REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE FERHAT ABBAS-SETIF

MEMOIRE

Présenté à la Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Pour l'Obtention du Diplôme

MAGISTER

Option : Algèbre et Géométrie

Par

Mr. Ilyas BOUKAROURA

THEME

Automorphismes de groupes vérifiant une propriété donnée

Soutenu le

Devant le jury

Président :	Dr N.BENSALEM	Prof	Université Ferhat Abbas	Setif
Rapporteur :	Dr B.DAOUD	M.C	Université Ferhat Abbas	Setif
Examinateurs :	Dr L.NOUI	Prof	Université Colonel El-Hadj Lakhdar	Batna
	Dr M.KERADA	M.C	Université Mohamed Seddik Benyahia	Jijel

Remerciements

Je voudrais témoigner ma profonde reconnaissance à mon encadreur, Monsieur le Docteur ***B. Daoud*** *qui a dirigé les travaux de ce mémoire. Qu'il trouve ici l'expression de mon profond respect et ma gratitude pour son aide.*

Je suis très honoré par la présence, dans le jury, de Monsieur le Professeur ***N.BENSALEM****, je le remercie d'avoir accepté d'en être le président.*

Il m'est agréable de remercier Messieurs :
Le Professeur ***L.NOUI****, le Docteur* ***M.KERADA****, qui m'ont fait l'honneur d'être membres du jury.*

Je tiens particulièrement à remercier mon frère ***ALI*** *pour ses encouragements et son aide pendant ces années.*

ملخـــص

في هذا العمل نحصي كل التشاكلات للزمر ثم نبحث عن القيود التي تربطها عندما تكون الزمرة G كيفية أو تحقق خاصية معطاة.

الكلمات و المهمة: تشاكل قوة، تشاكل تبادلي، تشاكل كثير حدودي.

تصنيف أمريكي للمواضيع: 20E36، 20E45.

Abstract

In this work, we do a survey of all the automorphisms of groups, then, we search the links which exist between them, when the group G is arbitrary or satisfies a given property.

Key words and phrases: Power automorphism, commuting automorphism, polynomial automorphism .

Mathematics Subject Classification: 20E36, 20E45.

Résumé

Dans ce travail, on fait un recensement de tous les automorphismes de groupes. Ensuite, on cherche les liens qui existent entre eux lorsque le groupe G est quelconque ou vérifie une propriété donnée.

Mots et phrases clés: Automorphisme puissance, automorphisme commutant, automorphisme polynomial.

Mathematics Subject Classification: 20E36, 20E45.

Table des matières

Notations **4**

Introduction **6**

1 Généralités **8**

1.1 **Endomorphismes et automorphismes d'un groupe** $(End(G), Aut(G))$ 8

1.1.1 Endomorphismes et automorphismes 8

1.1.2 Automorphismes intérieurs d'un groupe $(Int(G))$ 13

1.1.3 Automorphismes extérieurs et groupe d'automorphismes extérieurs $(Out(G))$ 15

1.1.4 Groupes d'automorphismes d'un groupe cyclique 15

1.1.5 Groupe stabilisateur 15

1.2 **Groupes $\pi-$libres** 16

1.3 **Théorèmes de Sylow** 18

1.4 **Groupes abéliens** 19

1.4.1 Introduction 19

1.4.2 Groupes abéliens de type fini. 21

1.4.3 Groupes abéliens divisibles 21

1.4.4 Structure des groupes abéliens divisibles 23

1.5 **Condition maximale et minimale** 24

1.5.1 Condition maximale sur les sous-groupes 24

1.5.2 Condition minimale sur les sous-groupes 24
1.6 **Groupes Libres** 25
1.6.1 Groupes libres 25
1.6.2 Groupes $\mathcal{B}$-libres 25
1.7 **Groupes polycycliques** 26
1.8 **Groupes de Černikov** 27
1.9 **Groupes résiduellement finis** 28
1.10 **Groupes nilpotents** 29
1.10.1 Conjugaison, Commutants. 29
1.10.2 Groupe dérivé et série dérivée 31
1.10.3 Série centrale ascendante, série centrale descendante d'un groupe. 32
1.10.4 Groupes nilpotents 34
1.11 **Groupes résolubles** 36
1.12 **Groupes métabéliens** 38
1.13 **Groupes d'Engel** 39
1.14 FC-**groupes** 40

2 Les divers automorphismes d'un groupe **41**
2.1 **Introduction** 41
2.2 **Automorphismes sans point fixe** 42
2.3 **Automorphismes presque intérieurs** $(\mathrm{Aut}_{p.i}(G))$ 44
2.4 **Endomorphismes et automorphismes centraux** $(Aut_c(G))$ 45
2.5 **Endomorphismes et automorphismes puissance** $(Paut(G))$ 46
2.5.1 Endomorphismes puissance 46
2.5.2 Groupes faibles et Groupes forts 52
2.6 **Automorphismes fixant tout sous groupe infini** $(Iaut(G))$ 58
2.7 **Automorphismes noethériens**$(\mathbf{Naut}(\mathbf{G}))$ 61
2.8 **Automorphismes commutants**$(\mathbf{A}(\mathbf{G}))$ 62
2.9 **Automorphismes fixant tout sous groupe non normal**$(\mathbf{Aut}_{nn}(\mathbf{G}))$ 75

2.10 **Automorphismes fixant tout sous groupe normal($\mathbf{Aut}_n(\mathbf{G})$)** . . . 80
2.11 **Endomorphismes polynomiaux ($\mathbf{End}_p(\mathbf{G})$)** 84
2.12 **Groupes n-abéliens** 88
2.12.1 Classification des groupes n-abéliens 88
2.12.2 Groupes n-abéliens généralisés 92

3 Compléments **94**

Bibliographie **97**

Notations

$F(G)$: L'ensemble des applications de G dans G.

$End(G)$: L'ensemble des endomorphismes de G.

$Aut(G)$: Le groupe des automorphismes de G .

T_g : L'automorphisme intérieur de G induit par g .

$Int(G)$: Le groupe des automorphismes intérieurs de G.

$G^{(i)}$: Le i-ème groupe dérivé de G.

$Z_i(G)$: Le i-ème terme de la série centrale ascendante de G.

$\gamma_i(G)$: Le i-ème terme de la série centrale descendante de G.

$(-1+\alpha)$: L'endomorphisme dérivé de α, $(-1+\alpha)(x) = x^{-1}\alpha(x)$.

$[x,\alpha]$: $[x,\alpha] = x^{-1}\alpha(x)$.

$Aut_{p.i}(G)$: Le groupe des automorphismes presque intérieurs de G.

$Aut_c(G)$: Le groupe des automorphismes centraux de G.

$Paut(G)$: Le groupe des automorphismes puissance de G.

$Aut_u(G)$: L'ensemble des automorphismes puissance universels de G.

$Naut(G)$: Le groupe des automorphismes noethériens de G.

$Iaut(G)$: Le groupe des automorphismes de G fixant tout sous groupe infini.

$A(G)$: L'ensemble des automorphismes commutants de G.

$A_1(G)$: L'ensemble des automorphismes permutants de G.

$Cent(G)$: Le groupe des automorphismes centralisateurs de G.

$Aut_n(G)$: Le groupe des automorphismes normaux de G.

$Aut_{nn}(G)$: Le groupe des automorphismes non normaux de G.

$End_p(G)$: L'ensemble des endomorphismes polynomiaux de G.

$Aut_p(G)$: L'ensemble des automorphismes polynomiaux de G.

$Aut_p^*(G)$: Le groupe des automorphismes polynomiaux inversibles.

$P(G) =< Aut_p(G) >$: Le sous-groupe de $Aut(G)$ engendré par les automorphismes polynomiaux de G.

Introduction

La notion de groupe est apparue au début du dix-neuvième siècle lorsque *Evariste Galois* a montré, en utilisant les groupes, qu'une équation de degré n, $a_n x^n + ... a_1 x + a_0 = 0$ où $a_i \in G$ n'est résoluble par radicaux que si un certain groupe (appelé aujourd'hui "groupe de Galois") est résoluble.

Les mathématiciens des siècles précédents se sont acharnés mais vainement à résoudre une équation du type précédent où $n \geq 5$. Ils n'ont trouvé aucune formule donnant les racines de cette équation en fonction des coefficients a_i $(0 \leq i \leq n)$. C'est finalement *E.Galois* qui a élucidé ce mystère en prouvant qu'une équation de degré n

$$a_n x^n + ... a_i x + a_0 = 0 \quad (a_i \in C)$$

n'est pas résoluble par radicaux pour $n \geq 5$, c'est à dire qu'il n'existe aucune formule donnant les racines en fonction des coefficients. Cela vient du fait que le groupe symétrique S_n n'est pas résoluble pour $n \geq 5$. Depuis *Galois*, la théorie des groupe s'est tellement développée qu'elle s'est divisée en plusieurs filières. Donc, le chapitre I est consacré uniquement au rappel des connaissances de bases de la théorie des groupes : groupes abéliens, nilpotents, résolubles, polycycliques, d'Engel,...etc, ainsi que les propriétés des groupes (condition maximale, minimale, les théorèmes de Sylow, la π liberté ...etc). La majorité des théorèmes et définitions ont été puisés du livre de base (D.J.Robinson "A course in the theory of groups").

Dans le chapitre II, on s'intéresse aux endomorphismes et automorphismes de groupes. Un endomorphisme de G est une application $\varphi : G \longrightarrow G$ qui vérifie la propriété suivante $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ pour tous x et y dans G. C'est *Christopher D.H Cooper* qui a développé la théorie des automorphismes de groupe. La parution de son article "*Power automorphisms of a group*" en *1968* a suscité un vif intérêt parmi les chercheurs mathématéciens en théorie des groupes ; en effet il a prouvé que tout automorphisme puissance d'un groupe est central ; la démonstration de ce résultat est tellement difficile qu'elle a été délaissée. La plupart des résultats cités dans le chapitreII ont été puisés dans les

articles publiés par les auteurs *C.D.H Cooper* [5], *Corsi Tani* et *Rinaldi Bonafede* [6], *M.Deaconescu*, *G.Silberbeg* and *G.L.Walls* [10], *Endimioni* [11] [12] [13] [14].

Le chapitre III est un travail que j'ai fait en collaboration avec mon encadreur *Mr B.Daoud.* Nous montrons d'une manière differente un résultat d'*Endimioni.*

Chapitre 1

Généralités

Dans ce premier chapitre, il nous a paru "nécessaire" de rappeler certaines notions de base de la théorie des groupes ; dont la plus grande partie sera consacrée aux proptiétés concernant les endomorphismes et automorphismes de groupes.

1.1 Endomorphismes et automorphismes d'un groupe $(End(G), Aut(G))$

1.1.1 Endomorphismes et automorphismes

Définition 1.1.1.1

Soient G et H deux groupes, "un homomorphisme" *de groupes de G dans H est une application $f : G \to H$ telle que :*

$$\forall (x,y) \in G^2 \ : f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$$

Le composé $x \cdot y$ est dans G, par contre $f(x) \cdot f(y)$ est dans H.

L'ensemble des homomorphismes d'un groupe G dans un groupe H sera noté $Hom(G, H)$.

Un homomorphisme d'un groupe G dans lui même est appelé "endomorphisme" *de G. L'ensemble des endomorphismes d'un groupe G sera noté $End(G)$.*

Un homomorphisme injectif d'un groupe G dans un groupe H est appelé "monomorphisme".

Un homomorphisme surjectif d'un groupe G dans un groupe H est appelé "épimorphisme".

Un homomorphisme bijectif d'un groupe G dans un groupe H est appelé "isomorphisme". *Les deux groupes G et H sont dits* "isomorphes", *s'il existe un isomorphisme de G dans H, dans ce cas on écrit $G \simeq H$.*

Un endomorphisme d'un groupe G dans lui même est appelé "automorphisme" *de G. L'ensemble des automorphismes d'un groupe G sera noté $Aut(G)$.*

Définition 1.1.1.2 "Image et noyau d'un homomorphisme"

Soit $f : G \to H$ un homomorphisme. L'ensemble $\{f(x)/x \in G\}$ est appelé " image de f *", il sera noté* $\mathrm{Im}(f)$. *L'ensemble $\{x \in G \mid f(x) = 1_H\}$ est appelé "* noyau de f *", il sera noté* $\ker(f)$. *Donc :*

$$\mathrm{Im}\,(f) = \{f(x) \mid x \in G\} \subseteq H$$
$$\ker(f) = \{x \in G; f(x) = 1_H\} \subseteq G$$

Théorème 1.1.1.3

i) Le composé de deux homomorphismes -s'il existe- est un homomorphisme.

ii) L'application réciproque d'un isomomorphisme est un isomomorphisme.

Preuve

i) Soient $G \xrightarrow{f} H \xrightarrow{g} K$ deux homomorphismes alors pour tout $(x, y) \in G^2$:

$$(g \circ f)(x \cdot y) = g[f(xy)] = g[f(x)f(y)] = g[f(x)]\, g[f(y)] = (g \circ f)(x) \cdot (g \circ f)(y).$$

ii) Soit $G \xrightarrow{f} H$ un isomomorphisme alors pour tout $(x, y) \in H^2$ il existe $(g, h) \in G^2$ tel que $x = f(g)$ et $y = f(h)$. Donc: $f^{-1}(x \cdot y) = f^{-1}[f(g) \cdot f(h)] = f^{-1}[f(g \cdot h)] = g \cdot h = f^{-1}(x) \cdot f^{-1}(y)$. ■

Conséquences 1.1.1.4

i) Si G est un groupe alors : $(End(G),\circ)$ est un semi-groupe et $(Aut(G),\circ)$ est un sous groupe du groupe des permutations de G.

ii) Dans tout ensemble de groupes la relation '$\simeq$' est une relation d'équivalence.

Définition 1.1.1.5 "Sous-groupe totalement invariant et sous-groupe caractéristique"

Soient G un groupe et H un sous-groupe de G. On dit que H est un sous-groupe de G "totalement invariant" *(ou $End-$permis) et on note $H \leq^e G$, si :*

$$\forall f \in End(G) : \ f(H) \leq H$$

et on dit que H est un sous-groupe "caractéristique" *(ou $Aut-$permis) et on note $H \leq^a G$, si :*

$$\forall f \in Aut(G) : \ f(H) \leq H$$

Théorème 1.1.1.6

i) Tout sous-groupe totalement invariant (ou caractéristique) est un sous-groupe normal.

ii) Les relations $\leq^e, \leq^a$ sont transitives (à la différence de la relation $\lhd$) i.e :

$$\forall H, K \in L(G) : \ (H \leq^e K \ et \ K \leq^e G) \Rightarrow (H \leq^e G \ )$$

$$\forall H, K \in L(G) : \ (H \leq^a K \ et \ K \leq^a G) \Rightarrow (H \leq^a G \ )$$

iii) $\forall H, K \in L(G) :$

$$(H \leq^a K \ et \ K \lhd G) \Rightarrow (H \lhd G \ )$$

Preuve

i) Soit H un sous-groupe totalement invariant (resp. caractéristique) d'un groupe G. Pour tout $g \in G$, l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi_g : & G & \to & G \\ & x & \to & \varphi_g(x) = g^{-1}xg \ = x^g \end{array}$$

est un endomorphisme (resp. automorphisme) de G. Alors $\varphi_g(H) = g^{-1}Hg \leq H$, d'où H est normal dans G.

ii) Soient H, K deux sous-groupes d'un groupe G tels que $H \leq^e K$ et $K \leq^e G$ (resp. $H \leq^e K$ et $K \leq^a G$), et soit $f \in End(G)$ (resp.$f \in Aut(G)$). Comme $f(K) \leq K$, alors $f\mid_K \in End(K)$ (resp. $f\mid_K \in Aut(G)$), d'où $f\mid_K (H) = f(H) \leq H$, donc $H \leq^e G$ (resp. $H \leq^a G$).

ii) Soient H, K deux sous-groupes d'un groupe G tels que H soit caractéristique et K normal dans G. Pour tout $g \in G$, l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi_g : & K & \to & K \\ & x & \to & \varphi_g(x) = g^{-1}xg \end{array}$$

est un automorphisme de K, d'où $\varphi_g(H) = g^{-1}Hg \leq H$, donc $H \lhd G$. ■

Soit G un groupe alors l'ensemble des applications de G dans G muni de la composition des applications est un "semi-groupe" *qui possède un élément neutre Id_G (Un semi-groupe qui possède un élément neutre est dit* "Monoide"*).*

Soient α,β deux applications ; la somme de α et β est définie par :

$$\begin{array}{rccc} \alpha+\beta : & G & \to & G \\ & x & \to & \alpha+\beta(x) = \alpha(x)\beta(x) \end{array}$$

Remarque 1.1.1.7

L'ensemble des applications muni de la loi de composition est un groupe, l'élément

neutre est :

$$\begin{array}{rccc} Id_G = 0: & G & \rightarrow & G \\ & x & \rightarrow & 0(x) = x \end{array}$$

L'inverse de α est :

$$\begin{array}{rccc} -\alpha: & G & \rightarrow & G \\ & x & \rightarrow & (-\alpha)(x) = \alpha(x)^{-1} \end{array}$$

Notation 1.1.1.8

Notons $F(G)$ l'ensemble des applications de G dans G.

Remarque 1.1.1.9

On remarque que $\{Id_G\} \subseteq End(G) \subseteq F(G)$ et que $(End(G), \circ)$ est un "sous − monoide" du monoide $F(G)$, par contre $(End(G), +)$ n'est pas un sous-groupe du groupe $F(G)$. Si α,β sont deux éléments de $End(G)$, $\alpha + \beta$ n'est pas nécessairement un élément de $End(G)$.

Théorème 1.1.1.10

Etant donné un groupe G, pour tous $\alpha, \beta \in End(G)$. On a $\alpha + \beta \in End(G)$ si, et seulement si, les éléments de $Im(\alpha)$ et les éléments de $Im(\beta)$ commutent. Dans ce cas on a $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

Preuve

Soient G un groupe et $\alpha, \beta \in End(G)$. Supposons que $\alpha + \beta \in End(G)$, et soient $x, y \in G$. $\alpha(y) \in \mathrm{Im}(\alpha)$ et $\beta(x) \in \mathrm{Im}(\beta)$.

On a d'une part $(\alpha + \beta)(xy) = \alpha(xy)\beta(xy) = \alpha(x)\alpha(y)\beta(x)\beta(y)$ d'autre part $(\alpha + \beta)(xy) = (\alpha + \beta)(x)(\alpha + \beta)(y) = \alpha(x)\beta(x)\alpha(y)\beta(y)$. Donc

$$\alpha(x)\alpha(y)\beta(x)\beta(y) = \alpha(x)\beta(x)\alpha(y)\beta(y)$$

d'où

$$\alpha(y)\beta(x) = \beta(x)\alpha(y).$$

Supposons que les éléments de $\mathrm{Im}(\alpha)$ commutent avec les éléments de $\mathrm{Im}(\beta)$, alors pour tous $x, y \in G$; $(\alpha+\beta)(xy) = \alpha(xy)\beta(xy) = \alpha(x)\alpha(y)\beta(x)\beta(y) = \alpha(x)\beta(x)\alpha(y)\beta(y)$ $= (\alpha+\beta)(x)(\alpha+\beta)(y)$. De plus $(\alpha+\beta)(x) = \alpha(x)\beta(x) = \beta(x)\alpha(x) = (\beta+\alpha)(x)$; ce qui montre que $\alpha+\beta = \beta+\alpha$.

■

1.1.2 Automorphismes intérieurs d'un groupe $(Int(G))$

Théorème 1.1.2.1.

Etant donné un groupe G, pour tout $g \in G$ l'application :

$$\begin{array}{rccc} T_g: & G & \to & G \\ & x & \to & g^{-1}x\ g = x^g \end{array}$$

est un automorphisme de G, dit "automorphisme intérieur"*. L'ensemble des automorphismes intérieurs est un sous-groupe normal de $Aut(G)$* noté *$Int(G)$.*

Preuve

Soient G un groupe et $a \in G$, alors pour tous $x, y \in G$; $T_g(xy) = (xy)^g = x^g y^g = T(x)T(y)$, donc $T_g \in End(G)$ *on a aussi* $\ker(T_g) = \{x \in G \mid x^g = 1\}$ et pour tout $y \in G$; $T_g(gyg^{-1}) = y$, d'où T_g est un automorphisme de G.

Remarque 1.1.2.2

Soit $H = \{T_g \mid g \in G\}$, on a :

$-$ $Id_G = T_1 \in H$.

$-$ $\forall (a,b) \in G^2 : T_a \circ T_b = T_{ba} \in H$.

$-$ $\forall g \in G : (T_g)^{-1} = f_{g^{-1}} \in H$.

$-$ $\forall T \in Aut(G), \forall T_g \in H : T^{-1} \circ T_g \circ T = T_{T^{-1}(a)} \in H$.

Donc H est un sous-groupe normal dans $Aut(G)$.

Définition 1.1.2.3 "Groupes d'automorphismes intérieurs d'un groupe"

Soit G un groupe, le groupe $\{T_g \mid a \in G\}$ est appelé "le groupe des automorphismes intérieurs" de *G et noté $Int(G)$.*

Théorème 1.1.2.4

Soit G un groupe alors :

i) $Z(G)$ est un sous-groupe caractéristique de G qui vérifie

$$(G \text{ est un groupe abélien}) \Leftrightarrow (G = Z(G)).$$

ii) $\frac{G}{Z(G)} \simeq Int(G)$.

Preuve

Soit G un groupe.

i) Il est clair que $1 \in Z(G)$. Soient $x, y \in Z(G)$; alors pour tout $g \in G$; $(xy)g = x(yg)$ $= x(gy) = (xg)y = (gx)y = g(xy)$, d'où $xy \in Z(G)$. D'autre part pour tout $g \in G : x^{-1}g$ $= (x^{-1}g)xx^{-1} = x^{-1}xgx^{-1} = gx^{-1}$, alors $x^{-1} \in Z(G)$. Donc $Z(G) \leq G$.

Soient maintenant $\varphi \in Aut(G)$, $x \in Z(G)$ et $g \in G$; alors il existe $a \in G$ tel que $g =$ $\varphi(a)$; d'où $\varphi(x)g = \varphi(x)\varphi(a) = \varphi(xa) = \varphi(ax) = \varphi(a)\varphi(x) = g\varphi(x)$; alors $\varphi(x) \in Z(G)$; donc $\varphi(Z(G)) \leq Z(G)$ et $Z(G)$ est un sous-groupe caractéristique dans G.

ii) D'après le théorème précédent, l'application :

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & G & \rightarrow & Int(G) \\ & g & \rightarrow & T_{g^{-1}} \end{array}$$

où

$$\begin{array}{rccc} T_g : & G & \rightarrow & G \\ & x & \rightarrow & x^g = g^{-1}xg \end{array}$$

est un épimorphisme dont le noyau est :

$\ker(\Psi) = \{g \in G \mid \Psi(g) = Id_G\} = \{g \in G \mid f_{g-1} = Id_G\} = \{g \in G \mid gxg^{-1} = x; \forall x \in G\}$ $= Z(G)$. Alors $\frac{G}{Z(G)} \simeq Int(G)$. ■

Conséquence 1.1.2.5

Pour tout groupe G, on a : ($Int(G)$ est fini) $\Leftrightarrow$ ($Z(G)$ est d'indice fini dans G).

1.1.3 Automorphismes extérieurs et groupe d'automorphismes extérieurs $(Out(G))$

Definition 1.1.3.1.

Soit G un groupe, un automorphisme de G qui n'est pas intérieur est dit "extérieur"*.*

Le groupe quotient $\frac{Aut(G)}{Int(G)}$ est appelé "le groupe d'automorphismes extérieurs de G " *; qui est noté $Out(G)$.*

1.1.4 Groupes d'automorphismes d'un groupe cyclique

Théorème 1.1.4.1

Soit G un groupe cyclique. Alors :

i) Si G est infini ; $Aut(G) = \{Id_G, \varphi\}$, où

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & G & \to & G \\ & x & \to & x^{-1} \end{array}$$

ii) Si G est fini d'ordre n : $Aut(G) = \{Id_G, \varphi_k \mid 1 \leq k \leq n \text{ et } k \wedge n = 1\}$, où

$$\begin{array}{rccc} \varphi_k & G & \to & G \\ & x & \to & x^k \end{array}$$

1.1.5 Groupe stabilisateur

Définition 1.1.5.1

Etant donné un groupe G,soit

$$(\Sigma) : G_0 = 1 \subseteq G_1 \subseteq G_2 ..... \subseteq G_i \subseteq G_{i+1} ..... \subseteq G_r = G$$

une chaîne finie de sous groupes du groupe G; un automorphisme α de G "stabilise"

la chaîne (Σ) *si :*

(i) $\alpha(G_i) = G_i$ *pour tout* $i; 1 \leq i \leq r$.

(ii) $x^{-1}\alpha(x) \in G_i$ *pour tout* x *de* G_{i+1} *;* $1 \leq i \leq r$.

Définition 1.1.5.2

L'ensemble de tous les automorphismes de G *qui stabilisent la chaîne* (Σ) *forme un sous groupe de* $Aut(G)$ *appelé* "Groupe stabilisateur de (Σ)".

Théorème 1.1.5.3[*kaluznin*]

Etant donné un groupe G, *soit* **:**

$$(\Sigma) : G_0 = 1 \leq G_1 \leq G_2 \leq .....G_i \leq G_{i+1}..... \leq G_r = G$$

une chaîne finie de sous groupes normaux du groupe G *et soit* $stab(G)$ *le groupe stabilisateur de* (Σ) *alors :*

le groupe $stab(G)$ *est nilpotent de classe au plus* $(r-1)$; pour la démonstration voir [22, théorème 1.C.1].

Remarque 1.1.5.4

Si dans la chaîne précédente (Σ), G_i *est seulement normal dans* G_{i+1} *sans être nécessairement normal dans* G $(1 \leq i \leq r)$ *alors, P.Hall a montré que le groupe* $stab(G)$ *est nilpotent de classe au plus* $\frac{1}{2}r(r-1)$.

1.2 Groupes $\pi-$libres

Définition 1.2.1 "$\pi-$nombre"

Soit π *un ensemble non vide de nombres premiers ; un entier positif est dit "*$\pi -$ *nombre" si ses diviseurs premiers sont dans* π.

Définition 1.2.2 "$\pi-$élément"

Un élément d'ordre fini g *d'un groupe* G *est dit "*$\pi -$ *élément" si son ordre est un* $\pi -$ *nombre .*

Définition 1.2.3 "$\pi-$groupe"

Soit G un groupe ; si tout élément de G est un $\pi-$élément, G est dit "$\pi-$groupe".

Remarque 1.2.4

Dans le cas où $\pi=\{p\}$(p premier) on va parler d'un "$p-$élément"(son ordre est une puissance de p), et d'un "$p-$groupe"(tous ses éléments sont d'ordre puissance de p)

Définition 1.2.5 "$\pi'-$nombre"

Soit π un ensemble non vide de nombres premiers ; un entier positif est dit "$\pi'-$nombre" si ses diviseurs premiers n'appartiennent pas à π.

Définition 1.2.6 "$\pi'-$élément"

Un élément g de G est dit "$\pi'-$élément" si son ordre est un $\pi'-$nombre.

Remarque 1.2.7

Dans le cas où $\pi=\{p\}$ (p premier) on va parler d'un "$p-$élément "(les diviseurs premiers de son ordre n'appartiennent pas à $\pi=\{p\}$).

