

Chapitre II

GENERALITES SUR LA ROBOTIQUE ET LES BRAS MANIPULATEURS

Généralités sur la Robotique et les Bras Manipulateurs

II.1 Introduction

L'accroissement continu de l'utilisation des manipulateurs robotiques dans diverses applications est motivé par les besoins et les demandes en automatisation et les besoins industriels. Le contrôle des systèmes mécaniques, plus particulièrement les manipulateurs robotiques, est un domaine actif de la recherche appliquée. Les applications importantes des robots ne sont pas limitées seulement à celles qui remplacent l'être humain, tels que le déplacement des matériaux, des pièces ou des éléments spécialisés, mais également là où la présence de l'homme est soit indésirable, tels que les milieux explosifs et radioactifs, soit impossible telles que l'exploration planétaire et la réparation de satellites.

D'après l'association Française de Normalisation (AFNOR) : « Un robot est un manipulateur commandé en position, reprogrammable, polyvalent, à plusieurs degrés de libertés, capable de manipuler des matériaux, des pièces, des outils et des dispositifs spécialisés, au cours de mouvements variables et programmés pour l'exécution d'une variété de tâches. Il a souvent l'apparence d'un ou plusieurs bras se terminant par un poignet. Son unité de commande utilise, notamment un dispositif de mémoire et éventuellement de perception et d'adaptation à l'environnement et aux circonstances. Ces machines polyvalentes sont généralement étudiées pour effectuer la même fonction de façon cyclique et peuvent être adaptées à d'autres fonctions sans modification permanente du matériel » [24].

Selon le type de tâche et le secteur d'application, le robot aura une architecture mécanique et un système de contrôle-commande différents ; ces tâches peuvent être exécutées dans un milieu normal ou hostile :

- Manutention de pièces.
- Soudage (assurer une bonne précision de la trajectoire de soudure).
- Peinture (il doit être animé d'une grande vitesse).

- Assemblage (l'exigence d'une très grande précision de positionnement).
- Aider le chirurgien dans une opération (robotique médicale).
- Robot mobile évoluant dans un environnement inconnu et sur sol accidentée (la robotique militaire).

II.2 Historique

- **1136-1206 : Al-Djazari [25], *Fondateur de la robotique, Président du Conseil des ingénieurs de la Cour Royal, pendant la civilisation islamique Abbasside*« l'âge d'or »**

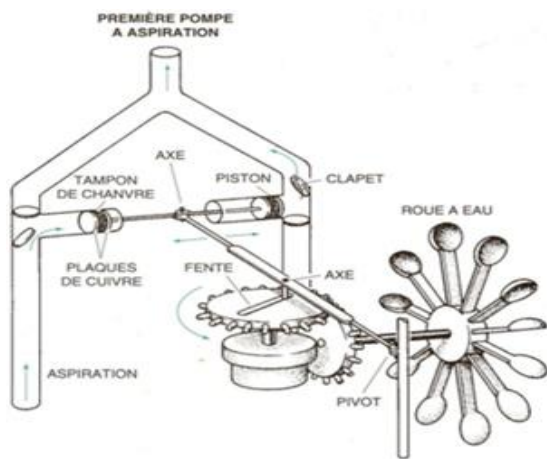
C'est le génie arabe syrien musulman considéré comme l'un des plus grands ingénieurs, et inventeurs dans l'histoire. À la demande du prince Bakr, Il a précédé le monde en inventant le premier robot, qui aide son maître à faire les ablutions. Le robot est sous forme d'un garçon qui tient dans sa main droite une cruche d'eau, et dans l'autre une serviette, et sur son turban un oiseau, et au moment de la prière l'oiseau siffle, ensuite verse de l'eau dans la cruche d'une certaine quantité, et après avoir terminé les ablutions, il lui donne la serviette (Fig. II .1) [26]. Dans son livre intitulé " الجامع بين العلم والعمل النافع " في صناعة الحيل " Al-Jazari recense 55 types de machines, dont beaucoup n'étaient connues nulle part auparavant, y compris la pompe hélicoïdale qui aspire l'eau de bas en haut vers le déversoir (Fig. II.2) [27,28], des horloges à eau avec un système d'auto-alarme, des fontaines à jets d'eau, des instruments de musique. L'une de ces innovations impressionnantes dont il été très fière est la légendaire horloge éléphant (Fig. II.3) [29].



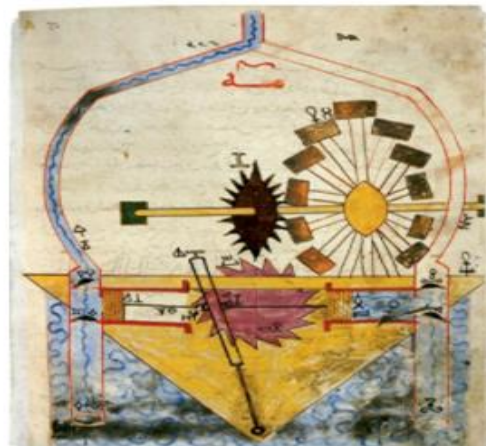
Fig. II .1 : Le premier robot, qui aide son maître à faire les ablutions, musée Istanbul.



Fig. II.2 : Reproduction de l'horloge de l'éléphant pour un centre commercial de Dubaï.



(a)



(b)

Fig. II.3 : (a) Schéma moderne du système inventé par al-Jazari. (b) Première Pompe à aspiration à double piston.

Les appareils décrits dans l'ouvrage sont des automates complexes, par la nature des mécanismes, et par le nombre de principes mécaniques qui interviennent dans un même appareil. On y découvre des innovations importantes apparus pour la première fois au monde, comme les engrenages, l'utilisation d'un mécanisme équivalent à celui du vilebrequin, et l'introduction de soupapes coniques. Le manuscrit arabe existe en plusieurs exemplaires dans des bibliothèques tels que :

- Istanbul : Topkapi Saray 3472, 3450, 3461
- Oxford : Bodleian Library MS. Graves 27 et MS Frazer 186.

- **1961 Unimate** : Premier robot industriel aux Etats-Unis.



Fig. II .4 : Unimate.

- **1973 Wabot-1** :
Premier robot humanoïde à marche bipède,



Fig. II .5 : Wabot-1

- **1974 Cincinnati Milacron T3** :
Premier robot contrôlé par micro-ordinateur.



Fig II .6 : Cincinnati Milacron T3

- **1978 Hirata AR-300** :
Premier robot SCARA



Fig II .7 : Hirata AR-300

- **1983 Arthrobot :**

Le premier robot chirurgical au monde est le Arthrobot développé et utilisé pour la première fois à Vancouver en 1983

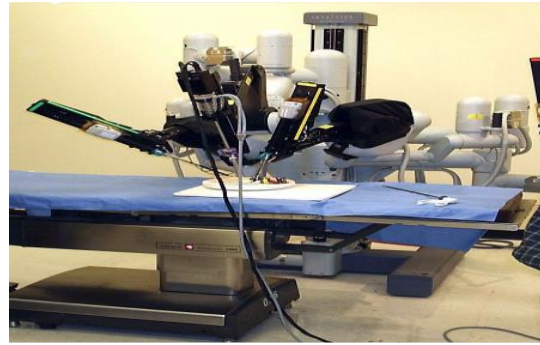


Fig. II .8 : Hirata AR-300

- **2000 ASIMO :**

ASIMO (pour **A**dvanced **S**tep in **I**nnovative **M**Obility) est un robot humanoïde développé par la firme japonaise Honda Motor et introduit au Robot Hall of Fame de Pittsburgh en 2000 comme étant le premier robot humanoïde capable de marcher de façon dynamique.

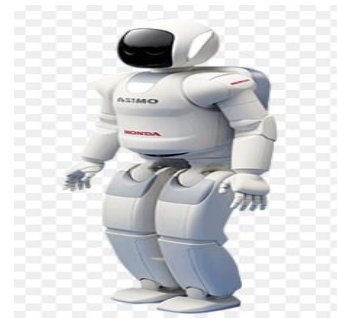


Fig. II .9 : ASIM

- **6 août 2012 Le rover curiosity :**

Le rover curiosity sur mars



Fig. II .10 : Le rover curiosity

- **2016 Ocean One :**

Du 10 au 15 avril 2016, l'équipe d'Oussama Khatib de l'Université Stanford a collaboré avec le département des recherches archéologiques subaquatiques et sous-marines (Drassm) pour effectuer la première plongée en mer du robot Ocean One. C'est le premier robot humanoïde au monde à avoir plongé en mer à près de 100 mètres de profondeur.

