REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEINEMENT SUPERIEUR ER DE LA

RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE FERHAT ABBAS-SETIF

THESE

Présentée à la Faculté des sciences

Département de Mathématique

Pour l'Obtention du Diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Option : Mathématique Appliquées

Présentée par

Boulaouad Abla

THEME

Etude de Quelques Problèmes aux Limites non linéaires pour le système de Lamé perturbé

Soutenue le : 13 /05 /2009

Devant le jury

Mr. A. AYADI	**Prof., U. D'OUM BOUAGHI**	**Président**
Mr. B. MEROUANI	**Prof., U.F.A. DE SETIF**	**Encadreur**
Mr. M. Z. AISSAOUI	**M.C., U. DE GELMA**	**Examinateur**
Mr. M. BOUZIT	**M.C., U. D'OUM BOUAGHI**	**Examinateur**
Mme. S. BOUTECHEBAK	**M.C., U.F.A. DE SETIF**	**Examinateur**

Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon encadreur professeur Boubaker MEROUANI professeur à l'Université Ferhat Abbas de Sétif, d'avoir accepté de diriger cette thèse, pour ses encouragement, ses conseils au long de ce travail effectué sous sa direction, et spécialement je tiens à le remercie pour sa disponibilité et sa confiance.

Je remercie très vivement le professeur, A. AYADI professeur à l'Université D'OUM EL-BOUAGHI, d'avoir bien voulu examiner ce travail et de m'avoir fait l'honneur de le présider.

Je remercie Particulièrement Monsieurs, M. Z. AISSAOUI, maître de conférence à l'Université GALMA, M. BOUZIT, maître de conférence à l'Université D'OUM EL BOUAGHI et madame S. BOUTECHBAK, maître de conférence à l'Université de SETIF pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'être membres du jury en qualité d'examinateurs de cette thèse.

Enfin, je remercier toute personne ayant participée, de près ou de loin, à l'élaboration de cette thèse, Particulièrement mon marie, mes parent, mes frères, mes collèges et spécialement mon fils Ilyes.

ملخص : الهدف من هذا البحث هو دراسة بعض المسائل الحدية غير الخطية. التقنيات المستعملة لهذا الغرض هي طريقة التراص , طريقة فيدو- قلوركينة و طريقة إيجاد القيم الحدية باستخدام فضاء نهاري-منفولد. نهتم بوجود حلول كل من هذه المسائل و كذا النظامية والو حدانية لبعض الحلول. لهذا الغرض قسمنا العمل إلى ثلاث أجزاء. في الجزء الأول درسنا ثلاث مسائل تمثل تعميم نظري لجملة لامي مع الاضطراب , في الجزء الثاني قمنا بدراسة مسألتان من نفس النوع مع تغيير في الشروط الحدية و في الجزء الأخير قمنا ببرهان عدم وحدانية الحل بالنسبة لمسألة من نفس النوع.

الكلمات المفتاح :

جملة لامي, التقريب البديهي, المتتالية المصغرة, فضاء صبولاف , فضاء نهاري-منفولد, طريقة فيدو- قلوركينة

Abstract : The prupose of this thesis is the study of some nonliniar boundary value problems. The methods used are those of the compactness, *Faedo-Galerkin* and of find the critical points where we used the *Nahari-Manifold* space. We study the existence of the solution for every problem with some regularity, and the uniqueness of the on the solution for some problems. In first, we study three problems generalising theoretical by the Lame system, in the second we study two problems as the first with different perturbation, in the last, we study the non uniqueness of the solution.

Key-words: Lame sysem, estimation a priori, minimizing sequance, *Sobolev* space*, Nahari Manifold* space*, Faedo-Galerkin* Method*.*

Résumé : L'objet de cette thèse est l'étude de quelques problèmes aux limites non linéaires. Les méthodes utilisées sont celles de *Compacité*, de *Faedo-Galerkin* et de rechercher des points critiques où on utilise l'espace de *Nahari-Manifold.* On s'intéresse à l'existence de la solution de chacun de ces problèmes avec une certaine régularité, à l'unicité de la solution pour quelques problèmes. Pour cela on devise le travail en trois parties, dans la première partie on étudie trois problèmes généralisent théoriquement l'opérateur de *Lamé* avec une perturbation différente. Dans le second, on étudie deux problèmes du même groupe que les premiers mais en généralisant les conditions aux limites. Et dans la troisième partie on démontre la non-unicité de la solution d'un problème du même groupe.

Mots-clés : Système de Lamé, estimation a priori, suite minimisant, espace de *Sobolev*, espace de *Nahari Manifold,* Méthode *de Faedo-Galerkin.*

Table des matières

INTRODUCTION 1

CHAPITRE I: Etude des Problèmes aux Limites avec L'opérateur de Lamé 8

Introduction …….. 9

Notations…….. 11

I.1. Théorème d'existence……12

I.1.1. Position du problème *(P_1)*…… …. 17

I.1.2. Etude du problème…….. 18

I.1.2.1.Formulation variationnelle…….. …….. 18

I.1.2.2.Proprietés des opérateurs …… 23

I.1.2.3. Résultat d'existence et d'unicité…… 32

I.2.1. Position du problème *(p_2)*…… 35 I.2.2. Etude de problème…… 35

I.2.2.1.Formulation variationnelle…… 35

I.2.2.2.Proprietés des opérateurs . …….. 39

I.2.2.3. Résultat d'existence et d'unicité…… 48

I.3.1. Position du problème *(p_3)*…… 51 I.3.2. Etude de problème…… 51

I.3.2.1. Formulation variationnelle…… 51

I.3.2.2.Proprieté des opérateurs…… 54

I.3.2.3. Résultat d'existence…….. 60

CHAPITRE II : **Etude des Problèmes aux Limites avec Le Système de Lamé Perturbé et Généralisé** **61**

Introduction…… 62

II.1. Notations et Position du problème (p_4)…….. 64

II.2.Etude du problème (p_4)…… 65

II.2.1 Formulation variationnelle…… 65

II.2.2.Proprietés d'opérateur …….. 70

II.2.3. Résultat d'existence et d'unicité…… 79

II.3. Position du problème (p_5)…… 82

II.3.1. Etude du problème (p_5)…… 82

II.3.1. Formulation variationnelle…… 82

II.3.2. Propriété des opérateurs…… 85

II.3.3. Résultat d'existence…….. 88

CHAPITRE III: Existence de deux Solutions pour un Problème aux Limites Avec le Système de Lamé Perturbé 89

Introduction……..90

III.1.Notation et Position du problème…….. 91

III.2.Etude du problème (p_6)……92

III. 2. 1. Formulation variationnelle…….. 92

III. 2. 2. Résultat d'existence ……111

Annexe ……113

Références…….. 120

.

Introduction

Les problèmes aux limites non linéaires gouvernés par l'opérateur de *Lamé* (l'opérateur d'élasticité) font l'objet de recherche, depuis quelques années, de très nombreuses études théoriques et numériques. Nous citons ici les travaux de B. Merouani qui a étudié en 1996, l'existence des solution singulières du système d'élasticité dans un polygone pour différentes conditions aux limites, *c.f.* [24] et de M.S. Saïd qui à fait la résolution numérique d'un problème d'élasticité non linéaire et perturbé par la méthode des approximations Successives, *c.f.* [28] et de A. Trad dans [33] ext..... Dans ce travail, nous étudions quelques problèmes aux limites non linéaires gouvernés par l'opérateur de *Lamé* généralisé avec perturbation. Pratiquement ce type des problèmes ont que peut d'applications, mais de point de vue mathématique constituent des bons exemples en analyse non linéaire. Notre travail est divisé en trois chapitres.

Premièrement nous donnons un théorème d'existence pour une forme générale d'un problème variationnel, alors nous donnons les hypothèses nécessaires sur les donnés pour que la solution existe. Dans les deux premiers chapitres la technique utilisée pour la résolution des problèmes est la suivante :

Après la formulation variationnelle du problème, nous construirons un opérateur à partire du problème variationnelle. Puis, nous démontrons que cet opérateur est un opérateur borné, monotone, hémicontinu et coercif, ensuite nous appliquons le théorème d'existence qu'on a déjà démontré, pour chaque problème.

Dans le troisième chapitre, nous établissons la formulation variationnelle du problème, puis

nous transformons le problème variationnel à un problème d'optimisation. Ensuite nous cherchons les points critiques de ce dernier problème. Enfin nous construirons deux suites déférentes convergentes vers une solution du problème.

Nous donnons les détailles sur le contenu des chapitres

Le premier chapitre :

Nous étudions trois problèmes aux limites, le premier est le problème de *Dirichlet* :

Trouver $u = u(x)$ solution de :

$$(p_1)\begin{cases} -L_p u + |u|^{p-2} u = f \ \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

Nous démontrons l'existence d'une solution unique pour le problème (p_1) dans l'espace $\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n$, en suivant les étapes :

Notons que l'espace $V = \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n$ est un espace de Banach séparable.

Nous établissons la formulation variationnelle de (p_1). En posant :

$$\begin{aligned} a(u,v) &= a_p(u,v) + a_1(u,v) \\ &= \mu \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} dx + (\lambda+\mu)\int_\Omega (divu)(divv)\,dx + \int_\Omega |u|^{p-2} uv dx, v \in V \\ &= (A_p(u), v) + (A_1(u), v) \end{aligned}$$

est une forme linéaire par rapport à la deuxième variable (v). Puis, nous montrons l'existence d'un opérateur A défini de V dans $\left(W^{-1,q}(\Omega)\right)^n$ (l'espace dual de V) par :

$$A(u) = A_p(u) + A_1(u),$$

et que A est un opérateur borné, monotone, hémicontinu et coercif. Ensuite, on définit les solutions approchées u_m du problème variationnel, après le passage par quelques étapes de

multiplication et d'intégration nous obtenons

$$a_p(u_m, u_m) + a_1(u_m, u_m) = (f, u_m).$$

En utilisons la coercivité de l'opérateur A et l'hypothèse $f \in \left(W^{-1,q}(\Omega)\right)^n$, nous montrons que $\|u_m\|_V \leq cte$. Cette estimation à priori, montre que, nous pouvons extraire une sous suite notée par u_μ telle que :

$$\begin{cases} u_\mu \to u \text{ dans } V \text{ faible} \\ A(u_\mu) \to \chi \text{ dans } V' \text{ faible} \end{cases}$$

Finalement nous montrons, à l'aide de l'hémicontinuité et la coercivité de A, que $\chi = A(u)$.

Pour l'unicité, nous supposons que (p_1) admet deux solutions u_1 et u_2 et nous montrons que $u_1 = u_2$ à l'aide d'égalité

$$\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left(\left| \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} - \left| \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_i} - \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \right) dx = \|u_1 - u_2\|^p.$$

Le deuxième problème étudié dans ce chapitre est le suivant :

Trouver $u = u(x)$ solution de :

$$(p_2) \begin{cases} -L_p u + |u|^{p-2} u = f \ \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \ \text{ sur } \Gamma_1 \\ \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \eta_i + \varphi(x) u = 0 \ \text{ sur } \Gamma_2 \end{cases}$$

Nous prouvons l'existence d'une solution unique du problème (p_2) dans l'espace $\left(W^{1,p}(\Omega)\right)^n$

par la même technique que on a utiliser avant , mais nous prenons seulement cette fois

$$V = \left\{ u \in \left(W^{1,p}(\Omega)\right)^n / u = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \right\},$$

nous considérons la forme linéaire

$$t(u,v) = t_p(u,v) + a_1(u,v)$$

où

$$t_p(u,v) = \mu \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + (\lambda+\mu) \int_\Omega (divu)(divv)\, dx$$
$$+\mu \int_{\Gamma_2} \varphi(x)\, u\gamma_0(v)\, \eta_i d\sigma - (\lambda+\mu) \int_{\Gamma_2} \gamma_0(divu)\, \gamma_0(v)\, \eta_i d\sigma$$
$$= (T_p(u), v)$$

Puis nous démontrons l'existence d'un opérateur T défini de V dans $\left(W^{-1,q}(\Omega)\right)^n$ par :

$$T(u) = T_p(u) + A_1(u),$$

et que T est un opérateur borné, monotone, hémicontinu et coercif.

Le troisième problème étudié :

Trouver $u = u(x)$ solution de :

$$(p_3) \begin{cases} -L_p u + |u|^{p-2} u - |u|^{q-1} u = f \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \\ \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \eta_i + \varphi(x)\, u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2 \end{cases}$$

Nous montrons l'existence de la solution du problème (p_3) dans l'espace $\left(W^{1,p}(\Omega)\right)^n$, la

forme linéaire considérée cette fois est

$$b(u,v) = t_p(u,v) + a_1(u,v) + a_2(u,v)$$

où

$$a_2(u,v) = \int_\Omega |u|^{q-1} uv dx$$

Nous démontrons l'existence d'un opérateur B défini de V dans $\left(W^{-1,q}(\Omega)\right)^n$ par :

$$B(u) = T_p(u) + A_1(u) - A_2(u),$$

et que B est un opérateur borné, monotone, hémicontinu et coercif.

Le deuxième chapitre : Nous généralisons la condition aux limites sur la deuxième partie de la frontière et nous adoptons deux problèmes.

Le premier problème est :

Trouver $u = u(x)$ solution de :

$$(p_4)\begin{cases} -L_p u + |u|^{P-2} u = f \ \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \ \text{ sur } \Gamma_1 \\ \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\eta_i + \varphi(x)|u|^{p-2} u = 0 \ \text{ sur } \Gamma_2 \end{cases}$$

Par la même méthode du premier chapitre nous montrons l'existence d'une solution unique du problème (p_4) dans l'espace $\left(W^{1,p}(\Omega)\right)^n$. Avec le changement de la forme linéaire et l'opérateur, alors nous remplaçons la forme par :

$$c(u,v) = c_p(u,v) + a_1(u,v), \forall v \in V$$

où

$$c_p(u,v) = \mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx + (\lambda+\mu)\int_{\Omega} (divu)(divv)\, dx$$

$$+\mu \int_{\Gamma_2} \varphi(x)|u|^{p-2} u\gamma_0(v)\ \eta_i\, d\sigma - (\lambda+\mu)\int_{\Gamma_2} \gamma_0(divu)\gamma_0(v)\eta_i d\sigma,$$

et

$$c_p(u,v) = (C_p(u), v), \forall v \in V,$$

nous démontrons l'existence d'un opérateur C défini de V dans $\left(W^{-1,q}(\Omega)\right)^n$ par :

$$C(u) = C_p(u) + A_1(u)$$

et que C est un opérateur borné, monotone, hémicontinu et coercif.

Le deuxième problème :

Trouver $u = u(x)$ solution de :

$$(p_5)\begin{cases} -L_p u + |u|^{P-2} u - |u|^{q-1} u = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \\ \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \eta_i + \varphi(x) |u|^{p-2} u = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \end{cases}$$

Par la même méthode nous démontrons l'existence de la solution du problème (p_5) dans l'espace $\left(W^{1,p}(\Omega)\right)^n$. Mais nous prenons la forme linéaire suivante :

$$d(u,v) = c_p(u,v) + a_1(u,v) + a_2(u,v)$$

et nous démontrons l'existence d'un opérateur D défini de V dans $\left(W^{-1,q}(\Omega)\right)^n$ par :

$$D(u) = D_p(u) + A_1(u) - A_2(u)$$

et que D est un opérateur borné, monotone, hémicontinu et coercif.

Le troisième chapitre : Nous démontrons l'existence de deux solutions dans V,

$$V = \left\{ u \in \left(W^{1,p}(\Omega) \right)^n / u = 0 \text{ sur } \Gamma \right\},$$

pour un problème aux limites gouverné par le système de *Lamé* avec perturbation, c'est à dire nous démontrons la non unicité de la solution du problème suivant:

$$(p_6) \begin{cases} -L_p u - \alpha |u|^{q-2} u - u = 0 \ \text{ dans } \Omega \\ \\ u = 0 \ \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

La méthode utilisée pour la résolution du problème est :

Premièrement nous établissons la formulation variationnelle du problème, puis nous transformons le problème variationnel à un problème d'optimisation. Ensuite nous cherchons les points critiques de ce dernier problème. Enfin nous construirons deux suites déférentes convergentes vers une solution du problème.

CHAPITRE I

Etude des problèmes aux limites avec

L'opérateur de Lamé

.

Introduction

Dans ce chapitre, on étudie un problème aux limites non linéaire qui généralise théoriquement le système de *Lamé* de la forme :

$$-L_p u + F(u) = f \quad \text{dans } \Omega$$

Où Ω désigne un ouvert borné, connexe de $\mathbb{R}^n (n = 2, 3)$ et de frontière $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ variété *Lipshitzienne* de dimension $n-1$, $F(u)$ est une perturbation et $L_p u$ est l'opérateur de *Lamé* défini par :

$$L_p u = \mu \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + (\lambda + \mu) \nabla (div u)$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} u = 0 \ \text{ sur } \Gamma_1 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \left| \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \eta_i + \varphi(x) u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2 \end{cases}$$

où $\varphi = \left(\varphi_{ij}\right)_{1<i,j<n}, \varphi_{ij} = \varphi_{ji} \in C^{0,1}\left(\overline{\Omega}\right), \varphi_{ij}(x) > 0, \forall x \in \Gamma_2$ est une donnée du problème. On distingue plusieurs cas pour les parties Γ_1 et Γ_2 de la frontière du domaine et pour la perturbation $F(u)$. On précise les cas ci-dessous :

• Lorsque $\Gamma_2 = \phi$ et $F(u) = |u|^{p-2} u$, le problème (p_1) devient le problème de *Dirichlet* suivant :

$$(p_1) \begin{cases} -L_p u + |u|^{p-2} u = f \ \text{ dans } \Omega \quad (1,1) \\ u = 0 \ \text{ sur } \Gamma \qquad\qquad\qquad\qquad (1,2) \end{cases}$$

.

• Lorsque Γ_1, $\Gamma_2 \neq \phi$ et $\varphi > 0$ sur Γ_2, La perturbation $F(u)$ nous permet aussi de spécifier plusieurs cas.

Dans cette partie, nous tenons en premier lieu le cas où

$$F(u) = |u|^{p-2} u,$$

Alors nous étudions le problème :

$$(p_2) \begin{cases} -L_p u + |u|^{p-2} u = f \ \text{ dans } \Omega & (2,1) \\ u = 0 \ \text{ sur } \Gamma_1 & (2,2) \\ \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \eta_i + \varphi(x) u = 0 \ \text{ sur } \Gamma_2 & (2,3) \end{cases}$$

Puis le cas où

$$F(u) = |u|^{p-2} u - |u|^{q-1} u.$$

Donc nous étudions le problème

$$(p_3) \begin{cases} -L_p u + |u|^{p-2} u - |u|^{q-1} u = f \ dans \ \Omega & (3,1) \\ u = 0 \ sur \ \Gamma_1 & (3,2) \\ \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \eta_i + \varphi(x) u = 0 \ sur \ \Gamma_2 & (3,3) \end{cases}$$

.

Notations

Soit Ω un ouvert borné, connexe de $\mathbb{R}^n (n = 2, 3)$ et de frontière $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ variété lipshitzienne de dimension $n-1, \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \phi$.

On considère un opérateur généralisant théoriquement le système de *Lamé*, soit

$$-L_p u + F(u),$$

où :

$$L_p u = \mu \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + (\lambda + \mu) \nabla (div u),$$

Avec, p, q deux réels tels que: $p \in]2, \infty[$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p > q$, λ et μ sont les coefficients de *Lamé* tels que $\lambda + \mu \geq 0$, $\mu > 0$ et η désigne le vecteur unitaire normal extérieur à Γ_2.

Pour $p = 2$, on retrouve le système de *Lamé* classique.

Etant donnée f et $\varphi = \left(\varphi_{ij}\right)_{1<i,j<n}$, tels que :

$$\varphi_{ij} = \varphi_{ji} \in C^{0,1}\left(\overline{\Omega}\right), \varphi_{ij}(x) > 0, \forall x \in \Gamma_2,$$

et $F(u)$ est une perturbation.

Soit V un espace de Banach séparable (c'est-à-dire: il admet un sous ensemble dense) de sorte que l'on protège un sous ensemble dense sur le sous espace.

Donc il existe une base $(w_j)_j$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{c} (w_j)_j \subset \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n, \, w_1, w_2, ..., w_n \text{ sont linéairement indépendants} \\ \\ \text{et les combinaisons linéaires finies des } w_j \text{ sont denses dans } V. \end{array} \right\}$$

On prend pour les w_j les fonctions propres:

$$\langle w_j, v \rangle = \lambda_j \langle w_j, v \rangle.$$

Puis on considère $W = [w_1, w_2, ..., w_n]$ avec $V = \overline{W}$.

I.1. Théorème d'existence

Premièrement on va démontrer le théorème d'existence suivant :

Théorème 1

Soient a une forme définie de V dans IR, et A un opérateur défini de $\left(W^{-1,q}(\Omega)\right)^n$ dans V telle que : $(A(u), v) = a(u, v)$, alors si $f \in \left(W^{-1,q}(\Omega)\right)^n$ et A est un opérateur borné, monotone, hémicontinu et coercif, le problème variationnel :

$$(A(u), v) = (f, v), \forall v \in V, \ \ (p)$$

admet une solution $u = u(x)$ dans V.

Démonstration Pour démontrer ce théorème on va passer par les étapes suivantes

Etape (1) : Existence de la solution :

On considère maintenant l'espace $W = [w_1, w_2, ..., w_n]$.

Premièrement on répond à la question suivante :

Existe-t-il : $(g_{jm}) \in IR$, $u_m(x) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm} w_j$ telle que u_m soit solution approchée du problème (p) ?

C-à-d :

$$(A(u_m), w_j) = a(u_m, w_j) = (f, w_j), \ 1 \leq j \leq m. \ (1)$$

En effet :

On considère l'application

$$G(g) = G(g_{1m}, ..., g_{mm}) = \left(\left(A\left(\sum_{j=1}^{m} g_{jm} w_j \right), w_j \right) - (f, w_j) \right)_{1 \leq j \leq m}$$

On cherche à appliquer le théorème de point fixe de *Brouwer* sur la fonction G.

D'une part de l'hémicontinuité et la coercivité de A on déduit la continuité de G et

$$\forall \alpha > 0, \exists \beta > 0, \forall u \in V; \|u\|_V \geq \beta \Rightarrow (A(u), u) \geq \alpha \|u\|_V ,$$

puisque $f \in V'$ on a :

$$|(f,u)| \leq \|f\|_{V'} \|u\|_V \Rightarrow -\|f\| \|u\|_V \leq (f,u) \leq \|f\| \|u\|_V ,$$

En prend :

$$u = \sum_{j=1}^{m} g_{jm} w_j \Rightarrow \|u\|_V = \left\| \sum_{j=1}^{m} g_{jm} w_j \right\|_V \geq \beta$$

D'où :

$$\begin{aligned} G(g)\, g &= \left(\left(A\left(\sum_{j=1}^{m} g_{jm} w_j \right), \sum_{j=1}^{m} g_{jm} w_j \right) - \left(f, \sum_{j=1}^{m} g_{jm} w_j \right) \right) \\ &\geq \left\| \sum_{j=1}^{m} g_{jm} w_j \right\|_V (\alpha - \|f\|_{V'}) \end{aligned}$$

Par ailleurs , soit h l'application définie de IR^m dans IR par

$$h : g \longmapsto \left\| \sum_{j=1}^{m} g_{jm} w_j \right\|_V .$$

Alors h est continue sur la sphère

$$S = \{ g \in IR^m : |g| = 1 \} .$$

Soit $\gamma = \inf_{g \in S} h$ donc $\gamma \geq 0$ et :

$$\forall g \in IR^m, |g| = \alpha \Rightarrow h(g) \geq \gamma \alpha.$$

Soit $\alpha > \|f\|_{V'}$ pour $k > \dfrac{\beta}{\gamma}$, on déduit que :

$$\forall g \in IR^m, |g| > k : G(g)\, g > 0$$

On pose :

$$B_k = \{g \in IR^m : |g| \leq k\}$$

Alors :

$$\exists g \in B_k : G(g) = 0$$

Car si non alors :

$$\forall g \in B_k : G(g) \neq 0.$$

Soit l'application :

$$\begin{array}{rcl} G_1 & : & B_k \to B_k \\ g & \longmapsto & G_1(g) = -\dfrac{G(g)\, k}{|G(g)|} \end{array}$$

G_1 est continue, d'après le théorème de *Brouwer*, G_1 admet un point fixe c-à-d :

$$\exists g \in B_k : G_1(g) = g$$

Donc :

$$-\frac{G(g)\, k}{|G(g)|} = g \Rightarrow k = |g| \Rightarrow G(g)\, g > 0$$

Mais :

$$G(g)\, g = -|G(g)|\, k \leq 0$$

ce qui est fait une contradiction. Donc :

$$\exists g \in B_k : G(g) = 0$$

Ce qui nous donne :

$$\forall W, \exists u_m \in W : (A(u_m), w_j) = a(u_m, w_j) = (f, w_j), 1 \leq j \leq m$$

D'où l'existences des u_m de W.

En multipliant les deux membres de (1) par g_{jm} et sommant en $j = 1, m$, on obtient :

$$(A(u_m), u_m) = a(u_m, u_m) = (f, u_m)$$

Etape (2) : Estimation à priori :

D'après la coercivité de A on a :

D'une part :

$$a(u_m, u_m) \geq \alpha \|u_m\|_V^p, \ \forall u_m \in V$$

D'après l'inégalité de $Cauchy - Schwartz$:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f u_m dx &\leq \left(\int_\Omega |f|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega |u_m|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|f\|_{(L^q(\Omega))^n} \|u_m\|_{(L^p(\Omega))^n} \\
&\leq C \|f\|_{(L^p(\Omega))^n} \|u_m\|_{(L^p(\Omega))^n} \\
&\leq cte \|u_m\|_V
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$\alpha \|u_m\|_V^p \leq cte \|u_m\|_V$$

$$\Rightarrow \|u_m\| \leq cte.$$

Etape (3) : passage à la limite :

L'estimation à priori précédente montre que u_m demeure dans un borné de V, de plus puisque A est un opérateur borné de $V \rightarrow V'$ alors $A(u_m)$ demeure dans un borné de V'. Comme V est un espace réflexif et séparable, et de même pour son dual, et tout boule fermée de V (de V'), est compacte pour la topologie de dualité, topologie qui est mesurable sur les boules. On note par $\sigma(V, V')$ sur V ($resp\ \sigma(V', V)$ sur V').