Définition 1.2.8 "Groupes $\pi-$libres"

Un groupe G est dit "$\pi-$libre" s'il n'admet aucun $\pi-$élément.

Remarque 1.2.9

Pour $(n\geq 2)$ on note π_1 l'ensemble des nombres premiers divisant $n\,(n-1)\,/2$ et π_2 l'ensemble des nombres premiers inferieurs ou égaux à n.

Propriétés 1.2.10

Soit π un ensemble de nombres premiers et soit G un groupe dont le centre $Z\,(G)$ est $\pi-$libre alors :

(i) Les groupes suivants :

$Z_{i+1}\,(G)\,/\,Z_i\,(G)$, $Z_i\,(G)$ $(i\in N)$et l'hypercentre de G sont tous $\pi-$libres.

(ii) Si H est un sous groupe normal périodique de G, et *si G est $\pi-$libre, G/H est aussi $\pi-$libre.*

Définition 1.2.11 "p-Groupe extra spécial"

On dit qu'un p-groupe fini G est "extra-spécial" *si G' et $Z(G)$ coincident et sont d'ordre p.*

On dit qu'un p-groupe fini G est "extra-spécial" *généralisé si $Z(G)$ est cyclique et G' d'ordre p.*

voir [25, p. 145]

Proposition 1.2.12

Tout groupe non abélien d'ordre p^3 est un groupe extra-spécial [25, exercice 5.3.6].

Définition 1.2.13 "Produit central"

Un groupe G est dit "produit central" *de ses sous groupes normaux $G_1, G_2, ..., G_n$* si :

(i) $G = G_1G_2.....G_n$

(ii) $[G_i, G_j] = 1$ *pour tout* $i \neq j$.

(iii) $G_i \cap \prod_{j \neq i} G_j = Z(G)$ *pour tout i.*

Proposition 1.2.13

Un $p-$ groupe extra-spécial est le produit de n sous groupes non abéliens d'ordre p^3 et son ordre est égale à p^{2n+1}.

Le produit central fini de groupes non abéliens d'ordre p^3 est un $p-$groupe extra-spécial [25, 5.3.8].

1.3 Théorèmes de Sylow

Définition 1.3.1

Soit p un nombre premier, on appelle "p-sous-groupe de Sylow" *d'un groupe G, tout p-sous-groupe maximal de G, i.e H est un p-sous-groupe de Sylow d'un groupe G si,et seulement si,*

i) H est un p-sous-groupe de G.

ii) Pour tout p-sous-groupe K de G :

$$(H \leq K) \Rightarrow (\ K = H \text{ ou } K = G\ )$$

Remarque 1.3.2

Si G est un groupe fini d'ordre $p^k m$, où p ne divise pas m (p étant un nombre premier*), alors H est un p-sous-groupe de Sylow de G si $|H| = p^k$.*

Théorèmes de Sylow 1.3.3

Soient G un groupe fini et p un nombre premier divisant l'ordre de G ($|G| = p^k m$), où p ne divise pas m.

i) Pour toute puissance p^r $(0 \leq r \leq k)$, il existe un sous-groupe d'ordre p^r.

ii) Si p^{r+1} divise l'ordre de G, tout sous-groupe d'ordre p^r de G est inclus dans un sous groupe d'ordre p^{r+1}.

iii) Tous les $p-$sous groupes de Sylow de G sont conjugués dans G.

iv) *Si n_p est le nombre des p-*sous-*groupes de Sylow de G, alors n_p est congru à* 1 *modulo p et divise l'ordre de G.*

Corollaire 1.3.4

Un p-sous-groupe de Sylow est normal dans G si, et seulement si, il est l'unique p-sous-groupe de Sylow.

1.4 Groupes abéliens

1.4.1 Introduction

Théorème 1.4.1.1

Soient G un groupe abélien et $T = \{x \in G \mid |x| < \infty\}$ l'ensemble des éléments de torsion de G alors :

i) T est un sous-groupe de G et $T = \underset{p\ premier}{Dr}\ G_p$, où

$$G_p = \{x \in G \mid |x| \text{ est fini, et une puissace de } p\}$$

ii) $\frac{G}{T}$ est un groupe abélien sans torsion.

Preuve

Il est clair que T est un sous groupe de G. Soient $x \in T$; $|x| = n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$ et

$n_i = \frac{n}{p_i^{\alpha_i}}$. Alors pour tout $1 \leq i \leq k$; $|n_i x| = p_i^{\alpha_i}$; et comme les n_i sont premiers entre eux, il existe $l_1, l_2, ..., l_k \in Z$ tels que $l_1 n_1 + l_2 n_2 + ... + l_k n_k = 1$. Donc

$$x = l_1 x_1 + l_2 x_2 + ... + l_k x_k$$

où $x_i = n_i x \in G_{p_i}$, alors $T =< G_p / p \ premier >$. D'autre part pour tout nombre premier q ; $G_q \cap G_p / p \ premier$ et $q \neq p >= \{0\}$. Alors $T = \underset{p \ premier}{Dr} G_p$. ■

Corollaire 1.4.1.2

Si G est un groupe abélien fini d'ordre $p_1^{n_1} p_2^{n_2} ... p_k^{n_k}$, où les p_i sont des nombres premiers deux à deux distincts, alors :

$$G = G_1 \oplus G_2 \oplus ... \oplus G_k$$

où G_i est l'unique p_i sous-groupe de Sylow de G.

Preuve

Il est clair que, pour tout nombre premier p, il existe i $(1 \leq i \leq k)$ tel que $G_p = \{x \in G \mid |x| \ \ soit \ fini \ est \ une \ puissance \ de \ p\} = G_{p_i}$; d'après le théorème précédent

$$G = G_{p_1} \oplus G_{p_2} \oplus ... \oplus G_{p_k}$$

D'autre part si G_i est l'unique p_i sous-groupe de Sylow de G, alors, il est clair que, $G_i = G_{p_i}$, d'où :

$$G = G_1 \oplus G_2 \oplus ... \oplus G_k$$

■

1.4.2 Groupes abéliens de type fini.

Définition 1.4.2.1 "Ensemble d'éléménts indépendants"

Un ensemble non vide A d'un groupe abélien G est dit "indépendant" *si,* $\forall a_1, ..., a_r \in A, \forall n_1, ..., n_r \in Z$:

$$(n_1 a + ... + n_r a_r = 0) \Rightarrow (n_1 a_1 = ... = n_r a_r = 0)$$

Définition 1.4.2.2 "Base d'un groupe abélien s-élémentaires"

Un ensemble non vide A d'un groupe abélien G est dit "une base" *de G, s'il est indépendant et générateur de G.*

Lemme 1.4.2.3

Soient G un groupe abélien et A une partie non vide de G, alors A forme une base de G, si, et seulement si, G est la somme directe des groupes cycliques engendré par les éléments de A.

Remarque 1.4.2.4

Soit G un groupe abélien de type fini à $r-$générateurs, alors G possède une base de cardinal au plus égale à r.

Corollaire 1.4.2.5

Soit G un groupe abélien. Alors G est "de type fini", *si, et seulement si, G est la somme directe d'un nombre fini de groupes cycliques infinis ou finis d'ordre une puissance d'un nombre premier.*

1.4.3 Groupes abéliens divisibles

Définition 1.4.3.1.

Un élément g d'un groupe abélien G est dit "divisible" *par l'entier positif m, s'il existe $g_1 \in G$ tel que $g = mg_1$. Autrement dit si l'équation $g = mx$ admet au moins une solution dans G pour tout entier positif m*; donc *g est* "divisible" *par m si, et seulement si, $g \in mG$.*

Remarques 1.4.3.2

1) Soient G un groupe abélien et m un entier positif quelconque. Comme $mG \leq G$, on a :

- L'élément neutre de G est divisible par m.

- Si g_1, g_2 sont deux éléments divisibles par m, il en est de même pour $g_1 g_2$.

- Si g est un élément divisible par m, il est de même pour $-g$.

2) Si un élément g de G est divisible par deux entiers positifs premiers entre eux, alors il est divisible par leur produit.

Définition 1.4.3.3 "Groupe divisible"

Un groupe abélien G est dit groupe "divisible" *si tout élément de G est divisible par tout entier positif m.*

Lemme 1.4.3.4

Soit G un groupe abélien. Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

i) G est un groupe divisible.

ii) $G = mG$, $\forall m \in N^*$.

iii) $G = p^r G$, $\forall p$ premier et $r \in N$.

Remarque 1.4.3.5

L'image homomorphe d'un groupe abélien divisible est un groupe divisible.

Donc les groupes abéliens divisibles forment une classe de groupes H-fermée, mais elle n'est pas une classe S-fermée.

Proposition 1.4.3.6

Soit p un nombre premier, et soit

$$G =< a_1, a_2, ..., a_i, ... \mid a_1^p = 1,\ a_{i+1}^p = a_i, a_i a_j = a_j a_i >$$

i) $\forall i \geq 1$ on a : $|a_i| = p^i$, $\langle a_i \rangle \lneqq \langle a_{i+1} \rangle$ (i.e $\langle a_1 \rangle \lneqq \langle a_2 \rangle \lneqq ... \lneqq \langle a_i \rangle \lneqq \langle a_{i+1} \rangle \lneqq ...$) et $G = \bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} \langle a_i \rangle$.

ii) $\forall i \geq 1$; G possède un seul sous-groupe d'ordre p^i.

iii) G est un $p-$groupe abélien divisible infini.

Définition 1.4.3.7 "Groupe abélien injectif"

Un groupe abélien G est dit "injectif" *si pour tout monomorphisme $\mu : H \to K$ et tout homomorphisme $\alpha : H \to G$ il existe un homomorphisme $\beta : K \to G$ tel que $\beta\mu = \alpha$, autrement dit le diagramme :*

$$\begin{array}{ccc} H & \underset{\rightarrow}{\mu} & K \\ \alpha & \searrow & \downarrow \beta \\ & & G \end{array}$$

est commutatif, où H et K sont deux groupes abéliens.

Théorème 1.4.3.8[*Baer*]

Un groupe abélien est injectif si, et seulement si, il est divisible.

Remarque 1.4.3.9

Un sous-groupe divisible D d'un groupe abélien G est toujours un facteur direct dans G, i.e G possède un sous-groupe E tel que $G = D \oplus E$.

Définition 1.4.3.10 "Groupe abélien réductible"

Un groupe abélien est dit "réductible" *s'il ne contient aucun sous-groupe divisible non trivial.*

Proposition 1.4.3.11

Soient G un groupe abélien et $\{D_i\}_{i\in I}$ une famille de sous-groupes divisibles de G. Alors $D =< D_i \mid i \in I >$ est un groupe divisible.

Corollaire 1.4.3.12[*Baer*]

Soit G un groupe abélien ; alors $G = D \oplus E$, où D est le plus grand sous-groupe divisible de G et E est un sous groupe réductible.

1.4.4 Structure des groupes abéliens divisibles

Lemme 1.4.4.1

Soient G un groupe abélien divisible et T le sous-groupe de torsion de G, alors T est divisible.

Théorème 1.4.4.2

Un groupe G est un groupe "quasi-cyclique" *si, et seulement si, il est abélien infini dont tout sous-groupe propre est fini.*

1.5 Condition maximale et minimale

1.5.1 Condition maximale sur les sous-groupes

Définition 1.5.1.1 "condition maximale sur les sous-groupes"

On dit qu'un groupe G vérifie "la condition maximale" *(ou simplement Max) si tout ensemble non vide de sous-groupes de G possède un élément maximal.*

On dit qu'un groupe G vérifie "la condition maximale" *sur les sous-groupes normaux (ou simplement $Max - n$) si tout ensemble non vide de sous-groupes normaux de G possède un élément maximal.*

On dit qu'un groupe G vérifie "la condition maximale" *sur les sous-groupes sous-normaux (ou simplement $Max - s$) si tout ensemble non vide de sous-groupes sous-normaux de G possède un élément maximal.*

Donc un groupe vérifie Max ($Max-n$ ou $Max-s$) si, et seulement si, toute chaîne croissante de ses sous-groupes (normaux ou sous-normaux) est stationnaire.

1.5.2 Condition minimale sur les sous-groupes

Définition 1.5.2.1 "condition minimale sur les sous-groupes"

On dit qu'un groupe G vérifie "la condition minimale" *(ou simplement Min) si tout ensemble non vide de sous-groupes de G possède un élément minimal.*

On dit qu'un groupe G vérifie "la condition minimale" *sur les sous-groupes normaux (ou simplement $Min - n$) si tout ensemble non vide de sous-groupes normaux de G*

possède un élément minimal.

On dit qu'un groupe G vérifie "la condition minimale" *sur les sous-groupes sous-normaux (ou simplement $Min-s$) si tout ensemble non vide de sous-groupes sous-normaux de G possède un élément minimal.*

Donc un groupe vérifie Min ($Min-n$ ou $Min-s$) si, et seulement si, toute chaîne décroissante de ses sous-groupes (normaux ou sous-normaux) est stationnaire.

1.6 Groupes Libres

1.6.1 Groupes libres

Définition 1.6.1.1

Soient F un groupe et $\sigma : X \longrightarrow F$ une application d'un ensemble non vide X dans le groupe F. On dit que (F, σ) est "libre" *sur X, si pour tout groupe G et toute application $\alpha : X \longrightarrow G$ il existe un unique homomorphisme $\beta : F \longrightarrow G$ vérifiant $\beta\sigma = \alpha$, c'est à dire le diagramme :*

$$\begin{array}{ccc} X & \underrightarrow{\sigma} & F \\ \alpha & \searrow & \downarrow \beta \\ & & G \end{array}$$

est commutatif. Donc le groupe F est libre, s'il existe un ensemble non vide X et une application $\sigma : X \longrightarrow F$ telle que (F, σ) soit libre sur X.

Remarque 1.6.1.2

L'application σ dans la définition précédente est nécessairement injetive.

1.6.2 Groupes $\mathcal{B}$-libres

Définition 1.6.2.1

Soient $\mathcal{B}$ une variété de groupes, F un $\mathcal{B}$-groupe, X un ensemble non vide et $\sigma : X \longrightarrow F$ une application de X dans F. On dit que F où plus exactement (F, σ) est "$\mathcal{B}$-

libre" *sur X (où libre dans la variété $\mathcal{B}$), si pour tout $\mathcal{B}$-groupe G et toute application $\alpha : X \longrightarrow G$ il existe un unique homomorphisme $\beta : F \longrightarrow G$ vérifiant $\beta\sigma = \alpha$, cette dernière équation veut dire que le diagramme :*

$$\begin{array}{ccc} X & \underrightarrow{\sigma} & F \\ \alpha & \searrow & \downarrow \beta \\ & & G \end{array}$$

est commutatif. Un groupe $\mathcal{B}$-libre est dit aussi $\mathcal{B}$-groupe libre.

Si $\mathcal{B}$ est la variété de tous les groupes, on trouve la définition des groupes libres.

1.7 Groupes polycycliques

Définition 1.7.1

Un groupe G est dit "polycyclique" *s'il admet une série finie cyclique,* i.e *une série finie dont chaque facteur est un groupe cyclique.*

Proposition 1.7.2

Soit G un groupe, $H \leq G$ et $N \lhd G$. Alors :

(1) *Si G est polycyclique, H est polycyclique .*

(2) *Si G est polycyclique, G/N est polycyclique..*

(3) *Si N et G/N sont polycycliques, G est polycyclique.*

d'où la propriété "polycyclique" *est $S-fermée$, $H-fermée$ et $P-fermée$.*

Lemme 1.7.3

Tout groupe abélien de type fini est polycyclique.

Preuve

Soit G un groupe abélien de type fini. Donc $G = \langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle$ pour certains $x_1, x_2, ..., x_n$ de G. Posons $G_0 = 1$ et $G_i = \langle x_1, x_2, ..., x_i \rangle$ où $1 \leq i \leq n$; donc $G_i = \langle x_i \rangle\, G_{i-1}$ car G est abélien. On trouve la série $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd .... \lhd G_{n-1} \lhd G_n = G$ dont les facteurs : $G_i/G_{i-1} = \langle x_i \rangle\, G_{i-1}/G_{i-1} = \langle x_i G_{i-1} \rangle$ sont cycliques. D'où G est polycyclique. ■

Proposition1.7.4

Soit G un groupe alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(i) G vérifie max.

(ii) Tout sous-groupe de G est de type fini.

(iii) Il existe un sous-groupe N normal de G tel que N et G/N qui vérifient max

Théorème 1.7.5

Tout groupe est polycyclique si, et seulement si, il est résoluble et s'il vérifie la condition maximale.

1.8 Groupes de Černikov

Définition 1.8.1

*On dit qu'un groupe est de "*Černikov*", s'il est une extension finie d'un groupe abélien vérifiant min ;* i.e *s'il existe un sous-groupe $A \lhd G$ tel que A soit abélien vérifiant min et G/A soit fini.*

Propriété 1.8.2

Tout groupe de Černikov vérifie min.

Théorème 1.8.3

Soit G un groupe abélien. Alors, G vérifie min si, et seulement si, G est produit direct d'un nombre fini de groupes quasi cycliques ou de groupes cycliques d'ordres une puissance de nombres premiers.

Proposition 1.8.4

Tout groupe de Černikov est localement fini.

Corollaire 1.8.5

La classe des groupes de Černikov est stable par extension.

1.9 Groupes résiduellement finis

Définition 1.9.1

Soit G un groupe. On appelle " résiduel fini de G ", *et on note R, l'intersection de tous les sous-groupes normaux d'indice fini dans G ; c'est-à-dire que*

$$R = \bigcap_N \{N \mid N \lhd G \text{ et } G/N \in \mathcal{F}\}$$

Remarque 1.9.2

Le résiduel fini d'un groupe G, est un sous-groupe caractéristique, et il est contenu dans tout sous-groupe d'indice fini dans G.

Définition 1.9.3

Un groupe G est dit "résiduellement fini" *si son résiduel fini est trivial ; c'est-à-dire si* :

$$R = \bigcap_N \{N \mid N \lhd G \text{ et } G/N \in \mathcal{F}\} = 1.$$

Proposition 1.9.4

Soit G un groupe. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) G est résiduellement fini.

(ii) $\forall\ 1 \neq x \in G$, $\exists N_x \lhd G$ tel que $x \notin N_x$ et $G/N_x \in \mathcal{F}$.

Preuve

$(i) \Longrightarrow (ii)$. Supposons G résiduellement fini, et soit $1 \neq x \in G$.

Comme $\bigcap_N \{N \mid N \lhd G \text{ et } G/N \in \mathcal{F}\} = 1$, alors $x \notin \bigcap_N \{N \mid N \lhd G \text{ et } G/N \in \mathcal{F}\}$; il existe donc $N_x \lhd G$ tel que $x \notin N_x$ et $G/N_x \in F$.

$(ii) \Longrightarrow (i)$. Supposons que (ii) soit vérifiée et que $\bigcap_N \{N \mid N \lhd G \text{ et } G/N \in \mathcal{F}\} \neq 1$.

Il existe donc $1 \neq x \in G$ tel que $x \in N$, pour tout $N \lhd G$ tel que $G/N \in F$; ce qui contredit (ii), d'où G est résiduellement fini. ■

1.10 Groupes nilpotents

1.10.1 Conjugaison, Commutants.

Conjugaison 1.10.1.1

Soient G un groupe et a, b deux éléments quelconques de G. On dit que "a est le conjugué de b par un élément x de G" *si l'on a $b = x^{-1}ax$. On utilise souvent la notation exponentielle : $b = a^x$.*

Il est facile de montrer que :

i) $\forall a, x \in G : (a^x = a) \Leftrightarrow (ax = xa)$

et $\forall n \in Z : (a^n)^x = (a^x)^n$

ii) $\forall a, b, x \in G : (ab)^x = a^x b^x$

ii) $\forall a, x, y \in G : (a^x)^y = a^{xy}$

iv) Dans G la relation '$\backsim$'définie par :

$$\forall (a, b) \in G^2 : (a \backsim b) \Leftrightarrow (\exists x \in G : b = a^x)$$

est une relation d'équivalence dans G.

Définition 1.10.1.2 "clôture normale"

Soient X, Y deux parties non vides d'un groupe G, le conjugué de X par Y, dit aussi "la clôture normale" *de X dans Y, est défini par :*

$$X^Y = < x^y \mid x \in X, y \in Y >$$

Si H, K sont deux sous-groupes de G, il est clair que $H^K = H^{<H,K>}$, qui est le plus petit sous-groupe normal dans $< H, K >$ contenant H.

Commutateur 1.10.1.3

Il est évident que deux éléments a, b d'un groupe G commutent si, et seulement si, $a^{-1}b^{-1}ab = 1$. *Le premier membre de cette égalité s'appelle* "commutateur" *d'éléments a*

et b; il est noté $[a,b]$ *i.e :*

$$[a,b] = a^{-1}b^{-1}ab$$

Soit $n \geq 2$ *un entier et* $x_1, x_2, ..., x_n$ *n élément dans G. On définit :*

$$[x_1] = x_1$$
$$[x_1, x_2] = x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2$$
$$[x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n] = [[x_1, x_2, ..., x_{n-1}], x_n]$$

Lemme 1.10.1.4

Soit G un groupe,

i) $\forall a, b \in G : [a,b]^{-1} = [b,a]$ *et* $[a^{-1}, b] = \left([a,b]^{a^{-1}}\right)^{-1}$.

ii) $\forall a, b, x \in G : [a,b]^x = [a^x, b^x]$.

iii) $\forall a, b, c \in G : [ab, c] = [a,c]^b [b,c]$ *et* $[a, bc] = [a,c] [a,b]^c$.

iv) $\forall a, b, c \in G : [a, b^{-1}, c]^b [b, c^{-1}, a]^c [c, a^{-1}, b]^a = 1$ *(identité de Hall-Witt).*

v) $\forall a, b, c \in G : [a, b, c^a] [c, a, b^c] \left[b, c, a^b\right] = 1$ *(identité de Jacobi).*

Commutateur d'ensembles 1.10.1.5

Soit G un groupe. Etant données deux parties A, B *d'un groupe G, leur commutant* $[A,B]$ *est le sous-groupe engendré par l'ensemble des commutateurs* $[a,b]$ *tels que* $a \in A$ *et* $b \in B$ *i.e.*

$$[A,B] = < [a,b] \mid a \in A, b \in B >$$

on remarque que $[A,B] = [B,A]$.

De même si $n \geq 2$ *est un entier et* $X_1, X_2, ..., X_n$ *n parties de G. On définit :*

$$[X_1] = < X_1 >$$
$$[X_1, X_2, ..., X_n] = [[X_1, X_2, ..., X_{n-1}], X_n]$$
$$= < [x_1, x_2, ..., x_n] \mid x_i \in X_i >$$

Lemme 1.10.1.6

Soient G un groupe, $x \in Z_2(G)$, $g \in G$ et $m \in \mathbb{N}$. *On a :* $[x^m, g] = [x, g]^m$.

Preuve

Par récurrence sur m. Si $m = 1$, l'égalité est vraie. Supposons l'égalité vraie pour $m-1$; i.e $[x^{m-1}, g] = [x, g]^{m-1}$. On a $[x^m, g] = [x.x^{m-1}, g] = [x, g]^{x^{m-1}} [x^{m-1}, g] = [x, g]^{x^{m-1}} [x, g]^{m-1}$. Comme $[Z_2(G), G] \leq Z(G)$; donc $[x, g] \in Z(G)$, d'où $[x, g]^{x^{m-1}} = [x, g]$. Par suite, $[x^m, g] = [x, g] [x, g]^{m-1} = [x, g]^m$donc l'égalité est vraie pour m . ■

1.10.2 Groupe dérivé et série dérivée

Définition 1.10.2.1"groupe dérivé"

Etant donné un groupe G, on appelle "groupe dérivé de G " *le sous-groupe de G engendré par l'ensemble de commutateurs d'éléments de G ; on le note G'*

$$G' = [G, G] =< [x, y] / x, y \in G >$$

Lemme 1.10.2.2

Soit G un groupe. Alors :

i) G' est un sous-groupe totalemant invariant de G, en particulier $G' \trianglelefteq G$, et

$$(G \text{ est abélien}) \Leftrightarrow \left(G' = 1\right)$$

ii) Si $N \trianglelefteq G$,

$$\left(\frac{G}{N} \text{ est abélien}\right) \Leftrightarrow \left(G' \leq N\right)$$

en particulier $\frac{G}{G'}$ est un groupe abélien.

Définition 1.10.2.3 "série dérivée"

Etant donné un groupe G, on note :

$$\begin{aligned}
&G^{(0)}= G\\
&G^{(1)}= G^{'}= [G, G]\\
&G^{(2)}= (G^{'})= \left[G', G'\right]\\
&\vdots\\
&G^{(i)}= (G^{(i-1)})^{'}= \left[G^{(i-1)}, G^{(i-1)}\right]\\
&\vdots
\end{aligned}$$

$G^{(i)}$ s'appelle le i-ème groupe dérivé de G. Donc on a une série, dite "série dérivée"*, de sous-groupes de G :*

$$G = G^{(0)} \trianglerighteq G^{(1)} \trianglerighteq ... \trianglerighteq G^{(i-1)} \trianglerighteq G^{(i)} \trianglerighteq ...$$

avec $\frac{G^{(i-1)}}{G^{(i)}}$ est abélien , pour tout $i \in N$.

Par exemple, si G est un groupe abélien, on a :

$$\begin{aligned}
&G^{(0)} = G\\
&G^{(i)} = 1, \text{ pour tout } i \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

dans ce cas ; $G = G^{(0)} \trianglerighteq G^{(1)} = 1$.

1.10.3 Série centrale ascendante, série centrale descendante d'un groupe.

Définition 1.10.3.1 "Série centrale ascendante"

Etant donné un groupe G, on note :

$$\begin{aligned}
&Z_0(G) = 1\\
&Z_1(G) = Z(G)\\
&Z_2(G) \text{ est tel que } Z(\tfrac{Z}{Z_1(G)}) = \tfrac{Z_2(G)}{Z_1(G)}\\
&\vdots\\
&Z_i(G) \text{ est tel que } Z(\tfrac{Z}{Zi-1(G)}) = \tfrac{Z_i(G)}{Z_{i-1}(G)}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

On obtient, donc, une série ascendante, dite "la série centrale ascendante de G ".

$$1 = Z_0(G) \trianglelefteq Z_1(G) \trianglelefteq ... \trianglelefteq Z_{i-1}(G) \trianglelefteq Z_i(G) \trianglelefteq ...$$

avec $\frac{Z_i(G)}{Z_{i-1}(G)} = Z(\frac{G}{Z_{i-1}(G)})$, *pour tout* $i \in \mathbb{N}$.

