF_m^{\sigma 1}, TF_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} \right|^2$$

Donc :

$$\begin{aligned} &\|TF_m^{\sigma 1}\|_A^2 \cdot \|TF_m^{(3-\sigma)2}\|_A^2 \cdot \|TF_m^{\sigma 1}\|_{\partial D}^2 \cdot \|TF_m^{(3-\sigma)2}\|_{\partial D}^2 > \\ &\left| \langle TF_m^{\sigma 1}, TF_m^{(3-\sigma)2} \rangle_A \right|^2 \cdot \left| \langle TF_m^{\sigma 1}, TF_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} \right|^2 \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \Delta_m^{\sigma} &= \|TF_m^{\sigma 1}\|_A^2 \cdot \|TF_m^{(3-\sigma)2}\|_A^2 \cdot \|TF_m^{\sigma 1}\|_{\partial D}^2 \cdot \|TF_m^{(3-\sigma)2}\|_{\partial D}^2 \\ &\quad - \left| \langle TF_m^{\sigma 1}, TF_m^{(3-\sigma)2} \rangle_A \right|^2 \cdot \left| \langle TF_m^{\sigma 1}, TF_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} \right|^2 > 0 \end{aligned}$$

Et par conséquent, les solutions de ce dernier système, seront données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_m^{\sigma 1} = \frac{\left[\alpha_m^{(3-\sigma)2} \cdot A_m^{(3-\sigma)2} \right] \left[g_m^{\sigma 1} \right] - \left[\bar{\beta}_m^{\sigma 1} \cdot \bar{B}_m^{\sigma 1} \right] \left[g_m^{(3-\sigma)2} \right]}{\Delta_m^{\sigma}} \\ a_m^{(3-\sigma)2} = \frac{\left[\alpha_m^{\sigma 1} \cdot A_m^{\sigma 1} \right] \left[g_m^{(3-\sigma)2} \right] - \left[\beta_m^{\sigma 1} \cdot B_m^{\sigma 1} \right] \left[g_m^{\sigma 1} \right]}{\Delta_m^{\sigma}} \end{array} \right.$$

ou sous la forme abrégée suivante :

$$a_m^{\sigma l} = \frac{\left[\alpha_m^{(3-\sigma)(3-l)} \cdot A_m^{(3-\sigma)(3-l)} \right] \left[g_m^{\sigma l} \right] - \left[\bar{\beta}_m^{\sigma l} \cdot \bar{B}_m^{\sigma l} \right] \left[g_m^{(3-\sigma)(3-l)} \right]}{\Delta_m^{\sigma}}$$

$$\forall m=0:\infty \quad , \quad \forall \sigma, l=1:2$$

Etape 2 :

Nous allons démontrer dans ce qui suit que le choix des coefficients des multipôles simples tel que défini dans (2.4) vérifie réellement le minimum de la quantité :

$$\int_{r_p=A} \|T_p G_1\|_{L_2(\partial D)}^2 \cdot dS_p \quad , \quad \forall A \geq \max r_q \quad , \quad q \in \partial D$$

Pour cela, on suppose que la quantité $\int_{r_p=A} \|T_p G_1\|_{L_2(\partial D)}^2 \cdot dS_p$ est une fonction

des variables $x_m^{\sigma,1}$, $y_m^{\sigma,1}$, $x_m^{(3-\sigma),2}$ et $y_m^{(3-\sigma),2}$ pour $m=0:\infty$, $\sigma, l=1:2$,

où $a_m^{\sigma,1} = x_m^{\sigma,1} + i \cdot y_m^{\sigma,1}$ et $a_m^{(3-\sigma),2} = x_m^{(3-\sigma),2} + i \cdot y_m^{(3-\sigma),2}$

Alors la quantité $\int_{r_p=A} \|T_p G_1\|_{L_2(\partial D)}^2 \cdot dS_p$ peut être réécrite comme suit :

$$\int_{r_p=A} \|T_p G_1\|_{L_2(\partial D)}^2 \cdot dS_p$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \left[\begin{aligned} &\alpha_m^{\sigma 1} \cdot \left(\left\| T\hat{F}_m^{\sigma 1} \right\|^2 + \left(x_m^{\sigma,1} - i \cdot y_m^{\sigma,1} \right) \cdot \left\langle T\hat{F}_m^{\sigma 1}, T\hat{F}_m^{\sigma 1} \right\rangle \right. \\ &\quad \left. + \left(x_m^{\sigma,1} + i \cdot y_m^{\sigma,1} \right) \cdot \left\langle T\hat{F}_m^{\sigma 1}, T\hat{F}_m^{\sigma 1} \right\rangle \right. \\ &\quad \left. + \left(\left(x_m^{\sigma,1} \right)^2 + \left(y_m^{\sigma,1} \right)^2 \right) \cdot A_m^{\sigma 1} \right) \\ &+ \beta_m^{\sigma 1} \cdot \left(\left\langle T\hat{F}_m^{\sigma 1}, T\hat{F}_m^{(3-\sigma)2} \right\rangle \right. \\ &\quad \left. + \left(x_m^{(3-\sigma),2} - i \cdot y_m^{(3-\sigma),2} \right) \cdot \left\langle T\hat{F}_m^{\sigma 1}, T\hat{F}_m^{(3-\sigma)2} \right\rangle \right. \\ &\quad \left. + \left(x_m^{\sigma,1} + i \cdot y_m^{\sigma,1} \right) \cdot \left\langle T\hat{F}_m^{\sigma 1}, T\hat{F}_m^{(3-\sigma)2} \right\rangle \right. \\ &\quad \left. + \left(x_m^{\sigma,1} + i \cdot y_m^{\sigma,1} \right) \cdot \left(x_m^{(3-\sigma),2} - i \cdot y_m^{(3-\sigma),2} \right) \cdot B_m^{\sigma 1} \right) \\ &+ \bar{\beta}_m^{\sigma 1} \cdot \left(\left\langle T\hat{F}_m^{(3-\sigma)2}, T\hat{F}_m^{\sigma 1} \right\rangle \right. \\ &\quad \left. + \left(x_m^{(3-\sigma),2} + i \cdot y_m^{(3-\sigma),2} \right) \cdot \left\langle T\hat{F}_m^{(3-\sigma)2}, T\hat{F}_m^{\sigma 1} \right\rangle \right. \\ &\quad \left. + \left(x_m^{\sigma,1} - i \cdot y_m^{\sigma,1} \right) \cdot \left\langle T\hat{F}_m^{(3-\sigma)2}, T\hat{F}_m^{\sigma 1} \right\rangle \right. \\ &\quad \left. + \left(x_m^{(3-\sigma),2} + i \cdot y_m^{(3-\sigma),2} \right) \cdot \left(x_m^{\sigma,1} - i \cdot y_m^{\sigma,1} \right) \cdot \bar{B}_m^{\sigma 1} \right) \\ &+ \alpha_m^{(3-\sigma)2} \cdot \left(\left\| T\hat{F}_m^{(3-\sigma)2} \right\|^2 + \left(x_m^{(3-\sigma),2} - i \cdot y_m^{(3-\sigma),2} \right) \cdot \left\langle T\hat{F}_m^{(3-\sigma)2}, T\hat{F}_m^{(3-\sigma)2} \right\rangle \right. \\ &\quad \left. + \left(x_m^{(3-\sigma),2} + i \cdot y_m^{(3-\sigma),2} \right) \cdot \left\langle T\hat{F}_m^{(3-\sigma)2}, T\hat{F}_m^{(3-\sigma)2} \right\rangle \right. \\ &\quad \left. + \left(\left(x_m^{(3-\sigma),2} \right)^2 + \left(y_m^{(3-\sigma),2} \right)^2 \right) \cdot \alpha_m^{(3-\sigma)2} \right) \end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

Il est clair que le choix optimal des coefficients des multipôles simples tel que définit dans (2.4), rend le gradient de cette dernière fonction

$$\int_{r_p=A} \left\| T_p G_1 \right\|_{L_2(\partial D)}^2 \cdot dS_p \text{ nul.}$$

De plus, notre choix optimal vérifiera le minimum si le Hessien est une matrice semi défini positive, mais comme le Hessien est une matrice symétrique, alors il suffit que les déterminants principaux soient strictement positifs.

Pour cela on :

$$\nabla \left[\int_{r_p=A} \left\| T_p G_1 \right\|_{L_2(\partial D)}^2 \cdot dS_p \right] =$$

$$\begin{aligned}
& \left(\alpha_m^{\sigma^1} \cdot \left(\langle T\hat{F}_m^{\sigma^1}, TF_m^{\sigma^1} \rangle + \langle TF_m^{\sigma^1}, T\hat{F}_m^{\sigma^1} \rangle \right) + \beta_m^{\sigma^1} \cdot \left(\langle TF_m^{\sigma^1}, T\hat{F}_m^{(3-\sigma)^2} \rangle \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (2x_m^{(\sigma,1)}) \cdot A_m^{\sigma^1} \right) + \bar{\beta}_m^{\sigma^1} \cdot \left(\langle T\hat{F}_m^{(3-\sigma)^2}, TF_m^{\sigma^1} \rangle \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (x_m^{(3-\sigma),2} + i.y_m^{(3-\sigma),2}) \cdot \bar{B}_m^{\sigma^1} \right) \right. \\
& \quad \alpha_m^{\sigma^1} \cdot \left(-i \cdot \langle T\hat{F}_m^{\sigma^1}, TF_m^{\sigma^1} \rangle + i \cdot \langle TF_m^{\sigma^1}, T\hat{F}_m^{\sigma^1} \rangle \right) \\
& \quad + \beta_m^{\sigma^1} \cdot \left(+i \cdot \langle TF_m^{\sigma^1}, T\hat{F}_m^{(3-\sigma)^2} \rangle \right. \\
& \quad \left. + i \cdot (x_m^{(3-\sigma),2} - i.y_m^{(3-\sigma),2}) \cdot B_m^{\sigma^1} \right) + \bar{\beta}_m^{\sigma^1} \cdot \left(-i \cdot \langle T\hat{F}_m^{(3-\sigma)^2}, TF_m^{\sigma^1} \rangle \right. \\
& \quad \left. - i \cdot (x_m^{(3-\sigma),2} + i.y_m^{(3-\sigma),2}) \cdot \bar{B}_m^{\sigma^1} \right) \\
& \quad \beta_m^{\sigma^1} \cdot \left(+ \langle T\hat{F}_m^{\sigma^1}, TF_m^{(3-\sigma)^2} \rangle \right) + \bar{\beta}_m^{\sigma^1} \cdot \left(+ \langle TF_m^{(3-\sigma)^2}, T\hat{F}_m^{\sigma^1} \rangle \right) \\
& \quad + \alpha_m^{(3-\sigma)^2} \cdot \left(+ \langle T\hat{F}_m^{(3-\sigma)^2}, TF_m^{(3-\sigma)^2} \rangle \right. \\
& \quad \left. + \langle TF_m^{(3-\sigma)^2}, T\hat{F}_m^{(3-\sigma)^2} \rangle + (2x_m^{(3-\sigma),2}) \cdot A_m^{(3-\sigma)^2} \right) \\
& \quad \beta_m^{\sigma^1} \cdot \left(-i \cdot \langle T\hat{F}_m^{\sigma^1}, TF_m^{(3-\sigma)^2} \rangle \right. \\
& \quad \left. - i \cdot (x_m^{\sigma,1} + i.y_m^{\sigma,1}) \cdot B_m^{\sigma^1} \right) + \bar{\beta}_m^{\sigma^1} \cdot \left(i \cdot \langle TF_m^{(3-\sigma)^2}, T\hat{F}_m^{\sigma^1} \rangle \right. \\
& \quad \left. + i \cdot (x_m^{\sigma,1} - i.y_m^{\sigma,1}) \cdot \bar{B}_m^{\sigma^1} \right) \\
& \quad + \alpha_m^{(3-\sigma)^2} \cdot \left(-i \cdot \langle T\hat{F}_m^{(3-\sigma)^2}, TF_m^{(3-\sigma)^2} \rangle \right. \\
& \quad \left. + i \cdot \langle TF_m^{(3-\sigma)^2}, T\hat{F}_m^{(3-\sigma)^2} \rangle + (2.y_m^{(3-\sigma),2}) \cdot A_m^{(3-\sigma)^2} \right) \Bigg)
\end{aligned}$$

Autrement dit :

$$\nabla \left[\int_{r_p=A} \|T_p G_1\|_{L_2(\partial D)}^2 \cdot dS_p \right] =$$

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{aligned}
& \left[2.\alpha_m^{\sigma^1}.A_m^{\sigma^1} \right].x_m^{\sigma,1} + 0.y_m^{\sigma,1} + \left[\beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} + \bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{\beta}_m^{\sigma^1} \right].x_m^{(3-\sigma),2} \\
& + i.\left[\bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{\beta}_m^{\sigma^1} - \beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} \right].y_m^{(3-\sigma),2} + \alpha_m^{\sigma^1} \cdot \begin{pmatrix} \langle T\hat{F}_m^{\sigma^1}, TF_m^{\sigma^1} \rangle \\ + \langle TF_m^{\sigma^1}, T\hat{F}_m^{\sigma^1} \rangle \end{pmatrix} \\
& + \beta_m^{\sigma^1} \cdot \langle TF_m^{\sigma^1}, T\hat{F}_m^{(3-\sigma)2} \rangle - \bar{\beta}_m^{\sigma^1} \cdot \langle T\hat{F}_m^{(3-\sigma)2}, TF_m^{\sigma^1} \rangle \\
& 0.x_m^{\sigma,1} + \left[2.\alpha_m^{\sigma^1}.A_m^{\sigma^1} \right].y_m^{\sigma,1} + i.\left[\beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} - \bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{\beta}_m^{\sigma^1} \right].x_m^{(3-\sigma),2} \\
& + \left[\beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} + \bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{\beta}_m^{\sigma^1} \right].y_m^{(3-\sigma),2} - \alpha_m^{\sigma^1} \cdot \begin{pmatrix} i.\langle T\hat{F}_m^{\sigma^1}, TF_m^{\sigma^1} \rangle \\ - i.\langle TF_m^{\sigma^1}, T\hat{F}_m^{\sigma^1} \rangle \end{pmatrix} \\
& + i.\beta_m^{\sigma^1} \cdot \langle TF_m^{\sigma^1}, T\hat{F}_m^{(3-\sigma)2} \rangle + i.\bar{\beta}_m^{\sigma^1} \cdot \langle T\hat{F}_m^{(3-\sigma)2}, TF_m^{\sigma^1} \rangle \\
& \left[\beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} + \bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{\beta}_m^{\sigma^1} \right].x_m^{\sigma,1} + i.\left[\beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} - \bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{\beta}_m^{\sigma^1} \right].y_m^{\sigma,1} \\
& + \left[2.\alpha_m^{(3-\sigma),2}.A_m^{(3-\sigma),2} \right].x_m^{(3-\sigma),2} + 0.y_m^{(3-\sigma),2} \\
& + \beta_m^{\sigma^1} \cdot \langle T\hat{F}_m^{\sigma^1}, TF_m^{(3-\sigma)2} \rangle + \bar{\beta}_m^{\sigma^1} \cdot \langle TF_m^{(3-\sigma)2}, T\hat{F}_m^{\sigma^1} \rangle \\
& + \alpha_m^{(3-\sigma),2} \cdot \left(\langle T\hat{F}_m^{(3-\sigma)2}, TF_m^{(3-\sigma)2} \rangle + \langle TF_m^{(3-\sigma)2}, T\hat{F}_m^{(3-\sigma)2} \rangle \right) \\
& i.\left[\bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{\beta}_m^{\sigma^1} - \beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} \right].x_m^{\sigma,1} + \left[\bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{\beta}_m^{\sigma^1} + \beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} \right].y_m^{\sigma,1} \\
& + 0.x_m^{(3-\sigma),2} + \left[2.\alpha_m^{(3-\sigma),2}.A_m^{(3-\sigma),2} \right].y_m^{(3-\sigma),2} \\
& - i.\beta_m^{\sigma^1} \cdot \langle T\hat{F}_m^{\sigma^1}, TF_m^{(3-\sigma)2} \rangle + i.\bar{\beta}_m^{\sigma^1} \cdot \langle TF_m^{(3-\sigma)2}, T\hat{F}_m^{\sigma^1} \rangle \\
& - i.\alpha_m^{(3-\sigma),2} \cdot \left(\langle T\hat{F}_m^{(3-\sigma)2}, TF_m^{(3-\sigma)2} \rangle - \langle TF_m^{(3-\sigma)2}, T\hat{F}_m^{(3-\sigma)2} \rangle \right)
\end{aligned} \right)
\end{aligned}$$

Et si on dérive une deuxième fois, et en calculons le déterminant du Hessien, on obtient :

$$\left| H \left[\int_{r_p=A} \|T_p G_1\|_{L_2(\partial D)}^2 \cdot dS_p \right] \right| =$$

$$\begin{aligned}
& \left| \begin{array}{cccc}
(2.\alpha_m^{\sigma^1}.A_m^{\sigma^1}) & 0 & \begin{pmatrix} \beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} \\ +\bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{B}_m^{\sigma^1} \end{pmatrix} & i.\begin{pmatrix} \bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{B}_m^{\sigma^1} \\ -\beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} \end{pmatrix} \\
0 & (2.\alpha_m^{\sigma^1}.A_m^{\sigma^1}) & i.\begin{pmatrix} \beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} \\ -\bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{B}_m^{\sigma^1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} \\ +\bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{B}_m^{\sigma^1} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} \\ +\bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{B}_m^{\sigma^1} \end{pmatrix} & i.\begin{pmatrix} \beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} \\ -\bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{B}_m^{\sigma^1} \end{pmatrix} & (2.\alpha_m^{(3-\sigma)^2}.A_m^{(3-\sigma)^2}) & 0 \\
i.\begin{pmatrix} \bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{B}_m^{\sigma^1} \\ -\beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} \\ +\bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{B}_m^{\sigma^1} \end{pmatrix} & 0 & (2.\alpha_m^{(3-\sigma)^2}.A_m^{(3-\sigma)^2})
\end{array} \right| \\
& = (2.\alpha_m^{\sigma^1}.A_m^{\sigma^1}). \left| \begin{array}{ccc}
(2.\alpha_m^{\sigma^1}.A_m^{\sigma^1}) & i.\begin{pmatrix} \bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{B}_m^{\sigma^1} \\ -\beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} \\ +\bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{B}_m^{\sigma^1} \end{pmatrix} \\
i.\begin{pmatrix} \bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{B}_m^{\sigma^1} \\ -\beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} \end{pmatrix} & (2.\alpha_m^{(3-\sigma)^2}.A_m^{(3-\sigma)^2}) & 0 \\
\begin{pmatrix} \beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} \\ +\bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{B}_m^{\sigma^1} \end{pmatrix} & 0 & (2.\alpha_m^{(3-\sigma)^2}.A_m^{(3-\sigma)^2})
\end{array} \right| \\
& + \begin{pmatrix} \beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} \\ +\bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{B}_m^{\sigma^1} \end{pmatrix} \cdot \left| \begin{array}{ccc}
0 & (2.\alpha_m^{\sigma^1}.A_m^{\sigma^1}) & \begin{pmatrix} \beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} \\ +\bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{B}_m^{\sigma^1} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} \\ +\bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{B}_m^{\sigma^1} \end{pmatrix} & i.\begin{pmatrix} \bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{B}_m^{\sigma^1} \\ -\beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} \end{pmatrix} & 0 \\
i.\begin{pmatrix} \bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{B}_m^{\sigma^1} \\ -\beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} \\ +\bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{B}_m^{\sigma^1} \end{pmatrix} & (2.\alpha_m^{(3-\sigma)^2}.A_m^{(3-\sigma)^2})
\end{array} \right| \\
& - i.\begin{pmatrix} \bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{B}_m^{\sigma^1} \\ -\beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} \end{pmatrix} \cdot \left| \begin{array}{ccc}
0 & (2.\alpha_m^{\sigma^1}.A_m^{\sigma^1}) & i.\begin{pmatrix} \bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{B}_m^{\sigma^1} \\ -\beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} \\ +\bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{B}_m^{\sigma^1} \end{pmatrix} & i.\begin{pmatrix} \bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{B}_m^{\sigma^1} \\ -\beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} \end{pmatrix} & (2.\alpha_m^{(3-\sigma)^2}.A_m^{(3-\sigma)^2}) \\
i.\begin{pmatrix} \bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{B}_m^{\sigma^1} \\ -\beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} \\ +\bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{B}_m^{\sigma^1} \end{pmatrix} & 0
\end{array} \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (2.\alpha_m^{\sigma^1}.A_m^{\sigma^1}) \left[\begin{array}{c} \left(2.\alpha_m^{(3-\sigma)^2}.A_m^{(3-\sigma)^2} \right) \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (2.\alpha_m^{(3-\sigma)^2}.A_m^{(3-\sigma)^2}) \end{vmatrix} \\ -i.\begin{pmatrix} \beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} \\ -\bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{B}_m^{\sigma^1} \end{pmatrix} \cdot i.\begin{pmatrix} \beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} \\ -\bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{B}_m^{\sigma^1} \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} & 0 \\ -\bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{B}_m^{\sigma^1} & (2.\alpha_m^{(3-\sigma)^2}.A_m^{(3-\sigma)^2}) \end{vmatrix} \\ +\begin{pmatrix} \beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} \\ +\bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{B}_m^{\sigma^1} \end{pmatrix} \cdot i.\begin{pmatrix} \beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} \\ -\bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{B}_m^{\sigma^1} \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} & (2.\alpha_m^{(3-\sigma)^2}.A_m^{(3-\sigma)^2}) \\ +\bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{B}_m^{\sigma^1} & 0 \end{vmatrix} \end{array} \right] \\
&+ \begin{pmatrix} \beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} \\ +\bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{B}_m^{\sigma^1} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{array}{c} -\begin{pmatrix} \beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} \\ +\bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{B}_m^{\sigma^1} \end{pmatrix} \cdot i.\begin{pmatrix} \beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} \\ -\bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{B}_m^{\sigma^1} \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} & 0 \\ +\bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{B}_m^{\sigma^1} & (2.\alpha_m^{(3-\sigma)^2}.A_m^{(3-\sigma)^2}) \end{vmatrix} \\ +\begin{pmatrix} \beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} \\ +\bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{B}_m^{\sigma^1} \end{pmatrix} \cdot i.\begin{pmatrix} \beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} \\ +\bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{B}_m^{\sigma^1} \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} & i.\begin{pmatrix} \beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} \\ -\bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{B}_m^{\sigma^1} \end{pmatrix} \\ +\bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{B}_m^{\sigma^1} & \begin{pmatrix} \beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} \\ +\bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{B}_m^{\sigma^1} \end{pmatrix} \end{vmatrix} \end{array} \right] \\
&= -i.\begin{pmatrix} \bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{B}_m^{\sigma^1} \\ -\beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{array}{c} -\begin{pmatrix} \beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} \\ +\bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{B}_m^{\sigma^1} \end{pmatrix} \cdot i.\begin{pmatrix} \beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} \\ -\bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{B}_m^{\sigma^1} \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} & (2.\alpha_m^{(3-\sigma)^2}.A_m^{(3-\sigma)^2}) \\ +\bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{B}_m^{\sigma^1} & 0 \end{vmatrix} \\ +i.\begin{pmatrix} \beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} \\ -\bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{B}_m^{\sigma^1} \end{pmatrix} \cdot i.\begin{pmatrix} \beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} \\ +\bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{B}_m^{\sigma^1} \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} & i.\begin{pmatrix} \beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} \\ -\bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{B}_m^{\sigma^1} \end{pmatrix} \\ -\bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{B}_m^{\sigma^1} & \begin{pmatrix} \beta_m^{\sigma^1}.B_m^{\sigma^1} \\ +\bar{\beta}_m^{\sigma^1}.\bar{B}_m^{\sigma^1} \end{pmatrix} \end{vmatrix} \end{array} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\begin{aligned} &16.(\alpha_m^{\sigma 1})^2.(A_m^{\sigma 1})^2.(\alpha_m^{(3-\sigma)2})^2.(A_m^{(3-\sigma)2})^2 \\ &+ \left[\left(\frac{\beta_m^{\sigma 1}.B_m^{\sigma 1}}{-\bar{\beta}_m^{\sigma 1}.\bar{B}_m^{\sigma 1}} \right)^2.(4\alpha_m^{\sigma 1}.A_m^{\sigma 1}.\alpha_m^{(3-\sigma)2}.A_m^{(3-\sigma)2}) \right] \\ &- \left(\beta_m^{\sigma 1}.B_m^{\sigma 1} + \bar{\beta}_m^{\sigma 1}.\bar{B}_m^{\sigma 1} \right)^2.(4\alpha_m^{\sigma 1}.A_m^{\sigma 1}.\alpha_m^{(3-\sigma)2}.A_m^{(3-\sigma)2}) \\ &- \left(4.\alpha_m^{\sigma 1}.A_m^{\sigma 1}.\alpha_m^{(3-\sigma)2}.A_m^{(3-\sigma)2} \right). \left(\beta_m^{\sigma 1}.B_m^{\sigma 1} + \bar{\beta}_m^{\sigma 1}.\bar{B}_m^{\sigma 1} \right)^2 \\ &+ \left[\left(\beta_m^{\sigma 1}.B_m^{\sigma 1} + \bar{\beta}_m^{\sigma 1}.\bar{B}_m^{\sigma 1} \right)^4 - \left(\beta_m^{\sigma 1}.B_m^{\sigma 1} + \bar{\beta}_m^{\sigma 1}.\bar{B}_m^{\sigma 1} \right)^2. \left(\frac{\beta_m^{\sigma 1}.B_m^{\sigma 1}}{-\bar{\beta}_m^{\sigma 1}.\bar{B}_m^{\sigma 1}} \right)^2 \right] \end{aligned} \right] \\
&+ \left[\begin{aligned} &\left(4.\alpha_m^{\sigma 1}.A_m^{\sigma 1}.\alpha_m^{(3-\sigma)2}.A_m^{(3-\sigma)2} \right). \left(\frac{\bar{\beta}_m^{\sigma 1}.\bar{B}_m^{\sigma 1}}{-\beta_m^{\sigma 1}.B_m^{\sigma 1}} \right)^2 \\ &+ \left[\left(\frac{\beta_m^{\sigma 1}.B_m^{\sigma 1}}{-\bar{\beta}_m^{\sigma 1}.\bar{B}_m^{\sigma 1}} \right)^2. \left(\beta_m^{\sigma 1}.B_m^{\sigma 1} + \bar{\beta}_m^{\sigma 1}.\bar{B}_m^{\sigma 1} \right)^2 + \left(\frac{\bar{\beta}_m^{\sigma 1}.\bar{B}_m^{\sigma 1}}{-\beta_m^{\sigma 1}.B_m^{\sigma 1}} \right)^2. \left(\frac{\beta_m^{\sigma 1}.B_m^{\sigma 1}}{-\bar{\beta}_m^{\sigma 1}.\bar{B}_m^{\sigma 1}} \right)^2 \right] \end{aligned} \right] \\
&= \left[\begin{aligned} &\left[16.(\alpha_m^{\sigma 1})^2.(A_m^{\sigma 1})^2.(\alpha_m^{(3-\sigma)2})^2.(A_m^{(3-\sigma)2})^2 \right] + \left[\left(\frac{\beta_m^{\sigma 1}.B_m^{\sigma 1}}{-\bar{\beta}_m^{\sigma 1}.\bar{B}_m^{\sigma 1}} \right)^2.(8\alpha_m^{\sigma 1}.A_m^{\sigma 1}.\alpha_m^{(3-\sigma)2}.A_m^{(3-\sigma)2}) \right] \\ &- \left(\beta_m^{\sigma 1}.B_m^{\sigma 1} + \bar{\beta}_m^{\sigma 1}.\bar{B}_m^{\sigma 1} \right)^2.(8\alpha_m^{\sigma 1}.A_m^{\sigma 1}.\alpha_m^{(3-\sigma)2}.A_m^{(3-\sigma)2}) \\ &+ \left[\left(\beta_m^{\sigma 1}.B_m^{\sigma 1} + \bar{\beta}_m^{\sigma 1}.\bar{B}_m^{\sigma 1} \right)^4 \right] + \left[\left(\frac{\beta_m^{\sigma 1}.B_m^{\sigma 1}}{-\bar{\beta}_m^{\sigma 1}.\bar{B}_m^{\sigma 1}} \right)^4 \right] \end{aligned} \right] \\
&= \left(16.\alpha_m^{\sigma 1}.A_m^{\sigma 1}.\alpha_m^{(3-\sigma)2}.A_m^{(3-\sigma)2} \right). \left[\alpha_m^{\sigma 1}.A_m^{\sigma 1}.\alpha_m^{(3-\sigma)2}.A_m^{(3-\sigma)2} - \left| \beta_m^{\sigma 1} \right|^2. \left| B_m^{\sigma 1} \right|^2 \right] \\
&+ \left(\beta_m^{\sigma 1}.B_m^{\sigma 1} + \bar{\beta}_m^{\sigma 1}.\bar{B}_m^{\sigma 1} \right)^4 + \left(\frac{\beta_m^{\sigma 1}.B_m^{\sigma 1}}{-\bar{\beta}_m^{\sigma 1}.\bar{B}_m^{\sigma 1}} \right)^4 \\
&= \left(16.\alpha_m^{\sigma 1}.A_m^{\sigma 1}.\alpha_m^{(3-\sigma)2}.A_m^{(3-\sigma)2} \right). \left[\Delta_m^{\sigma} \right] + \left(\beta_m^{\sigma 1}.B_m^{\sigma 1} + \bar{\beta}_m^{\sigma 1}.\bar{B}_m^{\sigma 1} \right)^4 + \left(\frac{\beta_m^{\sigma 1}.B_m^{\sigma 1}}{-\bar{\beta}_m^{\sigma 1}.\bar{B}_m^{\sigma 1}} \right)^4 \\
&= \left(16.\alpha_m^{\sigma 1}.A_m^{\sigma 1}.\alpha_m^{(3-\sigma)2}.A_m^{(3-\sigma)2} \right). \left[\Delta_m^{\sigma} \right] + 16. \left(\text{Re}^4 \left(\beta_m^{\sigma 1}.B_m^{\sigma 1} \right) + \text{Im}^4 \left(\beta_m^{\sigma 1}.B_m^{\sigma 1} \right) \right)
\end{aligned}$$

Donc le déterminant du Hessien est strictement positif.