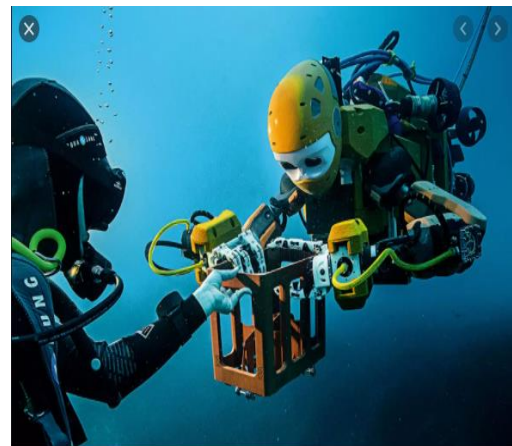


Fig. II .11: Ocean One

- **Robot volant**

Un drone désigne un aéronef sans pilote à bord, il peut avoir un usage civil ou militaire.



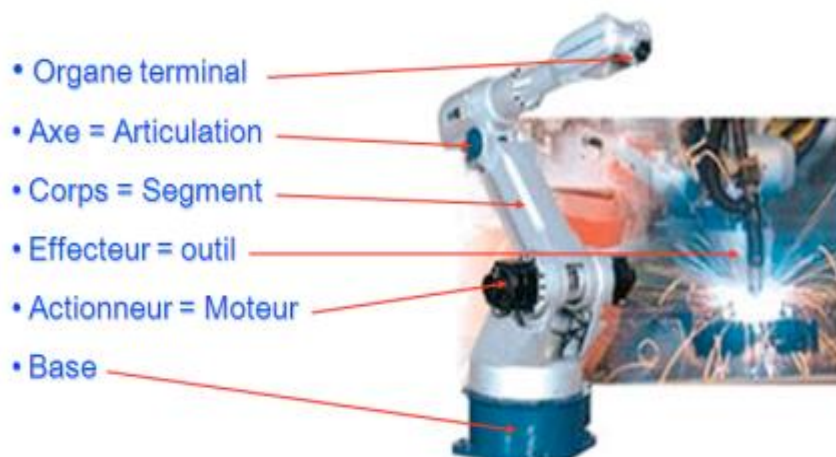
Fig. II .12 : Le drone

II.3 Le bras manipulateurs

Le bras manipulateur est un mécanisme ayant une structure plus ou moins proche de celle du bras humain dans le cas des robots manipulateurs. Il permet de remplacer, ou de prolonger son action. Son rôle est d'amener l'organe terminal dans une situation (position et orientation) donnée, selon des caractéristiques de vitesse et d'accélération données. Son architecture est une chaîne cinématique de corps, généralement rigides (ou supposés comme tels), assemblés par des liaisons appelées articulations. Sa motorisation est réalisée par des actionneurs électriques, pneumatiques ou hydrauliques qui transmettent leurs mouvements aux articulations par des systèmes appropriés [30].

II.3.1 Concepts de base [31]

Un robot est constitué des éléments suivants :



II.3.1.1 Articulation

Une articulation lie deux corps successifs en limitant le nombre de degré de liberté de l'un par rapport à l'autre. Soit m le nombre de degré de liberté résultant, encore appelé mobilité de l'articulation.

La mobilité d'une articulation est telle que :

$$0 \leq m \leq 6$$

Lorsque $m = 1$; ce qui est fréquemment le cas en robotique, l'articulation est dite simple : soit rotoïde, soit prismatique.

a. Articulation rotoïde

Il s'agit d'une articulation de type pivot, notée R, réduisant le mouvement entre deux corps à une rotation autour d'un axe qui leur est commun comme le montre la figure (II. 13). La situation relative entre les deux corps est donnée par l'angle autour de cet axe.

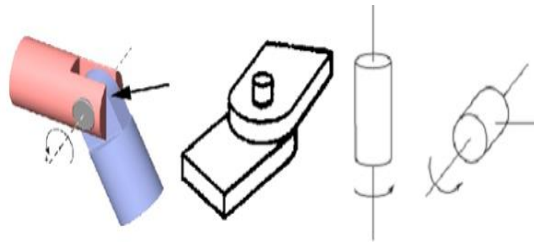


Fig. II .13 : Articulation rotoïde

b. Articulation prismatique

Il s'agit d'une articulation de type glissière, notée P, réduisant le mouvement entre deux corps à une translation le long d'un axe commun. La situation relative entre les deux corps est mesurée par la distance le long de cet axe figure (II .14).

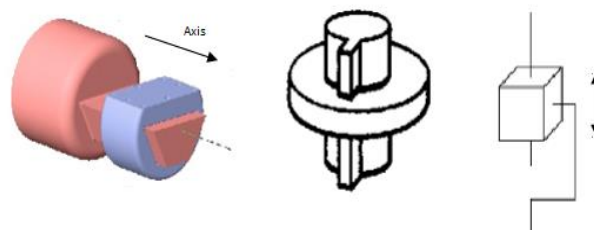


Fig. II .14 : Articulation prismatique

II.3.1.2 Organe terminal

Désigne tout dispositif destiné soit à manipuler des objets comme les dispositifs de serrage (pinces à deux ou trois doigts), les dispositifs magnétiques ou à dépression (ventouse), soit à transformer (outils de découpe, torche de peinture, torche de soudage). Il s'agit d'une interface permettant au robot d'interagir avec son environnement.

II.3.1.3 Les actionneurs

Pour être animé, le bras comporte des moteurs le plus souvent associés à des transmissions (courroies crantées), l'ensemble constitue les actionneurs. Les actionneurs utilisent fréquemment des moteurs électriques à aimant permanent, à courant continu. On trouve de plus en plus les servomoteurs, ou, pour de petits robots, des moteurs pas à pas. Pour les robots devant manipuler de très lourdes charges (par exemple, une pelle mécanique), les actionneurs sont le plus souvent hydrauliques, agissant en translation (vérin hydraulique) ou en rotation (moteur hydraulique). Les actionneurs pneumatiques sont d'un usage général pour les manipulateurs à cycles (robots tout ou rien). Un manipulateur à cycles a un nombre limité de degrés de liberté permettant une succession de mouvements contrôlés uniquement par des capteurs à la course désirée.

II.3.1.4 Les capteurs

La perception permet de gérer les relations entre le robot et son environnement. Les organes de perception sont des capteurs dits proprioceptifs lorsqu'ils mesurent l'état interne du robot (positions et vitesses des articulations) et extéroceptifs lorsqu'ils recueillent des informations sur l'environnement (détection de présence, de contact, mesure de distance, vision artificielle).

II.3.1.5 Le système de commande

La partie commande synthétise les consignes des asservissements pilotant les actionneurs, à partir de la fonction de perception et des ordres de l'utilisateur.

II.4 Classification des robots suivant leurs chaînes cinématiques [32]

Un robot se présente souvent sous la forme d'un ou plusieurs bras se terminant par un poignet. Une chaîne cinématique est un ensemble de pièces liées par des liaisons mécaniques. On appelle chaîne cinématique simple toute chaîne cinématique où chaque pièce (corps C_n) à une ou deux liaisons seulement. On appelle chaîne cinématique complexe toute chaîne cinématique contenant une pièce (ou plusieurs pièces) ayant trois liaisons ou plus. Les chaînes peuvent être soit en série, ou parallèle, ou bien arborescentes.

II.4.1 Chaîne cinématique série

Une chaîne cinématique simple ouverte est une succession de solides placés en série et liés entre eux un à un par des liaisons simples. Chaque articulation est commandée par un actionneur situé à l'endroit de l'articulation ou sur un des segments précédents.

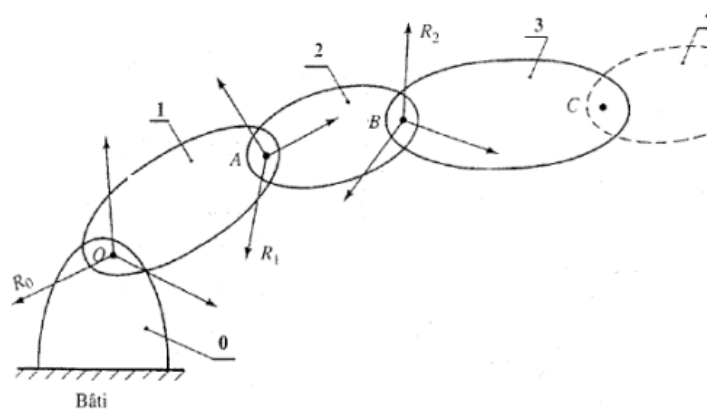


Fig. II .15 : Chaîne cinématique série

Les robots à chaîne cinématique série ont pour avantage de disposer d'un grand volume de travail et d'être relativement simples sur le plan des calculs liés à leur commande.