On peut extraire une sous suite que l'on note par u_μ telle que :

$$\exists u \in V,\ \exists \chi \in V' : \begin{cases} u_\mu \rightharpoonup u\ ,\ \ \sigma(V, V') \\ A(u_\mu) \rightharpoonup \chi, \quad \sigma(V', V) \end{cases}$$

On va démontrer que $A(u) = \chi$:

D'après la formulation variationnelle on a :

$$(A(u_\mu), v) = (f, v), \forall v \in V$$

Puisque W est dense dans V et à la limite $\mu \rightarrow \infty$ on déduit :

$$(\chi, v) = (f, v), \forall v \in V$$

Et de la monotonie de A on a :

$$(A(u_\mu) - A(v), u_\mu - v) \geq 0, \forall v \in V$$

Donc :

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} (A(u_\mu) - A(v), u_\mu - v) = (\chi - A(v), u - v) \geq 0, \forall v \in V$$

On prend en particulier :

$$v = u - \beta w,\ \forall w \in V$$

$$\begin{aligned}(\chi - A(v), u - v) &= (\chi - A(u - \beta w), u - u + \beta w) \\ &= \beta(\chi - A(u - \beta w), w) \\ &\geq 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\chi - A(u - \beta w), w) \geq 0, \forall w \in V$$

En utilisant l'hémicontinuité de A,

$$\lim_{\beta \to 0} (\chi - A(u - \beta w), w) = (\chi - A(u), w)$$

Donc :

$$(\chi - A(u), w) \geq 0, \forall w \in V$$

par conséquence $\chi = A(u)$.

Alors :

$$(A(u), v) = (f, v), \forall v \in V$$

d'ou le théorème.

I.1.1. Position du problème (p_1)

Supposons que $\Gamma_2 = \phi$ alors $\Gamma = \Gamma_1$.

Le problème est de trouver une fonction $u = u(x)$ telle que :

$$(p_1) \begin{cases} -L_p u + |u|^{p-2} u = f \quad \text{dans } \Omega & (1,1) \\ u = 0 \quad \text{sur } \Gamma & (1,2) \end{cases}$$

On suppose $V = \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n$, munie de la norme ; $\|u\|_V = \left(\sum_{i,j=1}^{n} \left\| \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$.

V est un espace de Banach séparable car :

$\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n$ s'identifie par l'application : $v \longmapsto \left\{ v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial v}{\partial x_n} \right\}$ un sous espace vectoriel

fermé de $(L^p(\Omega))^n \times (L^p(\Omega))^n ... (L^p(\Omega))^n$ qui est séparable.

I.1.2. Etude du problème

I.1.2.1.Formulation variationnelle

En multipliant l'équation $(1,1)$ par une fonction-test $v \in V$ en intégrant sur Ω, on obtient :

.

$$-\mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) v dx - (\lambda + \mu) \int_{\Omega} \nabla (divu) \, v dx + \int_{\Omega} |u|^{p-2} uv dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad (1,3)$$

D'après la formule de $Green$, $(1,3) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx - \mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Gamma} \gamma_0 \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \gamma_0 (v) \ \eta_i \, d\sigma \\ \quad + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} (divu) \nabla v \, dx - (\lambda + \mu) \int_{\Gamma} \gamma_0 (divu) \gamma_0 (v) \ \eta_i \, d\sigma + \int_{\Omega} |u|^{p-2} uv \, dx \\ \quad = \int_{\Omega} f v \, dx \end{cases}$$

Avec l'utilisation de la condition aux limites $(1,2)$, on trouve :

$$\mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} (divu)(divv) \, dx + \int_{\Omega} |u|^{p-2} uv dx = \int_{\Omega} f v dx$$

.

Proposition 1

Le problème (p_1) et le problème variationnel (p_{v1}) sont équivalents où :

$$(p_{v1})\begin{cases} \text{trouver } u \in V \text{ telle que:} \\ \mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx+(\lambda+\mu)\int_{\Omega}(divu)\,(divv)\;dx \\ +\int_{\Omega}|u|^{p-2}\,uvdx=\int_{\Omega}fv\;dx \end{cases} \tag{1,5}$$

Démonstration Soit $u \in V$ telle que :

$$\mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx+(\lambda+\mu)\int_{\Omega}(divu)\,(divv)\,dx+\int_{\Omega}|u|^{p-2}\,uvdx=\int_{\Omega}fvdx$$

Alors d'une part $u=0$ sur Γ.

D'autre part, d'après la formule de *Green*, on a :

$$\begin{aligned} &\mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx+(\lambda+\mu)\int_{\Omega}(divu)\,(divv)\,dx+\int_{\Omega}|u|^{p-2}\,uvdx \\ &=-\mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)vdx+\mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma}\gamma_0\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\gamma_0(v)\,\eta_i d\sigma \\ &-(\lambda+\mu)\int_{\Omega}\nabla(divu)\,vdx+(\lambda+\mu)\int_{\Gamma}\gamma_0(divu)\,\gamma_0(v)\,\eta_i d\sigma+\int_{\Omega}|u|^{p-2}\,uvdx \\ &=\int_{\Omega}fvdx \end{aligned}$$

Alors

.

$$-\mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)vdx-(\lambda+\mu)\int_{\Omega}\nabla(divu)\,vdx+\int_{\Omega}|u|^{p-2}\,uvdx=\int_{\Omega}fvdx$$

.

Et comme l'espace $(D(\Omega))^n$ dense dans V, on obtient :

$$\begin{cases} -\mu\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)-(\lambda+\mu)\nabla(divu)+|u|^{p-2}u=f \ \text{ sur } \Omega \\ \\ u=0 \ \text{ sur } \Gamma. \end{cases}$$

On pose maintenant pour tout $v \in \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n$

$$a_p(u,v)=\mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx+(\lambda+\mu)\int_{\Omega}(divu)(divv)\,dx.$$

Lemme 1

Il existe un unique élément A_P de $\left(W^{-1,q}(\Omega)\right)^n$ telle que :

$$a_p(u,v)=(A_P(u),v),\ \forall v\in\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n.$$

De plus

$$A_P=-\mu\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial .}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial .}{\partial x_i}\right)-(\lambda+\mu)\nabla(div.)$$

Démonstration On a a_p est une forme continue de $\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n\times\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n\to\mathbb{R}$ et comme pour tout $u\in\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n$ l'application : $\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n\to\mathbb{R}$, $v\longmapsto a_p(u,v)$ est linéaire continue, alors $c.f.$ [23] il existe un unique élément A_P de $\left(W^{-1,q}(\Omega)\right)^n$ tel que :

$$a_p(u,v)=(A_P(u),v),\forall v\in\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n.$$

Vérifions que :

$$A_P=-\mu\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial .}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial .}{\partial x_i}\right)-(\lambda+\mu)\nabla(div.)$$

$$\begin{aligned}
a_p(u,v) &= \mu\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx + (\lambda+\mu)\int_\Omega (divu)(divv)\,dx \\
&= \mu\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx + (\lambda+\mu)\int_\Omega (divu)\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\,dx \\
&= \mu\sum_{i=1}^{n}\langle\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i},\frac{\partial v}{\partial x_i}\rangle + (\lambda+\mu)\sum_{j=1}^{n}\langle(divu),\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\rangle \\
&= \langle -\mu\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right),v\rangle - (\lambda+\mu)\sum_{j=1}^{n}\langle\frac{\partial}{\partial x_j}(divu),v_j\rangle \\
&= \langle -\mu\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right),v\rangle - (\lambda+\mu)\langle\nabla(divu),v\rangle.
\end{aligned}$$

Donc :

$$A_P(u) = -\mu\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - (\lambda+\mu)\nabla(divu),$$

Remarque

L'application définie sur $(L^p(\Omega))^n$ par :

$$u \longmapsto |u|^{p-2}u,$$

est à valeur dans $(L^q(\Omega))^n$. De plus elle est continue.

En effet :

Si $u \in (L^p(\Omega))^n$, la fonction $|u|^{p-2}u$ est mesurable et

$$\int_\Omega \left||u|^{p-2}u\right|^q dx = \int_\Omega |u|^p\,dx < \infty, \text{ puisque } (p-1)q = p$$
$$\Rightarrow |u|^{p-2}u \in (L^q(\Omega))^n.$$

.

On déduit que :

$$\forall u \in \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n,\ \forall i,\ 1 \leq i \leq n : \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \in \left(L^q(\Omega)\right)^n.$$

On pose :

$$a_1(u,v) = \int_\Omega |u|^{p-2} uv dx.$$

Lemme 2

Il existe un unique élément A_1 de $\left(L^q(\Omega)\right)^n$ tel que:

$$a_1(u,v) = \left(A_1(u), v\right),\ \forall v \in \left(L^p(\Omega)\right)^n.$$

De plus

$$A_1(u) = |u|^{p-2} u$$

Démonstration $a_1(u,v)$ est une forme continue de $\left(L^p(\Omega)\right)^n \times \left(L^p(\Omega)\right)^n \to \mathbb{R}$, l'application : $v \longmapsto a_1(u,v)$ est linéaire continue de $\left(L^p(\Omega)\right)^n \to \mathbb{R}$.

Alors $c.f.$ [23], il existe un unique élément A_1 de $\left(L^q(\Omega)\right)^n$ tel que

$$a_1(u,v) = \left(A_1(u), v\right),\ \forall v \in \left(L^p(\Omega)\right)^n.$$

Vérifions que :

$$A_1(u) = |u|^{p-2} u$$

$$\begin{aligned} a_1(u,v) &= \int_\Omega |u|^{p-2} uv dx \\ &= \langle |u|^{p-2} u, v \rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A_1(u) = |u|^{p-2} u.$$

I.1.2.2.Propriétés des opérateurs

Proposition 2

L'opérateur :

$$A_p : \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n \to \left(W^{-1,q}(\Omega)\right)^n$$

$$u \longmapsto A_p(u) = -\mu \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) - (\lambda + \mu) \nabla (divu)$$

est un opérateur borné, monotone et hémicontinu.

Démonstration

- A_p **est borné**

De l'expression de la norme dans un espace dual, en déduit :

$$\|A_p(u)\|_{(W^{-1,q}(\Omega))^n} = \sup_{v \in V,\ \|v\| \leq 1} |a_p(u,v)| \ \ ,\forall u \in \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n$$

On a :

$$\begin{aligned} |a_p(u,v)| &\leq \mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-1} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| dx + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} |(divu)|\,|(divv)|\, dx \\ &\leq \mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-1} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| dx + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right| \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right| dx \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de $Cauchy - Schwartz$:

$$\begin{aligned} |a_p(u,v)| \leq\ & \mu \left(\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{q(p-1)} dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^{p} dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ & + (\lambda + \mu) \left(\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right|^{q} dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right|^{p} dx \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Or ona :

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{(p-2)}\frac{\partial u}{\partial x_i}\in\left(L^q(\Omega)\right)^n$$

Puisque :

$$\int_\Omega |u|^p\,dx\le\left(\int_\Omega |u|\,dx\right)^p$$

Alors :

$$\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right|^q dx=\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right|^{\frac{p}{1-p}}dx\le\left(\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right|^p dx\right)^{\frac{1}{1-p}}.$$

Donc :

$$|a_p(u,v)|\le\mu c_1\left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_{(L^p(\Omega))^n}+(\lambda+\mu)\left(\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right|^p dx\right)^{\frac{1}{(1-p)q}}\left(\sum_{j=1}^{n}\int_\Omega\left|\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Mais : $\dfrac{1}{(1-p)\,q}=-\dfrac{1}{p}$

Alors :

$$|a_p(u,v)|\le\mu c_1\left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_{(L^p(\Omega))^n}+(\lambda+\mu)\left(\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right|^p dx\right)^{-\frac{1}{p}}\left(\sum_{j=1}^{n}\int_\Omega\left|\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Ω est de mesure finie et $1\le p<q$ et :

$$\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n\subset\left(W^{1,p}(\Omega)\right)^n\subset\left(L^p(\Omega)\right)^n.$$

Donc :

$$|a_p(u,v)|\le\mu c_1\|v\|_V+(\lambda+\mu)\,c_2\|v\|_V$$

$$\le(const)\|v\|_V$$

.

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \sup_{v\in V,\ \|v\|\leq 1} |a_p(u,v)| &\leq \sup_{v\in V,\ \|v\|\leq 1} \|v\|_{\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n} \\ &< \infty \end{aligned}$$

Ce qui montre que A_p est borné.

• A_p **est monotone**

A_p est monotone si : $\forall\ u, v \in \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n$, $(-L_p u + L_p v, u - v) \geq 0$.

En effet :

$$(-L_p u + L_p v, u - v) = \mu \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} - \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx$$

$$+ (\lambda + \mu) \int_\Omega (div u - div v)\, div\,(u - v)\, dx$$

$$\Rightarrow (-L_p u + L_p v, u - v) = \mu \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} - \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx$$

$$+ (\lambda + \mu) \int_\Omega \left(div\,(u - v)\right)^2 dx$$

car *div* est un opérateur linéaire continu.

D'autre part, puisque l'application $x \longmapsto |x|^p$ de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, est convexe, c'est-à-dire sa dérivée est une fonction croissante, alors :

$$\left(|x|^{p-2} x - |y|^{p-2} y \right)(x - y) \geq 0,$$

Par la suite :

$$\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} - \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \geq 0.$$

Donc :

$$\mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}-\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}-\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)dx+(\lambda+\mu)\int_{\Omega}\left(div\left(u-v\right)\right)^2dx\geq 0.$$

Ce qui montre que A_p est monotone.

• A_p **est hémicontinu**

A_p est hémicontinu ssi : $\forall u, v$ et $w \in V$, la fonction :

$$\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \beta \longmapsto \left(A_p\left(u+\beta v\right), w\right)$$

est continue.

Soit $\{\beta_n\}$ une suite convergente dans $\mathbb{R}$, on pose :

$$\begin{aligned} f_n\left(x\right) &= \mu\left|\frac{\partial u\left(x\right)}{\partial x_i}+\beta_n\frac{\partial v\left(x\right)}{\partial x_i}\right|^{p-2}\left(\frac{\partial u\left(x\right)}{\partial x_i}+\beta_n\frac{\partial v\left(x\right)}{\partial x_i}\right)\frac{\partial w\left(x\right)}{\partial x_i} \\ &\quad +(\lambda+\mu)\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial u_i\left(x\right)}{\partial x_i}+\beta_n\frac{\partial v_i\left(x\right)}{\partial x_i}\right)\frac{\partial w_j\left(x\right)}{\partial x_j}\end{aligned}$$

et on montre que $f_n\left(x\right)$ converge vers une fonction $f\left(x\right)$ telle que :

$$\begin{aligned} f\left(x\right) &= \mu\left|\frac{\partial u\left(x\right)}{\partial x_i}+\beta\frac{\partial v\left(x\right)}{\partial x_i}\right|^{p-2}\left(\frac{\partial u\left(x\right)}{\partial x_i}+\beta\frac{\partial v\left(x\right)}{\partial x_i}\right)\frac{\partial w\left(x\right)}{\partial x_i} \\ &\quad +(\lambda+\mu)\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial u_i\left(x\right)}{\partial x_i}+\beta\frac{\partial v_i\left(x\right)}{\partial x_i}\right)\frac{\partial w_j\left(x\right)}{\partial x_j}\end{aligned}$$

$$\left|f_n\left(x\right)\right| \leq \mu\left|\frac{\partial u\left(x\right)}{\partial x_i}+\beta_n\frac{\partial v\left(x\right)}{\partial x_i}\right|^{p-1}\left|\frac{\partial w\left(x\right)}{\partial x_i}\right|+(\lambda+\mu)\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial u_i\left(x\right)}{\partial x_i}+\beta_n\frac{\partial v_i\left(x\right)}{\partial x_i}\right|\left|\frac{\partial w_j\left(x\right)}{\partial x_j}\right|$$

D'après l'inégalité :

$$ab \leq \frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right) \qquad \forall a, b \geq 0$$

On a :

$$\begin{aligned}|f_n(x)| &\leq \frac{\mu}{2}\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}+\beta_n\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\right|^{2(p-1)}+\frac{(\lambda+\mu)}{2}\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial u_i(x)}{\partial x_i}+\beta_n\frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i}\right|^2\\ &+\frac{\mu}{2}\left|\frac{\partial w(x)}{\partial x_i}\right|^2+\frac{(\lambda+\mu)}{2}\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial w_j(x)}{\partial x_j}\right|^2\end{aligned}$$

D'après l'inégalité:

$$\forall f,g\in L^p(\Omega):\|f+g\|^p_{L^p(\Omega)}\leq 2^p\left(\|f\|^p_{L^p(\Omega)}+\|g\|^p_{L^p(\Omega)}\right)$$

On a :

$$\begin{aligned}|f_n(x)| &\leq \mu 2^{2p-3}\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|^{2(p-1)}+\mu 2^{2p-3}|\beta_n|^{2(p-1)}\left|\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\right|^{2(p-1)}+\frac{\mu}{2}\left|\frac{\partial w(x)}{\partial x_i}\right|^2\\ &+2(\lambda+\mu)\sum_{j=1}^{n}\left[\left|\frac{\partial u_i(x)}{\partial x_i}\right|^2+|\beta_n|^2\left|\frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i}\right|^2\right]+\frac{(\lambda+\mu)}{2}\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial w_j(x)}{\partial x_j}\right|^2\end{aligned}$$

Mais β_n est convergente dans $\mathbb{R}$ alors $\exists m\in\mathbb{R}:|\beta_n|\leq m$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow |f_n(x)| &\leq \mu 2^{2p-3}\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|^{2(p-1)}+\mu 2^{2p-3}m_1\left|\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\right|^{2(p-1)}+\frac{\mu}{2}\left|\frac{\partial w(x)}{\partial x_i}\right|^2\\ &+2(\lambda+\mu)\sum_{j=1}^{n}\left[\left|\frac{\partial u_i(x)}{\partial x_i}\right|^2+m_2\left|\frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i}\right|^2\right]+\frac{(\lambda+\mu)}{2}\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial w_j(x)}{\partial x_j}\right|^2\end{aligned}$$

On définit la fonction $g(x)$ telle que :

$$\begin{aligned}g(x) &= \mu 2^{2p-3}\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|^{2(p-1)}+\mu 2^{2p-3}m_1\left|\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\right|^{2(p-1)}+\frac{\mu}{2}\left|\frac{\partial w(x)}{\partial x_i}\right|^2\\ &+\sum_{j=1}^{n}\left[2(\lambda+\mu)\left|\frac{\partial u_i(x)}{\partial x_i}\right|^2+2(\lambda+\mu)m_2\left|\frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i}\right|^2+\frac{(\lambda+\mu)}{2}\left|\frac{\partial w_j(x)}{\partial x_j}\right|^2\right]\end{aligned}$$

On constate que la fonction $g(x)$ est une fonction dans $L^1(\Omega)$.

Alors on a : $f_n(x)\to f(x)$ p.p sur Ω et $|f_n(x)|\leq g(x)$ p.p sur Ω.

D'après le théorème de convergence dominée de *Lebesgue*, on en déduit que :

$$f\in L^1(\Omega)\ \text{ et }\ \|f_n-f\|_{L^1(\Omega)}\to 0,$$

par conséquent :

$$\left(A_p\left(u+\beta_n v\right),w\right)\rightarrow\left(A_p\left(u+\beta v\right),w\right)$$

Ce qui montre que A_p est hémicontinu.

Proposition 3

L'opérateur A_1 défini de: $\left(L^p\left(\Omega\right)\right)^n$ dans $\left(L^q\left(\Omega\right)\right)^n$ par : $u\longmapsto A_1\left(u\right)=\left|u\right|^{p-2}u$ est un opérateur borné, monotone et hémicontinu.

Démonstration

• A_1 **est borné**

En effet :

$$\left\|A_1\left(u\right)\right\|_{\left(L^q(\Omega)\right)^n}=\sup_{v\in\left(L^p(\Omega)\right)^n,\ \|v\|\leq 1}\left|a_1\left(u,v\right)\right|,\ \forall u\in\left(L^p\left(\Omega\right)\right)^n$$

$$\begin{aligned}\left|a_1\left(u,v\right)\right| &\leq \int_\Omega\left|\left|u\right|^{p-2}uv\right|dx\\ &\leq \left(\int_\Omega\left|\left|u\right|^{(p-1)}u\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_\Omega\left|v\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

Mais on a : $\left|u\right|^{p-2}u\in\left(L^q\left(\Omega\right)\right)^n$ donc :

$$\int_\Omega\left|\left|u\right|^{(p-1)}u\right|^q dx\leq c_3$$

Alors :

$$\left|a_1\left(u,v\right)\right|\leq c_3\left\|v\right\|_{\left(L^p(\Omega)\right)^n}$$

$$\Rightarrow\sup_{v\in\left(L^p(\Omega)\right)^n,\ \|v\|\leq 1}\left|a_1\left(u,v\right)\right|\leq c_3\sup_{v\in\left(L^p(\Omega)\right)^n,\ \|v\|\leq 1}\left\|v\right\|_{\left(L^p(\Omega)\right)^n}.$$

Alors :

$$\left\|A_1\left(u\right)\right\|_{\left(L^q(\Omega)\right)^n}<\infty$$

Ce qui montre que A_1 est un opérateur borné.

• A_1 **est monotone**

De la même manière, de fait que l'application $x \longmapsto |x|^p$ de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe on a :

$$(A_1(u) - A_1(v), u - v) = \int_\Omega \left(|u|^{p-2} u - |u|^{p-2} v \right) (u - v)\, dx \geq 0$$

par conséquent A_1 est un opérateur monotone.

• A_1 **est hémicontinu**

Soit $\{\beta_n\}$ une suite convergente dans $\mathbb{R}$.

On suppose que :

$$f_n(x) = |u(x) + \beta_n v(x)|^{p-2} (u(x) + \beta_n v(x))\, w(x)$$

on a :

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= |u(x) + \beta_n v(x)|^{p-1} |w(x)| \\ &\leq \frac{1}{2} |u(x) + \beta_n v(x)|^{2(p-1)} + \frac{1}{2} |w(x)|^2 \\ &\leq 2^{2p-3} |u(x)|^{2(p-1)} + 2^{2p-3} |\beta_n|^{2(p-1)} |v(x)|^{2(p-1)} + \frac{1}{2} |w(x)|^2 \end{aligned}$$

$\{\beta_n\}$ converge dans $\mathbb{R} \Rightarrow \exists m \in \mathbb{R} : |\beta_n| \leq m$.

Donc :

$$|f_n(x)| \leq 2^{2p-3} |u(x)|^{2(p-1)} + 2^{2p-3} m |v(x)|^{2(p-1)} + \frac{1}{2} |w(x)|^2$$

On définit la fonction $h(x)$ par :

$$h(x) = 2^{2p-3} |u(x)|^{2(p-1)} + 2^{2p-3} m |v(x)|^{2(p-1)} + \frac{1}{2} |w(x)|^2$$

qui est dans $L^1(\Omega)$.

Alors : $f_n(x)$ converge $p.p$ sur Ω vers $f(x)$ tel que :

$$f(x) = |u(x) + \beta v(x)|^{p-2} (u(x) + \beta v(x)) w(x)$$

et

$$|f_n(x)| \leq f(x) \quad p.p \text{ sur } \Omega.$$

En déduit que :

$$f \in L^1(\Omega) \text{ et } \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \to 0.$$

Par conséquent :

$$(A_1(u + \beta_n v), w) \to (A_1(u + \beta v), w)$$

Ce qui montre que A_1 est un opérateur hémicontinu.

Notation

Pour simplifier l'écriture, on note par :

$$a(u, v) = a_p(u, v) + a_1(u, v),$$

et

$$A(u) = A_p(u) + A_1(u).$$

Proposition 4

L'opérateur A défini de : $\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n$ dans $\left(W^{-1,q}(\Omega)\right)^n$ par :

$$u \longmapsto A(u) = A_p(u) + A_1(u)$$

est un opérateur coercif.

.

Démonstration A est coercif si :

$$\forall \alpha > 0, \exists \beta, \forall u \in V : \|u\|_V \geq \beta \Rightarrow (A(u), u) \geq \alpha \|u\|_V ,$$

D'une part :

$$\begin{aligned} (A_1(u), u) &= \int_\Omega |u|^{p-2} uudx \\ &= \|u\|^p_{(L^P(\Omega))^n} \geq \alpha_1 \|u\|_V , \ , p > 2 \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} (A_p(u), u) &= \mu \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx + (\lambda + \mu) \int_\Omega (divu)^2 dx \\ &= \mu \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p dx + (\lambda + \mu) \int_\Omega |divu|^2 dx \\ &= \mu \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^p_{L^p(\Omega)} + (\lambda + \mu) \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right| \right)^2 dx. \end{aligned}$$

Puisque Ω est un sous- ensemble borné de IR^n et d'après l'inégalité de *Poincaré* on a :

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p dx = \|u\|^p_V .$$

Donc :

$$(A_p(u), u) = \mu \|u\|^p_V + (\lambda + \mu) \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right| \right)^2 dx.$$

.

Par conséquent :

$$\begin{aligned}(A(u),u) &= (A_p(u),u)+(A_1(u),u)\\ &= \int_\Omega |u|^p\,dx+\mu\|u\|_V^p+(\lambda+\mu)\int_\Omega\left(\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right|\right)^2dx.\\ &\geq \mu\|u\|_V^p\end{aligned}$$

Puisque $p>2$ et $\mu>0$, A est coercif.

I.1.2.3. Résultat d'existence d'unicité

Théorème 2

Sous les hypothèses, $f\in\left(W^{-1,q}(\Omega)\right)^n$, $\mu>0$, et $p>2$, le problème (p_1) admet une solution $u=u(x)$ solution dans $\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n$.

Démonstration Résultat immédiat de théorème 2, les lemmes 1 et 2 et les proposition 1, 2, 3 et 4.

Théorème 3

Sous les hypothèses du *Théorème*1, la solution du problème (p_1) est unique.

Démonstration Soient u_1, u_2 deux solutions du problème (p_1), alors u_1 et $u_2\in V$, et

$$(p_{1_1})\begin{cases}-L_pu_1+|u_1|^{p-2}u_1=f \ \text{ dans } \Omega\\ u_1=0 \ \text{ sur } \Gamma\end{cases}$$

$$(p_{1_2})\begin{cases}-L_pu_2+|u_2|^{p-2}u_2=f \ \text{ dans } \Omega\\ u_2=0 \ \text{ sur } \Gamma\end{cases}$$

.