Calculons maintenant les déterminants principaux du Hessien :

On a :

$$\begin{aligned}
 H_{1,1} &= \begin{vmatrix} \left(2.\alpha_m^{\sigma 1}.A_m^{\sigma 1}\right) & i.\begin{pmatrix} \beta_m^{\sigma 1}.B_m^{\sigma 1} \\ -\bar{\beta}_m^{\sigma 1}.\bar{B}_m^{\sigma 1} \end{pmatrix} & \left(\beta_m^{\sigma 1}.B_m^{\sigma 1} + \bar{\beta}_m^{\sigma 1}.\bar{B}_m^{\sigma 1}\right) \\ i.\begin{pmatrix} \beta_m^{\sigma 1}.B_m^{\sigma 1} \\ -\bar{\beta}_m^{\sigma 1}.\bar{B}_m^{\sigma 1} \end{pmatrix} & \left(2.\alpha_m^{(3-\sigma)2}.A_m^{(3-\sigma)2}\right) & 0 \\ \left(\beta_m^{\sigma 1}.B_m^{\sigma 1} + \bar{\beta}_m^{\sigma 1}.\bar{B}_m^{\sigma 1}\right) & 0 & \left(2.\alpha_m^{(3-\sigma)2}.A_m^{(3-\sigma)2}\right) \end{vmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \left(2.\alpha_m^{\sigma 1}.A_m^{\sigma 1}\right) \begin{vmatrix} \left(2.\alpha_m^{(3-\sigma)2}.A_m^{(3-\sigma)2}\right) & 0 \\ 0 & \left(2.\alpha_m^{(3-\sigma)2}.A_m^{(3-\sigma)2}\right) \end{vmatrix} \\ -i.\begin{pmatrix} \beta_m^{\sigma 1}.B_m^{\sigma 1} \\ -\bar{\beta}_m^{\sigma 1}.\bar{B}_m^{\sigma 1} \end{pmatrix} \cdot \begin{vmatrix} i.\begin{pmatrix} \beta_m^{\sigma 1}.B_m^{\sigma 1} \\ -\bar{\beta}_m^{\sigma 1}.\bar{B}_m^{\sigma 1} \end{pmatrix} & 0 \\ \left(\beta_m^{\sigma 1}.B_m^{\sigma 1} + \bar{\beta}_m^{\sigma 1}.\bar{B}_m^{\sigma 1}\right) & \left(2.\alpha_m^{(3-\sigma)2}.A_m^{(3-\sigma)2}\right) \end{vmatrix} \\ +\left(\beta_m^{\sigma 1}.B_m^{\sigma 1} + \bar{\beta}_m^{\sigma 1}.\bar{B}_m^{\sigma 1}\right) \cdot \begin{vmatrix} i.\begin{pmatrix} \beta_m^{\sigma 1}.B_m^{\sigma 1} \\ -\bar{\beta}_m^{\sigma 1}.\bar{B}_m^{\sigma 1} \end{pmatrix} & \left(2.\alpha_m^{(3-\sigma)2}.A_m^{(3-\sigma)2}\right) \\ \left(\beta_m^{\sigma 1}.B_m^{\sigma 1} + \bar{\beta}_m^{\sigma 1}.\bar{B}_m^{\sigma 1}\right) & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \left[8.\alpha_m^{\sigma 1}.A_m^{\sigma 1}.\left(\alpha_m^{(3-\sigma)2}\right)^2.\left(A_m^{(3-\sigma)2}\right)^2\right] + \left[\begin{pmatrix} \beta_m^{\sigma 1}.B_m^{\sigma 1} \\ -\bar{\beta}_m^{\sigma 1}.\bar{B}_m^{\sigma 1} \end{pmatrix}^2.\left(2.\alpha_m^{(3-\sigma)2}.A_m^{(3-\sigma)2}\right)\right] \\ -\left(\beta_m^{\sigma 1}.B_m^{\sigma 1} + \bar{\beta}_m^{\sigma 1}.\bar{B}_m^{\sigma 1}\right)^2.\left(2.\alpha_m^{(3-\sigma)2}.A_m^{(3-\sigma)2}\right) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[8 \cdot \alpha_m^{(3-\sigma)2} \cdot A_m^{(3-\sigma)2} \right] \left[\alpha_m^{\sigma 1} \cdot A_m^{\sigma 1} \cdot \alpha_m^{(3-\sigma)2} \cdot A_m^{(3-\sigma)2} - |\beta_m^{\sigma 1}|^2 \cdot |B_m^{\sigma 1}|^2 \right] \\
&= \left[8 \cdot \alpha_m^{(3-\sigma)2} \cdot A_m^{(3-\sigma)2} \right] \cdot \Delta_m^{\sigma}
\end{aligned}$$

Donc le premier déterminant principal du Hessien est strictement positif.

$$\begin{aligned}
H_{2,2} &= \begin{vmatrix} \left(2 \cdot \alpha_m^{\sigma 1} \cdot A_m^{\sigma 1} \right) & \left(\beta_m^{\sigma 1} \cdot B_m^{\sigma 1} + \bar{\beta}_m^{\sigma 1} \cdot \bar{B}_m^{\sigma 1} \right) & i \cdot \begin{pmatrix} \bar{\beta}_m^{\sigma 1} \cdot \bar{B}_m^{\sigma 1} \\ -\beta_m^{\sigma 1} \cdot B_m^{\sigma 1} \end{pmatrix} \\ \left(\beta_m^{\sigma 1} \cdot B_m^{\sigma 1} + \bar{\beta}_m^{\sigma 1} \cdot \bar{B}_m^{\sigma 1} \right) & \left(2 \cdot \alpha_m^{(3-\sigma)2} \cdot A_m^{(3-\sigma)2} \right) & 0 \\ i \cdot \begin{pmatrix} \bar{\beta}_m^{\sigma 1} \cdot \bar{B}_m^{\sigma 1} \\ -\beta_m^{\sigma 1} \cdot B_m^{\sigma 1} \end{pmatrix} & 0 & \left(2 \cdot \alpha_m^{(3-\sigma)2} \cdot A_m^{(3-\sigma)2} \right) \end{vmatrix} \\
&= \left[\begin{aligned} &\left(2 \cdot \alpha_m^{\sigma 1} \cdot A_m^{\sigma 1} \right) \begin{vmatrix} \left(2 \cdot \alpha_m^{(3-\sigma)2} \cdot A_m^{(3-\sigma)2} \right) & 0 \\ 0 & \left(2 \cdot \alpha_m^{(3-\sigma)2} \cdot A_m^{(3-\sigma)2} \right) \end{vmatrix} \\ &- \left(\beta_m^{\sigma 1} \cdot B_m^{\sigma 1} + \bar{\beta}_m^{\sigma 1} \cdot \bar{B}_m^{\sigma 1} \right) \cdot \begin{vmatrix} \left(\beta_m^{\sigma 1} \cdot B_m^{\sigma 1} + \bar{\beta}_m^{\sigma 1} \cdot \bar{B}_m^{\sigma 1} \right) & 0 \\ i \cdot \begin{pmatrix} \bar{\beta}_m^{\sigma 1} \cdot \bar{B}_m^{\sigma 1} \\ -\beta_m^{\sigma 1} \cdot B_m^{\sigma 1} \end{pmatrix} & \left(2 \cdot \alpha_m^{(3-\sigma)2} \cdot A_m^{(3-\sigma)2} \right) \end{vmatrix} \\ &+ i \cdot \begin{pmatrix} \bar{\beta}_m^{\sigma 1} \cdot \bar{B}_m^{\sigma 1} \\ -\beta_m^{\sigma 1} \cdot B_m^{\sigma 1} \end{pmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \left(\beta_m^{\sigma 1} \cdot B_m^{\sigma 1} + \bar{\beta}_m^{\sigma 1} \cdot \bar{B}_m^{\sigma 1} \right) & \left(2 \cdot \alpha_m^{(3-\sigma)2} \cdot A_m^{(3-\sigma)2} \right) \\ i \cdot \begin{pmatrix} \bar{\beta}_m^{\sigma 1} \cdot \bar{B}_m^{\sigma 1} \\ -\beta_m^{\sigma 1} \cdot B_m^{\sigma 1} \end{pmatrix} & 0 \end{vmatrix} \end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\begin{aligned} &\left[8 \cdot \alpha_m^{\sigma 1} \cdot A_m^{\sigma 1} \cdot (\alpha_m^{(3-\sigma)2})^2 \cdot (A_m^{(3-\sigma)2})^2 \right] \\ &- \left[\left(\beta_m^{\sigma 1} \cdot B_m^{\sigma 1} + \bar{\beta}_m^{\sigma 1} \cdot \bar{B}_m^{\sigma 1} \right)^2 \cdot (2 \cdot \alpha_m^{(3-\sigma)2} \cdot A_m^{(3-\sigma)2}) \right] \\ &+ \left(\bar{\beta}_m^{\sigma 1} \cdot \bar{B}_m^{\sigma 1} \right)^2 \cdot (2 \cdot \alpha_m^{(3-\sigma)2} \cdot A_m^{(3-\sigma)2}) \\ &- \left(\beta_m^{\sigma 1} \cdot B_m^{\sigma 1} \right)^2 \cdot (2 \cdot \alpha_m^{(3-\sigma)2} \cdot A_m^{(3-\sigma)2}) \end{aligned} \right] \\
&= \left[8 \cdot \alpha_m^{(3-\sigma)2} \cdot A_m^{(3-\sigma)2} \right] \left[\alpha_m^{\sigma 1} \cdot A_m^{\sigma 1} \cdot \alpha_m^{(3-\sigma)2} \cdot A_m^{(3-\sigma)2} - |\beta_m^{\sigma 1}|^2 \cdot |B_m^{\sigma 1}|^2 \right] \\
&= \left[8 \cdot \alpha_m^{(3-\sigma)2} \cdot A_m^{(3-\sigma)2} \right] \cdot \Delta_m^{\sigma}
\end{aligned}$$

Donc le deuxième déterminant principal du Hessien est strictement positif.

$$H_{3,3} = \begin{vmatrix} \left(2 \cdot \alpha_m^{\sigma 1} \cdot A_m^{\sigma 1} \right) & 0 & \left(\beta_m^{\sigma 1} \cdot B_m^{\sigma 1} + \bar{\beta}_m^{\sigma 1} \cdot \bar{B}_m^{\sigma 1} \right) \\ 0 & \left(2 \cdot \alpha_m^{\sigma 1} \cdot A_m^{\sigma 1} \right) & i \cdot \begin{pmatrix} \beta_m^{\sigma 1} \cdot B_m^{\sigma 1} \\ -\bar{\beta}_m^{\sigma 1} \cdot \bar{B}_m^{\sigma 1} \end{pmatrix} \\ \left(\beta_m^{\sigma 1} \cdot B_m^{\sigma 1} + \bar{\beta}_m^{\sigma 1} \cdot \bar{B}_m^{\sigma 1} \right) & i \cdot \begin{pmatrix} \beta_m^{\sigma 1} \cdot B_m^{\sigma 1} \\ -\bar{\beta}_m^{\sigma 1} \cdot \bar{B}_m^{\sigma 1} \end{pmatrix} & \left(2 \cdot \alpha_m^{(3-\sigma)2} \cdot A_m^{(3-\sigma)2} \right) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{cc} \left(2.\alpha_m^{\sigma 1} . A_m^{\sigma 1} \right) & i. \left(\begin{array}{c} \beta_m^{\sigma 1} . B_m^{\sigma 1} \\ -\bar{\beta}_m^{\sigma 1} . \bar{B}_m^{\sigma 1} \end{array} \right) \\ i. \left(\begin{array}{c} \beta_m^{\sigma 1} . B_m^{\sigma 1} \\ -\bar{\beta}_m^{\sigma 1} . \bar{B}_m^{\sigma 1} \end{array} \right) & \left(2.\alpha_m^{(3-\sigma)2} . A_m^{(3-\sigma)2} \right) \end{array} \right] \\
& + \left(\beta_m^{\sigma 1} . B_m^{\sigma 1} + \bar{\beta}_m^{\sigma 1} . \bar{B}_m^{\sigma 1} \right) . \left[\begin{array}{cc} 0 & \left(2.\alpha_m^{\sigma 1} . A_m^{\sigma 1} \right) \\ \left(\beta_m^{\sigma 1} . B_m^{\sigma 1} + \bar{\beta}_m^{\sigma 1} . \bar{B}_m^{\sigma 1} \right) & i. \left(\begin{array}{c} \beta_m^{\sigma 1} . B_m^{\sigma 1} \\ -\bar{\beta}_m^{\sigma 1} . \bar{B}_m^{\sigma 1} \end{array} \right) \end{array} \right] \\
& = \left[\begin{array}{c} \left[8. \left(\alpha_m^{\sigma 1} \right)^2 . \left(A_m^{\sigma 1} \right)^2 . \alpha_m^{(3-\sigma)2} . A_m^{(3-\sigma)2} + 2. \alpha_m^{\sigma 1} . A_m^{\sigma 1} . \left(\begin{array}{c} \beta_m^{\sigma 1} . B_m^{\sigma 1} \\ -\bar{\beta}_m^{\sigma 1} . \bar{B}_m^{\sigma 1} \end{array} \right)^2 \right] \\ - \left[\left(\beta_m^{\sigma 1} . B_m^{\sigma 1} + \bar{\beta}_m^{\sigma 1} . \bar{B}_m^{\sigma 1} \right)^2 . \left(2. \alpha_m^{\sigma 1} . A_m^{\sigma 1} \right) \right] \end{array} \right] \\
& = \left[8. \alpha_m^{\sigma 1} . A_m^{\sigma 1} \right] . \left[\alpha_m^{\sigma 1} . A_m^{\sigma 1} . \alpha_m^{(3-\sigma)2} . A_m^{(3-\sigma)2} - \left| \beta_m^{\sigma 1} \right|^2 . \left| B_m^{\sigma 1} \right|^2 \right] \\
& = \left[8. \alpha_m^{\sigma 1} . A_m^{\sigma 1} \right] . \Delta_m^{\sigma}
\end{aligned}$$

Donc le troisième déterminant principal du Hessien est strictement positif. D'où le choix optimal tel que définit dans (2.4) vérifie réellement le minimum de la quantité $\int_{r_p=A} \|T_p G_1\|_{L_2(\partial D)}^2 . dS_p$. Ce qui termine la démonstration du théorème 01.

Théorème 02 :

Si le noyau de l'opérateur intégral modifié K_1 , à savoir la traction de la fonction de Green $T_p G_1$ est définie par (2.2), alors la quantité (2.3) est majorée si les coefficients des multipôles simples sont choisis comme suit :

$$a_m^{\sigma l} = - \frac{\langle \hat{TF}_m^{\sigma l}, TF_m^{\sigma l} \rangle_{\partial D}}{\|TF_m^{\sigma l}\|_{L_2(\partial D)}^2} \quad (2.9)$$

où $\hat{F}_m^{\sigma l} = \text{Re}(F_m^{\sigma l})$

Démonstration :

Nous avons :

$$\begin{aligned} T_p G_1(P, Q) &= T_p G_0(P, Q) \\ &+ \frac{i}{4\mu K^2} \cdot \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{l=1}^2 [a_m^{\sigma l} \cdot TF_m^{\sigma l}(P) \otimes TF_m^{\sigma l}(Q)] \\ &= \frac{i}{4\mu K^2} \cdot \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{l=1}^2 [TF_m^{\sigma l}(P) \otimes \hat{TF}_m^{\sigma l}(Q) + a_m^{\sigma l} \cdot TF_m^{\sigma l}(P) \otimes TF_m^{\sigma l}(Q)] \end{aligned}$$

Si on pose :

$$f_m^{\sigma l}(Q) = \frac{i}{4\mu K^2} \cdot [\hat{TF}_m^{\sigma l}(Q) + a_m^{\sigma l} \cdot TF_m^{\sigma l}(Q)]$$

alors l'opérateur traction lié à la fonction de Green modifiée $T_p G_1$ s'écrit sous la forme :

$$T_p G_1(P, Q) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{l=1}^2 [TF_m^{\sigma l}(P) \otimes f_m^{\sigma l}(Q)] \quad (2.10)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \int_{r_p=A} \|T_p G_1\|_{L_2(\partial D)}^2 \cdot ds_p &= \int_{r_p=A} \int_{\partial D} T_p G_1(P, q) : \overline{T_p G_1}(q, P) \cdot ds_p \cdot ds_q \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{l=1}^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\nu=1}^2 \sum_{k=1}^2 \int_{r_p=A} TF_m^{\sigma l}(P) \cdot \overline{TF_n^{\nu k}}(P) \cdot ds_p \cdot \int_{\partial D} f_m^{\sigma l}(q) \cdot \overline{f_n^{\nu k}}(q) \cdot ds_q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\nu=1}^2 \left[\int_{r_p=A} TF_m^{\sigma 1}(P) \cdot \overline{TF}_n^{\nu 1}(P) \cdot ds_p \cdot \int_{\partial D} f_m^{\sigma 1}(q) \cdot \overline{f}_n^{\nu 1}(q) \cdot ds_q \right. \\
&+ \int_{r_p=A} TF_m^{\sigma 1}(P) \cdot \overline{TF}_n^{\nu 2}(P) \cdot ds_p \cdot \int_{\partial D} f_m^{\sigma 1}(q) \cdot \overline{f}_n^{\nu 2}(q) \cdot ds_q \\
&+ \int_{r_p=A} TF_m^{\sigma 2}(P) \cdot \overline{TF}_n^{\nu 1}(P) \cdot ds_p \cdot \int_{\partial D} f_m^{\sigma 2}(q) \cdot \overline{f}_n^{\nu 1}(q) \cdot ds_q \\
&\left. + \int_{r_p=A} TF_m^{\sigma 2}(P) \cdot \overline{TF}_n^{\nu 2}(P) \cdot ds_p \cdot \int_{\partial D} f_m^{\sigma 2}(q) \cdot \overline{f}_n^{\nu 2}(q) \cdot ds_q \right]
\end{aligned}$$

en utilisant les relations des produits scalaires des fonctions $\{TF_m^{\sigma l}\}_{m=0:\infty}^{\sigma,l=1:2}$ sur le cercle de rayon A , on obtient :

$$\begin{aligned}
&\int_{r_p=A} \|T_p G_1\|_{L_2(\partial D)}^2 \cdot ds_p \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \left[2\pi A E_m(kr) \cdot \int_{\partial D} f_m^{\sigma 1}(q) \cdot \overline{f}_m^{\sigma 1}(q) \cdot ds_q \right. \\
&- 2\pi A F_m(kr, Kr) \cdot (-1)^\sigma \cdot \int_{\partial D} f_m^{\sigma 1}(q) \cdot \overline{f}_m^{(3-\sigma)2}(q) \cdot ds_q \\
&- 2\pi A \overline{F}_m(kr, Kr) \cdot (-1)^\sigma \cdot \int_{\partial D} \overline{f}_m^{\sigma 1}(q) \cdot f_m^{(3-\sigma)2}(q) \cdot ds_q \\
&\left. + 2\pi A E_m(Kr) \cdot \int_{\partial D} f_m^{\sigma 2}(q) \cdot \overline{f}_m^{\sigma 2}(q) \cdot ds_q \right]
\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\text{Posons } a = k \cdot H_m'(kr) \quad , \quad b = k \cdot \frac{m}{kr} \cdot H_m(kr)$$

$$\text{et } c = K \cdot H_m'(Kr) \quad , \quad d = K \cdot \frac{m}{Kr} \cdot H_m(Kr)$$

On aura alors :

$$E_m(kr) = |a|^2 + |b|^2 \quad , \quad E_m(Kr) = |c|^2 + |d|^2$$

$$\text{et} \quad F_m(kr, Kr) = a \cdot \overline{d} + \overline{c} \cdot b$$

Ainsi (2.11) peut être réécrit comme suit :

$$\begin{aligned}
& \int_{r_p=A} \|T_p G_1\|_{L_2(\partial D)}^2 \cdot ds_p = 2\pi A \cdot \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \left[\left(|a|^2 + |b|^2 \right) \cdot \int_{\partial D} |f_m^{\sigma 1}(q)|^2 \cdot ds_q \right. \\
& - \left(a \cdot \bar{d} + \bar{c} \cdot b \right) \cdot (-1)^\sigma \cdot \int_{\partial D} f_m^{\sigma 1}(q) \cdot \overline{f_m^{(3-\sigma)^2}(q)} \cdot ds_q \\
& - \left(\bar{a} \cdot d + c \cdot \bar{b} \right) \cdot (-1)^\sigma \cdot \int_{\partial D} \overline{f_m^{\sigma 1}(q)} \cdot f_m^{(3-\sigma)^2}(q) \cdot ds_q \\
& \left. + \left(|c|^2 + |d|^2 \right) \cdot \int_{\partial D} |f_m^{\sigma 2}(q)|^2 \cdot ds_q \right] \\
& = 2\pi A \cdot \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \left[\int_{\partial D} |a \cdot f_m^{\sigma 1}(q)|^2 \cdot ds_q + \int_{\partial D} |b \cdot f_m^{\sigma 1}(q)|^2 \cdot ds_q \right. \\
& - \int_{\partial D} \left(a \cdot f_m^{\sigma 1}(q) \right) \cdot \overline{\left((-1)^\sigma \cdot d \cdot f_m^{(3-\sigma)^2}(q) \right)} \cdot ds_q \\
& - \int_{\partial D} \left(b \cdot f_m^{\sigma 1}(q) \right) \cdot \overline{\left((-1)^\sigma \cdot c \cdot f_m^{(3-\sigma)^2}(q) \right)} \cdot ds_q \\
& - \int_{\partial D} \overline{\left(a \cdot f_m^{\sigma 1}(q) \right)} \cdot \left((-1)^\sigma \cdot d \cdot f_m^{(3-\sigma)^2}(q) \right) \cdot ds_q \\
& - \int_{\partial D} \overline{\left(b \cdot f_m^{\sigma 1}(q) \right)} \cdot \left((-1)^\sigma \cdot c \cdot f_m^{(3-\sigma)^2}(q) \right) \cdot ds_q \\
& \left. + \int_{\partial D} \left| (-1)^\sigma \cdot c \cdot f_m^{(3-\sigma)^2}(q) \right|^2 \cdot ds_q + \int_{\partial D} \left| (-1)^\sigma \cdot d \cdot f_m^{(3-\sigma)^2}(q) \right|^2 \cdot ds_q \right] \\
& = 2\pi A \cdot \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \left[\int_{\partial D} \left| a \cdot f_m^{\sigma 1}(q) - (-1)^\sigma \cdot d \cdot f_m^{(3-\sigma)^2}(q) \right|^2 \cdot ds_q \right. \\
& \left. + \int_{\partial D} \left| b \cdot f_m^{\sigma 1}(q) - (-1)^\sigma \cdot c \cdot f_m^{(3-\sigma)^2}(q) \right|^2 \cdot ds_q \right] \tag{2.12}
\end{aligned}$$

D'autre part, et d'après l'inégalité de Minkowski, nous avons :

$$\begin{aligned}
& \int_{\partial D} \left| a \cdot f_m^{\sigma 1}(q) - (-1)^\sigma \cdot d \cdot f_m^{(3-\sigma)^2}(q) \right|^2 \cdot ds_q \\
& \leq \left[\left\{ \int_{\partial D} |a \cdot f_m^{\sigma 1}(q)|^2 \cdot ds_q \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \int_{\partial D} \left| (-1)^\sigma \cdot d \cdot f_m^{(3-\sigma)^2}(q) \right|^2 \cdot ds_q \right\}^{\frac{1}{2}} \right]^2 \tag{2.13}
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} & \int_{\partial D} \left| b \cdot f_m^{\sigma 1}(q) - (-1)^\sigma \cdot c \cdot f_m^{(3-\sigma)2}(q) \right|^2 \cdot ds_q \\ & \leq \left[\left\{ \int_{\partial D} \left| b \cdot f_m^{\sigma 1}(q) \right|^2 \cdot ds_q \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \int_{\partial D} \left| (-1)^\sigma \cdot c \cdot f_m^{(3-\sigma)2}(q) \right|^2 \cdot ds_q \right\}^{\frac{1}{2}} \right]^2 \end{aligned} \quad (2.14)$$

D'où :

$$\begin{aligned} & \int_{r_p=A} \left\| T_p G_1 \right\|_{L_2(\partial D)}^2 \cdot ds_p \\ & \leq 2\pi A \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \left[\left\{ \int_{\partial D} \left| a \cdot f_m^{\sigma 1}(q) \right|^2 \cdot ds_q \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \int_{\partial D} \left| (-1)^\sigma \cdot d \cdot f_m^{(3-\sigma)2}(q) \right|^2 \cdot ds_q \right\}^{\frac{1}{2}} \right]^2 \\ & + 2\pi A \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \left[\left\{ \int_{\partial D} \left| b \cdot f_m^{\sigma 1}(q) \right|^2 \cdot ds_q \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \int_{\partial D} \left| (-1)^\sigma \cdot c \cdot f_m^{(3-\sigma)2}(q) \right|^2 \cdot ds_q \right\}^{\frac{1}{2}} \right]^2 \\ & = 2\pi A \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \left[|a| \cdot \left\{ \int_{\partial D} \left| f_m^{\sigma 1}(q) \right|^2 \cdot ds_q \right\}^{\frac{1}{2}} + |d| \cdot \left\{ \int_{\partial D} \left| f_m^{(3-\sigma)2}(q) \right|^2 \cdot ds_q \right\}^{\frac{1}{2}} \right]^2 \\ & + 2\pi A \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \left[|b| \cdot \left\{ \int_{\partial D} \left| f_m^{\sigma 1}(q) \right|^2 \cdot ds_q \right\}^{\frac{1}{2}} + |c| \cdot \left\{ \int_{\partial D} \left| f_m^{(3-\sigma)2}(q) \right|^2 \cdot ds_q \right\}^{\frac{1}{2}} \right]^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi A. \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \left[|a|^2 \cdot \int_{\partial D} |f_m^{\sigma 1}(q)|^2 \cdot ds_q + |d|^2 \cdot \int_{\partial D} |f_m^{(3-\sigma)2}(q)|^2 \cdot ds_q \right. \\
&\quad + 2 \cdot |a| \cdot |d| \cdot \left(\int_{\partial D} |f_m^{\sigma 1}(q)|^2 \cdot ds_q \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{\partial D} |f_m^{(3-\sigma)2}(q)|^2 \cdot ds_q \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + |b|^2 \cdot \int_{\partial D} |f_m^{\sigma 1}(q)|^2 \cdot ds_q + |c|^2 \cdot \int_{\partial D} |f_m^{(3-\sigma)2}(q)|^2 \cdot ds_q \\
&\quad \left. + 2 \cdot |b| \cdot |c| \cdot \left(\int_{\partial D} |f_m^{\sigma 1}(q)|^2 \cdot ds_q \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{\partial D} |f_m^{(3-\sigma)2}(q)|^2 \cdot ds_q \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\
&= 2\pi A. \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \left[\left(|a|^2 + |b|^2 \right) \cdot \int_{\partial D} |f_m^{\sigma 1}(q)|^2 \cdot ds_q + \left(|d|^2 + |c|^2 \right) \cdot \int_{\partial D} |f_m^{(3-\sigma)2}(q)|^2 \cdot ds_q \right. \\
&\quad \left. + 2 \cdot (|a| \cdot |d| + |b| \cdot |c|) \cdot \left[\int_{\partial D} |f_m^{\sigma 1}(q)|^2 \cdot ds_q \cdot \int_{\partial D} |f_m^{(3-\sigma)2}(q)|^2 \cdot ds_q \right]^{\frac{1}{2}} \right]
\end{aligned}$$

D'autre part, le terme $\int_{\partial D} |f_m^{\sigma l}(q)|^2 \cdot ds_q$ peut être réarrangé comme suit :

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial D} |f_m^{\sigma l}(q)|^2 \cdot ds_q = \int_{\partial D} |T\hat{F}_m^{\sigma l}(q) + a_m^{\sigma l} \cdot TF_m^{\sigma l}(q)|^2 \cdot ds_q \\
&= \int_{\partial D} (T\hat{F}_m^{\sigma l}(q) + a_m^{\sigma l} \cdot TF_m^{\sigma l}(q)) \cdot (T\hat{F}_m^{\sigma l}(q) + \bar{a}_m^{\sigma l} \cdot \overline{TF}_m^{\sigma l}(q)) \cdot ds_q \\
&= \int_{\partial D} [T\hat{F}_m^{\sigma l}(q) \cdot T\hat{F}_m^{\sigma l}(q) + \bar{a}_m^{\sigma l} \cdot T\hat{F}_m^{\sigma l}(q) \cdot \overline{TF}_m^{\sigma l}(q) \\
&\quad + a_m^{\sigma l} \cdot TF_m^{\sigma l}(q) \cdot T\hat{F}_m^{\sigma l}(q) + |a_m^{\sigma l}|^2 \cdot TF_m^{\sigma l}(q) \cdot \overline{TF}_m^{\sigma l}(q)] \cdot ds_q \\
&= \|T\hat{F}_m^{\sigma l}\|_{L_2(\partial D)}^2 + \bar{a}_m^{\sigma l} \cdot \langle T\hat{F}_m^{\sigma l}, TF_m^{\sigma l} \rangle_{L_2(\partial D)} + a_m^{\sigma l} \cdot \langle TF_m^{\sigma l}, T\hat{F}_m^{\sigma l} \rangle_{L_2(\partial D)} \\
&\quad + |a_m^{\sigma l}|^2 \cdot \|TF_m^{\sigma l}\|_{L_2(\partial D)}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \hat{TF}_m^{\sigma l} \right\|_{L_2(\partial D)}^2 + \left\| TF_m^{\sigma l} \right\|_{L_2(\partial D)}^2 \cdot \left[\left| a_m^{\sigma l} \right|^2 + a_m^{\sigma l} \cdot \frac{\langle TF_m^{\sigma l}, \hat{TF}_m^{\sigma l} \rangle_{L_2(\partial D)}}{\left\| TF_m^{\sigma l} \right\|_{L_2(\partial D)}^2} + \bar{a}_m^{\sigma l} \cdot \frac{\langle \hat{TF}_m^{\sigma l}, TF_m^{\sigma l} \rangle_{L_2(\partial D)}}{\left\| TF_m^{\sigma l} \right\|_{L_2(\partial D)}^2} \right] \\
&= \left\| \hat{TF}_m^{\sigma l} \right\|_{L_2(\partial D)}^2 + \left\| TF_m^{\sigma l} \right\|_{L_2(\partial D)}^2 \cdot \left| a_m^{\sigma l} + \frac{\langle \hat{TF}_m^{\sigma l}, TF_m^{\sigma l} \rangle_{L_2(\partial D)}}{\left\| TF_m^{\sigma l} \right\|_{L_2(\partial D)}^2} \right|^2 - \frac{\left| \langle \hat{TF}_m^{\sigma l}, TF_m^{\sigma l} \rangle_{L_2(\partial D)} \right|^2}{\left\| TF_m^{\sigma l} \right\|_{L_2(\partial D)}^4} \\
&= \left\| \hat{TF}_m^{\sigma l} \right\|_{L_2(\partial D)}^2 - \frac{\left| \langle \hat{TF}_m^{\sigma l}, TF_m^{\sigma l} \rangle_{L_2(\partial D)} \right|^2}{\left\| TF_m^{\sigma l} \right\|_{L_2(\partial D)}^4} + \left\| TF_m^{\sigma l} \right\|_{L_2(\partial D)}^2 \cdot \left| a_m^{\sigma l} + \frac{\langle \hat{TF}_m^{\sigma l}, TF_m^{\sigma l} \rangle_{L_2(\partial D)}}{\left\| TF_m^{\sigma l} \right\|_{L_2(\partial D)}^2} \right|^2
\end{aligned}$$

De ce fait, il est clair que la quantité (2.3) suivante :

$$\int_{r_p=A} \left\| T_p G_1 \right\|_{L_2(\partial D)}^2 \cdot ds_p \quad , \quad \forall A \geq \max r_q \quad , \quad q \in \partial D$$

sera majorée si la valeur $\left| a_m^{\sigma l} + \frac{\langle \hat{TF}_m^{\sigma l}, TF_m^{\sigma l} \rangle_{L_2(\partial D)}}{\left\| TF_m^{\sigma l} \right\|_{L_2(\partial D)}^2} \right|^2$ est plus petite que

possible, c'est-à-dire égale à zéro, donc nous aurons :

$$a_m^{\sigma l} = - \frac{\langle \hat{TF}_m^{\sigma l}, TF_m^{\sigma l} \rangle_{L_2(\partial D)}}{\left\| TF_m^{\sigma l} \right\|_{L_2(\partial D)}^2}$$

Ce qui termine la démonstration du théorème 2.

Dans ce qui suit nous allons démontrer que le choix optimal que nous avons trouvé dans (2.9), satisfait la condition large (1.24) qui nous garantit l'unicité de la solution de l'équation intégrale associée au problème donné. Cette condition rappelons-le s'exprime dans le cas des coefficients des multipôles simples ($b_m = 0$), sous la forme :

$$\left| a_m^{\sigma l} + \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2} \quad \text{ou bien} \quad \left| 2 \cdot a_m^{\sigma l} + 1 \right| < 1$$

Lemme 01 :

Si les coefficients des multipôles simples $a_m^{\sigma l}$ sont choisis comme dans le théorème 02, alors la condition large (1.24) est satisfaite.

