الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي

جامعة سطيف 1 - فرحات عباس
Setif 1 University - Ferhat ABBAS

Sétif 1 Université-Ferhat ABBAS
Faculté des Sciences
Département de mathématiques

Faculté DES Sciences

Mémoire de Master

DOMAINE : Mathématiques et Informatique

FILIÈRE: Mathématique

SPÉCIALITÉ : Analyse Non Linéaire et EDP

Théme

Un Problème Aux Limites Gouverné par l'Opérateur Dynamique de Vibrations Non-Linéaire des Plaques

Présenté par :
BOUREMEL Achouak

Dirigé par :
Dr. F. BOUZEGHAIA

Mémoire Soutenu le 11 juin 2026, devant le jury composé de :

Président : Pr.E. H. B. MEROUANI	Université Sétif 1 Ferhat Abbas
Encadrant : Dr.F. BOUZEGHAIA	Université Sétif 1 Ferhat Abbas
Examinateur : Pr. H. BENSERIDI	Université Sétif 1 Ferhat Abbas

Promotion: 2025/2026

Résumé :

Dans ce mémoire, on se propose d'étudier un problème aux limites non linéaire gouverné par les équations dynamiques des vibrations non linéaires des plaques. Le domaine d'utilisation des plaques vibrantes étant très vaste, afin de satisfaire les besoins des utilisateurs, la forme géométrique, la masse volumique du matériau constituant la plaque, l'épaisseur de la plaque ainsi que le coefficient de Poisson seront pris en compte. Ce problème étant couplé entre la fonction de force d'Airy F et le déplacement transversal u, la démarche consiste à se ramener à un système non linéaire de type hyperbolique. Pour cela, on élimine la fonction d'Airy du système et on démontre un théorème d'existence pour l'équation d'évolution considérée ainsi qu'un théorème d'unicité pour l'équation d'évolution modifiée. Comme prolongement éventuel, cette étude s'applique au domaine des structures minces (poutres, plaques et coques) équipées de patchs piézoélectriques.

Mots clés

Existence et unicité, plaque vibrante, vibrations non linéaires, problème couplé, fonction d'Airy, méthode de Galerkin.

ملخص

في هذه المذكرة، نقترح دراسة مسألة حدودية لاخطية تحكمها المعادلات الديناميكية للاهتزازات اللاخطية للصفائح. ونظرًا لاتساع مجال استخدام الصفائح المهتزة، ومن أجل تلبية احتياجات المستخدمين، سيتم أخذ الشكل الهندسي للصفحية، والكثافة الحجمية للمادة المكوّنة لها، وسماكة الصفيحة، بالإضافة إلى معامل بواسون، بعين الاعتبار. وبما أن هذه المسألة تتضمن اقترانًا بين دالة الإجهاد (دالة إيري) والإزاحة المستعرضة ، فإن المنهجية المعتمدة تتمثل في تحويلها إلى نظام لاخطي من النوع الزائدي. ولتحقيق ذلك، يتم حذف دالة إيري من النظام، ثم إثبات مبرهنة وجود للحل بالنسبة لمعادلة التطور المدروسة، إلى جانب مبرهنة وحدانية لمعادلة التطور المعدلة. وكامتداد محتمل، يمكن تطبيق هذه الدراسة في مجال البنى الرقيقة، مثل العوارض والصفائح والقشور، المزودة برقع كهرضغطية.

كلمات مفتاحية

الوجود والوحدانية، الصفيحة المهتزة، الاهتزازات غير الخطية، المسألة المقترنة، دالة إيري، طريقة غالركين

Abstract

In this thesis, we propose to study a nonlinear boundary value problem governed by the dynamic equations of nonlinear plate vibrations. Since the field of application of vibrating plates is very broad, the geometric shape, the mass density of the material constituting the plate, the plate thickness, as well as Poisson's ratio, will be taken into account in order to meet users' needs. As this problem involves a coupling between the Airy stress function F and the transverse displacement u, the adopted approach consists in reducing it to a nonlinear hyperbolic system. To this end, the Airy function is eliminated from the system, and an existence theorem for the considered evolution equation, together with a uniqueness theorem for the modified evolution equation, is established. As a possible extension, this study can be applied to the field of thin structures (beams, plates, and shells) equipped with piezoelectric patches.

Keywords

Existence and uniqueness, Vibrating plate, Non-linear vibrations, Coupled problem, Airy function, Galerkin method.

Table des matières

Introduction 3

Notation 7

1 CHAPITRE I : Préliminaires d'analyse fonctionnelle 8

1.1 Définitions et quelques notions de base 9
1.1.1 Définitions 9
1.1.2 Espaces de Lebesgue $L^p(\ )$ 10
1.1.3 Convergence faible 12
1.2 Espaces de Sobolev 14
1.2.1 Espaces de Sobolev H^m 14
1.2.2 Espaces de Sobolev H^s 15
1.3 Les espaces $L^p(0, T, X)$ 16
1.4 Résultats de compacité et application de trace 18
1.4.1 Opérateurs compacité 18
1.4.2 Théoreme de compacité 19
1.4.3 Application trace sur $H^s(\ )$ 23

2 CHAPITRE II : Un Problème aux Limites Gouverné par l'Opérateur Dynamique de Vibrations Non-Linèaire des Plaques

2.1 Interprétation mécanique de problème 25
2.2 Position du problème mathématique 27
2.3 Formulation du problème (P) 28
2.4 Théorème d'existence. 30
2.4.1 Démonstration du Théorème 2.1 33
2.4.2 Démonstration de l'unicié 46

Conclusion 49
Bibliograghie 50