II.4.2 Chaîne cinématique arborescente

Un robot à chaîne cinématique arborescente est constitué de plusieurs chaînes cinématiques ouvertes reliées à un corps central.

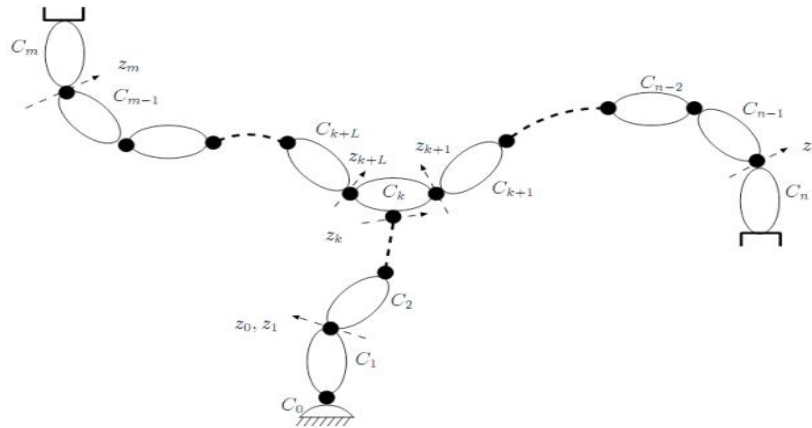


Fig II .16 : Chaîne cinématique arborescente

En fonctionnement, un robot à chaîne cinématique arborescente peut devenir un robot à chaîne cinématique fermée par la saisie d'une pièce avec deux bras. Ce type de structure est davantage utilisé pour les robots de service (robots marcheurs, robot humanoïde) mais depuis les années 2010 des robots manipulateurs industriels à deux bras sont proposés pour réaliser des tâches particulièrement complexes.

II.4.3 Chaîne cinématique parallèle

Un robot parallèle est un manipulateur, en chaîne cinématique fermée.

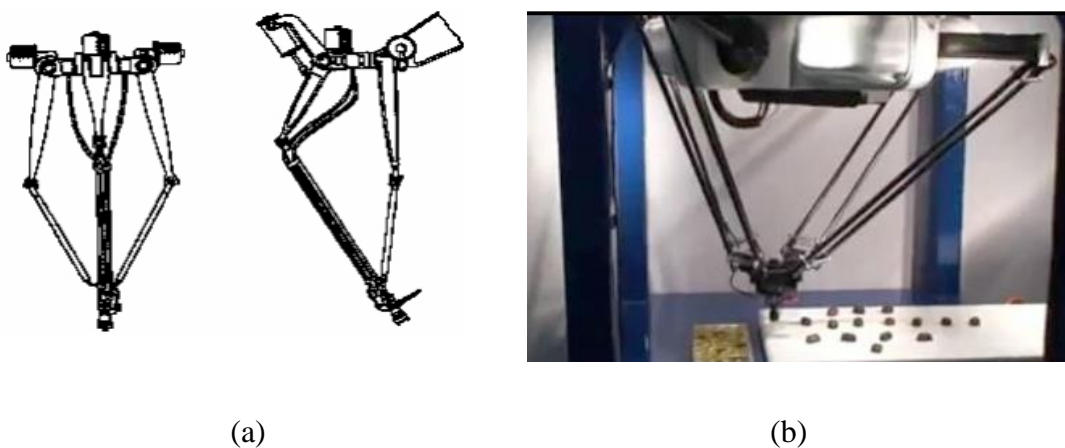


Fig II .17 : (a) Architecture parallèle d'un robot, (b) robot parallèle

Robots sériels	Robots parallèles
<ul style="list-style-type: none"> • Succession de segments en série de la base vers l'effecteur • Chaîne cinématique ouverte • Important espace de travail • Faible précision • Faible charge transportable • Faible rigidité 	<ul style="list-style-type: none"> • Tous les segments sont au contact de la base et de l'effecteur • Chaîne cinématique fermée • Espace de travail restreint • Grande précision • Lourde charge transportable • Très rigide

Tableau I.1 : Comparaison entre les robots sériels et les robots parallèles

II.5 Configurations géométriques des robots à chaîne cinématique série

Les robots à chaîne cinématique série sont classés suivant leurs configurations géométriques, autrement dit par des articulations prismatiques (P) ou rotoïdes (R), comme suit [31, 32] :

II.5.1 Robots cartésiens

Trois articulations prismatiques dont les axes sont typiquement mutuellement orthogonaux (PPP), 3 D.D.L. Leurs caractéristiques sont définies comme suit :

- La structure cartésienne offre une très bonne rigidité mécanique et une grande précision.
- la structure présente une faible dextérité car toutes les articulations sont prismatiques
- Utilisation typique : manutention et assemblage
- Actionneurs : généralement électriques, parfois pneumatiques

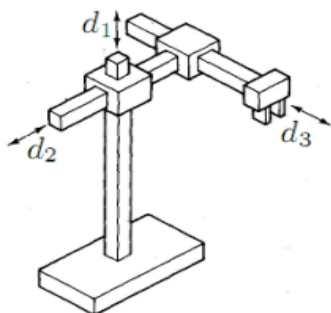


Fig. II .18 : Manipulateur cartésien

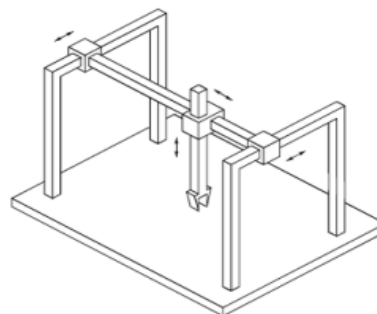


Fig. II .19 : Structure de type « Gantry »

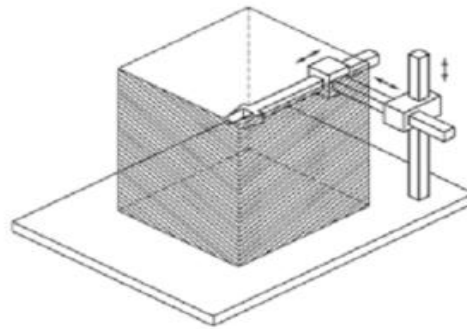


Fig. II .20 : Volume de travail : parallélépipède rectangulaire

II.5.2 Robots cylindriques

La géométrie cylindrique diffère de la géométrie cartésienne en ce que la première articulation prismatique est remplacée par une articulation rotoïde (RPP) ; 3 D.D.L.

- La structure cylindrique offre une très bonne rigidité mécanique.
- L'articulation prismatique horizontale permet à l'organe terminal d'accéder à des cavités horizontales.
- Utilisation typique : transport d'objets, même de grande taille (dans un tel cas, des moteurs hydrauliques sont préférés par rapport aux moteurs électriques)

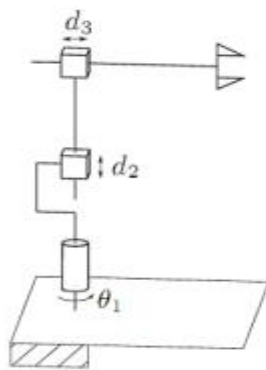


Fig. II .21 : Manipulateur cylindrique



Fig. II .22 : Plate Cran EX de Hudson

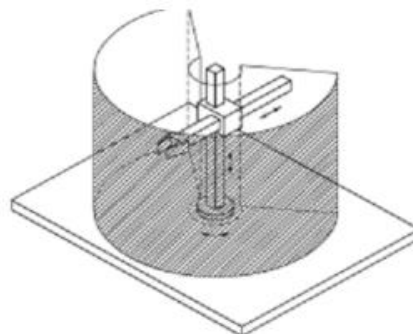


Fig. II .23 : Volume de travail : portion de cylindre creux

II.5.3 Robots sphériques

La géométrie sphérique diffère de la géométrie cylindrique en ce que la deuxième articulation prismatique est remplacée par une articulation rotoïde (RRP) ; 3 D.D.L.