Donc :

$$(p_{1_{1-2}})\begin{cases} -\mu\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right)-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u_2}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u_2}{\partial x_i}\right)\right) \\ -(\lambda+\mu)\nabla(div(u_1-u_2))+|u_1|^{p-2}u_1-|u_2|^{p-2}u_2=0 \ \text{ dans } \Omega \\ u_1-u_2=0 \ \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

Alors la fonction (u_1-u_2) vérifié :

$$\begin{cases} u_1-u_2\in V \\ A(u_1)-A(u_2)=0 \ \text{ dans } \Omega \quad (1,5) \\ u_1-u_2=0 \ \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

En multipliant l'équation $(1,5)$ par u_1-u_2 et en intégrant sur Ω on trouve

$$\begin{cases} (A(u_1)-A(u_2),u_1-u_2)=0 \ \text{ dans } \Omega \quad (1,6) \\ u_1-u_2=0 \ \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

or $c.f.$ [23]

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left(\left|\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u_1}{\partial x_i}-\left|\frac{\partial u_2}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u_2}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_i}-\frac{\partial u_2}{\partial x_i}\right)dx=\|u_1-u_2\|^p.$$

Donc :

$$\mu\|u_1-u_2\|^p+(\lambda+\mu)\int_{\Omega}(div(u_1-u_2))^2dx+\int_{\Omega}\left(|u_1|^{p-2}u_1-|u_2|^{p-2}u_2\right)(u_1-u_2)dx=0.$$

Puisque :

$$\begin{cases} \mu\|u_1-u_2\|^p\geq 0 \ \ puisque \ \mu>0, \\ (\lambda+\mu)\int_{\Omega}(div((u_1-u_2)))^2dx\geq 0, \\ \int_{\Omega}\left(|u_1|^{p-2}u_1-|u_2|^{p-2}u_2\right)(u_1-u_2)dx\geq 0. \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{cases} \mu \|u_1 - u_2\|^p = 0, \\ (\lambda + \mu) \int\limits_{\Omega} \left(div\left((u_1 - u_2)\right)\right)^2 dx = 0, \\ \int\limits_{\Omega} \left(|u_1|^{p-2} u_1 - |u_2|^{p-2} u_2\right)(u_1 - u_2)\, dx = 0. \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\left(div\,(u_1 - u_2)\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad div\,(u_1 - u_2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x_i}(u_1 - u_2) = 0$$

puisque l'opérateur $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ est linéaire continu alors :

$$u_1 - u_2 = 0.$$

D'où le *Théorème* 3.

.

I.2.1. Position du problème (p_2)

On suppose dans cette partie que $\Gamma_1 \neq \phi$ et $\Gamma_2 \neq \phi$ et on étudiera l'existence, l'unicité et la régularité de la solution $u = u(x)$ du problème :

$$(p_2)\begin{cases} -L_p u + |u|^{p-2} u = f \ \text{ dans } \Omega & (2,1) \\ u = 0 \ \text{ sur } \Gamma_1 & (2,2) \\ \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \eta_i + \varphi(x) u = 0 \ \text{ sur } \Gamma_2 & (2,3) \end{cases}$$

Remarque

Dans la suite de ce travail on prend $V = \left\{ v \in \left(W^{1,p}(\Omega) \right)^n / v = 0, sur \Gamma_1 \right\}$, munie de norme $\|u\|_V = \left(\sum_{i,j=1}^{n} \left\| \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$,qui est un espace de *Banach* séparable car :

$$V \subset \left(W^{1,p}(\Omega) \right)^n = \left(W_0^{1,p}(\Omega) \right)^n \oplus \left(W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma) \right)^n$$

et l'espace $\left(W^{1,p}(\Omega) \right)^n$ identifie par l'application : $v \to \left\{ v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial v}{\partial x_n} \right\}$ un sous espace vectoriel fermé de $(L^p(\Omega))^n \times (L^p(\Omega))^n ... (L^p(\Omega))^n$ qui est séparable.

I.2.2. Etude de problème

I.2.2.1.Formulation variationnelle

En multipliant l'équation $(2,1)$ par une fonction teste $v = v + \gamma_0(v) \in V \subset \left(W_0^{1,p}(\Omega) \right)^n \oplus \left(W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma) \right)^n$ et en intégrant sur Ω, on obtient :

$$-\mu \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) v \, dx - (\lambda + \mu) \int_\Omega \nabla (div u) \, v \, dx + \int_\Omega |u|^{p-2} uv \, dx$$

$$= \int_\Omega f v \, dx, \qquad (2,4)$$

D'après la formule de *Green* :

$$\begin{aligned}(2,4) \quad \Leftrightarrow \quad & \mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx-\mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_1}\gamma_0\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\gamma_0(v)\;\eta_i\,d\sigma \\ & -\mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_2}\gamma_0\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\gamma_0(v)\;\eta_i\,d\sigma \\ & +(\lambda+\mu)\int_{\Omega}(divu)\,\nabla v\,dx-(\lambda+\mu)\int_{\Gamma_1}\gamma_0(divu)\,\gamma_0(v)\;\eta_i\,d\sigma \\ & -(\lambda+\mu)\int_{\Gamma_2}\gamma_0(divu)\,\gamma_0(v)\;\eta_i\,d\sigma+\int_{\Omega}|u|^{p-2}uv\,dx \\ = \quad & \int_{\Omega}fv\,dx\end{aligned}$$

Avec l'utilisation des conditions aux limites $(2,2)$, $(2,3)$ on trouve :

$$\begin{aligned}& \mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx+(\lambda+\mu)\int_{\Omega}(divu)(divv)\,dx \\ & +\int_{\Omega}|u|^{p-2}uvdx+\mu\int_{\Gamma_2}\varphi(x)\,u\gamma_0(v)\;\eta_i d\sigma-(\lambda+\mu)\int_{\Gamma_2}\gamma_0(divu)\,\gamma_0(v)\;\eta_i d\sigma \\ = \quad & \int_{\Omega}fvdx\end{aligned}$$

Proposition 5 :

Le problème (p_2) et le problème variationnel (p_{v_2}) sont équivalents où :

$$(p_{v_2})\begin{cases}\text{trouver } u\in V \text{ tel que :} \\ \quad \mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx \\ \quad +(\lambda+\mu)\int_{\Omega}(divu)(divv)\;dx+\int_{\Omega}|u|^{p-2}uvdx \\ \quad =\int_{\Omega}fv\,dx-\mu\int_{\Gamma_2}\varphi(x)\,u\gamma_0(v)\;\eta_i\,d\sigma \\ \quad +(\lambda+\mu)\int_{\Gamma_2}\gamma_0(divu)\,\gamma_0(v)\;\eta_i\,d\sigma.\end{cases} \tag{2,5}$$

.

Démonstration Soit $u \in V \Longrightarrow u = 0$ sur Γ_1.

D'une part on a :

$$\mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} (divu)(divv) \, dx + \int_{\Omega} |u|^{p-2} uv dx$$

$$= \int_{\Omega} fv \, dx - \mu \int_{\Gamma_2} \varphi(x) u \gamma_0(v) \, \eta_i \, d\sigma + (\lambda + \mu) \int_{\Gamma_2} \gamma_0(divu) \gamma_0(v) \, \eta_i \, d\sigma.$$

D'autre part d'après la formule de *Green* on a :

$$\mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} (divu)(divv) \, dx + \int_{\Omega} |u|^{p-2} uv dx$$

$$= -\mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) v dx + \mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Gamma_1} \gamma_0 \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \gamma_0(v) \eta_i d\sigma$$

$$+ \mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Gamma_2} \gamma_0 \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \gamma_0(v) \eta_i d\sigma - (\lambda + \mu) \int_{\Omega} \nabla(divu) v dx$$

$$+ (\lambda + \mu) \int_{\Gamma_1} \gamma_0(divu) \gamma_0(v) \eta_i d\sigma + (\lambda + \mu) \int_{\Gamma_2} \gamma_0(divu) \gamma_0(v) \eta_i d\sigma$$

$$+ \int_{\Omega} |u|^{p-2} uv dx$$

$$= \int_{\Omega} fv dx - \mu \int_{\Gamma_2} \varphi(x) u \gamma_0(v) \eta_i d\sigma + (\lambda + \mu) \int_{\Gamma_2} \gamma_0(divu) \gamma_0(v) \eta_i d\sigma$$

Alors :

$$-\mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) v dx - (\lambda + \mu) \int_{\Omega} \nabla(divu) v dx + \int_{\Omega} |u|^{p-2} uv dx$$

$$= \int_{\Omega} fv dx - \mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Gamma_2} \gamma_0 \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \gamma_0(v) \eta_i d\sigma - \mu \int_{\Gamma_2} \varphi(x) u \gamma_0(v) \eta_i d\sigma$$

$$- (\lambda + \mu) \int_{\Gamma_1} \gamma_0(divu) \gamma_0(v) \eta_i d\sigma - \mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Gamma_1} \gamma_0 \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \gamma_0(v) \eta_i d\sigma = 0.$$

.

Puisque $(D(\Omega))^n$ dense dans $\left(W^{1,p}(\Omega)\right)^n$, on obtient :

$$\begin{cases} -\mu\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)-(\lambda+\mu)\nabla(divu)+|u|^{p-2}u=f \text{ sur } \Omega, \\ u=0 \ sur \ \Gamma_1, \\ \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\eta_i+\varphi(x)u=0 \text{ sur } \Gamma_2. \end{cases}$$

D'où la Proposition.

Notation

On note par :

$$t_p(u,v)=\mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx+(\lambda+\mu)\int_{\Omega}(divu)(divv)\,dx$$
$$+\mu\int_{\Gamma_2}\varphi(x)u\gamma_0(v)\eta_i d\sigma-(\lambda+\mu)\int_{\Gamma_2}\gamma_0(divu)\gamma_0(v)\eta_i d\sigma$$

Lemme 3

Il existe un unique élément T_P de $\left(W^{-1,q}(\Omega)\right)^n$ tel que :

$$t_p(u,v)=(T_P(u),v),\ \forall v\in V.$$

De plus

$$T_P=-\mu\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial .}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial .}{\partial x_i}\right)-(\lambda+\mu)\nabla(div.).$$

Démonstration Comme pour tout $u\in\left(W^{1,p}(\Omega)\right)^n$ l'application:

$$\left(W^{1,p}(\Omega)\right)^n\to\mathbb{R}, v\longmapsto t_p(u,v)$$

est linéaire continue alors, $c.f.$ [23], il existe un unique élément T_P de $\left(W^{-1,q}(\Omega)\right)^n$ tel que :

$$t_p(u,v)=(T_P(u),v),\forall v\in\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n.$$

Vérifions que :

$$T_P = -\mu \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial .}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial .}{\partial x_i} \right) - (\lambda + \mu) \nabla (div.)$$

On a :

$$\begin{aligned} t_p(u,v) &= \mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} (divu)(divv)\, dx \\ &\quad + \mu \int_{\Gamma_2} \varphi(x)\, u \gamma_0(v)\, \eta_i d\sigma - (\lambda + \mu) \int_{\Gamma_2} \gamma_0(divu)\, \gamma_0(v)\, \eta_i d\sigma \end{aligned}$$

$$\Rightarrow t_p(u,v) = \mu \sum_{i=1}^{n} \langle \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \rangle + (\lambda + \mu) \sum_{j=1}^{n} \langle (divu), \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \rangle$$

$$\Rightarrow t_p(u,v) = \langle -\mu \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right), v \rangle - (\lambda + \mu) \sum_{j=1}^{n} \langle \frac{\partial}{\partial x_j} (divu), v_j \rangle$$

$$\Rightarrow t_p(u,v) = \langle -\mu \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right), v \rangle - (\lambda + \mu) \langle \nabla (divu), v \rangle$$

$$\Rightarrow T_P(u) = -\mu \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) - (\lambda + \mu) \nabla (divu).$$

I.2.2.2.Propriétés des opérateurs

Remarque

On pose : $a_1(u,v) = \int_{\Omega} |u|^{p-2} uv dx = (A_1(u), v)$, $\forall v \in (L^p(\Omega))^n$, A_1 est un opérateur borné, monotone et hémicontinu (voir *Lemme* 2 et *Proposition* 3).

Proposition 6

L'opérateur T_p défini de $\left(W^{1,p}(\Omega)\right)^n$ dans $\left(W^{-1,q}(\Omega)\right)^n$ par :

$$u \longmapsto T_P(u) = -\mu \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) - (\lambda + \mu) \nabla (divu)$$

est un opérateur borné, monotone et hémicontinu.

Démonstration

• T_p **est borné**

On a:

$$\|T_p(u)\|_{(W^{-1,q}(\Omega))^n} = \sup_{v\in V,\ \|v\|\leq 1} |t_p(u,v)| \ ,\forall u \in \left(W^{1,p}(\Omega)\right)^n$$

Alors :

$$\begin{aligned} |t_p(u,v)| \ \leq \ & \mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left|\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-1}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|dx + (\lambda+\mu)\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right|\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right|dx \\ & +\mu\int_{\Gamma_2}|\varphi(x)\,u|\,|\gamma_0(v)|\,d\sigma + (\lambda+\mu)\int_{\Gamma_2}\left|\gamma_0\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)\right||\gamma_0(v)|\,d\sigma \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de $Cauchy-Schwartz$:

$$\begin{aligned} |t_p(u,v)| \leq \ & \mu\left(\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left|\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-1}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q}dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ & +(\lambda+\mu)\left(\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right|^{q}dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ & +\mu\left(\int_{\Gamma_2}|\varphi(x)\,u|^{q}\,d\sigma\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{\Gamma_2}|\gamma_0(v)|^{p}\,d\sigma\right)^{\frac{1}{p}} \\ & +(\lambda+\mu)\left(\int_{\Gamma_2}\left|\gamma_0\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)\right|^{q}d\sigma\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{\Gamma_2}|\gamma_0(v)|^{p}\,d\sigma\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Mais :

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-1}\frac{\partial u}{\partial x_i} \in (L^q(\Omega))^n \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left|\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-1}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q}dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq c_4$$

et on a :

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right|^{q}dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right|^{\frac{p}{1-p}}dx \leq \left(\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right|^{p}dx\right)^{\frac{1}{1-p}}. \leq c_5$$

Donc :

$$|t_p(u,v)| \leq \mu c_4 \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{(L^p(\Omega))^n} + (\lambda+\mu)\, c_5 \times \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\|^p_{(L^p(\Omega))^n} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+\mu M \left\|\gamma_0(v)\right\|_{(L^p(\Gamma_2))^n} \|u\|_{(L^p(\Gamma_2))^n} + (\lambda+\mu)\, C \|u\|_V \|v\|_V$$

Or :

$$u \in \left(W^{1,p}(\Omega)\right)^n \Rightarrow \gamma_0(u) \in \left(W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)\right)^n \subset \left(L^p(\Gamma)\right)^n,$$

Donc :

$$\exists c > 0, \|u_m\|_{\left(W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)\right)^n} \leq c \|u_m\|_{(W^{1,p}(\Omega))^n}$$

Mais :

$$\left(W^{1,p}(\Omega)\right)^n \subset \left(L^p(\Omega)\right)^n$$

Donc :

$$|t_p(u,v)| \leq \mu c_4 \|v\|_{(W^{1,p}(\Omega))^n} + (\lambda+\mu)\, n^{\frac{1}{p}} c_5 \|v\|_{(W^{1,p}(\Omega))^n}$$

$$+\mu M \left\|\gamma_0(v)\right\|_{(L^p(\Gamma_2))^n} + (\lambda+\mu)\, c_6 \|v\|_{(W^{1,p}(\Omega))^n}$$

Alors :

$$|t_p(u,v)| \leq const \|v\|_{(W^{1,p}(\Omega))^n}$$

Donc :

$$\sup_{v\in V,\ \|v\|\leq 1} |t_p(u,v)| \leq const \sup_{v\in V,\ \|v\|\leq 1} \|v\|_{(W^{1,p}(\Omega))^n}$$

$$\Rightarrow \sup_{v\in V,\ \|v\|\leq 1} |t_p(u,v)| < \infty$$

Ce qui montre que T_p est borné.

.

• T_p **est monotone**

T_p est monotone si: $\forall u, v \in V$, $(T_p u - T_p v, u - v) \geq 0$.

En effet :

$$(T_p u - T_p v, u - v) = (T_p u, u - v) - (T_p v, u - v) \quad (2,6)$$

Alors :

$$\begin{aligned}(2,6) = \mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} (divu) \left(div \left(u - v \right) \right) dx \\ + \mu \int_{\Gamma_2} \varphi \left(x \right) u \gamma_0 \left(\left(u - v \right) \right) \eta_i d\sigma - (\lambda + \mu) \int_{\Gamma_2} \gamma_0 \left(divu \right) \gamma_0 \left(\left(u - v \right) \right) \eta_i d\sigma \\ - \mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx - (\lambda + \mu) \int_{\Omega} (divv) \left(div \left(u - v \right) \right) dx \\ - \mu \int_{\Gamma_2} \varphi \left(x \right) v \gamma_0 \left(\left(u - v \right) \right) \eta_i d\sigma + (\lambda + \mu) \int_{\Gamma_2} \gamma_0 \left(divv \right) \gamma_0 \left(\left(u - v \right) \right) \eta_i d\sigma.\end{aligned}$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}(T_p u - T_p v, u - v) &= \mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} - \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx \\ &+ (\lambda + \mu) \int_{\Omega} (divu - divv) \, div \left(u - v \right) dx \\ &+ \mu \int_{\Gamma_2} \varphi \left(x \right) \left(u - v \right) \gamma_0 \left(\left(u - v \right) \right) \eta_i d\sigma \\ &- (\lambda + \mu) \int_{\Gamma_2} \gamma_0 \left(div \left(u - v \right) \right) \gamma_0 \left(\left(u - v \right) \right) \eta_i d\sigma\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}(2,6) &= \mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} - \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx \\ &+ (\lambda + \mu) \int_{\Omega} \left(div \left(u - v \right) \right)^2 dx + \mu \int_{\Gamma_2} \varphi \left(x \right) \left(u - v \right) \gamma_0 \left(\left(u - v \right) \right) \eta_i d\sigma \\ &- (\lambda + \mu) \int_{\Gamma_2} \gamma_0 \left(div \left(u - v \right) \right) \gamma_0 \left(\left(u - v \right) \right) \eta_i d\sigma\end{aligned}$$

.

De plus on a :

$$\mu \int_{\Gamma_2} \varphi(x)(u-v)\gamma_0((u-v))\eta_i d\sigma = \mu \int_{\Gamma_2} \varphi(x)\gamma_0((u-v))^2 \eta_i d\sigma \geq 0,$$

$$\text{car } \varphi(x) \geq 0, \forall x \in \Omega.$$

Et :

$$\begin{aligned} & \mu \int_{\Gamma_2} \varphi(x)(u-v)\gamma_0((u-v))\eta_i d\sigma - (\lambda+\mu)\int_{\Gamma_2} \gamma_0(div(u-v))\gamma_0((u-v))\eta_i d\sigma \\ \geq\ & (\mu\|\varphi\| - (\lambda+\mu)M_2)\|(u-v)\|_V^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} (2,6) &= \mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} - \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i}\right) dx \\ &\quad + (\lambda+\mu)\int_{\Omega} (div(u-v))^2 dx + \mu \int_{\Gamma_2} \varphi(x)\gamma_0((u-v))^2 \eta_i d\sigma \\ &\quad - (\lambda+\mu)\int_{\Gamma_2} \gamma_0(div(u-v))\gamma_0((u-v))\eta_i d\sigma \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Ce qui montre que T_p est monotone.

• T_p **est hémicontinu**

T_p est hémicontinu si: $\forall u, v, w \in V$, la fonction: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\beta \to (T_p(u+\beta v), w)$ est continue.

Soit β_n une suite convergente de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

.

On pose :

$$f_n(x) = \mu \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + \beta_n \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \right|^{p-2} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + \beta_n \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \right) \frac{\partial w(x)}{\partial x_i}$$

$$+ (\lambda + \mu) \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u_i(x)}{\partial x_i} + \beta_n \frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i} \right) \frac{\partial w_j(x)}{\partial x_j}$$

$$+ \mu \varphi(x) (u + \beta_n v) \gamma_0(w) \eta_i d\sigma$$

$$- (\lambda + \mu) \gamma_0 (div(u + \beta_n v)) \gamma_0(w) \eta_i d\sigma$$

qui converge vers une fonction $f(x)$ telle que :

$$f(x) = \mu \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + \beta \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \right|^{p-2} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + \beta \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \right) \frac{\partial w(x)}{\partial x_i}$$

$$+ (\lambda + \mu) \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u_i(x)}{\partial x_i} + \beta \frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i} \right) \frac{\partial w_j(x)}{\partial x_j}$$

$$+ \mu \varphi(x) (u + \beta v) \gamma_0(w) \eta_i$$

$$- (\lambda + \mu) \gamma_0 (div(u + \beta v)) \gamma_0(w) \ \eta_i.$$

On a aussi :

$$|f_n(x)| \leq \mu \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + \beta_n \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \right|^{p-1} \left| \frac{\partial w_j(x)}{\partial x_j} \right|$$

$$+ (\lambda + \mu) \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_i} + \beta_n \frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i} \right| \left| \frac{\partial w_j(x)}{\partial x_j} \right|$$

$$+ |\varphi(x) (u + \beta_n v)| |\gamma_0(w)|$$

$$+ (\lambda + \mu) \left| \gamma_0 \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \beta_n \frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i} \right) \right| |\gamma_0(w)|$$

Alors :

$$|f_n(x)| \leq \tfrac{\mu}{2} \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + \beta_n \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \right|^{2(p-1)} + \tfrac{\mu}{2} \left| \frac{\partial w(x)}{\partial x_i} \right|^2$$

$$+ \tfrac{(\lambda+\mu)}{2} \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_i} + \beta_n \frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i} \right|^2 + \tfrac{(\lambda+\mu)}{2} \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial w_j(x)}{\partial x_j} \right|^2$$

$$+ \frac{\mu}{2} |\varphi(x) (u + \beta_n v)|^2 + \frac{1}{2} |\gamma_0(w)|^2$$

$$+ \tfrac{(\lambda+\mu)}{2} \left| \gamma_0 \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \beta_n \frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i} \right) \right|^2 + \frac{1}{2} |\gamma_0(w)|^2$$

Et d'après l'inégalité : $\forall f, g \in L^p(\Omega) : \|f + g\|^p_{L^p(\Omega)} \leq 2^p \left(\|f\|^p_{L^p(\Omega)} + \|g\|^p_{L^p(\Omega)} \right)$

On a :

$$|f_n(x)| \leq \mu 2^{2p-3} \left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|^{2(p-1)} + \mu 2^{2p-3} |\beta_n|^{2(p-1)} \left|\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\right|^{2(p-1)} + \tfrac{\mu}{2} \left|\frac{\partial w(x)}{\partial x_i}\right|^2$$
$$+2(\lambda+\mu) \sum_{j=1}^{n} \left[\left|\frac{\partial u_i(x)}{\partial x_i}\right|^2 + |\beta_n|^2 \left|\frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i}\right|^2\right]$$
$$+\tfrac{(\lambda+\mu)}{2} \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial w_j(x)}{\partial x_j}\right|^2 + \tfrac{\mu}{2} |\varphi(x)|^2 |u|^2 + |\beta_n|^2 |v|^2 + |\gamma_0(w)|^2$$

$$+\tfrac{(\lambda+\mu)}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} \gamma_0 \left|\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right|^2 + |\beta_n|^2 \gamma_0 \left|\frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i}\right|^2\right)$$

Mais β_n est une suite convergente dans $\mathbb{R}$, alors :

$$\exists m \in \mathbb{R} : |\beta_n| \leq m.$$

$$\Rightarrow |f_n(x)| \leq \mu 2^{2p-3} \left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|^{2(p-1)} + \mu 2^{2p-3} m_1 \left|\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\right|^{2(p-1)} + \frac{\mu}{2} \left|\frac{\partial w(x)}{\partial x_i}\right|^2$$
$$+2(\lambda+\mu) \sum_{j=1}^{n} \left[\left|\frac{\partial u_i(x)}{\partial x_i}\right|^2 + m_2 \left|\frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i}\right|^2\right] + \frac{(\lambda+\mu)}{2} \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial w_j(x)}{\partial x_j}\right|^2$$
$$+\frac{\mu}{2} |\varphi(x)|^2 |u|^2 + m_2 |v|^2 + |\gamma_0(w)|^2$$
$$+\frac{(\lambda+\mu)}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} \gamma_0 \left|\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right|^2 + m_2 \gamma_0 \left|\frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i}\right|^2\right)$$

On définit la fonction $g(x)$ telle que :

$$g(x) = \mu 2^{2p-3} \left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|^{2(p-1)} + \mu 2^{2p-3} m_1 \left|\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\right|^{2(p-1)} + \tfrac{\mu}{2} \left|\frac{\partial w(x)}{\partial x_i}\right|^2$$
$$+\sum_{j=1}^{n} \left[2(\lambda+\mu) \left|\frac{\partial u_i(x)}{\partial x_i}\right|^2 + 2(\lambda+\mu) m_2 \left|\frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i}\right|^2 + \tfrac{(\lambda+\mu)}{2} \left|\frac{\partial w_j(x)}{\partial x_j}\right|^2\right]$$
$$+\tfrac{\mu}{2} |\varphi(x)|^2 |u|^2 + m_2 |v|^2 + |\gamma_0(w)|^2 + \tfrac{(\lambda+\mu)}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} \gamma_0 \left|\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right|^2 + m_2 \gamma_0 \left|\frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i}\right|^2\right)$$

On constate que la fonction $g(x)$ est une fonction dans $L^1(\Omega)$.

Alors on a : $f_n(x) \to f(x)$ p.p sur Ω et $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p sur Ω.

D'après le théorème de convergence dominée de *Lebesgue*, on en déduit que :

$$f \in L^1(\Omega) \text{ et } \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \to 0.$$

Par conséquent :

$$(T_p(u + \beta_n v), w) \to (T_p(u + \beta v), w).$$

Ce qui montre que T_p est hémicontinu.

Notation

On note par :

$$t(u, v) = t_p(u, v) + a_1(u, v)$$

et

$$T(u) = T_p(u) + A_1(u)$$

Proposition 7

L'opérateur T défini de : V dans $\left(W^{-1,q}(\Omega)\right)^n$ par :

$$u \longmapsto T(u) = T_p(u) + A_1(u)$$

est un opérateur coercif.