Définition 1.10.3.2 "Série centrale descendante"

Etant donné un groupe G, on note :

$$\begin{aligned}
&\gamma_1(G) = G\\
&\gamma_2(G) = [\gamma_1(G), G] = [G, G] = G'\\
&\gamma_3(G) \ = [\gamma_2(G), G] = [G, G, G]\\
&\vdots\\
&\gamma_i(G) = \ \big[\gamma_{i-1}(G), G\big] = \Big[G, \underset{\leftarrow i-fois\rightarrow}{\cdots}, G\Big]\\
&\vdots
\end{aligned}$$

On remarque que pour tout $i \in \mathbb{N}(i \geq 2) : \gamma_i(G) = \big[\gamma_{i-1}(G), G\big] \leq \gamma_i(G)$, d'où

$$\frac{\gamma_{i-1}(G)}{\gamma i(G)} \leq Z(\frac{G}{\gamma_i(G)})$$

et on obtient, donc une série déscendante, dite "la série centrale descendante de G "

$$G = \gamma_1(G) \trianglerighteq \gamma_2(G) \trianglerighteq ... \trianglerighteq \gamma_{i-1}(G) \trianglerighteq \gamma_i(G) \trianglerighteq ..$$

1.10.4 Groupes nilpotents

Définition 1.10.4.1

Un groupe G est dit "nilpotent" *s'il admet une série centrale finie, i.e une série normale finie $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd .... \lhd G_n = G$ telle que $G_{i+1}/G_i \leq Z(G/G_i)$ pour tout i, $0 \leq i \leq n-1$. La longueur de la plus courte série centrale de G est appelée* "classe de nilpotence de G ".

Exemples 1.10.4.2

(1) *Si $G = 1$, alors G est nilpotent de classe 0.*

(2) *Si $G \neq 1$ est abélien, alors G est nilpotent de classe 1 ; car $G/1 = Z(G/1)$; donc la série $1 = G_0 \lhd G_1 = G$ est centrale.*

(3) *Si $|G| = p^n$ où $n \in N$ et p est premier, alors G est nilpotent. Cela s'établit par récurrence sur $|G|$. En effet, G est nilpotent pour $n = 1$. Supposons que tout p-groupe fini d'ordre strictement inférieur à p^n est nilpotent. Comme $|G| = p^n$, alors $Z(G) \neq 1$; donc $|G/Z(G)| < |G|$. D'après l'hypothèse de récurrence, $G/Z(G)$ est nilpotent et admet la série centrale $Z(G)/Z(G) = G_0/Z(G) \lhd G_1/Z(G) \lhd .... \lhd G_c/Z(G) = G/Z(G)$. D'où G admet la série centrale $1 = G_1 \lhd ..... \lhd G_c = G$.*

Proposition 1.10.4.3

La série $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd .... \lhd G_n = G$ d'un groupe G est centrale si, et seulement si, $[G_{i+1}, G] \leq G_i$ pour tout i, $0 \leq i \leq n-1$.

Proposition 1.10.4.4

Soit G un groupe nilpotent et soit $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd .... \lhd G_n = G$ une série centrale de G. Alors $G_i \leq Z_i(G)$ et $\gamma_{i+1}(G) \leq G_{n-i}$ pour tout i, $0 \leq i \leq n$. En particulier, $Z_n(G) = G$ et $\gamma_{n+1}(G) = 1$.

Corollaire 1.10.4.5

(1) *G est nilpotent de classe* $\leq c \Longleftrightarrow Z_c(G) = G \Longleftrightarrow \gamma_{c+1}(G) = 1$.

(2) *Si* $G \neq 1$ *et nilpotent, alors* $Z(G) \neq 1$.

(3) *La classe de nilpotence d'un groupe nilpotent* G *est égale à* $Inf\{n \mid Z_n(G) = G\}$ $= Inf\{n \mid \gamma_{n+1}(G) = 1\}$.

Lemme 1.10.4.6

Soit G *un groupe,* $H \leq G$ et $N \lhd G$. *Alors :*

(i) $\gamma_i(H) \leq \gamma_i(G)$, $\forall\ i \in \mathbb{N}^*$.

(ii) $\gamma_i(G/N) = \gamma_i(G)\, N/N$, $\forall\ i \in \mathbb{N}^*$.

(iii) $Z_i(G/Z_j(G)) = Z_{i+j}(G)/Z_j(G)$, $\forall\ i, j \in \mathbb{N}$.

Proposition 1.10.4.7

Soit G *un groupe,* $H \leq G$ *et* $N \lhd G$.

(1) *Si* G *est nilpotent de classe* $\leq c$, *alors* H *est nilpotent de classe* $\leq c$.

(2) *Si* G *est nilpotent de classe* $\leq c$, *alors* G/N *est nilpotent de classe* $\leq c$.

(3) $G/\gamma_i(G)$ *est nilpotent de classe* $\leq i-1$, $\forall\ i \in \{1, 2, ..., c, c+1\}$.

(4) *Si* G *est nilpotent de classe* $\leq c$, $G/Z_k(G)$ *est nilpotent de classe* $\leq c-k$, $\forall$ $k \in \{1, 2, ..., c\}$.

Théorème 1.10.4.8(Fitting)

Soient H, K *deux sous-groupes normaux nilpotents de classe* c *et* d *respectivement d'un groupe* G. *Alors* HK *est nilpotent de classe au plus égale à* $c+d$.

Théorème 1.10.4.9

Soit G *un groupe nilpotent. Alors, l'ensemble* T *des éléments de* G *d'ordre fini forme un sous-groupe totalement invariant et* G/T *est sans torsion. De plus, si* G *est de type fini, alors* T *est fini.*

Remarque 1.10.4.10

La nilpotence n'est pas stable par extension ; c'est-à-dire, s'il existe $N \lhd G$ *tel que* N *et* G/N *soient nilpotents, alors* G *n'est pas forcément nilpotent ; en effet ;* S_3, *le groupe symétrique, n'est pas nilpotent car* $Z(S_3) = 1$, *pourtant il existe* $A_3 \lhd S_3$ *; où* A_3 *est le sous-groupe alterné ;* $|A_3| = 3$ *et* $|S_3/A_3| = 2$ *; pourtant* A_3 *et* S_3/A_3 *sont abéliens donc*

nilpotents.

Théorème 1.10.4.11 [$P.Hall$]

Soit G un groupe. Si $N \lhd G$ tel que N et G/N' soient nilpotents, alors G est nilpotent.

Théorème 1.10.4.12 [$Baer$]

Tout groupe nilpotent de type fini, vérifie max.

Corollaire 1.10.4.13

Tout groupe nilpotent de type fini est polycyclique.

Definition 1.10.4.14

Un groupe est dit "localement nilpotent" *si tous ses sous groupes de type fini sont nilpotents.*

Théorème 1.10.4.15[$Hirsch$]

Si H et K sont deux sous-groupes normaux et localement nilpotents d'un groupe G, alors HK est localement nilpotent.

Théorème 1.10.4.16

Soit G un groupe polycyclique ; si tout quotient fini de G est nilpotent, G est lui même nilpotent .

Proposition 1.10.4.17

Un groupe est dit "hypercentral" *s'il est égal à son hypercentre.*

1.11 Groupes résolubles

Définition 1.11.1

Un groupe G est dit "résoluble" *s'il admet une série finie abélienne, i.e une série finie de sous groupes $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd .... \lhd G_n = G$ tels que G_{i+1}/G_i soit abélien pour tout i, $0 \leq i \leq n-1$. La longueur de la plus courte série de G est appelée* " longeur de résolubilité" *où longueur dérivée de G.*

Exemples 1.11.2

(1) *Si $G = 1$, alors G est résoluble de longueur dérivée* 0.

(2) *Si* $G \neq 1$ *est abélien, alors* G *est résoluble de classe* 1, *car* $G/1$ *est abélien ; donc la série* $1 = G_0 \lhd G_1 = G$ est abélienne.

(3) *Si* $G \neq 1$ *est nilpotent, alors* G *est résoluble.*

Proposition 1.11.3

Soit G *un groupe résoluble et soit* $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd .... \lhd G_n = G$ *une série abélienne de* G. *Alors* $G^{(i)} \leq G_{n-i}$ *pour tout* i, $0 \leq i \leq n$. *En particulier* $G^{(n)} = 1$.

Théorème 1.11.4

Soit G *un groupe. Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *est un groupe résoluble .*

(ii) $\exists d \in \mathbb{N} \;\; G^{(d)} = 1$.

(iii) $\exists m \in \mathbb{N} \;\; G^{(m)}$ *soit abélien.*

Corollaire 1.11.5

Les groupes résolubles forment une classe de groupe notée $\mathcal{R}$

Proposition 1.11.6

Soit G *un groupe,* $H \leq G$ *et* $N \lhd G$.

(1) *Si* G *est résoluble, alors* H *est résoluble .*

(2) *Si* G *est résoluble, alors* G/N *est résoluble .*

(3)*Si* N *est résoluble et* G/N *est résoluble, alors* G *est résoluble.*

d'où la propriété "résoluble" *est* $S - fermée$, $H - fermée$ *et* $P - fermée$.

Lemme1.11.7

Un groupe est "résoluble simple" *si, et seulement si, il est fini d'ordre premier .*

Corollaire 1.11.8

Les groupes localement résolubles forment une classe de groupe notée $\mathcal{LR}$.

Proposition 1.11.9

Soit G *un groupe,* $H \leq G$ *et* $N \lhd G$.

(1) *Si* G *est localement résoluble, alors* H *est localement résoluble .*

(2) *Si* G *est localement résoluble, alors* G/N *est localement résoluble .*

(3)*Si* N *est localement résoluble et* G/N *est localement résoluble, alors* G *est locale-*

ment résoluble. D'où la propriété "localement résoluble" *est* $S-fermée$, $H-fermée$ *et* $P-fermée$

1.12 Groupes métabéliens

Définition 1.12.1

Un groupe résoluble de longueur 2 est dit groupe "métabélien" ; *donc G est métabélien si, seulement si , G' est abélien.*

Lemme 1.12.2

Soient G un groupe métabélien alors :

(a) $\forall x, y \in G$ *et* $n \geq 1$:

$$[x, y^n] = \prod_{i=1}^{n} [x,_i y]^{\binom{n}{i}}$$

(b) $\forall x, y \in G$ *et* $n \geq 1$:

$$\left(xy^{-1}\right)^n = x^n \prod_{1 \leq i+j \leq n-1} [x,_i y,_j x]^{\binom{n}{i+j+1}} y^{-n}$$

(c) $\forall x_1, x_2, ..., x_k \in G$:

$$[x_1, x_2, ..., x_k] = [x_2, x_1, x_3, ..., x_k]^{-1}$$

(d) *Pour toute permutation* σ *de l'ensemble* $\{1, 2, ..., k\}$, *pour tout* $a \in G'$ *et pour tous* $x_1, x_2, ..., x_k \in G$

on a

$$[a, x_1, x_2, ..., x_k] = \left[a, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ..., x_{\sigma(k)}\right]$$

(d) *Si* $a \in G'$, *alors* $[a^n, x] = [a, x]^n$ *pour tout* $x \in G$ *et* $n \in \mathbb{Z}$.

Lemme 1.12.3

Si G est métabélien et $x, y, z \in G$, alors l'identité de Jacobi devient

$$[x, y, z]\,[z, x, y]\,[y, z, x] = 1$$

Théorème 1.12.4

Un groupe nilpotent de classe au plus 3 *est un groupe métabélien*

Proposition 1.12.5

Un groupe nilpotent de classe 4 *et engendré par deux éléments est métabélien .*

1.13 Groupes d'Engel

Définitions 1.13.1.

(i) *Soient G un groupe et x, y deux éléments de G et $n \in \mathbb{N}$. Le commutateur $[x,_n y]$ est défini inductivement par $[x,_0 y] = x$ et $[x,_{n+1} y] = [[x,_n y], y]$.*

(ii) *Un élément $g \in G$ est dit* "élément d'Engel à droite de G "*si* $\forall x \in G$, $\exists$ $n = n(g, x) \geq 0$ *tel que* $[g,_n x] = 1$. *Si l'entier n est indépendant de x, alors g est dit* "élément n-Engel à droite de G " *ou bien* "élément d'Engel borné à droite de G ". *On notera $R(G)$ $\left(resp\ \bar{R}(G)\right)$ l'ensemble des éléments d'Engel (resp d'Engel bornés) à droite de G.*

(iii) *Un élément $g \in G$ est dit* "élément d'Engel à gauche de G "*si* $\forall x \in G$, $\exists$ $n = n(g, x) \geq 0$ *tel que* $[x,_n g] = 1$. *Si l'entier n est indépendant de x, alors g est dit* "élément n-Engel à gauche de G " *ou bien* "élément d'Engel borné à gauche de G ". *On notera $L(G)$ $\left(resp\ \bar{L}(G)\right)$ l'ensemble des éléments d'Engel (resp d'Engel bornés) à gauche de G.*

Remarques 1.13.2.

(1) *La question de savoir si les ensembles $R(G)$, $\bar{R}(G)$, $L(G)$ et $\bar{L}(G)$ forment toujours des sous-groupes, reste posée.*

(2) *On a $\bar{R}(G) \subseteq R(G)$ et $\bar{L}(G) \subseteq L(G)$.*

(3) *On a $R(G)^{-1} \subseteq L(G)$ et $\bar{R}(G)^{-1} \subseteq \bar{L}(G)$.*

Définition 1.13.3

Soient G un groupe et $n \in \mathbb{N}$. Alors :

(i) On dit que G est d'Engel si $\forall x, y \in G$, $\exists\ n = n(x,y) \geq 0$ tel que $[x,_n y] = 1$. C'est-à-dire si $G = R(G) = L(G)$.

(ii) On dit que G est n-Engel si $\forall x, y \in G$, $[x,_n y] = 1$. C'est-à-dire si $G = \bar{R}(G) = \bar{L}(G)$.

Propriétés 1.13.4.

Soient G un groupe, $H \leq G$ et $N \lhd G$. On a :

(1) *Si G est d'Engel, alors H est d'Engel.*

(2) *Si G est n-Engel, alors H est n-Engel.*

(3) *Si G est d'Engel, alors G/N est d'Engel.*

(4) *Si G est n-Engel, alors G/N est n-Engel.*

1.14 FC-groupes

Définition 1.14.1 "$FC-$élément"

Soit G un groupe ; un élément g de G est dit "$FC-$élément" s'il a un nombre fini de conjugués.

Définition 1.14.2 "$FC-$centre"

Soit G un groupe ; l'ensemble des $FC-$éléments de G est un sous groupe caractéristique de G contenant le centre de G; il est appelé "le $FC-$centre de G ".

Définition 1.14.3 "$FC-$groupe"

Soit G un groupe ; si G coincide avec son $FC-$centre, G est dit "$FC-$groupe" [25, p 442].

Chapitre 2

Les divers automorphismes d'un groupe

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à deux choses :

La première, aux relations qui existent entre les divers automorphismes de groupes ; par exemple, tout automorphisme puissance est central, tout automorphisme central est commutant et tout automorphisme commutant est permutant.

La deuxième, aux relations qui existent entre ces divers automorphismes lorsque G vérifie une propriété donnée ; par exemple si G est un groupe quelconque, il n'y a à priori aucun lien entre $Paut(G)$ et $Iaut(G)$ mais *M .Curzio*, *S. Franciosi* et *F. De Giovani* ont montré que si un groupe G est résiduellement fini alors $Iaut(G) = Paut(G)$ [7].

Dans le paragraphe *8*, l'ensemble des automorphismes commutants de G noté $A(G)$ n'étant pas un sous groupe, on cherche des conditions suffisantes que doit vérifier ce groupe G pour que $A(G)$ soit un sous-groupe ou encore un sous-groupe égal à $Aut_c(G)$ le groupe des automorphismes centraux de G.

Le résultat essentiel du paragraphe *9* est le suivant : si G n'est pas un groupe de *Dedekind*, alors le groupe des automorphismes non normaux de G noté $Aut_{nn}(G)$ est

métabélien.

Dans le paragraphe *10*, on s'intéresse au groupe $Aut_n(G)$ (groupe des automorphismes de G fixant tout sous-groupe normal de G).

C'est en *1987* que *S.F.Franciosi* et *F. De Giovani* ont étudié ce groupe et ont montré que si G est polycyclique, il en est de même pour $Aut_n(G)$, ce qui implique que si G est résoluble fini, $Aut_n(G)$ l'est aussi. Mais ils ont posé la question suivante : Si G est résoluble infini, que peut-on dire du groupe $Aut_n(G)$?

Cette question est restée sans réponse jusqu'en *2008* où *Endimioni* montre que la réponse à cette question est positive. En effet, il a montré que si G est résoluble de longueur dérivée $r \geq 2$, alors le groupe $Aut_n(G)$ est lui même résoluble de longueur dérivée $2(r-1)$.

Dans le paragraphe *11*, on étudie le groupe $Aut_p^*(G)$. En *1986 Corsi Tani* et *Rinaldi Bonafede* ont montré que si G est un groupe fini, le groupe $Aut_p^*(G)$ est nilpotent de classe $c-1$ ($c \geq 3$) si G est nilpotent de classe c. Ce résultat a été généralisé par *B.Daoud* en *2008* pour un groupe infini.

La même année, *G. Endimioni* a généralisé le résultat de *B. Daoud* à un groupe plus vaste $P(G)$. $P(G)$ est le sous-groupe de $Aut(G)$ engendré par les automorphismes polynomiaux de G .

Enfin dans le paragraphe *12*, on étudie les groupes n-abéliens généralisés. *Endimioni*, *Abdollahi* et *Daoud* dans leur article "Groupes n-abéliens généralisés" ont donné des conditions suffisantes que doit vérifier un groupe n-abélien généralisé pour qu'il soit abélien.

2.2 Automorphismes sans point fixe

Définition 2.2.1 "Automorphisme sans point fixe"

Un automorphisme α d'un groupe G admet un point fixe g dans G si $\alpha(g) = g$. L'ensemble de tous les points fixés par α est un sous groupe de G ; il est noté $C_G(\alpha)$:

$$C_G(\alpha) = \{g \in G \mid \alpha(g) = g\}$$

Si $C_G(\alpha) = 1$ *c'est à dire si* 1 *est le seul point fixe de* α *alors* α *est appelé automorphisme* "sans point fixe". *Un sous groupe* H *de* $Aut(G)$ *est appelé* "sans point fixe" *si tout élément de* H *sauf l'identité est sans point fixe .*

Lemme 2.2.2

Soit α *un automorphisme sans point fixe d'un groupe fini* G; soit n l'ordre de α ; alors :

$\dot{I}$) *Si* $(i, n) = 1$ *;* α^i *est aussi sans point fixe.*

$\dot{I}\dot{I}$) *L'application* $(-1 + \alpha)$ *est une permutation de* G.

$\dot{I}\dot{I}\dot{I}$) x *et* $\alpha(x)$ *sont conjugués si,et seulement si,* $x = 1$.

$\dot{I}V$) $(1 + \alpha + ...\alpha^{n-1})(x) = 1$ *pour tout* x *de* G .

Preuve

Soient α *un automorphisme sans point fixe et* $x, y \in G$

$\dot{I}$) $(i, n) = 1$ donc il existe u et v de $\mathbb{Z}$ tels que $(iu + nv) = 1$. Supposons qu'il existe $x \in G$ $(x \neq 1)$ tel que $\alpha^i(x) = x$. On a $\alpha(x) = \alpha^{iu+nv}(x) = \alpha^{iu}((x)) = (\alpha^i)^u(x) = x$ (car $\alpha^i(x) = x$) donc $\alpha(x) = x$ ce qui contredit le fait que α est sans point fixe c'est à dire α^i est aussi sans point fixe .

$\dot{I}\dot{I}$) Si $(-1 + \alpha)(x) = (-1 + \alpha)(y)$ alors $x^{-1}\alpha(x) = y^{-1}\alpha(y)$c.à.d $yx^{-1} = \alpha(yx^{-1})$ mais α est sans point fixe donc $yx^{-1} = 1$ ce qui implique que $y = x$ et comme G et fini on a$(-1 + \alpha)$ est une permutation .

$\dot{I}\dot{I}\dot{I}$) Supposons qu'il existe g de G tel que $\alpha(x) = x^g$ donc $\exists y \in G$ tel que $g = (-1 + \alpha)(y)$ $\left[\text{d'après}(\dot{I}\dot{I})\right]$ donc $\alpha(x) = x^{(-1+\alpha)(y)}$ c'est à dire $\alpha(x) = x^{y^{-1}\alpha y} = \alpha(y)^{-1} yxy^{-1}\alpha(y)$ d'où $\alpha(yxy^{-1}) = yxy^{-1}$ or α est sans point fixe alors $yxy^{-1} = 1$ d'où $x = 1$.

$\acute{l}V$) Posons $z = x.\alpha(x).\alpha^2(x).....\alpha^{n-1}(x)$ alors $\alpha(z) = \alpha(x).\alpha^2(x)....\alpha^{n-1}(x).\alpha^n(x)$ donc $\alpha(z) = \alpha(x).\alpha^2(x).....\alpha^{n-1}(x).\alpha^n(x) = \alpha(x).\alpha^2(x).....\alpha^{n-1}(x)\ x$ donc :

$\alpha(z) = x^{-1}\underbrace{x\alpha(x).\alpha^2(x).....\alpha^{n-1}(x)}_{z}\ x$ d'où $\alpha(z) = z^x$ c'est à dire z et $\alpha(z)$ sont conjugués, donc $z = 1$ d'où $(1 + \alpha + ...\alpha^{n-1})(x) = 1$ pour tout x de G . ■

Théorème 2.2.3

Si α est un automorphisme sans point fixe d'un groupe fini G alors pour un certain entier premier p divisant l'ordre de G il existe un p-sous groupe de Sylow P tel que $\alpha(P) = P$.

Preuve

Soit P_0 un $p-$sous groupe de Sylow alors $\alpha(P_0) = P_0^g$ pour certain g de G;
appliquons (2.2.2 $\dot{I}\dot{I}$) donc il existe $y \in G$ t.q $g = y^{-1}\alpha(y)$ et soit $P = P_0^{y^{-1}}$ d'où

$$\alpha(P) = \alpha(P_0^{y^{-1}}) = (\alpha(P_0))^{\alpha\left(y^{-1}\right)} = (P_0^g)^{g^{-1}y^{-1}} = P_0^{y^{-1}} = P$$

■ .

Théorème 2.2.4 [25, Thompson]

Soient G un groupe fini et p un nombre premier.

Si G admet un automorphisme sans point fixe α d'ordre p alors G est nilpotent.

2.3 Automorphismes presque intérieurs ($\mathbf{Aut}_{p.i}(G)$)

Définition 2.3.1 "Automorphisme presque intérieur"

Un automorphisme α d'un groupe G est dit "presque intérieur" *si :*

$$\forall x \in G,\ \exists\ a_x \in G \quad \text{t.q} : \alpha(x) = x^a$$

L'ensemble des automorphismes presque intérieurs de G sera noté : $Aut_{p.i}(G)$

Remarque 2.3.2

L'ensemble des automorphismes presque intérieurs de G est un sous groupe de $Aut(G)$, de plus on a

$$Int(G) \leq Aut_{p.i}(G) \leq Aut(G).$$

On va caractériser les groupes G pour lesquels $Int(G) = Aut_{p.i}(G)$.

Proposition 2.3.3

Pour tout groupe G nilpotent de classe 2 engendré par deux éléments on a :

$$Int(G) = Aut_{p.i}(G)$$

Preuve

Soit $G = \langle x_1, x_2 \rangle$ et $\varphi \in Aut_{p.i}(G)$. $\exists a_1, a_2 \in G$ tels que $\varphi(x_1) = x_1^{a_1}$ et $\varphi(x_2) = x_2^{a_2}$ d'où $\varphi(x_1) = x_1[x_1, a_1]$, $\varphi(x_2) = x_2[x_2, a_2]$ et $a_1 = x_1^{k_1}x_2^{k_2}z_1$, $a_2 = x_1^{m_1}x_2^{m_2}z_2$ donc $\varphi(x_1) = x_1[x_1, a_1] = x_1\left[x_1, x_1^{k_1}x_2^{k_2}z_1\right] = x_1\left[x_1, x_1^{k_1}x_2^{k_2}\right]$d'où $\varphi(x_1) = x_1\left[x_1, x_2^{k_2}\right] = x_1\left[x_1, x_1^{m_1}x_2^{k_2}\right] = x^{x_1^{m_1}x_2^{k_2}}$et $\varphi(x_2) = x_2[x_2, a_2] = x_2[x_2, x_1^{m_1}x_2^{m_2}z_2] = x_2[x_2, x_1^{m_1}x_2^{m_2}]$ d'où $\varphi(x_2) = x_2[x_2, x_1^{m_1}] = x_2\left[x_2, x_1^{m_1}x_2^{k_2}\right] \quad = x^{x_1^{m_1}x_2^{k_2}}$donc pour $g = x_1^{m_1}x_2^{k_1}$ on a $\varphi \in Int(G)$ d'où $Aut_{p.i}(G) = Int(G)$. ■

2.4 Endomorphismes et automorphismes centraux $(Aut_c(G))$

Définition 2.4.1 "Endomorphisme central"

Un endomorphisme α d'un groupe G est appelé "endomorphisme central" *si*

$$\alpha(g) \equiv g \mod Z(G) \ \ \forall g \in G \ (i.e\ \alpha(g) \in gZ(G))$$

Théorème 2.4.2 [25, p 83]

1-*Tout endomorphisme surjectif α qui commute avec tout automorphisme intérieur (i.e $\alpha.\beta = \beta.\alpha \ \ \forall \beta \in Int(G)$) est central.*

2-*Tout endomorphisme central commute avec tout automorphisme intérieur.*

Preuve

1) Soit α un endomorphisme surjectif commute avec tout automorphisme intérieur *i.e*

$\beta.\alpha(x) = \alpha.\beta(x) \quad \forall \beta \in Int(G)$ alors $\alpha(x)^g = \alpha(x^g)$ pour tout g de G donc : $g^{-1}\alpha(x)\, g = \alpha(g)^{-1}\alpha(x)\alpha(g)$ et puisque $\alpha(G) = G$ (α surjectif) on en conclut que $\alpha(g)\, g^{-1} \in Z(G)$ d'où $\alpha(g) \in gZ(G)$ donc α est central.

2) Soit α un endomorphisme central de G et soient x, g de G alors il existe $z \in Z(G)$ t.q $\alpha(g) = gz$ donc $\alpha(g^{-1}xg) = \alpha(g)^{-1}\alpha(x)\alpha(g) = z^{-1}g^{-1}\alpha(x)\, gz = \alpha(x)^g$.

donc α est un endomorphisme qui commute avec tout automorphisme intérieur. ■

Proposition 2.4.3

Tout automorphisme central d'un groupe G fixe point par point le groupe dérivé G'.

Preuve

Soient x, y deux éléments de G et soit α un automorphisme central de G. On a : $\alpha([x,y]) = [\alpha(x), \alpha(y)]$

et comme α est central alors il existe $z_1, z_2 \in Z(G)$ t.q $\alpha([x,y]) = [xz_1, yz_2] = [x,y]$ donc α fixe point par point le groupe dérivé G'. ■

2.5 Endomorphismes et automorphismes puissance $(Paut(G))$

2.5.1 Endomorphismes puissance

Définition 2.5.1.1 "Endomorphisme puissance"

Soit G un groupe ; un endomorphisme θ de G est dit "endomorphisme puissance" *s'il vérifie l'une des deux conditions suivantes équivalentes :*

$$\dot{I}) \qquad \forall H \leq G : \theta(H) \leq H$$
$$\dot{I}\dot{I}) \quad \forall x \in G,\ \exists\, n_{x,\theta} \in \mathbb{Z} \quad t.q \ \ \theta(x) = x^n$$

Définition 2.5.1.2 "Automorphisme puissance"

Soit G un groupe ; un automorphisme θ de G est dit "automorphisme puissance" *si :*

$$\forall H \leq G,\, \theta\,(H) = H$$

Définition 2.5.1.3 "Endomorphisme universel"

Si l'application $\theta_n : x \longrightarrow x^n$ est un endomorphisme de G où n est un entier rationnel indépendant de x, θ_n est dit "endomorphisme universel" *de G.* L'ensemble des endomrphismes universels sera noté : $End_u(G)$.