- La rigidité mécanique est inférieure à celle des deux robots précédents et la construction mécanique est plus complexe.
- Le volume de travail peut comprendre la base de support du robot, ce qui permet la manipulation d'objets sur le plancher.
- Utilisation typique : usinage.

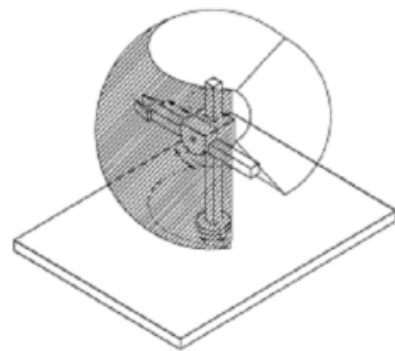
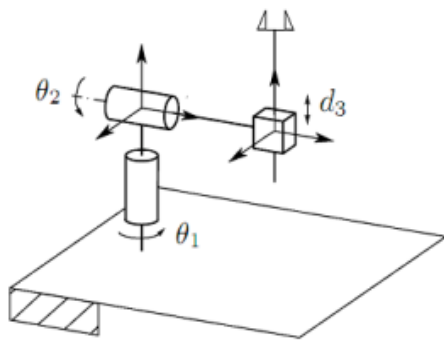


Fig. II .24 : Manipulateur sphérique **Fig. II .25 :** Volume de travail : portion d'une sphère creuse

L'un des robots sphériques les plus utilisés dans l'industrie est le robot Manipulateur **SCARA**: Selective Compliance Assembly Robot Arm-Manipulateur sphérique à géométrie "spéciale" :

- Deux articulations rotoïdes et une articulation prismatique (RRP) : tous les axes sont parallèles ; 3 D.D.L.
- Rigidité élevée pour charges verticales et souplesse aux charges horizontales.
- Bien adapté à des tâches de montage vertical et à la manipulation de petits objets.
- Précis et très rapide.

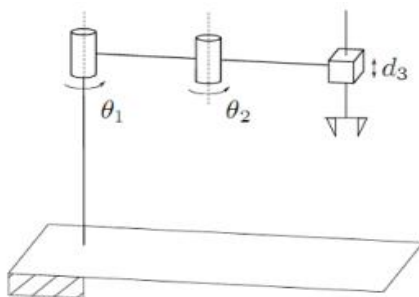


Fig. II .26 : Manipulateur SCARA

Fig. II .27 : Sankyo Seiki

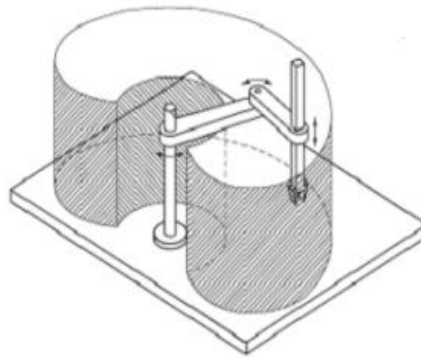


Fig. II.28 : Volume de travail cylindrique

II.5.4 Robots anthropomorphe

Ce type de robot est caractérisé comme suit :

- Trois articulations rotoïdes (RRR) ; 3 D.D.L : l'axe de la première articulation est orthogonale aux axes des deux autres qui sont parallèles.
- En raison de sa ressemblance avec le bras humain, la deuxième articulation est appelée l'articulation de l'épaule et la troisième, l'articulation du coude puisqu'elle relie le bras avec l'avant-bras.
- Manipulateur le plus agile car toutes les articulations sont rotoïdes.
- Grand volume de travail par rapport à l'encombrement du robot.
- Large gamme d'applications industrielles.

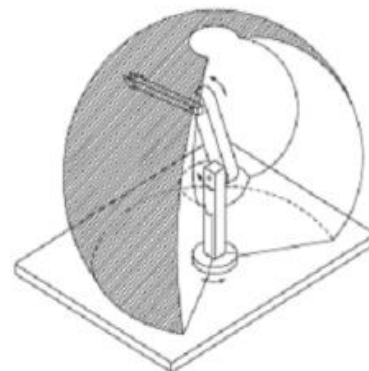
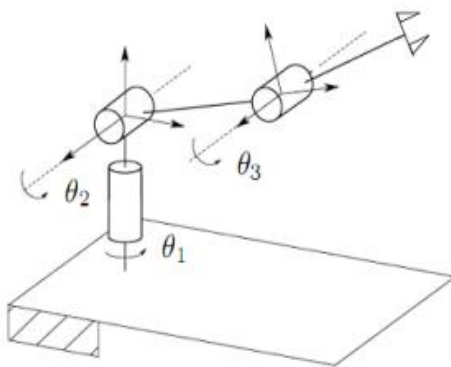


Fig. II. 29 : Manipulateur anthropomorphe **Fig. II. 30 :** Volume de travail : portion de sphère

II.6 Modèles de changement de coordonnées

II.6.1 Position d'un point

Soit le point M appartenant au solide (S), identifié dans l'espace par le repère R_1 , on utilise les coordonnées cartésiennes pour décrire la position de M par rapport à un référentiel noté R_0 .

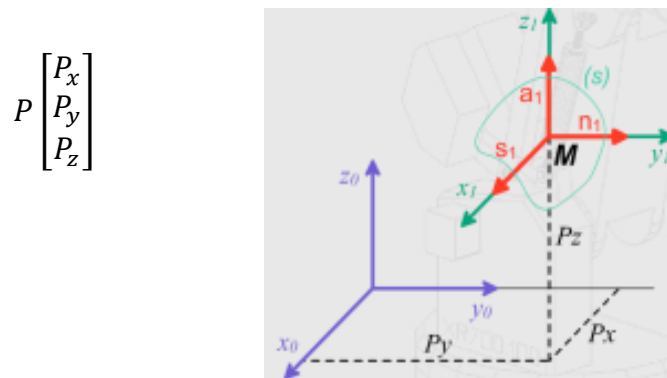


Fig. II. 31 : Coordonnées cartésiennes du point M

II.6.2 Matrice de rotation plane

Soit deux repères orthonormés directs partageant la même origine : $R_1(O, x_1, y_1, z_1)$ et $R_2(O, x_2, y_2, z_2)$ (Fig. II. 32). On effectue une transformation amenant R_1 vers R_2 : rotation d'un angle θ autour de l'axe z, puis on exprime le repère R_2 dans le repère R_1 .

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 \cos \theta - y_2 \sin \theta \\ y_1 &= x_2 \sin \theta + y_2 \cos \theta \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$z_1 = z_2$$

On met en évidence la matrice de passage de

R_1 vers R_2 :

$$\text{Rotation}(z_1, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

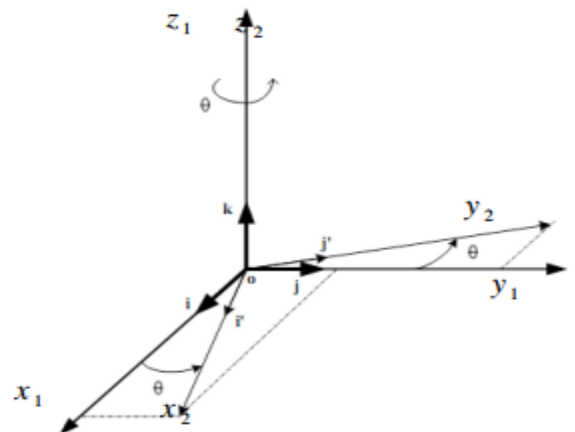


Fig. II. 32 : Rotation du repère R_1
vers le repère R_2

Cette matrice est appelée matrice de rotation, matrice de passage ou matrice de changement de base, ses neuf composantes sont nommés « cosinus directeurs ».

Il est possible de définir d'autres rotations par rapport aux axes x et y comme suit :

$$\text{Rotation}(x_1, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\text{Rotation}(y_1, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

II.6.3 Orientation déterminée par trois angles

On peut exprimer les trois D.D.L de rotation de R_3 par rapport à R_0 par trois angles. Pour ce faire, on définit $R_3(O, x_3, y_3, z_3)$, ayant même origine que R_0 . Le repère R_3 peut se déduire de R_0 par trois rotations successives, en définissant deux repères intermédiaires R_1 et R_2 . La première rotation fait passer de R_0 à R_1 , la seconde de R_1 à R_2 et la troisième de R_2 à R_3 . Ces trois rotations peuvent alors être définies de différentes manières (à condition que deux rotations consécutives ne soient pas autour du même axe).