Démonstration T est coercif si :

$$\forall \alpha > 0, \exists \beta, \forall u \in V : \|u\|_V \geq \beta \Rightarrow (T(u), u) \geq \alpha \|u\|_V,$$

D'une part :

$$(A_1(u), u) = \int_\Omega |u|^{p-2} uudx = \int_\Omega |u|^p dx = \|u\|^p_{(L^P(\Omega))^n}$$

et :

$$\varphi \in C^{0,1}\left(\overline{\Omega}\right) \Rightarrow \varphi \text{ est borné} \Rightarrow \exists\ M \text{ telle que } \|\varphi(x)\| \leq M.$$

D'autre part :

$$(T_p(u), u) = \mu \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx + (\lambda+\mu) \int_\Omega (divu)^2 dx$$
$$+\mu \int_{\Gamma_2} \varphi(x)\, u\gamma_0(u)\ \eta_i\ d\sigma - (\lambda+\mu) \int_{\Gamma_2} \gamma_0(divu)\, \gamma_0(u)\ \eta_i\ d\sigma$$

Mais sur Γ_2 on a : $\gamma_0(u) = -\dfrac{1}{\varphi(x)} \sum_{i=1}^{n} \left|\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$

Donc :

$$\begin{aligned}(T_p(u), u) &= \mu \|u\|_V^p + (\lambda+\mu) \int_\Omega (divu)^2 dx + \mu \int_{\Gamma_2} \varphi(x)\, u\gamma_0(u)\, \eta_i d\sigma \\ &\quad + (\lambda+\mu) \int_{\Gamma_2} \gamma_0(divu)\, \frac{1}{\varphi(x)} \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \eta_i d\sigma\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$(T(u), u) = \mu \|u\|_V^p + \int_\Omega |u|^p dx + (\lambda+\mu) \int_\Omega (divu)^2 dx + \mu \int_{\Gamma_2} \varphi(x)\, \gamma_0(u)^2\, \eta_i d\sigma$$
$$+ (\lambda+\mu) \int_{\Gamma_2} \gamma_0(divu)\, \frac{1}{\varphi(x)} \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \eta_i d\sigma$$

Mais : $\gamma_0(divu) = \sum_{i=1}^{n} \left|\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2$

alors :

$$\begin{aligned}(T(u), u) &= \mu \|u\|_V^p + \mu \int_\Omega |u|^p dx + (\lambda+\mu) \int_\Omega (divu)^2 dx + \mu \int_{\Gamma_2} \varphi(x)\, \gamma_0(u)^2\, \eta_i d\sigma \\ &\quad + (\lambda+\mu) \int_{\Gamma_2} \frac{1}{\varphi(x)} \left(\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p\right) \left(\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \eta_i d\sigma \\ &\geq \mu \|u\|_V^p\end{aligned}$$

puisque $\varphi(x) \geq 0, \forall x \in \Omega$ et $p > 1$.

Ce qui montre que T est coercif.

.

I.2.2.3. Résultat d'existence et d'unicité

Théorème 4

Sous les hypothèses, $f \in \left(W^{-1,q}(\Omega)\right)^n$, $\varphi \in C^{0,1}\left(\overline{\Omega}\right)$ et $\varphi(x) > 0$, il existe une solution $u = u(x)$ du problème (p_2) dans l'espace V.

Démonstration Résultat direct de théorème 1, et le lemme 3 et les proposition 5, 6 et 7.

Théorème 5

Sous les hypothèses du *Théorème* 3 la solution du problème (p_2) est unique.

Démonstration Soient u_1, u_2 deux solutions du problème (p_2), alors u_1 et $u_2 \in V$ et

$$(p_{2_1}) \begin{cases} -L_p u_1 + |u_1|^{p-2} u_1 = f \ \ dans\ \Omega \\ u_1 = 0\ sur\ \Gamma_1 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \left|\dfrac{\partial u_1}{\partial x_i}\right|^{p-2} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_i}\eta_i + \varphi(x)\, u_1 = 0 \ \ sur\ \Gamma_2 \end{cases}$$

$$(p_{2_2}) \begin{cases} -L_p u_2 + |u_2|^{p-2} u_2 = f \ \ dans\ \Omega \\ u_2 = 0\ sur\ \Gamma_1 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \left|\dfrac{\partial u_2}{\partial x_i}\right|^{p-2} \dfrac{\partial u_2}{\partial x_i}\eta_i + \varphi(x)\, u_2 = 0 \ \ sur\ \Gamma_2 \end{cases}$$

Donc la fonction $(u_1 - u_2)$ vérifier :

$$\begin{cases} u_1 - u_2 \in V \\ T(u_1) - T(u_2) = 0 \quad (2,7) \\ u_1 - u_2 = 0\ sur\ \Gamma_1 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\left|\dfrac{\partial u_1}{\partial x_i}\right|^{p-2} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_i} - \left|\dfrac{\partial u_2}{\partial x_i}\right|^{p-2} \dfrac{\partial u_2}{\partial x_i} \right) \eta_i - \varphi(x)\,(u_2 - u_1) = 0 \ \ sur\ \Gamma_2 \end{cases}$$

En multipliant l'équation $(2,7)$ par $(u_1 - u_2)$ et en intégrant sur Ω on trouve :

$$\begin{cases} (T(u_1) - T(u_2), u_1 - u_2) = 0 \quad dans\ \Omega \\ \\ u_1 - u_2 = 0 \quad sur\ \Gamma_1 \\ \quad \sum_{i=1}^{n} \left(\left| \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} - \left| \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \right) \eta_i - \varphi(x)(u_2 - u_1) = 0 \quad sur\ \Gamma_2 \end{cases}$$

Mais $c.f.$ [23] :

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left(\left| \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} - \left| \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_i} - \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \right) dx = \|u_1 - u_2\|^p .$$

Donc :

$$\begin{aligned} & \mu \|u_1 - u_2\|^p + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} (div(u_1 - u_2))^2 dx \\ & + \int_{\Omega} \left(|u_1|^{p-2} u_1 - |u_2|^{p-2} u_2 \right) (u_1 - u_2) dx \\ & + \mu \int_{\Gamma_2} \varphi(x)(u_1 - u_2) \gamma_0((u_1 - u_2)) \eta_i d\sigma \\ & + (\lambda + \mu) \int_{\Gamma_2} \gamma_0(div(u_1 - u_2)) \gamma_0((u_2 - u_1)) \eta_i = 0 \end{aligned}$$

Mais de fait que :

$$\begin{cases} \mu \|u_1 - u_2\|^p \geq 0, \\ \quad (\lambda + \mu) \int_{\Omega} (div((u_1 - u_2)))^2 dx \geq 0, \\ \int_{\Omega} \left(|u_1|^{p-2} u_1 - |u_2|^{p-2} u_2 \right) (u_1 - u_2) dx \geq 0, \\ \quad \mu \int_{\Gamma_2} \varphi(x)(u_1 - u_2) \gamma_0((u_1 - u_2)) \ \eta_i d\sigma \\ \quad + (\lambda + \mu) \int_{\Gamma_2} \gamma_0(div(u_2 - u_1)) \gamma_0((u_1 - u_2)) \eta_i d\sigma \geq 0 \end{cases}$$

.

En déduit :

$$\begin{cases} \mu \|u_1 - u_2\|^p = 0, \\ (\lambda+\mu) \int\limits_{\Omega} \left(div\left((u_1 - u_2)\right)\right)^2 dx = 0, \\ \int\limits_{\Omega} \left(|u_1|^{p-2} u_1 - |u_2|^{p-2} u_2\right)(u_1 - u_2)\, dx = 0, \\ -\mu \int\limits_{\Gamma_2} \varphi(x)(u_2 - u_1)\gamma_0\left((u_1 - u_2)\right)\ \eta_i d\sigma \\ +(\lambda+\mu) \int\limits_{\Gamma_2} \gamma_0\left(div\,(u_1 - u_2)\right)\gamma_0\left((u_2 - u_1)\right)\eta_i d\sigma = 0. \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \left(div\,(u_1 - u_2)\right)^2 &= 0 \\ &\Rightarrow \quad div\,(u_1 - u_2) = 0 \\ &\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x_i}(u_1 - u_2) = 0. \end{aligned}$$

Puisque l'opérateur $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ est linéaire continu $\Rightarrow u_1 - u_2 = 0$.

D'où l'unicité de la solution.

.

I.3.1. Position du problème (p_3)

Dans cette partie, on considère le cas : $F(u) = |u|^{p-2} u - |u|^{q-1} u$. C'est-à-dire on étudiera l'existence et la régularité de la solution $u = u(x)$ du problème :

$$(p_3)\begin{cases} -L_p u + |u|^{p-2} u - |u|^{q-1} u = f \quad dans\ \Omega & (3,1) \\ u = 0\ sur\ \Gamma_1 & (3,2) \\ \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \eta_i + \varphi(x) u = 0 \quad sur\ \Gamma_2 & (3,3) \end{cases}$$

I.3.2. Etude de problème

I.3.2.1. Formulation variationnelle

En multipliant l'équation $(3,1)$ par une fonction-test $v = v + \gamma_0(v) \in V$ et en intégrant sur Ω, on obtient :

$$-\mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) v dx - (\lambda + \mu) \int_{\Omega} \nabla (divu)\, v dx + \int_{\Omega} |u|^{p-2} uv dx - \int_{\Omega} |u|^{q-1} uv dx = \int_{\Omega} f v dx \quad (3,4)$$

D'après la formule de $Green$, $(3,4) \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} & \mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - \mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Gamma_1} \gamma_0 \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \gamma_0(v) \eta_i d\sigma \\ & - \mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Gamma_2} \gamma_0 \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \gamma_0(v) \eta_i d\sigma \\ & + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} (divu) \nabla v\ dx - (\lambda + \mu) \int_{\Gamma_1} \gamma_0 (divu) \gamma_0(v) \eta_i d\sigma \\ & - (\lambda + \mu) \int_{\Gamma_2} \gamma_0 (divu) \gamma_0(v)\ \eta_i\ d\sigma + \int_{\Omega} |u|^{p-2} uv dx - \int_{\Omega} |u|^{q-1} uv dx = \int_{\Omega} f v dx \end{aligned}$$

Avec l'utilisation de $(3,2)$ et $(3,3)$, on trouve :

$$\begin{aligned}
&\mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx+(\lambda+\mu)\int_{\Omega}(divu)(divv)\,dx+\int_{\Omega}|u|^{p-2}uvdx\\
&-\int_{\Omega}|u|^{q-1}uvdx+\mu\int_{\Gamma_2}\varphi(x)\,u\gamma_0(v)\,\eta_i d\sigma-(\lambda+\mu)\int_{\Gamma_2}\gamma_0(divu)\,\gamma_0(v)\,\eta_i d\sigma\\
=&\int_{\Omega}fvdx
\end{aligned}$$

Proposition 8

Le problème (p_3) et le problème variataionnel (p_{v3}) sont équivalents, où :

$$(p_{v_3})\begin{cases}\text{trouver } u\in\left(W^{1,p}(\Omega)\right)^n \text{ tel que :}\\
\begin{cases}\mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx+(\lambda+\mu)\int_{\Omega}(divu)(divv)\,dx\\
+\int_{\Omega}|u|^{p-2}uvdx-\int_{\Omega}|u|^{q-1}uv\;dx\\
=\int_{\Omega}fvdx-\mu\int_{\Gamma_2}\varphi(x)\,u\gamma_0(v)\,\eta_i d\sigma\\
+(\lambda+\mu)\int_{\Gamma_2}\gamma_0(divu)\,\gamma_0(v)\,\eta_i d\sigma \qquad (3,4)\end{cases}\end{cases}$$

Démonstration Soit $u\in V\Longrightarrow u=0$ sur Γ_1, de plus u vérifie :

$$\begin{aligned}
&\mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\;dx+(\lambda+\mu)\int_{\Omega}(divu)(divv)\;\;dx\\
&+\int_{\Omega}|u|^{p-2}uvdx-\int_{\Omega}|u|^{q-1}uvdx\\
&=\int_{\Omega}fvdx-\mu\int_{\Gamma_2}\varphi(x)\,u\gamma_0(v)\;\;\eta_i\;d\sigma+(\lambda+\mu)\int_{\Gamma_2}\gamma_0(divu)\,\gamma_0(v)\,\eta_i d\sigma
\end{aligned}$$

.

D'après la formule de $Green$:

$$\begin{aligned}
&\mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx+(\lambda+\mu)\int_{\Omega}(divu)(divv)\ dx\\
&\quad+\int_{\Omega}|u|^{p-2}uvdx-\int_{\Omega}|u|^{q-1}uvdx\\
&\quad=-\mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)vdx+\mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_1}\gamma_0\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\gamma_0(v)\,\eta_i d\sigma\\
&\quad+\mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_2}\gamma_0\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\gamma_0(v)\,\eta_i d\sigma-(\lambda+\mu)\int_{\Omega}\nabla(divu)\,v\ dx\\
&\quad+(\lambda+\mu)\int_{\Gamma_1}\gamma_0(divu)\,\gamma_0(v)\ \eta_i\ d\sigma+(\lambda+\mu)\int_{\Gamma_2}\gamma_0(divu)\,\gamma_0(v)\,\eta_i d\sigma\\
&\quad+\int_{\Omega}|u|^{p-2}uvdx-\int_{\Omega}|u|^{q-1}uvdx\\
&=\int_{\Omega}fv\ dx-\mu\int_{\Gamma_2}\varphi(x)\,u\gamma_0(v)\ \eta_i\ d\sigma+(\lambda+\mu)\int_{\Gamma_2}\gamma_0(divu)\,\gamma_0(v)\ \eta_i\ d\sigma
\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
&-\mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)vdx-(\lambda+\mu)\int_{\Omega}\nabla(divu)\,vdx\\
&+\int_{\Omega}|u|^{p-2}uvdx-\int_{\Omega}|u|^{q-1}uvdx=\int_{\Omega}fvdx
\end{aligned}$$

car :

$$\begin{cases}
\mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_2}\gamma_0\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\gamma_0(v)\,\eta_i d\sigma=-\mu\int_{\Gamma_2}\varphi(x)\,u\gamma_0(v)\,\eta_i d\sigma,\\
(\lambda+\mu)\int_{\Gamma_1}\gamma_0(divu)\,\gamma_0(v)\,\eta_i d\sigma=0,\\
\mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_1}\gamma_0\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\gamma_0(v)\,\eta_i d\sigma=0.
\end{cases}$$

.

Comme $(D(\Omega))^n$ dense dans $\left(W^{1,p}(\Omega)\right)^n$, on obtient :

$$\begin{cases} -\mu\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\left(\left|\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right)-(\lambda+\mu)\nabla(divu)+|u|^{p-2}u-|u|^{q-1}u=f \ \text{ dans } \Omega \\ u=0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \\ \sum\limits_{i=1}^{n}\left|\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\eta_i+\varphi(x)u=0 \text{ sur } \Gamma_2 \end{cases}$$

I.3.2.2.Propriété des opérateurs

Comme dans la deuxième partie, on note par :

$$t_p(u,v)=\mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx+(\lambda+\mu)\int_{\Omega}(divu)(divv)\,dx$$
$$+\mu\int_{\Gamma_2}\varphi(x)u\gamma_0(v)\eta_i d\sigma-(\lambda+\mu)\int_{\Gamma_2}\gamma_0(divu)\gamma_0(v)\eta_i d\sigma$$

et par

$$t_p(u,v)=(T_p(u),v),\forall v\in\left(W^{1,p}(\Omega)\right)^n,$$

$T_p:\left(W^{1,p}(\Omega)\right)^n\to\left(W^{-1,q}(\Omega)\right)^n$ est un opérateur borné, hémicontinu, monotone,

et

$$a_1(u,v)=\int_{\Omega}|u|^{p-2}uvdx=(A_1(u),v),\forall v\in(L^p(\Omega))^n,$$

$A_1:L^p(\Omega)\to(L^q(\Omega))^n$ est un opérateur borné, monotone, hémicontinu.

Remarque

L'application définie sur $(L^p(\Omega))^n$ par : $u\longmapsto|u|^{q-1}u$ est à valeur dans $(L^q(\Omega))^n$. De plus elle est continue.

En effet :

Si $u \in (L^p(\Omega))^n$ alors : $|u|^{q-1} u$ est mesurable et :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left| |u|^{q-1} u \right|^q dx &= \int_\Omega |u|^{q^q} dx \leq \left(\int_\Omega |u|^q dx \right)^q, \quad \text{or } q = p(q-1) \\
&\leq \left(\int_\Omega |u|^{p(q-1)} dx \right)^q \leq \left(\int_\Omega |u|^p dx \right)^{q(q-1)} \\
&= \|u\|^{pq(q-1)}_{(L^p(\Omega))^n} < \infty \Rightarrow |u|^{q-1} u \in (L^q(\Omega))^n .
\end{aligned}$$

Notation

On pose pour touts u, v de $(L^p(\Omega))^n$:

$$a_2(u,v) = \int_\Omega |u|^{q-1} uv dx$$

Lemme 4

Il existe un unique élément A_2 de $(L^q(\Omega))^n$ telle que:

$$a_2(u,v) = (A_2(u), v), \ \forall v \in (L^p(\Omega))^n .$$

De plus $A_2(u) = |u|^{q-1} u$.

Démonstration

$a_2(u,v)$ est une forme continue de $(L^p(\Omega))^n \times (L^p(\Omega))^n \to \mathbb{R}$ et l'application $v \longmapsto a_2(u,v)$ est linéaire continue de $(L^p(\Omega))^n \to \mathbb{R}$.

Alors $c.f.$ [23] il existe un unique élément A_2 de $(L^q(\Omega))^n$ tel que :

$$a_2(u,v) = (A_2(u), v), \ \forall v \in (L^p(\Omega))^n .$$

Vérifions que : $A_2(u) = |u|^{q-1} u$

On a :

$$\begin{aligned} a_2(u,v) &= \int_\Omega |u|^{q-1} uv dx \\ &= \langle |u|^{q-1} u, v\rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A_2(u) = |u|^{q-1} u.$$

Proposition 9

L'opérateur A_2 défini de : $(L^p(\Omega))^n \to (L^q(\Omega))^n$ par :

$$u \longmapsto A_2(u) = |u|^{q-1} u$$

est un opérateur borné, monotone et hémicontinu.

Démonstration

• A_2 **est borné**

En effet :

$$\|A_2(u)\|_{(L^q(\Omega))^n} = \sup_{v\in(L^p(\Omega))^n,\ \|v\|\leq 1} |a_2(u,v)|$$

$$\begin{aligned} |a_2(u,v)| &\leq \int_\Omega \left| |u|^{q-1} uv \right| dx \\ &\leq \left(\int_\Omega \left(|u|^{q-1} u \right)^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega |v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Mais on a : $|u|^{q-1} u \in (L^q(\Omega))^n, \forall u \in (L^p(\Omega))^n$

$$\Longrightarrow \left(\int_\Omega \left(|u|^{q-1} u \right)^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq c_6$$

Donc :

$$\begin{aligned} |a_2(u,v)| &\leq c_6 \left(\int_\Omega |v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq const \|v\|_{(L^p(\Omega))^n} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sup_{v\in(L^p(\Omega))^n,\ \|v\|\leq 1} |a_2(u,v)| \leq const \sup_{v\in(L^p(\Omega))^n,\ \|v\|\leq 1} \|v\|_{(L^p(\Omega))^n}$$

$$\Rightarrow \|A_2(u)\|_{(L^q(\Omega))^n} < \infty$$

Ce qui montre que A_2 est borné.

• A_2 **est monotone**

Puisque l'application $x \longmapsto |x|^{q-1} x$ de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, est convexe, c'est-à-dire :

$$\left(|x|^{q-1} x - |y|^{q-1} y\right)(x-y) \geq 0,$$

alors $(A_2(u) - A_2(v), u-v) = \int\limits_\Omega \left(|u|^{q-1} u - |v|^{q-1} v\right)(u-v)\,dx \geq 0$, par conséquent A_2 est monotone.

• A_2 **est hémicontinu**

Soit $\{\beta_n\}$ une suite convergente dans $\mathbb{R}$.

On suppose :

$$f_n(x) = |u(x) + \beta_n v(x)|^{q-1} (u(x) + \beta_n v(x))\, w(x)$$

qui converge vers une fonction $f(x)$ telle que :

$$f(x) = |u(x) + \beta v(x)|^{q-1} (u(x) + \beta v(x))\, w(x)$$

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= |u(x) + \beta_n v(x)|^q |w(x)| \\ &\leq \frac{1}{2} |u(x) + \beta_n v(x)|^{2q} + \frac{1}{2} |w(x)|^2 \\ &\leq 2^{2q-1} |u(x)|^{2q} + 2^{2q-1} |\beta_n|^{2q} |v(x)|^{2q} + \frac{1}{2} |w(x)|^2 \end{aligned}$$

β_n est une suite convergente dans $\mathbb{R}$, alors :

$$\exists m \in \mathbb{R} : |\beta_n| \leq m.$$

Donc :

$$|f_n(x)| \leq 2^{2q-1}|u(x)|^{2q} + 2^{2q-1}m^{2q}|v(x)|^{2q} + \frac{1}{2}|w(x)|^2.$$

On définit la fonction $g(x)$ par :

$$g(x) = 2^{2q-1}|u(x)|^{2q} + 2^{2q-1}m_1|v(x)|^{2q} + \frac{1}{2}|w(x)|^2$$

qui est dans $L^1(\Omega)$ avec $m_{1=}m^{2q}$.

Alors on a: $f_n(x) \to f(x)$ p.p sur Ωet $|f_n(x)| \leq \phi(x)$ p.p sur Ω.

D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on en déduit que :

$$f \in L^1(\Omega) \text{ et } \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \to 0.$$

Par conséquent :

$$(A_2(u + \beta_n v), w) \to (A_2(u + \beta v), w)$$

Ce qui montre que A_2 est hémicontinu.

Notation

On note par :

$$b(u,v) = t_p(u,v) + a_1(u,v) - a_2(u,v)$$

et

$$B(u) = T_p(u) + A_1(u) - A_2(u)$$

Proposition 10

L'opéateur B défini de V dans $\left(W^{-1,q}(\Omega)\right)^n$ par :

$$u \longrightarrow B(u) = T_p(u) + A_1(u) - A_2(u)$$

est un opérateur coercif.

Démonstration

B est coercif si :

$$\forall \alpha > 0, \exists \beta, \forall u \in V : \|u\|_V \geq \beta \Rightarrow (B(u), u) \geq \alpha \|u\|_V .$$

En effet :

D'une part :

$$\begin{aligned} (A_1(u), u) &= \int_\Omega |u|^p \, dx \\ &= \|u\|^p_{(L^P(\Omega))^n} \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} (A_2(u), u) &= \int_\Omega |u|^{q-1} u u dx \\ &= \int_\Omega |u|^{q+1} \, dx \\ &= \int_\Omega |u|^{\frac{p}{p-1}+1} \, dx \\ &= \int_\Omega |u|^{p\left(\frac{1}{p-1}+\frac{1}{p}\right)} \, dx, \ q > p > 2 \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} (A_2(u), u) &\leq \left(\int_\Omega |u|^p \, dx \right)^{\left(\frac{1}{p-1}+\frac{1}{p}\right)} \\ &\leq \|u\|^{p\left(\frac{1}{p-1}+\frac{1}{p}\right)}_{(L^p(\Omega))^n} \\ &= \|u\|^{q+1}_{(L^p(\Omega))^n} \\ &= \|u\|^p_{(L^P(\Omega))^n} \|u\|^{q+1-p}_{(L^P(\Omega))^n} \end{aligned}$$

Et on a :

$$\begin{aligned}(T_p(u),u) &= \mu\|u\|_V^p+(\lambda+\mu)\int_\Omega (divu)^2\,dx+\mu\int_{\Gamma_2}\varphi(x)\,\gamma_0(u)^2\,\eta_i d\sigma\\ &\quad+(\lambda+\mu)\int_{\Gamma_2}\gamma_0(divu)\,\frac{1}{\varphi(x)}\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\eta_i d\sigma\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}(B(u),u) &= \mu\|u\|_V^p+(\lambda+\mu)\int_\Omega (divu)^2\,dx+\mu\int_{\Gamma_2}\varphi(x)\,\gamma_0(u)^2\,\eta_i d\sigma\\ &\quad+(\lambda+\mu)\int_{\Gamma_2}\gamma_0(divu)\,\frac{1}{\varphi(x)}\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\eta_i d\sigma\\ &\quad+\|u\|^p_{(L^p(\Omega))^n}-\|u\|^{q+1}_{(L^p(\Omega))^n}\end{aligned}$$

Or :

$$q+1\le p\Rightarrow \|u\|^p_{(L^p(\Omega))^n}-\|u\|^{q+1}_{(L^p(\Omega))^n}\ge 0$$

Alors

$$(B(u),u)\ge\mu\|u\|_V^p$$

Ce qui montre que B est coercif.

I.3.2.3. Résultat d'existence

Théorème 6

Sous les hypothèses, $f\in\left(W^{-1,q}(\Omega)\right)^n$, $\varphi\in C^{0,1}\left(\overline{\Omega}\right)$, $\varphi(x)>0$ et $\mu>0$, il existe une solution $u=u(x)$ du problème (p_3) telle que, $u\in V$.

Démonstration Par l'aplication de théorème 1, le lemme 4, les proposition 8, 9 et 10.

CHAPITRE II

Etude des problèmes aux limites avec Le Système de Lamé Perturbé et Généralisé

.

Introduction

Dans ce chapitre, nous généralisons la condition aux limites sur une partie de la frontière du domaine.

Alors nous étudions un problème aux limites non linéaires de la forme :

$$-L_p u + F(u) = f \quad dans\ \Omega$$

Où Ω désigne toujours un ouvert borné et connexe de $\mathbb{R}^n (n = 2, 3)$ de frontière $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ variété *Lipshitzienne* de dimension $(n-1)$, $F(u)$ est une perturbation et :

$$L_p u = \mu \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + (\lambda + \mu) \nabla (div u)$$

l'opérateur de *Lamé*, avec les conditions aux limites généralisées :

$$\begin{cases} u = 0 \quad sur\ \Gamma_1 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \eta_i + \varphi(x) |u|^{p-2} u = 0 \quad sur\ \Gamma_2 \end{cases}$$

où $\varphi = \left(\varphi_{ij}\right)_{1<i,j<n}, \varphi_{ij} = \varphi_{ji} \in C^{0,1}\left(\overline{\Omega}\right), \varphi_{ij}(x) > 0, \forall x \in \Gamma_2$ est une donnée du problème.

Nous démontrons l'existence, l'unicité et la régularité de la solution du problème (p) :

$$(p) \begin{cases} -L_p u + \ F(u) = f \quad dans\ \Omega \\ u = 0 \quad sur\ \Gamma_1 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \eta_i + \varphi(x) |u|^{p-2} u = 0 \quad sur\ \Gamma_2 \end{cases}$$

On distingue deux cas pour la perturbation $F(u)$.

Nous étudions en premier lieu le problème :

$$(p_4)\begin{cases} -L_p u + \ |u|^{P-2} u = f \ \ dans\ \Omega & (4,1) \\ u = 0 \ \ sur\ \Gamma_1 & (4,2) \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \left| \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \eta_i + \varphi(x) |u|^{p-2} u = 0 \ \ sur\ \Gamma_2 & (4,3) \end{cases}$$

Puis dans la deuxième partie de ce chapitre, nous étudions le problème :

$$(p_5)\begin{cases} -L_p u + |u|^{P-2} u \ - |u|^{q-1} u = f \ \ dans\ \Omega & (5,1) \\ u = 0 \ \ sur\ \Gamma_1 & (5,2) \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \left| \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \eta_i + \varphi(x) |u|^{p-2} u = 0 \ \ sur\ \Gamma_2 & (5,3) \end{cases}$$

On cherchera sous quelles conditions sur les donnes du problème f et $\varphi(x)$ et les constantes λ, μ, p et q les problèmes (p_4) et (p_5) admettent des solutions dans l'espace $\left(W^{1,p}(\Omega)\right)^n$ et sous quelles conditions si possible ces solutions doivent être uniques .

.