Remarque 2.5.1.4

Un endomorphisme puissance bijectif n'est pas nécessairement un automorphisme puissance de G.

Preuve

Soit θ_n :

$$\begin{array}{rccc} \theta_n : & (Q,+) & \rightarrow & (Q,+) \\ & x & \rightarrow & nx \end{array} \quad n \geq 2$$

θ_n est un endomorphisme puissance d'après la définition 2.5.1.1, θ_n est bijectif mais n'est pas un automorphisme puissance de G car $\theta_n\,(\mathbb{Z}) = n\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$.

■

Proposition 2.5.1.5

Soit G est un groupe périodique ; alors tout endomorphisme puissance injectif de G est un automorphisme puissance de G.

Preuve

* Soient G un groupe périodique, θ un endomorphisme puissance de G injectif et H un sous groupe de G, puisque θ est un endomorphisme puissance de G alors $\theta\,(H) \leq H$. On va montrer que $H \leq \theta(H)$.

Soit $h \in H$ avec $K =< h >$ tel que $|K| = |h| = n$.

Considérons la restriction $\theta\mid_k$:

$$\begin{array}{rccc} \theta\mid_K: & K & \rightarrow & K \\ & x & \rightarrow & \theta\mid_K(x) \end{array}$$

Puisque θ est injectif alors $\theta\mid_K$ est aussi injectif or K est fini donc $\theta\mid_K$ est bijectif c.à.d $\theta(K)=K$ donc $h\in\theta(k)$ -c.à.d- il existe $k\in K$ avec $h=\theta(k)$ et $\theta(k)=h^s$ pour un certain entier rationnel s d'où $H\leq\theta(H)$ ce qui implique que $\theta(H)=H$.

* Soit maintenant $y\in G$, G étant périodique ($|y|=m$), on a $<y>=\{1,y;y^2,..,y^{m-1}\}$, $y^m=1$ donc $\theta(y)\in\theta(<y>)=<y>$ c.à.d $\theta(<y>)=y^l$ car $\theta\mid_{<y>}$ est un automorphisme de $<y>$ avec $(m,l)=1$ (i.e $\exists(u,v)/(um+vl)=1$). Donc $y=y^1=y^{(um+vl)}$ pour certains u et v dans $\mathbb{Z}$ donc $y=y^{um}.y^{vl}=(y^m)^u.\left(y^l\right)^v=\left(y^l\right)^v=\theta(y)^v=\theta(y^v)$. On peut choisir $x=y^v$ tel que $\theta(x)=y$, d'où θ est surjectif. Ce qui implique que θ est un automorphisme puissance de G.

■

Notation

L'ensemble de tous les automorphismes puissance de G est noté $Paut(G)$:

$$Paut(G)=\{\alpha\in Aut(G)\mid\alpha\ \textit{automorphisme puissance}\}$$

Proposition 2.5.1.6 [5, théorème 2.2.1]

$Paut(G)$ est un sous groupe normal abélien de $Aut(G)$ de plus il est résiduellement fini.

Preuve

Soient $\alpha\in Aut(G)$, $\theta\in Paut(G)$ et $H\leq G$, on a $\alpha^{-1}(\theta(\alpha(H))=\alpha^{-1}(\alpha(H))=H$ (car $\theta(\alpha(H))=\alpha(H)$); donc

$\alpha^{-1}\theta\alpha\in Paut(G)$ c.à.d $Paut(G)\trianglelefteq Aut(G)$.

Soient $\alpha,\beta\in Paut(G)$ et $H\leq G$. On a d'une part $\alpha.\beta(H)=\alpha(H)=H$ d'autre part $\beta.\alpha(H)=\beta(H)=H$ d'où $\alpha\beta=\beta\alpha\quad\forall\alpha,\beta\in Paut(G)$ donc $Paut(G)$ est un

sous-groupe normal abélien .

Montrons que $Paut(G)$ est un sous groupe résiduellement fini.

Soit :

$$\mathcal{F} = \{H_i \mid H_i \trianglelefteq Paut\,(G) \text{ et } |Paut\,(G) : H_i| < \infty\}$$

pour tout $g \in G$ notons F_g l'ensemble des automorphismes puissance de G qui fixent g.

Il est clair que F_g est un sous groupe de $Paut\,(G)$.

Posons :

$$\mathcal{F}_1 = \{F_g \mid g \in G\}\,.$$

Prouvons maintenant que : $\mathcal{F}_1 \subset F$, pour tout $g \in G$,soit :

$$\begin{array}{rccl} f_g : & Paut\,(G) & \to & Aut(< g >) \\ & \alpha & \to & f_g(\alpha) = \alpha\mid_{<g>} \end{array}$$

Puisque $\ker(f) = F_g$, alors $\frac{Paut(G)}{F_g} \simeq \mathrm{Im}(f) \leq Aut\,(< g >)$ qui est abélien d'ordre $\varphi\,(n)$ (fonction d'Euler) si $|g| = n$ et d'ordre 2 si $|g| = \infty$ [25, 1.5.5 p 27] donc $F_g \in F$ c'est à dire $F_1 \subset F$. Finalement on a

$$\bigcap_{H_i \in \mathcal{F}} H_i \subseteq \bigcap_{H_i \in \mathcal{F}_1} H_i = \bigcap_{g \in G} F_g$$

Soit donc $\alpha \in \bigcap_{g \in G} F_g$ c.à.d pour tout g de G on a $\alpha \in F_g$ $(i.e\ \forall g \in G : \alpha\,(g) = g\ )$ d'où $\alpha = Id_G$ donc $\bigcap_{\substack{H_i \leq Paut(G) \\ |Paut(G):H_i| < \infty}} H_i = 1$. Ce qui signifie que $Paut\,(G)$ est résiduellement fini.

Définition 2.5.1.7 "Endomorphisme puissance localement universel"

On dit qu'un endomorphisme puissance est "localement universel" *s'il est universel sur tout sous-groupe de type fini .*

Définition 2.5.1.8 "Homogène"

Un endomorphisme puissance est dit "homogène" *s'il envoie deux éléments de même ordre sous la même puissance.*

Remarque 2.5.1.9

Tout endomorphisme puissance "localement universel" *est* "homogène" *(si G est un p-groupe la réciproque est vraie).*

Théorème 2.5.1.10

1- Tout endomorphisme puissance d'un groupe abélien est localement universel et par suite homogène.

2- Tout endomorphisme puissance d'un p- groupe abélien d'exposant fini est universel.

Preuve

1- Soient A un groupe abélien, H un sous-groupe de A de type fini et θ un endomorphisme puissance de A. On a $H = \langle h_1\rangle \oplus \langle h_2\rangle \oplus .....\langle h_s\rangle$; $\{\langle h_i\rangle \simeq \mathbb{Z}$ où $|\langle h_i\rangle| = p_i^{r_i}\}$ et puisque θ est un endomorphisme puissance de A alors $\theta(h_i) = \lambda_i h_i$ pour tout i donc d'une part on a :

$$\theta(h_1 + h_1 + h_2 + .. + h_S) = n(h_1 + h_1 + h_2 + .. + h_S) = nh_1 + nh_2 + .. + nh_S$$

D'autre part :

$$\theta(h_1 + h_1 + h_2 + .. + h_S) = \theta(h_1) + \theta(h_2) + .. + \theta(h_S) = \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 + .. + h_S h_S$$

c'est à dire :

$$nh_1 + nh_2 + ...nh_S = \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 + ... + h_S h_S$$

d'où :

$$n = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3.... = \lambda_s.$$

Maintenant soit $h \in H$ on a :

$$h = \mu_1 h + \mu_2 h_2 + ... + \mu_s h_s$$

donc :

$\theta(h) = \theta(\mu_1 h_1 + \mu_2 h_2 + .. + \mu_s h_s) = \mu_1\theta(h_1) + \mu_2\theta(h_2) + ... + \mu_s\theta(h_s) = \mu_1 n h_1 + \mu_2 n h_2 + ... + \mu_s n h_s$

$= n(\mu_1 h_1 + \mu_2 h_2 + ... + \mu_s h_s)$ d'où : $\theta(h) = nh \quad \forall h \in H$ c.à.d θ est un endomorphisme localement universel et par suite homogène.

2- Soient A un p-groupe abélien d'exposant fini et soit $a \in A$ d'ordre maximal donc $\langle a \rangle$ est facteur direct de A (i-e $\exists\, Q \leq A$ t.q $A = \langle a \rangle \times Q$).

I) D'abord il faut montrer que θ est universel sur Q.

On a : $\theta(a) = a^k$ et soit $b \in Q$, $\theta(b) = b^n$ et $\theta(ab) = \theta(a)\theta(b) = a^k b^n$ donc $a^m b^m = a^k b^n$ c'est à dire $a^{k-m} = b^{m-n} \in \langle a \rangle \cap Q = 1$.

$$donc : \begin{cases} |a| \text{ divise } k-m \\ |b| \text{ divise } m-n \end{cases}$$

et puisque a est d'ordre maximal dans un p-groupe alors $|b|$ divise $|a|$ i.e $|a| = \alpha |b|$ donc :

$$\text{donc} : \begin{cases} \exists\, \beta \text{ t.q } k-m = \beta |a| \\ \exists\, \mu \text{ t.q } m-n = \mu |b| \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} k-m = \beta\alpha |b| \\ m-n = \mu |b| \end{cases}$$

d'où $k - n = (\beta\alpha + \mu)|b|$ ce qui implique que $k = n + (\beta\alpha + \mu)|b|$ donc $b^k = b^n \left(b^{|b|}\right)^{(\beta\alpha+\mu)} = b^n$ or $\theta(b) = b^n$ donc θ est universel sur Q.

II) L'entier k est indépendant du choix de a ; en effet si on prend a' d'ordre maximal, θ étant homogène envoie a et a' sous la même puissance k.

Soit maintenant $g \in A$, $g = a^r c \quad | \, a^r \in \langle a \rangle$ et $c \in Q$ donc

$$\theta(g) = \theta(a^r c) = \theta(a)^r \theta(c) = \left(a^k\right)^r c^k = (a^r c)^k = g^k$$

d'ou θ est universel. ■

Théorème 2.5.1.11

Tout automorphisme puissance est central .

Preuve

Voir [5, théorème 2.2.1]

Remarque 2.5.1.12

Il existe des automorphismes centraux qui ne sont pas des automorphismes puissance.

Preuve

Considerons l'application θ_5 :

$$\begin{array}{rccc} \theta_5: & (\mathbb{Q}\times D_8) & \rightarrow & (\mathbb{Q}\times D_8) \\ & (x,y) & \rightarrow & \theta_5(x,y)=(x,y)^5=(5x,y^5) \end{array}$$

θ_5 est un automorphisme universel et puisque tout automorphisme universel est central, $\theta_5$est central ; montrons que $\theta_5 \notin Paut(G)$.En effet $\theta_5(\mathbb{Z}\times\{1\}) = 5\mathbb{Z}\times\{1\}$. $\mathbb{Z}\times\{1\}$ et $5\mathbb{Z}\times\{1\}$ étant respectivement isomorphes à $\mathbb{Z}$ et $5\mathbb{Z}$, $\theta_5(\mathbb{Z}\times\{1\}) < \mathbb{Z}\times\{1\}$ car $5\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$; donc θ_5 n'est pas un automorphisme puissance. Ce contre exemple a été trouvé par *Aliréza Abdollahi.*

2.5.2 Groupes faibles et Groupes forts

Définition 2.5.2.1 "Groupes faibles"

Soit G un groupe non périodique et soit I l'ensemble des des éléments de G d'ordre infini. On appelle "sous groupe faible de G " *et on le note $W(G)$*

$$(W(G)=\langle I\rangle\text{, le } \textit{sous-groupe engendré par tous les éléments d'ordre infini)}$$

$(W(G)\leq G,\ W(G)\sqsubset G)$. *G est dit* "faible" *si $W(G)=G$ et* "fort" *si $W(G)<G$.*

Exemples de groupes faibles 2.5.2.2

Soit G un groupe

1- Si G est sans torsion ($T(G)=1$) alors G est faible (clair).

2- Si G est simple non périodique tel que $T(G)<G$ alors G est faible car : ($T(G)\trianglelefteq G$ mais comme G est simple et $T(G)<G$ alors $T(G)=1$ donc G est sans torsion).

3- Si G est non périodique "abélien" *ou* "nilpotent" *ou* "localement nilpotent" *alors*

G est faible car G est engendré par $G\backslash T$ [voir lemme 2.9.1.3]*or* $G\backslash T$ *est sans torsion donc G est sans torsion* i.e *G est un groupe faible.*

Exemples de groupes forts 2.5.2.3

Le groupe diedral infini

$$D_\infty = \langle a, b \ / b^2 = 1 \text{ et } bab = a^{-1} \rangle$$

$|\langle a \rangle| = \infty$ *et tous les autres éléments sont d'ordre* 2. $W(D_\infty) = \langle a \rangle$

Remarque 2.5.2.4

Soit G un groupe non périodique et soit $a \in I$ *(i.e a d'ordre infini) ; Soit* $b \in G$ *t.q* $\langle a, b \rangle$ *soit nilpotent (en particulier abélien) ; alors* $b \in W(G)$.

Preuve

Supposons que $b \notin W(G)$ (i.e $b \in G\backslash W(G)$; $|b| < \infty$); soit $a \in G$ t.q $|a| < \infty$ alors : $b = a^{-1}(ab) \mid a^{-1} \in I$ et $(ab) \in I$, puisque si $ab \notin I \Rightarrow |ab| < \infty$ or $a = (ab)\, b^{-1}$ est d'ordre fini, car ab et $b^{-1} \in T(G)$ ce qui contredit le fait que a est d'ordre infini. ■

Remarque 2.5.2.5

Si $\theta \in Paut(G)$

$(-1+\theta)$ *est un endomorphisme puissance de G vérifiant* $\mathrm{Im}(-1+\theta) \leq Z(G) \cap W(G)$; *il est appelé* "endomorphisme dérivé de θ".

Preuve

Soient $x, y \in G$ et:

$$\begin{array}{rccc} -1+\theta: & G & \to & G \\ & x & \to & -1+\theta(x) = x^{-1}\theta(x) \end{array}$$

On a :

$(-1+\theta)(xy) = (xy)^{-1}\theta(xy) = y^{-1}x^{-1}\theta(x)\,\theta(y) = y^{-1}x^{-1}\theta(x)\, yy^{-1}\theta(y) =$
$(x^{-1}\theta(x))^y\, y^{-1}\theta(y) = (x^{-1}\theta(x))\ (y^{-1}\theta(y)) = (-1+\theta)(x)\ (-1+\theta)(y)$.

Donc : $(-1+\theta)$ est un endomorphisme puissance.

Prouvons maintenant que $\mathrm{Im}(-1+\theta) \leq Z(G) \cap W(G)$.

**Si G est faible* alors : $\mathrm{Im}(-1+\theta) \leq Z(G) \cap W(G)$.

**Si G est fort* $W(G) < G$. Si $g \in W(G)$ on a $g^{-1}\theta(g) \in W(G)$ avec $g^{-1}\theta(g) \in Z(G)$ donc $g^{-1}\theta(g) \in Z(G) \cap W(G)$.

Soit $g \in G/W(G)$ on a $(-1+\theta)(g) = g^{-1}\theta(g) = g^{-1}g^r = g^{r-1} \in Z(G)$. Il reste à montrer que $g^{r-1} \in W(G)$.

Soit a d'ordre infini ($a \in I$), on a $\langle a, g^{r-1}\rangle$ est abélien (car $g^{r-1} \in Z(G)$) donc $g^{r-1} \in W(G)$ [voir remarque 2.5.2.4] ; donc $g^{r-1} \in Z(G) \cap W(G)$ c.à.d $(-1+\theta) \leq Z(G) \cap W(G)$. ■

Théorème 2.5.2.6

Si G un groupe fort non périodique, alors :

1) *Tout automorphisme puissance de G fixe point par point $W(G)$.*

2) *Tout automorphisme puissance de G fixe point par point $\frac{G}{W(G)}$.*

Preuve

1) Puisque G est fort ($W(G) < G$) la restriction $\theta\,|_{W(G)}$ est ou bien l'identité ou bien l'automorphisme ($x \to x^{-1}$). Montrons que le dernier cas n'est pas possible. Supposons :

$$\begin{array}{rccc} \theta\,|_{W(G)}\colon & W(G) & \to & W(G) \\ & x & \to & x^{-1} \end{array}$$

Et soient $b \in G \backslash W(G)$; donc $|b| < \infty$ et $a \in G$; donc $|a| = \infty$ avec $\theta(a) = a^{-1}$. On a $a^{-1}\theta(a) = a^{-2} \in Z(G)$; et $\langle a^{-2}, b\rangle$ est abélien donc $b \in W(G)$ [voir remarque 2.5.2.4] ; ce qui contredit le fait que $b \in G \backslash W(G)$ donc θ est l'identité c.à.d θ fixe point par point $W(G)$.

2) Soit $\overline{\theta}$:

$$\begin{array}{rccc} \overline{\theta}: & \frac{G}{W(G)} & \to & \frac{G}{W(G)} \\ & xW(G) & \to & \theta(x)W(G) \end{array}$$

On a : $(-1+\theta)(x) \in W(G)$ donc $x^{-1}\theta(x) \in W(G)$ c.à.d $\theta(x)W(G) = xW(G)$ d'où $\overline{\theta}(\overline{x}) = \overline{x}$; finalement on a trouvé que θ fixe point par point $\frac{G}{W(G)}$. ■

Lemme 2.5.2.7

Soit G un groupe non périodique faible alors :

1) Si G est abélien ; $|Paut(G)| = 2$

2) Si G est non abélien ; $|Paut(G)| = 1$

Preuve

Soit G un groupe non périodique faible, et soit θ un automorphisme puissance de G. Soient a, b deux éléments de G d'ordre infini ; alors

$$\theta(a) = a^{\pm 1} \quad et \quad \theta(b) = b^{\pm 1}$$

1) *Si G est abélien*

θ est un automorphisme puissance localement universel[voir théorème 2.5.1.10] donc ($\theta(a) = a$ et $\theta(b) = b$) ou bien ($\theta(a) = a^{-1}$ et $\theta(b) = b^{-1}$) d'où $|Paut(G)| = 2$.

2) Si G est non abélien

Il y a 3 cas ; l'identité *i.e* ($\theta(a) = a$ et $\theta(b) = b$), ($\theta(a) = a$ et $\theta(b) = b^{-1}$) ou bien ($\theta(a) = a^{-1}$ et $\theta(b) = b^{-1}$) on va les etudier cas par cas.

* Supposons que $\theta(a) = a$ et $\theta(b) = b^{-1}$. On a $b^{-1}\theta(b) = b^{-2} \in Z(G)$; donc le sous groupe $H = \langle a, b^2 \rangle$ est abélien c'est à dire que θ est universel sur H donc $\theta(b^2) = b^2$ or $\theta(b^2) = (b^2)^{-1}$ ce qui implique que $b^{-2} = b^2$ et donc $b^4 = 1$ c'est à dire b est d'ordre fini ce qui contredit le fait que $b \in I$.

* Supposons que $\theta(a) = a^{-1}$ et $\theta(b) = b^{-1}$.

Si $\theta(x) = x^{-1}$ pour tout $x \in G$, alors G est abélien, contradiction puisqu'on a supposé G non abélien. Donc il existe au moins $c \in G$ tel que $\theta(c) = c$.

On a $b^{-1}\theta(b) = b^{-2} \in Z(G)$ donc le sous groupe $K = \langle b^2, c \rangle$ est abélien c'est à dire que θ est universel sur K; puisque $\theta(c) = c$, $\theta(b^2) = b^2$ or $\theta(b^2) = (b^2)^{-1}$ ce qui implique que $b^{-2} = b^2$ et donc $b^4 = 1$ c'est à dire b est d'ordre fini ce qui contredit le fait que $b \in I$ donc nécessairement $\theta(c) = c^{-1}$ et par suite n'étant pas abélien le cas $\theta(a) = a^{-1}$ et $\theta(b) = b^{-1}$ n'existe pas et le seul automorphisme est l'identité.

■

Lemme 2.5.2.8

Soit G un groupe périodique admettant au moins un élément d'ordre p (p premier), soit α un endomorphisme puissance de G vérifiant :

1) $Im(\alpha) \leq Z(G)$

2) α fixe tout sous groupe d'ordre p ; alors l'ensemble des p-éléments de G est facteur direct abélien de G .

Preuve

Soit N l'ensemble des p-éléments de G. On va montrer que $N \subseteq Z(G)$; soit $x \in N$ donc $\langle x \rangle \subseteq N$

considérons la restriction $\alpha \mid_{\langle x \rangle}$ On a : $\ker\left(\alpha \mid_{\langle x \rangle}\right) = \ker\alpha \cap \langle x \rangle$. Montrons que $\ker\left(\alpha \mid_{\langle x \rangle}\right) = \ker(\alpha) \cap \langle x \rangle$ est trivial ?

Supposons que $\ker\left(\alpha \mid_{\langle x \rangle}\right) = \ker(\alpha) \cap \langle x \rangle$ non trivial ; donc :

$$\exists a\ (a \neq 1) \in \langle x \rangle \mid \alpha(a) = 1$$

or l'ordre de $a = p^m$ (a étant un p-élément), donc $\alpha(\langle a \rangle) = 1$ ce qui contredit la deuxieme hypothèse donc $\alpha \mid_{\langle x \rangle}$est un endomorphisme puissance de $\langle x \rangle$ injectif et par suite un automorphisme puissance de $\langle x \rangle$, donc $|x| = |\alpha(x)|$ mais $\alpha(x)$ engendre $\langle x \rangle$ donc il existe $m \in Z$ tel que $x = \alpha(x)^m$ or $\alpha(x) \in Z(G)$ donc $x \in Z(G)$ d'où $N \subseteq Z(G)$.

Dans un groupe abélien l'ensemble des $p-$éléments forme un sous groupe, donc $N \leq Z(G)$ et même $N \leq G$.

Soit M l'ensemble des $p'-$ éléments. Montrons que $M \leq G$

Il est clair que M est un ensemble non vide et l'inverse d'un $p'-$ élément est un $p'-$ élément.

Soit a et b deux $p'-$ éléments c'est à dire $|a| = m = \prod_i q_i^{r_i}$ / $q_i \neq p$ et $|b| = m' = \prod_j (q'_j)^{s_j}$ / $q'_j \neq p$, et soit $\alpha \in Paut(G)$ / $Im(\alpha) \leq Z(G)$ .On a : $\alpha(ab)^{mm'} = (\alpha(a)\alpha(b))^{mm'}$ et puisque $Im(\alpha) \leq Z(G)$

alors $\alpha(ab)^{mm'} = \alpha(a)^{mm'}\alpha(b)^{mm'} = (\alpha(a)^m)^{m'}\left(\alpha(b)^{m'}\right)^m = 1.1 = 1$donc :

$|\alpha(ab)|$ divise $\prod_i q_i^{r_i} \prod_j (q'_j)^{s_j}$ avec q_i , $q_j \neq p$ donc : $|\alpha(ab)|$ est un $p'-$ nombre, or $|\alpha(ab)| = |ab|$ d'où ab est un $p'-$ élément, donc $ab \in M$ c'est à dire M est un sous groupe de G

Prouvons que : $G \simeq N \times M$

1) $G \stackrel{?}{=} NM$

Soit $g \in G$, alors $|g| = p^{m_1} q_2^{m_2} ... q_k^{m_k}$, donc :$\exists g_1, .., g_k \in G$ tels que $g = g_1 ..... g_k$ avec $|g_1| = p_1^m$ et $|g_i| = q_i^{m_i}$ $(2 \leq i \leq k)$ donc $g_1$est un $p-$élément et $g_2 ..... g_k$ sont des $p'-$ éléments d'où $g \in NM$ c'est à dire $G = NM$

2) $N \cap M \stackrel{?}{=} 1$

Soit $x \in N \cap M$, $x \in N$ donc $|x| = p^r ..(1)$ d'autre part $x \in M$ donc $|x| = q_1^{m_1} .. q_l^{m_l} ..(2)$, avec $q_1, q_3 ..... q_l \neq p$. De (1) et (2) on trouve que $p^r = q^m ..... q_l^{m_l}$ d'où p divise $q_1^{m_1} .. q_l^{m_l}$ mais $q_i \neq p$ donc $p = 1$ d'où $|x| = 1$ c'est à dire $x = 1$

donc $G = N \times M$, finalement on a montré que l'ensemble N des p-éléments est facteur direct abélien de G. ■

Théorème 2.5.2.9

Soient G un groupe et $\theta \in Paut(G)$ alors θ fixe tout élément d'ordre premier p sauf, si $p > 2$ et G non périodique abélien ou, $p > 2$ et G périodique admettant un p-sous groupe de Sylow facteur direct abélien.

Preuve

Soit G un groupe et $\theta \in Paut(G)$, supposons qu'il existe un élément de G d'ordre p non fixé par θ.

Nécessairement $p > 2$.

On a $\theta(g) = g^r$ tel que $2 \leq r \leq p-1$ ce qui implique que $1 \leq r-1 \leq p-1$ donc : $1 \leq r-1 < p$ d'où $(p, r-1) = 1$

Supposons G non périodique .

1) *Si G est fort alors :*

On a $Im(-\theta + 1) \leq W(G)$ donc $g^{-1}\theta(g) \in W(G) = g^{r-1} \in W(G)$ or $g = (g^{r-1})^u (g^p)^u$ pour certains u et v; donc $g = (g^{r-1})^u$ mais $g^{r-1} \in W(G)$ donc $g \in W(G)$ d'où $\theta(g) = g$

[voir théorème 2.4.2.6] ce qui contredit le fait que θ ne fixe pas g ; donc G est faible.

$Paut\,(G) = 1$ ou $Paut\,(G) = \{1, x \longrightarrow x^{-1}\}$;mais G est non abélien alors $Paut\,(G) = 1$ *i.e* tous les éléments de G sont fixés ce qui contredit le fait que g n'est pas fixé par θ, donc nécessairement G est abélien .

Supposons G périodique

Puisque $Im\,(-1+\theta) \leq Z\,(G\,)$ alors $g^{-1}\theta(g) \in Z\,(G)$, donc $g^{r-1} \in Z\,(G)$ mais $g = (g^{r-1})^{u}$ donc $g \in Z\,(G)$

Prouvons que θ ne fixe aucun élément d'ordre p.Soit h un élément de G d'ordre p ($|h| = p$) ; on a $H = \langle g, h\rangle$ est abélien puisque $g \in Z\,(G)$ donc θ est homogène sur H [voir théorème 2.5.1.10.]et puisque $\theta\,(g) = g^{r}$, alors $\theta\,(h) = h^{r}$ $\quad (2 \leq r < p)$, donc $\theta\,(h) \neq h$, c'est à dire "θ ne fixe aucun élément d'ordre p".

On a G périodique et $Im\,(-1+\theta) \leq Z\,(G\,)$, il reste à montrer que $(-1+\theta)$ fixe tout sous groupe d'ordre p.