Démonstration :

Nous avons :

$$\begin{aligned}
 \left| 2.a_m^{\sigma l} + 1 \right| &= \left| -2 \frac{\langle \hat{TF}_m^{\sigma l}, TF_m^{\sigma l} \rangle_{L_2(\partial D)}}{\|TF_m^{\sigma l}\|_{L_2(\partial D)}^2} + 1 \right| \\
 &= \left| \frac{\langle TF_m^{\sigma l}, TF_m^{\sigma l} \rangle_{L_2(\partial D)} - 2 \cdot \langle \hat{TF}_m^{\sigma l}, TF_m^{\sigma l} \rangle_{L_2(\partial D)}}{\|TF_m^{\sigma l}\|_{L_2(\partial D)}^2} \right| \\
 &= \left| \frac{-\langle \overline{TF}_m^{\sigma l}, TF_m^{\sigma l} \rangle_{L_2(\partial D)}}{\|TF_m^{\sigma l}\|_{L_2(\partial D)}^2} \right| = \left| \frac{\langle \overline{TF}_m^{\sigma l}, TF_m^{\sigma l} \rangle_{L_2(\partial D)}}{\|TF_m^{\sigma l}\|_{L_2(\partial D)}^2} \right|
 \end{aligned}$$

Posons : $TF_m^{\sigma l} = u + i.v$

donc on a :

$$\begin{aligned}
 \left| 2.a_m^{\sigma l} + 1 \right| &= \left| \frac{\langle u, u \rangle_{L_2(\partial D)} - \langle v, v \rangle_{L_2(\partial D)} - 2.i \cdot \langle u, v \rangle_{L_2(\partial D)}}{\langle u, u \rangle_{L_2(\partial D)} + \langle v, v \rangle_{L_2(\partial D)}} \right| \\
 &= \frac{\left[\left\{ \langle u, u \rangle_{L_2(\partial D)} - \langle v, v \rangle_{L_2(\partial D)} \right\}^2 + 4 \cdot \langle u, v \rangle_{L_2(\partial D)} \cdot \langle u, v \rangle_{L_2(\partial D)} \right]^{\frac{1}{2}}}{\langle u, u \rangle_{L_2(\partial D)} + \langle v, v \rangle_{L_2(\partial D)}} \\
 &= \frac{\left[\left\{ \langle u, u \rangle_{L_2(\partial D)} + \langle v, v \rangle_{L_2(\partial D)} \right\}^2 + 4 \cdot \left\{ \langle u, v \rangle_{L_2(\partial D)}^2 - \langle u, u \rangle_{L_2(\partial D)} \cdot \langle v, v \rangle_{L_2(\partial D)} \right\} \right]^{\frac{1}{2}}}{\langle u, u \rangle_{L_2(\partial D)} + \langle v, v \rangle_{L_2(\partial D)}}
 \end{aligned}$$

Pour que cette dernière quantité soit strictement inférieure à 1, il suffit d'avoir :

$$\langle u, v \rangle_{L_2(\partial D)}^2 - \langle u, u \rangle_{L_2(\partial D)} \cdot \langle v, v \rangle_{L_2(\partial D)} < 0$$

mais de l'inégalité de Schwartz nous avons :

$$\begin{aligned}
 \langle u, v \rangle_{L_2(\partial D)}^2 &\leq \langle u, u \rangle_{L_2(\partial D)} \cdot \langle v, v \rangle_{L_2(\partial D)} \\
 \Leftrightarrow \langle u, v \rangle_{L_2(\partial D)}^2 - \langle u, u \rangle_{L_2(\partial D)} \cdot \langle v, v \rangle_{L_2(\partial D)} &\leq 0
 \end{aligned}$$

et comme l'inégalité de Schwartz est stricte si les deux fonctions u et v sont linéairement indépendantes, alors, pour terminer notre démonstration

il faut montrer que les deux fonctions u et v sont linéairement indépendantes, sachant que :

$$u = \operatorname{Re} \left(TF_m^{\sigma l} \right) = T\hat{F}_m^{\sigma l} \quad \text{et} \quad v = \operatorname{Im} \left(TF_m^{\sigma l} \right)$$

pour cela, on va étudier à titre indicatif, le cas ou $l=1$:

nous avons :

$$u = \nabla \left(J_m(kr).E_m^\sigma(\theta) \right) \quad \text{et} \quad v = \nabla \left(Y_m(kr).E_m^\sigma(\theta) \right)$$

$$u = k.J_m'(kr).E_m^\sigma(\theta).\vec{r} + \frac{m}{r}.J_m(kr).(-1)^\sigma.E_m^{(3-\sigma)}(\theta).\vec{\theta}$$

$$v = k.Y_m'(kr).E_m^\sigma(\theta).\vec{r} + \frac{m}{r}.Y_m(kr).(-1)^\sigma.E_m^{(3-\sigma)}(\theta).\vec{\theta}$$

u et v seront linéairement indépendantes si et seulement si :

$$\frac{k.J_m'(kr).E_m^\sigma(\theta)}{k.Y_m'(kr).E_m^\sigma(\theta)} \neq \frac{\frac{m}{r}.J_m(kr).(-1)^\sigma.E_m^{(3-\sigma)}(\theta)}{\frac{m}{r}.Y_m(kr).(-1)^\sigma.E_m^{(3-\sigma)}(\theta)}$$

Autrement dit, u et v seront linéairement indépendantes si et seulement si :

$$\frac{J_m'(kr)}{Y_m'(kr)} \neq \frac{J_m(kr)}{Y_m(kr)}$$

Calculons pour cela : $J_m'(kr).Y_m(kr) - J_m(kr).Y_m'(kr) = ?$

nous avons : $J_m'(X) = -J_{m+1}(X) + \frac{m}{X}.J_m(X)$

$$Y_m'(X) = -Y_{m+1}(X) + \frac{m}{X}.Y_m(X)$$

d'où :

$$\begin{aligned}
& J_m'(kr).Y_m(kr) - J_m(kr).Y_m'(kr) \\
&= \left[-J_{m+1}(kr) + \frac{m}{kr}.J_m(kr) \right].Y_m(kr) - J_m(kr) \left[-Y_{m+1}(kr) + \frac{m}{kr}.Y_m(kr) \right] \\
&= -J_{m+1}(kr).Y_m(kr) + \frac{m}{kr}.J_m(kr).Y_m(kr) \\
&\quad + J_m(kr).Y_{m+1}(kr) - \frac{m}{kr}.J_m(kr).Y_m(kr) \\
&= -\left[J_{m+1}(kr).Y_m(kr) - J_m(kr).Y_{m+1}(kr) \right]
\end{aligned}$$

En utilisant le Wronskien des fonctions de Bessel et de Hankel [1], on obtient :

$$J_m'(kr).Y_m(kr) - J_m(kr).Y_m'(kr) = -\frac{2}{\pi.kr}$$

donc :

$$J_m'(kr).Y_m(kr) - J_m(kr).Y_m'(kr) = -\frac{2}{\pi.kr} \neq 0$$

d'où u et v sont linéairement indépendantes

c'est-à-dire que : $\langle u, v \rangle_{L_2(\partial D)}^2 - \langle u, u \rangle_{L_2(\partial D)} \cdot \langle v, v \rangle_{L_2(\partial D)} < 0$

d'où : $\left| 2.a_m^{\sigma l} + 1 \right| < 1$

Ce qui termine la démonstration du lemme 01.

Notons ici, que le choix des coefficients des multipôles simples trouvé dans le théorème 02, ne minimise pas réellement la quantité (2.3). Toutefois, ce choix conduit à la majoration de cette dernière quantité, et de plus il vérifie la condition large (1.24) qui garantit l'élimination des fréquences irrégulières, ce qui permet de récupérer l'unicité de la solution de l'équation intégrale modifiée représentant notre problème aux limites.

II – Optimisation des coefficients des multipôles simples et croisés :

Théorème 3 :

Si le noyau de l'opérateur intégral modifié K_1 , à savoir la traction de la fonction de Green $T_p G_1$ est définie comme suit :

$$T_p G_1(P, Q) = T_p G_0(P, Q) + \frac{i}{4\mu K^2} \cdot \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{l=1}^2 \left[a_m^{\sigma l} \cdot TF_m^{\sigma l}(P) \otimes TF_m^{\sigma l}(Q) + (-1)^{\sigma+l} \cdot b_m \cdot TF_m^{\sigma l}(P) \otimes TF_m^{(3-\sigma)(3-l)}(Q) \right]$$

alors la quantité (2.3) est minimisée si les coefficients des multipôles simples et croisés sont choisis comme suit :

$$a_m^{\sigma l} = \frac{\left(\bar{B}_m^{\sigma l} \right) \cdot \left[M_{m,1}^{\sigma l} \right] + \left(\bar{\beta}_m^{\sigma l} \right) \cdot \left[M_{m,2}^{\sigma l} \right] - \left(A_m^{(3-\sigma)(3-l)} \right) \cdot \left[N_{m,1}^{\sigma l} \right] - \left(\alpha_m^{(3-\sigma)(3-l)} \right) \cdot \left[N_{m,2}^{\sigma l} \right]}{\Delta_m^{\sigma l}} \\ (-1)^{\sigma+l} \cdot b_m = \frac{\left(B_m^{\sigma l} \right) \cdot \left[N_{m,1}^{\sigma l} \right] + \left(\beta_m^{\sigma l} \right) \cdot \left[N_{m,2}^{\sigma l} \right] - \left(A_m^{\sigma l} \right) \cdot \left[M_{m,1}^{\sigma l} \right] - \left(\alpha_m^{\sigma l} \right) \cdot \left[M_{m,2}^{\sigma l} \right]}{\Delta_m^{\sigma l}} \quad (2.15)$$

avec :

$$\alpha_m^{\sigma l} = \|TF_m^{\sigma l}\|_A^2, \quad \beta_m^{\sigma l} = \langle TF_m^{\sigma l}, TF_m^{(3-\sigma)(3-l)} \rangle_A \quad (2.16)$$

$$A_m^{\sigma l} = \|TF_m^{\sigma l}\|_{\partial D}^2, \quad B_m^{\sigma l} = \langle TF_m^{\sigma l}, TF_m^{(3-\sigma)(3-l)} \rangle_{\partial D} \quad (2.17)$$

$$M_{m,1}^{\sigma l} = \left(\Delta_{m,A}^{\sigma} \right) \left[\left(B_m^{(3-\sigma)(3-l)} \right) \left(g_m^{(3-\sigma)(3-l)} \right) - \left(A_m^{(3-\sigma)(3-l)} \right) \left(h_m^{\sigma l} \right) \right] \quad (2.18)$$

$$M_{m,2}^{\sigma l} = \left(\Delta_{m,\partial D}^{\sigma} \right) \left[\left(\beta_m^{(3-\sigma)(3-l)} \right) \left(g_m^{(3-\sigma)(3-l)} \right) - \left(\alpha_m^{(3-\sigma)(3-l)} \right) \left(h_m^{\sigma l} \right) \right] \quad (2.19)$$

$$N_{m,1}^{\sigma l} = \left(\Delta_{m,A}^{\sigma} \right) \left[\left(B_m^{(3-\sigma)(3-l)} \right) \left(h_m^{(3-\sigma)(3-l)} \right) - \left(A_m^{(3-\sigma)(3-l)} \right) \left(g_m^{\sigma l} \right) \right] \quad (2.20)$$

$$N_{m,2}^{\sigma l} = \left(\Delta_{m,\partial D}^{\sigma} \right) \left[\left(\beta_m^{(3-\sigma)(3-l)} \right) \left(h_m^{(3-\sigma)(3-l)} \right) - \left(\alpha_m^{(3-\sigma)(3-l)} \right) \left(g_m^{\sigma l} \right) \right] \quad (2.21)$$

$$g_m^{\sigma l} = - < \bar{\beta}_m^{\sigma l} \cdot \hat{TF}_m^{(3-\sigma)(3-l)} + \alpha_m^{\sigma l} \cdot \hat{TF}_m^{\sigma l}, TF_m^{\sigma l} >_{\partial D} \quad (2.22)$$

$$h_m^{\sigma l} = - < \bar{\beta}_m^{\sigma l} \cdot \hat{TF}_m^{(3-\sigma)(3-l)} + \alpha_m^{\sigma l} \cdot \hat{TF}_m^{\sigma l}, TF_m^{(3-\sigma)(3-l)} >_{\partial D} \quad (2.23)$$

$$\Delta_{m,\partial D}^{\sigma} = A_m^{\sigma 1} \cdot A_m^{(3-\sigma)2} - \left| B_m^{\sigma 1} \right|^2 \quad (2.24)$$

$$\Delta_{m,A}^{\sigma} = \alpha_m^{\sigma 1} \cdot \alpha_m^{(3-\sigma)2} - \left| \beta_m^{\sigma 1} \right|^2 \quad (2.25)$$

et $\Delta_m^{\sigma l}$ est défini en fonction de $\Delta_{m,\partial D}^{\sigma}$ et $\Delta_{m,A}^{\sigma}$ dans la démonstration du théorème.

Démonstration :

La démonstration se fait en deux étapes. Dans la première étape on considère la quantité (2.3) comme étant une fonction des variables $a_m^{\sigma l}$ et b_m , et après calcul et annulation du gradient on obtient l'expression du choix optimal des coefficients des multipôles simples et croisés. La deuxième étape est consacrée à la suffisance en calculant la matrice Hessienne ainsi que ses déterminants principaux.

Etape 1 :

On a :

$$\begin{aligned}
T_p G_1(P, Q) &= T_p G_0(P, Q) + \\
&\quad \frac{i}{4\mu K^2} \cdot \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{l=1}^2 \left[a_m^{\sigma l} \cdot TF_m^{\sigma l}(P) \otimes TF_m^{\sigma l}(Q) \right. \\
&\quad \left. + (-1)^{\sigma+l} \cdot b_m \cdot TF_m^{\sigma l}(P) \otimes TF_m^{(3-\sigma)(3-l)}(Q) \right] \\
&= \frac{i}{4\mu K^2} \cdot \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{l=1}^2 \left[TF_m^{\sigma l}(P) \otimes T\hat{F}_m^{\sigma l}(Q) + a_m^{\sigma l} \cdot TF_m^{\sigma l}(P) \otimes TF_m^{\sigma l}(Q) \right. \\
&\quad \left. + (-1)^{\sigma+l} \cdot b_m \cdot TF_m^{\sigma l}(P) \otimes TF_m^{(3-\sigma)(3-l)}(Q) \right]
\end{aligned}$$

Si on pose :

$$f_m^{\sigma l}(Q) = \left[T\hat{F}_m^{\sigma l}(Q) + a_m^{\sigma l} \cdot TF_m^{\sigma l}(Q) + (-1)^{\sigma+l} \cdot b_m \cdot TF_m^{(3-\sigma)(3-l)}(Q) \right]$$

Donc la traction de la fonction de Green modifiée $T_p G_1$ s'écrit sous la forme :

$$T_p G_1(P, Q) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{l=1}^2 \left[TF_m^{\sigma l}(P) \otimes f_m^{\sigma l}(Q) \right]$$

Alors, on a :

$$\begin{aligned}
&\int_{r_p=A} \|T_p G_1\|_{L_2(\partial D)}^2 \cdot dS_p = \int_{r_p=A} \int_{\partial D} T_p G_1(P, q) : \overline{T_p G_1}(q, P) \cdot dS_p \cdot dS_q \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{l=1}^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\nu=1}^2 \sum_{k=1}^2 \int_{r_p=A} TF_m^{\sigma l}(P) \cdot \overline{TF}_n^{\nu k}(P) \cdot dS_p \cdot \int_{\partial D} f_m^{\sigma l}(q) \cdot \overline{f}_n^{\nu k}(q) \cdot dS_q
\end{aligned}$$

Autrement dit :

$$\begin{aligned}
&\int_{r_p=A} \|T_p G_1\|_{L_2(\partial D)}^2 \cdot dS_p \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\nu=1}^2 \left[\int_{r_p=A} TF_m^{\sigma 1}(P) \cdot \overline{TF}_n^{\nu 1}(P) \cdot dS_p \cdot \int_{\partial D} f_m^{\sigma 1}(q) \cdot \overline{f}_n^{\nu 1}(q) \cdot dS_q \right. \\
&\quad + \int_{r_p=A} TF_m^{\sigma 1}(P) \cdot \overline{TF}_n^{\nu 2}(P) \cdot dS_p \cdot \int_{\partial D} f_m^{\sigma 1}(q) \cdot \overline{f}_n^{\nu 2}(q) \cdot dS_q \\
&\quad + \int_{r_p=A} TF_m^{\sigma 2}(P) \cdot \overline{TF}_n^{\nu 1}(P) \cdot dS_p \cdot \int_{\partial D} f_m^{\sigma 2}(q) \cdot \overline{f}_n^{\nu 1}(q) \cdot dS_q \\
&\quad \left. + \int_{r_p=A} TF_m^{\sigma 2}(P) \cdot \overline{TF}_n^{\nu 2}(P) \cdot dS_p \cdot \int_{\partial D} f_m^{\sigma 2}(q) \cdot \overline{f}_n^{\nu 2}(q) \cdot dS_q \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\nu=1}^2 \left[\langle TF_m^{\sigma 1}, TF_n^{\nu 1} \rangle_A \cdot \int_{\partial D} f_m^{\sigma 1}(q) \cdot \bar{f}_n^{\nu 1}(q) \cdot dS_q \right. \\
&\quad + \langle TF_m^{\sigma 1}, TF_n^{\nu 2} \rangle_A \cdot \int_{\partial D} f_m^{\sigma 1}(q) \cdot \bar{f}_n^{\nu 2}(q) \cdot dS_q \\
&\quad + \langle TF_m^{\sigma 2}, TF_n^{\nu 1} \rangle_A \cdot \int_{\partial D} f_m^{\sigma 2}(q) \cdot \bar{f}_n^{\nu 1}(q) \cdot dS_q \\
&\quad \left. + \langle TF_m^{\sigma 2}, TF_n^{\nu 2} \rangle_A \cdot \int_{\partial D} f_m^{\sigma 2}(q) \cdot \bar{f}_n^{\nu 2}(q) \cdot dS_q \right]
\end{aligned}$$

En utilisant les relations des produits scalaires des fonctions $\{TF_m^{\sigma l}\}_{m=0:\infty}^{\sigma,l=1:2}$ sur le cercle de rayon A [34], on obtient :

$$\begin{aligned}
&\int_{r_p=A} \|T_p G_1\|_{L_2(\partial D)}^2 \cdot dS_p \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \left[\|TF_m^{\sigma 1}\|_A^2 \cdot \int_{\partial D} f_m^{\sigma 1}(q) \cdot \bar{f}_m^{\sigma 1}(q) \cdot dS_q \right. \\
&\quad + \langle TF_m^{\sigma 1}, TF_m^{\sigma 2} \rangle_A \cdot \int_{\partial D} f_m^{\sigma 1}(q) \cdot \bar{f}_m^{(3-\sigma)2}(q) \cdot dS \\
&\quad + \langle TF_m^{\sigma 2}, TF_m^{\sigma 1} \rangle_A \cdot \int_{\partial D} \bar{f}_m^{\sigma 1}(q) \cdot f_m^{(3-\sigma)2}(q) \cdot dS \\
&\quad \left. + \|TF_m^{\sigma 2}\|_A^2 \cdot \int_{\partial D} f_m^{\sigma 2}(q) \cdot \bar{f}_m^{\sigma 2}(q) \cdot dS_q \right] \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \left[\|TF_m^{\sigma 1}\|_A^2 \cdot \langle f_m^{\sigma 1}, f_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} \right. \\
&\quad + \langle TF_m^{\sigma 1}, TF_m^{\sigma 2} \rangle_A \cdot \langle f_m^{\sigma 1}, f_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} \\
&\quad + \langle TF_m^{\sigma 2}, TF_m^{\sigma 1} \rangle_A \cdot \langle f_m^{(3-\sigma)2}, f_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} \\
&\quad \left. + \|TF_m^{\sigma 2}\|_A^2 \cdot \langle f_m^{(3-\sigma)2}, f_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} \right]
\end{aligned}$$

En utilisant : $f_m^{\sigma l}(Q) = [T\hat{F}_m^{\sigma l}(Q) + a_m^{\sigma l} \cdot TF_m^{\sigma l}(Q) + (-1)^{\sigma+l} \cdot b_m \cdot TF_m^{(3-\sigma)(3-l)}(Q)]$

Calculons les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
& \langle f_m^{\sigma 1}, f_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} \\
&= \langle T\hat{F}_m^{\sigma 1} + a_m^{\sigma 1} \cdot TF_m^{\sigma 1} - (-1)^\sigma b_m TF_m^{(3-\sigma)2}, T\hat{F}_m^{\sigma 1} + a_m^{\sigma 1} \cdot TF_m^{\sigma 1} - (-1)^\sigma b_m TF_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} \\
&= \left\| T\hat{F}_m^{\sigma 1} \right\|_{\partial D}^2 + \bar{a}_m^{\sigma 1} \cdot \langle T\hat{F}_m^{\sigma 1}, TF_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} - (-1)^\sigma \bar{b}_m \langle T\hat{F}_m^{\sigma 1}, TF_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} \\
&+ a_m^{\sigma 1} \cdot \langle TF_m^{\sigma 1}, T\hat{F}_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} + a_m^{\sigma 1} \cdot \bar{a}_m^{\sigma 1} \cdot \left\| TF_m^{\sigma 1} \right\|_{\partial D}^2 - (-1)^\sigma a_m^{\sigma 1} \bar{b}_m \langle TF_m^{\sigma 1}, TF_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} \\
&- (-1)^\sigma b_m \langle TF_m^{(3-\sigma)2}, T\hat{F}_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} - (-1)^\sigma b_m \bar{a}_m^{\sigma 1} \langle TF_m^{(3-\sigma)2}, TF_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} + b_m \bar{b}_m \left\| TF_m^{(3-\sigma)2} \right\|_{\partial D}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \langle f_m^{\sigma 1}, f_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} \\
&= \langle T\hat{F}_m^{\sigma 1} + a_m^{\sigma 1} \cdot TF_m^{\sigma 1} - (-1)^\sigma b_m TF_m^{(3-\sigma)2}, T\hat{F}_m^{(3-\sigma)2} + a_m^{(3-\sigma)2} \cdot TF_m^{(3-\sigma)2} - (-1)^\sigma b_m TF_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} \\
&= \langle T\hat{F}_m^{\sigma 1}, T\hat{F}_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} + \bar{a}_m^{(3-\sigma)2} \langle T\hat{F}_m^{\sigma 1}, TF_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} - (-1)^\sigma \bar{b}_m \langle T\hat{F}_m^{\sigma 1}, TF_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} \\
&+ a_m^{\sigma 1} \cdot \langle TF_m^{\sigma 1}, T\hat{F}_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} + a_m^{\sigma 1} \cdot \bar{a}_m^{(3-\sigma)2} \langle TF_m^{\sigma 1}, TF_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} - (-1)^\sigma a_m^{\sigma 1} \bar{b}_m \left\| TF_m^{\sigma 1} \right\|_{\partial D}^2 \\
&- (-1)^\sigma b_m \langle TF_m^{(3-\sigma)2}, T\hat{F}_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} - (-1)^\sigma b_m \bar{a}_m^{(3-\sigma)2} \left\| TF_m^{(3-\sigma)2} \right\|_{\partial D}^2 + b_m \bar{b}_m \langle TF_m^{(3-\sigma)2}, TF_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \langle f_m^{(3-\sigma)2}, f_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} \\
&= \langle T\hat{F}_m^{(3-\sigma)2} + a_m^{(3-\sigma)2} \cdot TF_m^{(3-\sigma)2} - (-1)^\sigma b_m TF_m^{\sigma 1}, T\hat{F}_m^{\sigma 1} + a_m^{\sigma 1} \cdot TF_m^{\sigma 1} - (-1)^\sigma b_m TF_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} \\
&= \langle T\hat{F}_m^{(3-\sigma)2}, T\hat{F}_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} + \bar{a}_m^{\sigma 1} \langle T\hat{F}_m^{(3-\sigma)2}, TF_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} - (-1)^\sigma \bar{b}_m \langle T\hat{F}_m^{(3-\sigma)2}, TF_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} \\
&+ a_m^{(3-\sigma)2} \cdot \langle TF_m^{(3-\sigma)2}, T\hat{F}_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} + a_m^{(3-\sigma)2} \cdot \bar{a}_m^{\sigma 1} \langle TF_m^{(3-\sigma)2}, TF_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} - (-1)^\sigma a_m^{(3-\sigma)2} \bar{b}_m \left\| TF_m^{(3-\sigma)2} \right\|_{\partial D}^2 \\
&- (-1)^\sigma b_m \langle TF_m^{\sigma 1}, T\hat{F}_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} - (-1)^\sigma b_m \bar{a}_m^{\sigma 1} \left\| TF_m^{\sigma 1} \right\|_{\partial D}^2 + b_m \bar{b}_m \langle TF_m^{\sigma 1}, TF_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \langle f_m^{(3-\sigma)2}, f_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} \\
&= \langle T\hat{F}_m^{(3-\sigma)2} + a_m^{\sigma 1} \cdot TF_m^{(3-\sigma)2} - (-1)^\sigma b_m TF_m^{\sigma 1}, T\hat{F}_m^{(3-\sigma)2} + a_m^{\sigma 1} \cdot TF_m^{(3-\sigma)2} - (-1)^\sigma b_m TF_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} \\
&= \left\| T\hat{F}_m^{(3-\sigma)2} \right\|_{\partial D}^2 + \bar{a}_m^{(3-\sigma)2} \cdot \langle T\hat{F}_m^{(3-\sigma)2}, TF_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} - (-1)^\sigma \bar{b}_m \langle T\hat{F}_m^{(3-\sigma)2}, TF_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} \\
&+ a_m^{(3-\sigma)2} \cdot \langle TF_m^{(3-\sigma)2}, T\hat{F}_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} + a_m^{(3-\sigma)2} \cdot \bar{a}_m^{(3-\sigma)2} \cdot \left\| TF_m^{(3-\sigma)2} \right\|_{\partial D}^2 - (-1)^\sigma a_m^{(3-\sigma)2} \bar{b}_m \langle TF_m^{(3-\sigma)2}, TF_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} \\
&- (-1)^\sigma b_m \langle TF_m^{\sigma 1}, T\hat{F}_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} - (-1)^\sigma b_m \bar{a}_m^{(3-\sigma)2} \langle TF_m^{\sigma 1}, TF_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} + b_m \bar{b}_m \left\| TF_m^{\sigma 1} \right\|_{\partial D}^2
\end{aligned}$$

Donc nous aurons :

$$\int_{r_p=A} \left\| T_p G_1 \right\|_{L_2(\partial D)}^2 \cdot dS_p$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \left[\begin{aligned} &\left\| TF_m^{\sigma 1} \right\|_A^2 \cdot \langle f_m^{\sigma 1}, f_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} \\ &+ \langle TF_m^{\sigma 1}, TF_m^{\sigma 2} \rangle_A \cdot \langle f_m^{\sigma 1}, f_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} \\ &+ \langle TF_m^{\sigma 2}, TF_m^{\sigma 1} \rangle_A \cdot \langle f_m^{(3-\sigma)2}, f_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} \\ &+ \left\| TF_m^{\sigma 2} \right\|_A^2 \cdot \langle f_m^{(3-\sigma)2}, f_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} \end{aligned} \right] \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \left[\begin{aligned} &\left\| TF_m^{\sigma 1} \right\|_A^2 \cdot \left(\begin{aligned} &\left\| \hat{TF}_m^{\sigma 1} \right\|_{\partial D}^2 + \bar{a}_m^{-\sigma 1} \cdot \langle \hat{TF}_m^{\sigma 1}, TF_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} - (-1)^\sigma \bar{b}_m \langle \hat{TF}_m^{\sigma 1}, TF_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} \\ &+ a_m^{\sigma 1} \cdot \langle TF_m^{\sigma 1}, \hat{TF}_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} + a_m^{\sigma 1} \cdot \bar{a}_m^{-\sigma 1} \cdot \left\| TF_m^{\sigma 1} \right\|_{\partial D}^2 - (-1)^\sigma a_m^{\sigma 1} \bar{b}_m \langle TF_m^{\sigma 1}, TF_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} \\ &- (-1)^\sigma b_m \langle TF_m^{(3-\sigma)2}, \hat{TF}_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} - (-1)^\sigma b_m \bar{a}_m^{-\sigma 1} \langle TF_m^{(3-\sigma)2}, TF_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} \\ &+ b_m \bar{b}_m \left\| TF_m^{(3-\sigma)2} \right\|_{\partial D}^2 \end{aligned} \right) \\ &+ \langle TF_m^{\sigma 1}, TF_m^{(3-\sigma)2} \rangle_A \cdot \left(\begin{aligned} &\langle \hat{TF}_m^{\sigma 1}, \hat{TF}_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} + \bar{a}_m^{-(3-\sigma)2} \langle \hat{TF}_m^{\sigma 1}, TF_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} \\ &- (-1)^\sigma \bar{b}_m \langle \hat{TF}_m^{\sigma 1}, TF_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} + a_m^{\sigma 1} \cdot \langle TF_m^{\sigma 1}, \hat{TF}_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} \\ &+ a_m^{\sigma 1} \cdot \bar{a}_m^{-(3-\sigma)2} \langle TF_m^{\sigma 1}, TF_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} - (-1)^\sigma a_m^{\sigma 1} \bar{b}_m \left\| TF_m^{\sigma 1} \right\|_{\partial D}^2 \\ &- (-1)^\sigma b_m \langle TF_m^{(3-\sigma)2}, \hat{TF}_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} - (-1)^\sigma b_m \bar{a}_m^{-(3-\sigma)2} \left\| TF_m^{(3-\sigma)2} \right\|_{\partial D}^2 \\ &+ b_m \bar{b}_m \langle TF_m^{(3-\sigma)2}, TF_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} \end{aligned} \right) \\ &+ \langle TF_m^{(3-\sigma)2}, TF_m^{\sigma 1} \rangle_A \cdot \left(\begin{aligned} &\langle \hat{TF}_m^{(3-\sigma)2}, \hat{TF}_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} + \bar{a}_m^{-\sigma 1} \langle \hat{TF}_m^{(3-\sigma)2}, TF_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} \\ &- (-1)^\sigma \bar{b}_m \langle \hat{TF}_m^{(3-\sigma)2}, TF_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} + a_m^{(3-\sigma)2} \cdot \langle TF_m^{(3-\sigma)2}, \hat{TF}_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} \\ &+ \bar{a}_m^{-\sigma 1} \cdot a_m^{(3-\sigma)2} \langle TF_m^{(3-\sigma)2}, TF_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} - (-1)^\sigma a_m^{(3-\sigma)2} \bar{b}_m \left\| TF_m^{(3-\sigma)2} \right\|_{\partial D}^2 \\ &- (-1)^\sigma b_m \langle TF_m^{\sigma 1}, \hat{TF}_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} - (-1)^\sigma b_m \bar{a}_m^{-\sigma 1} \left\| TF_m^{\sigma 1} \right\|_{\partial D}^2 \\ &+ b_m \bar{b}_m \langle TF_m^{\sigma 1}, TF_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} \end{aligned} \right) \\ &+ \left\| TF_m^{(3-\sigma)2} \right\|_A^2 \cdot \left(\begin{aligned} &\left\| \hat{TF}_m^{(3-\sigma)2} \right\|_{\partial D}^2 + \bar{a}_m^{-(3-\sigma)2} \cdot \langle \hat{TF}_m^{(3-\sigma)2}, TF_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} - (-1)^\sigma \bar{b}_m \langle \hat{TF}_m^{(3-\sigma)2}, TF_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} \\ &+ a_m^{(3-\sigma)2} \cdot \langle TF_m^{(3-\sigma)2}, \hat{TF}_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} + a_m^{(3-\sigma)2} \cdot \bar{a}_m^{-(3-\sigma)2} \cdot \left\| TF_m^{(3-\sigma)2} \right\|_{\partial D}^2 \\ &- (-1)^\sigma a_m^{(3-\sigma)2} \bar{b}_m \langle TF_m^{(3-\sigma)2}, TF_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} - (-1)^\sigma b_m \langle TF_m^{\sigma 1}, \hat{TF}_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} \\ &- (-1)^\sigma b_m \bar{a}_m^{-(3-\sigma)2} \langle TF_m^{\sigma 1}, TF_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} + b_m \bar{b}_m \left\| TF_m^{\sigma 1} \right\|_{\partial D}^2 \end{aligned} \right) \end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

Utilisons les notations (2.5) à (2.8), nous aurons :

$$\int_{r_p=A} \left\| T_p G_1 \right\|_{L_2(\partial D)}^2 \cdot dS_p =$$

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{aligned}
& \alpha_m^{\sigma^1} \cdot \left(\left\| \hat{TF}_m^{\sigma^1} \right\|_{\partial D}^2 + \bar{a}_m^{\sigma^1} \cdot \langle \hat{TF}_m^{\sigma^1}, TF_m^{\sigma^1} \rangle_{\partial D} - (-1)^\sigma \bar{b}_m \langle \hat{TF}_m^{\sigma^1}, TF_m^{(3-\sigma)^2} \rangle_{\partial D} \right. \\
& + a_m^{\sigma^1} \cdot \langle TF_m^{\sigma^1}, \hat{TF}_m^{\sigma^1} \rangle_{\partial D} + a_m^{\sigma^1} \cdot \bar{a}_m^{\sigma^1} \cdot A_m^{\sigma^1} - (-1)^\sigma a_m^{\sigma^1} \bar{b}_m B_m^{\sigma^1} \\
& - (-1)^\sigma b_m \langle TF_m^{(3-\sigma)^2}, \hat{TF}_m^{\sigma^1} \rangle_{\partial D} - (-1)^\sigma b_m \bar{a}_m^{\sigma^1} \bar{B}_m^{\sigma^1} \\
& \left. + b_m \bar{b}_m A_m^{(3-\sigma)^2} \right) \\
& + \beta_m^{\sigma^1} \cdot \left(\langle \hat{TF}_m^{\sigma^1}, \hat{TF}_m^{(3-\sigma)^2} \rangle_{\partial D} + \bar{a}_m^{(3-\sigma)^2} \langle \hat{TF}_m^{\sigma^1}, TF_m^{(3-\sigma)^2} \rangle_{\partial D} \right. \\
& - (-1)^\sigma \bar{b}_m \langle \hat{TF}_m^{\sigma^1}, TF_m^{\sigma^1} \rangle_{\partial D} + a_m^{\sigma^1} \cdot \langle TF_m^{\sigma^1}, \hat{TF}_m^{(3-\sigma)^2} \rangle_{\partial D} \\
& + a_m^{\sigma^1} \cdot \bar{a}_m^{(3-\sigma)^2} B_m^{\sigma^1} - (-1)^\sigma a_m^{\sigma^1} \bar{b}_m A_m^{\sigma^1} \\
& - (-1)^\sigma b_m \langle TF_m^{(3-\sigma)^2}, \hat{TF}_m^{(3-\sigma)^2} \rangle_{\partial D} - (-1)^\sigma b_m \bar{a}_m^{(3-\sigma)^2} A_m^{(3-\sigma)^2} \\
& \left. + b_m \bar{b}_m \bar{B}_m^{\sigma^1} \right) \\
& + \bar{\beta}_m^{\sigma^1} \cdot \left(\langle \hat{TF}_m^{(3-\sigma)^2}, \hat{TF}_m^{\sigma^1} \rangle_{\partial D} + \bar{a}_m^{\sigma^1} \langle \hat{TF}_m^{(3-\sigma)^2}, TF_m^{\sigma^1} \rangle_{\partial D} \right. \\
& - (-1)^\sigma \bar{b}_m \langle \hat{TF}_m^{(3-\sigma)^2}, TF_m^{(3-\sigma)^2} \rangle_{\partial D} + a_m^{(3-\sigma)^2} \cdot \langle TF_m^{(3-\sigma)^2}, \hat{TF}_m^{\sigma^1} \rangle_{\partial D} \\
& + \bar{a}_m^{\sigma^1} \cdot a_m^{(3-\sigma)^2} \bar{B}_m^{\sigma^1} - (-1)^\sigma a_m^{(3-\sigma)^2} \bar{b}_m A_m^{(3-\sigma)^2} \\
& - (-1)^\sigma b_m \langle TF_m^{\sigma^1}, \hat{TF}_m^{\sigma^1} \rangle_{\partial D} - (-1)^\sigma b_m \bar{a}_m^{\sigma^1} A_m^{\sigma^1} \\
& \left. + b_m \bar{b}_m \bar{B}_m^{\sigma^1} \right) \\
& + \alpha_m^{(3-\sigma)^2} \cdot \left(\left\| \hat{TF}_m^{(3-\sigma)^2} \right\|_{\partial D}^2 + \bar{a}_m^{(3-\sigma)^2} \cdot \langle \hat{TF}_m^{(3-\sigma)^2}, TF_m^{(3-\sigma)^2} \rangle_{\partial D} - (-1)^\sigma \bar{b}_m \langle \hat{TF}_m^{(3-\sigma)^2}, TF_m^{\sigma^1} \rangle_{\partial D} \right. \\
& + a_m^{(3-\sigma)^2} \cdot \langle TF_m^{(3-\sigma)^2}, \hat{TF}_m^{(3-\sigma)^2} \rangle_{\partial D} + a_m^{(3-\sigma)^2} \cdot \bar{a}_m^{(3-\sigma)^2} \cdot A_m^{(3-\sigma)^2} \\
& - (-1)^\sigma a_m^{(3-\sigma)^2} \bar{b}_m \bar{B}_m^{\sigma^1} - (-1)^\sigma b_m \langle TF_m^{\sigma^1}, \hat{TF}_m^{(3-\sigma)^2} \rangle_{\partial D} \\
& \left. - (-1)^\sigma b_m \bar{a}_m^{(3-\sigma)^2} B_m^{\sigma^1} + b_m \bar{b}_m A_m^{\sigma^1} \right)
\end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

De ce fait, minimiser la quantité (2.3) devient un problème de minimisation standard, dont la condition nécessaire pour l'existence d'un minimum est l'annulation du gradient.

