

UNIVERSITÉ SÉTIF 1, ALGÉRIE
FACULTÉ DES SCIENCES, DÉPARTEMENT DE
MATHÉMATIQUES

THÈSE

présentée en première version en vue d'obtenir le grade de Docteur,
spécialité « Mathématiques Appliquées »

par

SALIM MESBAHI

ANALYSE MATHÉMATIQUE DE SYSTÈMES DE RÉACTION-DIFFUSION QUASI-LINÉAIRES AVEC DONNÉES NON RÉGULIÈRES

Thèse soutenue le 08 Mai 2014 devant le jury composé de :

Mr.	BOUBAKEUR MEROUANI	Prof. Université Sétif 1	(Président)
Mr.	NOUR EDDINE ALAA	Prof. Université de Marrakech	(Directeur)
Mme.	LYNDA SELMANI	Prof. Université Sétif 1	(Examineur)
Mr.	LAKHDAR CHITER	MCA. Université Sétif 1	(Examineur)
Mr.	MOHAMED DENECH	Prof. Université Constantine 1	(Examineur)

*À la mémoire de mon père,
À ma mère,
À Amel et mes enfants Ibrahim, Youcef et Younes.*

REMERCIEMENTS

J'espère avoir, au cours de mes études, et particulièrement de ces dernières années, remercié les personnes qui ont compté pour moi. Cependant ces quelques lignes me donnent l'occasion de réitérer ces remerciements pour certains et de les donner peut-être pour la première fois à d'autres.

Pour le soutien qu'il m'a accordé, je remercie vivement Monsieur Nour Eddine Alaa, professeur à la faculté des sciences et techniques de l'université de Marrakech, d'avoir accepté l'encadrement de cette thèse et également de m'avoir accueilli au sein de LAMAI (Laboratoire de Mathématiques Appliquées et Informatique) où j'ai pu effectuer une grande partie de mon travail. Je lui suis reconnaissant de l'aide qu'il m'a apporté sur de multiples aspects théoriques à travers de nombreuses discussions, qui m'ont permises d'avancer sur le plan méthodologique. De plus, la grande disponibilité, ses précieux conseils et la patience qu'il m'a accordée tout au long de ce travail ont conduit à un encadrement idéal. J'ai également très apprécié son aide à la rédaction de ce manuscrit et à la préparation de la soutenance. Mon respect et mes remerciements pour tout ce qu'ils m'ont appris et pour la bonne ambiance qui règne au sein de LAMAI, en particulier le professeur Abdeslem Hafid Bentbib pour son accueil et son gentillesse. Je garderai de très bons souvenirs de mon passage à ce laboratoire.

Je tiens à remercier également Monsieur Boubakeur Merouani, professeur à l'université de Sétif 1, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury et aussi pour tout ce qu'il m'a appris.

Monsieur Mohamed Denech, professeur à l'université Constantine 1, le professeur Lynda Selmani et le maître de conférences Lakhdar Chiter de l'université Sétif 1, les rapporteurs de cette thèse. Je les remercie chaleureusement pour leur disponibilité, leur soutien et l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être membres du jury.

Par ailleurs, mes remerciements s'adressent également à tous les membres du département de Mathématiques de l'université de Sétif 1, en particulier professeur Hamid Bensridi.

Je remercie ma mère, toute ma famille, Amel, Karima, Dr. Badiia Alaa, Dr. Ali Halitim, Messaoud Aounallah, Abderazak Bouali et tous mes amis, pour tout ce qu'ils m'ont apporté et que s'est avéré inestimable.

Salim Mesbahi

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES	v
INTRODUCTION GÉNÉRALE ET MOTIVATION DE LA THÈSE	1
0.1 INTRODUCTION	1
0.2 ÉTABLISSEMENT DES ÉQUATIONS DE RÉACTION-DIFFUSION . . .	2
0.2.1 Dérivation des équations de réaction-diffusion	2
0.2.2 Résolution des équations de réaction-diffusion	4
0.2.3 Exemples de systèmes de réaction-diffusion	5
0.3 SITUATION DU TRAVAIL	6
0.4 PRÉSENTATION DU TRAVAIL	8
0.4.1 Premier chapitre : Notations, Définitions, Systèmes quasi-linéaires et problèmes approchés	8
0.4.2 Second chapitre : Modélisation des systèmes de réaction-diffusion	9
0.4.3 Troisième chapitre : Résultat d'existence pour des systèmes triangulaires elliptiques de réaction-diffusion avec données dans L^1 et croissance critique en gradient.	9
0.4.4 Quatrième chapitre : Existence globale de solutions faibles pour des systèmes $m \times m$ triangulaires paraboliques de réaction-diffusion avec exposant critique en gradient. . .	11
0.4.5 Cinquième chapitre : Existence de solutions pour des systèmes quasi-linéaires dégénérés elliptiques avec des données L^1 et non-linéarités en le gradient	14
BIBLIOGRAPHIE	18
1 NOTATIONS, DÉFINITIONS, SYSTÈMES QUASI-LINÉAIRES ET PROBLÈMES APPROCHÉS	23
1.1 INTRODUCTION	25
1.2 NOTATIONS, DÉFINITIONS ET PROBLÈMES APPROCHÉS	28

1.2.1	Définitions et lemmes de continuité-compacité	28
1.2.2	Méthode L^1	30
1.2.3	Solutions régulières	31
1.3	SYSTÈMES QUASI-LINÉAIRES À STRUCTURE TRIANGULAIRE . . .	32
1.3.1	Position du problème	33
1.3.2	Le cas sous-quadratique	34
1.3.3	Cas quadratique	34
1.3.4	Cas de données L^1	34
1.3.5	Le cas sur-quadratique	35
1.3.6	Autres résultats et remarques	35
	BIBLIOGRAPHIE	39
2	MODÉLISATION DES SYSTÈMES DE RÉACTION-DIFFUSION	43
2.1	INTRODUCTION	45
2.2	MODÉLISATION DES RÉACTIONS CHIMIQUES	45
2.2.1	Quelques principes généraux en modélisation des milieux continus	46
2.2.2	Lois de comportement	49
2.2.3	Dérivation des équations de réaction-diffusion	51
2.2.4	Modélisation de l'évolution des réactions	52
2.3	MODÉLISATION DE L'ÉLECTRODÉPOSITION DE L'ALLIAGE NICKEL-FER SUR UNE ÉLECTRODE À DISQUE TOURNANT	65
2.4	MODÉLISATION D'UN PROBLÈME DE RÉACTION-DIFFUSION AVEC CONVECTION. EXEMPLE D'UNE POLYMÉRISATION FRONTALE	71
2.5	MODÈLE DE LA TREMPE ET LA PROPAGATION	73
2.6	MODÉLISATION DE LA CHIMIOTAXIE	74
2.6.1	C'est quoi la chimiotaxie ?	74
2.6.2	Modèle de Keller-Segel pour la chimiotaxie avec préven- tion de la surpopulation	74
2.6.3	Modèle en Chimiotaxie, dans les systèmes de hôte- parasitoïde	75
2.6.4	Modèle mathématique d'angiogenèse	76
	BIBLIOGRAPHIE	78

3	RÉSULTAT D'EXISTENCE POUR DES SYSTÈMES TRIANGULAIRES ELLIPTIQUES DE RÉACTION-DIFFUSION AVEC DONNÉES DANS L^1 ET CROISSANCE CRITIQUE EN GRADIENT	82
3.1	INTRODUCTION	84
3.2	HYPOTHÈSES ET RÉSULTAT PRINCIPAL	85
3.2.1	Hypothèses	85
3.2.2	Résultat principal	86
3.3	PREUVE DU RÉSULTAT PRINCIPAL	86
3.3.1	Schéma approché	86
3.3.2	Estimations a priori	87
3.3.3	Convergence	100
	BIBLIOGRAPHIE	102
4	EXISTENCE GLOBALE DE SOLUTIONS FAIBLES POUR DES SYS- TÈMES $M \times M$ TRIANGULAIRES PARABOLIQUES DE RÉACTION- DIFFUSION AVEC EXPOSANT CRITIQUE EN GRADIENT	105
4.1	INTRODUCTION	107
4.2	HYPOTHÈSES ET RÉSULTAT PRINCIPAL	109
4.2.1	Hypothèses	109
4.2.2	Résultat principal	110
4.3	PREUVE DU RÉSULTAT PRINCIPAL	111
4.3.1	Schéma approché	111
4.3.2	Estimations a priori	113
4.3.3	Convergence	117
	BIBLIOGRAPHIE	128
5	EXISTENCE DE SOLUTIONS POUR DES SYSTÈMES QUASI- LINÉAIRES ELLIPTIQUES DÉGÉNÉRÉS AVEC DONNÉES L^1 ET NON-LINÉARITÉS EN GRADIENT	132
5.1	INTRODUCTION	134
5.2	HYPOTHÈSES ET RÉSULTAT PRINCIPAL	136
5.2.1	Hypothèses	136
5.2.2	Résultat principal	137
5.3	PREUVE DU RÉSULTAT PRINCIPAL	138
5.3.1	Schéma approché	138
5.3.2	Estimations a priori	139

5.3.3	Convergence	143
	BIBLIOGRAPHIE	148
	CONCLUSION GÉNÉRALE	152
	NOTATIONS	153

INTRODUCTION GÉNÉRALE ET MOTIVATION DE LA THÈSE

0.1 INTRODUCTION

Les mathématiques ont toujours le bénéfice de participer au développement de plusieurs domaines scientifiques : la physique, la biologie, la biomédicale, l'ingénierie... Pour le mathématicien, ces domaines offrent de nouvelles et passionnantes branches de recherches, pendant que pour le spécialiste ; le modelage mathématique offre un autre outil de la recherche proportionné avec de nouvelles techniques du laboratoire.

Cette thèse est une initiation aux approches modernes : modélisation et analyse mathématique de systèmes de réaction-diffusion ; domaine de recherche en pleine effervescence.

Les systèmes de réaction-diffusion apparaissent naturellement dans la modélisation mathématique d'une grande variété de phénomènes, non seulement dans les sciences naturelles, mais aussi dans l'ingénierie et l'économie, tels que la dynamique des gaz, des processus de fusion, certains modèles biologiques, les processus cellulaires, l'écologie, la propagation de maladies, les processus industriels, le transport catalytique de contaminants dans l'environnement, la dynamique des populations, la propagation des flammes et des réactions chimiques et autres. La plupart de ceux-ci, en première vue, sont des phénomènes qui ont un dénominateur commun, la présence de diffusion (permettant à la propagation d'une épidémie ou d'une substance chimique), et de réaction (qui est la manière spécifique dont les différentes phases ou composantes chimiques réagissent), ils sont génériquement appelés systèmes de réaction-diffusion. Pour l'analyse de ces types de problèmes, des méthodes variées et des techniques élaborées ont été proposées, voir par exemple Dautray et Lions [22].

Il n'est pas important de parler d'une théorie générale des systèmes

de réaction-diffusion. C'est un sujet relativement récent de la recherche mathématique appliquée. La plupart des travaux qui ont été fait jusqu'à présent s'intéressent beaucoup à l'exploration de certains aspects de systèmes et équations très spécifiques. C'est parce que ces systèmes sont en général très compliqués et ouvrent un large éventail de phénomènes encore mal connus.

Les systèmes de réaction-diffusion sont des systèmes couplés d'équations aux dérivées partielles. La forme générale de ces systèmes est :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} (D(t, x, u, \nabla u) \cdot \nabla u) + f(t, x, u, \nabla u) \quad , \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0$$

où $u = u(t, x) = (u_1, \dots, u_m) : \mathbb{R}^+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ est un vecteur de variables. f est une fonction vectorielle linéaire ou non-linéaire, qui se nomme les termes de réaction, elle est une application régulière (au moins localement lipschitzienne). $D : \mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{mN} \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une fonction régulière. Lorsque D est une matrice carrée elle est appelée la matrice de diffusion, dans ce cas $\operatorname{div} (D(t, x, u, \nabla u) \cdot \nabla u) = D\Delta u$ sont les termes de diffusion.

Cette équation est posée sur un domaine ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, et complétée par des conditions sur le bord, par exemple, les conditions de Dirichlet homogènes ($u = 0$ sur $\partial\Omega$) ou les conditions de Neumann homogènes $\left(\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\right)$.

Les termes de réaction sont le résultat de toute interaction entre les composantes de u ; par exemple u peut être un vecteur de concentrations chimiques, et f est l'effet des réactions chimiques de ces concentrations, ou bien les composantes de u peuvent être des densités de populations végétales ou animales, et f représente l'effet des relations (de compétition ou de symbiose) entre des prédateurs et des proies. Les termes de diffusion peuvent représenter des diffusions moléculaires ou quelques mouvements aléatoires d'individus dans une population.

0.2 ÉTABLISSEMENT DES ÉQUATIONS DE RÉACTION-DIFFUSION

0.2.1 Dérivation des équations de réaction-diffusion

Dans ce paragraphe nous allons établir un système d'équations de réaction-diffusion dans le cas d'une réaction chimique et d'une diffusion moléculaire. Considérons une région (qui peut être un tube à essai ou

une cellule vivante) dans laquelle des réactions chimiques se réalisent (la cellule vivante est le siège de milliers de réactions chimiques simultanées).

Soit $u_i = u_i(x, t)$, $i = 1, \dots, n$ la concentration de la i -ème espèce E_i prenant part dans les réactions, et soit $f_i = f_i(x, t, u)$ le taux de formation de cet espèce dans cette réaction. Ici $u = (u_1, \dots, u_n)$ est le vecteur de concentrations, x est le lieu et t est le temps.

Soit $\phi_i = \phi_i(x, t)$, $i = 1, \dots, n$, le flux de la i -ème espèce dû à la diffusion avec la convention usuelle c'est que ϕ_i est positif si l'écoulement de la i -ème espèce se fait de l'intérieur de la région vers l'extérieur.

Soit Ω la région considérée de surface $S = \partial\Omega$. Alors, la vitesse de formation de la quantité de E_i dans Ω est égale à la quantité formée par la réaction moins le flux à travers la surface S . En termes mathématiques :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_i dx = \int_{\Omega} f_i dx - \int_S \phi_i d\sigma$$

En utilisant le théorème de la divergence, il vient

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} - f_i + \nabla \cdot \phi_i \right) dx = 0$$

Comme cette relation est vraie pour toute région nous en tirons pour chaque i

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \nabla \cdot \phi_i = f_i$$

D'après la première loi de Fick, le flux ϕ_i de E_i se donne par l'expression

$$\phi_i = -D_i \nabla u_i$$

où D_i est le coefficient de diffusion de l'espèce E_i . Ainsi, des deux dernières relations nous tirons

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \nabla \cdot (D_i \nabla u_i) + f_i$$

pour $i = 1, \dots, n$.

De façon générale, les coefficients D_i peuvent dépendre de t , x et u . Si D_i sont des constantes, nous obtenons

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = D_i \Delta u_i + f_i$$

dont la forme vectorielle, peut s'écrire

$$u_t = D \Delta u + f$$

où $u = (u_1, \dots, u_n)$, $f = (f_1, \dots, f_n)$ et $D = \text{diag}(D_1, \dots, D_n)$ est la matrice diagonale d'éléments diagonaux $D_1, \dots, D_n$.

Il est aussi possible que le flux ϕ_i de la densité u_i peut dépendre des gradients des concentrations des autres espèces pas seulement de ∇u_i le gradient de u_i , c'est-à-dire

$$\phi_i = - \sum_{1 \leq j \leq n} D_{ij} \nabla u_j$$

ou dans la forme matricielle

$$\phi = -D \nabla u$$

où $D = (D_{ij})$ est une $n \times n$ matrice non diagonale, ses termes sont les coefficients de diffusion. D_{ij} caractérise la diffusion de u_i dans u_j . Dans ce cas on a ce qu'on appelle croisement de diffusion entre les densités u_i (En anglais : cross diffusion).

Il est à noter ici que :

- (i) Les coefficients de diffusion ne sont pas toujours positifs. La positivité de ces coefficients signifie que l'écoulement de la matière se fait des milieux plus concentrés vers les moins concentrés. Il se peut que les organismes s'attirent vers leur espèce et le mouvement se fait alors dans le sens du gradient de concentration, c'est-à-dire des milieux les moins concentrés vers les plus concentrés ; et dans ce cas, le coefficient de diffusion soit négatif.
- (ii) Si le terme de réaction $f_i > 0$, il existe une source ou production de masse pour la i -ème espèce. Dans le cas contraire $f_i < 0$, il y a une annihilation de masse.
- (iii) Le coefficient de diffusion D soit constant si la région Ω est un milieu homogène, et soit régionalisé (dépend de la position x) si la région Ω est un milieu hétérogène.

o.2.2 Résolution des équations de réaction-diffusion

Il n'existe pas de solutions générales des systèmes de réaction-diffusion. On dispose cependant d'informations qualitatives sur l'existence globale des solutions et leurs comportements attendus lorsque la variable t tend vers l'infini.

Le fait que ces systèmes modélisent des phénomènes du monde réel, les questions mathématiques importantes qui les concernent sont :

- (i) Existence (et unicité) de solutions faibles et fortes pour des données initiales données dans une vaste classe de fonctions.
- (ii) Caractère globale de la solution.
- (iii) Positivité de la solution chaque fois que les données initiales sont positives.
- (iv) Comportement asymptotique de la solution globale lorsque le temps t tend vers l'infini.
- (v) Dépendance continue de la solution des données initiales.

o.2.3 Exemples de systèmes de réaction-diffusion

Les exemples sont très nombreux ; en nous limitant aux plus fréquemment rencontrés, nous citerons :

- les réactions chimiques, où l'on rencontre en particulier ce type de modèle pour décrire les phénomènes de combustion et de propagation de flammes ; les composantes de u sont alors les concentrations des différentes espèces chimiques en jeu.
- l'écologie, où ces modèles sont introduits pour décrire l'invasion d'un écosystème par une espèce mutante ou étrangère ; les composantes de u sont alors les effectifs des différentes populations. Ces modèles se transposent aux populations cellulaires, pour décrire par exemple la croissance de tumeurs ou le processus de cicatrisation.
- les milieux excitables en biologie (cellules cardiaques et neurones, u étant alors le potentiel électrique transmembranaire) ; l'enjeu est par exemple de comprendre la fibrillation cardiaque ou la propagation d'un potentiel d'action le long d'un axone. Dans un milieu excitable, la dynamique locale possède un point fixe stable, mais sous l'effet d'une perturbation supérieure à un seuil, le système effectue une grande excursion dans l'espace de phase avant de revenir au point fixe ; en particulier, la première phase de la réponse à l'excitation est une amplification de son effet.
- ces modèles sont couramment invoqués pour rendre compte de la formation de motifs (Turing 1952) dans divers contextes, en particulier celui de la morphogenèse chez les organismes vivants (Murray 2002), voire celui de leur développement à partir d'une cellule initiale (Maynard 2001). Dans le modèle proposé par Turing, la dynamique locale résulte de deux réactions chimiques non linéaires couplées, impliquant une espèce A auto-

catalytique (elle favorise sa propre production) et activatrice (elle favorise la production de l'espèce B) et d'une espèce inhibitrice B (elle ralentit la formation de A). Une condition importante pour l'apparition de motifs spatiaux est que la diffusion de l'inhibiteur D_B/D_A dépasse un certain seuil, l'état d'équilibre spatialement homogène est remplacé par une structure spatiale périodique (alternance de pics de concentration de A et de zones où B est majoritaire) dont la longueur caractéristique est fixée par les paramètres de la dynamique et non par les conditions aux bords, lesquelles ne contrôlent que la géométrie des motifs.

0.3 SITUATION DU TRAVAIL

Les mathématiques sont fortement impliquées dans le développement de la science. Ces interactions revitalisent et renforcent le champ de la science biomédicale et toutes les sciences, par conséquent, les mathématiciens doivent être impliqués dans la biologie comme toutes les importantes et excitantes découvertes scientifiques de tous les temps. Les meilleurs modèles montrent comment un processus marche et ensuite prévoient ce qui peut suivre, c'est ce qu'on essaie de décrire dans ce travail. Plusieurs méthodes ont été proposées pour l'étude de l'existence et la propriété qualitative des solutions. La majorité des travaux dans la littérature est dédiée aux systèmes elliptiques et paraboliques quasi-linéaires avec des conditions aux limites de Dirichlet ou de Neumann, voir Amann [9], Ladyzhenskaya et al [30], Lions [33], Rothe [46]. Tous ces travaux examinent les solutions classiques. Récemment, l'attention a été donnée aux solutions faibles des systèmes, et différentes méthodes pour le problème d'existence ont été utilisées, voir Alaa [7], Alaa et Pierre [8], Baras et Pierre [11], Boccardo et al [15], Boccardo et Gallouet [17], Boccardo et al [18], Dall'aglio et Orsina [21], Deuel et Hess [23], Porretta [45].

Le travail constituant cette thèse s'inscrit dans ce même contexte. Nous nous intéressons à l'étude de certaines classes de systèmes de réaction diffusion elliptiques et paraboliques avec des non linéarités à croissance arbitraires et des données non régulières. Ce travail est alors composé de cinq chapitres indépendants, il est précédé par cette introduction générale qui met en évidence l'art du sujet et les problèmes abordés.

Nous avons trouvé judicieux de présenter au premier chapitre

quelques notations, définitions et des résultats nécessaires sur les systèmes quasi-linéaires à structure triangulaire et les problèmes approchés qui nous seront utiles dans les chapitres ultérieurs. Dans le second chapitre, nous présentons quelques modèles faisant intervenir des systèmes de réaction-diffusion. Le troisième chapitre concerne l'étude de certaine classe de systèmes quasi-linéaires triangulaires de réaction-diffusion avec données L^1 dont la croissance critique est en gradient, et ceci dans le cas elliptique. Dans le quatrième chapitre, nous étudions certaine classe de systèmes quasi-linéaires triangulaires de réaction-diffusion du type parabolique avec exposant critique en gradient. Le dernier chapitre est consacré à l'étude de certaine classe de systèmes quasi linéaires du type elliptique de réaction-diffusion dont la croissance est arbitraire et les données sont peu régulières.

Rappelons que l'existence globale pour une équation différentielle ordinaire implique toujours l'existence globale pour l'équation de réaction-diffusion associée (c'est une application du principe du maximum), mais ce résultat est en général faux pour les systèmes. Pour s'en convaincre, on peut trouver des contre-exemples explicites dans Martin et Pierre [35].

Des techniques d'ensembles invariants ont été développées (voir Martin [37], Smoller [48]) qui permettent, dans certains cas, d'obtenir l'existence globale de leurs systèmes d'équations de réaction-diffusion à partir de l'existence globale de leurs systèmes d'équations différentielles ordinaires associés. Mais sauf cas particulier, celles-ci ne s'appliquent pas à nos problèmes étudiés dans ce travail. Il est donc nécessaire de développer de nouvelles techniques.

Pour attaquer ces questions mathématiques, nous utilisons ici des techniques variées et des nouvelles méthodes élaborées. Nous citons, par exemple, des nouvelles fonctions de troncature, des méthodes de points fixes dans des espaces appropriés, des résultats de compacité fines, etc...

Nous commençons par situer notre travail puis nous présentons le contenu de chaque chapitre et nous mentionnons nos résultats obtenus :

o.4 PRÉSENTATION DU TRAVAIL

o.4.1 Premier chapitre : Notations, Définitions, Systèmes quasi-linéaires et problèmes approchés

Dans ce premier chapitre, nous commençons par un diaporama des travaux fait sur le problème suivant

$$\begin{cases} u - A_1 u = f(x, u, v, \nabla u, \nabla v) + F(x) & \text{dans } \Omega \\ v - A_2 v = g(x, u, v, \nabla u, \nabla v) + G(x) & \text{dans } \Omega \\ \lambda_1 \partial_v^1 u + (1 - \lambda_1) u = \alpha_1 & \text{sur } \partial\Omega \\ \lambda_2 \partial_v^2 v + (1 - \lambda_2) v = \alpha_2 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière $\partial\Omega$ régulière. Ici A_r , $r = 1, 2$, désigne un opérateur de dérivation sur Ω défini par

$$A_r u = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}^r(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_i b_i^r(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c^r(x) u$$

où a_{ij}^r , b_i^r et c^r sont régulières. Les conditions au bord sont définies à l'aide des dérivées conormales associées :

$$\partial_v^r u = \sum_{i,j} a_{ij}^r(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \eta_j$$

On suppose de plus que f , g , F et G sont des fonctions suffisamment régulières. On s'intéresse à l'existence de solutions sous les deux hypothèses essentielles (H_1) et (H_2) suivantes :

- Une hypothèse assurant la positivité des solutions, soit

$$\begin{cases} f(x, 0, v, p, q), g(x, u, 0, p, q) \geq 0 \\ F(x), G(x) \geq 0 \\ \alpha_1, \alpha_2 \geq 0, 0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 1 \end{cases} \quad (H_1)$$

pour tout (x, u, v, p, q) de $\Omega \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$.

- Une hypothèse de “dissipation” sur les termes réactifs,

$$f + g \leq l(x) \quad (H_2)$$

où l est une fonction bornée sur Ω (ou plus généralement dans $L^p(\Omega)$, p grand).