On a $\ker\,(-1+\theta)$ ne contient aucun élément d'ordre p puisque s'il existe $a \in \ker\,(-1+\theta)$ tel que $|a| = p$, alors $(-1+\theta)\,(a) = 1$ c'est à dire $a^{-1}\theta(a) = 1$ d'où $\theta\,(a) = a$ mais θ ne fixe aucun élément d'ordre p donc $\ker\,(-1+\theta)$ ne fixe aucun élément d'ordre p.

Soit maintenant H un sous groupe d'ordre p

On a $\ker\,(-1+\theta)\,|_{H} = \ker\,(-1+\theta) \cap H = 1$ car $\ker\,(-1+\theta)$ ne fixe aucun élément d'ordre p, donc $(-1+\theta)$ est un endomorphisme puissance injectif sur un groupe fini H ce qui implique que $(-1+\theta)$ est un automorphisme de H,

donc $Im\,(-1+\theta) = H$ c'est à dire $(-1+\theta)$ fixe tout sous groupe d'ordre p, les hypothèses du lemme 2.4.2.8 sont vérifiées ; donc l'ensemble des p-éléments de G est un facteur direct abélien de G. ■

2.6 Automorphismes fixant tout sous groupe infini $(Iaut(G))$

Définition 2.6.1

$Iaut(G)$ est l'ensemble de tous les automorphismes de G qui fixent tout sous groupe infini de G ;

$$Iaut(G) = \{\alpha \in Aut(G) \setminus \alpha(H) = H, \text{ pour tout sous groupe } H \text{ infini de } G\}$$

Proposition 2.6.2

Si G est un groupe sans torsion alors $Paut(G) = Iaut(G)$.

Preuve

Il est clair que $Paut(G) \subseteq Iaut(G)$; il reste à montrer que $Iaut(G) \subseteq Paut(G)$

Puisque G est sans torsion, alors il n'existe aucun sous groupe fini ; donc un Iautomorphisme fixe tout sous groupe de G. ■

Proposition 2.6.3

Soit G un groupe infini résiduellement fini alors : $Iaut(G) = Paut(G)$.

Preuve

Il est clair que $Paut(G) \subseteq Iaut(G)$

Soient G un groupe infini résiduellement fini et $\alpha \in Iaut(G)$; soit K un sous groupe de G .

1) *Si K est infini alors $\alpha(K) = K$.*

2) *Si K est fini*

* Soit $x \in G$ d'ordre fini donc $\langle x \rangle = \{1, x, x^2, x^3, ...x^{n-1}\}$; $|\langle x \rangle| = n$ mais G est résiduellement fini donc :

$$\begin{array}{ccccc}
\exists H_x \trianglelefteq G & \text{t.q} & |G : H_x| < \infty & \text{et} & x \notin H_x \\
\exists H_{x^2} \trianglelefteq G & \text{t.q} & |G : H_{x^2}| < \infty & \text{et} & x^2 \notin H_{x^2} \\
. & & . & & . \\
. & & . & & . \\
. & & . & & . \\
\exists H_{x^{n-1}} \trianglelefteq G & \text{t.q} & |G : H_{x^{n-1}}| < \infty & \text{et} & x^{n-1} \notin H_{x^{n-1}}
\end{array}$$

Soit maintenant $H = \bigcap_{i=1}^{n-1} H_{x^i}$.On a : $H \cap \langle x \rangle = 1$ et $|G : H| < \infty$ [Théorème de Poincaré] [25, 1.3.12 p 14]

H est infini residuellement fini et d'indice fini

* Soit N_i une famille de sous groupes normaux dans G d'indices finis et contenue dans H t.q $\bigcap_i N_i = 1$

On remarque que :

Si N_i est une famille quelconque non contenue dans H alors on peut construire une famille contenue dans H , on prend $M_i = H \cap N_i$ t.q

$$\bigcap_{i \in I} M_{i=} H \cap \left(\bigcap_{i \in I} N_i \right) = H \cap 1 = 1 \text{et } |G : M_i| = |G : H \cap N_i| = |G : H| \times |G : N_i| \langle \infty$$

Puisque tout sous groupe N_i est infini ; $\overline{\alpha}$ est un automorphisme de $\frac{G}{N_i}$ tel que :

$$\begin{array}{rccc} \overline{\alpha} : & \frac{G}{N_i} & \rightarrow & \frac{G}{N_i} \\ & xN_i & \rightarrow & \alpha(x) N_i \end{array}$$

On va montrer que $\overline{\alpha} \in Paut\left(\frac{G}{N_i}\right)$. Soit $\frac{T}{N_i}$ un sous groupe de $\frac{G}{N_i}$ (T est infini)

On va montrer que $\overline{\alpha}\left(\frac{T}{N_i}\right) \leq \frac{T}{N_i}$. Soit $\overline{\alpha}(tN_i)$ de $\overline{\alpha}\left(\frac{T}{N_i}\right)$

On a $\overline{\alpha}(tN_i) = \alpha(t) N_i$ sachant que $\alpha(t) \in T$ d'où : $\overline{\alpha}(t) N_i \in \frac{T}{N_i}$ donc $\overline{\alpha}\left(\frac{T}{N_i}\right) \leq \frac{T}{N_i}$ et comme $\frac{T}{N_i}$ est fini on obtient $\overline{\alpha}\left(\frac{T}{N_i}\right) = \frac{T}{N_i}$ ce qui nous donne $\overline{\alpha}(xN_i) = \alpha(x) N_i = (xN_i)^{r_i} = x^{r_i} N_i$ c'est à dire il existe $h_i \in N_i \leq H$ t.q $\alpha(x) = x_1^r h_i$.

Montrons que l'exposant r_i est indépendant de l'indice i en effet si $j \in I$ $(j \neq i)$

$\alpha(x) = x^{r_j} h_j$ avec $h_j \neq 1$ donc $r^i h_i = r^j h_j$ ce qui implique que $x^{r_i - r_j} = h_j h_i^1$ qui appartient à $H \cap \langle x \rangle = 1$ donc $x^{r_i - r_j} = 1$ ce qui nous donne $x^{r_i} = x^{r_j}$ donc pour un certain entier r on a $\alpha(x) = x^r$ i.e $\alpha \in Paut(G)$ d'où $Iaut(G) = Paut(G)$. ■

2.7 Automorphismes noethériens(Naut(G))

Définition 2.7.1 "Automorphisme noéthérien"

Un automorphisme α d'un groupe G est appelé "automorphisme noethérien" *si pour toute chaîne strictement croissante*

$$X_1 < X_2 < X_3..... < X_n < X_{n+1} < ....$$

de sous groupes de G il existe un entier positif m tel que que $\alpha(X_n) = X_n$ pour tout $n \geq m$.

Notation 2.7.2

L'ensemble de tous les automorphismes noethériens est noté : $Naut(G)$.

Remarque 2.7.3

** On a : $Naut(G) \trianglelefteq Aut(G)$ et $Paut(G) \leq Naut(G)$.*

Proposition 2.7.4

** Si G est un groupe qui vérifie la condition maximale alors : $Naut(G) = Paut(G)$.*

Preuve

Puisque G vérifie *max* toute chaîne croissante est stationnaire ; donc il n'existe aucune chaîne strictement croissante, et par suite tout automorphisme vérifie la propriété de noethérianité.

Proposition 2.7.5

Soit G un groupe et soit α un automorphisme noethérien de G. Soit H un sous-groupe de type fini de G. Alors $\alpha(H) = H$

Preuve

Soit x un élément quelconque de H. Comme H n'est pas de type fini. Il existe une infinité d'éléments $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$de H tels que

$$\langle x \rangle < \langle x, x_1 \rangle < \langle x, x_1, x_2 \rangle < ..... < \langle x, x_1, x_2...., x_n \rangle < ..$$

α étant noethérien, il existe $m > 0$ tel que $\alpha(\langle x, x_1, x_2...., x_m\rangle) = \langle x, x_1, x_2...., x_m\rangle$ de sorte que $\alpha(x) \in H$; donc $\alpha(H) \leq H$; le même argument peut être appliqué à α^{-1} ; ce qui donne $\alpha^{-1}(H) \leq H$ et par suite $\alpha(\alpha^{-1}(H)) \leq \alpha(H)$ c'est à dire $H \leq \alpha(H)$ d'où $\alpha(H) \leq H$.

Resultas 2.7.6[16]

(1) *Soit G un groupe localement fini. Si G n'est pas de Cerinkov ; alors $Iaut\,(G) = Paut\,(G)$*

(2) *Si G est un groupe abélien divisible ; alors $Iaut\,(G) = Paut\,(G)$.*

(3) *Si G est localement fini ; alors $Naut\,(G) = Iaut\,(G)$*

2.8 Automorphismes commutants(A(G))

Introduction

Dans cette partie du 2ième chapitre on va examiner l'ensemble des automorphismes commutants de G *(i.e $\alpha \in Aut\,(G)$ t.q $[g, \alpha\,(g)] = 1\ \forall g \in G$; tout élément commute avec son image).*

L'ensemble de tous les automorphismes de G qui sont commutants est noté $A\,(G)$. Il n'est pas nécessairement un sous groupe de $Aut\,(G)$ comme le montre la remarque 2.8.15 mais il a plusieurs propriétés.

En 1984 *I.N.Herstein* a proposé le problème suivant : Si G est simple non abélien alors $A\,(G) = \{Id_G\}$ [20] mais *T.J.Laffey* et *M.Pettet* ont généralisé le résultat en considérant un groupe semi simple comme nous allons le voir dans 2.8.3 ; donc on peut dire qu'ils ont donné des conditions sur G pour que $A(G)$ soit très petit.

Il est clair que si G est *abélien alors* $A\,(G) = Aut\,(G)$. De plus tout automorphisme central est commutant *(*$Aut_c\,(G) \subseteq A\,(G)$).

I.N.Herstein, T.J.Laffey et *M.Pettet* en imposant certaines conditions sur G ont prouvé que $A\,(G) = Aut_c\,(G) = 1$.

Pour cela en 2002 *M.Deaconescu, G.Silberberg* et *G.L.Walls* [10] ont cherché des condi-

tions suffisantes que doit vérifier un groupe G pour que $A(G) = 1 \Leftrightarrow Aut_c(G) = 1$. Leurs recherches ont été couronnées de succès comme nous allons le voir.

Proposition 2.8.2

Si G est simple non abelien alors $A(G) = \{Id_G\}$.

Preuve

Thomas Laffey a demontré le problème dans le cas où G est semi simple (i.e G n'admet aucun sous groupe normal abélien non trivial). Soient $x, y \in G$ et $\alpha \in A(G)$ et G semi simple .

On a : $xy\alpha(xy) = \alpha(xy)\,xy$ donc $xy\alpha(x)\,\alpha(y) = \alpha(x)\,\alpha(y)\,xy$ et par suite

$x^{-1}xy\alpha(x)\,\alpha(y) = x^{-1}\alpha(x)\,\alpha(y)\,xy$ donc $y\alpha(x)\,\alpha(y) = x^{-1}\alpha(x)\,\alpha(y)\,xy$ donc

$y\alpha(x)\,\alpha(y)\,y^{-1}\alpha(y^{-1}) = x^{-1}\alpha(x)\,\alpha(y)\,xyy^{-1}\alpha(y^{-1})$ c'est à dire $y\alpha(x)\,\alpha(y)\,y^{-1}\alpha(y^{-1})$ $= x^{-1}\alpha(x)\,\alpha(y)\,x\alpha(y^{-1})$ ce qui implique que : $y\alpha(x)\,y^{-1} = x^{-1}\alpha(x)\,[\alpha(y)\,x\alpha(y^{-1})]$ .....$(*)$.

Maintenant on remplace x par x^{-1} dans $(*)$on trouve que

$y\ \alpha(x)^{-1}\,y^{-1} = x\alpha(x)^{-1}\,\alpha(y)x^{-1}\alpha(y^{-1})$ donc $(y\alpha(x)^{-1}\,y^{-1})^{-1} =$

$(x\alpha(x)^{-1}\,\alpha(y)x^{-1}\alpha(y^{-1})^{-1})$ d'où $y\alpha(x)\,y^{-1} = \alpha(y)\,x\alpha(y^{-1})\,\alpha(x)\,x^{-1}$ ce qui imlique que

$$y\alpha(x)\,y^{-1} = \left[\alpha(y)\,x\alpha\left(y^{-1}\right)\right]x^{-1}\alpha(x)\,.....\,(**)$$

De $(*)$ et $(**)$ on trouve que $x^{-1}\alpha(x)$ commute avec $y\alpha(x)\,y^{-1}$ et $\alpha(y)\,x\alpha(y^{-1})$ pour tout y de G donc $x^{-1}\alpha(x)$ commute avec N tel que $N = \langle x, \alpha(x)\rangle$ ce qui implique que $x^{-1}\alpha(x) \in Z(N)$ .Or $Z(N)$ est un sous-groupe normal abélien de G et puisque G est semi simple alors $Z(N) = 1$ donc $x^{-1}\alpha(x) = 1$ d'où $\alpha(x) = x$ c.à.d $A(G) = \{Id_G\}$. ■

Remarques 2.8.3

Soit $\alpha \in Aut(G)$

- $\alpha \in Aut_c(G)$ si, et seulement si, la fonction $x \longrightarrow [x, \alpha]$ est un homomorphisme

- $\alpha \in A(G)$ si, et seulement si, la fonction $x \longrightarrow [x, \alpha]$ conserve la puissance (i.e $[x^n, \alpha] = [x, \alpha]^n$ $n \in N$)

Thérème 2.8.4

Soit G un groupe vérifiant max

Si $\alpha \in A(G)$ *alors* $[G, \alpha] \subseteq Z_\infty(G)$ *en particulier* $A(G) = 1$ *si, et seulement si,* $Aut_c(G) = 1$.*(On rappelle que* $Z_\infty(G)$ *désigne l'hypercentre de* G*).*

Théorème 2.8.5

Soit G *un groupe tel que* $Z(G')$ *ne contienne aucune involution alors* $A(G)$ *est un sous groupe de* $Aut(G)$ *si, et seulement si, tout commutateur d'éléments de* $A(G)$ *est central.*

Théorème 2.8.6

Si G *est un groupe* $\alpha \in A(G)$ *alors* $[G^2, \alpha] \subseteq Z_2(G)$.

Proposition 2.8.7

Dans un groupe arbitraire un élément 2- Engel a droite d'ordre impair appartient au $3^{ème}$ *centre* $Z_3(G)$

Preuve

voir [9, lemme 4.3.2]

Remarque 2.8.8

On a :

$$\begin{aligned} g \in Z(G) &\iff T_g = 1 \\ g \in N(G) &\iff T_g \in Paut(G) \\ g \in Z_2(G) &\iff T_g \in Aut_c(G) \\ g \in R_2(G) &\iff T_g \in A(G) \end{aligned}$$

Proposition 2.8.9

Soit G *un groupe, alors :*

$$Z(G) \leq N(G) \leq Z_2(G) \leq R_2(G)$$

ces quatre sous-groupes sont tous caractéréstiques dans G.

Preuve

On a $Z(G) \leq N(G)$ et $Z_2(G) \leq R_2(G)$ on va montrer que $N(G) \leq Z_2(G)$

Soient : $g \in N(G)$ alors $T_g \in Paut(G)$ or tout automorphisme puissance est central donc $T_g \in Aut_c(G)$ c.à.d $g \in Z_2(G)$ ce qui implique que $N(G) \leq Z_2(G)$ d'où :

$$Z(G) \leq N(G) \leq Z_2(G) \leq R_2(G)$$

■

Lemme 2.8.10[T.J Laffey)]

Si $\alpha \in A(G)$ *et* $x, y \in G$ *alors :*

$$[\alpha(x), y] = [x, \alpha(y)]$$

Preuve

soient $x, y \in G$ donc $x\ y^{-1} \in G$ *et soit* $\alpha \in A(G)$

$$\begin{aligned}
\alpha \in A(G) \Rightarrow x\ y^{-1}\alpha\ (x\ y^{-1}) &= \alpha\ (x\ y^{-1})\, x\ y^{-1} \\
&\Rightarrow xy^{-1}\alpha(x)\,\alpha(y) = \alpha(x)\,\alpha(y^{-1})\, x\ y^{-1} \\
&\Rightarrow y^{-1}\alpha(x) = x^{-1}\alpha(x)\,\alpha(y^{-1})\, xy^{-1}\alpha(y) \\
&\Rightarrow \alpha(x)^{-1}\, y^{-1}\alpha(x)\, y = \alpha(x)^{-1}\, x^{-1}\alpha(x)\,\alpha(y^{-1})\, x\ y^{-1}\alpha(y)\, y \\
&\Rightarrow [\alpha(x), y] = \underbrace{\alpha(x)^{-1}\, x^{-1}\alpha(x)\, x}_{=1}\ x^{-1}\alpha(y^{-1})\, x\ y^{-1}\alpha(y)\, y \\
&\Rightarrow [\alpha(x), y] = (x)^{-1}\,\alpha(y^{-1})\, x\ y^{-1}\alpha(y)\, y \\
&\Rightarrow [\alpha(x), y] = (x)^{-1}\,\alpha(y^{-1})\, x\ \alpha(y)\ \underbrace{\alpha\left(y^{-1}\right) y^{-1}\alpha(y)\, y}_{=1} \\
&\Rightarrow [\alpha(x), y] = [x, \alpha(y)]\ \blacksquare
\end{aligned}$$

Définition 2.8.11

Un automorphisme α *est dit* "permutant" si $[\alpha(x), y] = [x, \alpha(y)] \qquad \forall x, y \in G.$

L'ensemble de tous les automorphismes permutants est noté $A_1(G)$

$$A_1(G) = \{\alpha \in Aut(G) \mid [\alpha(x), y] = [x, \alpha(y)] \quad \forall x, y \in G\}$$

donc on a : $A(G) \subset A_1(G)$

Lemme 2.8.12

Pour tout $\alpha \in A(G)$ *et* $x \in G$ *on a* $[x, \alpha] \in C_G\left(G'\right)$

Preuve

Soient $x, y, z \in G$ *et* $\alpha \in A(G)$

On a : $[\alpha(xy), z] = [\alpha(x)\alpha(y), z] = [\alpha(x), z]^{\alpha(y)}[\alpha(y), z] .. (1)$ et $[\alpha(xy), z] = [xy, \alpha(z)] = [x, \alpha(z)]^{y}[y, \alpha(z)] = [\alpha(x), z]^{y}[\alpha(y), z] ..... (2)$;de (1) et (2) on trouve que : $[\alpha(x), z]^{y} = [\alpha(x), z]^{\alpha(y)}$ donc $[\alpha(x), z]^{y^{-1}\alpha(y)} = [\alpha(x), z]$ c.à.d $y^{-1}\alpha(y) \in C_G([\alpha(x), y])\ \forall x, y, z$ de G d'où $y^{-1}\alpha(y) = [y, \alpha] \in C_G(G')$ ■

Résultat 2.8.13

$$\alpha \in A_1(G) \Rightarrow [G, \alpha] \subseteq C_G(G')$$

Lemme 2.8.14

Soit G *un groupe engendré par* X *et soit* $\alpha \in Aut(G)$, *supposons que* α *fixe* G' *et* $\alpha^2 \in Aut_c(G)$ *et que* $[x, \alpha(x)] = 1 \ \forall x \in X$ *alors* $\alpha \in A(G)$

Preuve

Montrons d'abord que α est permutant c.à.d $\alpha \in A_1(G)$

soient $x, y \in G$ alors $[x, \alpha(y)] = \alpha[x, \alpha(y)] = [\alpha(x), \alpha^2(y)]$ donc $\exists z \in Z(G)$ tel que $[\alpha(x), \alpha^2(y)] = [\alpha(x), yz]$ d'où $[x, \alpha(y)] = [\alpha(x), z][\alpha(x), y]^{z} = [\alpha(x), y]^{z} = [\alpha(x), y]$donc : $\alpha \in A_1(G)$

Si α est commutant sur X alors il l'est aussi sur X^{-1}mais on sait que tout élément g de G s'écrit sous la forme $g = x_1x_2.....x_n$ où $x_i \in X\ U\ X^{-1}$.

Prouvons par récurrence que α est commutant sur X^n .

Pour $n = 1$; α est commutant par hypothèse.

Pour $n = 2$

Si $x, y \in X$ alors $[xy, \alpha(xy)] = [xy, \alpha(x)\alpha(y)] = [x, \alpha(x)\alpha(y)]^{y}[y, \alpha(x)\alpha(y)] = y^{-1}[x, \alpha(y)]\underbrace{[x, \alpha(x)]^{\alpha(y)}}_{=1}\ y\ \underbrace{[y, \alpha(y)]}_{=1}[y, \alpha(x)] = [x, \alpha(y)]^{y}[y, \alpha(x)]^{\alpha(y)}$ mais $y^{-1}\alpha(y) \in C_G(G')$ donc $([x, \alpha(y)][y, \alpha(x)])^{\alpha(y)} = 1$ c'est à dire pour $n = 2 : \alpha \in A\ (G)$

Maintenant on suppose que α est commutant sur $(XUX^{-1})^{n-1}$ et on prouve qu'il est commutant sur $(XUX)^{n}$.

Soit $g \in G$ / $g = x_1x_2.....x_n$; posons $g_1 = x_1x_2.....x_{n-1}$.Utilisons la méthode précédente pour calculer $[g.\alpha(g)]$ qui est égal à $[g_1x_n, \alpha(g_1x_n)]$ on arrive à $[g.\alpha(g)] = 1$ donc

α est commutant sur $G = 1$. ■

Remarque 2.8.15

$A(G)$ n'est pas en général un sous groupe de $Aut(G)$

Preuve

Soit G "le produit central" [voir 1.3.12] *de deux groupes diédraux d'ordre* 2^3.

$G = \langle a, b; c; d \ / a^4 = b^2 = d^2 = 1, a^2 = c^2, [a,b] = [c,d] = a^2 \rangle$ *et* $[a,c] = [a,d] = [b,c] = [b,d] = 1$

G est un groupe "extra spécial" [voir 1.3.11] *d'ordre* $2^{2.2+1} = 32$

Soient α, β deux automorphismes définis par :

$$\alpha : \begin{array}{lcl} a & \to & c \\ b & \to & d \\ c & \to & a \\ d & \to & b \end{array} \qquad \beta : \begin{array}{lcl} a & \to & ad \\ b & \to & b \\ c & \to & cb \\ d & \to & d \end{array}$$

α, β satisfont à l'hypothèse du [lemme 2.8.16] d*onc $\alpha, \beta \in A(G)$ mais $\alpha\beta \notin A(G)$ puisque* $[a, \alpha\beta(a)] = [a, cd] = [a,c]^b \ [a,b] = [a,b] \neq 1$

Définition 2.8.16

Un automorphisme α est dit "automorphisme centralisateur" si $\alpha(C_G(x)) = (C_G(x))$ $\forall x \in G$. *L'ensemble de tous les automorphismes centralisateurs est noté $Cent(G)$*

$$Cent(G) = \{\alpha \in Aut(G) \ / \ \forall x \in G \quad \alpha(C_G(x)) = (C_G(x))\}$$

ou $Cent(G) = \{\alpha \in Aut(G) \ / \ \forall x, y \in G \quad [x,y] = 1 \Leftrightarrow [x, \alpha(y)] = 1\}$

Résultats 2.8.17

$Cent(G)$ est un sous-groupe normal de $Aut(G)$ contenant $Aut_c(G)$ et contenu dans $A(G)$;

$$Aut_c(G) \leq Cent(G) \subseteq A(G)$$

Preuve

On va montrer que $Cent(G) \subseteq A(G)$. Soit $\alpha \in Cent(G)$ et soit $x \in G$, on a $\alpha(C_G(x)) = C_G(x)$. Or $x \in C_G(x)$ donc $\alpha(x) \in C_G(x)$ ce qui implique que $[x, \alpha(x)] = 1$.

* Maintenant on montre que $Aut_c(G) \leq Cent(G)$, posons $C_G(x) = C$ et soit $\alpha \in Aut_c(G)$. On va prouver que $\alpha(C) = C$.

Soit $y \in \alpha(C)$ donc $\exists a \in C \ / \ y = \alpha(a)$ donc $\exists z \in Z(G)$ t.q $y = az$ donc $[y,x] = [az,x] = [a,x]^z [z,x] = [a,x] = 1$ d'où $y \in C$ donc $\alpha(C) \subseteq C$.

Soit $y \in C$ donc $[x,y] = 1$ ce qui implique que $[\alpha(x), y] = 1$ (car α est central) donc $[y, \alpha(x)] = 1$ c.à.d $y \in \alpha(C)$ d'où $C \subseteq \alpha(C)$. Finalement on a trouvé que $\alpha(C) = C$ -*i.e*- $\alpha \in Cent(G)$.

** Prouvons que $Cent(G) \trianglelefteq Aut\ (G)$

Soit $\alpha \in Cent(G)$ et $\beta \in Aut\ (G)$ et soient $x, y \in G$

On a $[x,y] = 1$ donc $\beta([x,y]) = [\beta(x), \beta(y)] = 1$ et puisque $\alpha \in Cent(G)$ on trouve que $[\beta(x), \beta(y)] = [\beta(x), \alpha\beta(y)] = 1$ ce qui implique que $\beta^{-1}[\beta(x), \alpha\beta(y)] = 1$ donc$\left[x, \beta^{-1}\alpha\beta(y)\right] = 1$.

Supposons maitenant que $\left[x, \beta^{-1}\alpha\beta(y)\right] = 1$ et on montre que $[x,y] = 1$

On a $\left[x, \beta^{-1}\alpha\beta(y)\right] = 1$ donc $[\beta(x), \alpha\beta(y)] = 1$ ce qui implique que $[\beta(x), \beta(y)] = 1$; donc $[x,y] = 1$ c.à.d $\left[x, \beta^{-1}\alpha\beta(y)\right] = 1$ c.à.d $\alpha \in Cent(G)$ d'où $Cent(G) \leq Aut\ (G)$. ■

Lemme 2.8.18

Soit G un groupe

1) a) $A(G)$ est réunion de classes modulo $Cent(G)$ et

b) Si $\alpha \in A(G)$ alors $\alpha^2 \in Cent(G)$.

2) $A(G)$ est stable par puissance.

3) $A(G)$ est stable par conjugaison.

De plus si $\alpha, \beta \in A(G)$ alors :

4) $(\alpha\beta \in A(G)) \Rightarrow [\alpha, \beta] \in Aut_c(G)$.

5) $[\alpha, \beta]$ fixe tout élément de G'

6) $\alpha\beta \in A(G)$ si et seulement si $[\alpha(x), \beta(x)] = 1$.

7) $(\alpha\beta)^n \alpha$ et $\beta(\alpha\beta)^n \in A(G)$ pour tout $n \geq 0$.

8) $\alpha^2 \in Aut_c(G) \Longleftrightarrow G' \leq C_G(\alpha)$.

Preuve

1.a) $A(G)$ est reunion de classes modulo $Cent(G)$

Il faut montrer que :

$$\forall\ \alpha \in A(G) \qquad \alpha Cent(G) \subseteq A(G) \quad \text{et} \quad Cent(G)\,\alpha \subset A(G)$$

- $\alpha Cent(G) \overset{?}{\subseteq} A(G)$. Soit $\gamma \in Cent(G)$ et soient $\alpha \in A(G)$ et $x \in G$

On a $[x, \alpha\gamma(x)] = \alpha^{-1}\,[x, \alpha\gamma(x)] = [\alpha^{-1}(x), \gamma(x)] = 1$ (comme $\gamma \in Cent(G)$ alors $[\alpha^{-1}(x), (x)] = 1$ si, et seulement si, $[\alpha^{-1}(x), \gamma(x)] = 1$) d'où $\alpha\gamma \in A(G)$.