Donc, si on dérive par rapport aux coefficients $\bar{a}_m^{\sigma^1}$, $\bar{a}_m^{(3-\sigma)^2}$ et $\bar{b}_m$, on obtient le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_m^{\sigma^1} \cdot \left(\langle \hat{TF}_m^{\sigma^1}, TF_m^{\sigma^1} \rangle_{\partial D} + a_m^{\sigma^1} \cdot A_m^{\sigma^1} - (-1)^\sigma b_m \bar{B}_m^{\sigma^1} \right) \\ + \bar{\beta}_m^{\sigma^1} \cdot \left(\langle \hat{TF}_m^{(3-\sigma)^2}, TF_m^{\sigma^1} \rangle_{\partial D} + a_m^{(3-\sigma)^2} \cdot \bar{B}_m^{\sigma^1} - (-1)^\sigma b_m A_m^{\sigma^1} \right) = 0 \\ \\ \beta_m^{\sigma^1} \cdot \left(\langle \hat{TF}_m^{\sigma^1}, TF_m^{(3-\sigma)^2} \rangle_{\partial D} + a_m^{\sigma^1} \cdot B_m^{\sigma^1} - (-1)^\sigma b_m A_m^{(3-\sigma)^2} \right) \\ + \alpha_m^{(3-\sigma)^2} \cdot \left(\langle \hat{TF}_m^{(3-\sigma)^2}, TF_m^{(3-\sigma)^2} \rangle_{\partial D} + a_m^{(3-\sigma)^2} \cdot A_m^{(3-\sigma)^2} - (-1)^\sigma b_m B_m^{\sigma^1} \right) = 0 \\ \\ \alpha_m^{\sigma^1} \cdot \left(-(-1)^\sigma \langle \hat{TF}_m^{\sigma^1}, TF_m^{(3-\sigma)^2} \rangle_{\partial D} - (-1)^\sigma a_m^{\sigma^1} \cdot B_m^{\sigma^1} + b_m A_m^{(3-\sigma)^2} \right) \\ + \beta_m^{\sigma^1} \cdot \left(-(-1)^\sigma \langle \hat{TF}_m^{\sigma^1}, TF_m^{\sigma^1} \rangle_{\partial D} - (-1)^\sigma a_m^{\sigma^1} \cdot A_m^{\sigma^1} + b_m \bar{B}_m^{\sigma^1} \right) \\ + \bar{\beta}_m^{\sigma^1} \cdot \left(-(-1)^\sigma \langle \hat{TF}_m^{(3-\sigma)^2}, TF_m^{(3-\sigma)^2} \rangle_{\partial D} - (-1)^\sigma a_m^{(3-\sigma)^2} \cdot A_m^{(3-\sigma)^2} + b_m B_m^{\sigma^1} \right) \\ + \alpha_m^{(3-\sigma)^2} \cdot \left(-(-1)^\sigma \langle \hat{TF}_m^{(3-\sigma)^2}, TF_m^{\sigma^1} \rangle_{\partial D} - (-1)^\sigma a_m^{(3-\sigma)^2} \cdot \bar{B}_m^{\sigma^1} + b_m A_m^{\sigma^1} \right) = 0 \end{array} \right.$$

ou sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\alpha_m^{\sigma^1} \cdot A_m^{\sigma^1}) a_m^{\sigma^1} + (\bar{\beta}_m^{\sigma^1} \cdot \bar{B}_m^{\sigma^1}) a_m^{(3-\sigma)^2} - (-1)^\sigma (\alpha_m^{\sigma^1} \bar{B}_m^{\sigma^1} + A_m^{\sigma^1} \bar{\beta}_m^{\sigma^1}) b_m \\ = -\alpha_m^{\sigma^1} \cdot \langle \hat{TF}_m^{\sigma^1}, TF_m^{\sigma^1} \rangle_{\partial D} - \bar{\beta}_m^{\sigma^1} \cdot \langle \hat{TF}_m^{(3-\sigma)^2}, TF_m^{\sigma^1} \rangle_{\partial D} \\ = -\langle \alpha_m^{\sigma^1} \cdot \hat{TF}_m^{\sigma^1} + \bar{\beta}_m^{\sigma^1} \cdot \hat{TF}_m^{(3-\sigma)^2}, TF_m^{\sigma^1} \rangle_{\partial D} = g_m^{\sigma^1} \\ \\ (\beta_m^{\sigma^1} \cdot B_m^{\sigma^1}) a_m^{\sigma^1} + (\alpha_m^{(3-\sigma)^2} \cdot A_m^{(3-\sigma)^2}) a_m^{(3-\sigma)^2} - (-1)^\sigma (\alpha_m^{(3-\sigma)^2} B_m^{\sigma^1} + A_m^{(3-\sigma)^2} \beta_m^{\sigma^1}) b_m \\ = -\beta_m^{\sigma^1} \cdot \langle \hat{TF}_m^{\sigma^1}, TF_m^{(3-\sigma)^2} \rangle_{\partial D} - \alpha_m^{(3-\sigma)^2} \cdot \langle \hat{TF}_m^{(3-\sigma)^2}, TF_m^{(3-\sigma)^2} \rangle_{\partial D} \\ = -\langle \beta_m^{\sigma^1} \cdot \hat{TF}_m^{\sigma^1} + \alpha_m^{(3-\sigma)^2} \cdot \hat{TF}_m^{(3-\sigma)^2}, TF_m^{(3-\sigma)^2} \rangle_{\partial D} = g_m^{(3-\sigma)^2} \\ \\ -(-1)^\sigma (\alpha_m^{\sigma^1} B_m^{\sigma^1} + \beta_m^{\sigma^1} A_m^{\sigma^1}) a_m^{\sigma^1} - (-1)^\sigma (A_m^{(3-\sigma)^2} \bar{\beta}_m^{\sigma^1} + \alpha_m^{(3-\sigma)^2} \bar{B}_m^{\sigma^1}) a_m^{(3-\sigma)^2} \\ + (\alpha_m^{\sigma^1} A_m^{(3-\sigma)^2} + \beta_m^{\sigma^1} \bar{B}_m^{\sigma^1} + \bar{\beta}_m^{\sigma^1} B_m^{\sigma^1} + \alpha_m^{(3-\sigma)^2} A_m^{\sigma^1}) b_m \\ = (-1)^\sigma \left(\alpha_m^{\sigma^1} \cdot \langle \hat{TF}_m^{\sigma^1}, TF_m^{(3-\sigma)^2} \rangle_{\partial D} + \beta_m^{\sigma^1} \cdot \langle \hat{TF}_m^{\sigma^1}, TF_m^{\sigma^1} \rangle_{\partial D} \right. \\ \left. + \bar{\beta}_m^{\sigma^1} \cdot \langle \hat{TF}_m^{(3-\sigma)^2}, TF_m^{(3-\sigma)^2} \rangle_{\partial D} + \alpha_m^{(3-\sigma)^2} \cdot \langle \hat{TF}_m^{(3-\sigma)^2}, TF_m^{\sigma^1} \rangle_{\partial D} \right) \\ = (-1)^\sigma (\alpha_m^{\sigma^1} \cdot \langle \alpha_m^{\sigma^1} \hat{TF}_m^{\sigma^1} + \bar{\beta}_m^{\sigma^1} \cdot \hat{TF}_m^{(3-\sigma)^2}, TF_m^{(3-\sigma)^2} \rangle_{\partial D} + \langle \beta_m^{\sigma^1} \hat{TF}_m^{\sigma^1} + \alpha_m^{(3-\sigma)^2} \hat{TF}_m^{(3-\sigma)^2}, TF_m^{\sigma^1} \rangle_{\partial D}) \\ = (-1)^\sigma (h_m^{\sigma^1} + h_m^{(3-\sigma)^2}) \end{array} \right.$$

avec :

$$\begin{aligned} g_m^{\sigma^l} &= -\langle \bar{\beta}_m^{\sigma^l} \cdot \hat{TF}_m^{(3-\sigma)(3-l)} + \alpha_m^{\sigma^l} \cdot \hat{TF}_m^{\sigma^l}, TF_m^{\sigma^l} \rangle_{\partial D} \\ h_m^{\sigma^l} &= -\langle \bar{\beta}_m^{\sigma^l} \cdot \hat{TF}_m^{(3-\sigma)(3-l)} + \alpha_m^{\sigma^l} \cdot \hat{TF}_m^{\sigma^l}, TF_m^{(3-\sigma)(3-l)} \rangle_{\partial D} \end{aligned}$$

Ce dernier système admet le déterminant suivant :

$$\Delta_m^{\sigma /} = \begin{vmatrix} \alpha_m^{\sigma 1} \cdot A_m^{\sigma 1} & \bar{\beta}_m^{\sigma 1} \cdot \bar{B}_m^{\sigma 1} & -(-1)^\sigma (\alpha_m^{\sigma 1} \bar{B}_m^{\sigma 1} + A_m^{\sigma 1} \bar{\beta}_m^{\sigma 1}) \\ \beta_m^{\sigma 1} \cdot B_m^{\sigma 1} & \alpha_m^{(3-\sigma)2} \cdot A_m^{(3-\sigma)2} & -(-1)^\sigma (\alpha_m^{(3-\sigma)2} B_m^{\sigma 1} + A_m^{(3-\sigma)2} \beta_m^{\sigma 1}) \\ -(-1)^\sigma \left(\alpha_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} \right) & -(-1)^\sigma \left(A_m^{(3-\sigma)2} \bar{\beta}_m^{\sigma 1} + \alpha_m^{(3-\sigma)2} \bar{B}_m^{\sigma 1} \right) & \left(\alpha_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma)2} + \beta_m^{\sigma 1} \bar{B}_m^{\sigma 1} + \bar{\beta}_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} + \alpha_m^{(3-\sigma)2} A_m^{\sigma 1} \right) \end{vmatrix}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \Delta_m^{\sigma /} = & \left(\alpha_m^{\sigma 1} \cdot A_m^{\sigma 1} \right) \begin{vmatrix} \alpha_m^{(3-\sigma)2} \cdot A_m^{(3-\sigma)2} & -(-1)^\sigma (\alpha_m^{(3-\sigma)2} B_m^{\sigma 1} + A_m^{(3-\sigma)2} \beta_m^{\sigma 1}) \\ -(-1)^\sigma \left(A_m^{(3-\sigma)2} \bar{\beta}_m^{\sigma 1} + \alpha_m^{(3-\sigma)2} \bar{B}_m^{\sigma 1} \right) & \left(\alpha_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma)2} + \beta_m^{\sigma 1} \bar{B}_m^{\sigma 1} + \bar{\beta}_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} + \alpha_m^{(3-\sigma)2} A_m^{\sigma 1} \right) \end{vmatrix} \\ & - \left(\bar{\beta}_m^{\sigma 1} \cdot \bar{B}_m^{\sigma 1} \right) \begin{vmatrix} \beta_m^{\sigma 1} \cdot B_m^{\sigma 1} & -(-1)^\sigma (\alpha_m^{(3-\sigma)2} B_m^{\sigma 1} + A_m^{(3-\sigma)2} \beta_m^{\sigma 1}) \\ -(-1)^\sigma \left(\alpha_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} \right) & \left(\alpha_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma)2} + \beta_m^{\sigma 1} \bar{B}_m^{\sigma 1} + \bar{\beta}_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} + \alpha_m^{(3-\sigma)2} A_m^{\sigma 1} \right) \end{vmatrix} \\ & - (-1)^\sigma \left(\alpha_m^{\sigma 1} \bar{B}_m^{\sigma 1} + A_m^{\sigma 1} \bar{\beta}_m^{\sigma 1} \right) \begin{vmatrix} \beta_m^{\sigma 1} \cdot B_m^{\sigma 1} & \alpha_m^{(3-\sigma)2} \cdot A_m^{(3-\sigma)2} \\ -(-1)^\sigma \left(\alpha_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} \right) & -(-1)^\sigma \left(A_m^{(3-\sigma)2} \bar{\beta}_m^{\sigma 1} + \alpha_m^{(3-\sigma)2} \bar{B}_m^{\sigma 1} \right) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Après de longs calculs, on obtient :

$$\Delta_m^{\sigma /} = \left[\left(\alpha_m^{\sigma 1} \cdot A_m^{(3-\sigma)2} + \alpha_m^{(3-\sigma)2} \cdot A_m^{\sigma 1} \right) - \left(\beta_m^{\sigma 1} \cdot \bar{B}_m^{\sigma 1} + \bar{\beta}_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} \right) \right] \cdot \left(A_m^{\sigma 1} \cdot A_m^{(3-\sigma)2} - |B_m^{\sigma 1}|^2 \right) \cdot \left(\alpha_m^{\sigma 1} \cdot \alpha_m^{(3-\sigma)2} - |\beta_m^{\sigma 1}|^2 \right)$$

Ce dernier déterminant est non nul, car d'après l'inégalité de Schwartz et l'indépendance linéaire des fonctions $\{TF_m^{\sigma l}\}_{m=0:\infty}^{\sigma, l=1:2}$, nous avons :

$$\begin{aligned} & \left(\alpha_m^{\sigma 1} \cdot A_m^{(3-\sigma)2} + \alpha_m^{(3-\sigma)2} \cdot A_m^{\sigma 1} \right) - \left(\beta_m^{\sigma 1} \cdot \bar{B}_m^{\sigma 1} + \bar{\beta}_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} \right) \\ & = \|F_m^{\sigma 1}\|_{\partial D}^2 \|F_m^{(3-\sigma)2}\|_A^2 + \|F_m^{\sigma 1}\|_A^2 \|F_m^{(3-\sigma)2}\|_{\partial D}^2 - \langle F_m^{\sigma 1}, F_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} \langle F_m^{(3-\sigma)2}, F_m^{\sigma 1} \rangle_A \\ & - \langle F_m^{(3-\sigma)2}, F_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} \langle F_m^{\sigma 1}, F_m^{(3-\sigma)2} \rangle_A > 0 \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} & \left(A_m^{\sigma 1} \cdot A_m^{(3-\sigma)2} - |B_m^{\sigma 1}|^2 \right) \\ & = \|F_m^{\sigma 1}\|_{\partial D}^2 \|F_m^{(3-\sigma)2}\|_{\partial D}^2 - \langle F_m^{\sigma 1}, F_m^{(3-\sigma)2} \rangle_{\partial D} \langle F_m^{(3-\sigma)2}, F_m^{\sigma 1} \rangle_{\partial D} > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\alpha_m^{\sigma 1} \cdot \alpha_m^{(3-\sigma)2} - |\beta_m^{\sigma 1}|^2 \right) \\ & = \|F_m^{\sigma 1}\|_A^2 \|F_m^{(3-\sigma)2}\|_A^2 - \langle F_m^{\sigma 1}, F_m^{(3-\sigma)2} \rangle_A \langle F_m^{(3-\sigma)2}, F_m^{\sigma 1} \rangle_A > 0 \end{aligned}$$

Et par conséquent, les solutions de ce dernier système, seront données par :

$$a_m^{\sigma 1} = \frac{\begin{vmatrix} g_m^{\sigma 1} & \overline{\beta}_m^{\sigma 1} \cdot \overline{B}_m^{\sigma 1} & -(-1)^\sigma (\alpha_m^{\sigma 1} \overline{B}_m^{\sigma 1} + A_m^{\sigma 1} \overline{\beta}_m^{\sigma 1}) \\ g_m^{(3-\sigma)2} & \alpha_m^{(3-\sigma)2} \cdot A_m^{(3-\sigma)2} & -(-1)^\sigma (\alpha_m^{(3-\sigma)2} B_m^{\sigma 1} + A_m^{(3-\sigma)2} \beta_m^{\sigma 1}) \\ -(-1)^\sigma (h_m^{\sigma 1} + h_m^{(3-\sigma)2}) & -(-1)^\sigma \begin{pmatrix} A_m^{(3-\sigma)2} \overline{\beta}_m^{\sigma 1} \\ + \alpha_m^{(3-\sigma)2} \overline{B}_m^{\sigma 1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \alpha_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma)2} + \beta_m^{\sigma 1} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \overline{\beta}_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} + \alpha_m^{(3-\sigma)2} A_m^{\sigma 1} \end{pmatrix} \end{vmatrix}}{\Delta_m^{\sigma /}}$$

Après de longs calculs, ainsi que l'utilisation des notations énoncés ci-dessus, on obtient :

$$a_m^{\sigma 1} = \frac{\overline{B}_m^{\sigma 1} \cdot M_{m,1}^{\sigma 1} + \overline{\beta}_m^{\sigma 1} \cdot M_{m,2}^{\sigma 1} - A_m^{(3-\sigma)2} \cdot N_{m,1}^{\sigma 1} - \alpha_m^{(3-\sigma)2} \cdot N_{m,2}^{\sigma 1}}{\Delta_m^{\sigma /}}$$

D'autre part, nous avons :

$$a_m^{(3-\sigma)2} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} & g_m^{\sigma 1} & -(-1)^\sigma (\alpha_m^{\sigma 1} \overline{B}_m^{\sigma 1} + A_m^{\sigma 1} \overline{\beta}_m^{\sigma 1}) \\ B_m^{\sigma 1} \beta_m^{\sigma 1} & g_m^{(3-\sigma)2} & -(-1)^\sigma (\alpha_m^{(3-\sigma)2} B_m^{\sigma 1} + A_m^{(3-\sigma)2} \beta_m^{\sigma 1}) \\ -(-1)^\sigma (B_m^{\sigma 1} \alpha_m^{\sigma 1} + A_m^{\sigma 1} \beta_m^{\sigma 1}) & -(-1)^\sigma (h_m^{\sigma 1} + h_m^{(3-\sigma)2}) & \begin{pmatrix} \alpha_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma)2} + \beta_m^{\sigma 1} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \overline{\beta}_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} + \alpha_m^{(3-\sigma)2} A_m^{\sigma 1} \end{pmatrix} \end{vmatrix}}{\Delta_m^{\sigma /}}$$

Après de longs calculs, ainsi que l'utilisation des notations énoncés ci-dessus, on obtient :

$$a_m^{(3-\sigma)2} = \frac{\overline{B}_m^{(3-\sigma)2} \cdot M_{m,1}^{(3-\sigma)2} + \overline{\beta}_m^{(3-\sigma)2} \cdot M_{m,2}^{(3-\sigma)2} - A_m^{\sigma 1} \cdot N_{m,1}^{(3-\sigma)2} - \alpha_m^{\sigma 1} \cdot N_{m,2}^{(3-\sigma)2}}{\Delta_m^{\sigma /}}$$

D'autre part, nous avons :

$$b_m = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} & \overline{\beta}_m^{\sigma 1} \cdot \overline{B}_m^{\sigma 1} & g_m^{\sigma 1} \\ B_m^{\sigma 1} \beta_m^{\sigma 1} & \alpha_m^{(3-\sigma)2} \cdot A_m^{(3-\sigma)2} & g_m^{(3-\sigma)2} \\ -(-1)^\sigma (B_m^{\sigma 1} \alpha_m^{\sigma 1} + A_m^{\sigma 1} \beta_m^{\sigma 1}) & -(-1)^\sigma \begin{pmatrix} A_m^{(3-\sigma)2} \overline{\beta}_m^{\sigma 1} \\ + \alpha_m^{(3-\sigma)2} \overline{B}_m^{\sigma 1} \end{pmatrix} & -(-1)^\sigma (h_m^{\sigma 1} + h_m^{(3-\sigma)2}) \end{vmatrix}}{\Delta_m^{\sigma /}} \quad \text{Après de}$$

longs calculs, ainsi que l'utilisation des notations énoncés ci-dessus, on obtient :

$$b_m = -(-1)^\sigma \frac{B_m^{\sigma 1} \cdot N_{m,1}^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} \cdot N_{m,2}^{\sigma 1} - A_m^{\sigma 1} \cdot M_{m,1}^{\sigma 1} - \alpha_m^{\sigma 1} \cdot M_{m,2}^{\sigma 1}}{\Delta_m^{\sigma /}}$$

Etape 2 :

Nous allons démontrer dans ce qui suit que le choix des coefficients des multipôles simples et croisés tel que défini dans (2.15) vérifie réellement le minimum de la quantité :

$$\int_{r_p=A} \|T_p G_1\|_{L_2(\partial D)}^2 \cdot dS_p, \quad \forall A \geq \max_{q \in \partial D} r_q$$

Pour cela, on suppose que la quantité $\int_{r_p=A} \|T_p G_1\|_{L_2(\partial D)}^2 \cdot dS_p$ est une fonction

des variables $x_m^{\sigma,1}, y_m^{\sigma,1}, x_m^{(3-\sigma),2}, y_m^{(3-\sigma),2}, x_m$ et y_m pour $m=0:\infty, \sigma, l=1:2$,

où :

$$\begin{aligned} a_m^{\sigma,1} &= x_m^{\sigma,1} + i \cdot y_m^{\sigma,1} \\ a_m^{(3-\sigma),2} &= x_m^{(3-\sigma),2} + i \cdot y_m^{(3-\sigma),2} \\ b_m &= x_m + i \cdot y_m \end{aligned}$$

Alors la quantité $\int_{r_p=A} \|T_p G_1\|_{L_2(\partial D)}^2 \cdot dS_p$ peut être réécrite comme suit :

$$\int_{r_p=A} \|T_p G_1\|_{L_2(\partial D)}^2 \cdot dS_p$$

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{aligned}
& \alpha_m^{\sigma^1} \cdot \left(\begin{aligned}
& \left\| T\hat{F}_m^{\sigma^1} \right\|^2 + (x_m^{\sigma,1} - i \cdot y_m^{\sigma,1}) \langle T\hat{F}_m^{\sigma^1}, T\hat{F}_m^{\sigma^1} \rangle - (-1)^\sigma (x_m - i \cdot y_m) \langle T\hat{F}_m^{\sigma^1}, T\hat{F}_m^{(3-\sigma)^2} \rangle \\
& + (x_m^{\sigma,1} + i \cdot y_m^{\sigma,1}) \langle T\hat{F}_m^{\sigma^1}, T\hat{F}_m^{\sigma^1} \rangle + \left((x_m^{\sigma,1})^2 + (y_m^{\sigma,1})^2 \right) A_m^{\sigma^1} \\
& - (-1)^\sigma (x_m^{\sigma,1} + i \cdot y_m^{\sigma,1}) (x_m - i \cdot y_m) B_m^{\sigma^1} - (-1)^\sigma (x_m + i \cdot y_m) \langle T\hat{F}_m^{(3-\sigma)^2}, T\hat{F}_m^{\sigma^1} \rangle \\
& - (-1)^\sigma (x_m^{\sigma,1} - i \cdot y_m^{\sigma,1}) (x_m + i \cdot y_m) \bar{B}_m^{\sigma^1} + \left((x_m)^2 + (y_m)^2 \right) A_m^{(3-\sigma)^2}
\end{aligned} \right) \\
& + \beta_m^{\sigma^1} \cdot \left(\begin{aligned}
& \langle T\hat{F}_m^{\sigma^1}, T\hat{F}_m^{(3-\sigma)^2} \rangle + (x_m^{(3-\sigma),2} - i \cdot y_m^{(3-\sigma),2}) \langle T\hat{F}_m^{\sigma^1}, T\hat{F}_m^{(3-\sigma)^2} \rangle \\
& - (-1)^\sigma (x_m - i \cdot y_m) \langle T\hat{F}_m^{\sigma^1}, T\hat{F}_m^{\sigma^1} \rangle + (x_m^{\sigma,1} + i \cdot y_m^{\sigma,1}) \langle T\hat{F}_m^{\sigma^1}, T\hat{F}_m^{(3-\sigma)^2} \rangle \\
& + (x_m^{\sigma,1} + i \cdot y_m^{\sigma,1}) (x_m^{(3-\sigma),2} - i \cdot y_m^{(3-\sigma),2}) B_m^{\sigma^1} \\
& - (-1)^\sigma (x_m^{\sigma,1} + i \cdot y_m^{\sigma,1}) (x_m - i \cdot y_m) A_m^{\sigma^1} - (-1)^\sigma (x_m + i \cdot y_m) \langle T\hat{F}_m^{(3-\sigma)^2}, T\hat{F}_m^{(3-\sigma)^2} \rangle \\
& - (-1)^\sigma (x_m^{(3-\sigma),2} - i \cdot y_m^{(3-\sigma),2}) (x_m + i \cdot y_m) A_m^{(3-\sigma)^2} + \left((x_m)^2 + (y_m)^2 \right) \bar{B}_m^{\sigma^1}
\end{aligned} \right) \\
& = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \left(\begin{aligned}
& \langle T\hat{F}_m^{(3-\sigma)^2}, T\hat{F}_m^{\sigma^1} \rangle + (x_m^{\sigma,1} - i \cdot y_m^{\sigma,1}) \langle T\hat{F}_m^{(3-\sigma)^2}, T\hat{F}_m^{\sigma^1} \rangle \\
& - (-1)^\sigma (x_m - i \cdot y_m) \langle T\hat{F}_m^{(3-\sigma)^2}, T\hat{F}_m^{(3-\sigma)^2} \rangle + (x_m^{(3-\sigma),2} + i \cdot y_m^{(3-\sigma),2}) \langle T\hat{F}_m^{(3-\sigma)^2}, T\hat{F}_m^{\sigma^1} \rangle \\
& + \beta_m^{\sigma^1} \cdot \left(\begin{aligned}
& + (x_m^{(3-\sigma),2} + i \cdot y_m^{(3-\sigma),2}) (x_m^{\sigma,1} - i \cdot y_m^{\sigma,1}) \bar{B}_m^{\sigma^1} \\
& - (-1)^\sigma (x_m^{(3-\sigma),2} + i \cdot y_m^{(3-\sigma),2}) (x_m - i \cdot y_m) A_m^{(3-\sigma)^2} - (-1)^\sigma (x_m + i \cdot y_m) \langle T\hat{F}_m^{\sigma^1}, T\hat{F}_m^{\sigma^1} \rangle \\
& - (-1)^\sigma (x_m^{\sigma,1} - i \cdot y_m^{\sigma,1}) (x_m + i \cdot y_m) A_m^{\sigma^1} + \left((x_m)^2 + (y_m)^2 \right) B_m^{\sigma^1}
\end{aligned} \right) \\
& + \alpha_m^{(3-\sigma)^2} \cdot \left(\begin{aligned}
& \left\| T\hat{F}_m^{(3-\sigma)^2} \right\|^2 + (x_m^{(3-\sigma),2} - i \cdot y_m^{(3-\sigma),2}) \langle T\hat{F}_m^{(3-\sigma)^2}, T\hat{F}_m^{(3-\sigma)^2} \rangle \\
& - (-1)^\sigma (x_m - i \cdot y_m) \langle T\hat{F}_m^{(3-\sigma)^2}, T\hat{F}_m^{\sigma^1} \rangle + (x_m^{(3-\sigma),2} + i \cdot y_m^{(3-\sigma),2}) \langle T\hat{F}_m^{(3-\sigma)^2}, T\hat{F}_m^{(3-\sigma)^2} \rangle \\
& + \left((x_m^{(3-\sigma),2})^2 + (y_m^{(3-\sigma),2})^2 \right) A_m^{(3-\sigma)^2} \\
& - (-1)^\sigma (x_m^{(3-\sigma),2} + i \cdot y_m^{(3-\sigma),2}) (x_m - i \cdot y_m) \bar{B}_m^{\sigma^1} - (-1)^\sigma (x_m + i \cdot y_m) \langle T\hat{F}_m^{\sigma^1}, T\hat{F}_m^{(3-\sigma),2} \rangle \\
& - (-1)^\sigma (x_m^{(3-\sigma),2} - i \cdot y_m^{(3-\sigma),2}) (x_m + i \cdot y_m) B_m^{\sigma^1} + \left((x_m)^2 + (y_m)^2 \right) A_m^{\sigma^1}
\end{aligned} \right)
\end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

Il est clair que le choix optimal des coefficients des multipôles simples et croisés tel que définit dans (2.15), rend le gradient de cette dernière

fonction $\int_{r_p=A} \left\| T_p G_1 \right\|_{L_2(\partial D)}^2 \cdot dS_p$ nul.

De plus, notre choix optimal vérifiera le minimum si le Hessien est une matrice semi défini positive, mais comme le Hessien est une matrice symétrique, alors il suffit que les déterminants principaux soient strictement positifs.