Puis nous présentons quelques notations, définitions et des résultats nécessaires sur les problèmes approchés qui nous seront utiles dans les chapitres ultérieurs. Ensuite, nous présentons quelques résultats sur les systèmes quasi-linéaires elliptiques et paraboliques à structure triangulaire.

o.4.2 Second chapitre : Modélisation des systèmes de réaction-diffusion

L'objectif de ce chapitre est de présenter quelques modèles faisant intervenir des systèmes de réaction-diffusion, voir, par exemple, Alaa et al [4], Baker [10], Berestycki et al [13], Billy [14], Feres [24], Francesco [25], Francesco et Rosado [26], Grzybowski [27], Murray [38] et [39], Othmer et al [40], Pearce et al [41] et Picard [42]. Pour la modélisation des réactions chimiques, nous avons commencé par rappeler les lois fondamentales de la physique (lois de conservation) et certaines lois de comportement. La quantité clé de la modélisation ici est celle de la vitesse des réactions, en plus des lois fondamentales de la physique. Nous avons arrivé à modéliser l'évolution des réactions chimiques sous forme de systèmes différentiels. C'est en tenant compte de la dépendance des concentrations de la variable espace des systèmes de réaction-diffusion. Ainsi nous avons présenté la modélisation mathématique d'un problème d'électrodéposition de l'alliage Nickel-Fer sur une électrode à disque tournant, ceci conduit de même à un système de réaction-diffusion. Nous avons présenté aussi la Modélisation d'un problème de réaction-diffusion avec convection, exemple d'une polymérisation frontale, un modèle de la trempe et la propagation, un modèle de Keller-Segel pour la chimiotaxie avec prévention de la surpopulation, un modèle en Chimiotaxie dans les systèmes de hôte-parasitoïde et un modèle mathématique d'angiogenèse.

Il faut noter que durant ces dernières décennies, l'intérêt porté à l'étude de ce type de systèmes n'a cessé de croître et une abondante littérature a été développée sur ce sujet, notamment sur le problème d'existence locale, globale ou d'explosion en temps fini, de comportement asymptotique...

o.4.3 Troisième chapitre : Résultat d'existence pour des systèmes triangulaires elliptiques de réaction-diffusion avec données dans L^1 et croissance critique en gradient.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'analyse mathématique (nous prouvons l'existence de solutions faibles) pour certaine classe de systèmes $m \times m$ quasi linéaires triangulaires elliptiques de réaction-diffusion avec données L^1 et les termes non linéaires ont une croissance

critique en gradient. Ce travail a été réalisé en collaboration avec N. Alaa, et a fait l'objet d'un article publié dans "Mediterranean Journal of Mathematics" (MJM), voir Alaa et Mesbahi [1].

Le système que nous étudions est le suivant

$$\begin{cases} -\Delta u_i = f_i(x, u, \nabla u) + F_i(x) & \text{dans } \Omega \\ u_i = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}, \text{ pour } 1 \leq i \leq m \quad (1.0)$$

où $u = (u_1, \dots, u_m)$, $\nabla u = (\nabla u_1, \dots, \nabla u_m)$, $f = (f_1, \dots, f_m)$, $F = (F_1, \dots, F_m)$, $p = (p_1, \dots, p_m)$, $m \geq 2$ and Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière assez régulière $\partial\Omega$, $-\Delta$ désigne l'opérateur Laplacien sur Ω avec des conditions aux limites de Dirichlet. Puisque nous sommes essentiellement préoccupés par les systèmes fréquemment rencontrés dans les applications, Smoller [47], nous nous restreignons au cas de solutions positives satisfaisant la structure triangulaire. Ces deux propriétés principales sont assurées (respectivement) par les hypothèses suivantes

$$\begin{cases} f_i(\hat{u}_i) \geq 0, \text{ où } \hat{u}_i = (x, u_1, \dots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \dots, u_m, p_1, \dots, p_m), \\ F_i(x) \geq 0, \text{ pour tout } 1 \leq i \leq m, \\ \text{et pour tout } (u, p) \in (\mathbb{R}^+)^m \times \mathbb{R}^{Nm} \text{ et pour } x \in \Omega \text{ p.p.} \end{cases} \quad (2.0)$$

$$\sum_{1 \leq j \leq i} f_j \leq 0, \text{ pour tout } 1 \leq i \leq m, (u, p) \in (\mathbb{R}^+)^m \times \mathbb{R}^{Nm} \text{ et pour } x \in \Omega \text{ p.p.} \quad (3.0)$$

Lorsque f ne dépend pas du gradient, nous renvoyons le lecteur à l'étude récente et excellente de Pierre [43] qui présente une technique générale de prouver l'existence d'une solution dans ce cas. Si f_i dépendant du gradient, un théorème d'existence a été prouvée dans Maach [34], au moyen de la méthode- L^1 introduite dans Martin et Pierre [36], lorsque la croissance des non-linéarités en ce qui concerne le gradient est sous-quadratique, à savoir

$$|f_i| \leq C_i \left(\sum_{1 \leq j \leq m} |u_j| \right) \left(K_i + \sum_{1 \leq j \leq m} |\nabla u_j|^{\alpha_j} \right), 1 \leq i \leq m$$

$C_i \geq 0$, C_i est croissante, $K_i \in L^1(\Omega)$ et $1 \leq \alpha_j < 2$.

Tout au long de ce chapitre, nous supposons que :

Γ1) $f_i : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{Nm} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont mesurables, pour tout $1 \leq i \leq m$.

Γ2) $f_i : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{Nm} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont continues pour presque tout x dans Ω et pour tout $1 \leq i \leq m$.

$\Gamma 3) |f_1(x, u, p)| \leq C_1(|u_1|) \left(\lambda_1(x) + \|p_1\|^2 + \sum_{2 \leq j \leq m} \|p_j\|^{\alpha_j} \right)$, où $C_1 : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ est non décroissante, $\lambda_1 \in L^1(\Omega)$, $1 \leq \alpha_j < 2$.

$\Gamma 4) |f_i(x, u, p)| \leq C_i \left(\sum_{j=1}^i |u_j| \right) \left(\lambda_i(x) + \sum_{1 \leq j \leq m} \|p_j\|^2 \right)$, pour tout $2 \leq i \leq m$, où $C_i : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ est non décroissante et $\lambda_i \in L^1(\Omega)$.

$\Gamma 5) F_i \in L^1(\Omega)$, pour tout $1 \leq i \leq m$.

Notre objectif est d'étudier le cas $\alpha_j = 2$ pour tout $1 \leq j \leq m$. Cette croissance critique par rapport au gradient crée des difficultés dans le passage à la limite pour le problème approché et la méthode- L^1 ne peut pas être appliquée dans ce cas. Un modèle typique où les résultats de cette étude peuvent être appliqués est le suivant

$$\begin{cases} -\Delta u_i = \sum_{1 \leq j \leq i} a_{ij} \frac{u_j}{\sum_{1 \leq k \leq m} u_k} |\nabla u_j|^2 + F_i(x) & \text{dans } \Omega \\ u_i = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où $a_{ij} \leq 0$ et $F_i(x) \geq 0$, pour tout $1 \leq i \leq m$.

Nous avons organisé ce chapitre de la manière suivante. Dans la section 3.2, nous donnons la position exacte du problème et le résultat principal de ce chapitre. Dans la section 3.3, nous tronquons le système et nous donnons ensuite des estimations appropriées pour passer à la limite. Enfin, nous prouvons la convergence du problème tronqué vers une solution de notre système (1.0) si les hypothèses (2.0), (3.0) et $(\Gamma 1) - (\Gamma 5)$ sont satisfaites. Les difficultés de cette section sont semblables à ceux dans Alaa et Mounir [5], Bensoussan et al [12], Boccardo et Gallouet [16], Boccardo et al [19], et les techniques sont dans le même esprit. Mais de nouvelles difficultés spécifiques dues à la nature du système doivent être manipulées.

Le résultat principal de ce chapitre est le suivant :

Théorème

Supposons que les hypothèses (2.0), (3.0) et $(\Gamma 1) - (\Gamma 5)$ sont satisfaites. Alors il existe une solution positive faible de (1.0).

o.4.4 Quatrième chapitre : Existence globale de solutions faibles pour des systèmes $m \times m$ triangulaires paraboliques de réaction-diffusion avec exposant critique en gradient.

Nous nous intéressons dans ce chapitre à l'existence de solutions faibles pour certaine classe de systèmes $m \times m$ quasi-linéaires triangulaires

paraboliques de réaction-diffusion, la positivité des solutions et la masse totale des composantes sont conservées avec le temps. L'originalité de cette étude persiste dans le fait que les non-linéarités de notre système ont une croissance critique en gradient de solutions. Ce travail est en effet le fruit d'une collaboration avec N. Alaa et M. Oussous ; il est d'ailleurs soumis pour publication au "Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical", voir Alaa et al [2].

Dans ce chapitre, nous prouvons l'existence de solutions faibles pour les systèmes paraboliques de réaction-diffusion de la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} - d_i \Delta u_i = f_i(t, x, u, \nabla u) & \text{dans } Q_T \\ u_i(0, x) = u_{i,0} & \text{dans } \Omega, \text{ pour } 1 \leq i \leq m \\ u_i = 0 & \text{sur } \Sigma_T \end{cases} \quad (4.0)$$

où $u = (u_1, \dots, u_m)$, $\nabla u = (\nabla u_1, \dots, \nabla u_m)$, $f = (f_1, \dots, f_m)$, $m \geq 2$ et Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière assez régulière $\partial\Omega$, $Q_T =]0, T[\times \Omega$, $\Sigma_T =]0, T[\times \partial\Omega$, $T > 0$, $-\Delta$ désigne l'opérateur Laplacien sur $L^1(\Omega)$ avec des conditions aux limites de Dirichlet, d_i , $1 \leq i \leq m$, sont des constantes positives, et les non linéarités f_i , $1 \leq i \leq m$, ont une croissance critique en $|\nabla u|$. En outre, nous avons les hypothèses suivantes :

- La positivité de la solution est préservée au cours du temps, ce qui est assurée par

$$\begin{cases} f_i(\hat{u}_i) \geq 0, \text{ où} \\ \hat{u}_i = (t, x, u_1, \dots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \dots, u_m, p_1, \dots, p_{i-1}, 0, p_{i+1}, \dots, p_m), \\ \text{pour tout } 1 \leq i \leq m, (u, p) \in (\mathbb{R}^+)^m \times \mathbb{R}^{Nm} \text{ et pour } (t, x) \in Q_T \text{ p.p.} \\ u_{i,0} \geq 0, \text{ pour tout } 1 \leq i \leq m \end{cases} \quad (5.0)$$

- La masse totale des composantes $u_1, \dots, u_m$ est contrôlée en fonction du temps, ce qui est assurée par

$$\begin{cases} \sum_{1 \leq i \leq r} f_i(t, x, u, p) \leq 0, \text{ pour tout } 1 \leq r \leq m, \\ \text{pour tout } (u, p) \in (\mathbb{R}^+)^m \times \mathbb{R}^{Nm} \text{ et pour } (t, x) \in Q_T \text{ p.p.} \end{cases} \quad (6.0)$$

Nous savons que si les non-linéarités f ne dépendent du gradient (système (4.0) est semi-linéaire), l'existence de solutions globales positives ont été obtenue par Hollis et Morgan [28], Hollis et al. [29] et Martin et Pierre [36]. Nous pouvons voir que dans tous ces travaux, la structure triangulaire, à savoir l'hypothèses (6.0), joue un rôle important dans l'étude

des systèmes semi-linéaires. En effet, si (6.0) n'est pas satisfaite, Pierre et Schmitt [44] ont prouvé l'explosion en temps fini des solutions de certains systèmes semi-linéaires de réaction-diffusion.

Lorsque $f = (f_1, f_2)$ dépend du gradient, Alaa et Mounir [6] ont résolu le problème où la structure triangulaire est satisfaite et la croissance de f_1 and f_2 par rapport à $|\nabla u_1|$, $|\nabla u_2|$ est sub-quadratique.

$$\begin{cases} \text{il existe } 1 \leq p < 2, C : [0, \infty)^2 \rightarrow [0, \infty) \text{ non décroissante telle que} \\ |f_1| + |f_2| \leq C(|u_1|, |u_2|) (1 + |\nabla u_1|^p + |\nabla u_2|^p) \end{cases}$$

A propos de la croissance critique par rapport au gradient ($p = 2$), nous rappelons que dans le cas d'une seule équation ($d_1 = d_2$ et $f_1 = f_2$), des résultats d'existence ont été prouvés dans le cas elliptique Alaa [7] et Bensoussan et al [12]. Les équations paraboliques correspondantes ont également été étudiées par de nombreux auteurs, voir par exemple Alaa [7], Boccardo et Gallouet [16], Boccardo et al [18], Dall'aglio et Orsina [21], et Landes et Mustonen [31].

Ce travail représente une généralisation au cas parabolique de l'étude que nous avons fait dans le cas elliptique (voir Alaa et Mesbahi [1]) pour ces systèmes d'ordre arbitraire. Ce passage au cas parabolique, nécessite des nouvelles approches et des difficultés également techniques à surmonter.

Tout d'abord, nous devons préciser dans quel sens nous voulons résoudre le problème (4.0) :

Nous disons que $(u_1, \dots, u_m)$ est une solution de (4.0) si, pour tout $1 \leq i \leq m$, on a

$$\begin{cases} u_i \in C([0, T]; L^1(\Omega)) \cap L^1(0, T; W_0^{1,1}(\Omega)) \\ f_i(t, x, u, \nabla u) \in L^1(Q_T) \\ u_i(t) = S_{d_i}(t) u_0 + \int_0^t S_{d_i}(t-s) f_i(., s, u(s), \nabla u(s)) ds, \forall t \geq 0 \end{cases}$$

où S_{d_i} , $1 \leq i \leq m$, désignent les semi-groupes dans $L^1(\Omega)$ générés par $-d_i \Delta$ avec conditions aux limites de Dirichlet.

Supposons que f satisfait les hypothèses suivantes, pour tout $1 \leq i \leq m$:

$$f_i :]0, T[\times \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{mN} \rightarrow \mathbb{R} \text{ sont mesurables} \quad (7.0)$$

$$f_i : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{mN} \rightarrow \mathbb{R} \text{ sont localement lipschitzienne} \quad (8.0)$$

soit

$$\sum_{1 \leq i \leq m} |f_i(x, t, u, p) - f_i(x, t, \hat{u}, \hat{p})| \leq K(r) \left(\sum_{1 \leq i \leq m} |u_i - \hat{u}_i| + \sum_{1 \leq i \leq m} \|p_i - \hat{p}_i\| \right)$$

pour presque tout (t, x) et pour tout $0 \leq |u_i|, |\hat{u}_i|, \|p_i\|, \|\hat{p}_i\| \leq r$.

$$|f_1(t, x, u, \nabla u)| \leq C_1(|u_1|) \left(F_1(t, x) + \|\nabla u_1\|^2 + \sum_{2 \leq j \leq m} \|\nabla u_j\|^{\alpha_j} \right) \quad (9.0)$$

où $C_1 : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ est non décroissante, $F_1 \in L^1(Q_T)$ et $1 \leq \alpha_j < 2$.

$$|f_i(t, x, u, \nabla u)| \leq C_i \left(\sum_{j=1}^i |u_j| \right) \left(F_i(t, x) + \sum_{1 \leq j \leq m} \|\nabla u_j\|^2 \right), \quad 2 \leq i \leq m \quad (10.0)$$

où $C_i : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ est non décroissante, $F_i \in L^1(Q_T)$ pour tout $2 \leq i \leq m$.

Nous avons trouvé judicieux d'organiser ce chapitre comme suit :

Nous commençons d'abord par une introduction qui présente certains rappels sur les principaux résultats obtenus précédemment. Cela mettra en évidence la contribution de notre travail et son originalité. Dans la deuxième section, nous donnons la définition de la notion de solution utilisée ici. Nous présentons ensuite les principaux résultats de ce travail. Dans la dernière section, nous donnons la preuve de l'existence globale de solution faible de notre système, cela se fait en trois étapes : dans la première nous tronquons le système, dans la seconde nous donnons des estimations appropriées sur les solutions approchées et dans la dernière étape, nous montrons la convergence du système approché en utilisant les techniques introduites par Boccardo et al. [18] et Dall'Aglio et Orsina [21].

Le résultat principal de ce chapitre est le suivant :

Théorème

supposons que les hypothèses (5.0) – (10.0) sont satisfaites. Si $u_{i,0} \in L^2(\Omega)$, pour tout $1 \leq i \leq m$, alors il existe une solution positive globale $u = (u_1, \dots, u_m)$ du système (4.0). De plus, $u_1, \dots, u_m \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$.

o.4.5 Cinquième chapitre : Existence de solutions pour des systèmes quasi-linéaires dégénérés elliptiques avec des données L^1 et non-linéarités en le gradient

L'objet de ce chapitre est d'étudier l'existence de solutions faibles pour certaine classe de systèmes dégénérés 2×2 quasi-linéaires de réaction-

diffusion de type elliptique, nous nous intéressons à la situation où les données sont non régulières et la croissance des termes non linéaires est arbitraire en le gradient de solutions. L'originalité de cette étude persiste dans le fait que les non-linéarités de notre système ont une croissance critique en gradient, c'est notre principal objectif dans ce chapitre. Ce travail a été réalisé en collaboration avec N. Alaa, A. Mouida et W. Bouarifi, et a fait l'objet d'un article publié dans "Electronic Journal of Differential Equations" (EJDE), voir Alaa et al [3].

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au problème elliptique quasi-linéaire dégénéré suivant

$$\begin{cases} u - D_1 \Delta u + a(x) |\nabla u|^2 + b(x) |\nabla v|^\alpha = f(x) & \text{in } \Omega \\ v - D_2 \Delta v + c(x) |\nabla u|^\beta + d(x) |\nabla v|^2 = g(x) & \text{in } \Omega \\ u = v = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (11.0)$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, de frontière assez régulière $\partial\Omega$. Les coefficients de diffusion D_1 et D_2 sont des constantes positives. a, b, c, d, f et $g : \Omega \rightarrow [0, +\infty)$ sont des fonctions intégrables non négatives et $1 \leq \alpha, \beta < 2$.

Nous nous intéressons particulièrement au cas où les données ne sont pas régulières et où la croissance des termes non-linéaires est arbitraire en gradient. Soit f, g, a, b, c , et d sont des fonctions vérifiant les hypothèses suivantes

$$f, g \in L^1(\Omega) \text{ et } f, g \geq 0 \quad (12.0)$$

$$a, b, c, d \in L^1_{loc}(\Omega) \text{ et } a, b, c, d \geq 0 \quad (13.0)$$

Tout d'abord, nous devons préciser dans quel sens nous voulons résoudre le problème (11.0) :

On dit que (u, v) est une solution faible de (11.0) si

$$\begin{cases} u, v \in W_0^{1,1}(\Omega) \\ a(x) |\nabla u|^2, b(x) |\nabla v|^\alpha, c(x) |\nabla u|^\beta, d(x) |\nabla v|^2 \in L^1_{loc}(\Omega) \\ u - D_1 \Delta u + a(x) |\nabla u|^2 + b(x) |\nabla v|^\alpha = f(x), \text{ dans } D'(\Omega) \\ v - D_2 \Delta v + c(x) |\nabla u|^\beta + d(x) |\nabla v|^2 = g(x), \text{ dans } D'(\Omega) \end{cases}$$

En effet, et pour mieux comprendre la situation, nous présentons quelques travaux précédents concernant le problème où $a, b, c, d \in L^\infty(\Omega)$.

• Si f, g sont suffisamment régulières ($f, g \in W^{1,\infty}(\Omega)$) et pour tout $\alpha, \beta \geq 1$, la méthode de sous- et sur-solution peuvent être utilisées pour prouver l'existence dans (11.0). En effet, (o.o) est une sous-solution et $w = (w_1, w_2)$ solution du problème linéaire

$$\begin{cases} w_1 - D_1 \Delta w_2 = f(x) & \text{dans } \Omega \\ w_1 - D_1 \Delta w_2 = g(x) & \text{dans } \Omega \\ w_1 = w_2 = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

est une sur-solution, alors (11.0) présente une solution $(u, v) \in W_0^{1,\infty}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$, voir Lions [32].

• Si $f, g \in L^2(\Omega)$ et $1 \leq \alpha, \beta \leq 2$, alors $|\nabla u|^\alpha, |\nabla v|^\beta \in L^1(\Omega)$. Plusieurs auteurs ont travaillé sur ce problème et prouvé que (11.0) admet une solution $(u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, voir Bensoussan et al [12] et Boccardo et al [20].

• Si $f, g \in L^1(\Omega)$ et $1 \leq \alpha, \beta < 2$, Alaa et Mesbahi [1] ont prouvé que (11.0) admet une solution non négative $(u, v) \in W_0^{1,1}(\Omega) \times W_0^{1,1}(\Omega)$.

• Le cas où $f, g \in M_B^+(\Omega)$ (f, g sont des mesures positives et bornées sur Ω) a été traité par Alaa et Pierre [8]. Ils ont prouvé que si $1 \leq \alpha, \beta \leq 2$ et la sur-solution $w = (w_1, w_2) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, alors le problème (11.0) admet une solution non négative $(u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

Pour notre propos, nous nous intéressons particulièrement au cas du système (11.0) où a, b, c, d, f et g sont non régulières.

Pour plus de précisions, nous proposons le problème modèle suivant

$$\begin{cases} u - D_1 \Delta u + b(r) |\nabla v|^\alpha = f & \text{dans } B \\ v - D_2 \Delta v + c(r) |\nabla u|^\beta = g & \text{dans } B \\ u = v = 0 & \text{sur } \partial B \end{cases}$$

où B est la boule unité dans $\mathbb{R}^N$, $r = \|x\|$ et $b(r), c(r)$ sont données par

$$b(r) = c(r) = \begin{cases} -\ln r & \text{si } N = 2 \\ r^{2-N} & \text{si } N \geq 3 \end{cases}$$

Dans ce cas, $b(r), c(r)$ sont dans $L_{loc}^1(B)$ mais pas dans $L^\infty(B)$. Par conséquent, les techniques usuelles et classiques utilisées pour prouver l'existence et basées sur L^∞ -estimation à priori sur u et ∇u , tombent en défaut. Pour surmonter ces difficultés, nous allons développer une nouvelle méthode complètement différente de la précédente approche.

Nous nous intéressons donc à prouver l'existence de solution faible positive du problème (11.0). Pour ceci, nous introduisons la fonction de troncature T_k de classe C^2 , définie pour tout $k > 0$ par

$$\begin{cases} T_k(r) = r & \text{si } 0 \leq r \leq k \\ T_k(r) \leq k+1 & \text{si } r \geq k \\ 0 \leq T'_k(r) \leq 1 & \text{si } r \geq 0 \\ T'_k(r) = 0 & \text{si } r \geq k+1 \\ 0 \leq -T''_k(r) \leq C(k) \end{cases}$$

A titre d'exemple, la fonction T_k est donnée comme suivant

$$\begin{cases} T_k(r) = r & \text{dans } [0, k] \\ T_k(r) = \frac{1}{2}(r-k)^4 - (r-k)^3 + r & \text{dans } [k, k+1] \\ T_k(r) = \frac{1}{2}(k+1) & \text{pour } r > k+1 \end{cases}$$

Nous définissons alors l'espace $\tau^{1,2}(\Omega)$ par

$$\tau^{1,2}(\Omega) = \left\{ w : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable, telle que } T_k(w) \in H^1(\Omega) \text{ pour tout } k > 0 \right\}$$

Supposons de plus qu'il existe une fonction $\theta \in \tau^{1,2}(\Omega)$ et une suite de fonctions $\theta_n \in L^\infty(\Omega)$ telles que

$$\begin{cases} 0 \leq a, b, c, d \leq \theta \text{ dans } \Omega \\ \theta_n \rightarrow \theta \text{ presque partout dans } \Omega \\ \nabla T_k(\theta_n) \rightarrow \nabla T_k(\theta) \text{ fortement dans } L^2(\Omega) \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_n \left(\frac{1}{k} \int_{\Omega} |\nabla T_k(\theta_n)|^2 \right) = 0 \end{cases} \quad (14.0)$$

Nous avons organisé ce chapitre comme suit. Dans la deuxième section nous posons avec précision notre problème et nous exposons le résultat principal. La troisième section sera consacré à la preuve du résultat principal et ceci en passant par un problème approché et en obtenant des estimations appropriées pour passer après à la limite et prouver que (11.0) admet une solution.

Le résultat principal de ce chapitre est le suivant :

Théorème

Supposons que les hypothèses (12.0), (13.0) et (14.0) sont satisfaites, alors le problème (11.0) admet une solution faible non négative.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. Alaa, S. Mesbahi, *Existence result for triangular Reaction-Diffusion systems with L^1 data and critical growth with respect to the gradient*, Mediterr. J. Math. 10 (2013), 255-275. (Cité pages 10, 13, 16, 45, 66, 107, 134 et 136.)
- [2] N. Alaa, S. Mesbahi, and M. Oussous, *Global Existence of Weak Solutions for Parabolic Triangular Reaction Diffusion Systems with Critical Exponent in the Gradient*, to appear in Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical. (Cité pages 12, 66, 84, 107 et 108.)
- [3] N. Alaa, S. Mesbahi, A. Moudia, and W. Bouarifi, *Existence of solutions for quasilinear elliptic degenerate systems with L^1 data and nonlinearity in the gradient* . Electronic Journal of Differential Equations. Vol. 2013 (2013), No. 142, pp. 1-13. (Cité pages 15, 45, 84, 85 et 107.)
- [4] N. Alaa, I. Fatmi, J. R. Roche, and A. Tounsi, *Mathematical analysis for a model of nickel-iron alloy electrodeposition on rotating disk electrode : parabolic case*, Int. J. Math. Stat. 2 (2008), So8, 30-48. (Cité pages 9, 36, 45, 73, 108, 113, 118 et 119.)
- [5] N. Alaa, I. Mounir, *Weak solutions for some reaction-diffusion systems with balance law and critical growth with respect to the gradient*, Ann. Math. Blaise Pascal, 8(2), pp 1-19, (2001). (Cité pages 11, 37, 38, 73, 84 et 107.)
- [6] N. Alaa, I. Mounir, *Global existence for reaction-diffusion systems with mass control and critical growth with respect to the gradient*. J. Math. Anal. Appl. 253 (2001), 532-557. (Cité pages 13, 38, 75, 84 et 107.)
- [7] N. Alaa, *Solution faibles d'équations paraboliques quasi-linéaires avec données initiales mesures*, An. math. blaise Pascal 3, 1-15, (1996). (Cité pages 6, 13, 27, 37, 38, 45, 77, 84, 107 et 108.)