A. Angles d'Euler

Les angles d'Euler définissent les trois rotations suivantes (Fig. II. 33) :

- la rotation φ , autour de l'axe z_0 , fait passer de R_0 à R_1 .
- la rotation θ , autour de l'axe x_1 , fait passer de R_1 à R_2 .
- la rotation ψ , autour de l'axe z_2 , fait passer de R_2 à R_3 .

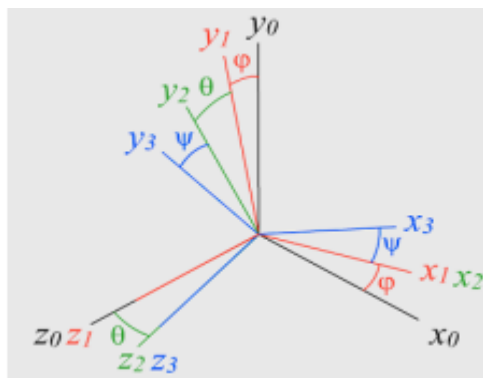


Fig. II. 33 : Les angles d'Euler

La transformation entre R_0 et R_3 définie par les angles d'Euler s'écrit donc :

$${}^0R_3 = Rot(z_0, \varphi) * Rot(x_1, \theta) * Rot(z_2, \psi) \quad (2.2)$$

$$Rot(z_0, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Rot(x_1, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$Rot(z_2, \psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc :

$${}^0R_3 = \begin{bmatrix} C\varphi.C\psi - S\varphi.C\theta.S\psi & -C\varphi.S\psi - S\varphi.C\theta.C\psi & S\varphi.S\theta \\ S\varphi.C\psi + C\varphi.C\theta.S\psi & -S\varphi.S\psi + C\varphi.C\theta.C\psi & -C\varphi.S\theta \\ S\theta.S\psi & S\theta.C\psi & C\theta \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

B. Les angles de Roulis, Tangage et Lacet

Ces angles, appelés également angles aéronautiques sont très utilisés dans le domaine industriel. A la différence des angles d'Euler, ces trois rotations s'effectuent par rapport à un référentiel fixe. L'orientation du repère R_3 dans un repère R_0 est donc spécifiée par trois angles : Roulis, Tangage et Lacet [32].

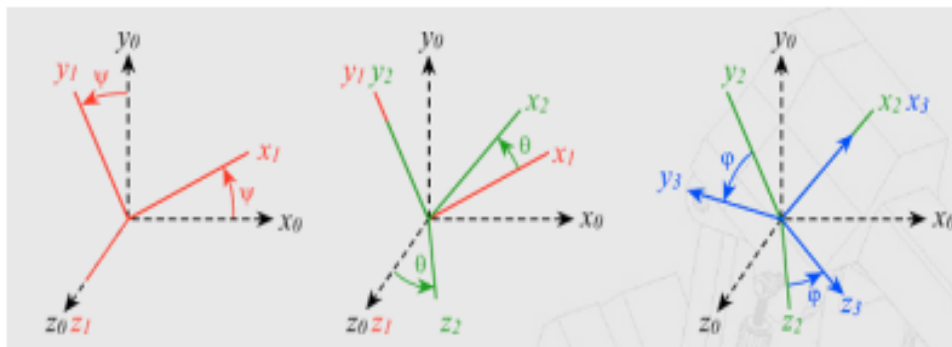


Fig. II. 34 : Les angles de Roulis, Tangage et Lacet

φ : Roulis : rotation autour de x_0

θ : Tangage : rotation autour de y_0

ψ : Lacet : rotation autour de z_0

La transformation entre R_0 et R_3 définie par les angles Roulis, Tangage et Lacet s'écrit :

$${}^0R_3 = Rot(z_0, \psi) * Rot(y_0, \theta) * Rot(x_0, \varphi) \quad (2.4)$$

$${}^0R_3 = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$${}^0R_3 = \begin{bmatrix} C\theta.C\psi & S\varphi.S\theta.C\psi - C\varphi.S\psi & C\varphi.S\theta.C\psi + S\varphi.S\psi \\ C\theta.S\psi & S\varphi.S\theta.S\psi + C\varphi.C\psi & C\varphi.S\theta.S\psi - S\varphi.C\psi \\ -S\theta & S\varphi.C\theta & C\varphi.C\theta \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

II.6.4 Transformations homogènes

La représentation d'opérations sous forme matricielle est très intéressante pour simplifier l'écriture. Il serait intéressant de pouvoir inclure aussi les translations sous forme matricielle. Pour faire cela on introduit les coordonnées homogènes. Il s'agit de former une matrice 4x4 avec la matrice orientation [32].

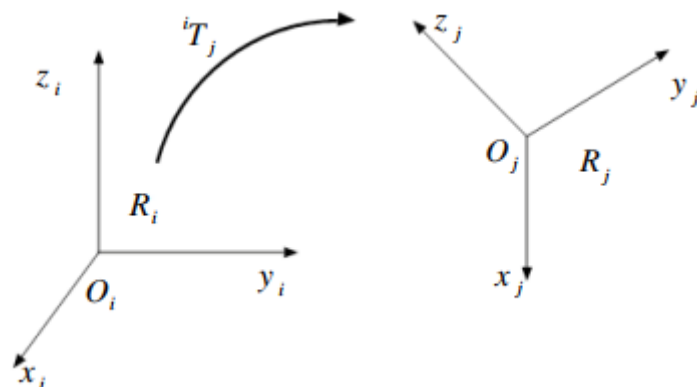


Fig. II. 35 : Transformation de repère

Le repère R_i subit une transformation pour être amené en R_j , cette transformation peut être décomposée en :

- Un changement de position caractérisé par trois translations.
- Un changement d'orientation défini par trois rotations.

${}^i T_j$ est la matrice de passage de R_i vers R_j , le repère R_j est exprimé dans R_i .

$${}^i T_j = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & P_x \\ s_y & n_y & a_y & P_y \\ s_z & n_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^i R_j & {}^i P_{O_j} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Où :

${}^i R_j$ Matrice (3×3) des rotations donnant l'orientation de R_j dans R_i .

${}^i P_{O_j}$ Matrice (3 × 1) des translations donnant la position de l'origine du repère R_j dans R_i .

$${}^i T_j = \begin{bmatrix} {}^i R_j & {}^i P_{O_j} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & {}^i P_{O_j} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^i R_j & 0_{3 \times 1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

II.6.5 Transformations homogènes consécutives

Si le repère R_a subit n transformations consécutives et si la $i^{\text{ème}}$ transformation ($i = 1, 2, \dots, n$) est définie par rapport au repère R_{i-1} , alors la transformation ${}^a T_n$ peut être déduite de la composition des multiplications à droite de ces transformations :

$${}^a T_n = {}^a T_1 * {}^1 T_2 * {}^2 T_3 \dots {}^{n-1} T_n \quad (2.7)$$

II.7 Modèles cinématiques

II.7.1 Modèle cinématique directe

Il s'agit d'une description mathématique donnant la position de l'organe terminal, calculée à partir des articulations rotoïdes et prismatiques constituant le robot.

a. Approche géométrique

Dans le cas où nous avons un nombre réduit d'articulations nous pouvons obtenir une relation entre les coordonnées de l'organe terminal par rapport au repère fixe, l'exemple suivant représente cette approche géométrique [17]

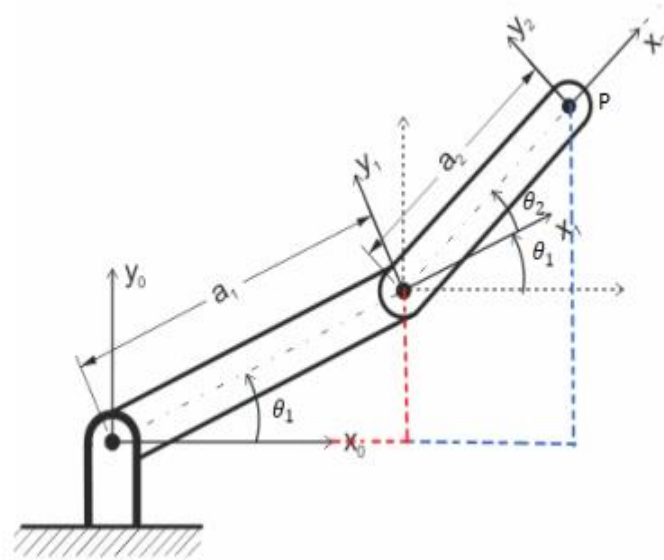


Fig. II. 36 : Approche géométrique

Nous avons :

$$\begin{aligned} X_p &= a_1 \cos(\theta_1) + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ Y_p &= a_1 \sin(\theta_1) + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Ainsi nous avons directement les coordonnées de l'organe terminal (p) dans le repère fixe (O, X_0 , Y_0). Lorsque l'architecture du robot est plus compliquée, notamment en trois dimensions, les coordonnées de l'organe terminal ne peuvent pas être calculées d'une manière aussi simple, elles peuvent être calculées par la méthode de Dénavit Hartenberg.