Pour cela, calculons le gradient de (2.3) par rapport aux nouveaux variables

$x_m^{\sigma,1}, y_m^{\sigma,1}, x_m^{(3-\sigma),2}, y_m^{(3-\sigma),2}, x_m$ et y_m , on obtient :

$$\nabla \left[\int_{r_p=A} \left\| T_p G_1 \right\|_{L_2(\partial D)}^2 \cdot dS_p \right] = \begin{pmatrix} A_m^\sigma \\ B_m^\sigma \\ C_m^\sigma \end{pmatrix}$$

$$A_m^\sigma = \begin{pmatrix} \alpha_m^{\sigma 1} \cdot \left(\langle T\hat{F}_m^{\sigma 1}, TF_m^{\sigma 1} \rangle + \langle TF_m^{\sigma 1}, T\hat{F}_m^{\sigma 1} \rangle + 2 x_m^{\sigma,1} A_m^{\sigma 1} \right) \\ - (-1)^\sigma (x_m - i \cdot y_m) B_m^{\sigma 1} - (-1)^\sigma (x_m + i \cdot y_m) \bar{B}_m^{\sigma 1} \\ + \beta_m^{\sigma 1} \cdot \left(\langle TF_m^{\sigma 1}, T\hat{F}_m^{(3-\sigma)2} \rangle + (x_m^{(3-\sigma),2} - i \cdot y_m^{(3-\sigma),2}) \cdot B_m^{\sigma 1} - (-1)^\sigma (x_m - i \cdot y_m) A_m^{\sigma 1} \right) \\ + \bar{\beta}_m^{\sigma 1} \cdot \left(\langle T\hat{F}_m^{(3-\sigma)2}, TF_m^{\sigma 1} \rangle + (x_m^{(3-\sigma),2} + i \cdot y_m^{(3-\sigma),2}) \cdot \bar{B}_m^{\sigma 1} - (-1)^\sigma (x_m + i \cdot y_m) A_m^{\sigma 1} \right) \\ \alpha_m^{\sigma 1} \cdot \left(-i \cdot \langle T\hat{F}_m^{\sigma 1}, TF_m^{\sigma 1} \rangle + i \cdot \langle TF_m^{\sigma 1}, T\hat{F}_m^{\sigma 1} \rangle + 2 y_m^{\sigma,1} A_m^{\sigma 1} \right) \\ - (-1)^\sigma i (x_m - i \cdot y_m) B_m^{\sigma 1} - (-1)^\sigma (x_m + i \cdot y_m) \bar{B}_m^{\sigma 1} \\ + \beta_m^{\sigma 1} \cdot \left(+i \cdot \langle TF_m^{\sigma 1}, T\hat{F}_m^{(3-\sigma)2} \rangle + i \cdot (x_m^{(3-\sigma),2} - i \cdot y_m^{(3-\sigma),2}) \cdot B_m^{\sigma 1} - (-1)^\sigma i (x_m - i \cdot y_m) A_m^{\sigma 1} \right) \\ + \bar{\beta}_m^{\sigma 1} \cdot \left(-i \cdot \langle T\hat{F}_m^{(3-\sigma)2}, TF_m^{\sigma 1} \rangle - i \cdot (x_m^{(3-\sigma),2} + i \cdot y_m^{(3-\sigma),2}) \cdot \bar{B}_m^{\sigma 1} + (-1)^\sigma i (x_m + i \cdot y_m) A_m^{\sigma 1} \right) \end{pmatrix}$$

$$B_m^\sigma = \begin{pmatrix} \beta_m^{\sigma 1} \cdot \left(\langle T\hat{F}_m^{\sigma 1}, TF_m^{(3-\sigma),2} \rangle + (x_m^{\sigma 1} + i \cdot y_m^{\sigma 1}) B_m^{\sigma 1} - (-1)^\sigma (x_m + i \cdot y_m) A_m^{(3-\sigma),2} \right) \\ + \bar{\beta}_m^{\sigma 1} \cdot \left(\langle TF_m^{(3-\sigma),2}, T\hat{F}_m^{\sigma 1} \rangle + (x_m^{\sigma 1} - i \cdot y_m^{\sigma 1}) \cdot \bar{B}_m^{\sigma 1} - (-1)^\sigma (x_m - i \cdot y_m) A_m^{(3-\sigma),2} \right) \\ \alpha_m^{(3-\sigma),2} \cdot \left(\langle T\hat{F}_m^{(3-\sigma),2}, TF_m^{(3-\sigma),2} \rangle + \langle TF_m^{(3-\sigma),2}, T\hat{F}_m^{(3-\sigma),2} \rangle + 2 x_m^{(3-\sigma),2} A_m^{(3-\sigma),2} \right) \\ - (-1)^\sigma (x_m - i \cdot y_m) \bar{B}_m^{\sigma 1} - (-1)^\sigma (x_m + i \cdot y_m) B_m^{\sigma 1} \\ \beta_m^{\sigma 1} \cdot \left(i \langle T\hat{F}_m^{\sigma 1}, TF_m^{(3-\sigma),2} \rangle - i (x_m^{\sigma 1} + i \cdot y_m^{\sigma 1}) B_m^{\sigma 1} - (-1)^\sigma i (x_m + i \cdot y_m) A_m^{(3-\sigma),2} \right) \\ + \bar{\beta}_m^{\sigma 1} \cdot \left(i \langle TF_m^{(3-\sigma),2}, T\hat{F}_m^{\sigma 1} \rangle + i (x_m^{\sigma 1} - i \cdot y_m^{\sigma 1}) \cdot \bar{B}_m^{\sigma 1} - (-1)^\sigma i (x_m - i \cdot y_m) A_m^{(3-\sigma),2} \right) \\ \alpha_m^{(3-\sigma),2} \cdot \left(-i \langle T\hat{F}_m^{(3-\sigma),2}, TF_m^{(3-\sigma),2} \rangle + i \langle TF_m^{(3-\sigma),2}, T\hat{F}_m^{(3-\sigma),2} \rangle + 2 y_m^{(3-\sigma),2} A_m^{(3-\sigma),2} \right) \\ - (-1)^\sigma i (x_m - i \cdot y_m) \bar{B}_m^{\sigma 1} + (-1)^\sigma i (x_m + i \cdot y_m) B_m^{\sigma 1} \end{pmatrix}$$

$$C_m^\sigma = \begin{pmatrix} \alpha_m^{\sigma^1} \cdot \begin{pmatrix} -(-1)^\sigma < T\hat{F}_m^{\sigma^1} & , & TF_m^{(3-\sigma),2} > -(-1)^\sigma (x_m^{\sigma^1} + i \cdot y_m^{\sigma^1}) \cdot B_m^{\sigma^1} \\ -(-1)^\sigma < TF_m^{(3-\sigma),2} & , & T\hat{F}_m^{\sigma^1} > -(-1)^\sigma (x_m^{\sigma^1} - i \cdot y_m^{\sigma^1}) \cdot \bar{B}_m^{\sigma^1} + 2x_m A_m^{(3-\sigma),2} \end{pmatrix} \\ + \beta_m^{\sigma^1} \cdot \begin{pmatrix} -(-1)^\sigma < T\hat{F}_m^{\sigma^1} & , & TF_m^{\sigma^1} > -(-1)^\sigma (x_m^{\sigma^1} + i \cdot y_m^{\sigma^1}) \cdot A_m^{\sigma^1} \\ -(-1)^\sigma < TF_m^{(3-\sigma),2} & , & T\hat{F}_m^{(3-\sigma),2} > -(-1)^\sigma (x_m^{(3-\sigma),2} - i \cdot y_m^{(3-\sigma),2}) \cdot A_m^{(3-\sigma),2} + 2x_m \bar{B}_m^{\sigma^1} \end{pmatrix} \\ + \bar{\beta}_m^{\sigma^1} \cdot \begin{pmatrix} -(-1)^\sigma < T\hat{F}_m^{(3-\sigma),2} & , & TF_m^{(3-\sigma),2} > -(-1)^\sigma (x_m^{(3-\sigma),2} + i \cdot y_m^{(3-\sigma),2}) \cdot A_m^{(3-\sigma),2} \\ -(-1)^\sigma < T\hat{F}_m^{\sigma^1} & , & TF_m^{\sigma^1} > -(-1)^\sigma (x_m^{\sigma^1} + i \cdot y_m^{\sigma^1}) \cdot A_m^{\sigma^1} + 2x_m B_m^{\sigma^1} \end{pmatrix} \\ + \alpha_m^{(3-\sigma),2} \cdot \begin{pmatrix} -(-1)^\sigma < T\hat{F}_m^{(3-\sigma),2} & , & TF_m^{\sigma^1} > -(-1)^\sigma (x_m^{(3-\sigma),2} + i \cdot y_m^{(3-\sigma),2}) \cdot \bar{B}_m^{\sigma^1} \\ -(-1)^\sigma < T\hat{F}_m^{\sigma^1} & , & TF_m^{(3-\sigma),2} > -(-1)^\sigma (x_m^{(3-\sigma),2} - i \cdot y_m^{(3-\sigma),2}) B_m^{\sigma^1} + 2x_m A_m^{\sigma^1} \end{pmatrix} \\ \alpha_m^{\sigma^1} \cdot \begin{pmatrix} +i(-1)^\sigma < T\hat{F}_m^{\sigma^1} & , & TF_m^{(3-\sigma),2} > +i(-1)^\sigma (x_m^{\sigma^1} + i \cdot y_m^{\sigma^1}) \cdot B_m^{\sigma^1} \\ -i(-1)^\sigma < TF_m^{(3-\sigma),2} & , & T\hat{F}_m^{\sigma^1} > -i(-1)^\sigma (x_m^{\sigma^1} - i \cdot y_m^{\sigma^1}) \cdot \bar{B}_m^{\sigma^1} + 2y_m A_m^{(3-\sigma),2} \end{pmatrix} \\ + \beta_m^{\sigma^1} \cdot \begin{pmatrix} +i(-1)^\sigma < T\hat{F}_m^{\sigma^1} & , & TF_m^{\sigma^1} > +i(-1)^\sigma (x_m^{\sigma^1} + i \cdot y_m^{\sigma^1}) \cdot A_m^{\sigma^1} \\ -i(-1)^\sigma < TF_m^{(3-\sigma),2} & , & T\hat{F}_m^{(3-\sigma),2} > -i(-1)^\sigma (x_m^{(3-\sigma),2} - i \cdot y_m^{(3-\sigma),2}) \cdot A_m^{(3-\sigma),2} + 2y_m \bar{B}_m^{\sigma^1} \end{pmatrix} \\ + \bar{\beta}_m^{\sigma^1} \cdot \begin{pmatrix} +i(-1)^\sigma < T\hat{F}_m^{(3-\sigma),2} & , & TF_m^{(3-\sigma),2} > +i(-1)^\sigma (x_m^{(3-\sigma),2} + i \cdot y_m^{(3-\sigma),2}) \cdot A_m^{(3-\sigma),2} \\ -i(-1)^\sigma < TF_m^{\sigma^1} & , & T\hat{F}_m^{\sigma^1} > -i(-1)^\sigma (x_m^{\sigma^1} - i \cdot y_m^{\sigma^1}) \cdot A_m^{\sigma^1} + 2y_m B_m^{\sigma^1} \end{pmatrix} \\ + \alpha_m^{(3-\sigma),2} \cdot \begin{pmatrix} +i(-1)^\sigma < T\hat{F}_m^{(3-\sigma),2} & , & TF_m^{\sigma^1} > +i(-1)^\sigma (x_m^{(3-\sigma),2} + i \cdot y_m^{(3-\sigma),2}) \cdot \bar{B}_m^{\sigma^1} \\ -i(-1)^\sigma < TF_m^{\sigma^1} & , & T\hat{F}_m^{(3-\sigma),2} > -i(-1)^\sigma (x_m^{(3-\sigma),2} - i \cdot y_m^{(3-\sigma),2}) B_m^{\sigma^1} + 2y_m A_m^{\sigma^1} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Si on dérive une deuxième fois, et on calculant le déterminant de la hessienne, ainsi que ses déterminants principaux, on obtient :

$$\left| H \left[\int_{r_p=A} \|T_p G_1\|_{L_2(\partial D)}^2 \cdot dS_p \right] \right| = \begin{vmatrix} V_{m1}^\sigma & V_{m2}^\sigma & V_{m3}^\sigma & V_{m4}^\sigma & V_{m5}^\sigma & V_{m6}^\sigma \end{vmatrix}$$

où :

$$V_{m1}^\sigma = \begin{pmatrix} 2\alpha_m^{\sigma^1} A_m^{\sigma^1} \\ 0 \\ \begin{bmatrix} \beta_m^{\sigma^1} B_m^{\sigma^1} + \bar{\beta}_m^{\sigma^1} \bar{B}_m^{\sigma^1} \\ i \left[\bar{\beta}_m^{\sigma^1} \bar{B}_m^{\sigma^1} - \beta_m^{\sigma^1} B_m^{\sigma^1} \right] \end{bmatrix} \\ -(-1)^\sigma \begin{bmatrix} \alpha_m^{\sigma^1} B_m^{\sigma^1} + \alpha_m^{\sigma^1} \bar{B}_m^{\sigma^1} + \beta_m^{\sigma^1} A_m^{\sigma^1} + \bar{\beta}_m^{\sigma^1} A_m^{\sigma^1} \end{bmatrix} \\ i(-1)^\sigma \begin{bmatrix} \alpha_m^{\sigma^1} B_m^{\sigma^1} - \alpha_m^{\sigma^1} \bar{B}_m^{\sigma^1} + \beta_m^{\sigma^1} A_m^{\sigma^1} - \bar{\beta}_m^{\sigma^1} A_m^{\sigma^1} \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
V_{m2}^\sigma &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2\alpha_m^{\sigma^1} A_m^{\sigma^1} \\ i \begin{bmatrix} \beta_m^{\sigma^1} B_m^{\sigma^1} - \bar{\beta}_m^{\sigma^1} \bar{B}_m^{\sigma^1} \\ \bar{\beta}_m^{\sigma^1} \bar{B}_m^{\sigma^1} + \beta_m^{\sigma^1} B_m^{\sigma^1} \end{bmatrix} \\ -(-1)^\sigma i \begin{bmatrix} \alpha_m^{\sigma^1} B_m^{\sigma^1} - \alpha_m^{\sigma^1} \bar{B}_m^{\sigma^1} + \beta_m^{\sigma^1} A_m^{\sigma^1} - \bar{\beta}_m^{\sigma^1} A_m^{\sigma^1} \end{bmatrix} \\ -(-1)^\sigma \begin{bmatrix} \alpha_m^{\sigma^1} B_m^{\sigma^1} + \alpha_m^{\sigma^1} \bar{B}_m^{\sigma^1} + \beta_m^{\sigma^1} A_m^{\sigma^1} + \bar{\beta}_m^{\sigma^1} A_m^{\sigma^1} \end{bmatrix} \end{pmatrix} \\
V_{m3}^\sigma &= \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \beta_m^{\sigma^1} B_m^{\sigma^1} + \bar{\beta}_m^{\sigma^1} \bar{B}_m^{\sigma^1} \\ \beta_m^{\sigma^1} B_m^{\sigma^1} - \bar{\beta}_m^{\sigma^1} \bar{B}_m^{\sigma^1} \end{bmatrix} \\ 2\alpha_m^{(3-\sigma),2} A_m^{(3-\sigma),2} \\ 0 \\ (-1)^\sigma \begin{bmatrix} \alpha_m^{(3-\sigma),2} B_m^{\sigma^1} + \alpha_m^{(3-\sigma),2} \bar{B}_m^{\sigma^1} + \beta_m^{\sigma^1} A_m^{(3-\sigma),2} + \bar{\beta}_m^{\sigma^1} A_m^{(3-\sigma),2} \end{bmatrix} \\ -i(-1)^\sigma \begin{bmatrix} \alpha_m^{(3-\sigma),2} B_m^{\sigma^1} - \alpha_m^{(3-\sigma),2} \bar{B}_m^{\sigma^1} + \beta_m^{\sigma^1} A_m^{(3-\sigma),2} - \bar{\beta}_m^{\sigma^1} A_m^{(3-\sigma),2} \end{bmatrix} \end{pmatrix} \\
V_{m4}^\sigma &= \begin{pmatrix} i \begin{bmatrix} \bar{\beta}_m^{\sigma^1} \bar{B}_m^{\sigma^1} - \beta_m^{\sigma^1} B_m^{\sigma^1} \\ \beta_m^{\sigma^1} B_m^{\sigma^1} + \bar{\beta}_m^{\sigma^1} \bar{B}_m^{\sigma^1} \end{bmatrix} \\ 0 \\ 2\alpha_m^{(3-\sigma),2} A_m^{(3-\sigma),2} \\ (-1)^\sigma i \begin{bmatrix} \alpha_m^{(3-\sigma),2} B_m^{\sigma^1} - \alpha_m^{(3-\sigma),2} \bar{B}_m^{\sigma^1} + \beta_m^{\sigma^1} A_m^{(3-\sigma),2} - \bar{\beta}_m^{\sigma^1} A_m^{(3-\sigma),2} \end{bmatrix} \\ -(-1)^\sigma \begin{bmatrix} \alpha_m^{(3-\sigma),2} B_m^{\sigma^1} + \alpha_m^{(3-\sigma),2} \bar{B}_m^{\sigma^1} + \beta_m^{\sigma^1} A_m^{(3-\sigma),2} + \bar{\beta}_m^{\sigma^1} A_m^{(3-\sigma),2} \end{bmatrix} \end{pmatrix} \\
V_{m5}^\sigma &= \begin{pmatrix} -(-1)^\sigma \begin{bmatrix} \alpha_m^{\sigma^1} B_m^{\sigma^1} + \alpha_m^{\sigma^1} \bar{B}_m^{\sigma^1} + \beta_m^{\sigma^1} A_m^{\sigma^1} + \bar{\beta}_m^{\sigma^1} A_m^{\sigma^1} \\ -(-1)^\sigma i \begin{bmatrix} \alpha_m^{\sigma^1} B_m^{\sigma^1} - \alpha_m^{\sigma^1} \bar{B}_m^{\sigma^1} + \beta_m^{\sigma^1} A_m^{\sigma^1} - \bar{\beta}_m^{\sigma^1} A_m^{\sigma^1} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ (-1)^\sigma i \begin{bmatrix} \alpha_m^{(3-\sigma),2} B_m^{\sigma^1} + \alpha_m^{(3-\sigma),2} \bar{B}_m^{\sigma^1} + \beta_m^{\sigma^1} A_m^{(3-\sigma),2} + \bar{\beta}_m^{\sigma^1} A_m^{(3-\sigma),2} \\ (-1)^\sigma i \begin{bmatrix} \alpha_m^{(3-\sigma),2} B_m^{\sigma^1} - \alpha_m^{(3-\sigma),2} \bar{B}_m^{\sigma^1} + \beta_m^{\sigma^1} A_m^{(3-\sigma),2} - \bar{\beta}_m^{\sigma^1} A_m^{(3-\sigma),2} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ 2 \begin{bmatrix} \alpha_m^{\sigma^1} A_m^{(3-\sigma),2} + \beta_m^{\sigma^1} \bar{B}_m^{\sigma^1} + \bar{\beta}_m^{\sigma^1} B_m^{\sigma^1} + \alpha_m^{(3-\sigma),2} A_m^{\sigma^1} \end{bmatrix} \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$V_{m6}^\sigma = \begin{pmatrix} -(-1)^\sigma i \left[\alpha_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} - \alpha_m^{\sigma 1} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} - \overline{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} \right] \\ -(-1)^\sigma \left[\alpha_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} + \alpha_m^{\sigma 1} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} + \overline{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} \right] \\ -(-1)^\sigma i \left[\alpha_m^{(3-\sigma),2} B_m^{\sigma 1} - \alpha_m^{(3-\sigma),2} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} - \overline{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} \right] \\ -(-1)^\sigma \left[\alpha_m^{(3-\sigma),2} B_m^{\sigma 1} + \alpha_m^{(3-\sigma),2} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} + \overline{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} \right] \\ 0 \\ 2 \left[\alpha_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} + \beta_m^{\sigma 1} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \overline{\beta}_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} + \alpha_m^{(3-\sigma),2} A_m^{\sigma 1} \right] \end{pmatrix}$$

Après de longs calculs, on obtient ;

$$\left| H \left[\int_{r_p=A} \|T_p G_1\|_{L_2(\partial D)}^2 \cdot dS_p \right] \right| = \begin{vmatrix} V_{m1}^\sigma & V_{m2}^\sigma & V_{m3}^\sigma & V_{m4}^\sigma & V_{m5}^\sigma & V_{m6}^\sigma \end{vmatrix} \\ = (16 \cdot \alpha_m^{\sigma 1} \cdot A_m^{\sigma 1} \cdot \alpha_m^{(3-\sigma)2} \cdot A_m^{(3-\sigma)2}) \cdot [\Delta_m^{\sigma /}] + 16 \cdot (\text{Re}^4(\beta_m^{\sigma 1} \cdot B_m^{\sigma 1}) + \text{Im}^4(\beta_m^{\sigma 1} \cdot B_m^{\sigma 1}))$$

Le premier déterminant principal de la hessienne (2.3) est égale à :

$$\left| H_{11} \left[\int_{r_p=A} \|T_p G_1\|_{L_2(\partial D)}^2 \cdot dS_p \right] \right| = \begin{vmatrix} U_{m1}^\sigma & U_{m2}^\sigma & U_{m3}^\sigma & U_{m4}^\sigma & U_{m5}^\sigma & U_{m6}^\sigma \end{vmatrix} \\ = (8 \cdot \alpha_m^{(3-\sigma)2} \cdot A_m^{(3-\sigma)2}) \cdot [\Delta_m^{\sigma /}]$$

où

$$U_{m1}^\sigma = \begin{pmatrix} 2 \alpha_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} \\ i \left[\beta_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} - \overline{\beta}_m^{\sigma 1} \overline{B}_m^{\sigma 1} \right] \\ \left[\overline{\beta}_m^{\sigma 1} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} \right] \\ -(-1)^\sigma i \left[\alpha_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} - \alpha_m^{\sigma 1} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} - \overline{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} \right] \\ -(-1)^\sigma \left[\alpha_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} + \alpha_m^{\sigma 1} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} + \overline{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} \right] \end{pmatrix}$$

$$U_{m2}^\sigma = \begin{pmatrix} i \left[\beta_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} - \overline{\beta}_m^{\sigma 1} \overline{B}_m^{\sigma 1} \right] \\ 2 \alpha_m^{(3-\sigma),2} A_m^{(3-\sigma),2} \\ 0 \\ (-1)^\sigma \left[\alpha_m^{(3-\sigma),2} B_m^{\sigma 1} + \alpha_m^{(3-\sigma),2} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} + \overline{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} \right] \\ -i(-1)^\sigma \left[\alpha_m^{(3-\sigma),2} B_m^{\sigma 1} - \alpha_m^{(3-\sigma),2} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} - \overline{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} \right] \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
U_{m3}^\sigma &= \begin{pmatrix} \left[\beta_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} + \overline{\beta}_m^{\sigma 1} \overline{B}_m^{\sigma 1} \right] \\ 0 \\ 2\alpha_m^{(3-\sigma),2} A_m^{(3-\sigma),2} \\ (-1)^\sigma i \left[\alpha_m^{(3-\sigma),2} B_m^{\sigma 1} - \alpha_m^{(3-\sigma),2} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} - \overline{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} \right] \\ -(-1)^\sigma \left[\alpha_m^{(3-\sigma),2} B_m^{\sigma 1} + \alpha_m^{(3-\sigma),2} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} + \overline{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} \right] \end{pmatrix} \\
U_{m4}^\sigma &= \begin{pmatrix} -(-1)^\sigma i \left[\alpha_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} - \alpha_m^{\sigma 1} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} - \overline{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} \right] \\ -(-1)^\sigma \left[\alpha_m^{(3-\sigma),2} B_m^{\sigma 1} + \alpha_m^{(3-\sigma),2} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} + \overline{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} \right] \\ (-1)^\sigma i \left[\alpha_m^{(3-\sigma),2} B_m^{\sigma 1} - \alpha_m^{(3-\sigma),2} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} - \overline{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} \right] \\ 2 \left[\alpha_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} + \beta_m^{\sigma 1} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \overline{\beta}_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} + \alpha_m^{(3-\sigma),2} A_m^{\sigma 1} \right] \\ 0 \end{pmatrix} \\
U_{m5}^\sigma &= \begin{pmatrix} -(-1)^\sigma \left[\alpha_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} + \alpha_m^{\sigma 1} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} + \overline{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} \right] \\ -(-1)^\sigma \left[\alpha_m^{(3-\sigma),2} B_m^{\sigma 1} - \alpha_m^{(3-\sigma),2} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} - \overline{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} \right] \\ (-1)^\sigma i \left[\alpha_m^{(3-\sigma),2} B_m^{\sigma 1} + \alpha_m^{(3-\sigma),2} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} + \overline{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} \right] \\ 0 \\ 2 \left[\alpha_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} + \beta_m^{\sigma 1} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \overline{\beta}_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} + \alpha_m^{(3-\sigma),2} A_m^{\sigma 1} \right] \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Le deuxième déterminant principal de la hessienne (2.3) est égale à :

$$\begin{aligned}
\left| H_{22} \left[\int_{r_p=A} \|T_p G_1\|_{L_2(\partial D)}^2 \cdot dS_p \right] \right| &= \left| S_{m1}^\sigma \quad S_{m2}^\sigma \quad S_{m3}^\sigma \quad S_{m4}^\sigma \quad S_{m5}^\sigma \quad S_{m6}^\sigma \right| \\
&= (8 \cdot \alpha_m^{(3-\sigma)2} \cdot A_m^{(3-\sigma)2}) \cdot [\Delta_m^{\sigma/}]
\end{aligned}$$

où

$$S_{m1}^\sigma = \begin{pmatrix} 2\alpha_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} \\ \left[\beta_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} + \overline{\beta}_m^{\sigma 1} \overline{B}_m^{\sigma 1} \right] \\ i \left[\overline{\beta}_m^{\sigma 1} \overline{B}_m^{\sigma 1} - \beta_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} \right] \\ -(-1)^\sigma \left[\alpha_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} + \alpha_m^{\sigma 1} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} + \overline{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} \right] \\ i(-1)^\sigma \left[\alpha_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} - \alpha_m^{\sigma 1} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} - \overline{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} \right] \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
S_{m2}^\sigma &= \begin{pmatrix} \left[\beta_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} + \overline{\beta}_m^{\sigma 1} \overline{B}_m^{\sigma 1} \right] \\ 2\alpha_m^{(3-\sigma),2} A_m^{(3-\sigma),2} \\ 0 \\ (-1)^\sigma \left[\alpha_m^{(3-\sigma),2} B_m^{\sigma 1} + \alpha_m^{(3-\sigma),2} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} + \overline{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} \right] \\ -i(-1)^\sigma \left[\alpha_m^{(3-\sigma),2} B_m^{\sigma 1} - \alpha_m^{(3-\sigma),2} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} - \overline{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} \right] \end{pmatrix} \\
S_{m3}^\sigma &= \begin{pmatrix} i \left[\overline{\beta}_m^{\sigma 1} \overline{B}_m^{\sigma 1} - \beta_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} \right] \\ 0 \\ 2\alpha_m^{(3-\sigma),2} A_m^{(3-\sigma),2} \\ (-1)^\sigma i \left[\alpha_m^{(3-\sigma),2} B_m^{\sigma 1} - \alpha_m^{(3-\sigma),2} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} - \overline{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} \right] \\ -(-1)^\sigma \left[\alpha_m^{(3-\sigma),2} B_m^{\sigma 1} + \alpha_m^{(3-\sigma),2} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} + \overline{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} \right] \end{pmatrix} \\
S_{m4}^\sigma &= \begin{pmatrix} -(-1)^\sigma \left[\alpha_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} + \alpha_m^{\sigma 1} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} + \overline{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} \right] \\ -(-1)^\sigma \left[\alpha_m^{(3-\sigma),2} B_m^{\sigma 1} + \alpha_m^{(3-\sigma),2} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} + \overline{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} \right] \\ (-1)^\sigma i \left[\alpha_m^{(3-\sigma),2} B_m^{\sigma 1} - \alpha_m^{(3-\sigma),2} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} - \overline{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} \right] \\ 2 \left[\alpha_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} + \beta_m^{\sigma 1} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \overline{\beta}_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} + \alpha_m^{(3-\sigma),2} A_m^{\sigma 1} \right] \\ 0 \end{pmatrix} \\
S_{m5}^\sigma &= \begin{pmatrix} -(-1)^\sigma i \left[\alpha_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} - \alpha_m^{\sigma 1} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} - \overline{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} \right] \\ -(-1)^\sigma i \left[\alpha_m^{(3-\sigma),2} B_m^{\sigma 1} - \alpha_m^{(3-\sigma),2} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} - \overline{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} \right] \\ -(-1)^\sigma \left[\alpha_m^{(3-\sigma),2} B_m^{\sigma 1} + \alpha_m^{(3-\sigma),2} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} + \overline{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} \right] \\ 0 \\ 2 \left[\alpha_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} + \beta_m^{\sigma 1} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \overline{\beta}_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} + \alpha_m^{(3-\sigma),2} A_m^{\sigma 1} \right] \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Le troisième déterminant principal de la hessienne (2.3) est égale à :

$$\begin{aligned}
&\left| H_{33} \left[\int_{r_p=A} \left\| T_p G_1 \right\|_{L_2(\partial D)}^2 \cdot dS_p \right] \right| = \begin{vmatrix} T_{m1}^\sigma & T_{m2}^\sigma & T_{m3}^\sigma & T_{m4}^\sigma & T_{m5}^\sigma & T_{m6}^\sigma \end{vmatrix} \\
&= (8 \cdot \alpha_m^{\sigma 1} \cdot A_m^{\sigma 1}) \cdot [\Delta_m^{\sigma /}]
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
T_{m1}^\sigma &= \begin{pmatrix} 2\alpha_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} \\ 0 \\ i[\bar{\beta}_m^{\sigma 1} \bar{B}_m^{\sigma 1} - \beta_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1}] \\ -(-1)^\sigma [\alpha_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} + \alpha_m^{\sigma 1} \bar{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} + \bar{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1}] \\ i(-1)^\sigma [\alpha_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} - \alpha_m^{\sigma 1} \bar{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} - \bar{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1}] \end{pmatrix} \\
T_{m2}^\sigma &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2\alpha_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} \\ [\bar{\beta}_m^{\sigma 1} \bar{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1}] \\ -(-1)^\sigma i [\alpha_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} - \alpha_m^{\sigma 1} \bar{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} - \bar{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1}] \\ -(-1)^\sigma [\alpha_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} + \alpha_m^{\sigma 1} \bar{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} + \bar{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1}] \end{pmatrix} \\
T_{m3}^\sigma &= \begin{pmatrix} i[\bar{\beta}_m^{\sigma 1} \bar{B}_m^{\sigma 1} - \beta_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1}] \\ [\bar{\beta}_m^{\sigma 1} \bar{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1}] \\ 2\alpha_m^{(3-\sigma),2} A_m^{(3-\sigma),2} \\ (-1)^\sigma i [\alpha_m^{(3-\sigma),2} B_m^{\sigma 1} - \alpha_m^{(3-\sigma),2} \bar{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} - \bar{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2}] \\ -(-1)^\sigma [\alpha_m^{(3-\sigma),2} B_m^{\sigma 1} + \alpha_m^{(3-\sigma),2} \bar{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} + \bar{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2}] \end{pmatrix} \\
T_{m4}^\sigma &= \begin{pmatrix} -(-1)^\sigma [\alpha_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} + \alpha_m^{\sigma 1} \bar{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} + \bar{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1}] \\ -(-1)^\sigma i [\alpha_m^{(3-\sigma),2} B_m^{\sigma 1} - \alpha_m^{(3-\sigma),2} \bar{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} - \bar{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2}] \\ (-1)^\sigma i [\alpha_m^{(3-\sigma),2} B_m^{\sigma 1} - \alpha_m^{(3-\sigma),2} \bar{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} - \bar{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2}] \\ 2[\alpha_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} + \beta_m^{\sigma 1} \bar{B}_m^{\sigma 1} + \bar{\beta}_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} + \alpha_m^{(3-\sigma),2} A_m^{\sigma 1}] \\ 0 \end{pmatrix} \\
T_{m5}^\sigma &= \begin{pmatrix} (-1)^\sigma i [\alpha_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} - \alpha_m^{\sigma 1} \bar{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} - \bar{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1}] \\ -(-1)^\sigma [\alpha_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} + \alpha_m^{\sigma 1} \bar{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} + \bar{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1}] \\ -(-1)^\sigma [\alpha_m^{(3-\sigma),2} B_m^{\sigma 1} + \alpha_m^{(3-\sigma),2} \bar{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} + \bar{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2}] \\ 0 \\ 2[\alpha_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} + \beta_m^{\sigma 1} \bar{B}_m^{\sigma 1} + \bar{\beta}_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} + \alpha_m^{(3-\sigma),2} A_m^{\sigma 1}] \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Le quatrième déterminant principal de la hessienne (2.3) est égale à :

$$\left| H_{44} \left[\int_{r_p=A} \|T_p G_1\|_{L_2(\partial D)}^2 \cdot dS_p \right] \right| = |H_{m1}^\sigma \quad H_{m2}^\sigma \quad H_{m3}^\sigma \quad H_{m4}^\sigma \quad H_{m5}^\sigma \quad H_{m6}^\sigma|$$

$$= (8 \cdot \alpha_m^{\sigma 1} \cdot A_m^{\sigma 1}) \cdot [\Delta_m^{\sigma /}]$$

où

$$H_{m1}^\sigma = \begin{pmatrix} 2\alpha_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} \\ 0 \\ \left[\overline{\beta}_m^{\sigma 1} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} \right] \\ -(-1)^\sigma \left[\alpha_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} + \alpha_m^{\sigma 1} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} + \overline{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} \right] \\ i(-1)^\sigma \left[\alpha_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} - \alpha_m^{\sigma 1} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} - \overline{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} \right] \end{pmatrix}$$

$$H_{m2}^\sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\alpha_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} \\ i \left[\overline{\beta}_m^{\sigma 1} \overline{B}_m^{\sigma 1} - \beta_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} \right] \\ -(-1)^\sigma i \left[\alpha_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} - \alpha_m^{\sigma 1} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} - \overline{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} \right] \\ -(-1)^\sigma \left[\alpha_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} + \alpha_m^{\sigma 1} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} + \overline{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} \right] \end{pmatrix}$$

$$H_{m3}^\sigma = \begin{pmatrix} \left[\overline{\beta}_m^{\sigma 1} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} \right] \\ i \left[\overline{\beta}_m^{\sigma 1} \overline{B}_m^{\sigma 1} - \beta_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} \right] \\ 2\alpha_m^{(3-\sigma),2} A_m^{(3-\sigma),2} \\ -(-1)^\sigma \left[\alpha_m^{(3-\sigma),2} B_m^{\sigma 1} + \alpha_m^{(3-\sigma),2} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} + \overline{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} \right] \\ -i(-1)^\sigma \left[\alpha_m^{(3-\sigma),2} B_m^{\sigma 1} - \alpha_m^{(3-\sigma),2} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} - \overline{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} \right] \end{pmatrix}$$

$$H_{m4}^\sigma = \begin{pmatrix} -(-1)^\sigma \left[\alpha_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} + \alpha_m^{\sigma 1} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} + \overline{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} \right] \\ -(-1)^\sigma i \left[\alpha_m^{(3-\sigma),2} B_m^{\sigma 1} - \alpha_m^{(3-\sigma),2} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} - \overline{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} \right] \\ (-1)^\sigma i \left[\alpha_m^{(3-\sigma),2} B_m^{\sigma 1} + \alpha_m^{(3-\sigma),2} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} + \overline{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} \right] \\ 2 \left[\alpha_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} + \beta_m^{\sigma 1} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \overline{\beta}_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} + \alpha_m^{(3-\sigma),2} A_m^{\sigma 1} \right] \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$H_{m5}^{\sigma} = \begin{pmatrix} (-1)^{\sigma} i \left[\alpha_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} - \alpha_m^{\sigma 1} \bar{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} - \bar{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} \right] \\ -(-1)^{\sigma} \left[\alpha_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} + \alpha_m^{\sigma 1} \bar{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} + \bar{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} \right] \\ -(-1)^{\sigma} i \left[\alpha_m^{(3-\sigma),2} B_m^{\sigma 1} - \alpha_m^{(3-\sigma),2} \bar{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} - \bar{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} \right] \\ 0 \\ 2 \left[\alpha_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} + \beta_m^{\sigma 1} \bar{B}_m^{\sigma 1} + \bar{\beta}_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} + \alpha_m^{(3-\sigma),2} A_m^{\sigma 1} \right] \end{pmatrix}$$