II.1. Notations et Position du problème (p_4)

Soit Ω un ouvert borné et connexe de $\mathbb{R}^n (n = 2, 3)$ de frontière Γ variété *Lipshitzienne* de dimension $(n-1)$, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ avec $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \phi$. On considère le même opérateur du premier chapitre :

$$L_p u = \mu \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + (\lambda + \mu) \nabla (divu),$$

avec p, q deux réels tels que: $p \in [2, \infty[$ et $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $p > q$, λ et μ sont les coefficients de *Lamé* tels que : $\lambda + \mu \geq 0$, $\mu > 0$ et η désigne le vecteur unitaire normal extérieur à Γ.

Soient f et $\varphi = \left(\varphi_{ij}\right)_{1<i,j<n}$ des donnes du problème, tels que:

$$\varphi_{ij} = \varphi_{ji} \in C^{0,1}\left(\overline{\Omega}\right), \varphi_{ij}(x) > 0, \forall x \in \Gamma_2.$$

Soit

$$V = \left\{ v \in \left(W^{1,p}(\Omega)\right)^n \diagup v = 0, \text{sur } \Gamma_1 \right\},$$

munie de la norme

$$\|u\|_V = \left(\sum_{i,j=1}^{n} \left\| \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

V est un espace de Banach séparable de sorte que l'on protège un sous ensemble dense sur le sous espace. Donc il existe une base $(w_j)_j$ avec :

$$\left\{ \begin{array}{c} (w_j)_j \subset V, w_1, w_2, ..., w_n \text{ sont linéairement indépendants} \\ \text{et les combinaisons linéaires finies des } w_j \text{ sont denses dans } V. \end{array} \right\}$$

Puis on considère $W = [w_1, w_2, ..., w_n]$ alors $V = \overline{W}$.

.

Nous étudions dans cette partie le problème suivant :

On cherche une fonction $u = u(x)$ dans l'espace $\left(W^{1,p}(\Omega)\right)^n$ vérifie :

$$(p_4)\begin{cases} -L_p u + |u|^{P-2} u = f \quad dans\ \Omega & (4,1) \\ u = 0 \quad sur\ \Gamma_1 & (4,2) \\ \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\eta_i + \varphi(x)|u|^{p-2}u = 0 \quad sur\ \Gamma_2 & (4,3) \end{cases}$$

II.2.Etude du problème (p_4)

II.2.1. Formulation variationnelle

En multipliant l'équation $(4,1)$ par une fonction teste $v \in V$ et en intégrant sur Ω, on obtient :

$$-\mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)vdx - (\lambda+\mu)\int_{\Omega}\nabla(divu)\,vdx + \int_{\Omega}|u|^{p-2}uvdx$$

$$= \int_{\Omega} fvdx \quad (4,4)$$

L' utilisation de la formule de *Green* nous donne :

$$\begin{aligned} (4,4) \Leftrightarrow\ & \mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx - \mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_1}\gamma_0\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\gamma_0(v)\,\eta_i d\sigma \\ & -\mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_2}\gamma_0\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\gamma_0(v)\,\eta_i d\sigma + (\lambda+\mu)\int_{\Omega}(divu)\,\nabla v dx \\ & -(\lambda+\mu)\int_{\Gamma_1}\gamma_0(divu)\,\gamma_0(v)\,\eta_i d\sigma - (\lambda+\mu)\int_{\Gamma_2}\gamma_0(divu)\,\gamma_0(v)\,\eta_i d\sigma \\ & +\int_{\Omega}|u|^{p-2}uvdx \\ =\ & \int_{\Omega} fvdx \end{aligned}$$

.

Les conditions aux limites $(4,2)$, $(4,3)$ nous donne:

$$\begin{aligned}
&\mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx+(\lambda+\mu)\int_{\Omega}(divu)(divv)\,dx+\int_{\Omega}|u|^{p-2}uvdx\\
&+\mu\int_{\Gamma_2}\varphi(x)|u|^{p-2}u\gamma_0(v)\eta_i d\sigma-(\lambda+\mu)\int_{\Gamma_2}\gamma_0(divu)\gamma_0(v)\eta_i d\sigma\\
=&\int_{\Omega}fvdx
\end{aligned}$$

Proposition 11

Le problème (p_4) et le problème variataionnel (p_{v4}) sont équivalents, où :

$$(p_{v4})\begin{cases}\text{trouver } u\in\left(W^{1,p}(\Omega)\right)^n \text{ tel que :}\\ \begin{cases}\mu\sum\limits_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx+(\lambda+\mu)\int\limits_{\Omega}(divu)(divv)\,dx\\ +\int\limits_{\Omega}|u|^{p-2}uvdx\\ \\ =\int\limits_{\Omega}fv\,dx-\mu\int\limits_{\Gamma_2}\varphi(x)|u|^{p-2}u\gamma_0(v)\;\eta_i\,d\sigma\\ +(\lambda+\mu)\int\limits_{\Gamma_2}\gamma_0(divu)\gamma_0(v)\;\eta_i\,d\sigma\end{cases}\end{cases}\tag{4,5}$$

Démonstration Soit $u\in V\Longrightarrow u=0$ surΓ_1 et

$$\begin{aligned}
&\mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx+(\lambda+\mu)\int_{\Omega}(divu)(divv)\,dx+\int_{\Omega}|u|^{p-2}uvdx\\
=&\int_{\Omega}fvdx-\mu\int_{\Gamma_2}\varphi(x)|u|^{p-2}u\gamma_0(v)\eta_i d\sigma+(\lambda+\mu)\int_{\Gamma_2}\gamma_0(divu)\gamma_0(v)\eta_i d\sigma
\end{aligned}$$

.

D'après la formule de $Green$:

$$\begin{aligned}
&\mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx+(\lambda+\mu)\int_{\Omega}(divu)(divv)\,dx+\int_{\Omega}|u|^{q-2}uvdx\\
=\;&-\mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)vdx+\mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_1}\gamma_0\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\gamma_0(v)\,\eta_i d\sigma\\
&+\mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_2}\gamma_0\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\gamma_0(v)\,\eta_i d\sigma-(\lambda+\mu)\int_{\Omega}\nabla(divu)\,vdx\\
&+(\lambda+\mu)\int_{\Gamma_1}\gamma_0(divu)\,\gamma_0(v)\,\eta_i d\sigma+(\lambda+\mu)\int_{\Gamma_2}\gamma_0(divu)\,\gamma_0(v)\,\eta_i\;d\sigma+\int_{\Omega}|u|^{p-2}uvdx\\
=\;&\int_{\Omega}fvdx-\mu\int_{\Gamma_2}\varphi(x)\,|u|^{p-2}u\gamma_0(v)\,\eta_i d\sigma+(\lambda+\mu)\int_{\Gamma_2}\gamma_0(divu)\,\gamma_0(v)\,\eta_i d\sigma
\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
&-\mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)vdx-(\lambda+\mu)\int_{\Omega}\nabla(divu)\,vdx\\
&+\int_{\Omega}|u|^{p-2}uvdx+\mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_2}\gamma_0\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\gamma_0(v)\;\;\eta_i d\sigma\\
=\;&\int_{\Omega}fvdx-\mu\int_{\Gamma_2}\varphi(x)\,|u|^{p-2}u\gamma_0(v)\,\eta_i d\sigma.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{cases}
\mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_1}\gamma_0\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\gamma_0(v)\,\eta_i d\sigma=0\\
(\lambda+\mu)\int_{\Gamma_1}\gamma_0(divu)\,\gamma_0(v)\,\eta_i d\sigma=0
\end{cases}$$

.

Comme $(D(\Omega))^n$ dense dans $\left(W^{1,p}(\Omega)\right)^n$ et de la linéarité de l'opérateur div, on obtient :

$$\begin{cases} -\mu\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)-(\lambda+\mu)\nabla(divu)+|u|^{p-2}u=f \ \text{ sur } \Omega \\ u=0 \ sur \ \Gamma_1 \\ \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\eta_i+\varphi(x)|u|^{p-2}u=0 \ sur \ \Gamma_2 \end{cases}$$

Notation

On pose pour toute $v\in V$:

$$c_p(u,v)=\mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx+(\lambda+\mu)\int_{\Omega}(divu)(divv)\,dx$$
$$+\mu\int_{\Gamma_2}\varphi(x)|u|^{p-2}u\gamma_0(v)\eta_i d\sigma-(\lambda+\mu)\int_{\Gamma_2}\gamma_0(divu)\gamma_0(v)\eta_i d\sigma.$$

Lemme 5

Il existe un unique élément C_p de $\left(W^{-1,q}(\Omega)\right)^n$ tel que : et

$$c_p(u,v)=(C_p(u),v),\ \forall u,v\in V.$$

De plus

$$C_p=-\mu\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial .}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial .}{\partial x_i}\right)-(\lambda+\mu)\nabla(div.).$$

.

Démonstration Puisque pour tout $u \in \left(W^{1,p}(\Omega)\right)^n$ l'application :

$$\left(W^{1,p}(\Omega)\right)^n \to \mathbb{R}, v \longmapsto c_p(u,v)$$

est linéaire continue alors, $c.f.$ [23] , il existe un unique élément C_p de $\left(W^{-1,q}(\Omega)\right)^n$ tel que :

$$c_p(u,v) = (C_p(u), v), \forall v \in \left(W^{1,p}(\Omega)\right)^n.$$

Vérifions que :

$$C_p = -\mu \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial .}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial .}{\partial x_i} \right) - (\lambda + \mu) \nabla (div.)$$

En effet :

$$c_p(u,v) = \mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} (divu)(divv) \, dx$$

$$+\mu \int_{\Gamma_2} \varphi(x) |u|^{p-2} u \gamma_0(v) \ \eta_i \, d\sigma - (\lambda + \mu) \int_{\Gamma_2} \gamma_0(divu) \gamma_0(v) \ \eta_i \, d\sigma$$

$$\Rightarrow c_p(u,v) = \mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} (divu) \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \, dx$$

$$+\mu \int_{\Gamma_2} \varphi(x) |u|^{p-2} u \gamma_0(v) \ \eta_i \, d\sigma - (\lambda + \mu) \int_{\Gamma_2} \gamma_0(divu) \gamma_0(v) \ \eta_i \, d\sigma$$

$$\Rightarrow c_p(u,v) = \mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} (divu) \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \, dx$$

$$-\mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \ \eta_i \, d\sigma - (\lambda + \mu) \int_{\Gamma} (divu) \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \ \eta_i \, d\sigma$$

$$\Rightarrow c_p(u,v) = \mu \sum_{i=1}^{n} \left\langle \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle + (\lambda + \mu) \sum_{j=1}^{n} \left\langle (divu), \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right\rangle$$

$$\Rightarrow c_p(u,v) = \left\langle -\mu \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right), v \right\rangle - (\lambda + \mu) \sum_{j=1}^{n} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} (divu), v_j \right\rangle$$

$$\Rightarrow c_p(u,v) = \left\langle -\mu \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right), v \right\rangle - (\lambda + \mu) \left\langle \nabla (divu), v \right\rangle$$

donc :

$$C_p(u) = -\mu \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) - (\lambda + \mu) \nabla (divu).$$

Notation

On note par :

$$\begin{aligned} a_1(u,v) &= \int_\Omega |u|^{p-2} uv dx \\ &= (A_1(u), v), \ \forall u, v \in (L^p(\Omega))^n. \end{aligned}$$

A_1 est un opérateur borné, monotone et hémicontinu (voir *Lemme* 2 et *Proposition* 3) .

II.2.2. Propriétés d'opérateur

Proposition 12

L'opérateur C_p défini de : $\left(W^{1,p}(\Omega)\right)^n$ dans $\left(W^{-1,q}(\Omega)\right)^n$ par :

$$u \longmapsto C_p(u) = -\mu \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) - (\lambda + \mu) \nabla (divu)$$

est un opérateur borné, monotone et hémicontinu.

Démonstration

• C_p **est borné**

On a :

$$\|C_p(u)\|_{(W^{-1,q}(\Omega))^n} = \sup_{v \in V, \ \|v\| \leq 1} |c_p(u,v)| \ , \forall u \in \left(W^{1,p}(\Omega)\right)^n$$

$$\begin{aligned} |c_p(u,v)| &\leq \mu \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left| \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| dx + (\lambda + \mu) \int_\Omega |(divu)| \, |(divv)| \, dx \\ &\quad + \mu \int_{\Gamma_2} \left| \varphi(x) |u|^{p-2} u \right| |\gamma_0(v)| \, d\sigma + (\lambda + \mu) \int_{\Gamma_2} \left| \gamma_0 \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \right| |\gamma_0(v)| \, d\sigma \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}|c_p(u,v)| &\leq \mu c_1 \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{(L^p(\Omega))^n} + (\lambda+\mu) \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right| \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right| dx \\ &\quad + \mu \int_{\Gamma_2} \left| \varphi(x) |u|^{p-2} u \right| |\gamma_0(v)| \, d\sigma + (\lambda+\mu) \int_{\Gamma_2} \left| \gamma_0 \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \right| |\gamma_0(v)| \, d\sigma\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de $Cauchy - Schwartz$:

$$\begin{aligned}|c_p(u,v)| &\leq \mu c_1 \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{(L^p(\Omega))^n} + (\lambda+\mu) c_2 \left(\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \left| \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + \mu \left(\int_{\Gamma_2} \left| \varphi(x) |u|^{p-2} u \right|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\Gamma_2} |\gamma_0(v)|^p \, d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + (\lambda+\mu) \left(\int_{\Gamma_2} \left| \gamma_0 \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \right|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\Gamma_2} |\gamma_0(v)|^p \, d\sigma \right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}|c_p(u,v)| &\leq \mu c_1 \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{(L^p(\Omega))^n} + (\lambda+\mu) c_2 \left(\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\|^p_{(L^p(\Omega))^n} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + \mu M \|\gamma_0(v)\|_{(L^p(\Gamma_2))^n} \left(\int_{\Gamma_2} \left| \varphi(x) |u|^{p-1} \right|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} + (\lambda+\mu) C \|u\|_V \|v\|_V .\end{aligned}$$

Mais on a :

$$\left(\int_{\Gamma_2} \left| \varphi(x) |u|^{p-2} u \right|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int_{\Gamma_2} \left(|\varphi(x)|^q |u|^{(p-1)q} \right) d\sigma \right)^{\frac{1}{q}}$$

or : $(p-1)q = p$

$$\begin{aligned}\left(\int_{\Gamma_2}\left|\varphi(x)|u|^{p-2}u\right|^q d\sigma\right)^{\frac{1}{q}} &\leq \left(\int_{\Gamma_2}|\varphi(x)|^q|u|^p d\sigma\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\leq \left(\int_{\Gamma_2}|\varphi(x)|^q d\sigma\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{\Gamma_2}|u|^p d\sigma\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\leq M\left(\int_{\Gamma_2}|u|^p d\sigma\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\leq M\|u\|^{\frac{p}{q}}_{(L^p(\Gamma_2))^n}\end{aligned}$$

Puisque :

$$u\in V\Rightarrow\gamma_0(u)\in\left(W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)\right)^n\subset(L^p(\Gamma))^n$$

$$\Rightarrow\exists c>0:\|u_m\|_{\left(W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)\right)^n}\leq c\|u_m\|_{(W^{1,p}(\Omega))^n}$$

On déduit :

$$\begin{aligned}|c_p(u,v)| &\leq \mu c_1\|v\|_V+c_2(\lambda+\mu)n^{\frac{1}{p}}\|v\|_V\\ &\quad+\mu c_7\|\gamma_0(v)\|_{(L^p(\Gamma_2))^n}+(\lambda+\mu)c_8\|v\|_V\end{aligned}$$

Alors :

$$|c_p(u,v)|\leq const\|v\|_{(W^{1,p}(\Omega))^n}$$

Ce qui montre que C_p est borné.

.

• C_p **est monotone**

C_p est monotone si: $\forall u, v \in V$, $(C_p u - C_p v, u - v) \geq 0$.

En effet :

$$(C_p u - C_p v, u - v) = (C_p u, u - v) - (C_p v, u - v), \quad (4,6)$$

Donc :

$$\begin{aligned}
(4,6) \quad = \quad & \mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} (divu) \left(div \left(u - v \right) \right) dx \\
& + \mu \int_{\Gamma_2} \varphi \left(x \right) |u|^{p-2} u \gamma_0 \left(\left(u - v \right) \right) \eta_i d\sigma - (\lambda + \mu) \int_{\Gamma_2} \gamma_0 \left(divu \right) \gamma_0 \left(\left(u - v \right) \right) \eta_i d\sigma \\
& - \mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx - (\lambda + \mu) \int_{\Omega} (divv) \left(div \left(u - v \right) \right) dx \\
& - \mu \int_{\Gamma_2} \varphi \left(x \right) |v|^{p-2} v \gamma_0 \left(\left(u - v \right) \right) \ \eta_i \ d\sigma + (\lambda + \mu) \int_{\Gamma_2} \gamma_0 \left(divv \right) \gamma_0 \left(\left(u - v \right) \right) \ \eta_i \ d\sigma
\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
(4,6) \quad = \quad & \mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} - \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx \\
& + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} (divu - divv) \, div \left(u - v \right) dx \\
& + \mu \int_{\Gamma_2} \varphi \left(x \right) \left(|u|^{p-2} u - |v|^{p-2} v \right) \gamma_0 \left(\left(u - v \right) \right) \eta_i d\sigma \\
& - (\lambda + \mu) \int_{\Gamma_2} \gamma_0 \left(div \left(u - v \right) \right) \gamma_0 \left(\left(u - v \right) \right) \eta_i d\sigma
\end{aligned}$$

.

Donc :

$$\begin{aligned}(4,6) &= \mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}-\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}-\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)dx\\ &+(\lambda+\mu)\int_{\Omega}\left(div\left(u-v\right)\right)^2dx\\ &+\mu\int_{\Gamma_2}\varphi\left(x\right)\left(\left|u\right|^{p-2}u-\left|v\right|^{p-2}v\right)\gamma_0\left(\left(u-v\right)\right)\eta_i d\sigma\\ &+(\lambda+\mu)\int_{\Gamma_2}\gamma_0\left(div\left(u-v\right)\right)\gamma_0\left(\left(v-u\right)\right)\eta_i d\sigma\geq 0\end{aligned}$$

Ce qui montre que C_p est monotone.

• C_p **est hémicontinu**

C_p est hémicontinu si: $\forall u,v,w\in V$, la fonction: $\mathbb{R}_+\rightarrow\mathbb{R}_+$, $\beta\longmapsto\left(C_p\left(u+\beta v\right),w\right)$ est continue.

Soit $\{\beta_n\}$ une suite convergente dans $\mathbb{R}$, on pose :

$$\begin{aligned}f_n\left(x\right) &= \mu\left|\frac{\partial u\left(x\right)}{\partial x_i}+\beta_n\frac{\partial v\left(x\right)}{\partial x_i}\right|^{p-2}\left(\frac{\partial u\left(x\right)}{\partial x_i}+\beta_n\frac{\partial v\left(x\right)}{\partial x_i}\right)\frac{\partial w\left(x\right)}{\partial x_i}\\ &+(\lambda+\mu)\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial u_i\left(x\right)}{\partial x_i}+\beta_n\frac{\partial v_i\left(x\right)}{\partial x_i}\right)\frac{\partial w_j\left(x\right)}{\partial x_j}\\ &+\mu\varphi\left(x\right)\left|u+\beta_n v\right|^{p-2}\left(u+\beta_n v\right)\gamma_0\left(w\right)\eta_i d\sigma\\ &-(\lambda+\mu)\gamma_0\left(div\left(u+\beta_n v\right)\right)\gamma_0\left(w\right)\eta_i d\sigma\end{aligned}$$

$f_n\left(x\right)$ converge vers $f\left(x\right)$ telle que :

$$\begin{aligned}f\left(x\right) &= \mu\left|\frac{\partial u\left(x\right)}{\partial x_i}+\beta\frac{\partial v\left(x\right)}{\partial x_i}\right|^{p-2}\left(\frac{\partial u\left(x\right)}{\partial x_i}+\beta\frac{\partial v\left(x\right)}{\partial x_i}\right)\frac{\partial w\left(x\right)}{\partial x_i}\\ &+(\lambda+\mu)\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial u_i\left(x\right)}{\partial x_i}+\beta\frac{\partial v_i\left(x\right)}{\partial x_i}\right)\frac{\partial w_j\left(x\right)}{\partial x_j}\\ &+\mu\left|u+\beta v\right|^{p-2}\varphi\left(x\right)\left(u+\beta v\right)\gamma_0\left(w\right)\eta_i\\ &-(\lambda+\mu)\gamma_0\left(div\left(u+\beta v\right)\right)\gamma_0\left(w\right)\eta_i\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
|f_n(x)| &\leq \mu\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}+\beta_n\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\right|^{p-1}\left|\frac{\partial w(x)}{\partial x_i}\right| \\
&\quad+(\lambda+\mu)\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial u_i(x)}{\partial x_i}+\beta_n\frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i}\right|\left|\frac{\partial w_j(x)}{\partial x_j}\right| \\
&\quad+\left|\varphi(x)\left|u+\beta_n v\right|^{p-2}(u+\beta_n v)\right||\gamma_0(w)| \\
&\quad+(\lambda+\mu)\left|\gamma_0\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}+\beta_n\frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i}\right)\right||\gamma_0(w)|
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
|f_n(x)| &\leq \frac{\mu}{2}\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}+\beta_n\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\right|^{2(p-1)}+\frac{\mu}{2}\left|\frac{\partial w(x)}{\partial x_i}\right|^2+ \\
&\quad+\tfrac{(\lambda+\mu)}{2}\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial u_i(x)}{\partial x_i}+\beta_n\frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i}\right|^2+\tfrac{(\lambda+\mu)}{2}\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial w_j(x)}{\partial x_j}\right|^2 \\
&\quad+\frac{\mu}{2}\left|\varphi(x)\left|u+\beta_n v\right|^{p-2}(u+\beta_n v)\right|^2+\frac{1}{2}|\gamma_0(w)|^2 \\
&\quad+\tfrac{(\lambda+\mu)}{2}\left|\gamma_0\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}+\beta_n\frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i}\right)\right|^2+\frac{1}{2}|\gamma_0(w)|^2.
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité:

$$\forall f,g\in L^p(\Omega):\|f+g\|_{L^p(\Omega)}^p\leq 2^p\left(\|f\|_{L^p(\Omega)}^p+\|g\|_{L^p(\Omega)}^p\right)$$

On a :

$$\begin{aligned}
|f_n(x)| &\leq \mu 2^{2p-3}\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|^{2(p-1)}+\mu 2^{2p-3}|\beta_n|^{2(p-1)}\left|\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\right|^{2(p-1)}+\tfrac{\mu}{2}\left|\frac{\partial w(x)}{\partial x_i}\right|^2 \\
&\quad+2(\lambda+\mu)\sum_{j=1}^{n}\left[\left|\frac{\partial u_i(x)}{\partial x_i}\right|^2+|\beta_n|^2\left|\frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i}\right|^2\right]+\tfrac{(\lambda+\mu)}{2}\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial w_j(x)}{\partial x_j}\right|^2 \\
&\quad+\frac{\mu}{2}|\varphi(x)|^2|u|^{p+1}+|\beta_n|^{p+1}|v|^{p+1}+|\gamma_0(w)|^2 \\
&\quad+\tfrac{(\lambda+\mu)}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\gamma_0\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right|^2+|\beta_n|^2\gamma_0\left|\frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i}\right|^2\right)
\end{aligned}$$

Puisque (β_n) est une suite convergente dans $\mathbb{R}$, $\exists m\in\mathbb{R}:|\beta_n|\leq m$.

Donc :

$$\begin{aligned}
|f_n(x)| \leq\ & \mu 2^{2p-3}\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|^{2(p-1)} + \mu 2^{2p-3} m_1 \left|\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\right|^{2(p-1)} + \frac{\mu}{2}\left|\frac{\partial w(x)}{\partial x_i}\right|^2 \\
& + 2(\lambda+\mu)\sum_{j=1}^{n}\left[\left|\frac{\partial u_i(x)}{\partial x_i}\right|^2 + m_2\left|\frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i}\right|^2\right] + \tfrac{(\lambda+\mu)}{2}\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial w_j(x)}{\partial x_j}\right|^2 \\
& + \frac{\mu}{2}|\varphi(x)|^2|u|^{p+1} + m_3|v|^{p+1} + |\gamma_0(w)|^2 \\
& + \tfrac{(\lambda+\mu)}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\gamma_0\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right|^2 + m_2\gamma_0\left|\frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i}\right|^2\right)
\end{aligned}$$

On définit la fonction $g(x)$ telle que :

$$\begin{aligned}
g(x) =\ & \mu 2^{2p-3}\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|^{2(p-1)} + \mu 2^{2p-3} m_1 \left|\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\right|^{2(p-1)} + \frac{\mu}{2}\left|\frac{\partial w(x)}{\partial x_i}\right|^2 \\
& + \sum_{j=1}^{n}\left[2(\lambda+\mu)\left|\frac{\partial u_i(x)}{\partial x_i}\right|^2 + 2(\lambda+\mu)m_2\left|\frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i}\right|^2 + \frac{(\lambda+\mu)}{2}\left|\frac{\partial w_j(x)}{\partial x_j}\right|^2\right] \\
& + \frac{\mu}{2}|\varphi(x)|^2|u|^{p+1} + m_3|v|^{p+1} + |\gamma_0(w)|^2 \\
& + \frac{(\lambda+\mu)}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\gamma_0\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right|^2 + m_2\gamma_0\left|\frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i}\right|^2\right)
\end{aligned}$$

On constate que la fonction $g(x)$ est une fonction dans $L^1(\Omega)$.

Alors on a : $f_n(x) \to f(x)$ $p.p$ sur Ω et $|f_n(x)| \leq g(x)$ $p.p$ sur Ω.

D'après le théorème de convergence dominée de *Lebesgue*, on en déduit que: $f \in L^1(\Omega)$ et $\|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \to 0$, par conséquent:

$$(C_p(u+\beta_n v), w) \to (C_p(u+\beta v), w)$$

Ce qui montre que C_p est hémicontinu.

.

Notation

Pour simplifier, on note par :

$$c(u,v) = c_p(u,v) + a_1(u,v)$$

et par :

$$C(u) = C_p(u) + A_1(u)$$

Proposition 13

L'opérateur C défini de : $\left(W^{1,p}(\Omega)\right)^n$ dans $\left(W^{-1,q}(\Omega)\right)^n$ par :

$$u \longmapsto C(u) = C_p(u) + A_1(u)$$

est un opérateur coercif.

Démonstration C est coercif si :

$$\forall \alpha > 0, \exists \beta, \forall u \in V : \|u\|_V \geq \beta \Rightarrow (B(u), u) \geq \alpha \|u\|_V,$$

En effet :

D'une part :

$$(A_1(u), u) = \int_\Omega |u|^p \, dx = \|u\|^p_{L^p(\Omega)}$$

D'autre part :

$$(C_p(u), u) = \mu \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx + (\lambda+\mu) \int_\Omega (divu)^2 \, dx$$
$$+\mu \int_{\Gamma_2} \varphi(x) |u|^{p-2} u \gamma_0(u) \eta_i d\sigma - (\lambda+\mu) \int_{\Gamma_2} \gamma_0(divu) \gamma_0(u) \eta_i d\sigma$$

.

