الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Setif 1 University - Ferhat ABBAS

Setif 1 University Ferhat Abbas
Faculty of Sciences
Department of Mathematics

Faculty of Sciences

جامعة سطيف 1 فرحات عباس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

Master's Thesis

in Mathematics

Option: Nonlinear Analysis and Partial Differential Equations

Theme :

Solving an Advection-Diffusion Equation Using Physics-Informed Neural Networks: Verification against Finite Volume method

Presented by

Miss. **Fatima HARZALLAOUI**

Supervisor: **Hadjer Hechaichi**

Thesis defended on June 22, 2026, in front of the jury composed of:

Ms.	Karima Laidoune	MCB.	Setif 1 University Ferhat Abbas	Examiner
Mr.	Aissa Aibeche	Prof.	Setif 1 University Ferhat Abbas	President
Ms.	Hadjer Hechaichi	MCB.	Setif 1 University Ferhat Abbas	Supervisor

2025/2026

Contents

General Introduction **2**

ACRONYMS AND SYMBOLS **4**

1 Fundamentals of PINNs and Finite Volume Method **6**

1.1 Finite volume method 6

1.1.1 Fundamental principles 6

1.1.2 Finite Volume Method in the One-Dimensional Case 7

1.2 Physics Informed Neural Networks (PINNs) 10

1.2.1 How Neural Networks work? 10

1.2.2 PINNs for 1D 12

1.3 Hybrid Methods: Finite Volume Method and PINNs 18

2 Mathematical Modeling **19**

2.1 Physical Setting and Main Assumptions 19

2.1.1 Spatial Domain and Geometry 19

2.1.2 Model Variables 20

2.1.3 Fundamental Biological Assumptions 20

2.2 The Principle of Mass Conservation 20

2.2.1 Integral Balance 20

2.2.2 The Continuity Equation 21

2.3 Flux Formulations 21

2.3.1 Modelling the Diffusive Flux 21

2.3.2 Modelling the Advective Flux 21

2.4 The Final Governing Equation 21

2.4.1 Total Flux Assembly 21

2.4.2 The Model Equation 22

2.4.3 Physical Reading of the Equation 22

2.5 Initial and Boundary Conditions 22

2.5.1 Initial Condition 22

2.5.2 Boundary Condition 22

2.6 The Complete System 23

3 Numerical simulations and comparative analysis **24**
3.1 The Study in General in Dimension 2 24
3.1.1 Formulation of the Complete 2D Model 24
3.1.2 Finite Volume Method (FVM) in 2D 25
3.1.3 Physics-Informed Neural Networks (PINNs) in 2D 28
3.2 Numerical simulation 31
3.2.1 Finite Volume Discretization 31
3.2.2 Construction of 2D Numerical Fluxes 33
3.2.3 Discrete Equation and Stencil Coefficients 35
3.2.4 Block-Tridiagonal Matrix System 36
3.2.5 Numerical Coefficient Values (Square mesh $h_x = h_y = h = \frac{1}{N}$) . . . 37
3.2.6 Mathematical Properties in 2D 38
3.2.7 Truncation Error and Convergence Order 40
3.2.8 Initialisation and Numerical Verification 42
3.2.9 2D Extension of PINNs on $\Omega = [0, 1]^2$ 44
3.3 Comprehensive Comparison 53

General Conclusion **54**

Bibliography **55**

Abstract

This thesis presents a concise comparative study between the classical Finite Volume Method (FVM) and the modern, mesh-free Physics-Informed Neural Networks (PINNs). Both approaches are evaluated by solving the advection-diffusion equation, which models bacterial chemotaxis spaces over time. The FVM relies on traditional grid discretization and an implicit Euler scheme, guaranteeing strict physical mass conservation. Conversely, PINNs embed the governing equations directly into a deep learning loss function, utilizing automatic differentiation to bypass classical mesh constraints. Numerical simulations show that while FVM ensures absolute conservative stability, PINNs offer a flexible, mesh-free alternative for complex mathematical domains.

Keywords: Finite Volume Method, PINNs, Advection-Diffusion, Chemotaxis, Numerical Simulation.

الملخص

تقدم هذه المذكرة دراسة مقارنة موجزة بين منهجية عددية كلاسيكية وهي آطريقة الأحجام المحدودةْ ، وأسلوب حديث قائم على الذكاء الاصطناعي وهو الشبكات العصبية المستندة إلى الفيزياءْ . تتركز المقارنة حول حل معادلة الحمل والانتشار المستخدمة في نمذجة الانتحاء الكيميائي للبكتيريا عبر الزمن. تعتمد على تقسيم شبكي تقليدي ومخطط زمني ضمني يضمن الصون الصارم للكتلة الفيزيائية. في المقابل، تقوم بدمج المعادلات التفاضلية مباشرة داخل دالة خسارة التعلم العميق باستخدام التفاضل التلقائي دون الحاجة لشبكة هندسية. وتوضح نتائج المحاكاة أنه بينما تتميز بالاستقرار وصون القوانين، تقدم بديلاً مرناً يتجاوز قيود التفكيك العددي التقليدي.

الكلمات المفتاحية : طريقة الأحجام المحدودة، الشبكات العصبية المستندة إلى الفيزياء، الحمل والانتشار، الانتحاء الكيميائي، المحاكاة العددية.

Résumé

Cette thèse présente une étude comparative concise entre la Méthode des Volumes Finis (FVM) et les Réseaux de Neurones Informés par la Physique (PINNs) pour la résolution d'EDP. L'application est centrée sur l'équation d'advection-diffusion modélisant le chimiotactisme bactérien au cours du temps. La FVM repose sur une discrétisation par maillage et un schéma d'Euler implicite, assurant une conservation stricte de la masse. En contrepartie, les PINNs intègrent les lois physiques directement dans la fonction de perte d'un réseau de neurones via la différentiation automatique, s'affranchissant ainsi du maillage. Les simulations numériques indiquent que si la FVM garantit la stabilité conservative, les PINNs offrent une alternative flexible et prometteuse pour les domaines complexes.

Mots-clés : Volumes Finis, PINNs, Advection-Diffusion, Chimiotactisme, Simulation Numérique.