Le cinquième déterminant principal de la hessienne (2.3) est égale à :

$$\left| H_{55} \left[\int_{r_p=A} \|T_p G_1\|_{L_2(\partial D)}^2 \cdot dS_p \right] \right| = \begin{vmatrix} R_{m1}^{\sigma} & R_{m2}^{\sigma} & R_{m3}^{\sigma} & R_{m4}^{\sigma} & R_{m5}^{\sigma} & R_{m6}^{\sigma} \end{vmatrix} \\ = (8 \cdot \alpha_m^{(3-\sigma)2} \cdot A_m^{(3-\sigma)2}) \cdot [\Delta_m^{\sigma/}]$$

où

$$R_{m1}^{\sigma} = \begin{pmatrix} 2\alpha_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} \\ 0 \\ \begin{bmatrix} \bar{\beta}_m^{\sigma 1} \bar{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} \\ i \left[\bar{\beta}_m^{\sigma 1} \bar{B}_m^{\sigma 1} - \beta_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} \right] \end{bmatrix} \\ i(-1)^{\sigma} \left[\alpha_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} - \alpha_m^{\sigma 1} \bar{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} - \bar{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} \right] \end{pmatrix}$$

$$R_{m2}^{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\alpha_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} \\ i \begin{bmatrix} \beta_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} - \bar{\beta}_m^{\sigma 1} \bar{B}_m^{\sigma 1} \\ \beta_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} + \bar{\beta}_m^{\sigma 1} \bar{B}_m^{\sigma 1} \end{bmatrix} \\ -(-1)^{\sigma} \left[\alpha_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} + \alpha_m^{\sigma 1} \bar{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} + \bar{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} \right] \end{pmatrix}$$

$$R_{m3}^{\sigma} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\beta}_m^{\sigma 1} \bar{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} \\ i \left[\bar{\beta}_m^{\sigma 1} \bar{B}_m^{\sigma 1} - \beta_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} \right] \end{bmatrix} \\ 2\alpha_m^{(3-\sigma),2} A_m^{(3-\sigma),2} \\ 0 \\ -i(-1)^{\sigma} \left[\alpha_m^{(3-\sigma),2} B_m^{\sigma 1} - \alpha_m^{(3-\sigma),2} \bar{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} - \bar{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} \right] \end{pmatrix}$$

$$R_{m4}^\sigma = \begin{pmatrix} i \begin{bmatrix} \overline{\beta}_m^{\sigma 1} \overline{B}_m^{\sigma 1} - \beta_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} \\ \overline{\beta}_m^{\sigma 1} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} \end{bmatrix} \\ 0 \\ 2\alpha_m^{(3-\sigma),2} A_m^{(3-\sigma),2} \\ (-1)^\sigma i \left[\alpha_m^{(3-\sigma),2} B_m^{\sigma 1} + \alpha_m^{(3-\sigma),2} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} + \overline{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} \right] \end{pmatrix}$$

$$R_{m5}^\sigma = \begin{pmatrix} (-1)^\sigma i \left[\alpha_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} - \alpha_m^{\sigma 1} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} - \overline{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} \right] \\ -(-1)^\sigma \left[\alpha_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} + \alpha_m^{\sigma 1} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} + \overline{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} \right] \\ -(-1)^\sigma i \left[\alpha_m^{(3-\sigma),2} B_m^{\sigma 1} - \alpha_m^{(3-\sigma),2} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} - \overline{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} \right] \\ -(-1)^\sigma i \left[\alpha_m^{(3-\sigma),2} B_m^{\sigma 1} + \alpha_m^{(3-\sigma),2} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} + \overline{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} \right] \\ 2 \left[\alpha_m^{\sigma 1} A_m^{(3-\sigma),2} + \beta_m^{\sigma 1} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \overline{\beta}_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} + \alpha_m^{(3-\sigma),2} A_m^{\sigma 1} \right] \end{pmatrix}$$

Le sixième déterminant principal de la hessienne (2.3) est égale à :

$$\left| H_{66} \left[\int_{r_p=A} \|T_p G_1\|_{L_2(\partial D)}^2 \cdot dS_p \right] \right| = \begin{vmatrix} W_{m1}^\sigma & W_{m2}^\sigma & W_{m3}^\sigma & W_{m4}^\sigma & W_{m5}^\sigma & W_{m6}^\sigma \end{vmatrix}$$

$$= (8 \cdot \alpha_m^{\sigma 1} \cdot A_m^{\sigma 1}) \cdot [\Delta_m^{\sigma /}]$$

où

$$W_{m1}^\sigma = \begin{pmatrix} 2\alpha_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} \\ 0 \\ i \begin{bmatrix} \overline{\beta}_m^{\sigma 1} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} \\ \overline{\beta}_m^{\sigma 1} \overline{B}_m^{\sigma 1} - \beta_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} \end{bmatrix} \\ i(-1)^\sigma \left[\alpha_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} + \alpha_m^{\sigma 1} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} + \overline{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} \right] \end{pmatrix}$$

$$W_{m2}^\sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\alpha_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} \\ i \begin{bmatrix} \beta_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} - \overline{\beta}_m^{\sigma 1} \overline{B}_m^{\sigma 1} \\ \beta_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} + \overline{\beta}_m^{\sigma 1} \overline{B}_m^{\sigma 1} \end{bmatrix} \\ -(-1)^\sigma \left[\alpha_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} - \alpha_m^{\sigma 1} \overline{B}_m^{\sigma 1} + \beta_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} - \overline{\beta}_m^{\sigma 1} A_m^{\sigma 1} \right] \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
W_{m3}^\sigma &= \begin{pmatrix} \left[\begin{array}{c} \overline{\beta}_m^{\sigma^1} \overline{B}_m^{\sigma^1} + \beta_m^{\sigma^1} B_m^{\sigma^1} \\ i \left[\beta_m^{\sigma^1} B_m^{\sigma^1} - \overline{\beta}_m^{\sigma^1} \overline{B}_m^{\sigma^1} \right] \\ 2 \alpha_m^{(3-\sigma),2} A_m^{(3-\sigma),2} \\ 0 \end{array} \right] \\ -(-1)^\sigma \left[\alpha_m^{(3-\sigma),2} B_m^{\sigma^1} + \alpha_m^{(3-\sigma),2} \overline{B}_m^{\sigma^1} + \beta_m^{\sigma^1} A_m^{(3-\sigma),2} + \overline{\beta}_m^{\sigma^1} A_m^{(3-\sigma),2} \right] \end{pmatrix} \\
W_{m4}^\sigma &= \begin{pmatrix} \left[\begin{array}{c} i \left[\overline{\beta}_m^{\sigma^1} \overline{B}_m^{\sigma^1} - \beta_m^{\sigma^1} B_m^{\sigma^1} \right] \\ \left[\overline{\beta}_m^{\sigma^1} \overline{B}_m^{\sigma^1} + \beta_m^{\sigma^1} B_m^{\sigma^1} \right] \\ 0 \\ 2 \alpha_m^{(3-\sigma),2} A_m^{(3-\sigma),2} \end{array} \right] \\ (-1)^\sigma i \left[\alpha_m^{(3-\sigma),2} B_m^{\sigma^1} - \alpha_m^{(3-\sigma),2} \overline{B}_m^{\sigma^1} + \beta_m^{\sigma^1} A_m^{(3-\sigma),2} - \overline{\beta}_m^{\sigma^1} A_m^{(3-\sigma),2} \right] \end{pmatrix} \\
W_{m5}^\sigma &= \begin{pmatrix} \left[\begin{array}{c} (-1)^\sigma \left[\alpha_m^{\sigma^1} B_m^{\sigma^1} + \alpha_m^{\sigma^1} \overline{B}_m^{\sigma^1} + \beta_m^{\sigma^1} A_m^{\sigma^1} + \overline{\beta}_m^{\sigma^1} A_m^{\sigma^1} \right] \\ -(-1)^\sigma i \left[\alpha_m^{\sigma^1} B_m^{\sigma^1} - \alpha_m^{\sigma^1} \overline{B}_m^{\sigma^1} + \beta_m^{\sigma^1} A_m^{\sigma^1} - \overline{\beta}_m^{\sigma^1} A_m^{\sigma^1} \right] \\ -(-1)^\sigma \left[\alpha_m^{(3-\sigma),2} B_m^{\sigma^1} + \alpha_m^{(3-\sigma),2} \overline{B}_m^{\sigma^1} + \beta_m^{\sigma^1} A_m^{(3-\sigma),2} + \overline{\beta}_m^{\sigma^1} A_m^{(3-\sigma),2} \right] \\ -(-1)^\sigma i \left[\alpha_m^{(3-\sigma),2} B_m^{\sigma^1} - \alpha_m^{(3-\sigma),2} \overline{B}_m^{\sigma^1} + \beta_m^{\sigma^1} A_m^{(3-\sigma),2} - \overline{\beta}_m^{\sigma^1} A_m^{(3-\sigma),2} \right] \\ 2 \left[\alpha_m^{\sigma^1} A_m^{(3-\sigma),2} + \beta_m^{\sigma^1} \overline{B}_m^{\sigma^1} + \overline{\beta}_m^{\sigma^1} B_m^{\sigma^1} + \alpha_m^{(3-\sigma),2} A_m^{\sigma^1} \right] \end{array} \right] \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On remarque facilement, que le déterminant de la hessienne de (2.3), ainsi que ses déterminants principaux sont strictement positifs. Donc le choix optimal des coefficients des multipôles simples et croisés tel que définit dans (2.15) vérifie réellement le minimum de la quantité (2.3). Ce qui termine la démonstration du théorème 03.

Il est à remarquer que pour les choix optimaux des coefficients des multipôles simples et croisés trouvés dans les théorèmes 02 et 03, il est très difficile de vérifier la condition large (1.24). Néanmoins, cette condition n'est pas nécessaire mais seulement suffisante [7]. De plus, bien que nous ayant su minimiser la norme de la traction de la fonction de Green modifiée $\|T_p G_1\|_{L_2(\partial D)}$, nous n'avons pas une estimation de la valeur de ce minimum. Dans le prochain chapitre, nous allons appliquer les résultats des théorèmes 02 et 03 au cas d'une frontière ∂D ayant la forme d'un cercle. Nous

montrerons en particulier que la traction de la fonction de Green modifiée est égale à la traction de la fonction de Green exacte pour le cas du problème de Dirichlet.

CHAPITRE 3

CAS DU CERCLE

Dans ce chapitre nous allons appliquer les résultats du chapitre précédent au cas d'une frontière circulaire de rayon a .

I- Coefficients des multipôles simples :

Théorème 04 :

Si la frontière ∂D est un cercle de rayon a , alors le choix optimal des coefficients des multipôles simples, est donné par :

$$a_m^{11} = \frac{[\bar{c}_m]^p \cdot (c_m \hat{c}_m + a_m^2 \hat{a}_m^2) - [a_m^2]^p \cdot (\bar{c}_m \hat{d}_m + a_m^1 \hat{a}_m^1)}{\Delta_m^1} \quad (3.1)$$

$$a_m^{12} = \frac{[c_m]^p \cdot (\bar{c}_m \hat{d}_m + a_m^1 \hat{a}_m^1) - [a_m^1]^p \cdot (c_m \hat{c}_m + a_m^2 \hat{a}_m^2)}{\Delta_m^1} \quad (3.2)$$

$$a_m^{21} = \frac{[\bar{c}_m]^p \cdot (c_m \hat{c}_m + a_m^2 \hat{a}_m^2) - [a_m^2]^p \cdot (\bar{c}_m \hat{d}_m + a_m^1 \hat{a}_m^1)}{\Delta_m^2} \quad (3.3)$$

$$a_m^{22} = \frac{[c_m]^p \cdot (\bar{c}_m \hat{d}_m + a_m^1 \hat{a}_m^1) - [a_m^1]^p \cdot (c_m \hat{c}_m + a_m^2 \hat{a}_m^2)}{\Delta_m^2} \quad (3.4)$$

où les expressions des différents coefficients qui apparaissent dans les coefficients des multipôles simples $a_m^{\sigma l}$, sont données dans l'annexe 1.

Démonstration :

Pour calculer les coefficients des multipôles simples $a_m^{\sigma l}$, il faudrait tout d'abord calculer les valeurs des $g_m^{\sigma l}$.

Nous avons :

$$g_m^{\sigma l} = -\langle \bar{\beta}_m^{\sigma l} \cdot \hat{TF}_m^{(3-\sigma)(3-l)} + \alpha_m^{\sigma l} \cdot \hat{TF}_m^{\sigma l}, TF_m^{\sigma l} \rangle_{\partial D}$$

où :

$$\alpha_m^{\sigma l} = \|TF_m^{\sigma l}\|_A^2, \quad \beta_m^{\sigma l} = \langle TF_m^{\sigma l}, TF_m^{(3-\sigma)(3-l)} \rangle_A$$

mais comme notre frontière est un cercle de rayon a , alors on a :

$$\|\cdot\|_{\partial D} = \|\cdot\|_A = \|\cdot\|_a \quad \text{et} \quad \langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial D} = \langle \cdot, \cdot \rangle_A = \langle \cdot, \cdot \rangle_a$$

donc nous aurons :

$$\begin{aligned} g_m^{\sigma l} &= -\bar{\beta}_m^{\sigma l} \cdot \langle \hat{TF}_m^{(3-\sigma)(3-l)}, TF_m^{\sigma l} \rangle_a - \alpha_m^{\sigma l} \cdot \langle \hat{TF}_m^{\sigma l}, TF_m^{\sigma l} \rangle_a \\ &= -\langle TF_m^{(3-\sigma)(3-l)}, TF_m^{\sigma l} \rangle_a \cdot \langle \hat{TF}_m^{(3-\sigma)(3-l)}, TF_m^{\sigma l} \rangle_a - \|TF_m^{\sigma l}\|_a^2 \cdot \langle \hat{TF}_m^{\sigma l}, TF_m^{\sigma l} \rangle_a \end{aligned}$$

d'où :

$$g_m^{\sigma 1} = -\left(I_{mm}^{(3-\sigma)\sigma}, 21\right) \cdot \left(\hat{I}_{mm}^{(3-\sigma)\sigma}, 21\right) - \left(I_{mm}^{\sigma\sigma}, 11\right) \cdot \left(\hat{I}_{mm}^{\sigma\sigma}, 11\right) \quad (3.5)$$

et

$$g_m^{(3-\sigma)2} = -\left(I_{mm}^{\sigma(3-\sigma)}, 12\right) \cdot \left(\hat{I}_{mm}^{\sigma(3-\sigma)}, 12\right) - \left(I_{mm}^{(3-\sigma)(3-\sigma)}, 22\right) \cdot \left(\hat{I}_{mm}^{(3-\sigma)(3-\sigma)}, 22\right) \quad (3.6)$$

où les expressions des $I_{mm}^{(3-\sigma)\sigma}, 21$, $I_{mm}^{\sigma\sigma}, 11$, $\hat{I}_{mm}^{\sigma\sigma}, 11$,

$I_{mm}^{\sigma(3-\sigma)}, 12$, $I_{mm}^{(3-\sigma)(3-\sigma)}, 22$, $\hat{I}_{mm}^{(3-\sigma)(3-\sigma)}, 22$, $\hat{I}_{mm}^{(3-\sigma)\sigma}, 21$

et $\hat{I}_{mm}^{\sigma(3-\sigma)}, 12$ sont données dans l'annexe 1.

D'autre part, les expressions des coefficients des multipôles simples $a_m^{\sigma l}$ sont données par (2.4), comme suit :

$$a_m^{\sigma l} = \frac{\left[\alpha_m^{(3-\sigma)(3-l)} \cdot A_m^{(3-\sigma)(3-l)}\right] \cdot [g_m^{\sigma l}] - \left[\bar{\beta}_m^{\sigma l} \cdot \bar{B}_m^{\sigma l}\right] \cdot [g_m^{(3-\sigma)(3-l)}]}{\Delta_m^{\sigma}}$$

mais comme notre frontière est un cercle de rayon a , alors :

$$\begin{aligned} a_m^{\sigma l} &= \frac{\left[\alpha_m^{(3-\sigma)(3-l)} \cdot \alpha_m^{(3-\sigma)(3-l)}\right] \cdot [g_m^{\sigma l}] - \left[\bar{\beta}_m^{\sigma l} \cdot \bar{\beta}_m^{\sigma l}\right] \cdot [g_m^{(3-\sigma)(3-l)}]}{\Delta_m^{\sigma}} \\ &= \frac{\left[\alpha_m^{(3-\sigma)(3-l)}\right]^2 \cdot [g_m^{\sigma l}] - \left[\bar{\beta}_m^{\sigma l}\right]^2 \cdot [g_m^{(3-\sigma)(3-l)}]}{\Delta_m^{\sigma}} \end{aligned}$$

En utilisant les expressions des $g_m^{\sigma 1}$ et $g_m^{(3-\sigma)^2}$ données par (3.5) et (3.6), on obtient :

$$a_m^{\sigma l} = \frac{\left(I_{mm}^{(3-\sigma)(3-\sigma)(3-l)(3-l)}\right)^2 \cdot \left[I_{mm}^{(3-\sigma)\sigma(3-l)l} \hat{I}_{mm}^{(3-\sigma)\sigma(3-l)l} - I_{mm}^{\sigma\sigma ll} \hat{I}_{mm}^{\sigma\sigma ll}\right] - \left(I_{mm}^{(3-\sigma)\sigma(3-l)l}\right)^2 \cdot \left[I_{mm}^{\sigma(3-\sigma)l(3-l)} \hat{I}_{mm}^{\sigma(3-\sigma)l(3-l)} - I_{mm}^{(3-\sigma)(3-\sigma)(3-l)(3-l)} \hat{I}_{mm}^{(3-\sigma)(3-\sigma)(3-l)(3-l)}\right]}{\Delta_m^\sigma}$$

En utilisant les calculs établis dans l'annexe 1, les expressions des coefficients des multipôles simples $a_m^{\sigma l}$, s'écrivent alors dans le cas d'un cercle, sous la forme :

- pour $\sigma = 1$ et $l = 1$, on a :

$$a_m^{11} = \frac{\left(I_{mm}^{22 22}\right)^2 \cdot \left[I_{mm}^{2121} \hat{I}_{mm}^{2121} - I_{mm}^{1111} \hat{I}_{mm}^{1111}\right] - \left(I_{mm}^{2121}\right)^2 \cdot \left[I_{mm}^{1212} \hat{I}_{mm}^{1212} - I_{mm}^{22 22} \hat{I}_{mm}^{22 22}\right]}{\Delta_m^1} \\ = \frac{\left[\bar{c}_m\right]^2 \cdot \left(c_m \hat{c}_m + a_m^2 \hat{a}_m^2\right) - \left[a_m^2\right]^2 \cdot \left(\bar{c}_m \hat{d}_m + a_m^1 \hat{a}_m^1\right)}{\Delta_m^1}$$

- pour $\sigma = 1$ et $l = 2$, on a :

$$a_m^{12} = \frac{\left(I_{mm}^{22 11}\right)^2 \cdot \left[I_{mm}^{2112} \hat{I}_{mm}^{2112} - I_{mm}^{1122} \hat{I}_{mm}^{1122}\right] - \left(I_{mm}^{2112}\right)^2 \cdot \left[I_{mm}^{1221} \hat{I}_{mm}^{1221} - I_{mm}^{2211} \hat{I}_{mm}^{2211}\right]}{\Delta_m^1} \\ = \frac{\left[c_m\right]^2 \cdot \left(\bar{c}_m \hat{d}_m + a_m^1 \hat{a}_m^1\right) - \left[a_m^1\right]^2 \cdot \left(c_m \hat{c}_m + a_m^2 \hat{a}_m^2\right)}{\Delta_m^1}$$

- pour $\sigma = 2$ et $l = 1$, on a :

$$a_m^{21} = \frac{\left(I_{mm}^{11 22}\right)^2 \cdot \left[I_{mm}^{1221} \hat{I}_{mm}^{1221} - I_{mm}^{2211} \hat{I}_{mm}^{2211}\right] - \left(I_{mm}^{1221}\right)^2 \cdot \left[I_{mm}^{2112} \hat{I}_{mm}^{2112} - I_{mm}^{1122} \hat{I}_{mm}^{1122}\right]}{\Delta_m^2} \\ = \frac{\left[\bar{c}_m\right]^2 \cdot \left(c_m \hat{c}_m + a_m^2 \hat{a}_m^2\right) - \left[a_m^2\right]^2 \cdot \left(\bar{c}_m \hat{d}_m + a_m^1 \hat{a}_m^1\right)}{\Delta_m^1}$$

- pour $\sigma = 2$ et $l = 2$, on a :

$$a_m^{22} = \frac{\left(I_{mm}^{11 11}\right)^2 \cdot \left[I_{mm}^{1212} \hat{I}_{mm}^{1212} - I_{mm}^{2222} \hat{I}_{mm}^{2222}\right] - \left(I_{mm}^{1212}\right)^2 \cdot \left[I_{mm}^{2121} \hat{I}_{mm}^{2121} - I_{mm}^{1111} \hat{I}_{mm}^{1111}\right]}{\Delta_m^2} \\ = \frac{\left[c_m\right]^2 \cdot \left(\bar{c}_m \hat{d}_m + a_m^1 \hat{a}_m^1\right) - \left[a_m^1\right]^2 \cdot \left(c_m \hat{c}_m + a_m^2 \hat{a}_m^2\right)}{\Delta_m^1}$$

Ce qui termine la démonstration du théorème 04.

On remarque ici, que nous avons :

$$a_m^{11} = a_m^{21} \text{ et } a_m^{12} = a_m^{22}$$

II- Coefficients des multipôles simples et croisés :

Théorème 05 :

Si la frontière ∂D est un cercle de rayon a , alors le choix optimal des coefficients des multipôles simples et croisés, est donné par :

$$a_m^{11} = \frac{\bar{c}_m \hat{c}_m - \hat{a}_m^1 a_m^2}{\Delta_m^1} \quad (3.7)$$

$$a_m^{12} = \frac{c_m \hat{d}_m - a_m^1 \hat{a}_m^2}{\Delta_m^1} \quad (3.8)$$

$$a_m^{21} = \frac{\bar{c}_m \hat{c}_m - \hat{a}_m^1 a_m^2}{\Delta_m^2} \quad (3.9)$$

$$a_m^{22} = \frac{c_m \hat{d}_m - a_m^1 \hat{a}_m^2}{\Delta_m^2} \quad (3.10)$$

$$b_m = \frac{a_m^1 \hat{c}_m - c_m \hat{a}_m^1}{\Delta_m^2} \quad (3.11-a)$$

$$= \frac{a_m^2 \hat{d}_m - \bar{c}_m \hat{a}_m^2}{\Delta_m^1} \quad (3.11-b)$$

où les expressions des différents coefficients qui apparaissent dans les coefficients des multipôles simples et croisés $a_m^{\sigma l}$ et b_m , sont données dans l'annexe 1.

Démonstration :

Pour calculer les coefficients des multipôles simples et croisés $a_m^{\sigma l}$ et b_m , il faudrait tout d'abord calculer les valeurs des $g_m^{\sigma l}$ et $h_m^{\sigma l}$.

Comme nous avons déjà calculer les expressions de $g_m^{\sigma 1}$ et $g_m^{(3-\sigma)2}$, qui sont données par (3.5) et (3.6), calculons maintenant les expressions de $h_m^{\sigma 1}$ et $h_m^{(3-\sigma)2}$.

Puisque notre frontière est un cercle de rayon a , alors on a :

$$\begin{aligned} h_m^{\sigma l} &= -\langle \bar{\beta}_m^{\sigma l} \cdot \hat{T}F_m^{(3-\sigma)(3-l)} + \alpha_m^{\sigma l} \cdot \hat{T}F_m^{\sigma l}, T F_m^{(3-\sigma)(3-l)} \rangle \\ &= -\bar{\beta}_m^{\sigma l} \langle \hat{T}F_m^{(3-\sigma)(3-l)}, T F_m^{(3-\sigma)(3-l)} \rangle - \alpha_m^{\sigma l} \langle \hat{T}F_m^{\sigma l}, T F_m^{(3-\sigma)(3-l)} \rangle \\ &= -\langle T F_m^{(3-\sigma)(3-l)}, T F_m^{\sigma l} \rangle \langle \hat{T}F_m^{(3-\sigma)(3-l)}, T F_m^{(3-\sigma)(3-l)} \rangle - \|T F_m^{\sigma l}\|^2 \langle \hat{T}F_m^{\sigma l}, T F_m^{(3-\sigma)(3-l)} \rangle \end{aligned}$$

D'où :

$$h_m^{\sigma l} = -\left(I_{mm}^{(3-\sigma)\sigma(3-l)l} \cdot \hat{I}_{mm}^{(3-\sigma)(3-l)(3-l)}\right) - \left(I_{mm}^{\sigma\sigma ll} \cdot \hat{I}_{mm}^{\sigma(3-\sigma)l(3-l)}\right)$$

Nous avons donc :

$$h_m^{\sigma 1} = -\left(I_{mm}^{(3-\sigma)\sigma 21} \cdot \hat{I}_{mm}^{(3-\sigma)(3-\sigma)22}\right) - \left(I_{mm}^{\sigma\sigma 11} \cdot \hat{I}_{mm}^{\sigma(3-\sigma)12}\right) \quad (3.12)$$

$$h_m^{(3-\sigma)2} = -\left(I_{mm}^{\sigma(3-\sigma)12} \cdot \hat{I}_{mm}^{\sigma\sigma 11}\right) - \left(I_{mm}^{(3-\sigma)(3-\sigma)22} \cdot \hat{I}_{mm}^{(3-\sigma)\sigma 21}\right) \quad (3.13)$$

Pour le cas du cercle, on peut montrer aussi que :

$$\begin{aligned} \Delta_m^{\sigma l} &= \left[\left(\alpha_m^{\sigma 1} \cdot A_m^{(3-\sigma)2} + \alpha_m^{(3-\sigma)2} \cdot A_m^{\sigma 1} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\beta_m^{\sigma 1} \cdot \bar{B}_m^{\sigma 1} + \bar{\beta}_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} \right) \right] \cdot \left(A_m^{\sigma 1} \cdot A_m^{(3-\sigma)2} - |B_m^{\sigma 1}|^2 \right) \cdot \left(\alpha_m^{\sigma 1} \cdot \alpha_m^{(3-\sigma)2} - |\beta_m^{\sigma 1}|^2 \right) \\ &= \left[\left(A_m^{\sigma 1} \cdot A_m^{(3-\sigma)2} + A_m^{(3-\sigma)2} \cdot A_m^{\sigma 1} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(B_m^{\sigma 1} \cdot \bar{B}_m^{\sigma 1} + \bar{B}_m^{\sigma 1} B_m^{\sigma 1} \right) \right] \cdot \left(A_m^{\sigma 1} \cdot A_m^{(3-\sigma)2} - |B_m^{\sigma 1}|^2 \right) \cdot \left(A_m^{\sigma 1} \cdot A_m^{(3-\sigma)2} - |B_m^{\sigma 1}|^2 \right) \\ &= 2 \left(A_m^{\sigma 1} \cdot A_m^{(3-\sigma)2} - |B_m^{\sigma 1}|^2 \right) \cdot \left(A_m^{\sigma 1} \cdot A_m^{(3-\sigma)2} - |B_m^{\sigma 1}|^2 \right) \cdot \left(A_m^{\sigma 1} \cdot A_m^{(3-\sigma)2} - |B_m^{\sigma 1}|^2 \right) \\ &= 2 \Delta_{ma}^{\sigma} \cdot \Delta_{ma}^{\sigma} \cdot \Delta_{ma}^{\sigma} = 2 \left(\Delta_{ma}^{\sigma} \right)^3 \quad (3.14) \end{aligned}$$

D'autre part, et en utilisant (2.12), (3.5), (3.6), (3.12) et (3.13), ainsi que les calculs établis dans l'annexe 1, on obtient :

$$a_m^{\sigma 1} = \Delta_{m a}^{\sigma} \cdot \frac{2 \left(I_{mm}^{(3-\sigma) \sigma 21} \right) \cdot \left[\begin{array}{l} -I_{mm}^{(3-\sigma) \sigma 21} I_{mm}^{\sigma(3-\sigma) 12} \hat{I}_{mm}^{\sigma(3-\sigma) 12} - I_{mm}^{(3-\sigma) \sigma 21} I_{mm}^{(3-\sigma)(3-\sigma) 22} \hat{I}_{mm}^{(3-\sigma)(3-\sigma) 22} \\ -I_{mm}^{(3-\sigma)(3-\sigma) 22} I_{mm}^{(3-\sigma) \sigma 21} \hat{I}_{mm}^{(3-\sigma)(3-\sigma) 22} - I_{mm}^{(3-\sigma)(3-\sigma) 22} I_{mm}^{\sigma \sigma 11} \hat{I}_{mm}^{\sigma(3-\sigma) 12} \end{array} \right] + 2 \left(I_{mm}^{(3-\sigma)(3-\sigma) 22} \right) \cdot \left[\begin{array}{l} -I_{mm}^{(3-\sigma)(3-\sigma) 22} I_{mm}^{(3-\sigma) \sigma 21} \hat{I}_{mm}^{(3-\sigma) \sigma 21} - I_{mm}^{(3-\sigma)(3-\sigma) 22} I_{mm}^{\sigma \sigma 11} \hat{I}_{mm}^{\sigma \sigma 11} \\ -I_{mm}^{(3-\sigma) \sigma 21} I_{mm}^{\sigma(3-\sigma) 12} \hat{I}_{mm}^{\sigma \sigma 11} - I_{mm}^{(3-\sigma) \sigma 21} I_{mm}^{(3-\sigma)(3-\sigma) 22} \hat{I}_{mm}^{(3-\sigma) \sigma 21} \end{array} \right]}{\Delta_m^{\sigma /}}$$

- pour $\sigma = 1$, on a :

$$a_m^{11} = \Delta_{m a}^1 \cdot \frac{2 \left(I_{mm}^{21 21} \right) \cdot \left[\begin{array}{l} -I_{mm}^{21 21} I_{mm}^{1212} \hat{I}_{mm}^{1212} - I_{mm}^{21 21} I_{mm}^{22 22} \hat{I}_{mm}^{22 22} - I_{mm}^{22 22} I_{mm}^{21 21} \hat{I}_{mm}^{22 22} - I_{mm}^{22 22} I_{mm}^{1111} \hat{I}_{mm}^{1212} \\ -I_{mm}^{22 22} I_{mm}^{21 21} \hat{I}_{mm}^{21 21} - I_{mm}^{22 22} I_{mm}^{1111} \hat{I}_{mm}^{1111} - I_{mm}^{21 21} I_{mm}^{1212} \hat{I}_{mm}^{1111} - I_{mm}^{21 21} I_{mm}^{22 22} \hat{I}_{mm}^{21 21} \end{array} \right] + 2 \left(I_{mm}^{22 22} \right) \cdot \left[\begin{array}{l} -I_{mm}^{22 22} I_{mm}^{21 21} \hat{I}_{mm}^{21 21} - I_{mm}^{22 22} I_{mm}^{1111} \hat{I}_{mm}^{1111} - I_{mm}^{21 21} I_{mm}^{1212} \hat{I}_{mm}^{1111} - I_{mm}^{21 21} I_{mm}^{22 22} \hat{I}_{mm}^{21 21} \end{array} \right]}{\Delta_m^{1/}}$$

$$= 2 \left(\Delta_{m a}^1 \right)^2 \frac{\bar{c}_m \hat{c}_m - \hat{a}_m^1 a_m^2}{\Delta_m^{1/}} = 2 \left(\Delta_{m a}^1 \right)^2 \frac{\bar{c}_m \hat{c}_m - \hat{a}_m^1 a_m^2}{2 \left(\Delta_{m a}^1 \right)^3} = \frac{\bar{c}_m \hat{c}_m - \hat{a}_m^1 a_m^2}{\Delta_{m a}^1}$$