- [8] N. Alaa, M. Pierre, *Weak solution of some quasilinear elliptic equations with measures*, SIAM J. Math. Anal. **24**(1) (1993), 23-35. (Cité pages 6, 16, 27, 66 et 107.)
- [9] H. Amann, *Dynamic theory of quasilinear parabolic systems, III. Global existence*, Mathematische Zeitschrift, Springer (1989). (Cité pages 6, 26, 46, 84, 85, 117, 134 et 136.)
- [10] R. E. Baker, *Mathematical Biology and Ecology Lecture Notes*. 2011. (Cité pages 9, 27, 32, 46, 47, 84, 85, 107, 108 et 134.)
- [11] P. Baras, M. Pierre, *Problèmes paraboliques semi-linéaires avec données mesures*. Applicable Analysis, , Vol. 18, pp. 11-1, (1984). (Cité pages 6, 27, 45, 84, 85, 107 et 134.)
- [12] A. Bensoussan, L. Boccardo, F. Murat, *On a Nonlinear Partial Differential Equation Having Natural Growth Terms and Unbounded Solution*, Ann. Inst. Henri Poincaré, vol 5, N4, pp. 347-364, (1989). (Cité pages 11, 13, 16, 27, 45, 74, 84, 108, 109 et 134.)
- [13] H. Berestycki, F. Hamel, A. Kiselev, and L. Ryzhik, *Quenching and propagation in KPP reaction-diffusion equations with a heat loss*, Arch. Rational Mechanics and Analysis, No. 09, p. 57-80. 2005. (Cité pages 9, 37, 38, 66, 108 et 139.)
- [14] F. Billy, *Modélisation mathématique multi-échelle de l'angiogenèse tumorale. Analyse de la réponse tumorale aux traitements anti-angiogéniques*, Thèse de l'université de Lyon 1, 2009. (Cité pages 9, 75, 87, 88, 107 et 135.)
- [15] L. Boccardo, A. Dall'Aglio, T. Gallouet and L. Orsina, *Nonlinear parabolic equations with measure data*, J. Funct. Anal. **147**, 237-258, (1997). (Cité pages 6, 38, 75, 84, 107, 134 et 135.)
- [16] L. Boccardo and T. Gallouet, *Strongly nonlinear elliptic equations having natural growth terms in L^1 data*. Nonlinear Anal. T.M.A., vol 19, pp 573-579, (1992). (Cité pages 11, 13, 28, 66, 108, 109 et 134.)
- [17] L. Boccardo and T. Gallouet, *On some nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data*, J. Funct. Anal. **87**, 149-169, (1989). (Cité pages 6, 30, 32, 45, 84, 94, 107 et 141.)

- [18] L. Boccardo, F. Murat and J. P. Puel, *Existence results for some quasilinear parabolic equations*, Nonlinear Anal. 13 (1989), 373-392. (Cité pages 6, 13, 14, 30, 66, 68, 69, 85, 87 et 108.)
- [19] L. Boccardo, F. Murat, J. P. Puel. *Existence de solutions faibles des équations elliptiques quasi-linéaires à croissance quadratique*. Nonlinear P.D.E. and their applications, collège de France Seminar, vol IV, ed. by H. Brezis & J. L. Lions. Research Notes in Mathematics 84, Pitman, London, pp. 19-73, (1983). (Cité pages 11, 27, 69, 84, 85 et 108.)
- [20] L. Boccardo, F. Murat, J. P. Puel, *Existence de solutions non bornées pour certaines équations quasi-linéaires*, Portugal. Math. 41 (1982), 507-534. (Cité pages 16, 25, 27, 36, 74, 84 et 112.)
- [21] A. Dall'aglio and L. Orsina, *Nonlinear parabolic equations with natural growth conditions and L^1 data*, Nonlinear Anal. 27 (1996), 59-73. (Cité pages 6, 13, 14, 27, 38, 74, 84, 108 et 134.)
- [22] R. Dautray and J. L. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, volume 8. Masson, (1988). (Cité pages 1, 27, 38, 74, 84 et 107.)
- [23] J. Deuel and P. Hess, *Nonlinear parabolic boundary value problems with upper and lower solutions*, Israel Journal of Mathematics. Vol.29, N°1, (1978). (Cité pages 6, 26, 38, 66, 68, 69, 84, 107, 108, 135 et 139.)
- [24] R. Feres, *Reaction-Diffusion Analysis*, Math 350, Washington University, 2003 (Cité pages 9, 26, 58, 84, 107, 139 et 144.)
- [25] M. Di Francesco, *Mathematical models in life sciences*, Université d'Aalto, 2010. (Cité pages 9, 27, 31, 73 et 108.)
- [26] M. Di Francesco, and J. Rosado, *Fully Parabolic Keller-Segel Model for Chemotaxis with Prevention of Overcrowding*, Nonlinearity 21 (2008), 2715-2730. (Cité pages 9, 28, 32, 73, 107 et 134.)
- [27] B. A. Grzybowski, *Chemistry in Motion : Reaction-Diffusion Systems for Micro- and Nanotechnology*, Wiley, (2009). (Cité pages 9, 38, 66, 107 et 134.)

- [28] S. Hollis and J. Morgan, *Interior estimates for a class of reaction-diffusion systems from L^1 a priori estimates*, J. Differential Equations 98 (1992), 260-276. (Cité pages 12, 37, 38, 66, 107 et 134.)
- [29] S. L. Hollis, R. H. Martin, and M. Pierre, *Global existence and boundedness in reaction-diffusion systems*. SIAM J. Math. Anal. 18, pp. 744-761, (1987). (Cité pages 12, 28, 71 et 134.)
- [30] O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonikov, and N. N. Ural'ceva, "*Linear and Quasi Linear Equations of Parabolic Type*," Translation on Mathematical Monographs, Vol. 23, Amer. Math. Soc., Providence, (1968). (Cité pages 6, 31, 32, 34, 35, 36, 45 et 51.)
- [31] R. Landes and V. Mustonen, *On parabolic initial-boundary value problems with critical growth for the gradient*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 11 (1994), 135-158. (Cité pages 13, 27 et 51.)
- [32] P. L. Lions, *Résolution de problèmes elliptiques quasilinéaires*, Arch. Rational Mech. Anal. 74 (1980), 335-353. (Cité pages 16, 38 et 134.)
- [33] P. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Gauthier-Villars, Paris (1969). (Cité pages 6, 26, 45 et 75.)
- [34] F. Maach, *Existence pour des systèmes de réaction-diffusion quasi-linéaires avec loi de balance*, Ph.D. thesis, Université Henri Poincaré, Nancy I, France, (1994). (Cité pages 10, 38, 74 et 134.)
- [35] R. H. Martin and M. Pierre, *Nonlinear reaction-diffusion systems*, in "*Nonlinear Equations in the Applied Sciences*" (W. F. Ames, C. Gogers, and Kapell, Eds.). Academic Press, San Diego, (1992). (Cité pages 7, 27, 45, 71 et 143.)
- [36] R. H. Martin and M. Pierre, *Nonlinear reaction-diffusion systems*. in "*Nonlinear Equations in the Applied Sciences*", ed W. F. Ames, C. Rogers, and Kapell, Academic Press (1991), Notes and reports in Mathematics in Science and Engineering. (Cité pages 10, 12, 27 et 75.)
- [37] R. H. Martin, *Global existence question for reaction-diffusion systems*. In Brézis, Crandall, and Kapell, editors, Semigroups, Theory and Application. Pitman Res. Notes in Math, 1986. (Cité pages 7 et 66.)

- [38] J. D. Murray, *Mathematical Biology I : An Introduction*, volume I. Springer-Verlag, 3rd edition, 2003. (Cité pages 9 et 74.)
- [39] J. D. Murray, *Mathematical Biology II : Spatial Models and Biochemical Applications*, volume II. Springer-Verlag, 3rd edition, 2003. (Cité pages 9 et 46.)
- [40] H. G. Othmer, S. R. Dunbar, and W. Alt. *Models of dispersal in biological systems*. J. Math. Biol., 26, (1988) 263-298. (Cité pages 9 et 46.)
- [41] I. G. Pearce, M. A. J. Chaplain, A. R. A. Anderson, P. G. Schofield, and S. F. Hubbard, *Chemotaxis-induced spatio-temporal heterogeneity in multi-species host-parasitoid systems*, J. Math. Biol. vol 55, p. 365–388, (2007). (Cité pages 9 et 66.)
- [42] R. T. Picard, *Problèmes de réaction-diffusion avec convection Une étude mathématique et numérique*, Thèse de doctorat, l'université Claude Bernard-Lyon 1, 2002. (Cité pages 9 et 66.)
- [43] M. Pierre, *Global existence in reaction-diffusion systems with dissipation of mass : a survey*, Milan Journal of Mathematics, Vol. 78, Issue (2), pp 417-455, 2010. (Cité page 10.)
- [44] M. Pierre and D. Schmitt, "Existence globale ou explosion pour les systèmes de réaction-diffusion avec contrôle de masse," Thèse de Doctorat, Université Henri Poincaré, Nancy I, 1995. (Cité page 13.)
- [45] A. Porretta, *Existence results for nonlinear parabolic equations via strong convergence of truncations*, Annali di Matematica pura ed applicata (IV), Vol, CLXXVII, 143-172, (1989). (Cité page 6.)
- [46] F. Rothe, *Global solutions of reaction-diffusion systems, lecture notes in Math 1072*, Spring Verlage(1984). (Cité page 6.)
- [47] J. Smoller, *Shock waves and reaction-diffusion equations*, in *Comprehensive Studies in Mathematics*, vol. 258. Springer, New York (1984). (Cité page 10.)
- [48] J. Smoller. *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*. Springer-Verlag, 1983.
(Cité page 7.)

NOTATIONS, DÉFINITIONS, SYSTÈMES QUASI-LINÉAIRES ET PROBLÈMES APPROCHÉS

SOMMAIRE

1.1	INTRODUCTION	25
1.2	NOTATIONS, DÉFINITIONS ET PROBLÈMES APPROCHÉS	28
1.2.1	Définitions et lemmes de continuité-compacité	28
1.2.2	Méthode L^1	30
1.2.3	Solutions régulières	31
1.3	SYSTÈMES QUASI-LINÉAIRES À STRUCTURE TRIANGULAIRE	32
1.3.1	Position du problème	33
1.3.2	Le cas sous-quadratique	34
1.3.3	Cas quadratique	34
1.3.4	Cas de données L^1	34
1.3.5	Le cas sur-quadratique	35
1.3.6	Autres résultats et remarques	35

Nous avons trouvé judicieux de présenter dans ce premier chapitre quelques notations, définitions et des résultats nécessaires sur les systèmes quasi-linéaires à structure triangulaire qui nous seront utiles dans les chapitres ultérieurs ainsi que la façon de construire les problèmes approchés qui lui sont associés, et de dresser un diaporama des travaux fait sur les problèmes quasi-linéaires de réaction-diffusion.

Mots Clés. systèmes de réaction-diffusion, systèmes quasi-linéaires à structure triangulaire, problèmes approchés, méthode L^1 .

1.1 INTRODUCTION

On considère le système suivant où Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière $\partial\Omega$ régulière :

$$\begin{cases} u - A_1 u = f(x, u, v, \nabla u, \nabla v) + F(x) & \text{dans } \Omega \\ v - A_2 v = g(x, u, v, \nabla u, \nabla v) + G(x) & \text{dans } \Omega \\ \lambda_1 \partial_v^1 u + (1 - \lambda_1) u = \alpha_1 & \text{sur } \partial\Omega \\ \lambda_2 \partial_v^2 v + (1 - \lambda_2) v = \alpha_2 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.1)$$

Ici A_r , $r = 1, 2$, désigne un opérateur de dérivation sur Ω défini par

$$A_r u = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}^r(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_i b_i^r(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c^r(x) u \quad (2.1)$$

où les a_{ij} vérifient les conditions d'ellipticité usuelles et a_{ij}^r , b_i^r et c^r sont régulières. Les conditions au bord sont définies à l'aide des dérivées co-normales associées :

$$\partial_v^r u = \sum_{i,j} a_{ij}^r(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \eta_j \quad (3.1)$$

On suppose de plus que f , g , F et G sont des fonctions suffisamment régulières. On s'intéresse à l'existence de solutions de (1.1) sous les deux hypothèses essentielles suivantes :

- une hypothèse assurant la positivité des solutions, soit

$$\begin{cases} f(x, 0, v, p, q), g(x, u, 0, p, q) \geq 0 \\ F(x), G(x) \geq 0 \\ \alpha_1, \alpha_2 \geq 0, 0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 1 \end{cases} \quad (H_1)$$

pour tout (x, u, v, p, q) de $\Omega \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$.

- une hypothèse de "dissipation" sur les termes réactifs,

$$f + g \leq l(x) \quad (H_2)$$

où l est une fonction bornée sur Ω (ou plus généralement dans $L^p(\Omega)$, p grand).

Une remarque essentielle est que, pour de bonnes conditions au bord, ces deux hypothèses fournissent des estimations L^1 a priori sur les solutions. Mais ceci est en général insuffisant pour assurer l'existence.

Dans le cas où f et g indépendantes de ∇u et ∇v , le problème (1.1) admet une solution positive dès que $A_1 = A_2$ (ou même $A_1 = dA_2$) et $\lambda_1 = \lambda_2$ (voir Fitzgibbon et Morgan [20]); il suffit pour cela de faire la

somme de la première et la deuxième équation de (1.1) et d'utiliser (H_2) et la positivité des solutions. On obtient alors une estimation a priori L^∞ sur u et v , ce qui de façon classique, assure l'existence de solutions régulières. Dans le cas où les opérateurs sont différents ou lorsque les conditions au bord sur u et v ne sont pas de même nature (par exemple Dirichlet pour l'une et Neumann pour l'autre), la situation est beaucoup plus difficile et l'existence n'est obtenue qu'au prix d'hypothèses supplémentaires sur les données.

Pour fixer les idées, rappelons que la version parabolique de ce problème a fait l'objet de plusieurs travaux. Citons, en particulier la classe de systèmes, introduite par R. H. Martin :

$$\begin{cases} u_t - d_1 \Delta u = -uh(v) & \text{dans } \Omega \\ v_t - d_2 \Delta v = uh(v) & \text{dans } \Omega \\ \lambda_1 \partial_\nu^1 u + (1 - \lambda_1) u = \alpha_1 & \text{sur } \partial\Omega \\ \lambda_2 \partial_\nu^1 v + (1 - \lambda_2) v = \alpha_2 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.1)$$

où $h : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$ est régulière. Les non-linéarités vérifient les hypothèses (H_1) et (H_2) , mais l'existence globale en temps n'est pas évidente lorsque $d_1 \neq d_2$ et/ou lorsque $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Un premier résultat avait été obtenu par Alikakos [9] qui établit que, lorsque $h(v) = v^\beta$ avec $\beta < \frac{N+2}{N}$, et $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, on a l'existence globale. L'idée est que la structure ci-dessus et les "bonnes conditions" au bord assurent l'existence d'estimations a priori L^1 uniformes en temps. Le fait que β est petit permet de "bootstraper" pour obtenir des estimations L^∞ sur u et v , d'où l'existence globale. Cette méthode ne s'applique pas si β est grand.

L'existence de ce résultat à β quelconque fut d'abord obtenue par Masuda [33] puis par Holis et al [23] et Holis [24]. Ceux-ci introduisent une méthode différente qui repose essentiellement sur la théorie de la régularité L^p pour les opérateurs paraboliques. Notons que cette dernière approche a l'avantage de s'appliquer à une large classe de systèmes de réaction-diffusion. Il s'avère cependant que les conditions sur le bord de u et v influent sur l'existence ou la non-existence des solutions. Des difficultés apparaissent si elles sont de types différents. Dans certains cas on peut les lever ; dans d'autres elles sont réelles. Par exemple, l'existence de

solutions pour

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = -uv^2 & \text{dans } \Omega \\ v_t - v_{xx} = uv^2 & \text{dans } \Omega \\ u = 1 & \text{sur } \partial\Omega \\ v_x = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (5.1)$$

où $\Omega = [0, 1]$, est resté un problème ouvert pendant quelques temps. Berbernes et Lacey [12] ont donné un résultat négatif en montrant l'explosion possible en temps fini. Martin et Pierre [31] ont alors analysé l'existence dans tous les autres cas.

Une autre approche pour résoudre ce type de problèmes est la méthode L^1 introduite dans Pierre [36] (voir aussi Laamri [25]) qui repose sur l'exploitation des estimations a priori dans L^1 (et non plus dans L^∞) et les résultats de compacité pour l'opérateur de la chaleur. La difficulté est de montrer l'uniforme intégrabilité des termes non linéaires qui ne sont a priori que dans L^1 . Nous appliquons ici une méthode identique pour des systèmes elliptiques lorsque les données F et G sont seulement L^1 .

D'autres résultats ont encore été obtenus pour ces systèmes paraboliques. Citons Haraux et Youkana [21] qui, pour des systèmes de type (4.1), montrent l'existence d'une fonction de Lyapounov et obtiennent l'existence globale pour des $h(v)$ à croissance au plus en $\exp(v^\gamma)$, $\gamma < 1$ (donc tout juste sur-polynomiale). le cas des systèmes "triangulaires", c'est-à-dire quand aucune estimation a priori n'est visible pour l'une ou pour l'autre des composantes, certains résultats peuvent être obtenus (voir Hollis et Morgan [22], Pierre et Schmitt [35]). L'étude de ces problèmes pour des versions elliptiques est faite aussi dans Fitzgibbon et Morgan [20].

Si maintenant f et g dépendent de ∇u et ∇v , le problème est beaucoup plus délicat. Contrairement à la situation précédente où les estimations L^∞ sur les solutions suffisent, on a aussi besoin d'estimations L^∞ sur leur gradient. On sait que dans le cas de systèmes, l'un n'implique pas l'autre. Pour une seule équation, c'est le cas si la croissance en le gradient est au plus quadratique. On renvoie aux nombreux travaux sur le sujet : Alaa et Pierre [7], Alaa [8], Amann et Crandall [10], Amann [11], Choquet-Bruhat et Leray [19],...

Toujours pour des équations, quand la dépendance est sur-quadratique en le gradient, on obtient dans certains cas des estimations

L^∞ sur le gradient avec une variante de la méthode de Bernstein (voir Lions [29]) : on établit une estimation L^∞ sur le gradient à l'intérieur en montrant que $|\nabla u|^2$ est solution d'une équation non linéaire satisfaisant le principe du maximum. L'estimation sur le bord est obtenue grâce aux sous et sur-solutions qui font barrière au bord.

Ceci ne s'étend pas aux systèmes même sous-quadratiques sauf s'ils ont une structure spécifique (voir Ladyzenskaja et al [26]). Pour une classe de systèmes à croissances sous quadratiques en le gradient, on renvoie par exemple à la technique de Boccardo et al [16] où il est montré l'existence de solutions dans $L^\infty \cap H^1$ avec très peu de régularité sur les coefficients des opérateurs A_1 et A_2 .

La suite de ce chapitre contient des résultats essentiellement connus même s'ils ne sont pas exprimés tels quels dans la littérature. Il s'agit de rappeler que le système (1.1) admet une solution si les non-linéarités f et g sont tronquées. L'approche est cependant faite pour une troncature L^1 et des données L^1 d'où la nécessité de travailler avec des solutions faibles (dont on précise le sens). Nous vérifions ensuite que les solutions sont classiques si les données sont régulières. On s'assure au passage que (H_1) permet de construire des solutions positives (l'unicité n'est pas assurée en général). Finalement, on va donner quelques résultats sur le problème (1.1) où les termes non-linéaires f et g dépendent du gradient.

1.2 NOTATIONS, DÉFINITIONS ET PROBLÈMES APPROCHÉS

1.2.1 Définitions et lemmes de continuité-compacité

On considère le système (1.1), où Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière $\partial\Omega$ régulière avec les hypothèses (2.1) et (3.1) et

$$a_{ij}^r, b_i^r \in C^1(\overline{\Omega}) ; c^r \in C^0(\overline{\Omega}) ; c^r \leq 0 \quad (6.1)$$

$$c^r - \sum_i \frac{\partial b_i^r}{\partial x_i} \leq 0 \text{ dans } \Omega ; \sum_i b_i^r \cdot \eta_i \leq 0 \text{ sur } \partial\Omega \quad (7.1)$$

$$\exists \alpha > 0, \sum_{i,j} a_{ij}^r \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2, \forall \xi \in \mathbb{R}^N \quad (8.1)$$

$$\lambda_r \in [0, 1] ; \alpha_r \in L^1(\partial\Omega) \text{ et } \alpha_r \in W^{\frac{3}{2},2}(\partial\Omega) \text{ si } \lambda_r = 0 \quad (9.1)$$

On suppose de plus que f, g sont des fonctions mesurables de $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant

$$f(x, 0, 0, 0, 0) = g(x, 0, 0, 0, 0) = 0$$

et localement lipschitziennes :

$$\begin{aligned} & |f(x, u, v, p, q) - f(x, \hat{u}, \hat{v}, \hat{p}, \hat{q})| + |g(x, u, v, p, q) - g(x, \hat{u}, \hat{v}, \hat{p}, \hat{q})| \\ & \leq K(R) [|u - \hat{u}| + |v - \hat{v}| + |p - \hat{p}| + |q - \hat{q}|] \end{aligned} \quad (10.1)$$

pour presque tout x et pour tous

$$0 \leq |u|, |v|, \|p\|, \|q\|, |\hat{u}|, |\hat{v}|, \|\hat{p}\|, \|\hat{q}\| \leq R$$

Enfin F et G sont des fonctions au moins intégrables de Ω dans $\mathbb{R}$,

$$F, G \in L^1(\Omega) \quad (11.1)$$

La notion de solutions “faibles” (peu régulières), est donc pour lesquelles $\partial_v u$ ne sont pas définies, nécessite une définition.

Définition 1.1 Soit $F \in L^1(\Omega)$, $\alpha \in L^1(\partial\Omega)$, $\lambda \in [0, 1]$ et A l'un des opérateurs A_r . On dit que u est solution faible de

$$\begin{cases} u - Au = F & \text{dans } \Omega \\ \lambda \partial_v u + (1 - \lambda) u = \alpha & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (12.1)$$

si $u \in W^{1,1}(\Omega)$ et

- pour $\lambda = 0$, $u - Au = F$ dans $D'(\Omega)$ et $u = \alpha$ sur $\partial\Omega$ (la trace de u étant bien définie).

- pour $\lambda > 0$, $\forall v \in C^1(\overline{\Omega})$, l'égalité suivante est vérifiée

$$\int_{\Omega} uv + \int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij} v_{x_i} u_{x_j} - \sum_{i,j} b_{ij} v u_{x_i} - cuv = \int_{\Omega} Fv + \int_{\partial\Omega} \frac{\alpha}{\lambda} v - \int_{\partial\Omega} \frac{1 - \lambda}{\lambda} v$$

Remarque 1.1 • Si l'égalité ci-dessus est vérifiée pour tout $v \in C_0^\infty(\Omega)$, alors l'équation $u - Au = F$ est vérifiée au sens des distributions.

- Noter que $u \in W^{1,1}$ implique $a_{ij} u_{x_i} \in L^1(\Omega)$ et donc $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) a$ un sens dans $D'(\Omega)$. De plus, puisque la relation $u - Au = f$ est vérifiée Au est une fonction de L^1 . Enfin si u est suffisamment régulière, par exemple $u \in W^{2,1}$, alors $\partial_v u$ est bien définie dans $L^1(\partial\Omega)$ et la relation sur le bord est satisfaite presque partout sur $\partial\Omega$.

Lemme 1.1 Soit A un opérateur défini comme dans (2.1) et $\lambda \neq 0$; alors on a :

(i) Pour tout F et α dans $L^1(\Omega)$, il existe une solution faible unique dans $W^{1,1}$ du problème (12.1). De plus $u \in W^{1,q}(\Omega)$ et

$$\|u\|_{W^{1,q}} \leq C(\|F\|_{L^1} + \|\alpha\|_{L^1})$$

pour $1 \leq q \leq \frac{N}{N-1}$.

(ii) Enfin l'application qui à F associe u solution de (12.1) est compacte de $L^1(\Omega)$ à valeurs dans $W^{1,q}(\Omega)$ pour tout $1 \leq q \leq \frac{N}{N-1}$.

Démonstration. Voir Brézis et Strauss [18] et [17]. □

Lemme 1.2 Soit A un opérateur défini comme dans (2.1), alors on a :

Pour tout $F \in L^1(\Omega)$ et $\alpha \in W^{\frac{3}{2},2}(\partial\Omega)$, il existe une unique solution faible $u \in W^{1,q}(\Omega)$ de

$$\begin{cases} u - Au = F & \text{dans } \Omega \\ u = \alpha & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (13.1)$$

De plus, on a les mêmes propriétés que dans le lemme 1.1. En particulier on a l'estimation

$$\|u\|_{W^{1,q}} \leq \|F\|_{L^1} + \|\alpha\|_{W^{\frac{3}{2},2}(\partial\Omega)}$$

pour $1 \leq q \leq \frac{N}{N-1}$ et l'opérateur qui à F associe u solution de (13.1) est compact.