- $Cent(G)\,\alpha \overset{?}{\subseteq} A(G)$. Soit $\gamma \in Cent(G)$ et soient $\alpha \in A(G)$ et $x \in G$.

On a $[x, \alpha(x)] = 1$ (puisque α est commutant) donc $[x, \gamma\alpha(x)] = 1$ car $\gamma \in Cent(G)$ d'où $\gamma\alpha \in A(G)$

b) Soient $\alpha \in A(G), x \in G$ et soit $y \in C_G(x)$

On a : $[x, \alpha^2(y)] = [\alpha(x), \alpha(y)]$ (α étant permutant) donc $[x, \alpha^2(y)] = \alpha([x, y]) = \alpha(1) = 1$; d'où $\alpha^2 \in Cent(G)$.

2) $A(G)$ est stable par puissance c.à.d

$$\forall n \in N \quad \alpha \in A(G) \Rightarrow \alpha^n \in A(G)$$

Pour $n = 1$, $\alpha \in A(G)$; et pour $n = 2$, $\alpha^2 \in Cent(G) \subseteq A(G)$

Supposons la propriété vraie pour $m \leq n$ et montrons la pour $n+1$

On a : $\forall x \in G : [x, \alpha^{n+1}(x)] = [x, \alpha^n\alpha(x)] = [\alpha^n(x), \alpha(x)] = \alpha[\alpha^{n-1}(x), x] = \alpha(1) = 1$ puisque $[\alpha^{n-1}(x), x] = 1$ (hypothèse de récurrence) donc : $\forall n \in N \quad \alpha \in A(G) \Rightarrow \alpha^n \in A(G)$.

3) $A(G)$ est stable par conjugaison

Soient $\alpha \in A(G)$, $x \in G$ et soit $\gamma \in Aut(G)$

On a : $1 = [\alpha(\gamma(x)), \gamma(x)]$ donc $\gamma^{-1}[\alpha(\gamma(x)), \gamma(x)] = 1$ c.à.d $[\gamma^{-1}\alpha\gamma(x), x] = 1$ d'où $\gamma^{-1}\alpha\gamma \in A(G)$(i.e $A(G)$ est stable par conjugaison).

4) Soit $z \in G$.

On va montrer que :$[\alpha,\beta](z) \in z\ Z(G)$ c.à.d : $z^{-1}[\alpha,\beta](z) \in Z(G)$ c.à.d $x^z = x^{[\alpha,\beta](z)}$ $\forall x \in G$

Posons $y = \alpha\beta(z)$ c.à.d $z = \beta^{-1}\alpha^{-1}(y)$ donc on va montrer que $x^{\beta^{-1}\alpha^{-1}(y)} \overset{?}{=} x^{\alpha^{-1}\beta^{-1}(y)}$ (puisque $[\alpha,\beta](z) = \alpha^{-1}\beta^{-1}(y)$) c.à.d on va vérifier que : $\left[x,\beta^{-1}\alpha^{-1}(y)\right] = \left[x,\alpha^{-1}\beta^{-1}(y)\right]$ $\forall x \in G$

On a : $\forall x \in G\ \left[x,\beta^{-1}\alpha^{-1}(y)\right] = [x,(\alpha\beta)^{-1}(y)] = [(\alpha\beta)^{-1}x,y] = \left[\beta^{-1}\alpha^{-1}(x),y\right] = \left[\alpha^{-1}(x),\beta^{-1}(y)\right]$ (puisque β^{-1} est permutant) donc $\left[x,\beta^{-1}\alpha^{-1}(y)\right] = \left[x,\alpha^{-1}\beta^{-1}(y)\right]$ (puisque α^{-1} est permutant) donc :

$$z^{-1}[\alpha,\beta](z) \in Z(G) \text{ d'où } [\alpha,\beta] \in Aut_c(G)$$

5) Pour montrer que $[\alpha,\beta]$ fixe tout élément de G' il suffit de montrer que

$$\alpha\beta([x,y]) = \beta\alpha([x,y]) \quad \forall x,y \in G$$

Soient $x,y \in G$ et soient $\alpha.\beta$ de $A(G)$. On a donc $\alpha\beta([x,y]) = \alpha[\beta(x),\beta(y)] = \alpha\left[\beta^2(x),y\right] = \left[\alpha\beta^2(x),\alpha(y)\right] = \left[\beta^2(x),\alpha^2(y)\right] ...(1)$; d'autre part, on a $\beta\alpha([x,y]) = \beta[\alpha(x),\alpha(y)] = \beta\left[\alpha^2(x),y\right] = [\beta\alpha^2(x),\beta(y)] = \left[\alpha^2(x),\beta^2(y)\right] .....(2)$

De (1) et (2) on trouve que $\alpha\beta([x,y]) = \beta\alpha[x,y]$c.à.d $[\alpha,\beta]([x,y]) = [x,y]$ $\forall x,y \in G$ donc $[\alpha,\beta]$ fixe tout élément de G'.

6) Si $\alpha\beta \in A(G)$ alors :

$\forall x \in G \quad [x,\alpha\beta(x)] = 1$ donc $[\alpha(x),\beta(x)] = 1 \quad (\alpha$ est permutant).

7) $(\alpha\beta)^n\alpha$ et $\beta(\alpha\beta)^n \in A(G)$ pour tout $n \geq 0$

Pour $n = 1$. On a $[\alpha\beta\alpha(x),x] = [\beta(\alpha(x)),\alpha(x)] = 1 \quad \forall x \in G$ et $[\beta\alpha\beta(x),x] = [\alpha(\beta(x)),\beta(x)] = 1 \quad \forall x \in G$.

Supposons que $(\alpha\beta)^n\alpha$ et $\beta(\alpha\beta)^n \in A(G)$ et montrons que $(\alpha\beta)^{n+1}\alpha$ et $\beta(\alpha\beta)^{n+1} \in A(G)$. On a $(\alpha\beta)^{n+1}\alpha = \underbrace{(\alpha\beta)(\alpha\beta)(\alpha\beta)...(\alpha\beta)}_{n+1 fois}\alpha = \alpha\beta(\alpha\beta)^n\alpha$ / $\alpha \in A(G)$, $\beta(\alpha\beta)^n \in A(G)$ donc $(\alpha\beta)^{n+1}\alpha \in A(G)$; et $\beta(\alpha\beta)^{n+1} = \beta\underbrace{(\alpha\beta)(\alpha\beta)(\alpha\beta)....(\alpha\beta)}_{n+1 fois} = \beta(\alpha\beta)^n\alpha\beta$ |

$\beta \in A(G)$, $(\alpha\beta)^n \beta \in A(G)$ donc $(\alpha\beta)^{n+1} \alpha \in A(G)$.

8) Soient $\forall x, y \in G$

On a :$[x,y] = [x, \alpha^2(y)]$ (puisque $\alpha^2 \in Aut_c(G)$) d'où $[x,y] = [\alpha(x), \alpha(y)] = \alpha([x,y])$ donc α fixe point par point G' et par suite $G' \leq C_G(\alpha)$. ■.

Proposition 2.8.19

Soit G un groupe alors $R_2(G)$ est un sous groupe de G et $R_2(G)' \leq Z_2(G)$

Preuve

On a vu que $g \in R_2(G) \Leftrightarrow Tg \in A(G)$et comme $A(G)$ est stable par inversion alors $R_2(G)$ l'est aussi, donc $g \in R_2(G) \Rightarrow g^{-1} \in R_2(G)$

Soient g et h deux éléments de $R_2(G)$. On va montrer que $gh \in R_2(G)$ c.à.d $T_{gh} \in A(G)$ c.à.d $T_g T_h \in \in A(G)$ donc il suffit de montrer que $[T_g(x), T_h(x)] \stackrel{?}{=} 1 \quad \forall x \in G$

(i.e $\left[x^g, x^h\right] = 1 \ \forall x \in G$)

$$\begin{array}{rrcl} \text{On a :} & \alpha \in A(G) & \Rightarrow & [x,\alpha] \in C_G(G') \\ \text{Donc} & T_g \in A(G) & \Rightarrow & [x,T_g] \in C_G(G') \\ & & \Rightarrow & x^{-1}T_g(x) \in C_G(G') \\ & & \Rightarrow & x^{-1}g^{-1}xg \in C_G(G') \\ & & \Rightarrow & [x,g] \in C_G(G') \end{array}$$

De même on va trouver que $[x,h] \in C_G(G')$ mais $[x,g], [x,h] \in G'$donc $[x,g], [x,h] \in C_G(G') \cap G' = Z(G')$

Soit $H = \langle x, [x,g], [x,h] \rangle$, $Z(G') \leq C_G(G')$, $x \in C_G(G')$, $[x,g]$ et $[x,h] \in Z(G')$ les trois éléments x, $[x,g]$ et $[x,h]$ commutent entre eux, donc H est abélien, or $x^g = x[x,g]$ et $x^h = x[x,h]$donc $\left[x^g, x^h\right] = 1$, d'où $T_{gh} \in A(G)$ c.à.d $gh \in R_2(G)$. Finalement on a trouvé que $R_2(G) \leq G$

2) On sait que $\frac{R_2(G)}{Z_2(G)}$ est abélien $\Leftrightarrow R_2(G)' \leq Z_2(G)$

Soient g, h deux éléments de $R_2(G)$, donc $gh \in R_2(G)$ c.à.d $T_{gh} \in A(G)$ donc $T_g \circ T_h = T_g.T_h \in A(G)$ et par suite $[T_g, T_h] \in Aut_c(G)$ or $[T_g, T_h] = T_{[g,h]}$, donc $T_{[g,h]} \in Aut_c(G)$ c.à.d $gh \in Z_2(G)$ ce qui implique $[gZ_2(G), hZ_2(G)] = Z_2(G)$ donc $\frac{R_2(G)}{Z_2(G)}$ est abélien d'où $R_2(G)' \leq Z_2(G)$ ■

Lemme 2.8.20

Soit G un groupe et soit $\alpha \in A(G)$ alors

$\dot{I})$ $[G,\alpha] \leq R_2(G)$

$\dot{I}\dot{I})$ $[G',\alpha] = Z(G)$

$\dot{I}\dot{I}\dot{I})$ $[G',G] \leq \gamma_3(G) \leq C_G(\alpha)$

$\dot{I}V)$ $[G,\alpha^2] \leq Z_2(G)$

Preuve

$\acute{l})$ On a pour tous x et y de G :

$[x^{-1}\alpha(x),y] = [x^{-1},y]^{\alpha(x)}[\alpha(x),y] = [x^{-1},y]^x[x,\alpha(y)] = [x^{-1},y]^x[x,\alpha(y)^y] =$

$x^{-1}(xy^{-1}x^{-1}y)\,x.x^{-1}(\alpha(y)^y)^{-1}x\alpha(y)^y = y^{-1}\left(x^{-1}(y^{-1}\alpha(y))^{-1}x(y^{-1}\alpha(y))\right)\ y = [x,y^{-1}\alpha(y)]^y$,donc $[y,x^{-1}\alpha(x)]^x = [y^{-1}\alpha(y),x]$

De la même manière on trouve que :

$[y,x^{-1}\alpha(x)] = [y^{-1}\alpha(y),x]^y$ d'où$[y,x^{-1}\alpha(x)] = [y,x^{-1}\alpha(x)]$

ce qui implique que $[y,x^{-1}\alpha(x)] \in C_G(xy)\ \ \forall x,y \in G$.

Maintenant on remplace y par x^{-1} ce qui nous donne $[x^{-1}y,x^{-1}\alpha(x)] \in C_G(y)$

or $[x^{-1}y,x^{-1}\alpha(x)] = [x^{-1},x^{-1}\alpha(x)]^y[y,x^{-1}\alpha(x)] = [x^{-1},\alpha(x)]^y[y,x^{-1}\alpha(x)] =$

$(y^{-1}x\alpha(x)^{-1}x^{-1}\alpha(x)\,y)\ (y^{-1}\alpha(x)^{-1}xyx^{-1}\alpha(x)) = (y^{-1}x^{-1}\alpha(x)\ ^{-1}yx^{-1}\alpha(x)$

$= [y,x^{-1}\alpha(x)] \in C_G(y)$donc$[y,x^{-1}\alpha(x)]$ commute avec y et xy; d'où $[y,x^{-1}\alpha(x)] \in C_G(x)$ et $[y,x^{-1}\alpha(x)] \in C_G(y)$ c.à.d $[x^{-1}\alpha(x),y,y] = 1\forall y \in G$. Finalement on a trouvé que $[G,\alpha] \leq R_2(G)$.

$\acute{l}\acute{l})$ $[G',\alpha] \leq Z(G)$

Soient x dans G' et y dans G

On a $[x^{-1}\alpha(x),y] = [x^{-1},y]^{\alpha(x)}[\alpha(x),y] = [x^{-1},y]^x[x,\alpha(y)] =$

$x^{-1}x\ y^{-1}x^{-1}yxx^{-1}\alpha(y)^{-1}x\alpha(y) = y^{-1}x^{-1}\left(y\alpha(y)^{-1}\right)x\alpha(y)$ mais d'aprés le lemme 2.8.12 $y\alpha(y)^{-1} \in C_G(G')$ or $x \in G'$ donc : $[x^{-1}\alpha(x),y] = y^{-1}y\alpha(y^{-1})x^{-1}x\alpha(y) = 1$ d'où $(x^{-1}\alpha(x)) \in Z(G)$ ce qui implique que $[x,\alpha] \in Z(G)\quad \forall x \in G'$.

$\acute{l}\acute{l}\grave{I})$ Soient x,y,z dans G

Notons que $\alpha([x,y],z) = [\alpha([x,y]),\alpha(z)] = [[x,y],\alpha^2(z)] = [[x,y],z]\ \ \forall x,y,z$ donc $[G',G] \in C_G(\alpha)$.

$\acute{l}V$) Soient x, y de G

On a $[x^{-1}\alpha^2(x), y] = [x^{-1}, y]^{\alpha^2(x)}[\alpha^2(x), y] = [x^{-1}, y]^x[\alpha(x), \alpha(y)] = [y, x]\,\alpha([x, y]) \in Z(G)$ (d'aprés $\acute{l}\acute{l}$) donc $x^{-1}\alpha^2(x) \in Z_2(G)$. ■

Preuve du théorème 2.8.4

Pour montrer que $[G, \alpha] \subseteq Z_\infty(G)$, on applique un résultat trés important de *Baer* [25, 12.3.7]

Soit G un groupe vérifiant max, alors $L(G)$ et $\bar{L}(G)$ coinsident avec le Hirsh -Plotkin radical qui est nilpotent et $R(G)$ et $\bar{R}(G)$ coincident avec l'hypercentre qui est égal à $Z_m(G)$ pour un certain m .

En particulier si G est un Engel groupe alors, G est nilpotent

On a $R_2(G) \leq Z_\infty(G)$ donc $[G, \alpha] \subseteq R_2(G) \leq Z_\infty(G)$ d'où $[G, \alpha] \subseteq Z_\infty(G)$

Prouvons maitenant cette conjecture :

$$G \text{ vérifiant max alors, } Aut_c(G) = 1 \Rightarrow A(G) = 1$$

Soit G un groupe vérifiant max tel que $Aut_c(G) = 1$ il faut d'abord prouver que $Z_2(G) = Z_1(G)$. Ona: $Z_2(G) \subseteq Z_1(G)$

Soit $g \in Z_2(G)$; donc $T_g \in Aut_c(G)$ c.à.d$T_g = 1$ ce qui implique que $g \in Z_1(G)$ d'où $Z_1(G) = Z_2(G)$ ce qui nous donne que $Z(G) = Z_\infty(G) = R_2(G)$.

Soit maintenant $\alpha \in A(G)$ d'après lemme 2.8.20 ; on a $x^{-1}\alpha\ (x) \in R_2(G) = Z\ (G)$ donc $\alpha(x) \in xZ\ (G)$ c.à.d α est central d'où α est trivial. ■

Preuve du théorème 2.8.5

Soit G un groupe tel que $Z(G')$ ne contienne aucune involution

$$A(G) \leq Aut(G) \overset{?}{\Longleftrightarrow} \text{ Tout commutateur de } A(G) \text{ est central}$$

Si $A(G) \leq Aut(G)$ donc pour tous α, β dans $A(G)$ on a : $\alpha, \beta \in A(G)$ ce qui implique $[\alpha, \beta] \in Aut_c(G)$ (Lemme 2.8.18)

Maintenant on suppose que tout commutateur de $A(G)$ est central et montrons que

$A(G)$ est un sous groupe de $Aut(G)$. Soient $\alpha, \beta \in A(G)$ et $x \in G$; $[\alpha, \beta]$ est central donc $\exists z \in Z(G)$ t.q $[\alpha, \beta](x) = xz$ c.à.d $[\alpha\beta(x), x] = [\alpha\beta(x), xz] = [\alpha\beta(x), [\alpha, \beta](x)] = \left[\alpha\beta(x), \alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta(x)\right] = \left[\beta(x), \alpha\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta(x)\right] = \left[x, \beta\beta^{-1}\alpha\beta(x)\right] = [x, \alpha\beta(x)]$ donc

$$[\alpha\beta(x), x]^2 = 1 \quad \forall x \in G..... (1)$$

On a $[x^{-1}, \alpha\beta(x)]^x = [\alpha\beta(x), x]$ or $[x^{-1}, \alpha\beta(x)] = x.\alpha\beta(x)^{-1}.x^{-1}.\alpha\beta(x)$

$$= \underbrace{x\beta(x)^{-1}}_{\in C_G(G')}\underbrace{\beta(x)}_{\in C_G(G')}\underbrace{\alpha(\beta(x))^{-1}}_{\in C_G(G')}\underbrace{x^{-1}(\beta(x))}_{\in C_G(G')}\underbrace{\beta(x)^{-1}\alpha(\beta(x))}_{\in C_G(G')}$$

donc :

$$\left[x^{-1}, \alpha\beta(x)\right] \in C_G(G') \cap G = Z(G') ..... (2)$$

On a $[\alpha\beta(x), x] = [x^{-1}, \alpha\beta(x)]^x \in Z(G')$ et puisque $[\alpha\beta(x), x]^2 = 1$ et que $Z(G')$ ne contient aucune involution, alors $[\alpha\beta(x), x] = 1 \ \forall x \in G$ d'où $\alpha\beta(x) \in A(G)$ ce qui implique que $A(G) \leq Aut(G)$ ■

Preuve du théorème 2.8.6

Soient G un groupe et $\alpha \in A(G)$

D'abord il faut montrer que $\frac{R_2(G) \cap C_G(G')}{Z_2(G)}$ est un 2- groupe abélien élémentaire c.à.d il faut montrer que pour tout

$$x \in R_2(G) \cap C_G(G') : (x\ Z_2(G))^2 = Z\ (G) \Leftrightarrow x^2 \in Z_2(G)$$

Soit $x \in R_2(G)$ implique $T_x \in A(G) ..... (1)$

Soient a, b dans G. On a $T_x([a, b]) = [a, b]^x = [a, b]$ car $x \in C_G(G')$ donc $G' \leq C_G(T_x)$

Comme $T_x \in A(G)$, alors $(T_x)^2 \in Aut_c(G)$ c.à.d $T_{x^2} \in Aut_c(G)$ donc $x^2 \in Z_2(G)$ i.e$(xZ_2(G))^2 = Z_2(G)$ d'où $\frac{R_2(G) \cap C_G(G')}{Z_2(G)}$ est un 2-p groupe abélien élémentaire.

Maintenant soit $\alpha \in A(G)$ et $x \in G$ .On a $[x^2, \alpha] = x^{-2}\alpha(x^2) = x^{-1}x^{-1}\alpha(x)\alpha(x)$ $= x^{-1}\ (\alpha(x)x^{-1})\alpha(x) = (x^{-1}\alpha(x))^2$ t.q $x^{-1}\alpha(x) \in R_2(G) \cap C_G(G')$donc $[x^2, \alpha] =$

$(x^{-1}\alpha(x))^2 \in Z_2(G)$ ■

2.9 Automorphismes fixant tout sous groupe non normal($\mathbf{Aut}_{nn}(\mathbf{G})$)

Définition 2.9.1

Soit G un groupe.

Un automorphisme α de G qui fixe tout sous groupe non normal de G est appelé " un automorphisme non normal de G ". *L'ensemble de tous les automorphismes non normaux de G est noté $Aut_{nn}(G)$.*

$$Aut_{nn}(G) = \{\alpha \in Aut\ (G) \mid \alpha(H) = H \ \text{ pour tout } H \not\trianglelefteq G\}$$

Remarque 2.9.2

$Aut_{nn}(G)$ est un sous groupe normal de $Aut\ (G)$ contenant $Paut\ (G)$.

Lemme 2.9.3

Soit H un sous groupe propre de G alors G est engendré par $G\backslash H$.

Preuve

Soit $g \in G$

1) Si $g \in G\backslash H$ alors $g = g$.

2) Si $g \in H$, soit $x \in G \backslash H$, on a $g = x^{-1}(xg)$; $[(x \in G\backslash H)$ alors $(x^{-1} \in G\backslash H)]$. Il reste à montrer que $(xg) \in G\backslash H$. Supposons que $(xg) \notin G \backslash H$ alors $xg \in H$ mais $x = (xg)\, g^{-1}$ t.q $xg \in H$ et $g^{-1} \in H$ alors $x \in H$ ce qui contredit le fait que $x \in G \backslash H$, donc $(xg) \in G \backslash H$ d'où $G = \langle G\backslash H\rangle$. ■

Théorème 2.9.4

$Aut_{nn}(G)$ opère trivialement sur $\frac{G}{N(G)}$ et $\gamma_3(G)$.

Preuve

Soit $\alpha \in Aut_{nn}(G)$ et soit $x \in G$; a t-on $x^{-1}\alpha(x) \in N(G)$. Pour montrer que

$x^{-1}\alpha(x) \in N(G)$ il suffit de montrer que $T_{x^{-1}\alpha(x)}$ est un automorphisme puissance .

Soit $H \leq G$. On a $T_{x^{-1}\alpha(x)}(H) = \alpha(x)^{-1} xHx^{-1}\alpha(x)$.

1) Si H est normal dans G alors :

$$T_{x^{-1}\alpha(x)}(H) = \alpha(x)^{-1} H\ \alpha(x) = H$$

2) Si H est non normal dans G alors $(x^{-1}Hx)$ est aussi non normal dans G donc :

$T_{x^{-1}\alpha(x)}(H) = \alpha(x)^{-1} xHx^{-1}\alpha(x) = \alpha(x)^{-1}\ \alpha(xHx^{-1})\alpha(x) = \alpha(x^{-1}xHx^{-1}x) = \alpha(H) = H$ d'où $T_{x^{-1}\alpha(x)} \in Paut(G)$ c'est à dire $x^{-1}\alpha(x) \in N(G)$.

Maintenant soient $a, b, c \in G$, prouvons que $\alpha([a,b,c]) = [a,b,c]$

On a $\alpha([a,b,c]) = ([\alpha(a), \alpha(b), \alpha(c)]) = [aa', bb', cc']$ avec a', b', c' sont dans $N(G)$ mais $[aa', bb'] = [aa', b'][aa', b]^{b'} = [aa', b']\, T_{b'}\ ([aa', b])$ or $b' \in N(G) \leq Z_2(G)$ donc $T_{b'} \in Aut_c(G)$ d'où $T_{b'}\ ([aa', b]) = [aa', b]$ [Proposition 2.4.3], donc :

$[aa', bb'] = [aa', b'][aa', b] = [a.b']^{a'}[a'.b'][a.b]^{a'}[a', b] = [a.b'][a'.b'][a.b][a', b] =$

$a^{-1}a^{b'}(a')^{-1}(a')^{b'}[a\ , b](b^{-1})^{a'}b$ donc $\exists z_1 z_2 z_3 \in Z(G)$ t.q

$[aa', bb'] = a^{-1}az_1(a')^{-1}a'z_2[a\ , b]\, b^{-1}z_3 b = z[a,b]$ avec $z \in Z(G)$ donc $\alpha([a,b,c]) = [[aa', bb'], cc'] = [z[a,b], cc'] = [[a,b], cc'] = [a,b,c'][a,b,c] = [a,b,c']\ [a,b,c] =$

$[a,b]^{-1}[a,b]^{c'}[a,b,c] = [a,b]^{-1}[a,b]\ [a,b,c] = [a,b,c]$ d'où : $\alpha([a,b,c]) = [a,b,c]$ ■

Lemme 2.9.5

Soit G un groupe qui n'est pas de Dedekind et soient $S(G)$ le sous groupe engendré par tous les sous groupes non normaux de G et $CS(G)$ le sous groupe engendré par tous les sous groupes cycliques non normaux de G alors on a :

(a) $S(G) = CS(G)$

(b) $Aut_{nn}(G)$ opère sur $CS(G)$ comme un groupe abélien

Preuve

Posons $S(G) = \langle (H_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\ /\ H_\lambda \nsubseteq G\rangle$et $CS(G) = \langle \langle x\rangle\ /\ \langle x\rangle\ \nsubseteq G\rangle$

(a) il est clair que $CS(G) \leq S(G)$. Il reste à montrer que $S(G) \leq CS(G)$.

Supposons qu'il existe un sous groupe non normal H tel que H ne soit pas dans $CS(G)$.

Soit $x \in H \setminus H \cap CS(G)$ donc $\langle x \rangle \trianglelefteq G$ or H est engendré par $H \setminus H \cap CS(G)$; donc H est engendré par des sous groupes cycliques normaux d'où $H \trianglelefteq G$ (contradiction) donc $S(G) \leq CS(G)$ d'où $S(G) = CS(G)$

(b) pour montrer que $Aut_{nn}(G)$ opère sur $CS(G)$ comme un groupe abélien, il suffit de montrer la commutativité sur une partie génératrice $E_{CS(G)}$ avec$E_{CS(G)} = \{x \in G \mid \langle x \rangle \ntrianglelefteq G\}$.

Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in Aut_{nn}(G)$, soit $x \in E_{CS(G)}$. On a : $\varphi_1(\langle x \rangle) = \langle x \rangle$ d'où $\varphi_1(x) = x^{r_1}$ et $\varphi_2(\langle x \rangle) = \langle x \rangle$ d'où $\varphi_2(x) = x^{r_2}$ donc $(\varphi_1.\varphi_2)(x) = \varphi_1(x^{r_2}) = x^{r_1 r_2} = (x^{r_1})^{r_2} = (\varphi_1.\varphi_2)(x)$ donc $Aut_{nn}(G)$ opère sur $CS(G)$ comme un groupe abélien ■.

Lemme 2.9.6

Le groupe d'automorphismes d'un groupe localement cyclique est abélien.

Preuve

Pour la démonstration voir [19].

Proposition 2.9.7

Soit G un groupe, $H \trianglelefteq G$ et soit α un automorphisme de G. Si $\alpha(H) \leq H$ alors :

$$\begin{array}{rccc} \overline{\alpha}: & G/H & \rightarrow & G/H \\ & gH & \rightarrow & \alpha(g)H \end{array}$$

est bien défini ; on l'appelle automorphisme induit par α sur le groupe quotient G/H.