Alors :

$$(C_p(u),u)=\mu\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2dx+(\lambda+\mu)\int_\Omega(divu)^2dx$$
$$+\mu\int_{\Gamma_2}\varphi(x)|u|^{p-2}\gamma_0(u)^2\eta_i d\sigma-(\lambda+\mu)\int_{\Gamma_2}\gamma_0(divu)\gamma_0(u)\eta_i d\sigma$$

Or sur Γ_2 : $\gamma_0(u)=\frac{1}{\varphi(x)|u|^{p-2}}\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}$

Donc :

$$(C_p(u),u)=\mu\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2dx+(\lambda+\mu)\int_\Omega(divu)^2dx$$
$$+\mu\int_{\Gamma_2}\varphi(x)|u|^{p-2}\gamma_0(u)^2\eta_i d\sigma$$
$$+(\lambda+\mu)\int_{\Gamma_2}\left(\sum_{i=1}^n\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\frac{1}{\varphi(x)|u|^{p-2}}\left(\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\eta_i d\sigma$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}(C(u),u) &= (C_p(u),u)+(A_1(u),u)\\ &= \mu\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2dx+(\lambda+\mu)\int_\Omega(divu)^2dx\\ &\quad+\int_\Omega|u|^p\,dx+\mu\int_{\Gamma_2}\varphi(x)|u|^{p-2}\gamma_0(u)^2\eta_i d\sigma\\ &\quad+(\lambda+\mu)\int_{\Gamma_2}\left(\sum_{i=1}^n\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\frac{1}{\varphi(x)|u|^{p-2}}\left(\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\eta_i d\sigma\end{aligned}$$

Et d'après l'inégalité de *Poincaré* :

$$\begin{aligned}(C(u),u) &\geq \mu\|u\|_V^p+(\lambda+\mu)\int_\Omega(divu)^2dx+\|u\|^p_{(L^p(\Omega))^n}\\ &\quad+\mu\int_{\Gamma_2}\varphi(x)|u|^{p-2}\gamma_0(u)^2\eta_i d\sigma\\ &\quad+(\lambda+\mu)\int_{\Gamma_2}\frac{1}{\varphi(x)|u|^{p-2}}\left(\sum_{i=1}^n\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\eta_i d\sigma\end{aligned}$$

Donc :

$$(C(u), u) \geq \mu \|u\|_V^p$$

Ce qui montre que C est coercif.

II.2.3. Résultat d'existence et d'unicité

Théorème 7

Sous les hypothèses, $f \in \left(W^{-1,q}(\Omega)\right)^n$, $\varphi \in C^{0,1}\left(\overline{\Omega}\right)$ et $\varphi(x) > 0$, le problème (p_4) admet une solution $u = u(x)$ dans l'espace V.

Démonstration D'après le théorème 1, le lemme 5, les proposition 11, 12 et 13, le problème (p_4) admet une solution dans V.

Théorème 8

La solution u du problème (p_4) est unique .

Démonstration Soient u_1, u_2 deux solutions du problème (p_4) c'est-à-dire :

$$(p_{4_1}) \begin{cases} -L_p u_1 + |u_1|^{p-2} u_1 = f \ dans \ \Omega \\ u_1 = 0 \ sur \ \Gamma_1 \\ \sum_{i=1}^{n} \left| \dfrac{\partial u_1}{\partial x_i} \right|^{p-2} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_i} \eta_i + \varphi(x) |u_1|^{p-2} u_1 = 0 \ sur \ \Gamma_2 \end{cases}$$

$$(p_{4_2}) \begin{cases} -L_p u_2 + |u_2|^{p-2} u_2 = f \text{ dans } \Omega \\ u_2 = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \\ \sum_{i=1}^{n} \left| \dfrac{\partial u_2}{\partial x_i} \right|^{p-2} \dfrac{\partial u_2}{\partial x_i} \eta_i + \varphi(x) |u_2|^{p-2} u_2 = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \end{cases}$$

.

Donc la fonction $(u_1 - u_2)$ vérifier :

$$\begin{cases} u_1 - u_2 \in V \\ C(u_1) - C(u_2) = 0 \text{ dons } \Omega \qquad (4,7) \\ u_1 - u_2 = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \\ \sum_{i=1}^{n} \left(\left| \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} - \left| \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \right) \eta_i \\ +\varphi(x) \left(|u_1|^{p-2} u_1 - |u_2|^{p-2} u_2 \right) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2 \end{cases}$$

En multipliant l'équation $(4,7)$ par $u_1 - u_2$ et en intègrant sur Ω on trouve :

$$\begin{cases} (C(u_1) - C(u_2), u_1 - u_2) = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ u_1 - u_2 = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \\ \sum_{i=1}^{n} \left(\left| \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} - \left| \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \right) \eta_i \\ +\varphi(x) \left(|u_1|^{p-2} u_1 - |u_2|^{p-2} u_2 \right) = 0 \text{ sur } \quad \Gamma_2 \end{cases}$$

Or *c.f.* [23] :

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left(\left| \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} - \left| \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_i} - \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \right) dx = \|u_1 - u_2\|^p$$

Donc :

$$\begin{aligned} &\mu \|u_1 - u_2\|^p + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} (div(u_1 - u_2))^2 dx \\ &+ \int_{\Omega} \left(|u_1|^{p-2} u_1 - |u_2|^{p-2} u_2 \right) (u_1 - u_2) dx \\ &+ \mu \int_{\Gamma_2} \varphi(x) \left(|u_1|^{p-2} u_1 - |u_2|^{p-2} u_2 \right) \gamma_0((u_1 - u_2)) \eta_i d\sigma \\ &- (\lambda + \mu) \int_{\Gamma_2} \gamma_0(div(u_1 - u_2)) \gamma_0((u_1 - u_2)) \eta_i = 0 \end{aligned}$$

.

Mais :

$$\begin{cases} \mu \|u_1 - u_2\|^p \geq 0, \\ \quad (\lambda+\mu) \int\limits_\Omega \left(div\left((u_1-u_2)\right)\right)^2 dx \geq 0, \\ \int\limits_\Omega \left(|u_1|^{p-2} u_1 - |u_2|^{p-2} u_2\right)(u_1-u_2)\, dx \geq 0, \\ \quad \mu \int\limits_{\Gamma_2} \varphi(x) \left(|u_1|^{p-2} u_1 - |u_2|^{p-2} u_2\right) \gamma_0\left((u_1-u_2)\right)\ \eta_i d\sigma \\ + (\lambda+\mu) \int\limits_{\Gamma_2} \gamma_0\left(div\,(u_1-u_2)\right) \gamma_0\left((u_2-u_1)\right) \eta_i d\sigma \geq 0 \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} \mu \|u_1 - u_2\|^p = 0 \\ (\lambda+\mu) \int\limits_\Omega \left(div\left((u_1-u_2)\right)\right)^2 dx = 0 \\ \int\limits_\Omega \left(|u_1|^{p-2} u_1 - |u_2|^{p-2} u_2\right)(u_1-u_2)\, dx = 0 \\ \quad -\mu \int\limits_{\Gamma_2} \varphi(x) \left(|u_1|^{p-2} u_1 - |u_2|^{p-2} u_2\right) \gamma_0\left((u_1-u_2)\right)\ \eta_i d\sigma \\ \quad + (\lambda+\mu) \int\limits_{\Gamma_2} \gamma_0\left(div\,(u_1-u_2)\right) \gamma_0\left((u_2-u_1)\right) \eta_i d\sigma = 0 \end{cases}$$

Par conséquence :

$$\mu \|u_1 - u_2\|^p = 0, \mu > 0 \Longrightarrow u_1 = u_2$$

D'ou l'unicité de la solution.

.

II.3.1. Position du problème (p_5)

Dans cette partie de ce chapitre nous étudions Le problème suivant :

Trouver une fonction $u = u(x)$ solution de

$$(p_5)\begin{cases} -L_p u + |u|^{P-2} u \ - |u|^{q-1} u = f \ \ dans\ \Omega & (5,1) \\ u = 0 \ \ sur\ \Gamma_1 & (5,2) \\ \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \eta_i + \varphi(x) |u|^{p-2} u = 0 \ \ sur\ \Gamma_2 & (5,3) \end{cases}$$

II.3.1. Etude du problème (p_5)

II.3.1.1. Formulation variationnelle

En multipliant l'équation $(5,1)$ par une fonction teste $v \in V$ et en intègrant sur Ω, on obtient :

$$-\mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) v \ dx - (\lambda + \mu) \int_{\Omega} \nabla (divu)\, v \ dx$$

$$+ \int_{\Omega} |u|^{p-2} uv dx - \int_{\Omega} |u|^{q-1} uv dx = \int_{\Omega} fv \ dx \quad (5,4)$$

D'après la formule de *Green* :

$$\begin{aligned} (5,4) \ \Leftrightarrow \ & \mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - \mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Gamma_1} \gamma_0 \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \gamma_0(v) \eta_i d\sigma \\ & - \mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Gamma_2} \gamma_0 \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \gamma_0(v) \eta_i d\sigma \\ & + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} (divu) \nabla v dx - (\lambda + \mu) \int_{\Gamma_1} \gamma_0 (divu) \gamma_0(v) \eta_i d\sigma \\ & - (\lambda + \mu) \int_{\Gamma_2} \gamma_0 (divu) \gamma_0(v) \eta_i d\sigma + \int_{\Omega} |u|^{p-2} uv dx - \int_{\Omega} |u|^{q-1} uv dx \\ = \ & \int_{\Omega} fv dx \end{aligned}$$

.

L'utilisation de $(5,2)$, $(5,3)$ nous donne :

$$\begin{aligned}
&\mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx+(\lambda+\mu)\int_{\Omega}(divu)(divv)\,dx+\int_{\Omega}|u|^{p-2}uvdx\\
&-\int_{\Omega}|u|^{q-1}uvdx+\mu\int_{\Gamma_2}\varphi(x)|u|^{p-2}u\gamma_0(v)\eta_i d\sigma-(\lambda+\mu)\int_{\Gamma_2}\gamma_0(divu)\gamma_0(v)\eta_i d\sigma\\
=&\int_{\Omega}fvdx
\end{aligned}$$

Proposition 14

Le problème (p_5) et le problème variationnel (p_{v5}) sont équivalents, où :

$$(p_{v5})\begin{cases}
\text{trouver } u\in\left(W^{1,p}(\Omega)\right)^n \text{ tel que :}\\
\quad\mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx+(\lambda+\mu)\int_{\Omega}(divu)(divv)\,dx\\
\quad+\int_{\Omega}|u|^{p-2}uvdx-\int_{\Omega}|u|^{q-1}uvdx\\
\quad=\int_{\Omega}fvdx-\mu\int_{\Gamma_2}\varphi(x)|u|^{p-2}u\gamma_0(v)\eta_i d\sigma\\
\quad+(\lambda+\mu)\int_{\Gamma_2}\gamma_0(divu)\gamma_0(v)\ \eta_i\ d\sigma
\end{cases}\tag{5,4}$$

Démonstration Soit $u\in V\Longrightarrow u=0$ sur Γ_1 et

$$\begin{aligned}
&\mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx+(\lambda+\mu)\int_{\Omega}(divu)(divv)\,dx\\
&+\int_{\Omega}|u|^{p-2}uvdx-\int_{\Omega}|u|^{q-1}uvdx\\
&=\int_{\Omega}fvdx-\mu\int_{\Gamma_2}\varphi(x)|u|^{p-2}u\gamma_0(v)\eta_i d\sigma\\
&+(\lambda+\mu)\int_{\Gamma_2}\gamma_0(divu)\gamma_0(v)\eta_i d\sigma
\end{aligned}$$

.

D'après la formule de $Green$:

$$\mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx+(\lambda+\mu)\int_{\Omega}(divu)(divv)\,dx+\int_{\Omega}|u|^{p-2}uvdx+\int_{\Omega}|u|^{q-1}uvdx$$

$$=-\mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)vdx+\mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_1}\gamma_0\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\gamma_0(v)\,\eta_i d\sigma$$

$$-(\lambda+\mu)\int_{\Omega}\nabla(divu)\,vdx-\mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_2}\gamma_0\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\gamma_0(v)\,\eta_i d\sigma$$

$$+(\lambda+\mu)\int_{\Gamma_1}\gamma_0(divu)\,\gamma_0(v)\,\eta_i d\sigma+(\lambda+\mu)\int_{\Gamma_2}\gamma_0(divu)\,\gamma_0(v)\,\eta_i d\sigma$$

$$+\int_{\Omega}|u|^{p-2}uvdx-\int_{\Omega}|u|^{q-1}uvdx$$

$$=\int_{\Omega}fvdx-\mu\int_{\Gamma_2}\varphi(x)\,|u|^{p-2}u\gamma_0(v)\,\eta_i d\sigma+(\lambda+\mu)\int_{\Gamma_2}\gamma_0(divu)\,\gamma_0(v)\,\eta_i d\sigma$$

Alors :

$$\begin{aligned}&-\mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)vdx-(\lambda+\mu)\int_{\Omega}\nabla(divu)\,vdx\\&+\int_{\Omega}|u|^{p-2}uvdx-\int_{\Omega}|u|^{q-1}uvdx+\mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_2}\gamma_0\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\gamma_0(v)\,\eta_i d\sigma\\&+\mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_1}\gamma_0\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\gamma_0(v)\,\eta_i d\sigma+(\lambda+\mu)\int_{\Gamma_1}\gamma_0(divu)\,\gamma_0(v)\,\eta_i d\sigma\\=&\int_{\Omega}fvdx-\mu\int_{\Gamma_2}\varphi(x)\,|u|^{p-2}utr(v)\,\eta_i d\sigma.\end{aligned}$$

Mais :

$$\begin{cases}\mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_1}\gamma_0\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\gamma_0(v)\ \ \eta_i\ d\sigma=0\\[2ex](\lambda+\mu)\int_{\Gamma_1}\gamma_0(divu)\,\gamma_0(v)\ \ \eta_i\ d\sigma=0\end{cases}$$

De la linéarité de l'opérateur div on obtient :

$$\begin{cases} -\mu\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)-(\lambda+\mu)\nabla(divu)+|u|^{p-2}u-|u|^{q-1}u=f \ \text{ sur } \Omega \\ u=0, \text{sur } \Gamma_1 \\ \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\eta_i+\varphi(x)|u|^{p-2}u=0 \ sur \ \Gamma_2 \end{cases}$$

ce qui montre la proposition.

II.3.1.2. Propriétés des opérateurs

Comme dans la première partie.

On pose :

$$\begin{aligned} c_p(u,v) &= \mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx+(\lambda+\mu)\int_{\Omega}(divu)(divv)\,dx \\ &\quad +\mu\int_{\Gamma_2}\varphi(x)|u|^{p-2}u\gamma_0(v)\ \eta_i\,d\sigma-(\lambda+\mu)\int_{\Gamma_2}\gamma_0(divu)\gamma_0(v)\ \eta_i\,d\sigma \\ &= (C_p(u),v),\ \forall v\in\left(W^{1,p}(\Omega)\right)^n \end{aligned}$$

avec $C_p:\left(W^{1,p}(\Omega)\right)^n\to\left(W^{-1,q}(\Omega)\right)^n$ est un opérateur borné, hémicontinu, monotone.

On pose :

$$a_1(u,v)=\int_{\Omega}|u|^{p-2}uvdx=(A_1(u),v),\ \forall v\in(L^p(\Omega))^n$$

avec $A_1:(L^p(\Omega))^n\to(L^q(\Omega))^n$ est un opérateur borné, monotone, hémicontinu.

On pose :

$$a_2(u,v)=\int_{\Omega}|u|^{q-1}uvdx=(A_2(u),v),\ \forall v\in(L^p(\Omega))^n$$

avec $A_2:(L^p(\Omega))^n\times(L^p(\Omega))^n\to(L^q(\Omega))^n$ est un opérateur borné, monotone, hémicontinu

.

Notation

On note par :

$$d(u,v) = c_p(u,v) + a_1(u,v) + a_2(u,v) \Rightarrow D(u) = C_p(u) + A_1(u) - A_2(u)$$

Proposition 15

L'opérateur D défini de : $\left(W^{1,p}(\Omega)\right)^n$ dans $\left(W^{-1,q}(\Omega)\right)^n$ par :

$$u \longmapsto D(u) = C_p(u) + A_1(u) - A_2(u)$$

est un opérateur coercif.

Démonstration D est coercif si :

$$\forall \alpha > 0, \exists \beta, \forall u \in V : \|u\|_V \geq \beta \Rightarrow (D(u), u) \geq \alpha \|u\|_V,$$

En effet :

D'une part :

$$(A_1(u), u) = \int_\Omega |u|^p \, dx = \|u\|^p_{(L^p(\Omega))^n}$$

et

$$\begin{aligned} (A_2(u), u) &\leq \left(\int_\Omega |u|^p \, dx \right)^{\left(\frac{1}{p-1}+\frac{1}{p}\right)} \\ &\leq \|u\|^{p\left(\frac{1}{p-1}+\frac{1}{p}\right)}_{(L^p(\Omega))^n} \\ &= \|u\|^{q+1}_{(L^p(\Omega))^n} \end{aligned}$$

D'autre part :

$$(C_p(u),u) = \mu \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx + (\lambda+\mu)\int_\Omega (divu)^2 dx$$
$$+\mu \int_{\Gamma_2} \varphi(x)\,|u|^{p-2}\,\gamma_0(u)^2\,\eta_i d\sigma$$
$$+(\lambda+\mu)\int_{\Gamma_2} \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\frac{1}{\varphi(x)\,|u|^{p-2}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\eta_i d\sigma$$

Alors :

$$\begin{aligned}(D(u),u) &= (C_p(u),u)+(A_1(u),u)-(A_2(u),u)\\ &\mu\int_\Omega \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx+(\lambda+\mu)\int_\Omega (divu)^2 dx\\ &+\mu\int_{\Gamma_2}\varphi(x)\,|u|^{p-2}\,\gamma_0(u)^2\,\eta_i d\sigma+\int_\Omega |u|^p dx-\int_\Omega |u|^{q+1}dx\\ &+(\lambda+\mu)\int_{\Gamma_2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\frac{1}{\varphi(x)\,|u|^{p-2}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\eta_i d\sigma\end{aligned}$$

L'inégalité de *Poincaré* nous donne :

$$\begin{aligned}(D(u),u) &\geq \mu\|u\|_V^p+(\lambda+\mu)\int_\Omega (divu)^2 dx\\ &+\mu\int_{\Gamma_2}\varphi(x)\,|u|^{p-2}\,\gamma_0(u)^2\,\eta_i d\sigma+\|u\|^p_{(L^p(\Omega))^n}-\|u\|^{q+1}_{(L^p(\Omega))^n}\\ &+(\lambda+\mu)\int_{\Gamma_2}\frac{1}{\varphi(x)\,|u|^{p-2}}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\eta_i d\sigma\end{aligned}$$

Puisque $p>1$ et $q+1\leq p$ alors :

$$(D(u),u)\geq \mu\|u\|_V^p$$

Ce qui montre que B est coercif.

II.3.1.3. Résultat d'existence

Théorème 9

Sous les hypothèses, $f \in \left(W^{-1,q}(\Omega)\right)^n$, $\varphi \in C^{0,1}\left(\overline{\Omega}\right)$ et $\varphi(x) > 0$, le problème (p_5) admet une solution $u = u(x)$ dans l'espace V.

Démonstration D'après le théorème 1, les proposition 14 et 15, le problème (p_5) admet une solution dans V.

CHAPITRE III

Existence de deux Solutions Pour Un Problème Aux Limites Avec Le Système de Lamé Perturbé

.

Introduction

Dans ce chapitre nous étudions l'existence des solutions d'un problème aux limites où il intervienne le système de *Lamé* généralisé, perturbé par : $F(u) = -\alpha |u|^{q-2} u - u$, c'est-à-dire nous montrons la non unicité de la solution du problème suivant :

Soit Ω un domaine borné dans IR^n $(n = 2, 3)$ de frontière $\partial\Omega = \Gamma$, de dimension $(n-1)$, $mes\Gamma > 0$.

On cherche une fonction u solution de

$$(p_6)\begin{cases} -L_p u - \alpha |u|^{q-2} u - u = 0 \ \text{ dans } \Omega & (6,1) \\ u = 0 \ \text{ sur } \Gamma & (6,2) \end{cases}$$

avec : p, q deux réelles tels que : $p \in [2, \infty[$ et $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, λ et μ sont les coefficients de *Lamé* tels que : $\lambda + \mu > 0$, $\mu > 0$.

Pour cela on a utilisé une méthode différente de celle des chapitres précédents.

Après la formulation variationnelle du problème (p_6), la résolution du problème variationnel se ramène a la résolution d'un problème d'optimisation. Donc on cherche les points critiques de la fonctionnelle I_α associé au problème variationnel. On a utilisé les suites minimisantes et l'espace de $Nahari\ manifold$ noté par N_{I_α},tel que :

$$N_{I_\alpha} = \left\{ v \in W_\Gamma^{1,p}(\Omega), \Big/ I'_\alpha(v)(v) = 0 \right\}$$

, pour démontré l'existence de deux solution pour le problème (p_6).

Dans le cas ou $\mu = 1$ et $(\mu + \lambda) = 0$ le problème devient un problème aux limites où il intervienne l'opérateur de $p_Laplace$ perturbé par : $F(u) = -\alpha |u|^{q-2} u - u$, ce problème est traité par *C. O. Alves & A. El Hamidi c.f* [3].

.

III.1.Notation et Position du problème

Soit Ω un domaine borné dans IR^n de frontière $\partial\Omega$ tel que $\partial\Omega = \Gamma$ de dimension $n-1$, $mes\Gamma > 0$.

On cherche la solution du problème :

$$(p_6)\begin{cases} -L_p u - \alpha |u|^{q-2} u - u = 0 \ \text{ dans } \Omega & (6,1) \\ u = 0 \ \text{ sur } \Gamma & (6,2) \end{cases}$$

Avec :

p, q deux réelles tels que : $p \in [2, \infty[$ et $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$,

λ et μ sont les coefficients de *Lamé* avec $\lambda + \mu > 0$, $\mu > 0$,

$$L_p u = \mu \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + (\lambda + \mu) \nabla (div u).$$

Notation

On note par : $W_{\Gamma}^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega), u|_{\Gamma} = 0 \right\} = W_0^{1,p}(\Omega)$.

Puisque $mes\Gamma > 0$, l'inégali de *Poincaré* sera valable dans l'espace $W_{\Gamma}^{1,p}(\Omega)$ et on peut considérer la norme :

$$\|u\| = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

dans $W_{\Gamma}^{1,p}(\Omega)$. On note aussi par $\|\|_p$, $\|\|_q$ et $\|\|_2$ les normes de $L^p(\Omega), L^q(\Omega), L^2(\Omega)$ respectivement.

On note Par $V = \left(W_{\Gamma}^{1,p}(\Omega) \right)^n$

.

III.2. Etude du problème (p_6)

III.2.1.Formulation variationnelle

En multipliant l'équation $(6,1)$ par une fonction-test $v \in V$ en intégrant sur Ω, on obtient :

$$-\mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) v dx - (\lambda + \mu) \int_{\Omega} \nabla \left(div u \right) v dx$$

$$-\alpha \int_{\Omega} |u|^{q-2} uv dx - \int_{\Omega} uv dx = 0, \ (6,3)$$

D'après la formule de *Green* :

$$(6,3) \Leftrightarrow \begin{cases} \mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - \mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Gamma} \gamma_0 \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \gamma_0 \left(v \right) \eta_i d\sigma \\ + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} \left(div u \right) \nabla v dx - (\lambda + \mu) \int_{\Gamma} \gamma_0 \left(div u \right) \gamma_0 \left(v \right) \eta_i d\sigma \\ -\alpha \int_{\Omega} |u|^{q-2} uv dx - \int_{\Omega} uv dx = 0 \end{cases}$$

Avec l'utilisation de la condition aux limites $(6,2)$ on trouve :

$$\mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} \left(div u \right) \left(div v \right) dx$$

$$-\alpha \int_{\Omega} |u|^{q-2} uv dx - \int_{\Omega} uv dx = 0$$

Proposition 16

Le problème (p_6) et le problème variationnel (p_{v6}) sont équivalents où,

$$(p_{v6}) \begin{cases} \text{trouver } u \in V \text{ telle que:} \\ \mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \ dx + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} \left(div u \right) \left(div v \right) dx \\ -\alpha \int_{\Omega} |u|^{q-2} uv dx - \int_{\Omega} uv dx = 0 \end{cases} \quad (1,5)$$

.

Démonstration Soit $u \in V$ telle que :

$$\mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} (divu)(divv) dx$$

$$-\alpha \int_{\Omega} |u|^{q-2} uv dx - \int_{\Omega} uv dx = 0$$

Alors d'une part $u = 0$ sur Γ.

D'autre part, d'après la formule de *Green*, on a :

$$\mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} (divu)(divv) dx - \alpha \int_{\Omega} |u|^{q-2} uv dx - \int_{\Omega} uv dx$$
$$= -\mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) v dx + \mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Gamma} \gamma_0 \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \gamma_0(v) \eta_i d\sigma$$

$$-(\lambda + \mu) \int_{\Omega} \nabla (divu) v dx + (\lambda + \mu) \int_{\Gamma} \gamma_0 (divu) \gamma_0 (v) \eta_i d\sigma$$

$$-\alpha \int_{\Omega} |u|^{q-2} uv dx - \int_{\Omega} uv dx = 0$$

Alors :

$$-\mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) v dx - (\lambda + \mu) \int_{\Omega} \nabla (divu) v dx$$

$$-\alpha \int_{\Omega} |u|^{q-2} uv dx - \int_{\Omega} uv dx = 0$$

Et comme l'espace $(D(\Omega))^n$ dense dans $\left(W_0^{1,p}(\Omega) \right)^n$, on obtient :

$$\begin{cases} -\mu \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) - (\lambda + \mu) \nabla (divu) \\ -\alpha \int_{\Omega} |u|^{q-2} uv dx - \int_{\Omega} uv dx = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0 \ \text{ sur } \Gamma. \end{cases}$$

.