Démonstration. Voir Brézis et Strauss [18]. □

1.2.2 Méthode L^1

Dans ce paragraphe on considère la situation non-linéaire. Dans un premier temps, on étend la notion de solution faible; ensuite et sous l'hypothèse que les termes non-linéaires soient majorés par une fonction θ fixée dans $L^1(\Omega)$, on va voir qu'un tel problème admet une solution faible et on va introduire une hypothèse de structure sur la non-linéarité, ce qui va nous permettre de construire une solution positive.

Définition 1.2 Soit $F, G \in L^1(\Omega)$, $\alpha_r \in L^1(\partial\Omega)$. On appelle solution de (1.1) tout couple (u, v) satisfaisant à

$$\bullet u, v \in W^{1,1}(\Omega),$$

• Les applications $\tilde{F}$ qui à x associe $f(x, u(x), v(x), \nabla u(x), \nabla v(x))$ et $\tilde{G}$ qui à x associe $g(x, u(x), v(x), \nabla u(x), \nabla v(x))$ sont dans $L^1(\Omega)$, et u (respectivement v) vérifie la définition 1.1 avec F remplacé par $F + \tilde{F}$ (respectivement G par $G + \tilde{G}$).

Lemme 1.3 On suppose F, G dans $L^1(\Omega)$. On suppose de plus qu'il existe θ dans $L^1(\Omega)$ telle que pour tout (s, ξ, r, p) dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, on ait

$$|f(x, s, \xi, r, p)| + |g(x, s, \xi, r, p)| \leq \theta(x) \quad (14.1)$$

Alors le problème (1.1) admet une solution dans $W^{1,q}(\Omega)$, où $1 \leq q \leq \frac{N}{N-1}$.

Démonstration. Voir Laamri [25] et Maach [30]. $\square$

Proposition 1.1 Sous les hypothèses du lemme 1.3 et

$$\begin{cases} f(x, 0, v, p, q) \geq 0, f(x, u, 0, p, q) \geq 0 \\ F(x) \geq 0, G(x) \geq 0 \\ \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0 \end{cases} \quad (15.1)$$

pour tout (x, u, v, p, q) de $\Omega \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, le problème (1.1) admet une solution (u, v) positive.

Démonstration. Voir Maach [30]. $\square$

1.2.3 Solutions régulières

Dans ce paragraphe, on va voir que, sous des hypothèses de régularité sur les données F, G, α_r et θ , les solutions obtenues dans le paragraphe précédent sont plus régulières, voire classiques.

Proposition 1.2 On suppose les hypothèses (2.1), (3.1) et (6.1) – (10.1). On suppose de plus que $\theta \in L^p(\Omega)$, $p > N$ et

$$\begin{cases} f, g \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2N}) \\ F, G \in C^\alpha \\ \alpha_1, \alpha_2 \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega), \alpha_i \geq 0; \alpha \in]0, 1[\end{cases}$$

Alors la solution (u, v) du système (1.1) est dans $C^{2,\alpha}(\Omega)$.

1.3 SYSTÈMES QUASI-LINÉAIRES À STRUCTURE TRIANGULAIRE

On revient dans cette section au problème (1.1), où les termes non-linéaires f et g dépendent du ∇u et ∇v . La difficulté est qu'il faut, dans ce cas, obtenir des estimations suffisantes sur les gradients des fonctions. Nous nous limitons à des conditions au bord de type Dirichlet homogène.

Selon que la dépendance en le gradient est sur ou sous-quadratique, la situation est très différente. On sait, par exemple, que pour des équations ou pour certains systèmes quasi-linéaires à croissance au plus quadratique en le gradient, des estimations L^∞ sur u et v impliquent des estimations L^∞ sur ∇u et ∇v (voir Ladyzenskaja et al [26]). C'est malheureusement faux en général.

Pour les systèmes de type "triangulaire", on obtient facilement une estimation L^∞ sur l'une des composantes. L'autre composante est bornée dans tout les L^p , $p < \infty$, voir Maach [30] et Brezis [17]. Il faut donc des arguments supplémentaires pour obtenir, d'abord une deuxième estimation L^∞ , puis des estimations suffisantes sur ∇u et ∇v . C'est un des points que nous développons ici.

Une famille de systèmes modèles est donnée par

$$\begin{cases} u - A_1 \Delta u = -\tau uv |\nabla v|^m + F & \text{dans } \Omega \\ v - A_2 \Delta v = \tau uv |\nabla v|^m + G & \text{dans } \Omega \\ u = v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (16.1)$$

où $m \geq 1$, $\tau = 1$ ou $\tau = -1$ et F et G ont des régularités variées.

Si $\tau = 1$ et F est bornée alors par le principe du maximum, $\|u\|_{L^\infty}$ est bornée. Utilisant la deuxième équation, si G bornée et $m \leq 2$, par un résultat classique pour les équations dans Amann et Crandall [10], on en déduit que v est bornée dans $W^{2,q}(\Omega)$ pour tout p . Revenant à l'équation en u , on a ainsi que u est bornée dans tous les $W^{2,q}$ d'où, l'existence.

Si maintenant $\tau = -1$, toujours avec F, G bornées, on obtient d'abord que $\|v\|_{L^\infty}$ est bornée et $\|v\|_{L^p}$ est bornée pour tout p , voir Maach [30]. L'utilisation de l'équation en v n'est alors pas facile que précédemment puisque u n'est pas dans L^∞ . On peut cependant montrer que, si $m < 2$, alors v est bornée dans tous les $W^{2,p}$ pour tout p et on continue comme dans le cas précédent.

La généralisation de ces idées à des systèmes plus généraux sous-quadratiques est dans le paragraphe suivant. Nous indiquons aussi

quelques systèmes exactement quadratiques pour lesquels ces arguments peuvent être développés.

Bien sûr le problème est beaucoup plus difficile si $m > 2$. Nous l'abordons au paragraphe 1.3.5 dans le cas où les opérateurs de diffusion sont identiques (ou proportionnels).

Lorsque F et G sont seulement dans L^1 , il n'est plus question d'espérer que ∇u , ∇v soient bornés. Une autre approche est donc nécessaire. Nous exploitons alors les estimations L^1 sur u , v et les non-linéarités, au moins pour une sous-famille de systèmes. La compacité des solutions approchées est facilement obtenue. La difficulté est de passer à la limite dans les termes non-linéaires.

1.3.1 Position du problème

Soit A_i l'opérateur défini par (2.1), avec les hypothèses (3.1), (6.1), (7.1) et (8.1).

On considère le problème

$$\begin{cases} u - A_1 u = f(x, u, v, \nabla u, \nabla v) + F(x) & \text{dans } \Omega \\ v - A_2 v = g(x, u, v, \nabla u, \nabla v) + G(x) & \text{dans } \Omega \\ u = v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (17.1)$$

où f , g , F et G vérifient les hypothèses (10.1) et (15.1). On suppose de plus

$$F, G \in L^\infty \quad (18.1)$$

$$f + g \leq l(x), \quad l \in L^p, \quad p > N \quad (19.1)$$

$$|f| + |g| \leq C \left(u^\alpha + v^\beta + 1 \right) (|\nabla u|^m + |\nabla v|^m + 1) \quad (20.1)$$

où $\alpha, \beta, m \geq 1$ et C une constante positive.

On suppose que

$$f(x, u, v, \nabla u, \nabla v) \leq C(u, v) h(|\nabla u|) + l_1(x), \quad l_1 \in L^\infty \quad (21.1)$$

avec $C : (0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ régulière, $h : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ régulière et telle que

$$h(0) = 0 \quad (22.1)$$

Remarque 1.2 • Si f est négative, les hypothèses (21.1) et (22.1) sont vérifiées en particulier.

• Dans le système (16.1) si $\tau = 1$, toutes les hypothèses ci-dessus sont vérifiées. Si $\tau = -1$ elle le sont également en changeant les rôles de u et v .

1.3.2 Le cas sous-quadratique

Théorème 1.1 *On fait les hypothèses (2.1), (3.1), (6.1) – (8.1), (10.1) et (15.1). Supposons de plus que $m < 2$.*

Alors le problème (17.1) admet une solution positive dans $W^{2,p}(\Omega)$.

Démonstration. Voir Maach [30]. □

1.3.3 Cas quadratique

Dans beaucoup d'exemples on peut obtenir des bornes L^∞ à la fois sur u et v , le cas limite peut alors être traité pour certains systèmes. C'est le cas du système (16.1) avec $\tau = 1$. Plus généralement, c'est le cas si aux hypothèses précédentes, on ajoute

$$|g| \leq C(u, v) |\nabla v|^m \quad (23.1)$$

où C est une fonction positive régulière. Dans ce cas, l'hypothèse de majoration sur $f + g$ n'est plus nécessaire.

Théorème 1.2 *On suppose (18.1) et (20.1) – (23.1). Si de plus $m = 2$, alors le système (17.1) admet une solution positive dans $W^{2,p}(\Omega)$.*

Démonstration. Voir Maach [30]. □

1.3.4 Cas de données L^1

On s'intéresse au problème

$$\begin{cases} u - A_1 u = -f(x, u, v, \nabla u, \nabla v) + F(x) & \text{dans } \Omega \\ v - A_2 v = f(x, u, v, \nabla u, \nabla v) + G(x) & \text{dans } \Omega \\ u = v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (24.1)$$

où Ω est toujours un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$, A_r ($r = 1, 2$) est un opérateur vérifiant (2.1), avec les hypothèses (3.1) et (6.1) – (8.1), f est une fonction positive vérifiant (10.1), et F, G des fonctions positives dans L^1 . On suppose de plus que :

$$f(x, u, v, \nabla u, \nabla v) \leq C(u, v) (|\nabla u|^m + |\nabla v|^m + 1) \quad (25.1)$$

où C est une fonction positive régulière. On a alors le résultat suivant :

Théorème 1.3 *On suppose que $m < 2$. Alors le système (24.1) admet une solution faible positive.*

Démonstration. Voir Maach [30]. □

Remarque 1.3 *Ce théorème est vrai si f est négative.*

1.3.5 Le cas sur-quadratique

On considère le cas particulier du système (17.1), soit

$$\begin{cases} u - d_1 \Delta u = -u |\nabla v|^m + F(x) & \text{dans } \Omega \\ v - d_2 \Delta v = u |\nabla v|^m + G(x) & \text{dans } \Omega \\ u = v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (26.1)$$

où d_1, d_2 sont deux constantes strictement positives, F, G sont des fonctions $W^{1,\infty}$, positives.

Le système (26.1) vérifie en particulier toutes les hypothèses du théorème 1.3. On a alors le résultat suivant, indépendamment de m .

Théorème 1.4 *Le système (26.1) admet une solution (u, v) positive dans $W^{2,p}(\Omega)$.*

Démonstration. Voir Maach [30]. □

Remarque 1.4 *On peut obtenir le même résultat si on remplace l'opérateur laplacien par un opérateur A vérifiant les hypothèses (2.1), (3.1) et (6.1) – (8.1). Autrement dit, on peut résoudre également des systèmes de la forme*

$$\begin{cases} u - A_1 \Delta u = -u |\nabla v|^m + F(x) & \text{dans } \Omega \\ v - A_2 \Delta v = u |\nabla v|^m + G(x) & \text{dans } \Omega \\ u = v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

L'essentiel est bien sûr que les opérateurs A_1 et A_2 soient proportionnels.

1.3.6 Autres résultats et remarques

Le cas elliptique

On considère le cas particulier du système (17.1), soit le système elliptique

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u, v, \nabla u, \nabla v) + F(x) & \text{dans } \Omega \\ -\Delta v = g(x, u, v, \nabla u, \nabla v) + G(x) & \text{dans } \Omega \\ u = v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (27.1)$$

où Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, de frontière $\partial\Omega$ régulière et $f, g : \Omega \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions mesurables.

Le cas particulier du problème (27.1), dans lequel f et g ne dépendent pas du gradient, ont été largement étudiés, voir, par exemple, Fitzgibbon et Morgan [20] et les références qui y sont citées. L'existence de solutions est établi dans [20] sous les hypothèses suivantes :

(P_1) La positivité de la solution, qui est assurée par

$$\begin{cases} f(x, 0, v, p, q), g(x, u, 0, p, q) \geq 0 \\ F(x), G(x) \geq 0 \\ \alpha_1, \alpha_2 \geq 0, 0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 1 \end{cases}$$

pour tout $(u, v, p, q) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ et pour $x \in \Omega$ p.p.

(P_2) La loi d'équilibre, qui est assurée par

$$(f + g)(x, u, v, p, q) \leq L_1(u + v + 1)$$

pour tout $(u, v, p, q) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ et pour $x \in \Omega$ p.p., $L_1 \geq 0$.

(P_3) $F, G \in L^p(\Omega)$ pour $p > \frac{N}{2}$.

Le problème (27) a été étudiée dans Maach [30] sous les hypothèses

(P_1), (P_2) et

(P_4) $f(x, u, v, p, q) \leq L_2(u + v + 1)$, pour tout $(u, v, p, q) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ et pour $x \in \Omega$ p.p., $L_2 \geq 0$.

(P_5) Les termes non linéaires par rapport au gradient sont sub-quadratiques, à savoir

$$|f(x, u, v, p, q)| + |g(x, u, v, p, q)| \leq C(|u|, |v|)(|p|^m + |q|^m + K(x))$$

où $1 \leq m < 2$, $C : [0, \infty)^2 \rightarrow [0, \infty)$ est croissante et $K \in L^1(\Omega)$.

(P_6) $F, G \in L^1(\Omega)$.

Dans Maach [30], l'existence de solutions faibles positives est prouvée. Ce résultat a été généralisé dans Alaa et Mounir [4] dans le cas de la croissance quadratique, où l'existence de solutions faibles positives est prouvée si f et g satisfont (P_1) et (P_6), ainsi que les hypothèses (P_2) et (P_4) avec $L_1 = L_2 = 0$, à savoir

(P'_2) $(f + g)(x, u, v, p, q) \leq 0$, pour tout $(u, v, p, q) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ et pour $x \in \Omega$ p.p.

(P'_4) $f(x, u, v, p, q) \leq 0$, pour tout $(u, v, p, q) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ et pour $x \in \Omega$ p.p.

et

(P'_5)

$$\begin{cases} |f(x, u, v, p, q)| \leq C_1(|u|) \left(|p|^2 + |q|^m + L(x) \right) \\ |g(x, u, v, p, q)| \leq C_2(|u|, |v|) \left(|p|^2 + |q|^2 + K(x) + 1 \right) \end{cases}$$

où $C_1 : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ et $C_2 : [0, \infty)^2 \rightarrow [0, \infty)$ sont croissantes, $L, K \in L^1(\Omega)$ et $1 \leq m < 2$.

Notons que dans le cas d'une seule équation, les résultats d'existence ont été établis dans Alaa et Pierre [7], Bensoussan et al [13] et Landes [28].

Le cas parabolique

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à l'existence de solutions faibles pour les systèmes paraboliques de réaction-diffusion de la forme

$$\begin{cases} u_t - d_1 \Delta u = f(t, x, u, v, \nabla u, \nabla v) & \text{dans } Q_T \\ v_t - d_2 \Delta v = g(t, x, u, v, \nabla u, \nabla v) & \text{dans } Q_T \\ u(0, x) = u_0, v(0, x) = v_0 & \text{dans } \Omega \\ u = v = 0 & \text{sur } \Sigma_T \end{cases} \quad (28.1)$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière assez régulière $\partial\Omega$, $Q_T =]0, T[\times \Omega$, $\Sigma_T =]0, T[\times \partial\Omega$, $T > 0$, $-\Delta$ est l'opérateur de Laplace sur $L^1(\Omega)$ avec les conditions aux limites de Dirichlet, d_1 et d_2 , sont des constantes positives.

Le problème (28.1) dont les non-linéarités f et g ont de croissance critique par rapport à $|\nabla u|$, a été étudié par Alaa et Mounir [5]. L'existence de solutions faibles positives est établie dans Alaa et Mounir [5] sous les hypothèses suivantes :

$$uf(t, x, u, v, \nabla u, \nabla v) \leq 0, \forall u, v \geq 0, \text{ et pour } (t, x) \in Q_T \text{ p.p.} \quad (29.1)$$

• La positivité de la solution est préservée au cours du temps, ce qui est assurée par

$$\begin{cases} f(t, x, 0, v, 0, s) \geq 0, g(t, x, u, 0, r, 0) \geq 0 \\ u_0, v_0 \geq 0 \end{cases} \quad (30.1)$$

pour $(t, x) \in Q_T$ p.p et $\forall u, v \geq 0, \forall r, s \in \mathbb{R}^N$.

• La masse totale des composantes u et v est contrôlée en fonction du temps, ce qui est assurée par

$$f + g \leq L_1(u + v + 1) \quad (31.1)$$

pour $(t, x) \in Q_T$ p.p. et $\forall u, v \geq 0, \forall r, s \in \mathbb{R}^N$.

Nous savons que si les non-linéarités f et g ne dépendent du gradient (système (28.1) est semi-linéaire), l'existence de solutions globales positives a été obtenue par Haraux et Youkana [21], Hollis et Morgan [22], Hollis et al. [23] et Martin et Pierre [32]. Nous pouvons voir que dans tous ces travaux, la structure triangulaire, à savoir l'hypothèse (31.1) et

$$f \leq L_2(u + v + 1) \quad (32)$$

pour $(t, x) \in Q_T$ p.p. et $\forall u, v \geq 0, \forall r, s \in \mathbb{R}^N$, joue un rôle important dans l'étude des systèmes semi-linéaires. En effet, si (31.1) n'est pas satisfaite, Pierre et Schmitt [34] ont prouvé l'explosion en temps fini des solutions de certains systèmes semi-linéaires de réaction-diffusion.

Lorsque f et g dépend du gradient, Alaa et Mounir [5] ont résolu le problème où la structure triangulaire est satisfaite et la croissance de f et g par rapport à $|\nabla u|$ et $|\nabla v|$ est sub-quadratique.

$$\begin{cases} \text{il existe } 1 \leq p < 2, C : [0, \infty)^2 \rightarrow [0, \infty) \text{ non décroissante telle que} \\ |f| + |g| \leq C(|u_1|, |u_2|)(1 + |\nabla u|^p + |\nabla v|^p) \end{cases}$$

A propos de la croissance critique par rapport au gradient ($p = 2$), nous rappelons que dans le cas d'une seule équation ($d_1 = d_2$ et $f = g$), des résultats d'existence ont été prouvés dans le cas elliptique Alaa et Pierre [7], Bensoussan et al [13] et Landes [28]. Les équations paraboliques correspondantes ont également été étudiées par de nombreux auteurs, voir, par exemple, Alaa [6], Boccardo et al [15] et Landes et Mustonen [27].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. Alaa, S. Mesbahi, *Existence result for triangular Reaction-Diffusion systems with L^1 data and critical growth with respect to the gradient*. Mediterr. J. Math. 10 (2013), 255-275. (Cité pages 10, 13, 16, 45, 66, 107, 134 et 136.)
- [2] N. Alaa, I. Fatmi and M. Pierre, *Quasilinear elliptic degenerated equations with nonlinearity in the gradient and L^1 data*. Int. J. Math. Stat. Spring (2011), V8, S11, 62-69. (Cité pages 12, 66, 84, 107 et 108.)
- [3] N. Alaa, N. Idrissi Fatmi and I. Mounir, *Weak Solutions for Some Quasilinear Parabolic Systems with Data Measures and Arbitrary Growth Non-linearities*. Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol. 4, 2009, no. 22, 1085 - 1099. (Cité pages 15, 45, 84, 85 et 107.)
- [4] N. Alaa and I. Mounir, *Weak solutions for some reaction-diffusion systems with balance law and critical growth with respect to the gradient*. Ann. Math. Blaise Pascal, 8(2), pp 1-19, (2001). (Cité pages 9, 36, 45, 73, 108, 113, 118 et 119.)
- [5] N. Alaa, I. Mounir, *Global existence for reaction-diffusion systems with mass control and critical growth with respect to the gradient*. J. Math. Anal. Appl. 253 (2001), 532-557. (Cité pages 11, 37, 38, 73, 84 et 107.)
- [6] N. Alaa, *Solution faibles d'équations paraboliques quasi-linéaires avec données initiales mesures*. Ann. Math. Blaise Pascal, 3 N2, pp.1-15, (1996). (Cité pages 13, 38, 75, 84 et 107.)
- [7] N. Alaa and M. Pierre, *Weak solutions for some quasi-linear elliptic equations with data measures*. SIAM J. Math. Anal. vol 24, N1, pp. 23-35, (1993). (Cité pages 6, 13, 27, 37, 38, 45, 77, 84, 107 et 108.)
- [8] N. Alaa, *Etude d'équations elliptiques non-linéaires à dépendance convexe en le gradient et à données mesures*, Thèse de 3ème Cycle, Université de Nancy I, 1989. (Cité pages 6, 16, 27, 66 et 107.)

- [9] N. D. Alikakos, *L^p bounds of solutions of reaction-diffusion equations*, *Comm. Partial Differential Equations*, vol. 4, p. 827-868, (1979). (Cité pages 6, 26, 46, 84, 85, 117, 134 et 136.)
- [10] H. Amann, M. G. Crandall, *On some existence theorems for semi linear equations*, *Indiana Univ. Math. J.* 27 (1978), 779-790. (Cité pages 9, 27, 32, 46, 47, 84, 85, 107, 108 et 134.)
- [11] H. Amann, *Fixed Point Equations and Nonlinear Eigenvalue Problems in Ordered Banach Spaces*, *SIAM Rev.*, 18(4), p. 620-709. 1976. (Cité pages 6, 27, 45, 84, 85, 107 et 134.)
- [12] J. Bebernes and A. Lacey, *Finite time blow-up for semilinear reactive-diffusive systems*, *J. Differential Equations*, vol. 95, p. 105-129, 1992. (Cité pages 11, 13, 16, 27, 45, 74, 84, 108, 109 et 134.)
- [13] A. Bensoussan, L. Boccardo and F. Murat, *On a Nonlinear Partial Differential Equation Having Natural Growth Terms and Unbounded Solution*. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol 5, N4, pp. 347-364, (1989). (Cité pages 9, 37, 38, 66, 108 et 139.)
- [14] L. Boccardo and T. Gallouet, *Strongly nonlinear elliptic equations having natural growth terms in L^1 data*. *Nonlinear Anal. T.M.A.*, vol 19, pp 573-579, (1992). (Cité pages 9, 75, 87, 88, 107 et 135.)
- [15] L. Boccardo, F. Murat and J. P. Puel, *Existence results for some quasilinear parabolic equations*, *Nonlinear Anal.* 13 (1989), 373-392. (Cité pages 6, 38, 75, 84, 107, 134 et 135.)
- [16] L. Boccardo, F. Murat and J. P. Puel. *Existence de solutions faibles des équations elliptiques quasi-linéaires à croissance quadratique*. *Nonlinear P.D.E. and their applications*, collège de France Seminar, vol IV, ed. by H. Brezis & J. L. Lions. *Research Notes in Mathematics* 84, Pitman, London, pp. 19-73, (1983). (Cité pages 11, 13, 28, 66, 108, 109 et 134.)
- [17] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*, Paris, Masson, 1983. (Cité pages 6, 30, 32, 45, 84, 94, 107 et 141.)
- [18] H. Brezis, W. Strauss, *Semi-linear elliptic equation in L^1* , *J. Math. Soc. Japan*, vol. 25, pp. 565-590, (1973). (Cité pages 6, 13, 14, 30, 66, 68, 69, 85, 87 et 108.)

- [19] Y. Choquet-Bruhat and J. Leray, *Sur le problème de Dirichlet quasi-linéaire d'ordre deux*, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. A., vol. 274, p. 81-85, 1972. (Cité pages 11, 27, 69, 84, 85 et 108.)
- [20] W. E. Fitzgibbon and J. Morgan, *Existence of solutions for a class of weakly coupled semilinear elliptic systems*, J. Diff. Equations, Academic Press, vol. 77, No. 2, p. 351-368, 1989. (Cité pages 16, 25, 27, 36, 74, 84 et 112.)
- [21] A. Haraux and A. Youkana, *On a result of K. Masuda concerning reaction-diffusion equations*, Tohoku Math. J., vol. 40 (1988), p. 158-183. (Cité pages 6, 13, 14, 27, 38, 74, 84, 108 et 134.)
- [22] S. Hollis and J. Morgan, *Interior estimates for a class of reaction-diffusion systems from L^1 a priori estimates*, J. Differential Equations 98 (1992), 260-276. (Cité pages 1, 27, 38, 74, 84 et 107.)
- [23] S. L. Hollis, R. H. Martin, and M. Pierre, *Global existence and boundedness in reaction-diffusion systems*. SIAM J. Math. Anal. 18, pp. 744-761, (1987). (Cité pages 6, 26, 38, 66, 68, 69, 84, 107, 108, 135 et 139.)
- [24] S. L. Hollis, *Globally bounded solutions of reaction-diffusion systems*, PhD. Thesis, North Carolina State University, 1986. (Cité pages 9, 26, 58, 84, 107, 139 et 144.)
- [25] E. Laamri, *Existence globale pour des systèmes de réaction-diffusion dans L^1* . Thèse de 3ème cycle, Univ. de Nancy 1, 1988. (Cité pages 9, 27, 31, 73 et 108.)
- [26] O. A. Ladyzenskaja, V. A. Solonnikov and N. N. Uralcéva, *Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 33, A.M.S. Providence R. I., 1968. (Cité pages 9, 28, 32, 73, 107 et 134.)
- [27] R. Landes and V. Mustonen, *On parabolic initial-boundary value problems with critical growth for the gradient*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 11 (1994), 135-158. (Cité pages 9, 38, 66, 107 et 134.)
- [28] R. Landes, *Solvability of perturbed elliptic equations with critical growth exponent for the gradient*. J. Math. Anal. Appl. 139(1989), No. 1, 63-77. (Cité pages 12, 37, 38, 66, 107 et 134.)