- pour $\sigma = 2$, on a :

$$a_m^{21} = \Delta_{m a}^2 \cdot \frac{2 \left(I_{mm}^{12 21} \right) \cdot \left[\begin{array}{l} -I_{mm}^{12 21} I_{mm}^{2112} \hat{I}_{mm}^{2112} - I_{mm}^{12 21} I_{mm}^{1122} \hat{I}_{mm}^{11 22} - I_{mm}^{1122} I_{mm}^{12 21} \hat{I}_{mm}^{11 22} - I_{mm}^{1122} I_{mm}^{2211} \hat{I}_{mm}^{2112} \\ -I_{mm}^{1122} I_{mm}^{12 21} \hat{I}_{mm}^{12 21} - I_{mm}^{1122} I_{mm}^{2211} \hat{I}_{mm}^{2211} - I_{mm}^{12 21} I_{mm}^{2112} \hat{I}_{mm}^{2211} - I_{mm}^{12 21} I_{mm}^{11 22} \hat{I}_{mm}^{12 21} \end{array} \right] + 2 \left(I_{mm}^{1122} \right) \cdot \left[\begin{array}{l} -I_{mm}^{1122} I_{mm}^{12 21} \hat{I}_{mm}^{12 21} - I_{mm}^{1122} I_{mm}^{2211} \hat{I}_{mm}^{2211} - I_{mm}^{12 21} I_{mm}^{2112} \hat{I}_{mm}^{2211} - I_{mm}^{12 21} I_{mm}^{11 22} \hat{I}_{mm}^{12 21} \end{array} \right]}{\Delta_m^{2/}}$$

$$= 2 \left(\Delta_{m a}^2 \right)^2 \frac{\bar{c}_m \hat{c}_m - \hat{a}_m^1 a_m^2}{\Delta_m^{2/}} = 2 \left(\Delta_{m a}^2 \right)^2 \frac{\bar{c}_m \hat{c}_m - \hat{a}_m^1 a_m^2}{2 \left(\Delta_{m a}^2 \right)^3} = \frac{\bar{c}_m \hat{c}_m - \hat{a}_m^1 a_m^2}{\Delta_{m a}^2}$$

D'autre part, nous avons :

$$a_m^{(3-\sigma) 2} = \Delta_{m a}^{\sigma} \cdot \frac{2 \left(I_{mm}^{\sigma \sigma 11} \right) \cdot \left[\begin{array}{l} -I_{mm}^{\sigma \sigma 11} I_{mm}^{\sigma(3-\sigma) 12} \hat{I}_{mm}^{\sigma(3-\sigma) 12} - I_{mm}^{\sigma \sigma 11} I_{mm}^{(3-\sigma)(3-\sigma) 22} \hat{I}_{mm}^{(3-\sigma)(3-\sigma) 22} \\ -I_{mm}^{\sigma(3-\sigma) 12} I_{mm}^{(3-\sigma) \sigma 21} \hat{I}_{mm}^{(3-\sigma)(3-\sigma) 22} - I_{mm}^{\sigma \sigma 11} I_{mm}^{\sigma \sigma 11} \hat{I}_{mm}^{\sigma(3-\sigma) 12} \end{array} \right] + 2 \left(I_{mm}^{\sigma(3-\sigma) 12} \right) \cdot \left[\begin{array}{l} -I_{mm}^{\sigma(3-\sigma) 12} I_{mm}^{(3-\sigma) \sigma 21} \hat{I}_{mm}^{(3-\sigma) \sigma 21} - I_{mm}^{\sigma(3-\sigma) 12} I_{mm}^{\sigma \sigma 11} \hat{I}_{mm}^{\sigma \sigma 11} \\ -I_{mm}^{\sigma \sigma 11} I_{mm}^{\sigma(3-\sigma) 12} \hat{I}_{mm}^{\sigma \sigma 11} - I_{mm}^{\sigma \sigma 11} I_{mm}^{(3-\sigma)(3-\sigma) 22} \hat{I}_{mm}^{(3-\sigma) \sigma 21} \end{array} \right]}{\Delta_m^{\sigma /}}$$

- pour $\sigma = 1$, on a :

$$a_m^{22} = \Delta_{m a}^1 \cdot \frac{2 \left(I_{mm}^{11 11} \right) \cdot \left[\begin{array}{l} -I_{mm}^{11 11} I_{mm}^{1212} \hat{I}_{mm}^{1212} - I_{mm}^{11 11} I_{mm}^{22 22} \hat{I}_{mm}^{22 22} - I_{mm}^{1212} I_{mm}^{21 21} \hat{I}_{mm}^{22 22} - I_{mm}^{11 11} I_{mm}^{1111} \hat{I}_{mm}^{1212} \\ -I_{mm}^{1212} I_{mm}^{21 21} \hat{I}_{mm}^{21 21} - I_{mm}^{1212} I_{mm}^{11 11} \hat{I}_{mm}^{1111} - I_{mm}^{11 11} I_{mm}^{1212} \hat{I}_{mm}^{1111} - I_{mm}^{11 11} I_{mm}^{22 22} \hat{I}_{mm}^{21 21} \end{array} \right] + 2 \left(I_{mm}^{1212} \right) \cdot \left[\begin{array}{l} -I_{mm}^{1212} I_{mm}^{21 21} \hat{I}_{mm}^{21 21} - I_{mm}^{1212} I_{mm}^{11 11} \hat{I}_{mm}^{1111} - I_{mm}^{11 11} I_{mm}^{1212} \hat{I}_{mm}^{1111} - I_{mm}^{11 11} I_{mm}^{22 22} \hat{I}_{mm}^{21 21} \end{array} \right]}{\Delta_m^{1/}}$$

$$= 2(\Delta_{m\ a}^1)^2 \frac{c_m \hat{d}_m - a_m^1 \hat{a}_m^2}{\Delta_m^{1/}} = 2(\Delta_{m\ a}^1)^2 \frac{c_m \hat{d}_m - a_m^1 \hat{a}_m^2}{2(\Delta_{m\ a}^1)^3} = \frac{c_m \hat{d}_m - a_m^1 \hat{a}_m^2}{\Delta_{m\ a}^1}$$

- pour $\sigma = 2$, on a :

$$\begin{aligned} & 2(I_{mm}^{22\ 11}) \cdot \begin{bmatrix} -I_{mm}^{22\ 11} I_{mm}^{2112} \hat{I}_{mm}^{2112} - I_{mm}^{22\ 11} I_{mm}^{11\ 22} \hat{I}_{mm}^{11\ 22} \\ -I_{mm}^{2112} I_{mm}^{12\ 21} \hat{I}_{mm}^{11\ 22} - I_{mm}^{22\ 11} I_{mm}^{2211} \hat{I}_{mm}^{2112} \end{bmatrix} \\ & + 2(I_{mm}^{2112}) \cdot \begin{bmatrix} -I_{mm}^{2112} I_{mm}^{21\ 21} \hat{I}_{mm}^{12\ 21} - I_{mm}^{2112} I_{mm}^{2211} \hat{I}_{mm}^{2211} \\ -I_{mm}^{22\ 11} I_{mm}^{2112} \hat{I}_{mm}^{2211} - I_{mm}^{22\ 11} I_{mm}^{11\ 22} \hat{I}_{mm}^{12\ 21} \end{bmatrix} \\ & a_m^{12} = \Delta_{m\ a}^2 \cdot \frac{\quad}{\Delta_m^{2/}} \\ & = 2(\Delta_{m\ a}^2)^2 \frac{c_m \hat{d}_m - a_m^1 \hat{a}_m^2}{\Delta_m^{2/}} = 2(\Delta_{m\ a}^2)^2 \frac{c_m \hat{d}_m - a_m^1 \hat{a}_m^2}{2(\Delta_{m\ a}^2)^3} = \frac{c_m \hat{d}_m - a_m^1 \hat{a}_m^2}{\Delta_{m\ a}^2} \end{aligned}$$

Remarquons ici, que les mêmes égalités trouvées dans le théorème 4, sont aussi valables pour le théorème 5, c'est-à-dire :

$$a_m^{11} = a_m^{21} \text{ et } a_m^{12} = a_m^{22}$$

De la même façon, on obtient les expressions des coefficients des multipôles croisés (pour $l = 1$):

$$\begin{aligned} & 2(I_{mm}^{\sigma\sigma\ 11}) \cdot \begin{bmatrix} -I_{mm}^{(3-\sigma)\ \sigma\ 21} I_{mm}^{\sigma(3-\sigma)\ 12} \hat{I}_{mm}^{\sigma(3-\sigma)\ 12} - I_{mm}^{(3-\sigma)\ \sigma\ 21} I_{mm}^{(3-\sigma)\ (3-\sigma)\ 22} \hat{I}_{mm}^{(3-\sigma)\ (3-\sigma)\ 22} \\ -I_{mm}^{(3-\sigma)\ (3-\sigma)\ 22} I_{mm}^{(3-\sigma)\ \sigma\ 21} \hat{I}_{mm}^{(3-\sigma)\ (3-\sigma)\ 22} - I_{mm}^{(3-\sigma)\ (3-\sigma)\ 22} I_{mm}^{\sigma\sigma\ 11} \hat{I}_{mm}^{\sigma(3-\sigma)\ 12} \end{bmatrix} \\ & + 2(I_{mm}^{\sigma(3-\sigma)\ 12}) \cdot \begin{bmatrix} -I_{mm}^{(3-\sigma)\ (3-\sigma)\ 22} I_{mm}^{(3-\sigma)\ \sigma\ 21} \hat{I}_{mm}^{(3-\sigma)\ \sigma\ 21} - I_{mm}^{(3-\sigma)\ (3-\sigma)\ 22} I_{mm}^{\sigma\sigma\ 11} \hat{I}_{mm}^{\sigma\sigma\ 11} \\ -I_{mm}^{(3-\sigma)\ \sigma\ 21} I_{mm}^{\sigma(3-\sigma)\ 12} \hat{I}_{mm}^{\sigma\sigma\ 11} - I_{mm}^{(3-\sigma)\ \sigma\ 21} I_{mm}^{(3-\sigma)\ (3-\sigma)\ 22} \hat{I}_{mm}^{(3-\sigma)\ \sigma\ 21} \end{bmatrix} \\ & b_m = (-1)^\sigma \Delta_{m\ a}^\sigma \cdot \frac{\quad}{\Delta_m^{\sigma/}} \end{aligned}$$

- pour $\sigma = 1$, on a :

$$\begin{aligned} & 2(I_{mm}^{11\ 11}) \cdot \begin{bmatrix} -I_{mm}^{2121} I_{mm}^{1212} \hat{I}_{mm}^{1212} - I_{mm}^{2121} I_{mm}^{22\ 22} \hat{I}_{mm}^{22\ 22} - I_{mm}^{22\ 22} I_{mm}^{21\ 21} \hat{I}_{mm}^{22\ 22} - I_{mm}^{22\ 22} I_{mm}^{2211} \hat{I}_{mm}^{1212} \\ -I_{mm}^{22\ 22} I_{mm}^{21\ 21} \hat{I}_{mm}^{21\ 21} - I_{mm}^{22\ 22} I_{mm}^{1111} \hat{I}_{mm}^{1111} - I_{mm}^{2121} I_{mm}^{1212} \hat{I}_{mm}^{1111} - I_{mm}^{2121} I_{mm}^{22\ 22} \hat{I}_{mm}^{21\ 21} \end{bmatrix} \\ & b_m = -\Delta_{m\ a}^1 \cdot \frac{\quad}{\Delta_m^{1/}} \\ & = 2(\Delta_{m\ a}^1)^2 \frac{a_m^1 \hat{c}_m - c_m \hat{a}_m^1}{\Delta_m^{1/}} = 2(\Delta_{m\ a}^1)^2 \frac{a_m^1 \hat{c}_m - c_m \hat{a}_m^1}{2(\Delta_{m\ a}^1)^3} = \frac{a_m^1 \hat{c}_m - c_m \hat{a}_m^1}{\Delta_{m\ a}^1} \end{aligned}$$

- pour $\sigma = 2$, on a :

$$\begin{aligned}
b_m &= \Delta_{m a}^2 \cdot \frac{2(I_{mm}^{22 \ 11}) \cdot \left[-I_{mm}^{12 \ 21} I_{mm}^{21 \ 12} \hat{f}_{mm}^{21 \ 12} - I_{mm}^{12 \ 21} I_{mm}^{11 \ 22} \hat{f}_{mm}^{11 \ 22} - I_{mm}^{11 \ 22} I_{mm}^{12 \ 21} \hat{f}_{mm}^{11 \ 22} - I_{mm}^{11 \ 22} I_{mm}^{22 \ 11} \hat{f}_{mm}^{22 \ 11} \right] + 2(I_{mm}^{21 \ 12}) \cdot \left[-I_{mm}^{11 \ 22} I_{mm}^{12 \ 21} \hat{f}_{mm}^{12 \ 21} - I_{mm}^{11 \ 22} I_{mm}^{22 \ 11} \hat{f}_{mm}^{22 \ 11} - I_{mm}^{12 \ 21} I_{mm}^{21 \ 12} \hat{f}_{mm}^{21 \ 12} - I_{mm}^{12 \ 21} I_{mm}^{11 \ 22} \hat{f}_{mm}^{11 \ 22} \right]}{\Delta_m^{2/}} \\
&= 2(\Delta_{m a}^2)^2 \frac{a_m^1 \hat{c}_m - c_m \hat{a}_m^1}{\Delta_m^{2/}} = 2(\Delta_{m a}^2)^2 \frac{a_m^1 \hat{c}_m - c_m \hat{a}_m^1}{2(\Delta_{m a}^2)^3} = \frac{a_m^1 \hat{c}_m - c_m \hat{a}_m^1}{\Delta_{m a}^2}
\end{aligned}$$

- pour $l = 2, \sigma = 1$, on a :

$$\begin{aligned}
b_m &= -\Delta_{m a}^1 \cdot \frac{2(I_{mm}^{11 \ 22}) \cdot \left[-I_{mm}^{21 \ 12} I_{mm}^{12 \ 21} \hat{f}_{mm}^{12 \ 21} - I_{mm}^{21 \ 12} I_{mm}^{22 \ 22} \hat{f}_{mm}^{22 \ 11} - I_{mm}^{22 \ 11} I_{mm}^{21 \ 21} \hat{f}_{mm}^{22 \ 11} - I_{mm}^{22 \ 11} I_{mm}^{22 \ 11} \hat{f}_{mm}^{12 \ 21} \right] + 2(I_{mm}^{12 \ 21}) \cdot \left[-I_{mm}^{22 \ 11} I_{mm}^{21 \ 21} \hat{f}_{mm}^{21 \ 12} - I_{mm}^{22 \ 11} I_{mm}^{11 \ 11} \hat{f}_{mm}^{11 \ 22} - I_{mm}^{21 \ 12} I_{mm}^{12 \ 21} \hat{f}_{mm}^{11 \ 22} - I_{mm}^{21 \ 12} I_{mm}^{22 \ 22} \hat{f}_{mm}^{21 \ 12} \right]}{\Delta_m^{1/}} \\
&= 2(\Delta_{m a}^1)^2 \frac{a_m^2 \hat{d}_m - \bar{c}_m \hat{a}_m^2}{\Delta_m^{1/}} = 2(\Delta_{m a}^1)^2 \frac{a_m^2 \hat{d}_m - \bar{c}_m \hat{a}_m^2}{2(\Delta_{m a}^1)^3} = \frac{a_m^2 \hat{d}_m - \bar{c}_m \hat{a}_m^2}{\Delta_{m a}^1}
\end{aligned}$$

- pour $l = 2, \sigma = 2$, on a :

$$\begin{aligned}
b_m &= \Delta_{m a}^2 \cdot \frac{2(I_{mm}^{22 \ 22}) \cdot \left[-I_{mm}^{12 \ 12} I_{mm}^{21 \ 21} \hat{f}_{mm}^{21 \ 21} - I_{mm}^{12 \ 12} I_{mm}^{11 \ 11} \hat{f}_{mm}^{11 \ 11} - I_{mm}^{11 \ 11} I_{mm}^{12 \ 12} \hat{f}_{mm}^{11 \ 11} - I_{mm}^{11 \ 11} I_{mm}^{22 \ 22} \hat{f}_{mm}^{21 \ 21} \right] + 2(I_{mm}^{21 \ 21}) \cdot \left[-I_{mm}^{11 \ 11} I_{mm}^{12 \ 12} \hat{f}_{mm}^{12 \ 12} - I_{mm}^{11 \ 11} I_{mm}^{22 \ 22} \hat{f}_{mm}^{11 \ 22} - I_{mm}^{12 \ 12} I_{mm}^{21 \ 21} \hat{f}_{mm}^{11 \ 22} - I_{mm}^{12 \ 12} I_{mm}^{11 \ 11} \hat{f}_{mm}^{12 \ 12} \right]}{\Delta_m^{2/}} \\
&= 2(\Delta_{m a}^2)^2 \frac{a_m^2 \hat{d}_m - \bar{c}_m \hat{a}_m^2}{\Delta_m^{2/}} = 2(\Delta_{m a}^2)^2 \frac{a_m^2 \hat{d}_m - \bar{c}_m \hat{a}_m^2}{2(\Delta_{m a}^2)^3} = \frac{a_m^2 \hat{d}_m - \bar{c}_m \hat{a}_m^2}{\Delta_{m a}^2}
\end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration du théorème 5.

On peut montrer aussi (voir annexe 2), que les deux expressions (3.11-a) et (3.11-b) trouvées pour les coefficients des multipôles croisés b_m , et qui semblent différentes, sont en fait égales.

Théorème 6 :

Si la frontière ∂D est un cercle de rayon a , et si les coefficients des multipôles simples et croisés sont choisis comme dans (3.7) à (3.11b), alors la traction de la fonction de Green modifiée est égale à la traction de la fonction de Green exacte pour le problème de Dirichlet, autrement dit on a :

$$T_p G_1^D(P, Q) = T_p G_{Ex}^D(P, Q) \quad (3.15)$$

Démonstration :

En utilisant les expressions des coefficients des multipôles simples et croisés obtenues pour le cas d'un cercle (3.7) à (3.11b), la fonction de Green modifiée pour le problème de Dirichlet s'écrit alors sous la forme :

$$T_p G_1^D(P, Q) = T_p G_0(P, Q) + \frac{i}{4\mu K^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\begin{aligned} & (a_m^{11} TF_m^{11}(P) \otimes TF_m^{11}(Q) + b_m TF_m^{11}(P) \otimes TF_m^{22}(Q)) \\ & + (a_m^{12} TF_m^{12}(P) \otimes TF_m^{12}(Q) - b_m TF_m^{12}(P) \otimes TF_m^{21}(Q)) \\ & + (a_m^{21} TF_m^{21}(P) \otimes TF_m^{21}(Q) - b_m TF_m^{21}(P) \otimes TF_m^{12}(Q)) \\ & + (a_m^{22} TF_m^{22}(P) \otimes TF_m^{22}(Q) + b_m TF_m^{22}(P) \otimes TF_m^{11}(Q)) \end{aligned} \right]$$

ou bien :

$$T_p G_1^D(P, Q) = T_p G_0(P, Q) + \frac{i}{4\mu K^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\Delta_{ma}} \left[\begin{aligned} & ((\bar{c}_m \hat{c}_m - a_m^1 a_m^2) TF_m^{11}(P) \otimes TF_m^{11}(Q) + (a_m^1 \hat{c}_m - c_m \hat{a}_m^1) TF_m^{11}(P) \otimes TF_m^{22}(Q)) \\ & + ((c_m \hat{d}_m - a_m^1 \hat{a}_m^2) TF_m^{12}(P) \otimes TF_m^{12}(Q) - (a_m^1 \hat{c}_m - c_m \hat{a}_m^1) TF_m^{12}(P) \otimes TF_m^{21}(Q)) \\ & + ((\bar{c}_m \hat{c}_m - a_m^1 a_m^2) TF_m^{21}(P) \otimes TF_m^{21}(Q) - (a_m^1 \hat{c}_m - c_m \hat{a}_m^1) TF_m^{21}(P) \otimes TF_m^{12}(Q)) \\ & + ((c_m \hat{d}_m - a_m^1 \hat{a}_m^2) TF_m^{22}(P) \otimes TF_m^{22}(Q) + (a_m^1 \hat{c}_m - c_m \hat{a}_m^1) TF_m^{22}(P) \otimes TF_m^{11}(Q)) \end{aligned} \right] \quad (3.16)$$

D'autre part, il a été prouvé dans [23] que si on considère un autre critère d'optimalité des coefficients des multipôles simples et croisés, en minimisant la norme de l'opérateur intégral modifié $\|K_1\|_{L_2(\partial D)}$, alors la traction de la fonction de Green modifiée est égale à la moyenne des traction des fonctions de Green exactes pour les problèmes de Dirichlet et de Neumann.

Autrement dit, on a :

$$T_p G_1(P, Q) = \frac{1}{2} [T_p G_{ex}^D(P, Q) + T_p G_{Ex}^N(P, Q)] \quad (3.17)$$

où les deux fonctions de Green exactes $G_{ex}^D(P, Q)$ et $G_{Ex}^N(P, Q)$ satisfont aux conditions suivantes :

$$\begin{aligned} G_{ex}^D(P, q) &= 0 & r_p > a, \quad r_q = a \\ T_q G_{ex}^N(P, q) &= 0 & r_p > a, \quad r_q = a \end{aligned} \quad (3.18)$$

ces fonctions sont données par les expressions suivantes [34] :

$$G_{ex}^D(P, Q) = \frac{i}{4\mu K^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{l=1}^2 F_m^{\sigma l}(P_>) \otimes \left[\hat{F}_m^{\sigma l}(P_<) + \hat{a}_m^{\sigma l}(P_>) F_m^{\sigma l}(P_<) \right. \\ \left. + (-1)^{\sigma+l} \hat{b}_m F_m^{(3-\sigma)(3-l)}(P_<) \right] \quad (3.19)$$

avec :

$$\hat{a}_m^{11} = \hat{a}_m^{21} = \frac{\bar{c}_m \hat{c}_m - \hat{a}_m^1 a_m^2}{\Delta_{ma}} \quad (3.20)$$

$$\hat{a}_m^{12} = \hat{a}_m^{22} = \frac{c_m \hat{d}_m - a_m^1 \hat{a}_m^2}{\Delta_{ma}} \quad (3.21)$$

$$\hat{b}_m = \frac{a_m^1 \hat{c}_m - c_m \hat{a}_m^1}{\Delta_{ma}} = \frac{a_m^2 \hat{d}_m - \bar{c}_m \hat{a}_m^2}{\Delta_{ma}} \quad (3.22)$$

et

$$G_{ex}^N(P, Q) = \frac{i}{4\mu K^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{l=1}^2 F_m^{\sigma l}(P_>) \otimes \left[\hat{F}_m^{\sigma l}(P_<) + \tilde{a}_m^{\sigma l}(P_>) F_m^{\sigma l}(P_<) \right. \\ \left. + (-1)^{\sigma+l} \tilde{b}_m F_m^{(3-\sigma)(3-l)}(P_<) \right] \quad (3.23)$$

avec :

$$\tilde{a}_m^{11} = \tilde{a}_m^{21} = \frac{\bar{\beta}_m \hat{\beta}_m - \hat{\alpha}_m^1 \alpha_m^2}{\Delta_{ma}^T} \quad (3.24)$$

$$\tilde{a}_m^{12} = \tilde{a}_m^{22} = \frac{\beta_m \hat{\gamma}_m - \alpha_m^1 \hat{\alpha}_m^2}{\Delta_{ma}^T} \quad (3.25)$$

$$\tilde{b}_m = \frac{\alpha_m^1 \hat{\beta}_m - \beta_m \hat{\alpha}_m^1}{\Delta_{ma}^T} = \frac{\alpha_m^2 \hat{\gamma}_m - \bar{\beta}_m \hat{\alpha}_m^2}{\Delta_{ma}^T} \quad (3.26)$$

où les expressions des différents coefficients qui apparaissent dans les coefficients $\hat{a}_m^{\sigma l}$, $\tilde{a}_m^{\sigma l}$, $\hat{b}_m$ et $\tilde{b}_m$, sont données dans l'annexe 1.

et de plus :

$$P_{>} = \begin{cases} P & \text{si } r_P > r_Q \\ Q & \text{si } r_P < r_Q \end{cases} \quad \text{et} \quad P_{<} = \begin{cases} Q & \text{si } r_P > r_Q \\ P & \text{si } r_P < r_Q \end{cases}$$

De ce fait, et à partir des expressions (3.17) et (3.19) à (3.22), on déduit que l'expression (3.16) est égale à la fonction de Green exacte pour le problème de Dirichlet, autrement dit on a :

$$T_p G_1^D(P, Q) = T_p G_{Ex}^D(P, Q)$$

Ce qui termine la démonstration du théorème 6.

L'intérêt du résultat obtenu dans le théorème 6, consiste dans le fait que si le choix optimal des coefficients des multipôles simples et croisés pour le cas du cercle, nous conduit à la traction de la fonction de Green exacte pour le problème de Dirichlet, alors la condition large (1.24) imposée à ces coefficients n'a pas besoin d'être satisfaite à partir du moment que l'on n'a plus d'équations intégrales à résoudre.

Dans le chapitre suivant, nous allons appliquer les résultats du chapitre 2 au cas d'une frontière ayant la forme d'un cercle légèrement déformé. Nous montrerons que les expressions des coefficients des multipôles trouvées pour le cas du cercle peuvent être utilisées comme approximation pour le cas du cercle déformé.

CHAPITRE 4

Cas du cercle légèrement déformé

Après avoir traité le cas d'une frontière circulaire, on se propose de considérer le cas d'une frontière ayant la forme d'un cercle légèrement déformé. L'équation paramétrique de ce cercle légèrement déformé est définie en coordonnées polaires, comme suit :

$$r = a + \varepsilon \phi(\theta) \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (4.1)$$

où (a) est le rayon du cercle non déformé et ϕ et $\frac{\partial \phi}{\partial \theta}$ sont deux fonctions

bornées. On note par $p_\varepsilon, q_\varepsilon$ les points de ∂D et qui sont définis par :

$$Op_\varepsilon = (a + \varepsilon \phi(\theta_p)) \hat{r}_p, \quad Oq_\varepsilon = (a + \varepsilon \phi(\theta_q)) \hat{r}_q \quad (4.2)$$

où

$$\hat{r} = (\cos(\theta), \sin(\theta)) \quad (4.3)$$

les points sur le cercle de rayon (a) sont notés par :

$$Op_a = a \hat{r}_p, \quad Oq_a = a \hat{r}_q \quad (4.4)$$

Il est facile de voir que :

$$|p_\varepsilon q_\varepsilon| = |p_a q_a| + O(\varepsilon) \quad (4.5)$$

de plus, puisque ϕ est continûment dérivable, on peut montrer que

$$\frac{|\phi(\theta_p) - \phi(\theta_q)|}{|p_a q_a|} \text{ est bornée, et on aura donc :}$$

$$\frac{1}{|p_\varepsilon q_\varepsilon|} = \frac{1}{|p_a q_a|} + O(\varepsilon) \quad (4.6)$$

sur le cercle déformé ∂D on peut montrer que :

$$\hat{n} = \frac{\hat{r} - \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \hat{\theta}}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)^2}} = \hat{r} + O(\varepsilon) \quad (4.7)$$

et que l'élément ds s'écrit sous la forme :

$$ds = r \sqrt{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)^2} d\theta = a d\theta + O(\varepsilon) \quad (4.8)$$

Dans ce qui suit nous allons énoncer et démontrer un lemme qui nous sera utile par la suite.

Lemme 2 :

Si la frontière ∂D est définie par (4.1), alors on a :

$$TF_m^{\sigma l}(p_\varepsilon) = TF_m^{\sigma l}(p_a) + O(\varepsilon) \quad (4.9)$$

$$\langle TF_m^{\sigma l}, TF_n^{\nu k} \rangle_{\partial D} = \langle TF_m^{\sigma l}, TF_n^{\nu k} \rangle_a + O(\varepsilon) \quad (4.10)$$

$$\Delta_{m\partial D}^{\sigma l} = \Delta_{ma}^{\sigma l} + O(\varepsilon) \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} g_m^{\sigma l} &= - \langle \bar{\beta}_m^{\sigma l} \cdot \hat{TF}_m^{(3-\sigma)(3-l)} + \alpha_m^{\sigma l} \cdot \hat{TF}_m^{\sigma l}, TF_m^{\sigma l} \rangle_{\partial D} \\ &= - \langle \bar{\beta}_m^{\sigma l} \cdot \hat{TF}_m^{(3-\sigma)(3-l)} + \alpha_m^{\sigma l} \cdot \hat{TF}_m^{\sigma l}, TF_m^{\sigma l} \rangle_a + O(\varepsilon) \\ &= (g_m^{\sigma l})_a + O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} h_m^{\sigma l} &= - \langle \bar{\beta}_m^{\sigma l} \cdot \hat{TF}_m^{(3-\sigma)(3-l)} + \alpha_m^{\sigma l} \cdot \hat{TF}_m^{\sigma l}, TF_m^{(3-\sigma)(3-l)} \rangle_{\partial D} \\ &= - \langle \bar{\beta}_m^{\sigma l} \cdot \hat{TF}_m^{(3-\sigma)(3-l)} + \alpha_m^{\sigma l} \cdot \hat{TF}_m^{\sigma l}, TF_m^{(3-\sigma)(3-l)} \rangle_a + O(\varepsilon) \\ &= (h_m^{\sigma l})_a + O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (4.13)$$

où $\| \cdot \|_a$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_a$ sont la norme et le produit scalaire, calculés sur le cercle de rayon a .

Démonstration :

D'après la définition de $TF_m^{\sigma l}$ et en tenant compte du fait que la fonction de Hankel $H_m^1(x)$ est analytique avec seulement un pôle à $x=0$, nous obtenons alors :

$$H_m^1(a + \varepsilon) = H_m^1(a) + O(\varepsilon) \quad (4.14)$$

s'ensuit alors (4.9).

En utilisant la représentation paramétrique de ∂D donnée par (4.1) et l'expression (4.8) de l'élément ds , on obtient :

$$\langle TF_m^{\sigma l}, TF_n^{\nu k} \rangle_{\partial D} = \int_{\partial D} TF_m^{\sigma l}(p) \cdot T\bar{F}_n^{\nu k}(p) ds_p = a \int_0^{2\pi} TF_m^{\sigma l}(p) \cdot T\bar{F}_n^{\nu k}(p) d\theta_p + O(\varepsilon) \quad (4.15)$$

et avec (4.9), l'expression (4.15) devient :

$$\langle TF_m^{\sigma l}, TF_n^{\nu k} \rangle_{\partial D} = a \int_0^{2\pi} TF_m^{\sigma l}(p) \cdot T\bar{F}_n^{\nu k}(p) d\theta_p + O(\varepsilon) = \langle TF_m^{\sigma l}, TF_n^{\nu k} \rangle_a + O(\varepsilon)$$

ce qui correspond à la relation (4.10). Et en utilisant (4.9) et (4.10) on obtient directement (4.11), (4.12), et (4.13).

Ce qui termine la démonstration du lemme 2.

Théorème 7 :

Si le noyau de l'opérateur intégral modifié K_1 , à savoir la traction de la fonction de Green $T_p G_1$ est définie par (1.17b) et si la frontière ∂D est définie par (4.1), alors le choix optimal des coefficients des multipôles simples et croisés, est donné par :

$$a_m^{11} = a_m^{11}(a) + O(\varepsilon) \quad (4.16)$$

$$a_m^{21} = a_m^{21}(a) + O(\varepsilon) \quad (4.17)$$

$$a_m^{22} = a_m^{22}(a) + O(\varepsilon) \quad (4.18)$$

$$a_m^{12} = a_m^{12}(a) + O(\varepsilon) \quad (4.19)$$

et

$$b_m = b_m(a) + O(\varepsilon) \quad (4.20)$$

où les $a_m^{11}(a), a_m^{21}(a), a_m^{22}(a), a_m^{12}(a)$ et $b_m(a)$ sont les coefficients des multipôles simples et croisés, calculés dans le cas du cercle de rayon a .