Remarque

Il est claire que la résolution du problème variationnel (p_{v6}) correspond a la recherche des points critiques de la fonctionnelle I_α définie par :

$$I_\alpha : V \longrightarrow IR$$
$$u \longmapsto I_\alpha(u) = \frac{\mu}{p} p(u) + \frac{(\lambda+\mu)}{2} q^*(u) - \frac{\alpha}{q} q(u) - \frac{1}{2} p^*(u).$$

Telles que :

$$\begin{cases} p(u) = \int\limits_\Omega |\nabla u|^p \, dx, \quad q^*(u) = \int\limits_\Omega |Divu|^2 \, dx, \quad q(u) = \int\limits_\Omega |u|^q \, dx, \quad p^*(u) = \int\limits_\Omega |u|^2 \, dx. \end{cases}$$

Notation

On note par $N_{I_\alpha} = \left\{ v \in W^{1,p}_\Gamma(\Omega), \Big/ I'_\alpha(v)\, v = 0 \right\}$ dit espace de $Nahari-manifold$.

On note par $\bar{I}_\alpha$ la fonction définie par :

$$\begin{array}{rccc} \bar{I}_\alpha & IR \times V & \longrightarrow & IR \\ & (t,u) & \longmapsto & \bar{I}_\alpha(t,u) = I_\alpha(tu) \end{array}$$

et soient $\bar{I}'_\alpha(t,u)$, $\bar{I}'^{'}_\alpha(t,u)$ les dérivées première et deuxième de $\bar{I}_\alpha$.

Remarque

On s'intéresse au cas ou :

$$t > 0 \text{ et } u \in V.$$

Lemme 6

Pour tout $u \in V\big|_{\{0\}}$, il existe un unique nombre réel strictement positif dépend de u, λ et μ noté par $\alpha_{u,\lambda,\mu}$ tel que la fonction $t \longmapsto \partial_t \bar{I}_\alpha(t,u)$, admet :

Deux zéro si $0 < \alpha < \alpha_{u,\lambda,\mu}$,

Un zéro si $\alpha = \alpha_{u,\lambda,\mu}$,

Elle n'admet pas des zéro si $\alpha > \alpha_{u,\lambda,\mu}$.

Démonstration Soit $u \in V\big|_{\{0\}}$,

Alors :

$$\begin{aligned}
\bar{I}_\alpha(t,u) &= I_\alpha(tu) \\
&= \frac{\mu}{p}p(tu) + \frac{(\lambda+\mu)}{2}q^*(tu) - \frac{\alpha}{q}q(tu) - \frac{1}{2}p^*(tu) \\
\Rightarrow\ \bar{I}_\alpha(t,u) &= \frac{\mu}{p}\int_\Omega |\nabla tu|^p\,dx + \frac{(\lambda+\mu)}{2}\int_\Omega |Divtu|^2\,dx - \frac{\alpha}{q}\int_\Omega |tu|^q\,dx - \frac{1}{2}\int_\Omega |tu|^2\,dx \\
\Rightarrow\ \bar{I}_\alpha(t,u) &= \frac{\mu}{p}t^p p(u) + \frac{(\lambda+\mu)}{2}t^2 q^*(u) - \frac{\alpha}{q}t^q q(tu) - \frac{1}{2}t^2 p^*(u)
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\partial_t \bar{I}_\alpha(t,u) &= \mu t^{p-1}p(u) + (\lambda+\mu)\,tq^*(u) - \alpha t^{q-1}q(u) - tp^*(u) \\
&= t^{q-1}\left(\mu t^{p-q}p(u) + (\lambda+\mu)\,t^{2-q}q^*(u) - \alpha q(u) - t^{2-q}p^*(u)\right) \\
&= t^{q-1}H_\alpha(t,u)
\end{aligned}$$

Avec :

$$H_\alpha(t,u) = \left(\mu t^{p-q}p(u) + (\lambda+\mu)\,t^{2-q}q^*(u) - \alpha q(u) - t^{2-q}p^*(u)\right)$$

Alors :

$$\partial_{tt}\bar{I}_\alpha(t,u) = (q-1)\,t^{q-2}H_\alpha(t,u) + t^{q-1}\partial_t H_\alpha(t,u)$$

Or

$$\begin{aligned}
\partial_t H_\alpha(t,u) &= \mu(p-q)\,t^{p-q-1}p(u) + (2-q)(\lambda+\mu)\,t^{1-q}q^*(u) - (2-q)\,t^{1-q}p^*(u) \\
&= t^{p-q-1}\left(\mu(p-q)\,p(u) + (2-q)(\lambda+\mu)\,t^{2-p}q^*(u) - (2-q)\,t^{2-p}p^*(u)\right)
\end{aligned}$$

par conséquence il existe un nombre dépend de u noté par t_u tel que la fonction $H_\alpha(.,u)$ est :

* **Croissante** pour $t \in [0, t_u]$,

* **Décroissante** pour $t \in [t_u, \infty[$,

et elle atteint son unique **maximum** pour $t = t_u$.

En effet;

$$\partial_t H_\alpha(t,u) = 0$$

$$\Rightarrow \mu(p-q)\,p(u) + (2-q)(\lambda+\mu)\,t^{2-p}q^*(u) - (2-q)\,t^{2-p}p^*(u) = 0$$

$$\Rightarrow t^{2-p} = \frac{\mu(p-q)\,p(u)}{(2-q)(p^*(u) - (\lambda+\mu)\,q^*(u))}$$

$$\Rightarrow t = t_u = \left(\frac{\mu(p-q)\,p(u)}{(2-q)(p^*(u) - (\lambda+\mu)\,q^*(u))}\right)^{\frac{1}{2-p}}$$

Alors $H_\alpha(.,u)$ à :

deux zéro positifs si $H_\alpha(t_u,u) > 0$

un zéro en t_u,

elle n'admet pas de zéro si $H_\alpha(t_u,u) < 0$

On va calculer $H_\alpha(t_u,u)$,

$$H_\alpha(t_u,u) = \mu\left(\frac{\mu(p-q)\,p(u)}{(2-q)(p^*(u) - (\lambda+\mu)\,q^*(u))}\right)^{\frac{p-q}{2-p}} p(u)$$

$$+ (\alpha+\mu)\left(\frac{\mu(p-q)\,p(u)}{(2-q)(p^*(u) - (\lambda+\mu)\,q^*(u))}\right)^{\frac{2-q}{2-p}} q^*(u)$$

$$- \left(\frac{\mu(p-q)\,p(u)}{(2-q)(p^*(u) - (\lambda+\mu)\,q^*(u))}\right)^{\frac{2-q}{2-p}} p^*(u) \qquad - \alpha q(u)$$

Alors :

$$H_\alpha(t_u,u) = \left[(\alpha+\mu)q^*(u) - p^*(u) + \left(\frac{\mu(p-q)p(u)}{(2-q)(p^*(u)-(\lambda+\mu)q^*(u))}\right)^{-1}\mu p(u)\right] \left(\frac{\mu(q-p)p(u)}{(2-q)(p^*(u)-(\lambda+\mu)q^*(u))}\right)^{\frac{2-q}{2-p}} - \alpha q(u)$$

Donc :

$$H_\alpha(t_u,u) = \left[(\alpha+\mu)q^*(u) - p^*(u) + \left(\frac{(2-q)(p^*(u)-(\lambda+\mu)q^*(u))}{\mu(p-q)p(u)}\right)\mu p(u)\right] \left(\frac{\mu(p-q)p(u)}{(2-q)((\lambda+\mu)q^*(u)-p^*(u))}\right)^{\frac{2-q}{2-p}} - \alpha q(u)$$

Alors :

$$H_\alpha(t_u,u) = \left(\frac{\mu(p-q)p(u)}{(2-q)(p^*(u)-(\lambda+\mu)q^*(u))}\right)^{\frac{2-q}{2-p}}\left(\frac{2-q}{p-q}-1\right)[p^*(u)-(\lambda+\mu)q^*(u)] - \alpha q(u)$$

En conséquence :

$$H_\alpha(t_u,u) = \frac{2-p}{p-q}\left(\frac{\mu(p-q)p(u)}{(2-q)(p^*(u)-(\lambda+\mu)q^*(u))}\right)^{\frac{2-q}{2-p}}[p^*(u)-(\lambda+\mu)q^*(u)] - \alpha q(u)$$

On déduit que $H_\alpha(t_u,u) > 0$ si :

$$\alpha q(u) < \tfrac{2-p}{p-q}\left(\frac{\mu(p-q)p(u)}{(2-q)(p^*(u)-(\lambda+\mu)q^*(u))}\right)^{\frac{2-q}{2-p}}[p^*(u)-(\lambda+\mu)q^*(u)]$$

Alors :

$$\alpha < \frac{2-p}{p-q}\left(\frac{\mu(p-q)}{(2-q)}\right)^{\frac{2-q}{2-p}}\left(\frac{p(u)}{(p^*(u)-(\lambda+\mu)q^*(u))}\right)^{\frac{2-q}{2-p}}\frac{[(p^*(u)-(\lambda+\mu)q^*(u))]}{q(u)}$$

On pose :

$$\theta = \frac{2-p}{p-q}\left(\frac{\mu(p-q)}{(2-q)}\right)^{\frac{2-q}{2-p}}$$

donc :

$$\alpha < \theta \frac{p(u)^{\frac{2-q}{2-p}}}{\left(\left(p^*(u) - (\lambda+\mu) q^*(u)\right)\right)^{\frac{2-q}{2-p}-1} q(u)}$$

$$\Rightarrow \alpha < \theta \frac{p(u)^{\frac{2-q}{2-p}}}{\left(\left(p^*(u) - (\lambda+\mu) q^*(u)\right)\right)^{\frac{p-q}{2-p}} q(u)} = \alpha_{u,\lambda,\mu}$$

par conséquent on a pour la fonction $t \longrightarrow \partial_t \bar{I}_\alpha(t,u)$:

Deux zéro positive si $\alpha < \alpha_{u,\lambda,\mu}$ (puisque $H_\alpha(t_u,u) > 0$)

Un zéro si $\alpha = \alpha_{u,\lambda,\mu}$ (puisque $H_\alpha(t_u,u) = 0$)

Elle n'admet pas de zéro si $\alpha > \alpha_{u,\lambda,\mu}$ (puisque $H_\alpha(t_u,u) < 0$)

D'ou

Si $\alpha \in]0, \alpha_{u,\lambda,\mu}[\Rightarrow \partial_t \bar{I}_\alpha(.,u) = t^{q-1} H_\alpha(t,u)$ admet deux zéro positifs,

Si $\alpha = \alpha_{u,\lambda,\mu} \Rightarrow \partial_t \bar{I}_\alpha(.,u)$ admet un zéro positif,

Si $\alpha \in]\alpha_{u,\lambda,\mu}, \infty[\Rightarrow \partial_t \bar{I}_\alpha(.,u) = t^{q-1} H_\alpha(t,u)$ elle n'admet pas des zéro.

D'ou le lemme.

.

Remarque

Supposons que : $\alpha \in]0, \alpha_{u,\lambda,\mu}[$

Soit $t_{u,\alpha,1}$ et $t_{(u,\alpha),2}$ les deux zéro de $\partial_t \bar{I}_\alpha(.,u)$ donc $0 < t_1 < t_u < t_2$ et on a :

$$\begin{cases} \text{si } 0 < t < t_u \text{ alors } \partial_t H_\alpha(t,u) > 0 \\ \text{si} \quad t > t_u \text{ alors } \partial_t H_\alpha(t,u) < 0 \end{cases}$$

De plus :

$$H_\alpha\left(t_{(u,\alpha),1}, u\right) = H_\alpha\left(t_{(u,\alpha),2}, u\right) = 0$$

Alors :

$$\begin{cases} \partial_{tt}\bar{I}_\alpha\left(t_{(u,\alpha),1}, u\right) = t_{(u,\alpha),1}^{q-1} \partial_t H_\alpha(t_1, u) > 0 \\ \partial_{tt}\bar{I}_\alpha\left(t_{(u,\alpha),2}, u\right) = t_{(u,\alpha),2}^{q-1} \partial_t H_\alpha(t_2, u) < 0 \end{cases}$$

On déduit que la fonction $\bar{I}_\alpha(.,u)$ atteint son unique minimum local pour $t = t_{(u,\alpha),1}$et elle atteint son unique maximum local pour $t = t_{(u,\alpha),2}$.

Notons que $\forall u \in V\big|_{\{0\}}$ et pour tout $\alpha \in [0, \alpha_{u,\lambda,\mu}]$ on a :

$$\begin{cases} t_{(u,\alpha),1} u \ \in N_{I_\alpha} \\ t_{(u,\alpha),2} u \in N_{I_\alpha} \end{cases}$$

Puisque :

$$\partial_t \bar{I}_\alpha\left(t_{(u,\alpha),1}, u\right) = \partial_t \bar{I}_\alpha\left(t_{(u,\alpha),2}, u\right) = 0$$

Alors les fonctions :

$$u \longrightarrow \bar{I}_\alpha \left(t_{(u,\alpha),1}, u\right), \ u \longrightarrow \bar{I}_\alpha \left(t_{(u,\alpha),2}, u\right)$$

sont bornées dans $V\big|_{\{0\}}$.

Notation

On note par :

$$\alpha_1^* = \inf \left\{ \alpha_{u,\lambda,\mu}, \forall u \in V\big|_{\{0\}} \right\}$$

Et pour tout $\alpha \in (0, \alpha_1^*)$,

$$\alpha_1(\alpha) = \inf \left\{ \bar{I}_\alpha \left(t_{(u,\alpha),1}, u\right), \forall u \in V\big|_{\{0\}} \right\}$$

$$\alpha_2(\alpha) = \inf \left\{ \bar{I}_\alpha \left(t_{(u,\alpha),2}, u\right), \forall u \in V\big|_{\{0\}} \right\}$$

Remarque

Pour tout $\gamma \in IR_+^*$ on a :

$$\begin{cases} \bar{I}_\alpha \left(\gamma t, \dfrac{u}{\gamma}\right) = \bar{I}_\alpha (t, u) \\ \partial_t \bar{I}_\alpha \left(\gamma t, \dfrac{u}{\gamma}\right) = \dfrac{1}{\gamma} \partial_t \bar{I}_\alpha (t, u) \\ \partial_{tt} \bar{I}_\alpha \left(\gamma t, \dfrac{u}{\gamma}\right) = \dfrac{1}{\gamma^2} \partial_{tt} \bar{I}_\alpha (t, u) \\ t_{(u,\alpha),1} = \dfrac{1}{\gamma} t \left(\dfrac{u}{\gamma}, \alpha\right),1 \\ t_{(u,\alpha),2} = \dfrac{1}{\gamma} t \left(\dfrac{u}{\gamma}, \alpha\right),2 \end{cases}$$

Donc on peut écrire :

$$\alpha_1(\alpha) = \inf_{u \in \$} \bar{I}_\alpha \left(t_{(u,\alpha),1}, u\right) \tag{6,4}$$

$$\alpha_2(\alpha) = \inf_{u \in \$} \bar{I}_\alpha \left(t_{(u,\alpha),2}, u\right), \tag{6,5}$$

ou \$ est la sphère de l'unité de l'espace $V\big|_{\{0\}}$

.

Remarque

Par la définition de la notion inf il existe toujours des suites minimisantes pour $(6,4)$ et $(6,5)$.

Lemme 7

Soit $(u_n)_{n\in IN} \subset \$$ la suite minimisante de $(6,4)$ (resp de $(6,5)$) on pose $U_n = t_{(u_n,\alpha),1}u_n$ $\left(\text{resp } V_n = t_{(u_n,\alpha),2}u_n\right)$ et puisque $\mu > 0$ et $(\lambda+\mu) > 0$ alors,

$$(i)\ \lim_{n\to\infty} \sup \|U_n\| < +\infty \ \left(\text{resp } \lim_{n\to\infty} \sup \|V_n\| < +\infty\right)$$

$$(ii)\ \lim_{n\to\infty} \inf \|U_n\| > 0 \qquad \left(\text{resp } \lim_{n\to\infty} \inf \|V_n\| > 0\right).$$

Démonstration (i) Soit $(u_n)_{n\in IN} \subset \$$ la suite minimisante de $(6,4)$,on sait que :

$$\partial_t \bar{I}_\alpha \left(t_{(u_n,\alpha),1}, u_n\right) = 0$$

Alors :

$$t_1^{q-1}\left(\mu t_1^{p-q} p(u_n) + (\alpha+\mu) t_1^{2-q} q^*(u_n) - \alpha q(u_n) - t_1^{2-q} p^*(u_n)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \mu t_1^{p-q} p(u_n) = \alpha q(u_n) + t_1^{2-q} p^*(u_n) - (\lambda+\mu) t_1^{2-q} q^*(u_n)$$

$$\Rightarrow \mu \int_\Omega t_1^{p-q} |\nabla u_n|^p dx = \alpha \int_\Omega |u_n|^q dx + \frac{1}{2}\int_\Omega t_1^{2-q} |u_n|^2 dx - (\lambda+\mu)\int_\Omega t_1^{2-q} |Div u_n|^2 dx$$

$$\Rightarrow \mu \int_\Omega t_1^{-q} |\nabla t_1 u_n|^p dx = \alpha t_1^{-q} \int_\Omega |t_1 u_n|^q dx + \frac{1}{2}\int_\Omega t_1^{-q} |t_1 u_n|^2 dx - (\lambda+\mu)\int_\Omega t_1^{-q} |Div t_1 u_n|^2 dx$$

$$\Rightarrow \mu \int_\Omega |\nabla t_1 u_n|^p dx = \alpha \int_\Omega |t_1 u_n|^q dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |t_1 u_n|^2 dx - (\lambda+\mu)\int_\Omega |Div t_1 u_n|^2 dx$$

$$\Rightarrow \mu \|U_n\|^p = \alpha \|U_n\|_q^q + \frac{1}{2}\|U_n\|_2^2 - (\lambda+\mu)\|Div U_n\|_2^2 \qquad (6,6)$$

.

De même puisque :

$$\begin{cases} \partial_{tt}\bar{I}_\alpha\left(t_{(u,\alpha),1},u\right)=t_{(u,\alpha),1}^{q-1}\partial_t H_\alpha\left(t_{(u,\alpha),1},u\right)>0, \\ \partial_{tt}\bar{I}_\alpha\left(t,u\right)=\left(q-1\right)t^{q-2}H_\alpha\left(t,u\right)+t^{q-1}\partial_t H_\alpha\left(t,u\right), \\ \partial_{tt}\bar{I}_\alpha\left(t_{(u,\alpha),1},u\right)=\mu\left(p-1\right)t_1^{p-2}p\left(u_n\right)+\left(\lambda+\mu\right)q^*\left(u_n\right) \\ \qquad\qquad -\alpha\left(q-1\right)t_1^{q-2}q\left(u_n\right)-p^*\left(u_n\right)>0. \end{cases}$$

Alors :

$$t_1^{-2}\left[\mu\left(p-1\right)t_1^p p\left(u_n\right)+\left(\lambda+\mu\right)t_1^2 q^*\left(u_n\right)-\alpha\left(q-1\right)t_1^q q\left(u_n\right)-t_1^2 p^*\left(u_n\right)\right]>0$$

$$\Rightarrow\mu\left(p-1\right)\int_\Omega\left|\nabla t_1u_n\right|^p dx+\left(\lambda+\mu\right)\int_\Omega\left|Divt_1u_n\right|^2 dx-\alpha\left(q-1\right)\int_\Omega\left|t_1u_n\right|^q dx-\int_\Omega\left|t_1u_n\right|^2 dx>0$$

$$\Longrightarrow\mu\left(p-1\right)\left\|U_n\right\|^p+\left(\lambda+\mu\right)\left\|DivU_n\right\|_2^2-\alpha\left(q-1\right)\left\|U_n\right\|_q^q-\left\|U_n\right\|_2^2>0\quad(6,7)$$

D'une part on a :

$$\begin{aligned} I_\alpha\left(U_n\right) &= I_\alpha\left(t_1u_n\right) \\ &= \frac{\mu}{p}p\left(t_1u_n\right)+\frac{\left(\lambda+\mu\right)}{2}q^*\left(t_1u_n\right)-\frac{\alpha}{q}q\left(t_1u_n\right)-\frac{1}{2}p^*\left(t_1u_n\right) \\ &= \frac{\mu}{p}\int_\Omega\left|\nabla t_1u_n\right|^p dx+\frac{\left(\lambda+\mu\right)}{2}\int_\Omega\left|Divt_1u_n\right|^2 dx-\frac{\alpha}{q}\int_\Omega\left|t_1u_n\right|^q dx-\frac{1}{2}\int_\Omega\left|t_1u_n\right|^2 dx \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I_\alpha\left(U_n\right)=\frac{\mu}{p}\left\|U_n\right\|^p+\frac{\left(\lambda+\mu\right)}{2}\left\|DivU_n\right\|_2^2-\frac{\alpha}{q}\left\|U_n\right\|_q^q-\frac{1}{2}\left\|U_n\right\|_2^2$$

Alors de $(6,6)$ et $(6,7)$ en déduit :

$$I_\alpha\left(U_n\right)<0$$

Supposons qu' il existe une sous suite de (U_n) notée aussi (U_n) telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left\|U_n\right\|=+\infty$,

par ailleurs il existe une constante c_q tel que $\left\|U_n\right\|_2\leq c_q\left\|U_n\right\|_q,\forall n$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \|U_n\|_q = +\infty \text{ avec } q > 2$$

Mais puisque :

$$\partial_t \bar{I}_\alpha \left(t_{(u_n,\alpha),1}, u_n\right) = 0$$

Alors :

$$\begin{aligned} \mu \|U_n\|^p &= \alpha \|U_n\|_q^q - (\lambda+\mu) \|DivU_n\|_2^2 + \|U_n\|_2^2 \\ &= \|U_n\|_q^q \left[\alpha + (1-\lambda-\mu) O_n(1)\right]. \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} I_\alpha(U_n) &= \frac{\mu}{p} \|U_n\|^p + \frac{(\lambda+\mu)}{2} \|DivU_n\|_2^2 - \frac{\alpha}{q} \|U_n\|_q^q - \frac{1}{2} \|U_n\|_2^2 \\ &= \|U_n\|_q^q \left(\frac{\alpha}{p} - \frac{\alpha}{q} + \left(\frac{1-\lambda-\mu}{p} + \frac{\lambda+\mu-1}{2}\right) O_n(1)\right) \\ &= \left(\|U_n\|_q^q \left(\frac{\alpha}{n} + \left(\frac{1-\lambda-\mu}{p} + \frac{\lambda+\mu-1}{2}\right) O_n(1)\right)\right) \end{aligned}$$

Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} I_\alpha(U_n) = +\infty$$

ce qui est impossible.

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \sup \|U_n\|_q < +\infty$$

On démontre de la même technique que $\lim_{n\to+\infty} \sup \|V_n\|_q < +\infty$.

ii) Soit $(u_n)_{n\in IN} \subset \$$ la suite minimisante de $(6,4)$ et supposons qu'il existe une sous suite de (U_n) notée aussi (U_n) telle que $\lim_{n\to+\infty} \|U_n\| = 0$ donc il est clair que $\lim_{n\to+\infty} I_\alpha(U_n) = 0$

c-à-d $\alpha_1(\alpha) = 0$ ce qui est impossible puisque :

$$\bar{I}_\alpha\left(t_{(u_n,\alpha),1}, u_n\right) < 0 \text{ pour tous } n.$$

Soit $(u_n)_{n\in IN} \subset \$$ la suite minimisante de $(6,5)$, donc :

$$\begin{cases} \partial_t \bar{I}_\alpha\left(t_{(u_n,\alpha),2}, u_n\right) = 0 \\ \partial_{tt} \bar{I}_\alpha\left(t_{(u_n,\alpha),1}, u_n\right) < 0 \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{cases} \mu \|V_n\|^p + (\lambda+\mu)\|DivV_n\|_2^2 - \alpha\|V_n\|_q^q - \|V_n\|_2^2 = 0 \\ \mu(p-1)\|V_n\|^p + (\lambda+\mu)\|DivV_n\|_2^2 - \alpha(q-1)\|V_n\|_q^q - \|V_n\|_2^2 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \mu(p-1)\|V_n\|^p + (\lambda+\mu)\|DivV_n\|_2^2 - \alpha(q-1)\|V_n\|_q^q - \|V_n\|_2^2 - \\ & (q-1)\left(\mu\|V_n\|^p + (\lambda+\mu)\|DivV_n\|_2^2 - \alpha\|V_n\|_q^q - \|V_n\|_2^2\right) < 0 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \mu(p-q)\|V_n\|^p &< q(\lambda+\mu)\|DivV_n\|_2^2 + (2-q)\|V_n\|_2^2 \\ &\leq [q(\lambda+\mu)\,const + (2-q)]\|V_n\|_2^2. \end{aligned}$$

Soit S_Γ est la constante de *Sobolev* pour l'injection $V \hookrightarrow L^2(\Omega)$, alors :

$$\mu(p-q)\|V_n\|^p < [q(\lambda+\mu)\,const + (2-q)]\, S_\Gamma^{\frac{2}{p}}\|V_n\|^2$$

$$\Rightarrow (p-q) < \frac{[q(\lambda+\mu)\,const + (2-q)]\, S_\Gamma^{\frac{2}{p}}}{\mu}\|V_n\|^{2-p}$$

Supposons qu'il existe une sous suite de (V_n) notée aussi (V_n) tel que

$$\lim_{n\to+\infty}\|V_n\| = 0$$

donc $(p-q) \leq 0$ ci qui est impossible.

Lemme 8

Soit $(u_n) \subset \$$ la suite minimisante de $(6,4)\,(resp\ \ (6,5))$

Alors $U_n = t_{(u_n,\alpha),1}u_n\ \left(resp\ V_n = t_{(u_n,\alpha),2}u_n\right)$ sont des suites $palias_Smale$ pour la fonctionnelle I_α.

Démonstration On va démontrer le lemme pour (U_n) et la démonstration pour (V_n) sera de même façon.

Premièrement grâce au $lemme2$, il est clair que (U_n) est une suite bornée dans V, d'autre part notons que pour tout $u \in V$ et $\alpha \in (0, \alpha_1^*)$ on a :

$$\partial_t \bar{I}_\alpha \left(t_{(u,\alpha),1}, u\right) = 0 \text{ et } \partial_{tt}\bar{I}_\alpha \left(t_{(u,\alpha),1}, u\right) \neq 0\ ,$$

Le théorème des fonctions nous donne :

Si la fonction $\bar{I}_\alpha$ est de classe C^1par rapport à u alors $t_{(u,\alpha),1}$ est encore de classe C^1.