- [29] P. L. Lions, *Résolution de problèmes elliptiques quasilineaires*, Arch. Rational Mech. Anal. **74** (1980), 335-353. (Cité pages 12, 28, 71 et 134.)
- [30] F. Maach, Existence pour des systèmes de réaction-diffusion quasilineaires avec loi de balance. Thèse d'Université Henri Poincaré, Nancy I, 1994. (Cité pages 6, 31, 32, 34, 35, 36, 45 et 51.)
- [31] R. H. Martin and M. Pierre, *Influence of mixed boundary conditions in some reaction-diffusion systems*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, section A **127**, (1997), 1053-1066. (Cité pages 13, 27 et 51.)
- [32] R. H. Martin and M. Pierre, *Nonlinear reaction-diffusion systems*. in "Nonlinear Equations in the Applied Sciences", ed W. F. Ames, C. Rogers, and Kapell, Academic Press (1992), Notes and reports in Mathematics in Science and Engineering. (Cité pages 16, 38 et 134.)
- [33] K. Masuda, *On the global existence and asymptotic behavior of solutions of reaction diffusion equations*, Hokkaido Math., J. **12** (1983), p. 360-370. (Cité pages 6, 26, 45 et 75.)
- [34] M. Pierre and D. Schmitt, *"Existence globale ou explosion pour les systèmes de réaction-diffusion avec contrôle de masse,"* Thèse de Doctorat, Université Henri Poincaré, Nancy I, 1995. (Cité pages 10, 38, 74 et 134.)
- [35] M. Pierre and Schmitt, *Global existence for a reaction-diffusion system with a balance law*. Proc. of Curaçao Conf. on Semigroups of Nonlinear Operators and Applications, G.R. Goldstein ed., (1993). (Cité pages 7, 27, 45, 71 et 143.)
- [36] M. Pierre, *An L^1 -method to prove global existence in some reaction-diffusion systems*, in "Contribution to Nonlinear Partial Differential Equations", Vol. II (Paris, 1985), Pitman Res. Notes Math. Ser. **155** (1987), 220-231.
(Cité pages 10, 12, 27 et 75.)

MODÉLISATION DES SYSTÈMES DE RÉACTION-DIFFUSION 2

SOMMAIRE

2.1	INTRODUCTION	45
2.2	MODÉLISATION DES RÉACTIONS CHIMIQUES	45
2.2.1	Quelques principes généraux en modélisation des milieux continus	46
2.2.2	Lois de comportement	49
2.2.3	Dérivation des équations de réaction-diffusion	51
2.2.4	Modélisation de l'évolution des réactions	52
2.3	MODÉLISATION DE L'ÉLECTRODÉPOSITION DE L'ALLIAGE NICKEL-FER SUR UNE ÉLECTRODE À DISQUE TOURNANT	65
2.4	MODÉLISATION D'UN PROBLÈME DE RÉACTION-DIFFUSION AVEC CONVECTION. EXEMPLE D'UNE POLYMÉRISATION FRONTALE	71
2.5	MODÈLE DE LA TREMPE ET LA PROPAGATION	73
2.6	MODÉLISATION DE LA CHIMIOTAXIE	74
2.6.1	C'est quoi la chimiotaxie?	74
2.6.2	Modèle de Keller-Segel pour la chimiotaxie avec prévention de la surpopulation	74
2.6.3	Modèle en Chimiotaxie, dans les systèmes de hôte-parasitoïde	75
2.6.4	Modèle mathématique d'angiogenèse	76

L'OBJECTIF de ce chapitre est de présenter quelques modèles faisant intervenir des systèmes de réaction-diffusion. Nous avons arrivé à modéliser l'évolution des réactions chimiques sous forme de systèmes de

réaction-diffusion. Ainsi nous avons présenté la modélisation mathématique d'un problème d'électrodéposition de l'alliage Nickel-Fer sur une électrode à disque tournant, la modélisation d'un problème de réaction-diffusion avec convection, un modèle de la trempe et la propagation et des modèles en Chimiotaxie. Ceci conduit de même à des systèmes de réaction-diffusion.

Mots Clés. modélisation des réactions chimiques, électrodéposition, réaction-diffusion-convection, la trempe et la propagation, chimiotaxie, modèle de Keller-Segel, angiogenèse.

2.1 INTRODUCTION

La modélisation de phénomènes physiques, biologiques ou économiques a toujours été la principale motivation pour le développement des mathématiques aussi abstraites soient-elles. Aujourd'hui encore elles sont plus que jamais présentes et nécessaires dans chacun de ces domaines et leurs applications en biologie sont multiples et connaissent à l'heure actuelle de nombreux développements.

Mais tout d'abord qu'est-ce que modéliser ? Un modèle mathématique est nécessaire dès lors que la complexité numérique d'un phénomène observé ne permet plus à l'intuition d'en comprendre le fonctionnement ni d'en prévoir l'évolution. (Ceci est d'ailleurs le cas de beaucoup de phénomènes observés dans la nature). On doit alors avoir recours à un modèle mathématique, c'est à dire faire tout d'abord une hypothèse sur la loi mathématique qui régit le phénomène observé. Remarquons que cette loi n'est elle même qu'une représentation de la réalité, par conséquent elle n'est pas unique. Elle devra d'ailleurs souvent être remise en question et le cas échéant, réévaluée. Une loi mathématique met en jeu des variables et des paramètres dont les valeurs seront fixées grâce aux données expérimentales recueillies sur le terrain. La pertinence du modèle choisi est alors évaluée en effectuant une simulation et en comparant les résultats obtenus aux données expérimentales.

La modélisation mathématique en chimie, en physique et en biologie est nécessaire dans de nombreuses disciplines telles que l'écologie, la dynamique des populations, la génétique, l'épidémiologie, la médecine, la biomathématiques, ... et fait intervenir la plupart des domaines des mathématiques.

Dans ce chapitre, nous présentons quelques exemples faisant intervenir des systèmes de réaction-diffusion que l'on peut trouver dans la littérature, voir par exemple [1], [3], [4], [7], [11], [12], [17], [30]-[33], [35].

2.2 MODÉLISATION DES RÉACTIONS CHIMIQUES

L'objectif de cette section est de modéliser les réactions chimiques. Nous commençons par rappeler les lois fondamentales de la physique (lois de conservation) et certaines lois de comportement, voir, par exemple,

Coirier [9], Duvaut [10], Royis [39], et Salençon [40]. La quantité clef de la modélisation ici est celle de la vitesse des réactions, en plus des lois fondamentales de la physique. Nous arrivons à modéliser l'évolution des réactions chimiques sous forme de systèmes différentiels. C'est en tenant compte de la dépendance des concentrations de la variable espace que nous obtenons des systèmes de réaction-diffusion.

2.2.1 Quelques principes généraux en modélisation des milieux continus

On désigne par *milieu continu* tout liquide, gaz ou solide déformable considéré d'un point de vue *macroscopique*. On peut l'assimiler à un système de particules dont l'évolution ou l'équilibre peut-être décrit à l'aide des lois universelles de la physique, à savoir : la loi de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et du moment de cette quantité de mouvement par rapport à un point et de l'énergie.

Toutes les équations de la physique et des sciences voisines sont obtenues d'une part à partir de ces lois fondamentales, d'autre part à partir des lois de comportements qui sont spécifiques du milieu considéré : elles ont généralement un caractère plus empirique et des domaines de validité plus ou moins limités. La dérivation de ces lois de comportement est une science difficile ; il est indispensable de s'appuyer sur les connaissances et l'expérience des experts du domaine d'application envisagé.

Lois de conservation

Elles sont universelles, contrairement aux lois de comportement, et s'appliquent à tout système matériel, indépendamment de sa nature : liquide, gazeuse ou autre.

Rappelons qu'un milieu continu est intuitivement un "système de particules" en mouvement. On le modélise à chaque instant par l'ensemble des points d'un ouvert $\Omega(t)$ de $\mathbb{R}^3$: On imagine que chaque point est une particule qui se déplace et que l'ensemble des particules occupe le domaine $\Omega(t)$ à chaque instant. On suppose, de plus, l'existence d'une famille de bijections $S(t, s)_{s, t > 0}$ de $\Omega(s)$ dans $\Omega(t)$ dépendant régulièrement de $s, t > 0$ et permettant de suivre chacun des points du domaine initial dans sa trajectoire au cours du temps, soit

$$t \mapsto S(t, 0)X_0 = x(t, X_0)$$

On associe à ce milieu les quantités suivantes :

- $\vec{V}(t, X_0)$ la vitesse *Lagrangienne* définie par

$$\vec{V}(t, X_0) = \frac{\partial}{\partial t} x(t, X_0)$$

et $\vec{v}(t, X_0) = \vec{v}(t, x(t, X_0))$ la vitesse *Eulérienne*.

- $\varrho(t, x)$ = la densité du milieu à l'instant t , c'est-à-dire la masse par unité de volume dans $\Omega(t)$, ainsi la masse $m(w)$ de tout sous-ensemble mesurable w de $\Omega(t)$ est donnée par

$$m(w) = \int_w \varrho(t, x) dx$$

Un lemme de dérivation par rapport au domaine

Afin de traduire mathématiquement les lois de conservation, nous utiliserons le lemme suivant qui permet d'exprimer la dérivée par rapport au temps d'une intégrale du type

$$K(t) = \int_{w(t)} k(t, x) dx$$

où $w(t) = S(t, 0)(w_0)$ avec w_0 un sous-ensemble mesurable quelconque de $\Omega(0)$ et où $k(., .)$ est une fonction définie sur $\Omega(t)$. Cette dérivée est parfois appelée *dérivée particulaire* par référence au fait qu'on dérive selon les trajectoires des particules.

Lemme 2.1 *Sous les hypothèses de régularité, on a*

$$K'(t) = \int_{w(t)} \left(\frac{\partial k}{\partial t} + \operatorname{div}(k \vec{v}) \right) dx$$

ou encore

$$K'(t) = \int_{w(t)} \frac{\partial k}{\partial t} dx + \int_{\partial w(t)} k \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma$$

où $\vec{n}$ est la normale extérieure unitaire à $\partial w(t)$.

Démonstration. Pour une démonstration et des précisions sur la régularité requise, voir, par exemple, Duvaut [10]. $\square$

Conservation de la masse

Loi qui exprime l'invariance par rapport au temps t de la masse de tout sous-système matériel $w(t) = S(t, 0)(w_0)$ que l'on suit au cours du temps, où w_0 est un sous-ensemble mesurable quelconque de $\Omega(0)$. Cette masse est donnée par

$$m(w) = \int_{w(t)} \varrho(t, x) dx$$

on a donc

$$\frac{d}{dt} m(w(t)) = 0$$

D'après le lemme de dérivation appliqué à $k = \varrho$, on a pour tout sous-ensemble w_0 de $\Omega(0)$

$$\int_{w(t)} \left(\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \vec{v}) \right) dx = 0$$

et puisque w_0 et donc $w(t)$ sont arbitraires dans $\Omega(t)$, on en déduit l'équation de conservation de la masse, dite parfois *équation de continuité*

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \vec{v}) = 0$$

Conservation de l'énergie (1^{er} principe de la thermodynamique)

Elle s'écrit

$$\frac{d}{dt} \int_{w(t)} \varrho \left(\frac{\|\vec{v}\|^2}{2} + e \right) dx = \int_{w(t)} (\varrho \vec{f} \cdot \vec{v} + \varrho w) dx + \int_{\partial w(t)} (\vec{F} \cdot \vec{v} - \vec{q} \cdot \vec{n}) d\sigma$$

où

ϱw : Les rapports volumiques de quantités de chaleur par unité de temps,

$\vec{q}$: le vecteur-flux de chaleur,

$\varrho \vec{f}$: la densité volumique des forces appliquées,

$\vec{F}$: la densité surfacique de force s'appliquant sur chaque élément de surface.

Conservation de la quantité de mouvement et de son moment en O

Ces lois s'écrivent

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{w(t)} \varrho \vec{v} \right) dx = \int_{w(t)} \varrho \vec{f} dx + \int_{\partial w(t)} \vec{F} d\sigma \text{ pour la quantité de mouvement}$$

et

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{w(t)} \vec{OM} \wedge \varrho \vec{v} \right) dx = \int_{w(t)} \vec{OM} \wedge \varrho \vec{f} dx + \int_{\partial w(t)} \vec{OM} \wedge \vec{F} d\sigma \text{ pour le moment}$$

2^{ème} principe de la thermodynamique

Il s'exprime par

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{w(t)} \varrho s dx \right) \geq \int_{w(t)} \varrho \frac{w}{T} - \int_{\partial w(t)} \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{T} d\sigma$$

où s est l'entropie et T la température absolue.

2.2.2 Lois de comportement

Diffusion

Lorsqu'on met une substance colorée, comme une goutte d'encre, dans un contenant rempli d'eau, il s'opère ce que l'on appelle un phénomène de diffusion. La substance est d'abord séparée de l'eau par une frontière bien nette, puis les molécules de la substance se distribuent uniformément dans l'eau sous l'action d'un gradient de concentration. Là où la concentration est élevée, les molécules tendent à décroître en nombre ; et inversement, aux endroits de faible concentration leur nombre augmente.

Les molécules de la substance colorée se déplacent sous l'impact des molécules d'eau sans aucune préférence quant à la direction. Ce processus de migration aléatoire, de transport de matière à l'intérieur d'un système prendra fin quand la densité des molécules sera la même partout.

La diffusion se définit comme étant cette tendance des molécules à se déplacer en direction d'une activité thermodynamique (concentration) moindre, de façon à atteindre une concentration uniforme et une entropie maximale dans tout le système.

Lois de Fick

Cette loi exprime qualitativement que les particules se déplacent vers les régions à plus faible densité.

La concentration que nous noterons ϱ , est une fonction du temps t et du lieu x , soit $\varrho = \varrho(t, x)$. Nous allons supposer que ϱ est différentiable par rapport à t et à x . La quantité de matière en diffusion, s'écoulant à

travers un centimètre carré par seconde dans une direction donnée où la concentration va décroître s'exprime dans un système de coordonnées cartésiennes par la formule

$$J = -d \frac{\partial \varrho}{\partial x}$$

J est le taux de transfert ou de transport par unité d'aire de section dans une direction x normale à la section et d est un facteur de proportionnalité, c'est le coefficient de diffusion, considéré comme une constante positive.

Cette loi peut être généralisée à trois dimensions ou plus

$$J = -d \nabla \varrho \quad (2.1)$$

où J est le flux de diffusion de la substance. Le flux se définit comme étant la quantité de matière qui traverse par seconde l'unité d'aire d'une surface normale au mouvement de transfert. $\nabla \varrho$ c'est le gradient de la concentration ϱ . La relation (2.1) porte le nom de première loi de Fick.

Soit Ω le reacteur où se passe la réaction, c'est une région bornée dans $\mathbb{R}^3$, alors on a par définition $M(t) = \int_{\Omega} \varrho(t, x) dx$ la masse de la substance dans Ω en temps t .

$M_e(t)$ la masse de la substance qui s'écoule vers l'extérieur de Ω pendant l'intervalle de temps $[0, t]$. On a par définition :

$$\frac{dM_e(t)}{dt} = \int_{\partial\Omega} J \cdot d\sigma$$

Comme $M(t) + M_e(t) = \text{constante}$, on obtient alors

$$\frac{d}{dt}(M(t) + M_e(t)) = \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \varrho(t, x) dx + \int_{\partial\Omega} J \cdot d\sigma \right) = 0$$

Le théorème de la divergence de Gauss nous donne

$$\int_{\Omega} (\varrho_t + \nabla \cdot J) dx = 0$$

Comme cette dernière égalité est vraie pour toute région Ω , on conclut

$$\varrho_t + \nabla \cdot J = 0$$

Et d'après la première loi de Fick, on obtient

$$\varrho_t = \nabla \cdot (d \nabla \varrho) \quad (2.2)$$

C'est la deuxième loi de diffusion de Fick. Elle est connue aussi comme la loi de conservation de masse.

Si d est une constante (2.2) devient

$$\varrho_t = d\Delta\varrho$$

Cette loi est identique à la loi de la conduction de la chaleur, le mot concentration étant remplacé par le mot température. Pour plus de détails voir Murray [30] et [31].

Loi de Fourier pour la conduction de la chaleur

On considère un milieu continu au repos, c'est-à-dire $\vec{v} = 0$. Dans ce cas l'équation de conservation de la chaleur prend la forme

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{w(t)} \varrho e \right) = \int_{w(t)} \varrho w - \int_{w(t)} \operatorname{div} \vec{q} \quad (2.3)$$

L'équation de continuité elle aussi se simplifie pour exprimer que $\varrho(t, x)$ est indépendante de t . Ainsi, (2.3) donne

$$\varrho \frac{\partial e}{\partial t} = \varrho w - \operatorname{div} \vec{q}$$

On ajoute les deux lois de comportement suivantes :

- $e = cT$: concernant l'énergie interne.
- $\vec{q} = -k\nabla T$, $k > 0$: la loi de Fourier qui est une loi analogue à la loi de Fick, mais appliquée au flux de chaleur et non au flux de matière. On obtient ainsi

$$\varrho c \frac{\partial T}{\partial t} - k\Delta T = 0$$

qui est la célèbre équation linéaire de la chaleur.

2.2.3 Dérivation des équations de réaction-diffusion

Soit $i \in \{1, \dots, m\}$. Supposons que des espèces chimiques C_i , de concentrations ϱ_i , sont l'objet d'une réaction de telle sorte que, en l'absence de diffusion, on a

$$\frac{d\varrho_i}{dt} = R_i(\varrho_1, \dots, \varrho_m)$$

Soit Ω le reacteur où se passe la réaction, c'est une région bornée dans $\mathbb{R}^3$. Rappelons que $R_i(\varrho_1, \dots, \varrho_m)$ est le taux de production total/destruction de C_i par unité de volume, c'est à dire que le taux de variation de la concentration ϱ_i .

Soit t le temps, et x désigne le vecteur position d'un point dans l'espace. nous définissons :

$q(t, x)$ la concentration de (par exemple) un produit chimique (généralement mesurée en mol m^{-3}).

$q(t, x)$ le flux de la même substance chimique (généralement mesurée en $\text{mol m}^{-2} \text{s}^{-1}$).

Rappelons que le flux d'un produit chimique est définie telle que, pour un élément de surface infinitésimale donné d'aire dS et une unité normale n , la quantité de produit chimique s'écoulant à travers l'élément de surface dans un intervalle de temps infinitésimal, de durée dt , est donnée par

$$n \cdot q \, dS \, dt$$

Nous avons, pour tout volume fixe fermé V de frontière ∂V

$$\frac{d}{dt} \int_V q_i dV = - \int_{\partial V} q \cdot n \, dS + \int_V R_i(q_1, \dots, q_m) dV, \quad i \in \{1, \dots, m\}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V q_i dV &= \int_V \nabla \cdot q \, dV + \int_V R_i(q_1, \dots, q_m) dV \\ &= \int_V [\nabla \cdot (d\nabla q_i) + R_i(q_1, \dots, q_m)] dV \end{aligned}$$

et par conséquent, pour tout volume fermé V de frontière ∂V , on a

$$\int_V \left[\frac{\partial q_i}{\partial t} - \nabla \cdot (d\nabla q_i) - R_i(q_1, \dots, q_m) \right] dV = 0, \quad i \in \{1, \dots, m\}$$

d'où

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} = \nabla \cdot (d\nabla q_i) + R_i(q_1, \dots, q_m), \quad x \in D,$$

qui constitue un système d'équations de réaction-diffusion pour les m espèces chimiques dans le domaine borné Ω . Ces équations doivent être complétées par des conditions initiales et aux limites pour chacun des m produits chimiques.

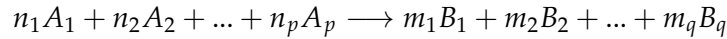
2.2.4 Modélisation de l'évolution des réactions

Vitesse d'une réaction, conservation de la matière

On convient de noter $[A]$ la concentration d'un constituant A dans un système donné, c'est-à-dire par définition, la quantité de ce constituant par unité de volume. On utilise généralement la mole par litre comme

unité de concentration. Rappelons que la mole est l'unité standard du Système International (SI) pour la quantité de matière : elle correspond à la quantité de matière d'un constituant contenant autant de particules élémentaires qu'il y a d'atomes dans 12 grammes de carbone 12. Noter pour l'ordre de grandeur que cela correspond à environ 6×10^{23} particules.

Considérons de manière générale l'équation en équilibre suivante



où p et q sont des entiers ≥ 1 , ainsi que n_i , $i = 1, \dots, p$ et m_j , $j = 1, \dots, q$. Cette équation d'équilibre contient en soi la conservation de la quantité de matière. Ainsi, en supposant le système clos, c'est-à-dire, sans aucun apport extérieur ni perte de matière, on obtient

$$v = \frac{1}{m_j} \frac{d[B_j]}{dt} = -\frac{1}{n_i} \frac{d[A_i]}{dt}, \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, q$$

le nombre ci-dessus est appelé *vitesse instantanée* de la réaction. On appelle réactifs les constituants A_i , et produits les constituants B_j .

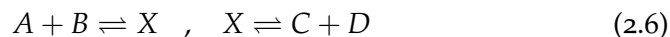
En général, une réaction d'équilibre n'est pas seulement constituée d'une réaction élémentaire, mais de plusieurs réactions parallèles ou successives, par exemple du type suivant



ou encore



ou encore



Par simplicité, nous convenons de noter dans la suite, $a = [A]$, $b = [B]$, etc... Dans ces équations, la loi de conservation de la matière s'exprime par

$$b'(t) = -a'(t) - c'(t), \text{ i.é. } a(t) + b(t) + c(t) = \text{constante, pour } (2.4)$$

$$a'(t) + b'(t) = 0 \text{ pour } (2.5)$$

$$x'(t) = 2(-a'(t) - c'(t)), \quad a'(t) = b'(t), \quad c'(t) = d'(t) \text{ pour } (2.6)$$

quand aux vitesses de réactions, elles s'écrivent

$$v_1 = -a'(t), v_2 = c'(t) \text{ pour les réactions de l'équation (2.4)}$$

$$v = -a'(t) = -b'(t) \text{ pour (2.5)}$$

$$v_1 = -a'(t) = -b'(t), v_2 = c'(t) = d'(t) \text{ pour (2.6)}$$

Il s'agit maintenant de décrire les lois de comportement de ces vitesses. Notons que dans les systèmes précédents, on a toujours moins d'équations que d'inconnues. Les lois de comportements vont permettre de "clore" ces systèmes.

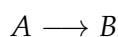
Lois de comportement

On va supposer que, dans les réactions dites "*élémentaires*", la vitesse de réaction est supposée proportionnelle au produit des concentrations des réactifs. Pour des réactions plus complexes, elle est généralement proportionnelle à des puissances de ces concentrations. Cependant, on verra que la vitesse peut aussi être une fonction homographe des concentrations, voire des combinaisons plus complexes de ces comportements. Ces lois sont déduites des connaissances approfondies des étapes intermédiaires de la réaction considérée.

Réactions élémentaires

On va supposer que les réactions élémentaires satisfont à la loi d'action de masse.

Lois d'ordre un On considère la réaction la plus simple



Si cette réaction est élémentaire, on considère qu'à température constante, la vitesse de réaction est proportionnelle à la concentration $[A]$, soit

$$a'(t) = -ka(t) = -b'(t)$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{da}{a} = -kdt.$$

Cette équation différentielle s'intègre immédiatement en

$$a(t) = a_0 e^{-kt}$$

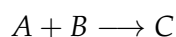
où : $a_0 = a(0)$ est la valeur initiale de a . Beaucoup de réactions suivent en fait cette loi, par exemple la décomposition radioactive de certains éléments chimiques. La constante k est appelée *constante de vitesse*. Sa valeur n'est pas toujours très bien connue : on peut la déterminer à l'aide de mesures expérimentales.

Loi d'Arrhénius La loi précédente correspond à une réaction se déroulant à température constante. On s'attend à ce que la valeur de cette constante varie avec la température. C'est l'objet de la loi d'Arrhénius qui s'écrit

$$k = A e^{-E_a/RT}$$

où T est la température absolue, R la constante des gaz parfaits ($= 8,314 \text{ J/K}$), E_a l'énergie d'activation et A une constante à préciser dans chaque cas.

Loi d'ordre deux On considère la réaction supposée "élémentaire"



On considère qu'à température constante la vitesse de réaction est de la forme

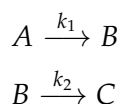
$$c'(t) = ka(t)b(t)$$

On dit alors qu'il s'agit d'une loi d'ordre deux par rapport à l'ensemble des réactifs, on obtient

$$\begin{cases} \frac{a}{a - a_0 + b_0} = \frac{a_0}{b_0} e^{-k(b_0 - a_0)t} & \text{si } a_0 \neq b_0 \\ a(t) = \frac{a_0}{1 + a_0 kt} & \text{sinon} \end{cases}$$

A partir de ces deux lois élémentaires, on peut écrire les lois de comportement des vitesses pour des réactions plus complexes, mais décomposables en réactions élémentaires du type ci-dessus.