b. Convention de Dénavit Hartenberg (DH 1955)

La convention DH consiste en un ensemble de règles qui permettent de simplifier l'analyse de la cinématique directe. L'avantage de cette méthode devient apparente lorsque le nombre de liaison (prismatique et rotoïde) devient important. Ainsi l'application de cette méthode permet d'exprimer toutes les transformations homogènes de la chaîne cinématique en termes d'un produit de 4 transformations de bras comme suit [17] :

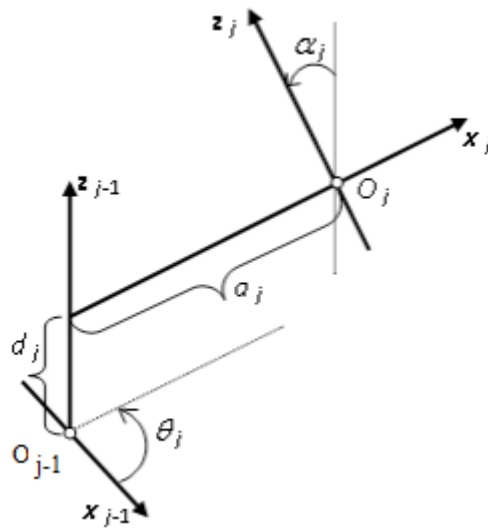


Fig. II. 37 : Exemple d'un système de coordonnées et paramètres de Denavit et Hartenberg.

La variable articulaire q_j associée à la $j^{\text{ème}}$ articulation est soit θ_j ou d_j , selon le type de l'articulation :

$$q_j = \bar{\sigma}_j * \theta_j + \sigma_j * r_j \quad (2.9)$$

$\sigma_j = 0$: Si l'articulation j est rotoïde.

$\sigma_j = 1$: Si l'articulation j est prismatique.

$$\bar{\sigma}_j = 1 - \sigma_j$$

La matrice ${}^{j-1}T_j$ qui représente la description du référentiel R_j par rapport au référentiel R_{j-1} peut être obtenue en fonction des paramètres de Denavit-Hartenberg par :

$${}^{j-1}T_j = \text{Rot}(z_{j-1}, \theta_j) * \text{Trans}(z_{j-1}, d_j) * \text{Trans}(x_j, a_j) * \text{Rot}(x_j, \alpha_j) \quad (2.10)$$

$${}^{j-1}T_j = \begin{bmatrix} C\theta_j & -S\theta_j & 0 & 0 \\ S\theta_j & C\theta_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_j \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha_j & -S\alpha_j & 0 \\ 0 & S\alpha_j & C\alpha_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{j-1}T_j = \begin{bmatrix} C\theta_j & -S\theta_j C\alpha_j & S\theta_j S\alpha_j & a_j C\theta_j \\ S\theta_j & C\theta_j C\alpha_j & -C\theta_j S\alpha_j & a_j S\theta_j \\ 0 & S\alpha_j & C\alpha_j & d_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les variables $\theta_j, a_j, d_j, \alpha_j$, sont des paramètres associés au lien j et l'articulation $j-1$. Cette matrice nous montre donc qu'avec cette méthode, que 4 paramètres sont suffisants pour caractériser une transformation homogène.

II.7.2 Modèle cinématique inverse [32]

Afin de faire fonctionner un bras manipulateur nous avons très souvent besoin de résoudre le problème de la cinématique inverse, ce dernier consiste à calculer les variables articulaires (angles, distance) que doivent atteindre les actionneurs connaissant les coordonnées (positions, orientations) de l'organe terminale. Pour le calcul du modèle géométrique inverse, on distingue parmi les méthodes analytiques les deux méthodes suivantes :

- **La méthode de Paul** : traite séparément chaque cas particulier et convient à la majorité des robots industriels.
- **La méthode de Peiper** : permet de résoudre le problème pour un nombre limité d'architectures simples (robots à 6 degrés de liberté, possédant 3 articulations rotoïdes d'axes concourants ou 3 articulations prismatiques).

A. Méthode de PAUL

Soit 0T_n la matrice de transformation homogène d'un robot :

$${}^0T_n = {}^0T_1 * {}^1T_2 * {}^2T_3 \dots {}^{n-1}T_n \quad (2.11)$$

On note :

$$U_0 = {}^0T_1 * {}^1T_2 * \dots * {}^{n-1}T_n = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & P_x \\ s_y & n_y & a_y & P_y \\ s_z & n_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

La matrice U_0 est la donnée du problème. Elle représente la situation de l'organe terminal dans le référentiel R_0 .

La résolution du problème consiste à trouver les variables articulaires. Cette méthode consiste à pré-multiplier successivement les deux membres de l'équation par les matrices

de transformation homogène inverse ${}^jT_{j-1}$ ($j = 1, \dots, n-1$) dont le but est d'isoler et d'identifier l'une après l'autre les variables articulaires recherchés.

Pour un robot à 6 D.D.L on procède comme suit :

- Multiplication à gauche par 1T_0 :

$${}^1T_0 * U_0 = {}^1T_2 * {}^2T_3 * {}^3T_4 * {}^4T_5 * {}^5T_6 \quad (2.13)$$

Le membre de gauche de cette équation est en fonction de q_1 uniquement tandis que le membre de droite est en fonction de q_2, q_3, q_4, q_5, q_6 déjà calculé par le modèle géométrique direct.

- Identification terme à terme des deux membres de l'équation précédente. On se ramène à un système d'une ou de deux équations fonction de q_1 uniquement.
- Multiplication à gauche de l'équation précédente par 2T_1 et calcul de q_2 .

La succession des équations permettant le calcul de tous les q_j est la suivante :

$$\begin{cases} U_0 = {}^0T_1 * {}^1T_2 * {}^2T_3 * {}^3T_4 * {}^4T_5 * {}^5T_6 \\ {}^1T_0 * U_0 = {}^1T_2 * {}^2T_3 * {}^3T_4 * {}^4T_5 * {}^5T_6 \\ {}^2T_1 * U_1 = {}^2T_3 * {}^3T_4 * {}^4T_5 * {}^5T_6 \\ {}^3T_2 * U_2 = {}^3T_4 * {}^4T_5 * {}^5T_6 \\ {}^4T_3 * U_3 = {}^4T_5 * {}^5T_6 \\ {}^5T_4 * U_4 = {}^5T_6 \end{cases}$$

D'une façon générale :

$$U_j = {}^2T_1 * U_{j-1} \quad (2.14)$$

B. Méthode de PIEPER

Pour qu'une solution analytique existe, la géométrie du système d'axes doit être particulière. Elle doit comporter :

- 3 articulations prismatiques
- 3 articulations rotoïdes concourantes

Pour un manipulateur à 6 liaisons ou bien articulation, on exploite plusieurs formes

d'équation, pour isoler au mieux, les différentes variables, comme le montre l'équation (2.15) :

$$\begin{cases} {}^0T_6 = {}^0T_1 * {}^1T_2 * {}^2T_3 * {}^3T_4 * {}^4T_5 * {}^5T_6 \\ {}^1T_0 * {}^0T_6 = {}^1T_6 \\ {}^2T_1 * {}^1T_0 * {}^0T_6 = {}^2T_6 \\ {}^3T_2 * {}^2T_1 * {}^1T_0 * {}^0T_6 = {}^3T_6 \\ {}^4T_3 * {}^3T_2 * {}^2T_1 * {}^1T_0 * {}^0T_6 = {}^4T_6 \\ {}^5T_4 * {}^4T_3 * {}^3T_2 * {}^2T_1 * {}^1T_0 * {}^0T_6 = {}^5T_6 \end{cases} \quad (2.15)$$

Le membre de gauche de la deuxième équation ne fait intervenir que q_1 . On peut déterminer l'expression de q_1 en identifiant l'une des composantes de la matrice figurant au membre de gauche avec un terme constant de la matrice du membre de droite. On progresse ensuite dans la résolution, variable après variable.