Introduisant la fonctionnelle ϕ_α $\left(\text{de classe } C^1\right)$définie dans \$ par :

$$\begin{aligned} \phi_\alpha(u) &= \bar{I}_\alpha \left(t_{(u,\alpha),1}, u\right) \\ &= I_\alpha \left(t_{(u,\alpha),1}, u\right) \end{aligned}$$

Alors :

$$\alpha_1(\alpha) = \inf_{u\in\$} \phi_\alpha(u) \qquad \text{et } \lim_{n\longrightarrow+\infty} \phi_\alpha(u_n) = \alpha_1(\alpha)$$

En utilisant le principe variationnel de $Ekland$ dans l'espace de $Manifold$ $(\$, \|\|\|)$ sur la fonctionnelle ϕ_α, on trouve

$$\left|\phi'_\alpha(u_n)(\varphi_n)\right| < \frac{1}{n}\|\varphi_n\|\ ,\ \forall \varphi_n \in T_{u_n}\$$

ou $T_{u_n}\$$ est l'espace tangent de $\$$ au point u_n

En effet :

$$\forall \varphi_n \in T_{u_n}\$$$

$$\begin{aligned}
\phi'_\alpha(u_n)(\varphi_n) &= \partial_t \bar{I}_\alpha\left(t_{(u_n,\alpha),1}, u_n\right) t'_1(u_n,\alpha)(\varphi_n) + \partial_u \bar{I}_\alpha\left(t_{(u_n,\alpha),1}, u_n\right)(\varphi_n) \\
&= \partial_u \bar{I}_\alpha\left(t_{(u_n,\alpha),1}, u_n\right)(\varphi_n)
\end{aligned}$$

où :

$$t'_1(u_n,\alpha) = \frac{\partial t_{(u_n,\alpha),1}}{\partial u}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\left|\phi'_\alpha(u_n)(\varphi_n)\right| &= \left|\partial_u \bar{I}_\alpha\left(t_{(u_n,\alpha),1}, u_n\right)(\varphi_n)\right| \\
&\leq \left|\partial_u \bar{I}_\alpha\left(t_{(u_n,\alpha),1}, u_n\right)\right| \|\varphi_n\| \\
&\leq \frac{1}{n}\|\varphi_n\|
\end{aligned}$$

De plus, soit :

$$\begin{aligned}
\pi \qquad W^{1,p}_\Gamma(\Omega)\big|_{\{0\}} &\longrightarrow (0,\infty)\times\$ \\
u &\longmapsto \left(\|u\|, \frac{u}{\|u\|}\right) = (\pi_1(u), \pi_2(u))
\end{aligned}$$

L'inégalité de *Holder* nous donne :

$$\begin{cases}
|\pi'_1(u).(\varphi)| \leq \|\varphi\| \\
\|\pi'_2(u).(\varphi)\| \leq 2\dfrac{\|\varphi\|}{\|u\|}
\end{cases}$$

Et du *lemme* 7, $\exists c > 0$ tel que :

$$t_{(u_n,\alpha),1} \geq c, \forall n \in IN$$

Donc : $\forall \varphi \in V\left|_{\{0\}}\right., \exists \varphi_n^1 \in IR$ et $\varphi_n^2 \in T_{u_n}\$$ tel que :

$$\begin{cases} \left|\varphi_n^1\right| \leq \|\varphi\|, \\ \left\|\varphi_n^2\right\| \leq \dfrac{2}{c}\|\varphi\| \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned} I'_\alpha\left(t_{(u_n,\alpha),1}u_n\right)(\varphi_n) &= \partial_t \bar{I}_\alpha\left(t_{(u_n,\alpha),1}, u_n\right)\left(\varphi_n^1\right) + \partial_u \bar{I}_\alpha\left(t_{(u_n,\alpha),1}, u_n\right)\left(\varphi_n^2\right) \\ &= \partial_u \bar{I}_\alpha\left(t_{(u_n,\alpha),1}, u_n\right)\left(\varphi_n^2\right) \\ &= \phi'_\alpha\left(u_n\right)\left(\varphi_n^2\right). \end{aligned}$$

Alors :

$$I'_\alpha\left(t_{(u_n,\alpha),1}u_n\right)(\varphi) \leq \frac{1}{n}\left\|\varphi_n^2\right\| \leq \frac{2}{cn}\|\varphi\|$$

On déduit facilement que $\lim_{n\to\infty}\left\|I'_\alpha\left(U_n\right)\right\|_* = 0$, où $\|\|_*$ représente la norme de l'espace dual de$V$.

Remarque

Notons que pour tout $u \in V\left|_{\{0\}}\right.$et $0 < \alpha < \alpha_1^*$ on a :

$$\begin{aligned} \bar{I}_\alpha\left(t, |u|\right) &= \bar{I}_\alpha\left(t, u\right), \\ t_{(|u|,\alpha),1} &= t_{(u,\alpha),1} \text{ et } t_{(|u|,\alpha),2} = t_{(u,\alpha),2} \end{aligned}$$

Alors on peut considérer que chaque suite minimisante $(u_n)_{n\in IN} \subset \$$ de $(6,4)$ $(resp\ de\ (6,5))$ est une suite des fonctions non négatives et de même pour U_n et V_n sont des suite des fonctions non négatives .

Lemme 9 $(c.f.\,[3])$

Pour tout $\tau > 0$ il existe M_τ tel que :

$$\left(\frac{S}{2^{p/n}} - \tau\right)\|u\|_2^p \leq \|\nabla u\|_p^p + M_\tau\|u\|_p^p, \forall u \in \left(W^{1,p}(\Omega)\right)^n$$

Où S est la constante de *Sobolev* pour l'injection $\left(W^{1,p}(\Omega)\right)^n \hookrightarrow L^p(\Omega)$.

Lemme 10 $(c.f.\,[3])$

Soit (u_n) une suite converge faiblement vers u telle que :

$$\|\nabla u_n\|_p^p \rightharpoonup \xi \quad \text{faible étoile,}$$

$$\|u_n\|_2^2 \rightharpoonup \zeta \quad \text{faible étoile,}$$

$$\|Divu_n\|_2^2 \rightharpoonup \gamma \quad \text{faible étoile.}$$

Alors pour tout ensemble fini des indices I on a :

$$\begin{cases} \zeta = \|u\|_2^2 + \sum\limits_{j\in I} \zeta_j \delta x_j, \zeta_j > 0, \\ \xi \geq \|\nabla u\|_p^p + \sum\limits_{j\in I} \xi_j \delta x_j, \xi_j > 0, \\ \gamma \geq \|Divu\|_2^2 + \sum\limits_{j\in I} \gamma_j \delta x_j, \gamma_j > 0, \\ \text{Si } \ x_j \in \Omega \text{ alors } S\zeta_j^{p/2} \leq \xi_j, \\ \text{Si } \ x_j \in \Sigma \text{ alors } \dfrac{S}{2^{p/N}} \zeta_j^{p/2} \leq \xi_j. \end{cases}$$

En utilisant le *lemme*10 et quelques résultats trouver dans $c.f\,[2]$ et $c.f\,[19]$ on peut démontrer le lemme suivant :

Lemme 11

Soit $(u_n)_{n\in IN} \subset V$ une suite Palais-Smale avec $u_n \rightharpoonup u$ dans V alors l'ensemble $I^* = \{j, x_j \in \Omega\} \subset I$ et de plus I^* est fini ou vide et de plus pour toute sous suite de (u_n) notée aussi (u_n) on a :

$$\nabla u_n(x) \longrightarrow \nabla u(x) \qquad p.p \text{ dans } \Omega,$$

$$Divu_n(x) \longrightarrow Divu(x) \qquad p.p \text{ dans } \Omega.$$

.

Lemme 12

Il existe une constante k dépendante uniquement de p, q, n et Ω tel que $\forall \alpha$, la fonctionnelle I_α, satisfaite a la condition de Palais -Smale dans l'intervalle :

$$J = \left(-\infty . \left(\frac{\mu}{p} - \frac{1}{2} \right) S^{n/p} - k\alpha^{2/(2-q)} \right).$$

Démonstration Soit $(u_n)_{n \in IN} \subset V$ une suite $Palais_Smale$ pour I_α.

D'une part u_n est une suite bornée donc :

Il existe une sous suite de (u_n) noté aussi (u_n) et une fonction $u \in \left(W_\Gamma^{1,p}(\Omega) \right)^n$ tel que : $u_n \rightharpoonup u$, et il existe une constante k dépendante de p, q, n et Ω tel que

$$I_\alpha(u) \geq -k\alpha^{2/(2-q)} \quad c.f.\,[3],$$

D'autre part on pose : $v_n = u_n - u$, Donc $c.f.\,[11]$:

$$\begin{cases} \|v_n\|^p = \|u_n\|^p - \|u\|^p + O_n(1), \\ \|v_n\|_2^2 = \|u_n\|_2^2 - \|u\|_2^2 + O_n(1). \end{cases}$$

de plus :

$$\begin{cases} \int_\Omega |u_n|^q \, dx \longrightarrow \int_\Omega |u|^q \, dx, \\ \int_\Omega |Divu_n|^2 \, dx \longrightarrow \int_\Omega |Divu|^2 \, dx. \end{cases}$$

Puis à la limite on a :

$$\|v_n\|^p - \|v_n\|_2^2 = O_n(1)$$

En utilisant la définition de I_α on trouve :

$$\frac{\mu}{p} \|v_n\|^p - \frac{1}{2} \|v_n\|_2^2 = const - I_\alpha(u) + O_n(1)$$

Puisque la suite (v_n) est bornée dans V, il existe $l \geq 0$ et une sous suite de (v_n) notée aussi (v_n) tel que :

$$\begin{cases} \|v_n\|^p \longrightarrow l \\ \|v_n\|_2^2 \longrightarrow l \end{cases}$$

En utilisant l'inégalité de *Cherrier* et par passage a la limite on obtient :

$$\left[\frac{s}{2^{p/n}} - \tau\right](l)^{p/2} \leq l, \forall \tau > 0$$

$$\Rightarrow \frac{s}{2^{p/n}} l^{p/2} \leq l$$

$$\Rightarrow l = 0$$

car si $l \neq 0$ donc :

$$l \geq \frac{1}{2} S^{n/p}$$

Or on a :

$$\frac{\mu}{p}\|v_n\|^p - \frac{1}{2}\|v_n\|_2^2 = const - I_\alpha(u) + O_n(1)$$

à la limite

$$\left(\frac{\mu}{p} - \frac{1}{2}\right) l = const - I_\alpha(u)$$

$$\Rightarrow const \geq \left(\frac{\mu}{p} - \frac{1}{2}\right) l - k\alpha^{2/(2-q)}$$

ce qui est impossible.

Lemme 13

Soit $\beta = 2/(2-q)$, il existe $v \in V$ *et* $\alpha_2^* > 0$ tel que : $\forall \alpha \in (0, \alpha_2^*)$,

$$\sup_{t \geq 0} I_\alpha(t, v) < \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{p} - \frac{1}{2}\right) S^{n/p} - k\alpha^\beta,$$

particulièrement

$$\alpha_2(\alpha) < \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{p} - \frac{1}{2}\right) S^{n/p} - k\alpha^\beta.$$

pour la démonstration *c.f.* [3].

III. 2. 2. Résultat d'existence

Théorème 10

Soit $1 < q < p$ et $\alpha^* = \min\{\alpha_1^*, \alpha_2^*\}$, pour tout $\alpha \in (0,\ \alpha^*)$ et pour $(\lambda + \mu) > 0$, le problème (P_6) admet deux solutions positives.

Démonstration Grâce aux *lemmes* précédents il existe deux suites des fonctions non négatives $\{U_n\}$ et $\{V_n\}$ dans V tel que :

$$I_\alpha(U_n) \longrightarrow \alpha_1(\alpha), \quad \left\|I'_\alpha(U_n)\right\|_* \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \longrightarrow \infty,$$

et

$$I_\alpha(V_n) \longrightarrow \alpha_2(\alpha), \quad \left\|I'_\alpha(V_n)\right\|_* \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow \infty$$

Mais on a :

$$\alpha_1(\alpha) \leq \alpha_2(\alpha) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{p} - \frac{1}{2}\right) S^{n/p} - k\alpha^\beta,$$

.

Alors il existe deux fonctions non négatives U_α et V_α vérifient d'une part :

$$\begin{cases} U_n \longrightarrow U_\alpha \quad \text{dans } V, \\ V_n \longrightarrow V_\alpha \quad \text{dans } V. \end{cases}$$

De plus :

$$\begin{cases} \partial_{tt}\bar{I}_\alpha\left(1, U_\alpha\right) > 0 \\ \partial_{tt}\bar{I}_\alpha\left(1, V_\alpha\right) < 0 \end{cases}$$

Alors

$$U_\alpha \neq V_\alpha$$

D'autre part U_α et V_α sont des fonctions positives (grâce à l'inégalité de $Harnack$)

D'où le Théorème.

.

ANNEXE

Pour facilité la lecture de cette thèse voila un rappel des notion principales.

Rappels sur les espaces de *Sobolev*

Notation

Soient p et q deux réels tels que: $p \in [2, \infty[$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n (n = 2, 3)$ et de frontière Γ variété lipshitzienne de dimension $n-1$, $\eta = (\eta_i)_{i=1}^n$ désigne le vecteur unitaire normal extérieur à Ω en un point de Γ.

Définition 1

On définit l'espace de *Sobolev*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \,/\, \forall i,\ 1 \leq i \leq n,\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \right\}$$

qui est un espace de *Banach* réflexif et séparable pour la norme :

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Théorème 1 (Formule de *Green*)

La formule :

$$\forall (u, v) \in \left(W^{1,p}(\Omega)\right), \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx + \int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_\Omega uv\eta_i dx$$

est dite Formule de *Green*.

Définition 2

On définit l'espace de *Sobolev* et on note : $W_0^{1,p}(\Omega)$ l'adhérence de $D(\Omega)$,

$D(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) \,/\, \exists K \text{ compact}, K \subset \Omega,\ \text{supp}(u) \subset K\}$, dans $W^{1,p}(\Omega)$, $W_0^{1,p}(\Omega)$ muni de la topologie induite est un espace *Banach* réflexif et séparable.

.

Théorème 2

1) $W^{1,p}(\Omega) = W_0^{1,p}(\Omega) \oplus W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$

2) $\left(W^{1,p}(\Omega)\right)' = W^{-1,q}(\Omega) \oplus \left(W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)\right)'$

Définition 3

Soit A une application d'un espace vectoriel normé V dans son dual V', A est dite :

- Bornée si l'image par A de tout borné de V est un borné de V'.

- Hémicontinu si pour tout (u, v, w) de V^3, l'application : $IR \to IR$, $(A(u + \beta v), w)$, est continue.

- Monotone si $\forall (u, v) \in V^2$, $(A(u) - A(v), u - v) \geq 0$

- Coercive si $\forall u \in V$; $\lim\limits_{\|u\| \to \infty} = \dfrac{(A(u), u)}{\|u\|} = +\infty$.

Proposition 1 [Inégalité de *Poincaré*]

Soit p un réel, $1 < p < \infty$, Ω un ouvert de IR^n inclus dans la bande

$Bd(h) = \{x \in IR^n / a < x < b, -\infty < a < b < +\infty\}$; alors on a :

$\exists C > 0, \forall u \in W^{1,p}(\Omega) : C \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^n}$.

Corollaire 1

Soit p un réel, $1 < p < \infty$, Ω un ouvert de IR^n inclus dans la bande $Bd(h)$; alors l'application :

$W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow IR^+$

$u \longmapsto \|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^n}$,

définit sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ une norme équivalente à celle de $W^{1,p}(\Omega)$.

Proposition 2 (Théorème de la convergence monotone)

Soit (f_n) une suite croissante de fonctions mesurables positives convergeant simplement vers

f Alors : $\int f_n \to \int f$

Proposition 3

Soit (f_n) une suite de fonctions positives mesurables convergeant vers f.On suppose qu'il existe une fonction intégrable g telle que $0 \leq f_n \leq g$ pour tout n, alors : $\int f_n \to \int f$

Nous allons maintenant énoncer les propriétés de base de l'intégrale de *Lebesgue*.

Proposition 4

Soient f et g deux fonctions intégrables sur un ensemble E et soit $k \in IR$,alors les fonctions kf et $f + g$ sont intégrables (sur E) et

(i) $\int kf = k \int f$,
(ii) $\int (f + g) = \int f + \int g$,
(iii) Si $f \leq g$, alors $\int f \cdot \leq \int g$.

Théorème 3 (convergence dominée de Lebesgue)

Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables convergeant vers f simplement et vérifiant $|f_n| \leq g$ pour une fonction intégrable g et pour tout n. Alors : $\int f_n \to \int f$

Définition 4

La restriction au bord $\partial\Omega$ d'une fonction $v \in W^{1,p}(\Omega)$ est appelée la trace au bord, de v et elle est notée par $v\,|_{\partial\Omega}$- où $\gamma_0 v$.

Lemme 1

Si $v \in H^1(\Omega)$ il existe une constante C telle que :

$$\|\gamma_0 v\|_{o,\partial\Omega} \leq C \left\|v'\right\|_{1,\Omega}$$

Théorème 4 [Point fixe de *Brouwer*]

Toute application continue de la boule unité fermée de IR^m dans elle même admet un point fixe.

Corollaire 2

Toute application continue d'un convexe compact de dans lui même admet un point fixe.

Rappels sur l'optimisation quadratique

Sois le problème suivant :

Trouver $u \in V$, tel que $I(u) = \inf_{u \in V} I(u)$, où I est une fonction définie sur V à valeurs dans IR

Définition 5

- u est un point de minimum local de I sur V si, et seulement si

$\exists \eta > 0, \forall v \in V, \|u - v\| < \eta \Rightarrow I(u) \leq I(v)$.

- u est un point de minimum global de I sur V si, etseulement si $\forall v \in V, I(u) \leq I(v)$.

Définition 6

Une suite $(u_n)_{n \in IN} \subset V$ est une suite minimisante ssi,

$\lim_{n \to +\infty} I(u_n) = \inf_{v \in V} I(v)$

Théorème 5

Si V est compact et I est continue sur V, alors I atteint le minimum :

$$\exists u_{min} \in V, telque I(u_{min}) = inf \inf_{v \in V} I(v).$$

.

Enoncé de l'inégalité de Harnack

Le cadre géométrique est un graphe infini connexe localement uniformément fini, à savoir que si on note par $x \sim y$ quand x et y sont voisins, alors :

$\exists N, \forall x, \#\{y | y \sim x\} \leq N.$

Sur ce graphe, on dispose d'une métrique à valeurs entières :

$d(x,y) = inf\{n | \exists (x = a_0, a_1, ..., a_n = y) telque \forall i, ai \sim ai + 1\}.$

Pour obtenir l'inégalité de Harnack globale, on fait deux hypothèses géométriques sur le graphe : la régularité du volume et une inégalité de *Poincaré*.

Par volume, on entend ici mesure de dénombrement. On définit les boules et leur bord :

$B(x,n) = \{y | d(x,y) < n\}, \partial B = \{y | d(x,y) = n-1\}.$

On note kB la boule $B(x,kn)$ si $B = B(x,n)$. L'hypothèse de régularité du volume s'écrit :

$\exists C1 > 0, \forall B, \#(2B) \leq C1\#(B).$

Notons que cette hypothèse inclut le caractère localement uniformément fini.

C_1 convient comme valeur de N, il suffit d'appliquer la régularité du volume à $B(x,1)$. On note ensuite la moyenne sur une boule d'une fonction réelle f du graphe :

$$f_B = \frac{1}{\#(B)} \sum_{x \in B} f(x).$$

La deuxième hypothèse, l'inégalité de *Poincaré*, s'écrit

$$\exists C_2 > 0, \forall x^0, \forall n, \sum_{x \in B(x^0,n)} |f(x) - f_B|^2 \leq C_2 n^2 \sum_{x,y \in B(x^0,2n),\ x \sim y} |f(x) - f(y)|^2$$

A chaque arête (non orientée) xy, on associe un coefficient C_{xy} pour définir l'opérateur :

$$Lu(x) = \sum_{y \sim x} C_{xy}(u(x) - u(y)).$$

Il sera supposé elliptique au sens où

$\exists C_3 > 0, 1/C_3 \leq C_{xy} \leq C_3$.

On dira qu'une fonction u est harmonique sur B quand $Lu \equiv 0 sur B \backslash \partial B$.

On peut maintenant énoncer le théorème.

Théorème 6 (Inégalité de $Harnack$**)**

Si $u > 0$ est harmonique sur $2B$, alors :

$\underset{B}{max} u \leq C \underset{B}{min} u$,

où C est une constante qui ne dépend que des trois constantes du graphe C_1, C_2, C_3.

Cette inégalité est globale car la constante C ne dépend pas de B (ni de u). Dans notre cadre géométrique discret, elle n'est justement remarquable que pour les grands rayons. Dans toute la suite, C désigne à chaque fois une constante qui aurait pu être calculée précisément en fonction de C_1, C_2 et C_3. La démonstration est une adaptation de la méthode de Moser qui consiste à étudier les quantités

$\phi(p, B) = \left(\frac{1}{\#(B)} \sum_{x \in B} u(x)^p \right)^{1/p}$.

B étant fixée, $\phi(p, B)$ est une fonction croissante de p qui tend vers $\underset{B}{min} u$ quand p tend vers $-\infty$ et vers $\underset{B}{max} u$ quand p tend vers $+\infty$. On démontrera en fait l'inégalité pour $u > 0$ harmonique sur $308B$, mais il suffit ensuite, pour $x_1, x_2 \in B$ et $u > 0$ harmonique sur $2B$, d'appliquer celle-ci plusieurs fois le long d'un chemin reliant x_1 et x_2 pour obtenir $u(x_1) < CC...Cu(x_2)$,

Théorème 7 ((Inégalité de $Poincaré - Friedrichs$**)**

Soit $v \in H_0^1\ (a, b)$. Alors il existe une constante C (en fonction de (b-a)) telle que :

$$\|v\|_{L^2(a,b)} \leq C \left\|v'\right\|_{L^2(a,b)}$$

Définition 6

Soit H un espace de $Hilbert$ et F une fonctionnelle définie sur H. une suite $(u_n)_{n\in IN}$ d'éléments de H est dit suite de $Palais-Smale$ pour F si $dF(u_n) \to 0$, et $F(u_n) \leq C$.

On dit que la fonctionnelle F satisfait à la condition de $Palais-Smale$ si de toute suite de $Palais-Smale$ on peut extraire une sous-suite convergente.

.

Références

[1] : H. W. Alt, S. Luckhaus, Quasilinear elliptic-parabolic differential equations of parabolic type, Math. Z. 183 (1983) 311-341.

[2] : C.O.Alves,Existencia de soluçao positiva de equaçoes elipticas nao-lineares variacionais em IR^N, doctoral dissertation , UNB, 1996.

[3] : C.O.Alves, A. El Hamidi, Nahari manifold and existence of positive solutions to a class of quasilinear problems. Nonlinear Analysis 60(2005) 611_624.

[4] : A. Alvino, P. L. Lions, G. Trombetti, Comparison results for elliptic and parabolic equations via schwarz symmetrization, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 7 (1990) 37-65.

[5] : A.Ambrosetti,J.Garcia Azorero,I.Peral Alonso,Multiplicity results for some nonlineair elliptic equations,J.Funct.Anal137(1997) 1-10.

[6] : R. Boufennouche, Méthode de Régularisation elliptique et Application, Mémoire de Magister, en Préparation,Université F.Abbas de Sétif.

[7] : A. Boulaouad et B. Merouani. Generalized And Perturbed Elasticity System. September, 3O, 2008.

[8] : F. Bouzeghaya, Problème à Frontière Libre, Mémoire de Magister, Juillet 2005,Université F.Abbas de Sétif.

[9] : H. Brézis, Analyse fonctionnelle. Dunod, Paris, 1999.

[10] : H. Brezis, Operateurs Maximaux Monotone et semigroupes de contractions dans les espaces de Hilbert, North-Holland, Amsterdam, 1973.

[11] : H. Brezis, E. Lieb, A relation between pointwise convergence of funcions andconvergence of funcionals, proc. amer. math. Soc.36 (1983) 486_490.

[12] : K. J. Brown, Y. Zhang, The nehari manifold for a semilinear elliptic aquetion with a sign-changing weight function, J. Differential Equations 193 (2003) 481-499.

[13] : S. D. Chartterji, Cours d'Analyse, vols 3. Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 1998.

[14] : P. Cherrier. Meilleures constantes dans les inégalités relatives aux espaces de *Sobolev*, Bull. Sci. math (2) 108 (1984), pp $225 - 262$.

[15] : E.Colorado,I.Peral,Semilinear elliptic problems with mixed Dirichlet-Neumann boundary conditions,J.funct.Anal.199 (2003), pp $468 - 504$.

[16] : M. Dilmi, H. Benseridi and B. Merouani, Nonlinear and Oblique Boundary Value problems for the Lamé Equations, Applied Mathematical Sciences, Vol. 1, 2007, $2517 - 2528$.

[17] : P.Drabek,S.Pohozaev.Positive solutions for P-Laplacian: applicationof thefibring method,Proc.Roy. Soc.Edinburgh.Sect.A127(1997)703-726.

[18] : A. El Hamidi, Multiple solutions with chenging sign enrgy to a nonlinear elliptic equations, Comm. pure Appl. Anal. 3(2004) 253_265.

[19] : J. Garicia Azerero, I. Peral Alonso, Multiplicity of sulutions for elliptic problams with critical exponent on with a nonsymmetric term, Trans. Amer. Math. Soc 2 (1991) , pp 877_895.

[20] : P. Grisvard, Singularities in boundary value problems. Springer-verlag, Masson (Paris), 1992.

.

[21] : Lions-Magenes, Problèmes aux limites non homogène et applications, volume1. Dunod paris, 1968.

[22] : J. L. lions, Quelques méthode de resolution des problèmes aux limites nonlinéaires, Dunod Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[23] : Marie-Thérèse, Distributions Espaces de Sobolev Applications. Lacroix-Sonrier, ellipses édition marketing S.A, paris,1998.

[24] : B. Merouani, Solution singulières du système de l'élasticité dans un polygone pour différentes conditions aux limites, Maghreb Maths. Rev, Vol. 5, Nos 1 & 2, (1996) , pp. $95 - 112$.

[25] : B. Merouani, A. Boulaouad et M. Meflah. Generalized And Perturbed Lamé System. April, 30, 2008.

[26] : F. Messelmi, Etude de quelques problèmes aux limites couplés par la méthode de compacité 2004.

[27] : V. Mikhailov, Equations aux dérivées partielles. Traduction française Editions Mir, 1980.

[28] : M. S. Saïd, Résolution d'un Problème d'Elasticité non Linéaire et Perturbé par la Méthodes des Approximations Successives par des Equations Intégrales se Basant sur la Solution du Problème de la Chaleur, Faculté des Sciences et Sciences de l'ingénieur Département de Mathématiques Université de Ouargla.

[29] : S. Sandel, quelques problèmes aux limites gouvernés par l'équation de la diffusion. Mémoire de Magister, Juillet 2005,Université F.Abbas de Sétif.

[30] : Luc Tartar, Topics in non lineair analysis. Université de Paris-Sud, Publications Mathematiques d'Orsay, novembre 1978.

[31] : R. Temam, Navier-stokes equations, Theory and Numerical Analisis, 3rd Edition, North-Holland.Amsterdam, 1984.

[32] :A. TRAD, Rayonnement acoustique de coques élastiques étudié par des méthodes intégrales, Colloque C5, supplément au Journal de Physique III, Volume 4, mai 1994.

[33] : B. Yavorski, A. Detlaf, Aide mémoire de phésique, Edition de moscou 1975.