Preuve

Soient gH, kH de $\frac{G}{H}$. Supposons que $gH = kH$, alors $g^{-1}k \in H$ d'où $\alpha(g^{-1}k) \in \alpha(H)$ (puisque H caractéréstique), donc $\alpha(g^{-1})\alpha(k) \in H$ c'est à dire $\alpha\ (g)H = \alpha\ (k)H$.

Finalement on a trouvé que : $\overline{\alpha}(\ gH) = \overline{\alpha}(\ kH)$ (i.e $\overline{\alpha}$ est bien défini)

Proposition 2.9.8

Soit G un groupe

Si G est nilpotent alors $T(G)<G$ et G est engendré par $G \setminus S \cup T$.

Théorème 2.9.9

Soit G un groupe qui n'est pas de Dedekind, alors :

(a) $Aut_{nn}(G)$ est métabelien.

(b) Si G n'est pas nilpotent de classe 2, alors $Aut_{nn}(G)$ est abélien.

(c) Si G non périodique, alors $Aut_{nn}(G)$ est abélien.

Preuve

(a) On va montrer que $Aut_{nn}(G)$ est résoluble de classe 2.

* Pour montrer que $Aut_{nn}(G)$ est résoluble de classe 2, il suffit de montrer que$[Aut_{nn}(G)]'$ est abélien.

On a prouvé que $Aut_{nn}(G)$ opère sur $S = S(G)$ comme un groupe abélien [voir 2.9.4]

$S = S(G) \neq 1$ car G n'est pas de Dedekind ; G admet au moins un sous groupe non trivial et non normal.

1- Si $S = G$, alors $Aut_{nn}(G)$ est abélien.

2- Si $S < G$.

Soit la suite : $(\Sigma) : 1 \lhd S \lhd G$ (S n'est pas seulement normal, il est aussi caractéréstique)

Le groupe stabilisateur de la suite(Σ) est :

$$stab(G) = \left\{ \begin{array}{c} \varphi \in Aut\ (G)\ \backslash(\ \varphi(1) = 1; \varphi(S) = s; \varphi(G) = G) \text{ et} \\ g^{-1}\varphi(g) \in S \quad \forall g \in G\ ;\ s^{-1}\varphi(s) = 1\ \ \forall s \in S \end{array} \right\} \text{[voir 1.2.5.1]}$$

et puisque la suite est normale $stab(G)$ est un sous groupe nilpotent de classe 1; donc abélien

Maintenant on va montrer que $[Aut_{nn}(G)]'$ est abélien

* Il suffit de prouver que $[Aut_{nn}(G)]'$ est inclus dans le groupe stabilisateur de (Σ).

Soient α, β de $Aut_{nn}(G)$, prouvons que $[\alpha, \beta]$ appartient au groupe stabilisateur , c'est à dire :

i) Pour tout $g \in G$ a-t-on $g^{-1}[\alpha, \beta](g) \in S$?

ii) Pour tout $s \in S$ a-t-on $s^{-1}[\alpha, \beta](s) = 1$?

i) Soit : $\overline{[\alpha, \beta]}/$

$$\begin{array}{rccc} \left[\overline{\alpha}, \overline{\beta}\right] : & \frac{G}{S} & \rightarrow & \frac{G}{S} \\ & gS & \rightarrow & [\alpha, \beta](g)\, S \end{array}$$

Comme S est caractéréstique $\overline{\alpha}$ et $\overline{\beta}$ sont bien définis [voir proposition 2.9.6] ; donc $\overline{\alpha}$ et $\overline{\beta} \in Aut\left(\frac{G}{S}\right)$ qui est abélien (puisque $\frac{G}{S}$ est un p-group localement cyclique) [21, théorème 4.7]et d'autre part le groupe d'automorphismes d'un groupe localement cyclique est abélien[voir 2.9.5]. Donc $\overline{[\alpha,\beta]} = \left[\overline{\alpha},\overline{\beta}\right] = \overline{1}_{\frac{G}{S}}$ c'est à dire $[\alpha,\beta](g)\,S = gS$ d'où $g^{-1}[\alpha,\beta](g) \in S$.

ii) Soit $s \in S$ et Soient α, β de $Aut_{nn}(G)$ .On a : $[\alpha,\beta](s) = s$ [voir b.lemme 2.9.4]

donc on a : $s^{-1}[\alpha,\beta](s) = 1$ d'où $[\alpha,\beta] \in stab(G)$, ce qui montre que $(Aut_{nn}(G))'$ est inclus dans le groupe stabilisateur de la suite $1 < S < G$ lequel est abélien, c'est à dire que $(Aut_{nn}(G))'$est abélien donc $Aut_{nn}(G)$ est métabelien.

(b) On va montrer que si G est non nilpotent de classe 2, alors $Aut_{nn}(G)$ est abélien donc il suffit de prouver que $S = G$.

Supposons $S < G$. Soient $a, b \in G$ et $x \in G$

1) Si $x \in G \backslash S$ alors $\langle x\rangle \trianglelefteq G$. Considérons l'application :

$$\begin{array}{rccl} T_g: & G & \to & Aut(\langle x\rangle) \\ & g & \to & T_g : x \to x^g \end{array}$$

il est clair que $\ker T = C_G(x)$ donc $G/C_G(x) \leq Aut(\langle x\rangle)$ qui est abélien donc $G' \leq C_G(x)$; d'où $[[a,b].x] = 1$ pour tous a, b dans G.

2) Si $x \in S$ comme G est engendré par G/S alors :

$$x = \underset{\in G/S}{x_1} \cdot \underset{\in G/S}{x_2} \cdot \underset{\in G/S}{x_3} \ldots\ldots\ldots \underset{\in G/S}{x_n} \text{ tel que } \langle x_1\rangle \trianglelefteq G;\ \langle x_2\rangle \trianglelefteq G; \langle x_3\rangle \trianglelefteq G \ldots . \langle x_n\rangle \trianglelefteq G$$

or $[x,[a.b]] = x^{-1}x^{[a.b]} = x^{-1}(\ x_1^{[a.b]}x_2^{[a.b]}x_3^{[a.b]}\ldots x_n^{[a.b]}) = x^{-1}x = 1$ donc $G' \leq C_G(x)$ donc $\forall x \in G'\ G' \leq C_G(x)$ c.à.d G est nilpotent de classe au plus 2; ce qui contredit le fait que G est non abélien .

(c) On va montrer que si G est non périodique, alors $Aut_{nn}(G)$ est abélien.

Supposons G non périodique et $Aut_{nn}(G)$ non abélien, alors $1 < S < G$ donc G est nilpotent de classe 2; donc $T(G) < G$.

On va prouver que $G\backslash S \cup T \subseteq Z(G)/S = S(G)$ et $T = T(G)$.

Supposons qu'il existe un élément a d'ordre infini tel que $a \in G\backslash S \cup T$ *et* $a \notin Z(G)$ donc $\exists g \in G$ t.q $[a, g] \neq 1$ donc $a^g \neq a$. Et comme a est d'ordre infini, alors $a^g = a^{-1}$donc $[a, g] = a^{-2} \in Z(G)$ d'où $1 = [a^{-2}, g] = [a, g]^{-2} = a^{-4}$ donc a est d'ordre fini ; ce qui contredit le fait que a est d'ordre infini, donc $G\backslash S \cup T \subseteq Z(G)$ c.à.d G est abélien et $Aut_{nn}(G) = 1$ (contradiction). ■

2.10 Automorphismes fixant tout sous groupe normal($\mathbf{Aut_n(G)}$)

Introduction

Un automorphisme φ d'un groupe G est dit "normal" si $\varphi(H) = H$ pour tout sous groupe normal H de G. L'ensemble des automorphismes normaux de G est un sous groupe normal de $Aut(G)$ noté $Aut_n(G)$. Il est clair que le groupe des automorphismes intérieurs de G noté $Int(G)$ est contenu dans $Aut_n(G)$.

A .Lubotzky a montré que si G est groupe libre non abélien $Int(G) = Aut_n(G)$ [23]

Endimioni a montré si G est un groupe non abélien libre et nilpotent de classe $c = 2$, ces deux sous groupes coincident aussi ; mais si $c \geq 3$ ils sont distincts et le groupe quotient $Aut_n(G)/Int(G)$ est infini[14, théorème 2]. *S.Franciosi* et *F.de Giovanni* ont établi les deux résultats suivants :

Si G est nilpotent ; $Aut_n(G)$ est nilpotent par abélien.

Si G est polycyclique ; $Aut_n(G)$ est polycyclique. En particulier si G est résoluble fini, $Aut_n(G)$ est lui même résoluble fini.[18]

Une question se pose ; si G est résuloble infini, $Aut_n(G)$ est-il résoluble ? *Endimioni* a donné une réponse positive lorsque G est résoluble de longueur dérivée ≤ 2 et plus généralement lorsque G est nilpotent par abélien [12, théorème 1].

Théorème 2.10.1

Si G est un groupe nilpotent (de classe c) par abélien, le groupe $Aut_n(G)$ est nilpotent

de classe $\leq c$ par métabélien.

Pour démontrer le théorème précédent nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 2.10.2

Si G est un groupe de Dedekind , alors $Aut_n(G) = Paut(G)$, et par suite $Aut_n(G)$ est abélien et résiduellement fini.

En effet, $Aut_n(G)$ fixe tout sous groupe de G puisque tout sous groupe de G est normal dans G.

Définition 2.10.3

*Soit G un groupe, un automorphisme f de G est dit "IA-*automorphisme" *s'il induit l'identité sur le groupe quotient abélien G/G' c.à.d $x^{-1}f(x) \in G'$ pour tout $x \in G$.*

Lemme 2.10.4

Soit k un entier strictement positif. Dans un groupe G, considérons un élément $a \in \gamma_k(G')$, où $\gamma_k(G')$ est le $k^{\text{ème}}$ terme de la suite centrale descendente de G'. Si f et g sont deux IA-automorphismes normaux de G, on a :

i) Pour tout $u \in G$, $f(u^{-1}au) \equiv u^{-1}f(a)u \bmod \gamma_{k+1}(G')$

ii) $[g \circ f](a) \equiv a \bmod \gamma_{k+1}(G')$

Preuve

(i) On a $f(u) = uu'$ pour un certain $u' \in G'$ (puisque f est un *IA-automorphisme).* Donc :

$$\begin{aligned} f(u^{-1}au) &= f(u)^{-1}f(a)f(u) \\ &= u'^{-1}u^{-1}f(a)uu' \\ &= u^{-1}f(a)uu^{-1}f(a)^{-1}uu'^{-1}u^{-1}f(a)uu' \\ &= (u^{-1}f(a)u)(u^{-1}f(a)u)^{-1}u'^{-1}(u^{-1}f(a)u)u' \\ &= u^{-1}f(a)u[u^{-1}f(a)u, u'] \end{aligned}$$

Puisque $[u^{-1}f(a)u, u']$ appartient à $\gamma_{k+1}(G')$, on a le résultat demandé.

(ii) Puisque f et g préservent la clôture normale de a dans G, il existe des éléments

$u_1, u_2, ...u_r, v_1, v_2, ..v_s$ et des entiers $\lambda_{1,....,}\lambda_r, \mu_{1,.....,}\mu_s$ tels que

$$f(a) = \prod_{i=1}^{r} u_i^{-1} a^{\lambda_i} u_i \text{ et } g(a) = \prod_{j=1}^{s} v_j^{-1} a^{\mu_j} v_j$$

Il faut remarquer que $\gamma_k(G')/\gamma_{k+1}(G')$ est inclus dans le centre de $G'/\gamma_{k+1}(G)$, de plus la clôture normale a^G de a dans G est incluse dans $\gamma_k(G')$, donc a^G est abélienne modulo $\gamma_{k+1}(G')$ c'est à dire $a^u \equiv a^v \bmod \gamma_{k+1}(G)$ pour tous $u, v \in G$. On a :

$$\begin{aligned} g(f(a)) &\equiv \prod_{i=1}^{r} g(u_i^{-1} a^{\lambda_i} u_i) \\ &\equiv \prod_{i=1}^{r} u_i^{-1} g(a)^{\lambda_i} u_i \\ &\equiv \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{s} u_i^{-1} v_j^{-1} a^{\lambda_i \mu_i} v_j u_i \end{aligned}$$

Donc :

$$g(f(a)) \equiv \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{s} [v_j, u_i]^{-1} v_j^{-1} u_i^{-1} a^{\lambda_i \mu_i} u_i v_j [v_j, u_i] \bmod \gamma_{k+1}(G')$$

Et puisque :

$$[v_j, u_i]^{-1} v_j^{-1} u_i^{-1} a^{\lambda_i \mu_i} u_i v_j [v_j, u_i] \equiv v_j^{-1} u_i^{-1} a^{\lambda_i \mu_i} u_i v_j \bmod \gamma_{k+1}(G')$$

On obtient :

$$g(f(a)) \equiv \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{s} v_j^{-1} u_i^{-1} a^{\lambda_i \mu_i} u_i v_j \equiv f(g(a)) \bmod \gamma_{k+1}(G')$$

d'où :

$$[g, f](a) \equiv a \bmod \gamma_{k+1}(G') \quad \blacksquare$$

Preuve du théorème 2.10.1.

Supposons G nilpotent (de classe c) par abélien ; ceci entraîne que $\gamma_{c+1}(G')$ est trivial. Il existe $H \trianglelefteq G$ tel que G/H soit abélien et H nilpotent de classe c, donc $\gamma_{c+1}(H) = 1$ or $G' \leq H$, donc $\gamma_{c+1}(G') \leq \gamma_{c+1}(H) = 1$

Considérons l'homomorphisme :

$$\begin{array}{rccc} \phi : & Aut_n(G) & \to & Aut_n(G/G') \\ & f & \to & \overline{f} \end{array}$$

où $\overline{f}$ est l'automorphisme induit par f sur G/G', il est facile de vérifier que $\overline{f}$ est un automorphisme normal de $Aut_n(G/G')$.

$\ker\phi = \left\{ f \in Aut_n(G), f' = \overline{1}_{G/G'} \right\} = \{ f \in Aut_n(G), x^{-1}f(x) \in G' \}$ pour tout $x \in G$. $\ker\phi$ est donc l'ensemble des IA-automorphismes normaux de G ; de plus G/G' étant abélien $Aut_n(G/G')$ est abélien d'aprés le lemme 2.10.2 ; donc $Aut_n(G) / \ker\phi$ est abélien et par suite $(Aut_n(G))' \leq \ker\phi$. Il reste à montrer que $(\ker\phi)'$ est nilpotent de classe au plus c ; montrons que $(\ker\phi)'$ stabilise la suite normale (de longueur $c+1$)

$1 = \gamma_{c+1}(G') \leq \gamma_C(G') \leq \gamma_{i+1}(G') \leq \gamma_i(G') \leq ... \leq \gamma_2(G') \leq \gamma_1(G') = G' \leq G$

En effet $f(\gamma_i(G')) = \gamma_i(G')$ car la relation caractéristique est transitive ; il reste à vérifier que $x^{-1}f(x) \in \gamma_{i+1}(G')$ pour tout $f \in (\ker\phi)'$ et $x \in \gamma_i(G')$

Puisque f est un IA-automorphisme normal de G et appartient à $(\ker\phi)'$on peut appliquer (ii) du lemme précédent ; comme $(\ker\phi)'$ est engendré par l'ensemble des commutateurs C de $\ker\phi$, il suffit de vérifier la relation $(*)$ sur C.

$\overline{x}f(x) \in \gamma_{i+1}(G')$ ....$(*)$ pour tout $f \in C$ et $x \in \gamma_i(G')$, ce qui est vrai d'après le lemme précédent. Et d'aprés le résultat de Kaluznin [voir1.2.5.3] $(\ker\phi)$ est nilpotent de classe au plus $c-1$. ■

Corollaire 2.10.5

Si G est métabélien, $Aut_n(G)$ est résoluble de longueur dérivée au plus égale à 3

Dans le théorème précédent il suffit de choisir $c = 1$

Remarque 2.10.6

Dans le corollaire précédent, la borne 3 est la meilleure possible ; il suffit d'exhiber un groupe métabélien G pour lequel $Aut_n(G)$ est résoluble de longueur dérivée égale à 3.

Choisissons $G = A_4$, il est métabalien, soit

$$H = \{Id, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\} \quad H \leq A_4$$

H est d'ordre 4, donc abélien, on vérifie facilement que $H \trianglelefteq A_4$, de plus A_4/H est d'ordre 3 donc abélien, ce qui entraine que A_4 est métabélien. D'autre part H est l'unique sous groupe d'ordre 4 de A_4 ; on en déduit que $Aut_n(A_4) = Aut(A_4)$ or $Aut\ (A_4)$ est isomorphe à S_4; ce dernier groupe est résoluble de longueur dérivée 3.

Théorème 2.10.7

Soit G un groupe nilpotent de classe c par abélien

Supposons G/G' fini ou infini non périodique (ce qui est le cas par exemple si G est de type fini), alors $Aut_n(G)$ est nilpotent (de classe $\leq c$) par abélien fini.

Preuve

Soit ϕ l'homomorphisme précédent :

$$\phi : Aut_n(G) \longrightarrow Aut_n\left(G/G'\right)$$

G/G' étant fini ou infini non périodique, $Paut\left(G/G'\right)$ est fini égal à $\left\{Id_{G/G'}\right\}$ si G/G' est fini et égal à $\left\{Id_{G/G'} \text{ où } \overline{x} \longrightarrow \overline{x}^{-1}\right\}$ si G/G' est infini non périodique [voir 2.5.2.5], donc $Aut_n(G)/\ker\phi$ est fini dans les deux cas ; $(\ker\phi)'$ étant nilpotent de classe $\leq c$; $\ker\phi$ est nilpotent (de classe $\leq c$) par abélien et par suite $Aut_n(G)$ est nilpotent (de classe $\leq c$) par abélien fini. ■

2.11 Endomorphismes polynomiaux ($\mathbf{End}_p(\mathbf{G})$)

Définition 2.11.1

Soit G un groupe, un endomorphisme φ de G est dit "rationnel" *ou* "polynomial" *s'il existe $a_1, a_2, ...a_r \in G$* et *$h_1, h_2, ...h_r \in \mathbb{Z}$ tels que $\varphi(x)$ puisse s'écrire sous la forme :*

$$\varphi(x) = (x^{a_1})^{h_1}(x^{a_2})^{h_2}...(x^{a_r})^{h_r}$$

On désigne par $J(G)$ l'ensemble des entiers m tels qu'il existe t entiers $m_1, m_2, ...m_t$ ($t \geq 1$) et t éléments $c_1, c_2, ...c_t$ de G tels que $m = m_1 + m_2 + ... + m_t$ et *$c_1 x^{m_1}...c_t x^{m_t} = 1$ pour tout $x \in G$.*

L'ensemble $J(G)$ est un idéal de l'anneau des entiers rationnels $\mathbb{Z}$ [11].

Soit $m_0 \geq 0$ tel que $J(G) = (m_0)$; alors si $\varphi(x)$ admet deux écritures différentes :

$$\varphi(x) = (x^{a_1})^{h_1}(x^{a_2})^{h_2}...(x^{a_r})^{h_r} = \left(x^{b_1}\right)^{k_1}\left(x^{b_2}\right)^{k_2}\left(x^{b_3}\right)^{k_3}..\left(x^{b_s}\right)^{k_s}$$

Endimioni *a montré que :* $h_1 + h_2 + ... + h_r \equiv k_1 + k_2 + ... + k_s \ [\mathrm{mod}\, m_0]$; *posons :* $h = h_1 + h_2 + ... + h_r$, *on peut choisir* $h \in \{0, .., m_0 - 1\}$ *et la classe de* h *modulo* $m_0\mathbb{Z}$ *s'appelle* "le degré de φ".

Il est facile de vérifier que :

$$\varphi : x \longmapsto (x^{a_1})^{h_1}(x^{a_2})^{h_2}...(x^{a_r})^{h_r} = x^h \prod_{i=1}^{r}\left[x^{h_i}, a_i\right]\left[x^{h_i}, a_i, x^{h-(h_1+\cdots+h_i)}\right]$$

Désignons par $End_p(G)$ $(Aut_p(G))$ *l'ensemble des endomorphismes (automorphismes) polynomiaux de* G ;

$$Aut_p(G) = Sym(G) \cap End_p(G)$$

Il est clair que si G est fini $Aut_p(G)$ est un sous groupe de $Aut(G)$ mais si G est infini $Aut_p(G)$ n'est pas nécessairement un sous groupe de $Aut(G)$ comme le montre l'exemple suivant :

G est le groupe multiplicatif des nombres réels non nuls et $\varphi(x) = x^3$; mais *Endimioni* a montré que si G est polycyclique $Aut_p(G)$ est un sous groupe polycyclique de $Aut(G)$ [15]

En 1977 *Schweigert* [26] a montré que si G est un groupe fini alors G est nilpotent si, et seulement si, $Aut_p(G)$ l'est. *Corsi Tani* et *Rinaldi Bonafede* ont généralisé le résultat de *Schweigert* en prouvant que si G est un groupe fini, alors G est nilpotent de classe c $(c \geq 3)$ si et seulement si $Aut_p(G)$ est est nilpotent de classe $c - 1$ [6] ; le cas $c = 2$ est traité à part.

En 2008 *B.Daoud* a généralisé le résultat de *C.Tani* et *R.Bonafede* à un groupe quelconque non nécessairement fini [8]. La même année *Gérard Endimioni* a généralisé le résutat de *B.Daoud* au sous groupe $P(G)$ engendré par $Aut_p(G)$ [13].

Proposition 2.11.2

Si G *est nilpotent de classe* 2 *alors* $P(G)$ *est abélien.*

Preuve

Il suffit de prouver la commutativité sur la partie génératrice $Aut_p(G)$ de $P(G)$.

Soient f et $g \in Aut_p(G)$

$f(x) = x^h \hat{f}(x)$ et $g(x) = x^k \hat{g}(x)$ où $\hat{f}(x) = \prod_{i=1}^{r} \left[x^{h_i}, a_i\right]$ et$\hat{g}(x) = \prod_{j=1}^{s} \left[x^{k_j}, b_j\right]$ ($\hat{f}(x)$ et $\hat{g}(x) \in Z(G)$). On a : $f[g(x)] = f\left[x^k \hat{g}(x)\right] = f(x^k) f[\hat{g}(x)] = \left(x^h \ \hat{f}(x)\right)^k (\hat{g}(x))^h \hat{f}(\hat{g}(x))$ $= x^{kh} \hat{f}(x)^k \ \hat{g}(x)^h \ \hat{f}(\hat{g}(x)) = x^{hk} \ \hat{f}(x)^k \hat{g}(x)^h$ car $\hat{f}[\hat{g}(x)] = \prod_{i=1}^{r} \left[\hat{g}(x)^{h_i}, a_i\right] = 1$ de même : $g[f(x)] = x^{hk} \hat{g}(x)^h \ \hat{f}(x)^k$ donc on obtient : $f[g(x)] = g[f(x)]$. ■

Théorème 2.11.3

Soit G un groupe nilpotent de classe $c \geq 2$ alors $P(G)$ est nilpotent de classe $c-1$, réciproquement si $P(G)$ est nilpotent de classe $c \geq 2$, G est nilpotent de classe $c+1$.

Si $P(G)$ est abélien, G est abélien ou nilpotent de classe 2 suivant que $Int(G)$ est trivial ou non.

Preuve

Raisonnons par récurrence sur la classe de nilpotence de G.

Pour $c = 1$, $P(G) = Aut_u(G) \leq Z(Aut(G))$.

Pour $c = 2$, $P(G)$ est abélien [Proposition 2.11.2].

Pour $c \geq 3$; supposons la propriété vraie pour tout groupe nilpotent de classe c, et montrons la pour $c+1$.

Soit G un groupe nilpotent de classe $c+1$; soit ϕ l'homomorphisme de groupes :

$$\begin{array}{rccc} \phi: & P(G) = \langle Aut_p(G) \rangle & \rightarrow & Aut(G/Z(G)) \\ & f & \rightarrow & \overline{f} \end{array}$$

où $\overline{f}$ est l'automorphisme induit sur le groupe quotient $G/Z(G)$:

$$\begin{array}{rccc} \overline{f}: & G/Z(G) & \rightarrow & G/Z(G) \\ & \overline{x} & \rightarrow & \overline{f}(\overline{x}) \end{array}$$

Il est facile de vérifier que $\overline{f}$ est un automorphisme de $G\ /Z(G)$ car $Z(G)$ étant

caractéréstique dans G, $f(Z(G)) = Z(G)$.

$\operatorname{Im}\phi$ est un sous groupe de $Aut\ (G/Z(G))$, $P(G)$ étant engendré par $Aut_p(G)$, $\operatorname{Im}\phi$ sera engendrée par $\phi(Aut_p(G))$ ($\operatorname{Im}\phi$=$\langle\phi(Aut_p(G))\rangle$).

Soit $Aut_p(G/Z(G))$ l'ensemble des automorphismes polynomiaux de $G/Z(G)$, et notons $P(G/Z(G)) = \langle Aut_p(G/Z(G))\rangle$ le sous groupe de $Aut(G/Z(G))$ engendré par $Aut_p(G/Z(G))$.

D'autre part $\phi(Aut_p(G))$ est un ensemble d'automorphismes polynomiaux car l'automorphisme induit sur $G/Z(G)$ par un automorphisme polynomial est aussi polynomial ; donc $\phi(Aut_p(G)) \subseteq Aut_p(G/Z(G))$.

$\operatorname{Im}\phi$ étant engendrée par $\phi(Aut_p(G))$ est incluse dans $\langle Aut_p(G/Z(G))\rangle$ lequel est égal à $P(G/Z(G))$. $G/Z(G)$ étant nilpotent de classe c, $P(G/Z(G))$ est nilpotent de classe $c-1$, ce qui entraîne que $\operatorname{Im}\phi$ est nilpotente de classe au plus $c-1$.

Prouvons maintenant que $\ker\phi \leq Z(P(G))$; soit $f \in \ker\phi$, $\overline{f} = \overline{1}_{G/Z(G)}$ c.à.d $x^{-1}f(x) \in Z(G)$ pour tout $x \in G$, ce qui signifie que f est central, or un automorphisme central commute avec tout automorphisme intérieur [voir 2.4.2] et par suite commute avec tout automorphisme polynomial, donc f commute aussi avec $P(G)$ puisque $P(G)$ est engendré par l'ensemble des automorphismes polynomiaux ; ce qui entraîne que $f \in Z(P(G))$.

D'après le troisième théorème d'isomorphisme on a :

$$\frac{P(G)/\ker\phi}{Z(P(G))/\ker\phi} \simeq \frac{P(G)}{Z(P(G))}$$

$P(G)/\ker\phi \simeq \operatorname{Im}\phi$ est nilpotent de classe au plus $c-1$; donc ; $\frac{P(G)}{Z(P(G))}$ est nilpotent de classe au plus $c-1$; donc $P(G)$ est nilpotent de classe au plus c, mais $P(G)$ contient $Int(G)$ qui est nilpotent de classe c, donc $P(G)$ est nilpotent de classe c, ce qui achève la récurrence.