II.8 Modélisation dynamique des robots manipulateurs

Dans le but de développer des lois de commande performantes et d'atteindre les précisions demandées, il faut commencer par construire des modèles mathématiques précis, qui permettent d'établir des relations entre les couples (ou forces) exercés par les actionneurs et les positions, les vitesses, et les accélérations des articulations. Plusieurs approches sont proposées pour obtenir le modèle dynamique des robots, les plus utilisées sont la formulation de Newton-Euler et la formulation de Lagrange. L'approche de Newton-Euler est basée sur l'équilibre des forces et les moments qui agissent entre les articulations [33]. La formulation de Lagrange est une approche basée sur l'énergie [17]. Pour le même manipulateur, les deux approches donnent les mêmes équations du mouvement. Pour sa simplicité de calcul, la formulation de Lagrange est la plus utilisée pour la modélisation mathématique.

Considérons le robot décrit dans la figure (II. 33). L'énergie cinétique k du bras est décrite par la somme [17] :

$$k(q, \dot{q}) = k_1(q, \dot{q}) + k_2(q, \dot{q}) \quad (2.16)$$

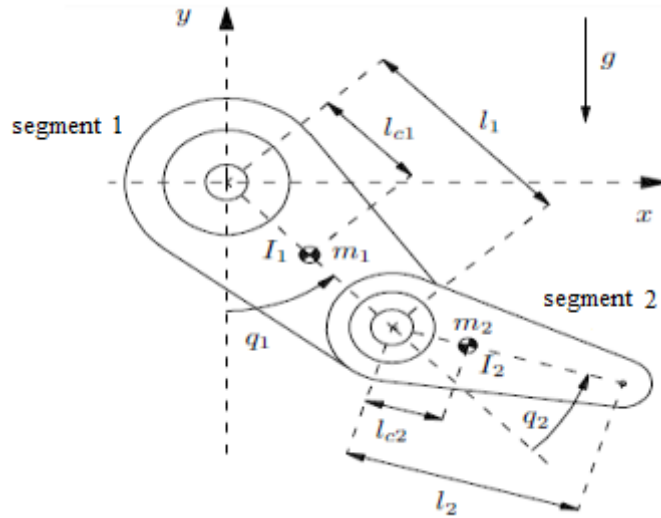


Fig II. 38 : Schéma du robot Pelican à 2 segments

Avec $K_1(q, \dot{q})$ et $K_2(q, \dot{q})$ sont les énergies cinétiques associées au centres de masses et respectivement. Les coordonnées du centre de masse de la liaison (1) selon le plant (x, y) :

$$\begin{aligned} x_1 &= l_{c1} \sin(q_1) \\ y_1 &= -l_{c1} \cos(q_1) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Le vecteur des positions articulaires q est défini comme suit :

$$q = [q_1 \quad q_2]^T \quad (2.18)$$

Le vecteur de vitesse v_1 de la même liaison (1) est :

$$v_1 = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{c1} \cos(q_1) \dot{q}_1 \\ l_{c1} \sin(q_1) \dot{q}_1 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Sachant que :

$$\|v_1\|^2 = v_1^T v_1 = l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 \quad (2.20)$$

Donc l'énergie cinétique correspondante à la 1^{er} liaison est obtenue par :

$$\begin{aligned} k_1(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} m_1 v_1^T v_1 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2 \end{aligned} \quad (2.21)$$

I_1 et I_2 désignent les moments d'inertie des deux segments.

Les coordonnées du centre de masse de la liaison (2) selon le plant (x, y) :

$$\begin{aligned} x_2 &= l_1 \sin(q_1) + l_{c2} \sin(q_1 + q_2) \\ y_2 &= -l_1 \cos(q_1) - l_{c2} \cos(q_1 + q_2) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Le vecteur de vitesse v_2 de la même liaison (2) est :

$$v_2 = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 + l_{c2} \cos(q_1 + q_2) [\dot{q}_1 + \dot{q}_2] \\ l_1 \sin(q_1) \dot{q}_1 + l_{c2} \sin(q_1 + q_2) [\dot{q}_1 + \dot{q}_2] \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

En utilisant les deux formules trigonométriques

$$\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1$$

$$\sin(q_1) \sin(q_1 + q_2) + \cos(q_1) \cos(q_1 + q_2) = \cos(q_2)$$

Nous obtenons :

$$\|v_2\|^2 = v_2^T v_2 = l_1^2 \dot{q}_1^2 + l_{c2}^2 [\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2] + 2l_1 l_{c2} [\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2] \cos(q_2) \quad (2.24)$$

Ce qui implique :

$$\begin{aligned} k_2(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} m_2 v_2^T v_2 + \frac{1}{2} I_2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2]^2 \\ &= \frac{m_2}{2} l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_{c2}^2 [\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2] \\ &\quad + m_2 l_1 l_{c2} [\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2] \cos(q_2) \\ &\quad + \frac{1}{2} I_2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2]^2 \end{aligned} \quad (2.25)$$

L'énergie potentielle est donnée par :

$$U(q) = U_1(q) + U_2(q) \quad (2.26)$$

Avec $U_1(q)$ et $U_2(q)$ sont les énergies potentielles associées aux masses m_1 et m_2 respectivement. Si l'énergie potentielle est égale à zéro lorsque $y = 0$ alors :

$$\begin{aligned} U_1(q) &= -m_1 l_{c1} g \cos(q_1) \\ U_2(q) &= -m_2 l_1 g \cos(q_1) - m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Le lagrangien est donné par :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(q, \dot{q}) &= k(q, \dot{q}) - U(q) \\ &= k_1(q, \dot{q}) + k_2(q, \dot{q}) - U_1(q) - U_2(q) \\ &= \frac{1}{2} [m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2] \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_{c2}^2 [\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2] \\ &\quad + m_2 l_1 l_{c2} [\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2] \cos(q_2) \\ &\quad + [m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \cos(q_1) \\ &\quad + m_2 g l_{c2} \cos(q_1 + q_2) \\ &\quad + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2]^2. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Donc le modèle dynamique du bras est obtenu en appliquant l'équation de Lagrange suivante :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q_i} = \tau_i \quad \text{avec } i = 1, 2 \quad (2.29)$$

D'où le modèle dynamique est donné par :

$$\begin{aligned} \tau_1 &= [m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_1 + I_2] \ddot{q}_1 \\ &\quad + [m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2] \ddot{q}_2 \\ &\quad - 2m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2^2 \\ &\quad + [m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \sin(q_1) + m_2 g l_{c2} \sin(q_1 + q_2) \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \tau_2 &= [m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2] \ddot{q}_1 + [m_2 l_{c2}^2 + I_2] \ddot{q}_2 \\ &\quad + m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1^2 \\ &\quad + m_2 g l_{c2} \sin(q_1 + q_2) \end{aligned} \quad (2.31)$$

La dynamique sous forme compacte est donnée par :

$$\tau = \underbrace{\begin{bmatrix} M_{11}(q) & M_{12}(q) \\ M_{21}(q) & M_{22}(q) \end{bmatrix}}_{M(q)} \ddot{q} + \underbrace{\begin{bmatrix} C_{11}(q, \dot{q}) & C_{12}(q, \dot{q}) \\ C_{21}(q, \dot{q}) & C_{22}(q, \dot{q}) \end{bmatrix}}_{C(q, \dot{q})} \dot{q} + \underbrace{\begin{bmatrix} g_1(q) \\ g_2(q) \end{bmatrix}}_{G(q)}$$

Avec :

$$M_{11}(q) = m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_1 + I_2$$

$$M_{12}(q) = M_{21}(q) = m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2$$

$$M_{22}(q) = m_2 l_{c2}^2 + I_2$$

$$C_{11}(q; \dot{q}) = -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2$$

$$C_{12}(q; \dot{q}) = -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2]$$

$$C_{21}(q; \dot{q}) = m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1$$

$$C_{22}(q; \dot{q}) = 0$$

$$g_1(q) = [m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \sin(q_1) + m_2 g l_{c2} \sin(q_1 + q_2)$$

$$g_2(q) = m_2 g l_{c2} \sin(q_1 + q_2).$$

II.9 Résolution de la fonction dynamique d'un bras manipulateur

Après avoir modélisé le robot par une fonction mathématique nommé fonction dynamique ; il est nécessaire de résoudre ces fonctions afin d'effectuer la simulation dynamique du robot manipulateur. Dû son exactitude, sa simplicité de calcul et de programmation, la méthode la plus utilisée pour la résolution des fonctions dynamiques est généralement la méthode d'Euler. Dans notre travail nous avons fait une étude comparative entre cette dernière et une méthode plus précise mais un peu coûteuse en temps. Cette méthode est la méthode de Runge Kutta d'ordre 4 [34]