Démonstration :

Pour calculer les coefficients des multipôles croisés $a_m^{\sigma l}$ et b_m , il faudrait tout d'abord calculer les $g_m^{\sigma 1}$, $g_m^{(3-\sigma)2}$, $h_m^{\sigma 1}$ et $h_m^{(3-\sigma)2}$

Nous avons déjà calculer les expressions des $g_m^{\sigma 1}$, $g_m^{(3-\sigma)2}$, $h_m^{\sigma 1}$ et $h_m^{(3-\sigma)2}$, qui sont données par :

$$g_m^{\sigma 1} = - \left(I_{mm}^{(3-\sigma)\sigma, 21} \right) \left(\hat{I}_{mm}^{(3-\sigma)\sigma, 21} \right) - \left(I_{mm}^{\sigma\sigma, 11} \right) \left(\hat{I}_{mm}^{\sigma\sigma, 11} \right)$$

$$g_m^{(3-\sigma)2} = - \left(I_{mm}^{\sigma(3-\sigma), 12} \right) \left(\hat{I}_{mm}^{\sigma(3-\sigma), 12} \right) - \left(I_{mm}^{(3-\sigma)(3-\sigma), 22} \right) \left(\hat{I}_{mm}^{(3-\sigma)(3-\sigma), 22} \right)$$

et

$$h_m^{\sigma 1} = - \left(I_{mm}^{(3-\sigma)\sigma, 21} \right) \left(\hat{I}_{mm}^{(3-\sigma)(3-\sigma), 22} \right) - \left(I_{mm}^{\sigma\sigma, 11} \right) \left(\hat{I}_{mm}^{\sigma(3-\sigma), 12} \right)$$

$$h_m^{(3-\sigma)2} = - \left(I_{mm}^{\sigma(3-\sigma), 12} \right) \left(\hat{I}_{mm}^{\sigma\sigma, 11} \right) - \left(I_{mm}^{(3-\sigma)(3-\sigma), 22} \right) \left(\hat{I}_{mm}^{(3-\sigma)\sigma, 21} \right)$$

Mais en remplaçant les relations (4.12) et (4.13) du lemme 2, dans les expressions des coefficients des multipôles simples et croisés (2.12), on obtient directement (4.16) à (4.20).

Théorème 8 :

Si la frontière ∂D est définie par (4.1), et si les coefficients des multipôles simples et croisés sont définis par (4.16) à (4.20), alors la différence entre la traction de la fonction de Green modifiée et la traction de la fonction de Green exacte pour le problème de Dirichlet est d'ordre ε , autrement dit :

$$T_p G_l^D(P, Q) \Big|_{Q=Q_\varepsilon}^{P=P_\varepsilon} = T_p G_{Ex}^D(P, Q) \Big|_{Q=Q_\varepsilon}^{P=P_\varepsilon} + O(\varepsilon) \quad (4.21)$$

Démonstration :

En utilisant les expressions des coefficients des multipôles simples et croisés obtenues pour le cas d'un cercle légèrement déformé (4.16) à (4.20), la fonction de Green modifiée pour le problème de Dirichlet s'écrit alors sous la forme :

$$T_p G_1^D(P, Q) \Big|_{Q=Q_\varepsilon}^{P=P_\varepsilon} = T_p G_0^D(P, Q) \Big|_{Q=Q_\varepsilon}^{P=P_\varepsilon} + \frac{i}{4\mu K^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\begin{aligned} & \left(a_m^{11} TF_m^{11}(P) \otimes TF_m^{11}(Q) + b_m TF_m^{11}(P) \otimes TF_m^{22}(Q) \right) \\ & + \left(a_m^{12} TF_m^{12}(P) \otimes TF_m^{12}(Q) - b_m TF_m^{12}(P) \otimes TF_m^{21}(Q) \right) \\ & + \left(a_m^{21} TF_m^{21}(P) \otimes TF_m^{21}(Q) - b_m TF_m^{21}(P) \otimes TF_m^{12}(Q) \right) \\ & + \left(a_m^{22} TF_m^{22}(P) \otimes TF_m^{22}(Q) + b_m TF_m^{22}(P) \otimes TF_m^{11}(Q) \right) \end{aligned} \right]$$

$$= T_p G_0^D(P, Q) \Big|_{Q=Q_\varepsilon}^{P=P_\varepsilon} + O(\varepsilon)$$

$$+ \frac{i}{4\mu K^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\Delta_{ma} + O(\varepsilon)} \left[\begin{aligned} & \left((\bar{c}_m \hat{c}_m - a_m^1 a_m^2 + O(\varepsilon)) TF_m^{11}(P) \otimes TF_m^{11}(Q) \right) \\ & + \left((a_m^1 \hat{c}_m - c_m \hat{a}_m^1 + O(\varepsilon)) TF_m^{11}(P) \otimes TF_m^{22}(Q) \right) \\ & + \left((c_m \hat{d}_m - a_m^1 \hat{a}_m^2 + O(\varepsilon)) TF_m^{12}(P) \otimes TF_m^{12}(Q) \right) \\ & - \left((a_m^1 \hat{c}_m - c_m \hat{a}_m^1 + O(\varepsilon)) TF_m^{12}(P) \otimes TF_m^{21}(Q) \right) \\ & + \left((\bar{c}_m \hat{c}_m - a_m^1 a_m^2 + O(\varepsilon)) TF_m^{21}(P) \otimes TF_m^{21}(Q) \right) \\ & - \left((a_m^1 \hat{c}_m - c_m \hat{a}_m^1 + O(\varepsilon)) TF_m^{21}(P) \otimes TF_m^{12}(Q) \right) \\ & + \left((c_m \hat{d}_m - a_m^1 \hat{a}_m^2 + O(\varepsilon)) TF_m^{22}(P) \otimes TF_m^{22}(Q) \right) \\ & + \left((a_m^1 \hat{c}_m - c_m \hat{a}_m^1 + O(\varepsilon)) TF_m^{22}(P) \otimes TF_m^{11}(Q) \right) \end{aligned} \right]$$

ou bien :

$$T_p G_1^D(P, Q) \Big|_{Q=Q_\varepsilon}^{P=P_\varepsilon} = T_p G_0^D(P, Q) \Big|_{Q=Q_\varepsilon}^{P=P_\varepsilon} + \frac{i}{4\mu K^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\Delta_{ma}} \left[\begin{aligned} & \left((\bar{c}_m \hat{c}_m - a_m^1 a_m^2) TF_m^{11}(P) \otimes TF_m^{11}(Q) \right) \\ & + \left((a_m^1 \hat{c}_m - c_m \hat{a}_m^1) TF_m^{11}(P) \otimes TF_m^{22}(Q) \right) \\ & + \left((c_m \hat{d}_m - a_m^1 \hat{a}_m^2) TF_m^{12}(P) \otimes TF_m^{12}(Q) \right) \\ & - \left((a_m^1 \hat{c}_m - c_m \hat{a}_m^1) TF_m^{12}(P) \otimes TF_m^{21}(Q) \right) \\ & + \left((\bar{c}_m \hat{c}_m - a_m^1 a_m^2) TF_m^{21}(P) \otimes TF_m^{21}(Q) \right) \\ & - \left((a_m^1 \hat{c}_m - c_m \hat{a}_m^1) TF_m^{21}(P) \otimes TF_m^{12}(Q) \right) \\ & + \left((c_m \hat{d}_m - a_m^1 \hat{a}_m^2) TF_m^{22}(P) \otimes TF_m^{22}(Q) \right) \\ & + \left((a_m^1 \hat{c}_m - c_m \hat{a}_m^1) TF_m^{22}(P) \otimes TF_m^{11}(Q) \right) \end{aligned} \right] + O(\varepsilon)$$

en utilisant (3.19) à (3.22), on obtient :

$$T_p G_1^D(P, Q) \Big|_{Q=Q_\varepsilon}^{P=P_\varepsilon} = T_p G_{Ex}^D(P, Q) \Big|_{Q=Q_\varepsilon}^{P=P_\varepsilon} + O(\varepsilon)$$

Ce qui termine la démonstration du théorème 8.

Il y a une approximation plus simple pour les coefficients des multipôles simples et croisés qui conduit au même résultat que celui du théorème 8, pour cela il suffit de définir les coefficients des multipôles simples et croisés tels que dans (3.7) à (3.11b) mais avec les différents produits scalaires calculés sur le cercle modifié.

CONCLUSION

Le travail qui a été présenté dans cette thèse porte sur la détermination du choix optimal des coefficients des multipôles en minimisant la norme du noyau de l'opérateur intégral décrivant l'équation de diffraction des ondes élastiques, à savoir la norme de la traction de la fonction de Green modifiée.

Dans le premier chapitre, nous avons exposé la formulation mathématique du problème. Dans le second chapitre, nous avons effectivement déterminé trois expressions des coefficients des multipôles pour le cas d'une frontière de forme quelconque. La première expression représente une bonne approximation des coefficients des multipôles simples, et qui satisfait la condition large (1.24). Les deux autres expressions représentent les choix optimaux des coefficients des multipôles pour deux différents types de modification, la modification simple et la modification croisée. Le critère d'optimalité utilisé est celui de la minimisation de la norme du noyau de l'opérateur intégral modifié à savoir la traction de la fonction de Green modifiée. A travers ce critère, on minimise la norme de la différence entre la traction de la fonction de Green exacte et la traction de la fonction de Green modifiée, ce qui par ailleurs, nous garantit la convergence de la méthode de résolution numérique par approximations successives pour le plus grand rayon des valeurs de la fréquence d'ondes possible. Dans le chapitre trois, nous avons appliqué les résultats trouvés précédemment au cas d'une frontière de forme circulaire. Dans ce cas là, une forme relativement plus simple des coefficients des multipôles simples et croisés a pu être obtenue. Et de plus, nous avons obtenu le résultat remarquable qui consiste en l'égalité entre la traction de la fonction de Green modifiée et la traction de la fonction de Green exacte

pour le cas du problème de Dirichlet, autrement dit la norme de l'opérateur intégral modifié sera nulle, ce qui conduirait alors à la solution directe du problème au limites sans recourir à la résolution d'une équation intégrale. Dans le dernier chapitre, nous avons appliqué les résultats du deuxième chapitre au cas d'une frontière ayant la forme d'un cercle légèrement modifiée. Nous avons montré que les expressions des coefficients des multipôles trouvées pour le cas du cercle pouvaient être utilisées comme approximation pour le cas du cercle légèrement modifiée, et de plus nous avons montré que la norme de la différence entre la traction de la fonction de Green modifiée et la traction de la fonction de Green exacte est du même ordre que la perturbation du cercle, c'est-à-dire d'ordre ε . Toutefois, la condition large (1.24) n'a pu être établie dans ce cas-là. Néanmoins, cette condition n'étant pas nécessaire mais seulement suffisante comme cela a été prouvé dans [7].

Ce travail qui s'inscrit dans le cadre des techniques de modification de la fonction de Green, débouche sur plusieurs questions et problèmes ouverts qui pourraient être étudiés dans le futur, citons entre autre :

- 1- La vérification de la condition large (1.24) pour un domaine de frontière quelconque.
- 2- L'étude d'autres formes géométriques simples tels que le triangle, l'ellipse,...etc., et qui peuvent servir de guide pour le cas général.
- 3- L'étude d'autres critères d'optimalité en considérons par exemple :
 - La minimisation du nombre de conditionnement associé à notre équation intégrale modifiée, en se basons sur les travaux de E. ARGYROPOULOS, D. GINTIDES et K. KIRIAKI pour le cas de trois dimensions [2] et [21] (critère lié à la stabilité numérique de l'équation intégrale modifiée).

- La minimisation de la somme des normes de la fonction de Green et de l'opérateur intégral modifiés.
- 4- Rechercher les mêmes résultats obtenus par ARGYROPOULOS, D. GINTIDES, K. KIRIAKI, L. BENCHEIKH et B. SAHLI, en utilisant la minimisation avec contraintes (intégrer la condition large (1.24) comme contrainte).
- 4- Elaboré les résultats numériques lié à ce genre de problèmes, en se basons sur les travaux de L. BENCHEIKH [5] et [6].

ANNEXE 1

On se propose dans cet annexe de donner les expressions des produits scalaires des fonctions $F_m^{\sigma l}$, $TF_m^{\sigma l}$ et de leurs parties régulières $\hat{F}_m^{\sigma l}$ et $T\hat{F}_m^{\sigma l}$. On note :

$$\langle F_m^{\sigma l}, F_n^{\nu k} \rangle_{\partial D} = I_{mn}^{\sigma \nu, l k} \quad (\text{A1.1})$$

$$\langle TF_m^{\sigma l}, TF_n^{\nu k} \rangle_{\partial D} = J_{mn}^{\sigma \nu, l k} \quad (\text{A1.2})$$

$$\langle \hat{F}_m^{\sigma l}, F_n^{\nu k} \rangle_{\partial D} = \hat{I}_{mn}^{\sigma \nu, l k} \quad (\text{A1.3})$$

$$\langle T\hat{F}_m^{\sigma l}, F_n^{\nu k} \rangle_{\partial D} = \hat{J}_{mn}^{\sigma \nu, l k} \quad (\text{A1.4})$$

Quand ∂D est un cercle de rayon a , on obtient les expressions suivantes pour les produits scalaires définis ci-dessus :

$$I_{mn}^{\sigma \nu, 11} = a_m^1 \cdot \delta_{mn} \cdot \delta_{\sigma \nu} \quad (\text{A1.5})$$

$$I_{mn}^{\sigma \nu, 22} = a_m^2 \cdot \delta_{mn} \cdot \delta_{\sigma \nu} \quad (\text{A1.6})$$

$$I_{mn}^{\sigma \nu, 12} = -(-1)^\sigma c_m \cdot \delta_{mn} \cdot (1 - \delta_{\sigma \nu}) \quad (\text{A1.7})$$

$$I_{mn}^{\sigma \nu, 21} = -(-1)^\nu \bar{c}_m \cdot \delta_{mn} \cdot (1 - \delta_{\sigma \nu}) \quad (\text{A1.8})$$

où :

$$a_m^1 = 2\pi a k^2 \left[\left| H_m'(ka) \right|^2 + \frac{m^2}{(ka)^2} \left| H_m(ka) \right|^2 \right]$$

$$a_m^2 = 2\pi a K^2 \left[\left| H_m'(Ka) \right|^2 + \frac{m^2}{(Ka)^2} \left| H_m(Ka) \right|^2 \right]$$

$$c_m = 2\pi a k K \left[\frac{m}{Ka} H_m'(ka) \bar{H}_m(Ka) + \frac{m}{ka} H_m(ka) \bar{H}_m'(Ka) \right]$$

avec $H_m(\cdot)$ désignant la fonction de Hankel d'ordre m et de type 1, et $H_m'(\cdot)$ sa dérivée.

De même nous avons :

$$J_{mn}^{\sigma\nu,11} = \alpha_m^1 \cdot \delta_{mn} \cdot \delta_{\sigma\nu} \quad (\text{A1.9})$$

$$J_{mn}^{\sigma\nu,22} = \alpha_m^2 \cdot \delta_{mn} \cdot \delta_{\sigma\nu} \quad (\text{A1.10})$$

$$J_{mn}^{\sigma\nu,12} = -(-1)^\sigma \beta_m \cdot \delta_{mn} \cdot (1 - \delta_{\sigma\nu}) \quad (\text{A1.11})$$

$$J_{mn}^{\sigma\nu,21} = -(-1)^\nu \bar{\beta}_m \cdot \delta_{mn} \cdot (1 - \delta_{\sigma\nu}) \quad (\text{A1.12})$$

où :

$$\begin{aligned} \alpha_m^1 &= 2\pi a \left[\left| k^2 \left(2\mu H_m''(ka) - \lambda H_m(ka) \right) \right|^2 + \left| \frac{2\mu m}{a} \left(k H_m'(ka) - \frac{H_m(ka)}{a} \right) \right|^2 \right] \\ \alpha_m^2 &= 2\pi a \left[\left| \mu K^2 \left(2H_m''(Ka) + H_m(Ka) \right) \right|^2 + \left| \frac{2\mu m}{a} \left(K H_m'(Ka) - \frac{H_m(Ka)}{a} \right) \right|^2 \right] \\ \beta_m &= 4\pi a \mu m \left[\begin{aligned} &k^2 \left(2\mu H_m''(ka) - \lambda H_m(ka) \right) \left(K \bar{H}_m'(Ka) - \frac{\bar{H}_m(Ka)}{a} \right) \\ &+ \mu K^2 \left(2\bar{H}_m''(Ka) + \bar{H}_m(Ka) \right) \left(k H_m'(ka) - \frac{H_m(ka)}{a} \right) \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

Pour les produits scalaires impliquant les parties régulières, on obtient :

$$\hat{J}_{mn}^{\sigma\nu,11} = \hat{\alpha}_m^1 \cdot \delta_{mn} \cdot \delta_{\sigma\nu} \quad (\text{A1.13})$$

$$\hat{J}_{mn}^{\sigma\nu,22} = \hat{\alpha}_m^2 \cdot \delta_{mn} \cdot \delta_{\sigma\nu} \quad (\text{A1.14})$$

$$\hat{J}_{mn}^{\sigma\nu,12} = -(-1)^\sigma \hat{c}_m \cdot \delta_{mn} \cdot (1 - \delta_{\sigma\nu}) \quad (\text{A1.15})$$

$$\hat{J}_{mn}^{\sigma\nu,21} = -(-1)^\nu \hat{d}_m \cdot \delta_{mn} \cdot (1 - \delta_{\sigma\nu}) \quad (\text{A1.16})$$

où :

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_m^1 &= 2\pi a k^2 \left[J_m'(ka) \bar{H}_m'(ka) + \frac{m^2}{(ka)^2} J_m(ka) \bar{H}_m(ka) \right] \\ \hat{\alpha}_m^2 &= 2\pi a K^2 \left[J_m'(Ka) \bar{H}_m'(Ka) + \frac{m^2}{(Ka)^2} J_m(Ka) \bar{H}_m(Ka) \right] \end{aligned}$$

$$\hat{c}_m = 2\pi a k K \left[\frac{m}{K a} J'_m(k a) \bar{H}_m(K a) + \frac{m}{k a} J_m(k a) \bar{H}'_m(K a) \right]$$

$$\hat{d}_m = 2\pi a k K \left[\frac{m}{k a} J'_m(K a) \bar{H}_m(k a) + \frac{m}{K a} J_m(K a) \bar{H}'_m(k a) \right]$$

et

$$\hat{j}_{mn}^{\sigma\nu,11} = \hat{\alpha}_m^1 \cdot \delta_{mn} \cdot \delta_{\sigma\nu} \quad (\text{A1.17})$$

$$\hat{j}_{mn}^{\sigma\nu,22} = \hat{\alpha}_m^2 \cdot \delta_{mn} \cdot \delta_{\sigma\nu} \quad (\text{A1.18})$$

$$\hat{j}_{mn}^{\sigma\nu,12} = -(-1)^\sigma \hat{\beta}_m \cdot \delta_{mn} \cdot (1 - \delta_{\sigma\nu}) \quad (\text{A1.19})$$

$$\hat{j}_{mn}^{\sigma\nu,21} = -(-1)^\nu \hat{\gamma}_m \cdot \delta_{mn} \cdot (1 - \delta_{\sigma\nu}) \quad (\text{A1.20})$$

où :

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_m^1 &= 2\pi a \left[k^4 \left(2\mu J''_m(k a) - \lambda J_m(k a) \right) \left(2\mu \bar{H}''_m(k a) - \lambda \bar{H}_m(k a) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{2\mu m}{a} \right)^2 \left(k J'_m(k a) - \frac{J_m(k a)}{a} \right) \left(k \bar{H}'_m(k a) - \frac{\bar{H}_m(k a)}{a} \right) \right] \\ \hat{\alpha}_m^2 &= 2\pi a \left[\left(\mu K^2 \right)^2 \left(2J''_m(K a) + J_m(K a) \right) \left(2\bar{H}''_m(K a) + \bar{H}_m(K a) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{2\mu m}{a} \right)^2 \left(K J'_m(K a) - \frac{J_m(K a)}{a} \right) \left(K \bar{H}'_m(K a) - \frac{\bar{H}_m(K a)}{a} \right) \right] \\ \hat{\beta}_m &= 4\pi a \mu m \left[k^2 \left(2\mu J''_m(k a) - \lambda J_m(k a) \right) \left(K \bar{H}'_m(K a) - \frac{\bar{H}_m(K a)}{a} \right) \right. \\ &\quad \left. + \mu K^2 \left(k J'_m(k a) - \frac{J_m(k a)}{a} \right) \left(2\bar{H}''_m(K a) + \bar{H}_m(K a) \right) \right] \\ \hat{\gamma}_m &= 4\pi a \mu m \left[k^2 \left(K J'_m(K a) - \frac{J_m(K a)}{a} \right) \left(2\mu \bar{H}''_m(k a) - \lambda \bar{H}_m(k a) \right) \right. \\ &\quad \left. + \mu K^2 \left(2J''_m(K a) + J_m(K a) \right) \left(k \bar{H}'_m(k a) - \frac{\bar{H}_m(k a)}{a} \right) \right] \end{aligned}$$

ANNEXE 2

Dans cette annexe, nous allons établir l'égalité entre les deux expressions des multipôles croisés b_m trouvées dans le chapitre 3 (équations (3.11a) et (3.11b)). Pour ce faire et pour simplifier un peu les expressions, introduisons les notations suivantes :

$$x' = H'_m(k a) \quad , \quad x = \frac{m}{k a} H_m(k a)$$

$$y' = H'_m(K a) \quad , \quad y = \frac{m}{K a} H_m(K a)$$

$$X_1 = k^2 \left(2\mu H''_m(k a) - \lambda H_m(k a) \right) \quad , \quad X_2 = \frac{2\mu m}{a} \left(k H'_m(k a) - \frac{H_m(k a)}{a} \right)$$

$$Y_1 = \mu K^2 \left(2 H''_m(K a) + H_m(K a) \right) \quad , \quad Y_2 = \frac{2\mu m}{a} \left(K H'_m(K a) - \frac{H_m(K a)}{a} \right)$$

Avec ces notations, les expressions des coefficients $a_m^1, a_m^2, c_m, \hat{a}_m^1, \hat{a}_m^2, \hat{c}_m, \hat{d}_m, \alpha_m^1, \alpha_m^2, \beta_m, \hat{\alpha}_m^1, \hat{\alpha}_m^2, \hat{\beta}_m$ et $\hat{\gamma}_m$ (définis dans l'annexe 1) s'écrivent :

$$a_m^1 = 2\pi a k^2 \left[|x'|^2 + |x|^2 \right] \quad , \quad a_m^2 = 2\pi a K^2 \left[|y'|^2 + |y|^2 \right]$$

$$c_m = 2\pi a k K \left[x' \bar{y} + x \bar{y}' \right]$$

$$\hat{a}_m^1 = 2\pi a k^2 \left[\hat{x}' \bar{\hat{x}} + \hat{x} \bar{\hat{x}}' \right] \quad , \quad \hat{a}_m^2 = 2\pi a K^2 \left[\hat{y}' \bar{\hat{y}} + \hat{y} \bar{\hat{y}}' \right]$$

$$\hat{c}_m = 2\pi a k K \left[\hat{x}' \bar{\hat{y}} + \hat{x} \bar{\hat{y}}' \right] \quad , \quad \hat{d}_m = 2\pi a k K \left[\bar{\hat{x}} \hat{y}' + \bar{\hat{x}}' \hat{y} \right]$$

et

$$\alpha_m^1 = 2\pi a \left[|X_1|^2 + |X_2|^2 \right] \quad , \quad \alpha_m^2 = 2\pi a \left[|Y_1|^2 + |Y_2|^2 \right]$$

$$\beta_m = 2\pi a \left[X_1 \bar{Y}_2 + X_2 \bar{Y}_1 \right]$$

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_m^1 &= 2\pi a \left[\hat{X}_1 \bar{X}_1 + \hat{X}_2 \bar{X}_2 \right] \quad , \quad \hat{\alpha}_m^2 = 2\pi a \left[\hat{Y}_1 \bar{Y}_1 + \hat{Y}_2 \bar{Y}_2 \right] \\ \hat{\beta}_m &= 2\pi a \left[\hat{X}_1 \bar{Y}_2 + \hat{X}_2 \bar{Y}_1 \right] \quad , \quad \hat{\gamma}_m = 2\pi a \left[\bar{X}_1 \hat{Y}_2 + \bar{X}_2 \hat{Y}_1 \right]\end{aligned}$$

où les expressions de $\hat{x}, \hat{x}', \hat{y}, \hat{y}', \hat{X}_1, \hat{X}_2, \hat{Y}_1$ et $\hat{Y}_2$ sont les mêmes que pour les $x, x', y, y', X_1, X_2, Y_1$ et Y_2 mais avec la fonction de Hankel H_m remplacé par la fonction de Bessel J_m .

Substituons les expressions ci-dessus dans les relations concernées, on aura alors, tout calcul fait :

$$a_m^1 \hat{c}_m - c_m \hat{a}_m^1 = -(2\pi a)^2 k^3 K \left(\overline{x' y' - x y} \right) (x \hat{x}' - x' \hat{x}) \quad (\text{A2.1})$$

$$a_m^2 \hat{d}_m - \bar{c}_m \hat{a}_m^2 = -(2\pi a)^2 k K^3 \left(\overline{x' y' - x y} \right) (y \hat{y}' - y' \hat{y}) \quad (\text{A2.2})$$

en utilisant le Wronskien des fonctions de Hankel et de Bessel [1], on obtient :

$$(x \hat{x}' - x' \hat{x}) = -\frac{i m \pi}{(k a)^2} \quad (\text{A2.3})$$

$$(y \hat{y}' - y' \hat{y}) = -\frac{i m \pi}{(K a)^2} \quad (\text{A2.4})$$

en remplaçant les expressions (A2.3) et (A2.4) dans (A2.1) et (A2.2), on obtient :

$$a_m^1 \hat{c}_m - c_m \hat{a}_m^1 = 4 i m \pi^3 k K \left(\overline{x' y' - x y} \right) \quad (\text{A2.5})$$

$$a_m^2 \hat{d}_m - \bar{c}_m \hat{a}_m^2 = 4 i m \pi^3 k K \left(\overline{x' y' - x y} \right) \quad (\text{A2.6})$$

donc on a :

$$a_m^1 \hat{c}_m - c_m \hat{a}_m^1 = a_m^2 \hat{d}_m - \bar{c}_m \hat{a}_m^2$$

D'où l'égalité entre les deux expressions (3.11a) et (3.11b) obtenues pour les coefficients des multipôles croisés b_m .

REFERENCES

- [1] M. ABRAMOWITZ & I. A. STEGUN, Handbook of mathematical functions, Editions Dover, New York (1964).
- [2] E. ARGYROPOULOS, D. GINTIDES & K. KIRIAKI, On the condition number of integral equation in linear elasticity using the modified Green's function, Australian Mathematical Society (2002), 1-16.
- [3] E. ARGYROPOULOS & K. KIRIAKI, A criterion of optimization of a modified Green's function in linear elasticity, International Journal of Engineering Science, 37 (1999), 1441-1460.
- [4] E. ARGYROPOULOS, K. KIRIAKI & G. F. ROACH, A modified Green's function technique for the exterior Dirichlet problem in linear elasticity, Journal of Mech. appl. Math., 52 (1998), 275-295.
- [5] L. BENCHEIKH, Modified fundamental solutions for the scattering of elastic waves by a cavity: Numerical results, International journal for numerical methods in engineering, 36 (1993), 3283-3302.
- [6] L. BENCHEIKH, Modified fundamental solutions for the scattering of elastic waves by a cavity, [Q. J] Mech. appl. math., 43 (1990), Pt. 1.
- [7] L. BENCHEIKH, Scattering of elastic waves by cylindrical cavities: integral-equation methods and low-frequency asymptotic expansions, Thèse de Ph.D, Département de mathématiques, Université de Manchester, Grande Bretagne (1986).
- [8] Philipe G. Ciarlet. Introduction à l'analyse numérique et à l'optimisation. Dunod, 1990.
- [9] L. COLLATZ, Funktional analysis und numerische Mathematil, Springer, Berlin (1964).

- [10] Jean-Pierre Demailly. Analyse numérique et équations différentielles. Presses Universitaires de Grenoble, 1996.
- [11] Y. DJENAIHI & B. SAHLI , A new criterion of optimization of the cross multipole coefficients in a modified surface stress operator for the elastic two-dimensional case, International Journal of pure and applied mathematics, accepted 2019.
- [12] D. GINTIDES & L. MINDRINOS, The direct scattering problem of obliquely incident electromagnetic waves by a penetrable homogeneous cylinder. Journal of integral equations appl., 28 (2016), 91 - 122. doi: 10.1216/JIE-2016-28-1-91.
- [13] Steven Gortler , Michael F. Cohen, and Philipp Slusallek. Radiosity and relaxation methods .Princeton University, 1993.
- [14] D. GINTIDES & K. KIRIAKI, Solvability of the integro differential equation of Eshelby's equivalent inclusion method. The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 68 (2015), 85 - 96.
- [15] Paul S. Heckbert. Introduction to global illumination. SIGGRAPH '92, 1992.
- [16] Paul S. Heckbert. Introduction to finite element methods. Carnegie Mellon University, SIG-GRAPH '93, 1993.
- [17] Paul S. Heckbert. Finite element methode for radiosity. Carnegie Mellon University, SIG-GRAPH '93, 1993.
- [18] A. Heirich. Global illumination and Monte Carlo. 1997.
- [19] D.S. JONES, Integral equations for the exterior acoustic problem, [Q. J] Mech. appl. math., 27 (1974), 129-142.
- [20] R. E. KLEINMAN & G. F. ROACH, Operators of minimal norm via modified Green's functions, Proc. R. Soc. Edinburgh, 94 A (1983), 163-178.

- [21] R. E. KLEINMAN & R. KRESS, On the condition number of integral equations in acoustics using modified fundamental solutions, *IMA Journal of applied mathematics*, 31 (1983), 79-90.
- [22] M. KRASNOV, A. KISSELEV & G. MAKARENKO, *Equations intégrales*, Editions Mir, Moscou (1977).
- [23] Rainer Kress. *Linear integral equations*. Springer Verlag, 1999.
- [24] V. D. KUPRADZE, *Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity*, Editions North-Holland, Amsterdam (1979).
- [25] Gabriel Peyré. *Méthodes de projection pour les équations intégrales*. Université Rennes 1, 2001.
- [26] Pierre-Arnaud Raviart and Jean-Marie Thomas. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Dunod, 1993.
- [27] B. SAHLI, A new criterion of optimization of the simple multipole coefficients in a modified Green's function for the elastic two-dimensional case, *Applied Mathematics Letters* (Elsevier), 25 (2012), 77 - 80. doi:10.1016/j.aml.2011.07.014.
- [28] B. SAHLI, Optimal choice of the simple multipole coefficients by minimizing the condition number in linear elasticity, *Internat. J. Open Prob. Compt. & Math.*, IJOPCM 4.4 (2011), 13 - 25.
- [29] B. SAHLI & L. BENCHEIKH, Minimizing the condition number of integral operator in elastic Neumann problem using the modified fundamental solution, *American Institute of Physics AIP Conf. Proc.* 1309, 140 (2010). <http://dx.doi.org/10.1063/1.3525108>.
- [30] B. SAHLI, Operators of minimal norm via modified Green's function in two-dimensional elastic waves, *Internat. J. Open Prob. Compt. & Math.*, IJOPCM 3.3 (2010), 278 - 294.

- [31] B. SAHLI & L. BENCHEIKH, A criterion of optimization of a modified fundamental solution for two dimensional elastic waves, *Internat. J. Open Prob. Compt. & Math.*, IJOPCM 2.1 (2009), 113 - 137.
- [32] B. SAHLI & L. BENCHEIKH, Optimal choice of multipole coefficients of the modified Green's function in elasticity (case of circular boundaries), *Internat. J. Open Prob. Compt. & Math.*, IJOPCM 1.2 (2008), 160 - 178.
- [33] B. SAHLI, Optimisation des coefficients des multipôles de la fonction de Green modifiée par minimisation de la norme du noyau de l'opérateur intégral en élasticité. Thèse de Doctorat en Sciences, Département de mathématiques, Université de Sétif, Algérie (2010).
- [34] B. SAHLI, Optimisation des coefficients des multipôles de la fonction de Green modifiée, par minimisation de la norme de l'opérateur intégral en élasticité, Thèse de magister, département de mathématiques, Université de Batna, Algérie (1999).
- [35] V. SMIRNOV, Cours de mathématiques supérieures, Tome 2, Editions Mir, Moscou (1969).
- [36] T. H. TAN, Diffraction of time-harmonic elastic waves by a cylindrical obstacle, *Appl. Sci. Res.*, 32 (1976), 97-144.
- [37] F. URSELL, On the exterior problem of acoustics II, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, Vol. 84 (1978), 545-548.