Exemple 1



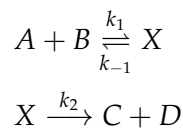
Le bilan matière s'écrit alors

$$b'(t) = -a'(t) - c'(t)$$

Pour la loi de comportement, on peut supposer que chaque réaction est élémentaire et d'ordre un, ce qui donne

$$\begin{cases} a' = -k_1 a \\ b' = k_1 a - k_2 b \\ c' = k_2 b \end{cases}$$

Exemple 2

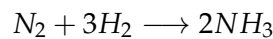


Le système d'équations s'écrit

$$\begin{cases} a' = -k_1 ab + k_{-1} x = b' \\ x' = k_1 ab - k_{-1} x - k_2 x \\ c' = k_2 x = d' \end{cases} \quad (2.7)$$

Exemple 3

On considère l'exemple de l'ammoniac



dont le mécanisme peut être expliqué par l'introduction d'un état intermédiaire X



Si on suppose que les deux réactions sont élémentaires, le système d'équations s'écrit

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}[N_2] = -k_1[N_2][H_2]^3 + k_{-1}[X] = \frac{1}{3} \frac{d}{dt}[H_2] \\ \frac{d}{dt}[X] = k_1[N_2][H_2]^3 - k_{-1}[X] - k_2[X] \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt}[NH_3] = k_2[X] \end{cases}$$

Exemple 4

On va étudier l'exemple important de la catalyse enzymatique qui s'écrit :



où les molécules de substrat S réagissent avec l'enzyme E pour donner un produit P via la formation d'un complexe intermédiaire ES . On obtient alors

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}[E] = -k_1[E][S] + k_{-1}[ES] + k_2[ES] \\ \frac{d}{dt}[S] = -k_1[E][S] + k_{-1}[ES] \\ \frac{d}{dt}[ES] = k_1[E][S] - k_{-1}[ES] - k_2[ES] \\ \frac{d}{dt}[P] = k_2[ES] \end{cases}$$

Formation de complexe intermédiaire et principe des états stationnaires

Nous venons de donner quelques exemples d'équations simples mais dont la compréhension du vrai mécanisme nécessite l'introduction d'une succession d'équations intermédiaires et aussi de composants intermédiaires. Souvent, ceux-ci sont très réactifs et ne sont pas vraiment détectables dans le mélange. Leur concentration reste en tous cas négligeable devant celle des vrais réactifs ou produits. C'est le principe dit des états stationnaires (P.E.S) que nous expliquerons sur l'exemple 2.

On y considère donc que le complexe intermédiaire X est très réactif et qu'il arrive très vite à l'équilibre. Le P.E.S consiste à considérer brutalement que $x'(t) = 0$ dans le système (2.7), ce qui donne

$$k_1ab = (k_{-1} + k_2)x$$

soit

$$x = \frac{k_1}{k_{-1} + k_2}ab$$

ainsi, le système devient

$$\begin{cases} a' = -\frac{k_1k_2}{k_{-1} + k_2}ab \\ b = a + b_0 - a_0 \\ c' = \frac{k_1k_2}{k_{-1} + k_2}ab = d' \end{cases}$$

Ainsi, on peut considérer qu'en fait, la réaction $A + B \longrightarrow C + D$ est d'ordre 2. Par ailleurs, on peut intégrer directement les deux premières équations pour obtenir a , b , puis en déduire c , d .

Exemple 5 (Bromure d'hydrogène)

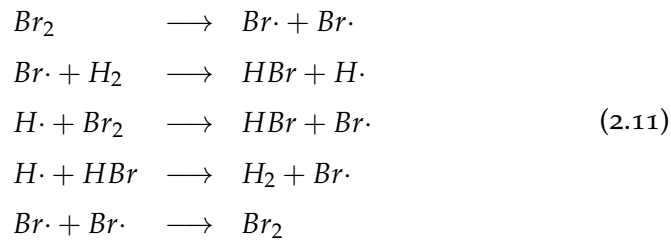
Il a été proposé en 1906 pour la vitesse de réaction de l'Hydrogène et du Brome



la loi empirique suivante

$$\frac{d}{dt}[HBr] = \frac{2L[H_2][Br_2]^{\frac{1}{2}}}{1 + m[HBr]/[Br_2]}$$

Cette loi établie empiriquement a finalement obtenue une explication par le mécanisme de réactions en chaîne suivant (voir Logan [24])



Les radicaux $Br\cdot$ et $H\cdot$ sont les intermédiaires réactionnels. Ils sont les centres actifs ou maillons de la chaîne de courte. Les étapes 2 et 3 forment une molécule de produit et une molécule de l'autre maillon de la chaîne. Le bilan de cette séquence de propagation correspond au bilan macroscopique de la réaction. Le dernier étape produit un réactif à partir de 2 maillons de la chaîne : les centres actifs disparaissent.

On rappelle que Les intermédiaires réactionnels sont des espèces qui ne sont ni des réactifs ni des produits. Ils sont des centres actifs de courte durée de vie. Ils peuvent être :

- des atomes ou radicaux obtenus par rupture homolytique d'une liaison, par action de la chaleur : thermolyse ou par absorption d'un photon : photolyse.
- des ions.

En effet, le système d'équations obtenues est le suivant

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt}[Br_2] &= -k_1[Br_2] - k_3[H\cdot][Br_2] + k_5[Br\cdot]^2 \\ \frac{d}{dt}[Br\cdot] &= 2k_1[Br_2] - k_2[Br\cdot][H_2] + k_3[H\cdot][Br_2] + k_4[H\cdot][HBr] - 2k_5[Br\cdot]^2 \\ \frac{d}{dt}[H_2] &= -k_2[Br\cdot][H_2] + k_4[H\cdot][HBr] \\ \frac{d}{dt}[H\cdot] &= k_2[Br\cdot][H_2] - k_3[H\cdot][Br_2] - k_4[H\cdot][HBr] \\ \frac{d}{dt}[HBr] &= k_2[Br\cdot][H_2] - k_4[H\cdot][HBr] + k_3[H\cdot][Br_2] \end{aligned} \right.$$

En appliquant le le principe des états stationnaires aux centres actifs $Br\cdot$ et $H\cdot$. "Après une période d'induction initiale, durant laquelle $[Br\cdot] \uparrow$ et $[H\cdot] \uparrow$, il est considéré que les espèces intermédiaires disparaissent aussi vite qu'elles se produisent." La concentration du centre actif est alors dans

un état quasi-stationnaire :

$$\frac{d[H\cdot]}{dt} = 0 \text{ et } \frac{d[Br\cdot]}{dt} = 0$$

il vient que

$$[H\cdot] = \frac{k_2[Br\cdot][H_2]}{k_3[Br_2] + k_4[HBr]}$$

et

$$[Br\cdot]^2 = \frac{k_1}{k_5}[Br_2]$$

ainsi

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}[Br_2] &= \frac{-L[H_2] \cdot [Br_2]^{\frac{1}{2}}}{1 + m[HBr]/[Br_2]} \\ \frac{d}{dt}[H_2] &= \frac{-L[H_2] \cdot [Br_2]^{\frac{1}{2}}}{1 + m[HBr]/[Br_2]} \\ \frac{d}{dt}[HBr] &= \frac{2L[H_2] \cdot [Br_2]^{\frac{1}{2}}}{1 + m[HBr]/[Br_2]} \end{cases}$$

où $L = k_2 \sqrt{\frac{k_1}{k_5}}$ et $m = \frac{k_4}{k_3}$.

Exemple 6

On applique le P.E.S à l'exemple 3 (de l'ammoniac), en considérant que le complexe intermédiaire X est très réactif, soit $\frac{d}{dt}[X] = 0$, d'où

$$[X] = \frac{k_1}{k_{-1} + k_2}[N_2][H_2]^3$$

et donc

$$\frac{d}{dt}[N_2] = -k_1[N_2][H_2]^3 + \frac{k_1 k_{-1}}{k_{-1} + k_2}[N_2][H_2]^3$$

d'où

$$\frac{d}{dt}[N_2] = \frac{-k_1 k_2}{k_{-1} + k_2}[N_2][H_2]^3 = \frac{1}{3} \frac{d}{dt}[H_2]$$

d'autre part

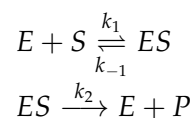
$$\frac{d}{dt}[NH_3] = 2k_2[X]$$

ainsi

$$\frac{d}{dt}[NH_3] = \frac{2k_1 k_2}{k_{-1} + k_2}[N_2][H_2]^3$$

Exemple 7

Considérons de manière analogue la réaction de l'exemple 4 (de la catalyse enzymatique) qui s'écrit



En considérant que $\frac{d}{dt}[ES] = 0$, on obtient

$$k_1[E][S] = (k_2 + k_{-1})[ES]$$

et donc

$$\frac{d}{dt}[P] = k_2[ES] = \frac{k_1 k_2}{k_{-1} + k_2}[E][S]$$

En utilisant le fait que $[E] + [ES] = [E]_0$, on a alors

$$[E]_0 = [E] \left(\frac{k_{-1} + k_2 + k_1[S]}{k_{-1} + k_2} \right)$$

ainsi

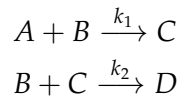
$$\frac{d}{dt}[P] = \frac{k_1 k_2}{k_{-1} + k_2 + k_1[S]} [E]_0 [S]$$

En posant $K_M = \frac{k_{-1} + k_2}{k_1}$, appelée constante de *Michaelis*, on obtient

$$\frac{d}{dt}[P] = \frac{k_2}{K_M + [S]} [E]_0 [S]$$

Système de réaction-diffusion

Nous nous plaçons maintenant dans une situation plus réaliste où les réactions ont lieu dans un milieu ambiant où les concentrations dépendent aussi de la variable d'espace. Prenons par exemple la réaction suivante



en supposant que chacune des réactions est élémentaire et suit une loi d'ordre 2, nous aurions

$$\begin{cases} a' = -k_1 ab \\ b' = -k_1 ab - k_2 bc \\ c' = k_1 ab - k_2 bc \\ d' = k_2 bc \end{cases}$$

et la conservation de la matière s'exprime par

$$c' = -a' - d', \quad b' = a' - d'$$

Pour tenir compte de la dépendance des concentrations de la variable d'espace x , nous pouvons assimiler chaque constituant à un milieu continu animé d'une vitesse eulérienne $\vec{v}(t, x)$. La quantité du constituant A contenu dans le volume $w(t)$ est donnée par :

$$m_a(w(t)) = \int_{w(t)} a(t, x) dx$$

et de même pour les autres constituants. D'après les résultats déjà obtenus, on a

$$\frac{d}{dt}m_a(w(t)) = \int_{w(t)} \frac{\partial a}{\partial t} + \operatorname{div}(a(t, x) \vec{v}) dx$$

ainsi, la variation instantanée de quantité de matière est donnée par

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \operatorname{div}(a(t, x) \vec{v}).$$

Supposons que la vitesse des réactions ci-dessus suit une loi d'ordre 2 consiste à écrire que cette variation instantanée est proportionnelle au produit des concentrations de A et B . Ainsi, la première équation devient

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \operatorname{div}(a(t, x) \vec{v}) = -k_1 ab$$

que nous écrivons le plus souvent

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \operatorname{div}(J_a) = S_a$$

et les lois de conservation de matière deviennent

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}m_c(w(t)) &= -\frac{d}{dt}m_a(w(t)) - \frac{d}{dt}m_d(w(t)) \\ \frac{d}{dt}m_b(w(t)) &= \frac{d}{dt}m_a(w(t)) - \frac{d}{dt}m_d(w(t)) \end{aligned}$$

Pour compléter le système, il faut ajouter une loi de comportement pour la vitesse des particules ou le flux de matière de chaque constituant. La loi la plus simple et de domaine de validité relativement large pour ce type d'application est la loi de Fick, soit

$$J_a = a \vec{v} = -d_a \vec{\nabla} a$$

où d_a est la fonction de diffusivité du constituant A . On introduit la même loi pour les autres constituants avec pour chacun sa propre constante de diffusivité d_b , d_c , d_d . On obtient comme modèle le système suivant d'équations aux dérivées partielles

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial a}{\partial t} - \operatorname{div}(d_a \nabla a) = -k_1 ab \\ \frac{\partial b}{\partial t} - \operatorname{div}(d_b \nabla b) = -k_1 ab - k_2 bc \\ \frac{\partial c}{\partial t} - \operatorname{div}(d_c \nabla c) = k_1 ab - k_2 bc \\ \frac{\partial d}{\partial t} - \operatorname{div}(d_d \nabla d) = k_2 bc \end{array} \right. \quad (2.12)$$

Ici, il s'agit d'un système de réaction-diffusion, terminologie qui fait référence aux deux phénomènes apparaissant dans l'équation diffusion

de chaque constituant avec sa propre vitesse de diffusion (régie par la constante de diffusivité) et interaction non linéaire entre les différents constituants.

La variable x varie dans un domaine de $\mathbb{R}^3$. On peut supposer ici que ce domaine est indépendant du temps si la réaction a lieu dans un milieu "fixe" ; on le note Ω .

Pour "fermer" le système (2.12), il est indispensable d'ajouter des conditions au bord de Ω qui doivent traduire les éventuels échanges de matière avec le milieu extérieur. Par exemple :

1- Si la réaction se produit dans un milieu isolé, on écrit que le flux de matière à la frontière est nul, soit $a \vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ sur $\partial\Omega$, ou selon la loi de Fick, $d_a \nabla a \cdot \vec{n} = 0$ sur $\partial\Omega$, ce qui peut encore s'écrire si d_a est une constante positive $\frac{\partial}{\partial n} a(t, x) = 0$ pour $x \in \partial\Omega, t > 0$.

2- Si le flux de matière, à travers la frontière est une fonction affine de la concentration, on aura dans ce cas

$$\lambda \nabla a \cdot \vec{n} = -(1 - \lambda)a + \alpha \text{ sur } \partial\Omega \times (0, \infty)$$

ou encore

$$\lambda \frac{\partial a}{\partial n} + (1 - \lambda)a = \alpha \text{ sur } \partial\Omega \times (0, \infty)$$

où $\lambda \in [0, 1]$.

Ainsi, en appliquant ces résultats aux exemples précédents, nous obtenons :

- Pour la réaction de Bromure d'Hydrogène (2.10) : En tenant compte que la réaction va se passer dans un réacteur. Par conséquent les concentrations des différents constituants vont dépendre de la variable temps t et de la variable espace x . On note Ω le réacteur et par $w(t)$ un domaine de Ω , on note aussi q_a, q_b, q_c les densités respectives de Br_2, H_2, HBr , ainsi les quantités de matière de Br_2, H_2, HBr contenues dans $w(t)$ sont respectivement

$$\begin{aligned} m_a(w(t)) &= \int_{w(t)} q_a(t, x) dx \\ m_b(w(t)) &= \int_{w(t)} q_b(t, x) dx \\ m_c(w(t)) &= \int_{w(t)} q_c(t, x) dx \end{aligned}$$

En appliquant les résultats du paragraphe précédent et le lemme de

dérivation par rapport au domaine, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}m_a(w(t)) &= \int_{w(t)} \left[\frac{\partial \varrho_a}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho_a(t, x) \vec{v}) \right] dx \\ \frac{d}{dt}m_b(w(t)) &= \int_{w(t)} \left[\frac{\partial \varrho_b}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho_b(t, x) \vec{v}) \right] dx \\ \frac{d}{dt}m_c(w(t)) &= \int_{w(t)} \left[\frac{\partial \varrho_c}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho_c(t, x) \vec{v}) \right] dx\end{aligned}$$

A ce stade, il faut ajouter une loi de comportement pour la vitesse des particules ou le flux de matière de chaque constituant. Nous utilisons la loi de Fick qui exprime que dans un tel réacteur les particules se déplacent vers les régions de faible densité, soit

$$v_a = -d_a \frac{\nabla \varrho_a}{\varrho_a}, \quad v_b = -d_b \frac{\nabla \varrho_b}{\varrho_b}, \quad v_c = -d_c \frac{\nabla \varrho_c}{\varrho_c}$$

où d_a, d_b, d_c (les fonctions de diffusivité des constituants) sont constantes.

On obtient alors le système suivant

$$\begin{cases} \int_{w(t)} \left[\frac{\partial \varrho_a}{\partial t} - d_a \Delta \varrho_a \right] dx = \int_{w(t)} \frac{-L \cdot \varrho_b \cdot (\varrho_a)^{\frac{3}{2}}}{\varrho_a + m \varrho_c} \\ \int_{w(t)} \left[\frac{\partial \varrho_b}{\partial t} - d_b \Delta \varrho_b \right] dx = \int_{w(t)} \frac{-L \cdot \varrho_b \cdot (\varrho_a)^{\frac{3}{2}}}{\varrho_a + m \varrho_c} \\ \int_{w(t)} \left[\frac{\partial \varrho_c}{\partial t} - d_c \Delta \varrho_c \right] dx = \int_{w(t)} \frac{2L \cdot \varrho_b \cdot (\varrho_a)^{\frac{3}{2}}}{\varrho_a + m \varrho_c} \end{cases}$$

Ceci est vrai pour chaque $w(t) \subset \Omega$, par suite

$$\begin{cases} \frac{\partial \varrho_a}{\partial t} - d_a \Delta \varrho_a = \frac{-L \cdot \varrho_b \cdot (\varrho_a)^{\frac{3}{2}}}{\varrho_a + m \varrho_c} \\ \frac{\partial \varrho_b}{\partial t} - d_b \Delta \varrho_b = \frac{-L \cdot \varrho_b \cdot (\varrho_a)^{\frac{3}{2}}}{\varrho_a + m \varrho_c} \\ \frac{\partial \varrho_c}{\partial t} - d_c \Delta \varrho_c = \frac{2L \cdot \varrho_b \cdot (\varrho_a)^{\frac{3}{2}}}{\varrho_a + m \varrho_c} \end{cases}, (0, T) \times \Omega$$

Pour fermer le système, il faut ajouter des conditions aux bord et des conditions initiales. On peut, par exemple, supposer que le système est clos et qu'il n'y a aucun échange avec l'extérieur ce qu'on peut exprimer en écrivant que le flux de matières à travers $\partial\Omega$ est nul, i.é.

$$\begin{cases} d_a \cdot \nabla \varrho_a(\sigma) \cdot n(\sigma) = 0 \\ d_b \cdot \nabla \varrho_b(\sigma) \cdot n(\sigma) = 0 \\ d_c \cdot \nabla \varrho_c(\sigma) \cdot n(\sigma) = 0 \end{cases}, \sigma \in \partial\Omega \text{ p.p.}, t \in]0, T[$$

On obtient le système de réaction-diffusion suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varrho_a}{\partial t} - d_a \Delta \varrho_a = f(\varrho_a, \varrho_b, \varrho_c) \\ \frac{\partial \varrho_b}{\partial t} - d_b \Delta \varrho_b = g(\varrho_a, \varrho_b, \varrho_c) \\ \frac{\partial \varrho_c}{\partial t} - d_c \Delta \varrho_c = h(\varrho_a, \varrho_b, \varrho_c) \\ \frac{\partial \varrho_a}{\partial n} = \frac{\partial \varrho_b}{\partial n} = \frac{\partial \varrho_c}{\partial n} = 0 \\ \varrho_a(0, x) = \varrho_a^0(x), \varrho_b(0, x) = \varrho_b^0(x), \varrho_c(0, x) = 0 \end{array} \right. \quad (2.13)$$

pour $x \in \Omega$ et $t \in [0, \infty)$, avec

$$\left\{ \begin{array}{l} f(u, v, w) = \frac{-L.v.u^{\frac{3}{2}}}{u + mw} \\ g(u, v, w) = \frac{-L.v.u^{\frac{3}{2}}}{u + mw} \\ h(u, v, w) = \frac{2L.v.u^{\frac{3}{2}}}{u + mw} \end{array} \right.$$

Remarquons que

$$f \leq 0, f + g \leq 0, f + g + h = 0$$

• Pour la réaction de l'ammoniac (2.8), le système de réaction-diffusion associé pour $x \in \Omega$ et $t \in [0, \infty)$ est

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial [N_2]}{\partial t} - d_1 \Delta [N_2] = -\frac{k_1 k_2}{k_{-1} + k_2} [N_2] [H_2]^3 \\ \frac{\partial [H_2]}{\partial t} - d_2 \Delta [H_2] = -\frac{3k_1 k_2}{k_{-1} + k_2} [N_2] [H_2]^3 \\ \frac{\partial [NH_3]}{\partial t} - d_3 \Delta [NH_3] = \frac{2k_1 k_2}{k_{-1} + k_2} [N_2] [H_2]^3 \\ \frac{\partial [N_2]}{\partial \nu} = \frac{\partial [H_2]}{\partial \nu} = \frac{\partial [NH_3]}{\partial \nu} = 0 \\ [N_2](x, 0) = n_0, [H_2](x, 0) = h_0, [NH_3](x, 0) = 0 \end{array} \right. \quad (2.14)$$

pour $x \in \Omega$ et $t \in [0, \infty)$.

• pour la réaction enzymatique (2.9), nous obtenons

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial [E]}{\partial t} - d_1 \Delta [E] = 0 \\ \frac{\partial [S]}{\partial t} - d_2 \Delta [S] = \frac{-k_2}{K_M + [S]} [E]_0 [S] \\ \frac{\partial [P]}{\partial t} - d_3 \Delta [P] = \frac{k_2}{K_M + [S]} [E]_0 [S] \\ \frac{\partial [E]}{\partial \nu} = \frac{\partial [S]}{\partial \nu} = \frac{\partial [P]}{\partial \nu} = 0 \\ [E](x, 0) = E_0, [S](x, 0) = S_0, [P](x, 0) = 0 \end{array} \right. \quad (2.15)$$

pour $x \in \Omega$ et $t \in [0, \infty)$.

Remarquons que (2.13), (2.14) et (2.15) sont des systèmes de réaction-diffusion.

2.3 MODÉLISATION DE L'ÉLECTRODÉPOSITION DE L'ALLIAGE NICKEL-FER SUR UNE ÉLECTRODE À DISQUE TOURNANT

De nombreux objets modernes faisant partie de la vie courante ont été soumis à des traitements superficiels : des pièces détachées de véhicules automobiles, des ustensiles de cuisine, des boîtes en fer blanc pour denrées alimentaires, des matériaux de construction, ainsi que des fenêtres métalliques ou des recouvrements de toits en métal, etc...

Des procédés du même type sont mis en oeuvre lors de la fabrication de constituants électroniques tels que des circuits imprimés, des contacts électriques et des condensateurs, et la plupart des traitements de ce type sont des applications de l'électrochimie. Le dépôt électrolytique de métaux et d'alliages en constitue un grand exemple.

Le but de l'électrodéposition est d'appliquer une couche superficielle sur un métal pour conférer à cette surface les propriétés désirées de dureté, de résistance contre l'érosion ou contre la corrosion, de brillant, etc. En outre, l'adhérence de cette couche au substrat doit être parfaite.

Le principe de l'électrodéposition : c'est une électrolyse. Il s'agit de réactions redox qui ne sont pas auto-entretenues, mais qui sont déclenchées par une source de courant. L'objet qui doit subir un traitement représente la cathode. L'anode est réalisée dans le meilleur des cas en une matière (électro)chimiquement inerte (alliages coûteux en Platine ou en Titane), ou bien est constituée par le métal avec lequel on traite la cathode. Le bain d'électrolyse constitue la plupart du temps, l'élément critique de la cellule. Il contient le sel métallique approprié. Le plus souvent, le métal qui doit précipiter est présent sous la forme d'un complexe. En effet, des complexes métalliques manifestent une solubilité et une stabilité supérieures à celles des sulfates, des chlorures ou d'autres sels. Tout l'art d'obtenir un bain approprié réside dans le fait d'ajouter des additifs qui sont très souvent de nature organique et qui ne sont présents qu'en faible concentration.

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons au cas de l'alliage Nickel-Fer *NiFe*. L'électrodéposition des alliages basés sur un groupe des métaux de fer est un des événements récents les plus importants dans le domaine de déposition d'alliage. En particulier, les films d'alliages de *NiFe* ont largement été adoptés dans l'industrie électronique : enregistrement, mé-

moire, dispositifs de stockage... voir Bockris [8], Gangasingh et Talbot [13], Grande et Talbot [16], Hessami et Tobias [18], Krause et al [23], Matulis et Slyzys [28], Matlosz [27] et Ramasubramanian [37]...

Les espèces $NiOH^+$ et $FeOH^+$ formées à partir de l'hydrolyse de Ni^{2+} et Fe^{2+} sont réduites à la cathode. La codéposition anormale de l'alliage $NiFe$ se produit puisque $FeOH^+$ est présent près de l'électrode avec des concentrations supérieures à celles de $NiOH^+$.

Nous présentons un type de modelage semblable fait par Pritzker et autres, voir Bockris [8], Schultz et Pritzker [41], et étudié par N. Alaa et al [1] dans le cas d'un transport évolutif et unidimensionnel. Pour l'étude mathématique du système obtenu voir Alaa et al [1] et [2].

Nous considérons l'équation de conservation d'espèce pour une espèce A_i

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} = -div(J_i) + S_i$$

où w_i est la concentration de l'espèce A_i , S_i dénote le taux de production de A_i en raison de toutes les réactions homogènes dans lesquelles elle est impliquée et J_i est son flux de transport molaire. Les électrolytes utilisés pour la codéposition de $NiFe$ contiennent toujours des ions de nickel électroactive comme un de leurs composants principaux. Par conséquent, la migration est incluse avec la diffusion et la convection comme les seuls modes de transport possibles pour chaque espèce. Le flux molaire J_i devient alors

$$J_i = -d_i \nabla w_i + v w_i - m_i w_i \nabla \Phi$$

où d_i est le coefficient de diffusion de l'espèce A_i , v est le vecteur vitesse du fluide, Φ est le potentiel électrostatique dans la solution et m_i est la mobilité électrique de l'espèce A_i , voir Tobias [42]. La mobilité et le coefficient de diffusion sont donnés par l'équation d'Einstein

$$m_i = \frac{d_i z_i F}{RT}$$

où $z_i F$ est la charge portée par une mole de l'espèce A_i , R est la constante des gaz parfaits et T est la température absolue.