Réciproquement si $P(G)$ est nilpotent de classe c ($c \geq 2$), $Int(G)$ qui est inclus dans $P(G)$ est nilpotent de classe au plus c et par suite G est nilpotent de classe au plus $c+1$. ■

Proposition 2.11.4

Si G est un groupe polycyclique, alors le groupe des automorphismes polynomiaux inversibles de G noté $Aut_p^*(G)$ est lui même polycyclique.

Preuve

D'après le théorème [18, theorème 12], $Aut_n(G)$ est polycyclique, il suffit de montrer que $Aut_p^*(G) \leq Aut_n(G)$, soit $f \in Aut_p^*(G)$, N un sous groupe normal de G, $f(x) = (x^{a_1})^{h_1} ... (x^{a_r})^{h_r}$, il est clair que $f(N) \leq N$ puisque $f^{-1} \in Aut_p^*(G)$; $f^{-1}(N) \leq N$; ce qui entraîne que $f[f^{-1}(N)] \leq f(N)$ c.à.d $N \leq f(N)$ ■

Théorème 2.12.5

Si G est métabélien $P(G)$ est lui même métabélien [13, théorème 1.2]

2.12 Groupes n-abéliens

Un groupe G est dit "n-abélien*" si l'application $\varphi : x \longmapsto x^n$ est un endomorphisme de G. Ces groupes ont été classifiés par Alperin; voir* [2, Théorème 1]*. Ce dernier a établi le théorème qui nous allons voir dans cette partie du deuxième chapitre* [Théorème 2.12.1.4]

2.12.1 Classification des groupes n-abéliens

Définition 2.12.1.1

Soient G un groupe, n entier tel que $n > 1$.

On dit que G est un groupe $n-$abélien si :

$$(xy)^n = x^n y^n \quad \forall\, x, y \in G$$

La classe des groupes $n-$abéliens est notée : $\mathcal{U}_n$, c'est même une variété définie par la loi : $(xy)^n x^{-n} y^{-n} = 1$.

Remarque 2.12.1.2

· *Un groupe G est $2-$abélien si, et seulement si, G est abélien .*

$((xy)^2 = x^2y^2 \iff xyxy = xxyy \iff yx = xy \quad \forall\, x, y \in G)$.

· *Pour $n \geq 3$ il existe des groupes qui sont $n-$abéliens et non abéliens.*

Remarque 2.12.1.3

Un sous-groupe d'un groupe $n-$abélien est $n-$abélien, d'où la classe des groupes $n-$abéliens est $S-fermée$.

L'image homomorphe d'un groupe $n-$abélien est $n-$abélienne, d'où la classe des groupes n-abéliens est $H-fermée$.

Le produit direct fini des groupes $n-$abéliens est $n-$abélien, d'où la classe des groupes n-abéliens est $D-fermée$.

Théorème 2.12.1.4

Un groupe H est $n-$abélien si et seulement si H est image homomorphe d'un sous-groupe du produit direct d'un groupe abélien, d'un groupe d'exposant divisant n et d'un groupe d'exposant divisant $n-1$.

Lemme 2.13.1.5

Soient x et y deux élement d'un groupe $n-$abélien G alors :

$a)$ $(xy)^{n-1} = y^{n-1}x^{n-1}$

$b)$ $[x,y]^n = [x^n, y]$

$c)$ $[x,y]^{n-1} = \left[y, x^{-(n-1)}\right]$

$d)$ $[x^n, y^{n-1}] = 1$

$e)$ $[x,y]^{n(n-1)} = 1$

Preuve

$a)$ On a : $(xy)^{n-1} = (xy)^n y^{-1}x^{-1} = (yy^{-1}xy)^n y^{-1}x^{-1} = (yx^y)^n y^{-1}x^{-1} =$
$y^n y^{-1}x^n yy^{-1}x^{-1} = y^{n-1}x^{n-1}$.

$b)$ On a : $[x,y]^n = (x^{-1}x^y)^n = (x^{-1})^n(x^y)^n = (x^n)^{-1}y^{-1}x^n y = [x^n, y]$.

$c)$ On a : $[x,y]^{n-1} = (x^{-1}x^y)^{n-1} = (x^y)^{n-1}(x^{-1})^{n-1} = y^{-1}x^{-(-(n-1))}yx^{-(n-1)} = \left[y, x^{-(n-1)}\right]$

$d)$ On a : $x^n y^{n-1} = x^n y^n y^{-1} = (xy)^n y^{-1} = (xy)^{n-1}x = y^{n-1}x^n$ *d'ou* $[x^n, y^{n-1}] =$

1.

e) On a : $[x,y]^{n(n-1)} = \left([x,y]^{(n-1)}\right)^n = \left[y, x^{-(n-1)}\right]^n = \left[y^n, (x^{-1})^{(n-1)}\right] = 1.$

■

Lemme 2.12.1.6

Si G est un groupe $n-$abélien et G/G'sans torsion alors :

$$G' \cap G^n \cap G^{n-1} = 1$$

Preuve

Supposons G n-abélien et $G/G\prime$ sans torsion ; soit :

$$g \in G' \cap G^n \cap G^{n-1}$$

On a : $g \in G^n \Longrightarrow \exists\ h \in G$ tel que $g = h^n$.

Et $g \in G^{n-1} \Longrightarrow \exists\ g_1, g_2, g_3 .....g_{r-1}, g_r\ /\ g = g_1^{n-1} g_2^{n-1} g_3^{n-1} .....g_{r-1}^{n-1} g_r^{n-1}$

donc : $g = h^n = g_1^{n-1} g_2^{n-1} g_3^{n-1} .....g_{r-1}^{n-1} g_r^{n-1}$d'ou : $h = g_1^{n-1} g_2^{n-1} g_3^{n-1} .....g_{r-1}^{n-1} g_r^{n-1} (h^{-1})^{n-1}$

donc : $h = (h^{-1} g_r g_{r-1} .....g_3 g_2 g_1)^{n-1}$,

posons $k = h^{-1} g_r g_{r-1} .....g_3 g_2 g$; on trouve que : $h = (k)^{n-1}\ /\ k \in G$ d'où $g = h^n = (k)^{n(n-1)}$; mais comme $g \in G'$ alors $gG' = G'$; ce qui implique que $(k)^{n(n-1)} G' = G'$; c'est à dire $(kG')^{n(n-1)} = G'$. Comme G/G' est sans torsion alors : $(kG') = G'$ d'ou $k \in G'$. On a $k \in G'$ donc $k = [x_1, y_1]\,[x_2, y_2] \ldots [x_s, y_s]$.

C'est à dire $k^n = ([x_1, y_1]\,[x_2, y_2] ..... [x_s, y_s])^n$donc $k^n = [x_1, y_1]^n\,[x_2, y_2]^n \ldots [x_s, y_s]^n$, ($G$ est n-abélien) et par suite $(k)^{n(n-1)} = [x_s, y_s]^{n(n-1)} \ldots [x_2, y_2]^{n(n-1)}\,[x_1, y_1]^{n(n-1)}$; d'où $(k)^{n(n-1)} = 1.....1 \cdot 1 = 1$donc $g = h^n = (k)^{n(n-1)} = 1$ ($i.e$ $G' \cap G^n \cap G^{n-1} = 1$) ■

Lemme 2.12.1.7 [25, exercice 2.1.9]

soit F un groupe libre sur un ensemble X.

Si $x \in X$ et $f \in F$, soit $\sigma_x(f)$ la somme des puissances de x dans la forme normale de f alors :

$$f \in F' \Longleftrightarrow \sigma_x(f) = 0\ \forall x \in X$$

Preuve du théorème 2.12.1.4

·Supposons que H est image homomorphe d'un sous groupe du produit direct $A \times B \times C$ tels que A est *abélien*, B est d'exposant divisant n, C est d'exposant divisant $n-1$.

On a : A est abélien donc A est $n-abélien$.

B est d'exposant divisant n donc il est aussi $n-abélien$ ($x^n y^n = 1 \cdot 1 = 1 = (xy)^n \ \forall x, y \in B$).

C est d'exposant divisant $n-1$; d'où C est $n-abélien$ ($x^{n-1} = 1 \Longrightarrow x^n = x$ $d'ou$ $(xy)^n = xy = x^n y^n \ \forall x, y \in C$).

D'après la remarque 2.12.1.3 on a $A \times B \times C$ est $n-abélien$ et un sous groupe $S \leq A \times B \times C$ est $n-abélien$ donc son image homomorphe est $n-abélienne$, d'où H est $n-abélien$. Réciproquement, soit H un groupe n-abélien ; il est isomorphe à un quotient d'un groupe libre F ($i.e$ Il existe un épimorphisme σ de F sur H, $\sigma : F \longrightarrow H$). Soit R le plus petit sous-groupe normal de F tel que F/R soit n-abélien. Il est facile de montrer que $R = \underset{i \in I}{\cap} R_i$ où $\{R_i\}_{i \in I}$ est l'ensemble de tous les sous-groupes normaux tel que les groupes quotients F/R_i soient n-abéliens.

De l'épimorphisme $\sigma : F \longrightarrow H$ on a $F/\ker\sigma \simeq H$; or H est n-abélien, donc $R \subset \ker\sigma$. D'après la propriété universelle du groupe quotient $\exists! \theta \in Hom(F/R, H)$, tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\pi} & F/R \\ {\scriptstyle\sigma} & \searrow & \downarrow \exists!_\theta \\ & & H \end{array}$$

On a $\ker\sigma \leq R$ donc il existe un unique homomorphisme $\theta \ / \ \theta \circ \pi = \sigma$.

donc $\frac{F/R}{Ker\ \theta} \simeq H$ (posons $\ker\theta = N/R$) d'où $H \simeq \frac{F/R}{N/R}$. Posons maintenant $G = F/R$ donc $H \simeq \frac{G}{N/R}$

Pour démontrer que H est image homomorphe d'un sous groupe du produit direct, il suffit de montrer que $G = F/R$ est isomorphe à un sous groupe d'un produit direct $A \times B \times C$ avec A abélien, B d'exposant divisant n et C d'exposant divisant $n-1$.

Considérons L'homomorphisme f de G dans $G/G' \times G/G^n \times G/G^{n-1}$.

$$\begin{array}{rccc} f: & G & \longrightarrow & G/G' \times G/G^n \times G/G^{n-1} \\ & g & \longrightarrow & (gG', gG^n, gG^{n-1}) \end{array}$$

On a $Ker\ f = G' \cap G^n \cap G^{n-1}$

Pour démontrer que $\ker f = 1$, ce qui nous permet de dire que $G \simeq \operatorname{Im} f \leq G/G' \times G/G^n \times G/G^{n-1}$, il suffit que les conditions de lemme 2.12.1.6 soient réalisées. On a $G = F/R$ est n-abélien. Il reste à montrer que G/G' est sans torsion.

On a F/F' est abélien ce qui implique que F/F' est n- abélien d'où $R \leq F'$.

On a $\frac{G}{G'} \simeq \frac{F/R}{(F/R)'} \simeq \frac{F/R}{F'R/R} \simeq \frac{F}{F'}$.

Montrons que F/F' est sans torsion.

Soient $fF' \in F/F'$ *et* n entier tel que $n \geq 1$ donc $(fF')^n = F'$c'est à dire $f^n F' = F'$d'où $f^n \in F'$

Si on applique le résultat du lemme 2.12.1.7, alors on trouve que :

$\sigma_x(f^n) = 0\ \forall x \in X$ ce qui implique que $n\sigma_x(f) = 0\ \forall x \in X$ c'est à dire $\sigma_x(f) = 0\ \forall x \in X$ donc $f \in F'$ d'où $fF' = F'$ donc F/F' est sans torsion d'où G/G' est sans torsion. On a G est n-abélien et G/G' sans torsion alors :

$$\ker\ f = G' \cap G^n \cap G^{n-1} = 1 \Longrightarrow G \simeq \operatorname{Im} f\ \leq G/G' \times G/G^n \times G/G^{n-1}$$

avec G/G' abélien, G/G^n d'exposant divisant n et G/G^{n-1} d'exposant divisant $n-1$; mais on a $H \simeq \frac{G}{N/R}$ d'où H est image homomorphe d'un sous-groupe du produit direct d'un groupe abélien, d'un groupe d'exposant divisant n et d'un groupe d'exposant divisant $n-1$. ■

2.12.2 Groupes n-abéliens généralisés

Définition 2.12.2.1

Soit n un entier ≥ 2. On dit qu'un groupe G est "n-abélien généralisé" *s'il existe n*

éléments $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n \in G$ *tels que l'application* $x \longmapsto x^{a_1}x^{a_2}\ ...\ x^{a_n}$ *soit un endomorphisme de* G.

L'appellation "n-abélien généralisé" *vient du fait que si les éléments* a_i *sont dans le second centre de* G, *alors* G *est* n*-abélien. En effet, pour tous* $x,\ y \in G$ *on a :*

$$\begin{aligned} \varphi(x)\varphi(y) &= x^n\,[x,\ a_1a_2\ ...\ a_n]\,y^n\,[y,\ a_1a_2\ ...\ a_n] \\ &= x^ny^n\,[xy,\ a_1a_2\ ...\ a_n] \\ \varphi(xy) &= (xy)^n\,[xy,\ a_1a_2\ ...\ a_n] \end{aligned}$$

ce qui implique que $(xy)^n = x^ny^n$.

Chapitre 3

Compléments

Dans leur article "*Groupes n- abélien généralisés*" [1] *Abdollahi, Daoud et Endimioni* ont établi le théorème suivant :

Théorème 3.1

Soit G un groupe n-abélien généralisé, soit $\varphi : x \longmapsto x^{a_1}x^{a_2}...x^{a_n}$ l'endomorphisme associé

Soient π_1 l'ensemble des nombres premiers divisant $n(n-1)/2$, π_2 celui des nombres premiers $\leq n$. Alors G est abélien si l'une des quatre conditions suivantes est vérifiée :

i) G est hypercentral et π_1 -libre

ii) G est fini et $\pi_2 -$ libre

iii) G et π_2 -libre, $Z(G)$ est périodique et la clôture normale de $\{a_1, a_2...a_n\}$ dans G est finie (ce qui est le cas pour l'exemple si l'ensemble $\{a_1, a_2...a_n\}$ est normal et les éléments a_i d'ordre fini)

iv) G est un FC-groupe π_2- libre

pour la démonstration voir [9].

Nous ajoutons une cinquième condition suffisante pour que G soit abélien.

Proposition 3.2

Tout groupe n- abélien généralisé, π_2 -libre est localement fini est abélien.

Preuve

G étant n- abélien généralisé, il existe $a_1, a_2 ... a_n \in G$ tels que l'application φ : $x \longmapsto x^{a_1} x^{a_2} ... x^{a_n}$ soit un endomorphisme de G; soient u et $v \in G$, considérons le sous groupe H de G engendré par $u, v, a_1, a_2, .., a_n$, la restriction de φ à H est un endomorphisme de H; donc H est aussi n-abélien généralisé; de plus H est fini et π_2 -libre, d'après le théorème précédent; H est donc abélien, ce qui entraîne que u commute avec v. ■

Proposition 3.3

Soit $\varphi : x \longmapsto \left(x^{a_1}\right)^{k_1} ... \left(x^{a_r}\right)^{k_r}$ *un endomorphisme polynomial d'un groupe* G.

Notons $A = \{a_1, a_2 ... a_r\}$, *alors*

i) Si $A \subseteq N(G)$, φ *est un endomorphisme puissance. En particulier si* G *est un groupe de Dedekind,* $Aut_p^*(G)$ *est un sous groupe de* $Paut(G)$.

ii) Si $A \subseteq Z_2(G)$ *et si* φ *est de degré* $\overline{1}$, *il est central, en particulier si* G *est nilpotent de classe 2, tout endomorphisme polynominal de* G *de degré* $\overline{1}$ *est central.*

iii) Si $A \subseteq R_2(G), \varphi$ *est commutant, en particulier si* G *est 2-Engel,* $Aut_p^*(G)$ *est contenu dans l'ensemble* $A(G)$ *des automorphismes commutants.*

Preuve

on a vu [voir remarque 2.8.8] que si $a_i \in N(G)$, l'automorphisme intérieur induit par a_i $x \longmapsto x^{ai}$ est un automorphisme puissance de G, donc il existe $l_1, l_2, ..., l_r \in \mathbb{Z}$ tel que $\varphi(x) = \left(x^{l_1}\right)^{h_1} ... \left(x^{l_r}\right)^{h_r} = x^l$ où $l = l_1\ k_1 ... l_r\ k_r$, si G est de Dedekind $N(G) = G$.

Soient H un sous groupe de G et $\varphi \in Aut_p^*(G), \varphi(H) \leq H$ car φ est un endomorphisme, $\varphi \in Aut_p^*(G), \varphi^{-1}(H) \leq H$ ce qui donne $H \leq \varphi^{-1}(H)$ et par suite $\varphi(H) = H$.

ii) Si $A \subseteq Z_2(G)$ et si φ est de degré 1, $\varphi(x) = x\hat{\varphi}(x)$ où $\hat{\varphi}(x) = \prod_{i=1}^{r} \left[x^{h_i}, a_i\right] \in Z\ (G)$, ce qui montre que φ est central. ■

iii) Si $A \subseteq R_2(G)$, x^{a_i} est un automorphisme commutant pour tout $i \in \{1...r\}$; $x\varphi(x) = x\left(x^{a_1}\right)^{h_1} ... \left(x^{a_r}\right)^{h_r} = \left(x^{a_1}\right)^{h_1} ... \left(x^{a_r}\right)^{h_r} x = \varphi(x)\, x$, ce qui montre que $\varphi(x)$ est commutant .

Endimioni a montré que si G est métabélien $P(G)$ est lui même métabélien; ce qui entraîne que $Aut_p^*(G)$ (qui est un sous groupe de $P(G)$) est aussi métabélien. On donne

ici une démonstration différente de celle d'Endimioni.

Proposition 3.4

Si G est un groupe métabélien, $Aut_p^*(G)$ est lui même métabélien.

Preuve

Soit G un groupe métabelien ; pour montrer que $Aut_p^*(G)$ est métabélien il suffit de montrer que les commutateurs de $Aut_p^*(G)$ commutent entre eux.

- D'abord on montre que la restricion de tout commutateur de $Aut_p^*(G)$ à G' est l'identité de G'. En effet soient $f, g \in Aut_p^*(G)$; $f(x) = x^h \hat{f}(x)$ et $g(x) = x^k \hat{g}(x)$.

où

$$\begin{cases} \hat{f}(x) = \prod\limits_{i=1}^{r} \left[x^{h_i},\ a_i\right] \left[x^{h_i},\ a_i,\ x^{h-(h_1+\cdots+h_i)}\right] \\ \hat{g}(x) = \prod\limits_{j=1}^{s} \left[x^{k_j},\ b_j\right] \left[x^{kj},\ b_j,\ x^{k-(k_1+\cdots+k_j)}\right] \end{cases}$$

or

$$[f,g](x) = x\ ; \forall x \in G' \Leftrightarrow f(g(x)) = g(f(x)); \forall x \in G'$$

Soit $x \in G'$; on a : $f(g(x)) = f(x^k \hat{g}(x)) = f(x)^k f(\hat{g}(x)) = (x^h \hat{f}(x))^k (\hat{g}(x))^h \hat{f}(\hat{g}(x)) = x^{hk} (\hat{f}(x))^k (\hat{g}(x))^h \hat{f}(\hat{g}(x))$. De même on trouve que : $g(f(x)) = x^{kh} (\hat{g}(x))^h (\hat{f}(x))^k \hat{g}(\hat{f}(x))$. G' étant abélien les commutateurs $\left[x^{h_i},\ a_i,\ x^{h-(h_1+\cdots+h_i)}\right]$ et $\left[x^{kj},\ b_j,\ x^{k-(k_1+\cdots+k_j)}\right]$ sont triviaux ; donc $\hat{f}(x) = \prod\limits_{i=1}^{r} \left[x^{h_i},\ a_i\right]$ et $\hat{g}(x) = \prod\limits_{j=1}^{s} \left[x^{k_j},\ b_j\right]$. Prouvons que $\hat{f}(\hat{g}(x)) = \hat{g}(\hat{f}(x))$ pour tout $x \in G'$; on a :

$$\begin{aligned} \hat{f}(\hat{g}(x)) &= \prod_{i=1}^{r} \left[(\hat{g}(x))^{hi},\ a_i\right] \\ &= \prod_{i=1}^{r} \left[\hat{g}(x),\ a_i\right]^{h_i} && \text{car } G \text{ est métabélien} \\ &= \prod_{i=1}^{r} \left[\prod_{j=1}^{s} \left[x^{k_j},\ b_j\right],\ a_i\right]^{h_i} \\ &= \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{s} \left[[x,\ b_j]^{k_i},\ a_i\right]^{h_i} && \text{car } (x \in G') \\ &= \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{s} [x,\ b_j,\ a_i]^{h_i k_j} \end{aligned}$$

de la même façon, on trouve :

$$\hat{g}(\hat{f}(x)) = \prod_{j=1}^{s} \prod_{i=1}^{r} [x,\ a_i,\ b_j]^{k_j h_i}$$

mais G étant métabélien $[x,\ b_j,\ a_i] = [x,\ a_i,\ b_j]$ pour tout $x \in G'$ et pour tous $(i,j) \in \{1,....,r\} \times \{1,.....s\}$ donc $\hat{f}(\hat{g}\,(x)) = \hat{g}(\hat{f}(x))$ pour tout $x \in G'$. Donc : $f(g(x)) = x^{hk}(\hat{f}(x))^k(\hat{g}\,(x))^h\hat{f}(\hat{g}\,(x)) = x^{kh}(\hat{g}\,(x))(\hat{f}(x))^h\hat{g}(\hat{f}(x)) = g(f(x))$ *i.e* $[f,g]\,(x) = x$ pour tout $x \in G'$.

- Maintenant soient $f,g,u,v \in Aut_p^*(G)$; posons $\varphi = [f,g]$ et $\psi = [u,v]$ on sait que $d^\circ\varphi = d^\circ\,[f,g] = d^\circ f^{-1} \times d^\circ g^{-1} \times d^\circ f \times d^\circ g = \bar{1}$ de même $d^\circ\psi = \bar{1}$ donc $\varphi(x) = x\hat{\varphi}\,(x)$ et $\psi(x) = x\hat{\psi}(x)$

$$\text{où} \quad \begin{cases} \hat{\varphi}\,(x) = \prod\limits_{i=1}^{r} \left[x^{h_i},\ a_i\right]\left[x^{h_i},\ a_i,\ x^{1-(h_1+\cdots+h_i)}\right] \\ \hat{\psi}(x) = \prod\limits_{j=1}^{s} \left[x^{k_j},\ b_j\right]\left[x^{kj},\ b_j,\ x^{1-(k_1+\cdots+k_j)}\right] \end{cases}$$

On a : $\varphi\,[\psi(x)] = \varphi\left[x\hat{\psi}(x)\right] = \varphi(x)\varphi(\hat{\psi}(x))$; or $\hat{\psi}(x) \in G'$ pour tout $x \in G$; donc $\varphi(x)\varphi(\hat{\psi}(x)) = \varphi(x)\hat{\psi}(x)$ (car φ est un commutateur de $Aut_p^*(G)$ d'où $\varphi\,[\psi(x)] = x\hat{\varphi}\,(x)\,\hat{\psi}(x)$ de même $\psi\,[\varphi(x)] = x\hat{\psi}(x)\hat{\varphi}\,(x)$ on a bien l'égalité $\varphi\,[\psi(x)] = \psi\,[\varphi(x)]$ pour tout $x \in G$. Donc les commutateurs de $Aut_p^*(G)$ commutent entre eux ; et comme l'ensemble des commutateurs de$Aut_p^*(G)$ engendre $(Aut_p^*(G))'$ ce dernier groupe est abélien et par suite $(Aut_p^*(G))$ est métabélien.

. ■

Bibliographie

[1] A. Abdollahi, B. Daoud et G. Endimioni, *Groupes n-abéliens généralisés*, Bull. Belg. Math. Soc. **13** (2006), 287-294.

[2] J. L. Alperin, *A classification of n-abelien groups*, Canad. J. Math. **21** (1969), 1238-1244

[3] R.Brandl and L.Verardi. *Groups with anomalous automorphisms,* Journal of Algebra, Vol.**1**, 1996, 155-166

[4] D.Cappitt, *Generalized Dedekind groups,* Journal of algebra **17**, 310-316 (1971)

[5] C.D.H.Cooper, *Power automorphisms of group*, Math z.**107**, 335-356 (1968)

[6] G. Corsi Tani and M. F. Rinaldi Bonafede, *Polynomial automorphisms in nilpotent finite groups*, Boll. Un. Math. Ital. A (6) **5** (1986), no. 2, 285-292.

[7] M.Curzio,S.Franciosi and F.de Giovanni, *On automorphisms fixing infinite subgroups of groups,* Arch. Math. (Basel) **54**(1990) 4-13

[8] B. Daoud, *Rational endomorphisms of a nilpotent group*, International Journal of Algebra, Vol. **2**, 2008, no 1, 13-20.

[9] B.Daoud, *Applications et endomorphismes rationnels inversibles de certaines classes de groupes.* Thèse de doctorat d'état(2008).

[10] M.Deaconescu,G.Silberberg and G.L.Walls, *On commuting automorphisms of a groups,* Arch. Math. (Basel) **79**(2002) 423-427

[11] G. Endimioni, *Applications rationnelles d'un groupe nilpotent*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **314** (1992), no. 6, 431-434.

[12] G. Endimioni, *Automorphisms fixing every normal subgroup of a nilpotent-by-abelian group,* arxiv0706.0408.

[13] G. Endimioni, *On the polynomial automorphisms of a group*, Acta. Sci. Math. (Szeged) **73** (2007), no 1-2, 61-69.

[14] G. Endimioni, *Pointwise inner automorphisms in a free nilpotent group,* j. Math.**53** (2002),397-402

[15] G. Endimioni,*Polynomial automorphisms of soluble groups,* Communications in algebra (à paraître).

[16] Fausto de Mari and F.De Giovanni, *Noetherian automorphisms of groups,* Mediterr.j.math.2 (2005),1 25-135

[17] S.Franciosi and F.De Giovanni and H.Heinken, *On automorphisms fixing non normal subgroups of groups*, Arch. Math. (Basel) **65** (1995) 196-209.

[18] S.Franciosi and F.De Giovanni, *On automorphisms fixing non normal subgroups of a nilpotent groups*, Bollettino U.M.I. (7) **1**-B (1987), 1161-1170.

[19] L.Fuchs, *Infinite abelian groups,* vol **2**, academic press, New York, 1973.

[20] I.N.Herstein, *A trivial group automorphism,* E3039[1984.203]

[21] L.C. Kappe and D.M. Reboli, *On the structure of generalized Hamiltonian groups*, Arch. Math .(Basel) **75**(2000) 328-337

[22] O.H. Kegel and B.A.F. Wehrfritz, *Locally finite groups*, North-Holland, 1973 Amsterdam

[23] A.Lubotzky, *Normal automorphisms of free groups,* Journal of algebra. **63**(1980), 494-498

[24] Martin R.Pettet, *Central automorphisms of periodic groups,* Arch. Math. (Basel) **51** (1988), n$_o$.1, 20-33

[25] D. J. S. Robinson, A course in the theory of groups, Springer-Verlag, Berlin, (1996).

[26] D. Schweigert, *Polynomautomorphismen auf endlichen Gruppen*, Arch. Math. (Basel) **29** (1977), n$_o$.1, 34-38.