II.9.1 Les améliorations de la méthode de Runge-Kutta (R-K) [34, 35]

Les méthodes de R-K sont des méthodes d'analyse numérique d'approximation de solutions d'équations différentielles. Elles ont été élaborées en 1901 par Carl Runge et Martin Wilhelm Kutta. Dans de nombreux cas, les systèmes d'équations différentielles peuvent prendre la forme d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre du type :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad 0 \leq t \quad (2.32)$$

Où $y(t)$ est la fonction recherchée, y_0 sa valeur initiale. On note h un pas basé sur la discrétisation de la variable t , et y_n la valeur approchée de $y(t_n)$ pour les différents instants $t_n = nh$. En intégrant l'équation différentielle entre t_n et t_{n+1} on a la relation

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+h}} f(t, y(t)) dt \quad (2.33)$$

Pour en revenir à la méthode d'Euler qui a été publiée en 1768, l'intégrale (2.33) peut être approchée par la méthode du rectangle à gauche, Euler explicite, ou par la méthode du rectangle à droite, Euler implicite. D'où le schéma numérique :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)) \quad (2.34)$$

L'erreur produite correspond à l'aire de forme quasi-triangulaire et de dimension $h \times ph$ où p est la pente de f à l'instant t_n . L'erreur vaut donc à peu près $e_E \simeq \frac{1}{2}Ph^2$. La méthode n'est pas très précise par rapport à d'autres, plus sophistiqués. L'idée est d'aborder cette intégrale plus précisément que ne le fait la méthode d'Euler.

II.9.2 Runge-Kutta d'ordre 2

Les améliorations apportées par la méthode R-K 2 consistent à améliorer l'intégrale en calculant l'aire d'un trapèze au lieu de celui d'un rectangle, et cela en utilisant une étape comme celle de (2.34) au milieu de l'intervalle.

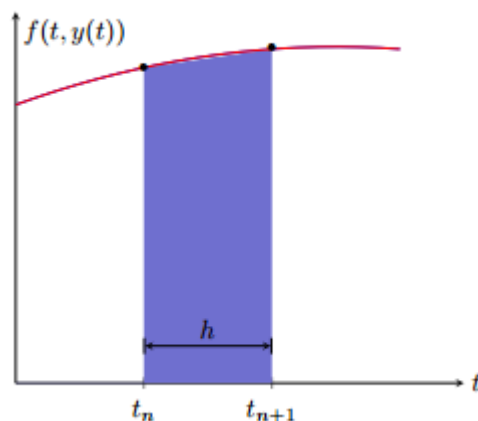


Fig II.39 : Méthode du trapèze

La méthode du trapèze consiste en l'approximation suivante :

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] \quad (2.35)$$

Appliquée à l'intégrale (2.33), cela donne :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt \simeq \frac{h}{2} [f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))] \quad (2.36)$$

L'erreur est donc liée à la courbure de la fonction et non à sa pente. Le schéma itératif obtenu est :

$$y_{n+1} = y_n + h \left[\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2 \right] \quad (2.37)$$

$$\text{avec} \begin{cases} k_1 = f(t_n, y_n) \\ k_2 = f(t_n + h, y_n + hk_1) \\ y_0 = y(0) \end{cases}$$

Cette méthode présente l'avantage d'être précise et assez simple à programmer.

II.9.3 Runge-Kutta d'ordre 4

La méthode R-K 4 est une étape supplémentaire dans le raffinement du calcul de l'intégrale (2.33). Au lieu d'utiliser la méthode trapézoïdale, nous utilisons la méthode Simpson. Cela consiste à remplacer la fonction intégrée par une parabole passant par les points extrêmes et le point milieu. Nous avons

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \quad (2.38)$$

Appliquée à l'intégrale (2.33), cela donne :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt \simeq \frac{h}{6} \left[f(t_n, y(t_n)) + 4f\left(t_{n+1/2}, y(t_{n+1/2})\right) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) \right]$$

D'où la relation :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} \left[f(t_n, y_n) + 4f\left(t_{n+\frac{1}{2}}, y_{n+\frac{1}{2}}\right) + f(t_{n+1}, y_{n+1}) \right] \quad (2.39)$$

Ici, une difficulté apparaît car l'équation présente deux inconnues $y_{n+\frac{1}{2}}$ et y_{n+1} . Pour rendre le schéma explicite, il faut estimer $4f\left(t_{n+\frac{1}{2}}, y_{n+\frac{1}{2}}\right)$ et $f(t_{n+1}, y_{n+1})$ à partir de y_n , t_n et h . Commençons par le terme $4f\left(t_{n+\frac{1}{2}}, y_{n+\frac{1}{2}}\right)$ que nous décomposons en deux termes identiques $2f\left(t_{n+\frac{1}{2}}, y_{n+\frac{1}{2}}\right) + 2f\left(t_{n+\frac{1}{2}}, y_{n+\frac{1}{2}}\right)$. Dans le premier, on remplace $y_{n+\frac{1}{2}}$ par sa valeur déduite de la méthode d'Euler explicite ; à savoir $y_{n+\frac{1}{2}}^a = y_n + \frac{h}{2} \cdot f(t_n, y_n)$. Dans le deuxième terme, on remplace $y_{n+\frac{1}{2}}$ par sa valeur déduite de la méthode d'Euler implicite : $y_{n+\frac{1}{2}}^b = y_n + \frac{h}{2} \cdot f\left(t_{n+\frac{1}{2}}, y_{n+\frac{1}{2}}\right)$ que l'on va approcher par $y_n + \frac{h}{2} \cdot f\left(t_{n+\frac{1}{2}}, y_{n+\frac{1}{2}}^a\right)$. Puisque les méthodes d'Euler implicites et explicites produisent des erreurs quasi opposées, on espère minimiser l'erreur sur le calcul de $4f\left(t_{n+\frac{1}{2}}, y_{n+\frac{1}{2}}\right)$.

Pour résumer, le schéma itératif obtenu est :

$$4f(t_{n+1/2}, y_{n+1/2}) \simeq 2k_2 + 2k_3 \quad (2.40)$$

$$\text{avec } \begin{cases} k_1 = f(t_n, y_n) \\ k_2 = f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1\right) \\ k_3 = f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2\right) \end{cases}$$

Quant au terme $f(t_{n+1}, y_{n+1})$, on l'approche en estimant y_{n+1} par la méthode du point milieu, c'est-à-dire en appliquant la méthode du rectangle au milieu.

$$\begin{aligned} y_{n+1} &\simeq y_n + hf(t_{n+1/2}, y_{n+1/2}) \\ &\simeq y_n + hf(t_{n+1/2}, y_{n+1/2}^b) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Enfin on obtient le schéma explicite, dit de R-K 4 :

$$y_{n+1} = y_n + h \left[\frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4 \right] \quad (2.42)$$

$$\text{avec } \begin{cases} k_1 = f(t_n, y_n) \\ k_2 = f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1\right) \\ k_3 = f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2\right) \\ k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3) \end{cases}$$

Par rapport à la méthode R-K 2, ce schéma numérique nécessite deux fois plus de calculs à chaque étape et donc un temps de calcul plus long mais avec des résultats plus précis.

II.10 Conclusion

Nous avons donné dans ce chapitre quelques définitions des termes concernant la robotique, les types de tâches, différents types d'architectures, ainsi que la nécessité d'étudier les matrices de transformations homogènes et leur application dans l'étude des différents modèles géométriques (directs, inverses), et les modèles cinématiques (directs, inverses). Finalement nous avons démontré la modélisation dynamique du robot Pelican à deux segments ; ainsi que les améliorations rapportées par la méthode de R-K 4 par rapport à la méthode d'Euler qui sera utilisée pour résoudre les fonctions dynamiques du bras manipulateur dans notre travail. Avant d'effectuer cette résolution nous devons développer le système de commande du robot. Ce développement débutera par l'étude de la théorie des ensembles flous et du système d'Inférence flou qui fera l'objet du prochain chapitre.