Nous considérons le système de transport unidimensionnel des diverses espèces sur une électrode tournante à disque avec la réaction ho-

homogène simultanée. En outre, nous considérons que les réactions homogènes sont beaucoup plus rapides que les réactions à l'électrode et qu'elles atteignent instantanément l'équilibre thermodynamique. Il importe aussi de noter que les effets de bord et de la double couche sont négligeables. Par conséquent, lorsque le fluide est incompressible (c'est à dire $\nabla v = \text{div} v = 0$), l'équation de transport pour chaque espèce devient

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} - d_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} + v_x \frac{\partial w_i}{\partial x} - m_i \frac{\partial}{\partial x} \left(w_i \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = S_i$$

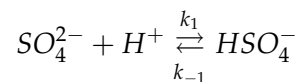
Le potentiel électrostatique doit aussi satisfaire la condition d'électroneutralité partout dans le système, c'est-à-dire

$$-\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{4\pi F}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^5 z_i w_i$$

où ε_0 désigne la permittivité du solvant, considérée de façon à être constante à la limite de la dilution infinie.

La solution des équations différentielles ainsi que l'équation du potentiel électrique concernant l'équilibre homogène exige d'abord la combinaison des équations de transport pour chaque espèce afin d'éliminer les termes de vitesses des réactions homogènes. Les équations résultantes qui dépendent du stoechiométrie des réactions homogènes s'élèvent à l'équilibre massif pour les différents composants du système (nickel, fer, hydrogène, etc...). Dans cette analyse, nous considérons un problème de codéposition du nickel et du fer dans la solution de sulfate. Ce processus particulier de codéposition est important parce qu'il permet la fabrication de dispositifs magnétiques de permalloy. Pour le bain du sulfate de nickel-fer, $NiSO_4$, $FeSO_4$ et H_3BO_3 sont dissous dans l'eau et H_2SO_4 est utilisé pour l'ajustement du pH . Par conséquent, les cinq espèces dissoutes considérées sont Ni^{2+} , Fe^{2+} , H^+ , SO_4^{2-} et HSO_4^- .

Les métaux ne forment pas de complexes avec le sulfate, et la seule réaction homogène considérée est celle entre SO_4^{2-} et HSO_4^-



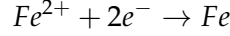
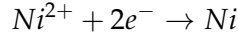
Cette réaction est généralement décrite comme une réaction bimoléculaire dans le sens direct et monomoléculaire dans le sens inverse, avec k_1 et k_{-1} sont respectivement les constantes de vitesses de la réaction directe et inverse.

Dans ce cas, les termes de réaction homogène sont

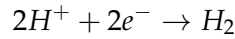
$$\begin{aligned} S_3 &= S_4 = -S(w_3, w_4) \\ S_5 &= S(w_3, w_4) \end{aligned}$$

$S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et pour tout $r \geq 0$, $S(0, r)$, $S(r, 0) \geq 0$. En général, nous choisissons $S(r, s) = Kr^\lambda s^\nu$, $\lambda, \nu \geq 0$, où $K = \frac{k_1 k_{-1}}{k_1 + k_{-1}}$ désigne la constante d'équilibre pour la réaction homogène et w_i ($1 \leq i \leq 5$) sont respectivement les concentrations de Ni^{2+} , Fe^{2+} , H^+ , HSO_4^- et SO_4^{2-} .

Comme il a été mentionné précédemment, les réactions cathodiques se produisant à la surface de l'électrode font intervenir les ions métalliques divalents. Durant la codéposition de $NiFe$, nous considérons les deux réactions d'électrode suivantes



Toutes les espèces sont considérées inertes, à l'exception de l'hydrogène. La formation de ce dernier est impliquée seulement dans une réaction de réduction de l'ion protonium selon



Les vitesses associées à ces réactions fondamentales peuvent toutes être exprimées en termes de potentiel local V et des concentrations locales des ions w_i . Les flux sur la surface de cathode ($x = 0$) sont donnés dans Hessami et Tobias [18] et Krause et al [23] par

$$J_k(t, 0) = \frac{i_k}{2F} = -\beta_k w_k(t, 0) \exp \left[-\frac{\alpha_k z_k F}{RT} (V_m(t) - \Phi(t, 0)) \right]$$

où i_k ($k = 1, 2, 3$) sont les densités du courant pour les réactions, V_m est le potentiel cathodique par rapport à l'électrode de référence (SHE) après correction de la chute ohmique et β_k , α_k sont respectivement les constantes de vitesse et les coefficients de transfert. Généralement, les équations de vitesses sont connues sous le nom des équations de Butler-Volmer. Les

valeurs de ces constantes sont données dans les références Hessami et Tobias [18] et Krause et al [23].

Les trois densités des courants partiels données dans les équations sont d'une grande importance pratique puisqu'elles sont directement liées aux vitesses de déposition du nickel et du fer et à la vitesse de production de l'hydrogène. Ce dernier est important quand les flux des ions sont comparables aux vitesses limites de transport par diffusion du proton (H^+) qui ne peut diffuser depuis la surface cathodique pour mener à la formation des bulles de l'hydrogène. Les bulles d'hydrogène qui ne se détachent pas de la cathode provoquent une mauvaise morphologie du métal déposé. Par ailleurs, les concentrations élevées de l'hydrogène peuvent provoquer de mauvaises propriétés pour le métal puisque l'hydrogène peut être emprisonné dans le métal pendant le processus de déposition (fragilisation par l'hydrogène).

La région considérée est le domaine Ω et δ est l'épaisseur de la couche limite hydrodynamique. Nous considérons que la région est entièrement établie au-delà d'une distance 3δ de la surface d'électrode.

La présence d'acide borique n'a pas été explicitement incluse dans ce modèle. Sous les conditions normales de fonctionnement de la codéposition de $NiFe$, cette espèce qui reste non dissociée est par conséquent transportée par diffusion et convection, mais non pas par migration. De plus, on ne sait pas s'il participe à n'importe quelle réaction homogène ou électrochimique. Ainsi, le transport de H_3BO_3 est complètement decouplé de celui des autres espèces dissoutes. Comme il a été proposé par Horvans [19], son rôle dans la codéposition est de s'absorber sur la surface d'électrode et modifier la cinétique de la déposition du nickel et du fer. Il est au-delà de la portée de cette analyse de représenter cet effet d'une façon explicite ou détaillée.

Les conditions sur la frontière sont :

$$\begin{cases} -d_i \frac{\partial w_i}{\partial x}(t, 0) - m_i w_i(t, 0) \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t, 0) = -\gamma_i(t) w_i(t, 0) & \text{pour } t \in]0, T[\\ -d_i \frac{\partial w_i}{\partial x}(t, 3\delta) - m_i w_i(t, 3\delta) \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t, 3\delta) = -b(3\delta) w_i(t, 3\delta) & \text{pour } t \in]0, T[\\ \Phi(t, 0) = V(t), \Phi(t, 3\delta) = 0 & \text{pour } t \in]0, T[\end{cases}$$

où

$$\gamma_i(t) = \begin{cases} \beta_i \exp\left(-\frac{\alpha_i z_i F}{RT} (V_m(t) - V(t))\right) & \text{pour } 1 \leq i \leq 3 \\ 0 & \text{pour } i = 4, 5 \end{cases}$$

et b désigne v_x la composante normale de la vitesse v du fluide.

Les concentrations à l'instant initial $t = 0$ sont données par $w_i(0, x) = w_{i,0}(x)$, $\forall x \in]0, 3\delta[$, où $w_{i,0}$ représente la somme des composantes A_i ajoutées initialement à la solution.

Maintenant, Le système satisfait par les concentrations des différentes espèces qui sont impliquées dans ce modèle est donc, pour tout $i = 1, \dots, 5$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial w_i}{\partial t} - d_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial w_i}{\partial x} - m_i \frac{\partial}{\partial x} \left(w_i \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = S_i(w) & \text{dans } Q_T \\ -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{4\pi F}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^5 z_i w_i & \text{dans } Q_T \\ -d_i \frac{\partial w_i}{\partial x}(t, 0) - m_i w_i(t, 0) \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t, 0) = -\gamma_i(t) w_i(t, 0) & \text{pour } t \in]0, T[\\ -d_i \frac{\partial w_i}{\partial x}(t, 3\delta) - m_i w_i(t, 3\delta) \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t, 3\delta) = -b(3\delta) w_i(t, 3\delta) & \text{pour } t \in]0, T[\\ \Phi(t, 0) = V(t), \Phi(t, 3\delta) = 0 & \text{pour } t \in]0, T[\\ w_i(0, x) = w_{i,0}(x) & \text{pour } x \in]0, 3\delta[\end{array} \right.$$

où $Q_T =]0, T[\times]0, 3\delta[$, $S_1 = S_2 = 0$, $S_3(w) = S_4(w) = -S_5(w) = -S(w_3, w_4)$ et $z_1 = z_2 = 2$, $z_3 = -z_4 = 1$, $z_5 = -2$.

Finalement, l'expression de la vitesse de l'électrolyte v . Cochran et Von Karman ont montré que la composante normale v_x de la vitesse v du fluide peut être exprimée en une série de puissance en fonction de la variable $\gamma = x \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$

$$v_x = \sqrt{\nu \omega} H(\gamma) = \sqrt{\nu \omega} \left(-a\gamma^2 + \frac{1}{3}\gamma^3 + \frac{b}{6}\gamma^4 + \dots \right)$$

où $a = 0.51023$, ω est la rapidité de la rotation de l'électrode tournante à disque, et ν est la viscosité cinématique de la solution. Nous donnons aussi l'épaisseur de la couche limite de diffusion δ

$$\delta = \left(\frac{3d}{a} \right)^{\frac{1}{3}} \omega^{-\frac{1}{2}} \nu^{\frac{1}{6}}$$

où d est le diffusivité de référence correspondante à l'espèces dans la solution avec le plus petit coefficient de diffusion.

Sachant que les termes à partir de l'ordre 3 sont négligeables, nous faisons donc l'approximation suivante

$$b(x) = -a\sqrt{\frac{\omega^3}{\nu}}x^2.$$

2.4 MODÉLISATION D'UN PROBLÈME DE RÉACTION-DIFFUSION AVEC CONVECTION. EXEMPLE D'UNE POLYMÉRISATION FRONTALE

Certaines réactions chimiques peuvent se produire dans des zones très localisées en espace, et se propager au cours du temps à travers un réacteur. On parle alors de réaction frontale. Un des exemples les mieux connus est la combustion en milieu gazeux : on observe alors la propagation d'une zone de réaction, appelée flamme, séparant les gaz frais des gaz brûlés. Pour qu'un front de réaction puisse se développer, il faut que la réaction ait une énergie d'activation élevée, ce qui va lui permettre de se développer dans une zone étroite, et qu'elle soit exothermique, afin de fournir l'énergie nécessaire à la propagation du front. La réaction de polymérisation possède ces propriétés, et il a été observé expérimentalement qu'elle pouvait sous certaines conditions se propager sous forme de front.

Prenons donc l'exemple d'une polymérisation frontale qui se propage dans un tube vertical cylindrique Picard [35], le polymère chaud étant sous le monomère froid. Nous ferons l'hypothèse que les deux liquides ont, à température donnée, la même densité. Alors, dans des conditions de gravité usuelles, le polymère, plus chaud, va avoir tendance à remonter dans le monomère. C'est le phénomène de convection naturelle. Nous appuyerons sur les résultats expérimentaux publiés par McCaughey et al [29]. En l'absence de convection, un front plan séparant les réactifs des produits se propage à vitesse constante c . Augmentons progressivement le nombre de Rayleigh R , c'est-à-dire le paramètre qui détermine l'apparition ou non de la convection naturelle dans le milieu. On observe expérimentalement que lorsque R dépasse une valeur critique, la convection apparaît, déstabilisant le front plan. Mais malgré les courants de convection, la structure d'onde progressive ne semble pas détruite : le front est déformé, mais il continue de se propager, avec une vitesse qui peut être différente.

Ce sont ces résultats que nous pouvons retrouver mathématiquement.

Dans ce qui suit, le nombre de Rayleigh jouera le rôle d'un paramètre de bifurcation. Nous modélisons le problème par un système d'équations de réaction-diffusion couplées avec les équations de conservation du moment de Navier-Stokes, sous l'approximation de Boussinesq

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} - \kappa \Delta T = -v \cdot \nabla T + F_0(T, A) \\ \frac{\partial A_j}{\partial t} - d_j \Delta A_j = -v \cdot \nabla A_j + F_j(T, A), \quad j = 1, \dots, m \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \eta \Delta v = -(v \cdot \nabla) v - \frac{1}{\rho} \nabla p + \beta g (T - T_0) \tau \\ \operatorname{div} v = 0 \end{cases}$$

Ici T est la température, A_j sont les concentrations des différentes espèces chimiques impliquées, $v = (v_1, v_2)$ est la vitesse du fluide, p la pression, κ la diffusivité thermique, d_j sont les coefficients de diffusion moléculaire, ρ est la densité, β est le coefficient de dilatation, g l'accélération de la pesanteur, T_0 une température de référence, τ un vecteur unitaire dans la direction verticale, F_j , $j = 1, \dots, m$ sont des termes non-linéaires décrivant les taux des réactions chimiques.

Le système d'équations est considéré dans la bande

$$\Omega = \{(x_1, x_2), 0 < x_1 < l, -\infty < x_2 < +\infty\}$$

(Nous nous limitons à deux dimensions d'espace, bien que le problème de départ soit à trois dimensions. Ces deux dimensions sont suffisantes pour faire apparaître des phénomènes convectifs et des ondes progressives non planes.)

Nous supposons la nullité des flux de chaleur et de matière à travers la paroi du réacteur

$$x_1 = 0, l : \frac{\partial T}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial A_j}{\partial x_1} = 0$$

et imposons pour la vitesse des conditions au bord de type "surface libre" :

$$x_1 = 0, l : v_1 = 0, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} = 0$$

Enfin, nous imposons des conditions à l'infini

$$T(x_1, \pm\infty) = T^\pm, A_j(x_1, \pm\infty) = A_j^\pm, v(x_1, \pm\infty) = 0$$

Les équations de Navier-Stokes sont écrites sous l'approximation de Boussinesq : le milieu est considéré incompressible et la densité constante,

sauf dans le terme qui décrit l'action de la gravité. (Ce terme fait apparaître une linéarisation de la densité par rapport à la température.) L'existence de solutions pour de tels problèmes de réaction-diffusion-convection et certaines de leurs propriétés sont étudiées dans Bernardi et al [5], Malham et Xin [25] et Manley et al [26].

2.5 MODÈLE DE LA TREMPÉ ET LA PROPAGATION

Nous considérons un système de réaction-diffusion de type Kolmogorov-Petrovsky-Piskounov (KPP) dans un écoulement de cisaillement et avec un paramètre non nul de perte de la chaleur, voir Berestycki et al [4]. Nous établissons des critères pour le coup de feu et de propagation, et d'identifier la vitesse de propagation en fonction de la décroissance exponentielle des données initiales.

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} - \Delta T = -Au(y) \frac{\partial T}{\partial x} + TY \\ \frac{\partial Y}{\partial t} - \frac{1}{Le} \Delta Y = -Au(y) \frac{\partial T}{\partial x} - TY \end{cases}$$

avec un écoulement de cisaillement non triviale $u(y)$. Ici T est la température du réactif, Y sa concentration, et le paramètre A mesure l'amplitude du flux. Le nombre de Lewis Le est le rapport des coefficients de diffusion thermique et matériel. Nous supposons que les profils initiaux T_0 et Y_0 sont bornés et vérifient

$$T_0 = O(e^{-\lambda x}) \quad , \quad Y_0 \rightarrow 1 \quad \text{quand } x \rightarrow +\infty$$

de sorte qu'il est physiquement raisonnable de penser que la solution se-rait propager vers la droite lorsque le mélange frais est disponible pour une réaction chimique. Le système ci-dessus est pris en compte dans un domaine cylindrique $D = \mathbb{R} \times \Omega$, avec des conditions aux limites de perte de chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial n} + qT = 0 \quad , \quad \frac{\partial Y}{\partial n} = 0 \quad , \quad y \in \partial\Omega$$

Ici $q \geq 0$ est le paramètre de perte de la chaleur, $\Omega \subset \mathbb{R}^{N-1}$ est un domaine borné régulier et n la normale unitaire extérieure. Le flux $u(y)$ est continue dans $\overline{\Omega}$ avec une moyenne nulle :

$$\int_{\Omega} u(y) dy = 0$$

Ce problème a également attiré une attention considérable dans la littérature physique, nous citons, par exemple, Kagan et Sivashinsky [20], Kagan [21] et Khoudier et al [22] parmi les articles récents et se référer à Peters [34] comme une référence générale.

2.6 MODÉLISATION DE LA CHIMIOTAXIE

2.6.1 C'est quoi la chimiotaxie ?

La chimiotaxie est le phénomène par lequel les cellules se déplacent sous l'influence de substances chimiques dans leur environnement, voir Ritter [38]. Il a été connu et largement étudié depuis les premières descriptions ont été faites par T.W. Engelmann et W.F. Pfeffer pour les bactéries en 1881 et 1884, et H.S. Jennings pour les ciliés en 1906. Les premiers modèles mathématiques basés sur les équations aux dérivées partielles est née des travaux de C.S. Patlak en 1953, qui a été motivé en partie par des études récentes (à l'époque) des systèmes biologiques tels que la modélisation de la migration des moustiques, mollusques, et pigeon voyageur. Il était également intéressé par la modélisation d'autres phénomènes tels que la prédiction de la longueur des chaînes polymères, et E.F. Keller et L.A. Segel en 1970, qui ont proposé un modèle macroscopique pour l'agrégation des myxomycètes cellulaires. Par la suite, plusieurs phénomènes de transport dans les systèmes biologiques ont été marqués avec le terme chimiotactisme, tels que les bactéries, ou des cellules endothéliales du corps humain répond à des facteurs angiogéniques sécrétés par une tumeur,...

2.6.2 Modèle de Keller-Segel pour la chimiotaxie avec prévention de la surpopulation

Dans cet exemple, nous considérons un modèle mathématique de prévention de la surpopulation sous une forme très simplifiée impliquant seulement deux espèces, voir Francesco et Rosado [12]. Le système modèle est donc le suivant

$$\begin{cases} \rho_t = \varepsilon \Delta \rho - \rho (1 - \rho) \nabla S \\ S_t = \Delta S - S + \rho \end{cases}$$

où ρ est la densité de cellules, S est la concentration de la substance chimique (chimioattractant). Le paramètre $\varepsilon > 0$ modélise la diffusivité des

cellules. Le modèle actuel est posé sur tout l'espace $\mathbb{R}^N$ avec des données initiales $L^1 \cap L^\infty$ pour ρ et $W^{1,1} \cap W^{1,\infty}$ pour S .

2.6.3 Modèle en Chimiotaxie, dans les systèmes de hôte-parasitoïde

Dans cet exemple, nous considérons un modèle mathématique qui se concentre sur la réponse agrégative des parasitoïdes d'hôtes dans un modèle couplé du système multi-espèces, voir Pearce et al [33]. Ce système se compose de deux espèces de parasitoïdes et deux espèces d'hôtes. Les parasitoïdes sont, *Cotesia glomerata* et *Cotesia rubecula*. Les hôtes sont les larves des papillons grands et petits choux blanc, *Pieris brassicae* et *Pieris rapae*, respectivement. *Cotesia rubecula* est un spécialiste de *Pieris rapae* tandis que *Cotesia glomerata* est un généraliste et parasite les deux hôtes. Ainsi, il existe un couplage entre les quatre espèces en interaction. Ce système particulier est d'un intérêt considérable car les quatre espèces ont une large gamme mondiale et les deux hôtes sont les ennemis des cultures communs des espèces du genre *Brassica*, y compris les cultures commerciales telles que le chou, le chou-fleur et le chou frisé. Ce phénomène est largement documenté pour les systèmes hôtes-parasitoïdes et des études en laboratoire utilisant le système *Pieris-Cotesia* ont fait l'objet d'un certain nombre de publications, voir Vos [6], Geervliet et al [14], Geervliet et al [15] et Poecke et al [36]. Nous allons modéliser les interactions entre les espèces dans un domaine unidimensionnel, le système de réaction-diffusion chimiotactique obtenu d'équations modélise la dynamique spatio-temporelle de nos quatre espèces hôte-parasitoïde communauté et le facteur chimiotactique.

Les deux espèces hôtes (en l'absence de parasitisme) sont modélisés comme ayant logistique, dépendant de la densité de croissance, avec des taux de croissance intrinsèque r_1 et r_2 et des capacités de transport K_1 and K_2 , respectivement. Le parasitisme par deux parasitoïdes est modélisé par une fonction exponentielle négative qui représente un taux de parasitisme saturé au maximum. *Cotesia glomerata* parasite *Pieris brassicae* au taux α_1 et *Pieris rapae* au taux α_2 . *Cotesia rubecula* parasite *Pieris rapae* au taux α_3 . L'efficacité de la découverte du parasitoïde d'hôtes est notée a_1 , a_2 et a_3 , constantes qui déterminent le nombre d'hôtes parasités. e_1 , e_2 et e_3 sont les rendements de conversion parasitoïde d'hôtes à parasitoïdes. Les parasitoïdes sont soumis à des taux de mortalité intrinsèques d_1 (Co-

tesia glomerata) et d_2 (Cotesia rubecula). Les coefficients de la motilité D_1 , D_2 , D_3 et D_4 des quatre espèces sont des constantes et déterminent la vitesse à laquelle chaque espèce se disperse de façon aléatoire dans le domaine. Le K chimiotactique est produite proportionnellement à la densité totale d'accueil ($N + M$) aux taux r_3 et se désintègre au taux de d_3 . Le coefficient de la motilité de la chimio-attractif D_5 , est une constante et détermine la vitesse à laquelle se diffuse à travers le domaine chimioattractant. La réponse chimiotactique des deux espèces de parasitoïdes est modélisée comme une réponse linéaire et de la force de la réponse est déterminée par les coefficients de chimiotactique χ_1 et χ_2 . Le système modèle complet est donc la suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial N}{\partial t} = D_N \Delta N + N(1 - N) - s_1 P(1 - e^{-\rho_1 N}) \\ \frac{\partial M}{\partial t} = D_M \Delta M + \gamma_1 M(1 - M) - s_2 P(1 - e^{-\rho_2 M}) - s_3 Q(1 - e^{-\rho_3 M}) \\ \frac{\partial P}{\partial t} = D_P \Delta P - \chi_P \nabla \cdot (P \nabla K) + c_1 P(1 - e^{-\rho_1 N}) + c_2 P(1 - e^{-\rho_2 M}) - \eta_1 P \\ \frac{\partial Q}{\partial t} = D_Q \Delta Q - \chi_Q \nabla \cdot (Q \nabla K) + c_3 Q(1 - e^{-\rho_3 M}) - \eta_2 Q \\ \frac{\partial K}{\partial t} = D_K \Delta K + \gamma_2 (N + \gamma_3 M) - \eta_3 K \end{cases}$$

où N et M représentent la densité des hôtes *Pieris brassicae* et *Pieris rapae*, respectivement, P et Q représentent la densité des parasitoïdes *Cotesia glomerata* et *Cotesia rubecula* et K représente la concentration du produit au cours de l'alimentation chimiotactique par les hôtes. $N = N(t, x)$ désigne la densité de la population locale (organismes par zone) à l'instant t et à la position x (et de même pour M , P et Q). $K = K(t, x)$ désigne la concentration locale chimiotactique à l'instant t et à la position x . Le système est posé sur un domaine donné Ω de frontière régulière $\partial\Omega$. Nous supposons soit des conditions aux limites de Neumann (qui pourrait correspondre à un cadre expérimental à effet de serre) ou conditions aux limites de Dirichlet (ce qui correspond à un réglage sur place avec un environnement extérieur) sur $\partial\Omega$ avec des conditions initiales appropriées pour fermer le système. Dans le cas uni-dimensionnel, $\Omega = (0, L)$.

2.6.4 Modèle mathématique d'angiogenèse

La modélisation de l'angiogenèse est apparue, au cours des vingt-cinq dernières années, comme une approche complémentaire aux approches traditionnelles, pouvant permettre de fournir des hypothèses expliquant

certaines observations expérimentales. De nombreux modèles mathématiques d'angiogenèse ont ainsi été développés. Le modèle que nous allons donner décrit principalement l'évolution de la densité de cellules endothéliales, en fonction de celle de concentrations en substances chimiques intervenant dans le processus, il est généralement inspiré du modèle de chemotaxie suivant, voir Billy [7].

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} = D_n \Delta n - \nabla \cdot [\chi(c) n \nabla c] + F(n, c) \\ \frac{\partial c}{\partial t} = D_c \Delta c + G(n, c) \end{cases}$$

où n représente la densité de cellules endothéliales, c la concentration en facteur angiogénique, les fonctions F et G représentant l'augmentation relative respectivement de la densité de cellules et de la concentration en facteur angiogénique, D_c désigne le coefficient de diffusion du facteur angiogénique, D_n est le coefficient de motilité aléatoire (ou coefficient de diffusion) des cellules, et $\chi(c)$ coefficient de chemotaxie.

La fonction F modélise les phénomènes de prolifération et d'apoptose des cellules endothéliales. F peut, par exemple, s'écrire sous la forme

$$F(n, c) = \alpha(c) n (1 - n) - \delta(c) n$$

où $\alpha(c)$ et $\delta(c)$ sont des fonctions représentant une éventuelle action du facteur chemo-attractant sur la prolifération et l'apoptose des cellules endothéliales. De même, la fonction G modélise les phénomènes de production, consommation (par exemple par liaison aux récepteurs des cellules endothéliales), dégradation du facteur angiogénique. G peut, par exemple, s'écrire sous la forme

$$G(n, c) = \beta c - \gamma n c - \mu c$$

Les conditions aux bords employées pour ce type de modèle sont des conditions annihilant le flux de cellules endothéliales aux bords et des conditions de type Dirichlet pour les concentrations en substances chimiques.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. Alaa, I. Fatmi, J. R. Roche, and A. Tounsi, *Mathematical analysis for a model of nickel-iron alloy electrodeposition on rotating disk electrode : parabolic case*, Int. J. Math. Stat. 2 (2008), So8, 30-48. (Cité pages 10, 13, 16, 45, 66, 107, 134 et 136.)
- [2] N. Alaa, M. Iguernane, J.R. Roche, A. Cheggour, and A. Tounsi, *Numerical analysis of a model for a Nickel-Iron electrodeposition on rotating*, Prépublication de l'IECN, N° 45, (2006). (Cité pages 12, 66, 84, 107 et 108.)
- [3] R. E. Baker, *Mathematical Biology and Ecology Lecture Notes*. 2011. (Cité pages 15, 45, 84, 85 et 107.)
- [4] H. Berestycki, F. Hamel, A. Kiselev, and L. Ryzhik, *Quenching and propagation in KPP reaction-diffusion equations with a heat loss*, Arch. Rational Mechanics and Analysis, No. 09, p. 57-80. 2005. (Cité pages 9, 36, 45, 73, 108, 113, 118 et 119.)
- [5] C. Bernardi, B. Métivet, and B. Pernaud-Thomas, *Couplage des équations de Navier-Stokes et de la chaleur : le modèle et son approximation par éléments finis*, RAIRO Modél. Math. Anal. Numér. Vol. 29 (1995), 871–921. (Cité pages 11, 37, 38, 73, 84 et 107.)
- [6] M. Vos, S. M. Berrocal, F. Karamaouna, L. Hemerik, and L. E. M. Vet, *Plant-mediated indirect effects and the persistence of parasitoid-herbivore communities*. Ecol. Lett. 4, 38–45 (2001). (Cité pages 13, 38, 75, 84 et 107.)
- [7] F. Billy, *Modélisation mathématique multi-échelle de l'angiogenèse tumorale. Analyse de la réponse tumorale aux traitements anti-angiogéniques*, Thèse de l'université de Lyon 1, 2009. (Cité pages 6, 13, 27, 37, 38, 45, 77, 84, 107 et 108.)

- [8] J. O'M. Bockris, D. Drazic, and A. R. Despic, *Electrochim. Acta*, 4, 325, (1961). (Cité pages 6, 16, 27, 66 et 107.)
- [9] J. Coirier. *Mecanique des milieux continus*. Dunod, Paris, 2001 (Cité pages 6, 26, 46, 84, 85, 117, 134 et 136.)
- [10] G. Duvaut. *Mecanique des milieux continus*. Masson, Paris, 1990. (Cité pages 9, 27, 32, 46, 47, 84, 85, 107, 108 et 134.)
- [11] M. Di Francesco, *Mathematical models in life sciences*, Université d'Aalto, 2010. (Cité pages 6, 27, 45, 84, 85, 107 et 134.)
- [12] M. Di Francesco, and J. Rosado, *Fully Parabolic Keller-Segel Model for Chemotaxis with Prevention of Overcrowding*, *Nonlinearity* 21 (2008), 2715–2730. (Cité pages 11, 13, 16, 27, 45, 74, 84, 108, 109 et 134.)
- [13] D. Gangasingh, and J. B. Talbot, *J. Electrochem. Soc.*, 140, 669, (1993). (Cité pages 9, 37, 38, 66, 108 et 139.)
- [14] J. B. F. Geervliet, S. Ariens, M. Dicke, and L. E. M. Vet, *Long-distance assessment of patch profitability through volatile infochemicals by the parasitoids Cotesia glomerata and Cotesia rubecula*, *Biol. Control* 11, 113–121 (1998). (Cité pages 9, 75, 87, 88, 107 et 135.)
- [15] J. B. F. Geervliet, A. I. Vreugdenhill, M. Dicke, and L. E. M. Vet, *Learning to discriminate between infochemicals from different plant-host complexes by the parasitoids Cotesia glomerata and Cotesia rubecula*. *Entomol. Exp. Appl.* 86, 241–252 (1998). (Cité pages 6, 38, 75, 84, 107, 134 et 135.)
- [16] W.C. Grande, and J. B. Talbot, *J. Electrochem. Soc.*, 140, 675, (1993). (Cité pages 11, 13, 28, 66, 108, 109 et 134.)
- [17] B.A. Grzybowski, *Chemistry in Motion : Reaction–Diffusion Systems for Micro- and Nanotechnology*, Wiley, (2009). (Cité pages 6, 30, 32, 45, 84, 94, 107 et 141.)
- [18] S. Hessami, and C. W. Tobias, *J. Electrochem. Soc.*, 136, 3611, (1989). (Cité pages 6, 13, 14, 30, 66, 68, 69, 85, 87 et 108.)
- [19] J. Horkans, *J. Electrochem. Soc.*, 126, 1861, (1979). (Cité pages 11, 27, 69, 84, 85 et 108.)

- [20] L. Kagan, and G. Sivashinsky, *Flame propagation and extinction in large-scale vortical flows*, Combust. Flame 120, 2000, 222–232. (Cité pages 16, 25, 27, 36, 74, 84 et 112.)
- [21] L. Kagan, P.D. Ronney, and G. Sivashinsky, *Activation energy effect on flame propagation in large-scale vortical flows*, Combust. Theory Modeling 6, 2002, 479–485. (Cité pages 6, 13, 14, 27, 38, 74, 84, 108 et 134.)
- [22] B. Khoudier, A. Bourlioux, and A. Majda, *Parametrizing the burning rate speed enhancement by small scale periodic flows : I. Unsteady shears, flame residence time and bending*, Combust. Theory Model., 5, 2001, 295–318. (Cité pages 1, 27, 38, 74, 84 et 107.)
- [23] T. Krause, L. Arulnayagam, and M. Pritzker, *J. Electrochem. Soc.*, 144, 960 (1997). (Cité pages 6, 26, 38, 66, 68, 69, 84, 107, 108, 135 et 139.)
- [24] S. Logan, *Introduction à la cinétique chimique, Cours et exercices corrigés*, Dunod, 1998. (Cité pages 9, 26, 58, 84, 107, 139 et 144.)
- [25] S. Malham, and J.X. Xin, *Global solutions to a reactive Boussinesq system with front data on an infinite domain*, Comm. Math. Phys. 193 (1998), no. 2, 287–316. (Cité pages 9, 27, 31, 73 et 108.)
- [26] O. Manley, M. Marion, and R. Temam, *Equations of combustion in the presence of complex chemistry*, Indiana Univ. Math. J. 42 (1993), no. 3, 941–967. (Cité pages 9, 28, 32, 73, 107 et 134.)
- [27] M. Matlosz, *J. Electrochem. Soc.*, 140, 2272, (1993). (Cité pages 9, 38, 66, 107 et 134.)
- [28] J. Matulis, and R. Slyzys, *J. Electrochem. Soc.*, 9, 1177, (1964). (Cité pages 12, 37, 38, 66, 107 et 134.)
- [29] B. McCaughey, J.A. Pojman, C. Simmons, and V.A. Volpert, *The effect of convection on a propagating front with a liquid product : comparison of theory and experiments*, Chaos, Vol. 8 (1998), 520-529. (Cité pages 12, 28, 71 et 134.)
- [30] J. D. Murray, *Mathematical Biology I : An Introduction*, volume I. Springer-Verlag, 3rd edition, 2003. (Cité pages 6, 31, 32, 34, 35, 36, 45 et 51.)

- [31] J. D. Murray, *Mathematical Biology II : Spatial Models and Biochemical Applications*, volume II. Springer-Verlag, 3rd edition, 2003. (Cité pages 13, 27 et 51.)
- [32] H. G. Othmer, S. R. Dunbar, and W. Alt. *Models of dispersal in biological systems*. J. Math. Biol., 26, (1988) 263-298. (Cité pages 16, 38 et 134.)
- [33] I. G. Pearce, M. A. J. Chaplain, A. R. A. Anderson, P. G. Schofield, and S. F. Hubbard ,*Chemotaxis-induced spatio-temporal heterogeneity in multi-species host-parasitoid systems*, J. Math. Biol. vol 55, p. 365–388, (2007). (Cité pages 6, 26, 45 et 75.)
- [34] N. Peters, *Turbulent combustion*, Cambridge University Press, 2000. (Cité pages 10, 38, 74 et 134.)
- [35] R. T. Picard, *Problèmes de réaction-diffusion avec convection Une étude mathématique et numérique*, Thèse de doctorat, l'université Claude Bernard-Lyon 1, 2002. (Cité pages 7, 27, 45, 71 et 143.)
- [36] R. M. P. van Poecke , M. Roosjen, L. Pumarino, and M. Dicke, *Attraction of the specialist parasitoid Cotesia rubecula to Arabidopsis thaliana infested by host or non-host herbivore species*. Entomol. Exp. Appl. 107, 229–236 (2003). (Cité pages 10, 12, 27 et 75.)
- [37] M. Ramasubramanian, S. N. Popova, R. E. White, and K.-M. Yin, J. *Electrochem. Soc*, 143, 2164 (1996). (Cité pages 7 et 66.)
- [38] L. R. Ritter, *A short course in the modeling of chemotaxis*, Texas A & M University, 2004. (Cité pages 9 et 74.)
- [39] P. Royis. *Mecanique des milieux continus*. Presses Universitaires de Lyon, 2005 (Cité pages 9 et 46.)
- [40] J. Salençon. *Mecanique des milieux continus*, volume I. Concepts généraux. Ellipses, Paris, 1988 (Cité pages 9 et 46.)
- [41] H. Schultz, and M. Pritzker, J. *Electrochem. Soc*, 145, 2033 ,(1998). (Cité pages 9 et 66.)
- [42] C. W. Tobias, M. Eisenberg, and C .R. Wilke, J. *Electrochem. Soc*, 99, 359C, (1952).
(Cité pages 9 et 66.)

RÉSULTAT D'EXISTENCE POUR DES 3 SYSTÈMES TRIANGULAIRES ELLIPTIQUES DE RÉACTION-DIFFUSION AVEC DONNÉES DANS L^1 ET CROISSANCE CRITIQUE EN GRADIENT

SOMMAIRE

3.1	INTRODUCTION	84
3.2	HYPOTHÈSES ET RÉSULTAT PRINCIPAL	85
3.2.1	Hypothèses	85
3.2.2	Résultat principal	86
3.3	PREUVE DU RÉSULTAT PRINCIPAL	86
3.3.1	Schéma approché	86
3.3.2	Estimations a priori	87
3.3.3	Convergence	100

DANS ce chapitre, nous prouvons l'existence de solutions faibles pour certaine classe de systèmes $m \times m$ quasi linéaires triangulaires ellip-

tiques de réaction-diffusion avec données L^1 . L'originalité de cette étude persiste dans le fait que les non-linéarités de notre système ont une croissance critique en gradient de solutions.

Mots Clés. systèmes de réaction-diffusion, systèmes elliptiques, solutions faibles, troncature.

3.1 INTRODUCTION

La modélisation mathématique de plusieurs phénomènes biologiques, chimiques et physiques conduit à des systèmes couplés non linéaires de réaction diffusion. Diverses méthodes ont été proposées pour l'étude de l'existence et de la propriété qualitative des solutions. La plupart des travaux dans la littérature antérieure est consacré à l'étude des systèmes elliptiques quasi-linéaires sous conditions aux limites de Dirichlet ou de Neumann [7], [15], [17], [23], toutes ces oeuvres examinent les solutions classiques. Ces dernières années, l'attention a été donnée aux solutions faibles des systèmes elliptiques sous des conditions limites linéaires, et différentes méthodes pour le problème de l'existence ont été utilisées [2], [3], [5], [6], [9], [10], [11], [12], [19], [20], [21], [22], [23], etc..

Ce chapitre traite des résultats d'existence pour le système elliptique de réaction-diffusion suivant

$$\begin{cases} -\Delta u_i = f_i(x, u, \nabla u) + F_i(x) & \text{dans } \Omega \\ u_i = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}, \text{ pour } 1 \leq i \leq m \quad (1.3)$$

où $u = (u_1, \dots, u_m)$, $\nabla u = (\nabla u_1, \dots, \nabla u_m)$, $f = (f_1, \dots, f_m)$, $F = (F_1, \dots, F_m)$, $p = (p_1, \dots, p_m)$, $m \geq 2$ et Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière assez régulière $\partial\Omega$, $-\Delta$ est l'opérateur de Laplace sur Ω avec des conditions aux limites de Dirichlet. Puisque nous sommes essentiellement préoccupés par des systèmes fréquemment rencontrés dans les applications [24], nous nous restreignons au cas de solutions positives satisfaisant la structure triangulaire. Ces deux propriétés principales sont assurées (respectivement) par les hypothèses suivantes

$$\begin{cases} f_i(\hat{u}_i) \geq 0, \text{ où } \hat{u}_i = (x, u_1, \dots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \dots, u_m, p_1, \dots, p_m), \\ F_i(x) \geq 0, \text{ pour tout } 1 \leq i \leq m, \\ \text{et pour tout } (u, p) \in (\mathbb{R}^+)^m \times \mathbb{R}^{Nm} \text{ et } x \in \Omega, \text{ p.p.} \end{cases} \quad (2.3)$$

et

$$\sum_{1 \leq j \leq i} f_j \leq 0, \text{ pour tout } 1 \leq i \leq m, (u, p) \in (\mathbb{R}^+)^m \times \mathbb{R}^{Nm} \text{ et } x \in \Omega, \text{ p.p.} \quad (3.3)$$

Lorsque f ne dépend pas du gradient, nous renvoyons le lecteur à l'étude récente et excellente de Pierre [21], qui présente une technique générale de

prouver l'existence d'une solution dans ce cas. Si f_i dépend du gradient, un théorème d'existence a été prouvé dans [18], au moyen de la méthode- L^1 introduite dans [19], lorsque la croissance des non-linéarités par rapport au gradient est sous-quadratique, à savoir

$$|f_i| \leq C_i \left(\sum_{1 \leq j \leq m} |u_j| \right) \left(K_i + \sum_{1 \leq j \leq m} |\nabla u_j|^{\alpha_j} \right), \quad 1 \leq i \leq m$$

$C_i \geq 0$, C_i est croissante, $K_i \in L^1(\Omega)$ et $1 \leq \alpha_j < 2$.

Notre objectif est d'étudier le cas $\alpha_j = 2$ pour tout $1 \leq j \leq m$. Cette croissance critique par rapport au gradient crée des difficultés dans le passage à la limite pour le problème approché et la méthode- L^1 ne peut pas être appliquée dans ce cas. Un modèle typique où les résultats de cette étude peuvent être appliqués est la suivante

$$\begin{cases} -\Delta u_i = \sum_{1 \leq j \leq i} a_{ij} \frac{u_j}{\sum_{1 \leq k \leq m} u_k} |\nabla u_j|^2 + F_i(x) & \text{dans } \Omega \\ u_i = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où $a_{ij} \leq 0$ et $F_i(x) \geq 0$, pour tout $1 \leq i \leq m$.

Nous avons organisé ce chapitre de la manière suivante. Dans la section 3.2, nous donnons la position exacte du problème étudié et le résultat principal de ce chapitre. Dans la section 3.3, nous tronquons le système et nous donnons ensuite des estimations appropriées pour passer à la limite. Enfin, nous prouvons la convergence du problème tronqué vers une solution de notre système. Les difficultés dans cette section sont semblables à ceux dans [3], [9], [10], [11], et les techniques sont dans le même esprit. Mais de nouvelles difficultés spécifiques dues à la nature du système doivent être manipulées.

3.2 HYPOTHÈSES ET RÉSULTAT PRINCIPAL

3.2.1 Hypothèses

Nous introduisons d'abord la notion de solution du problème (1.3) utilisée ici,

Définition 3.1 $(u_1, \dots, u_m)$ est dit solution faible du problème (1.3) si

$$\begin{cases} u_i \in W_0^{1,1}(\Omega), \\ f_i(., u, \nabla u) \in L^1(\Omega), \\ -\Delta u_i = f_i(., u, \nabla u) + F_i \text{ dans } D'(\Omega) \end{cases}, \text{ pour tout } 1 \leq i \leq m$$

Tout au long de ce chapitre, nous supposons que :

$\Gamma 1) f_i : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{Nm} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont mesurables, pour tout $1 \leq i \leq m$.

$\Gamma 2) f_i : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{Nm} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont continues pour presque tout x dans Ω et pour tout $1 \leq i \leq m$.

$\Gamma 3) |f_1(x, u, p)| \leq C_1(|u_1|) \left(\lambda_1(x) + \|p_1\|^2 + \sum_{2 \leq j \leq m} \|p_j\|^{\alpha_j} \right)$, où $C_1 : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ est non décroissante, $\lambda_1 \in L^1(\Omega)$, $1 \leq \alpha_j < 2$.

$\Gamma 4) |f_i(x, u, p)| \leq C_i \left(\sum_{j=1}^i |u_j| \right) \left(\lambda_i(x) + \sum_{1 \leq j \leq m} \|p_j\|^2 \right)$, pour tout $2 \leq i \leq m$, où $C_i : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ est non décroissante et $\lambda_i \in L^1(\Omega)$.

$\Gamma 5) F_i \in L^1(\Omega)$, pour tout $1 \leq i \leq m$.

Remarque 3.1 On peut en déduire des hypothèses $(\Gamma 2)$ et $(\Gamma 3)$ que

$$f_i(x, 0, p) = 0 \text{ pour tout } p \in \mathbb{R}^{Nm} \text{ et } 1 \leq i \leq m$$

3.2.2 Résultat principal

Théorème 3.1 Supposons que les hypothèses (2.3), (3.3) et $(\Gamma 1) - (\Gamma 5)$ sont satisfaites. Alors il existe une solution positive faible du problème (1.3).

Avant de donner la preuve de ce théorème, notons T_k la fonction de troncature

$$T_k(s) = \max \{-k, \min \{s, k\}\}, \quad k \in \mathbb{R}^+$$

3.3 PREUVE DU RÉSULTAT PRINCIPAL

3.3.1 Schéma approché

Nous définissons ψ_n une fonction de troncature par $\psi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $0 \leq \psi_n \leq 1$, et

$$\psi_n(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } |z| \leq n \\ 0 & \text{si } |z| \geq n+1 \end{cases}$$

Considérons les m fonctions suivantes

$$f_{i,n}(x, u, p) = \psi_n \left(\sum_{1 \leq j \leq m} (|u_j| + \|p_j\|) \right) f_i(x, u, p), \text{ pour tout } 1 \leq i \leq m$$

Il est facile de voir que $f_{i,n}$, satisfont les mêmes propriétés que f_i , $1 \leq i \leq m$. par ailleurs $\sum_{1 \leq i \leq m} |f_{i,n}| \leq \eta_n \in L^1(\Omega)$. Par une application directe

du théorème du point fixe de Leray-Schauder, nous pouvons prouver que le système

$$\begin{cases} -\Delta u_{i,n} = f_{i,n}(x, u_n, \nabla u_n) + F_i(x) & \text{dans } D'(\Omega) \\ u_{i,n} \in W_0^{1,1}(\Omega) \end{cases}, \text{ pour tout } 1 \leq i \leq m \quad (4.3)$$

a une solution faible positive $u_n = (u_{1,n}, \dots, u_{m,n})$ dans $(W_0^{1,q}(\Omega))^m$ avec $1 \leq q < \frac{N}{N-1}$ (voir [18] pour plus de détails).

3.3.2 Estimations a priori

Lemme 3.1 Soit $u_n \in (W_0^{1,q}(\Omega))^m$ une suite non négative telle que

$$-\Delta u_{i,n} = f_{i,n} + F_i \quad \text{dans } D'(\Omega) \quad (5.3)$$

f_n satisfaisant (3.3) et $F_i \in L^1(\Omega)$, $1 \leq i \leq m$. Alors

i) Il existe une constante R_1 dépendant de $\|F_i\|_{L^1(\Omega)}$, $1 \leq i \leq m$, telle que

$$\sum_{1 \leq i \leq m} \int_{\Omega} |f_{i,n}(x, u_n, \nabla u_n)| \leq R_1$$

ii) La suite $(u_{1,n}, \dots, u_{m,n})$ est relativement compacte dans $(W_0^{1,q}(\Omega))^m$ pour tout $1 \leq q < \frac{N}{N-1}$.

Démonstration. i) Considérons les équations satisfaites par $u_{i,n}$, $1 \leq i \leq m$, nous pouvons écrire

$$\begin{cases} u_{i,n} \in W_0^{1,q}(\Omega) \\ -f_{i,n} = \Delta u_{i,n} + F_i \quad \text{dans } D'(\Omega) \end{cases}, \text{ pour tout } 1 \leq i \leq m \quad (6.3)$$

Puisque $u_{i,n} \geq 0$ pour tout $1 \leq i \leq m$ et $-\Delta$ est dissipatif dans $L^1(\Omega)$ (voir [14]), alors

$$\int_{\Omega} \Delta u_{i,n} \leq 0, \text{ pour tout } 1 \leq i \leq m$$

En intégrant (6.3) sur Ω , le fait que $\sum_{1 \leq j \leq i} f_{j,n} \leq 0$ et $F_i \in L^1(\Omega)$ pour tout $1 \leq i \leq m$, nous permet de conclure

$$\int_{\Omega} \left| \sum_{1 \leq j \leq i} f_{j,n} \right| \leq \sum_{1 \leq j \leq i} \|F_j\|_{L^1(\Omega)}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, il vient

$$\int_{\Omega} |f_{i,n}| \leq \sum_{1 \leq j \leq i} (i - j + 1) \|F_j\|_{L^1(\Omega)}$$

ii) Cette assertion est obtenue par une application directe d'un résultat dans [14]. En effet, les applications

$$\Psi : L^1(\Omega) \longrightarrow W_0^{1,q}(\Omega), f_{i,n} \longmapsto u_{i,n} \text{ pour tout } 1 \leq i \leq m$$

où u_n est solution de (1.3), sont compactes, avec $1 \leq q < \frac{N}{N-1}$.

Donc, puisque, par i), les non-linéarités $f_{i,n}$, $1 \leq i \leq m$ sont uniformément bornées dans $L^1(\Omega)$, on obtient le résultat voulu. $\square$

Lemme 3.2 Soit $(u_{1,n}, \dots, u_{m,n})$ est définie comme dans le lemme précédent. Alors

i) a)

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} \int_{[u_{1,n} \geq \delta]} |f_{1,n}| = 0, \text{ uniformément en } n$$

b) Avec $\theta_n = \sum_{1 \leq i \leq m} (m - i + 1) u_{i,n}$, nous avons

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} \int_{[\theta_n \geq \delta]} |f_{1,n}| = 0, \text{ uniformément en } n$$

ii) Il existe une constante R_2 dépendante de k , $\|F_i\|_{L^1(\Omega)}$, $1 \leq i \leq m$, telle que

$$\int_{\Omega} |\nabla T_k(u_{j,n})|^2 \leq R_2, \text{ pour tout } 1 \leq j \leq m$$

iii) Il existe une constante R_3 dépendante de k , $\|F_i\|_{L^1(\Omega)}$, $1 \leq i \leq m$, telle que

$$\int_{\Omega} \left| \nabla T_k \left(\sum_{1 \leq j \leq i} u_{j,n} \right) \right|^2 \leq R_3, \text{ pour tout } 1 \leq i \leq m$$

iv) Par ailleurs

a)

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{1}{\delta} \int_{\Omega} |\nabla T_{\delta}(u_{1,n})|^2 = 0$$

b)

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{1}{\delta} \int_{\Omega} \left| \nabla T_{\delta} \left(\sum_{1 \leq j \leq m} u_{j,n} \right) \right|^2 = 0, \text{ uniformément en } n$$

Démonstration. i) a) Nous définissons d'abord la fonction test suivante, pour chaque t , $\delta > 0$

$$P_{t,\delta}(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq s < \delta \\ \frac{s-\delta}{t} & \text{si } \delta \leq s < t+\delta \\ 1 & \text{si } s > t+\delta \end{cases}$$

En écrivant

$$\int_{\Omega} \nabla u_{1,n} \nabla P_{t,\delta}(u_{1,n}) - \int_{\Omega} f_{1,n} \nabla P_{t,\delta}(u_{1,n}) = \int_{\Omega} F_1 P_{t,\delta}(u_{1,n})$$

et en utilisant le fait que $f_{1,n} \leq 0$ et $P_{t,\delta}(u_{1,n}) \geq 0$, il vient

$$\frac{1}{t} \int_{[\delta \leq u_{1,n} \leq t+\delta]} |\nabla u_{1,n}|^2 - \int_{[u_{1,n} \geq t+\delta]} f_{1,n} \leq \int_{[u_{1,n} \geq t+\delta]} F_1 P_{t,\delta}(u_{1,n})$$

Puisque $\frac{1}{t} \int_{[\delta \leq u_{1,n} \leq t+\delta]} |\nabla u_{1,n}|^2 \geq 0$, nous obtenons

$$\int_{[u_{1,n} \geq t+\delta]} f_{1,n} \leq \int_{[u_{1,n} \geq t+\delta]} F_1 P_{t,\delta}(u_{1,n}) \leq \int_{[u_{1,n} \geq \delta]} |F_1|$$

Grâce au théorème de Lebesgue, nous avons par passage à la limite quand $t \rightarrow 0$

$$\int_{[u_{1,n} \geq \delta]} |f_{1,n}| \leq \int_{[u_{1,n} \geq \delta]} |F_1|$$

Mais

$$|[u_{1,n} \geq \delta]| = \int_{[u_{1,n} \geq \delta]} dx \leq \delta^{-1} \|u_{1,n}\|_{L^1(\Omega)} \leq C\delta^{-1}$$

car $u_{1,n}$ est bornée dans $L^1(\Omega)$ par lemme 3.1

D'autre part, puisque $F_1 \in L^1(\Omega)$, nous avons

$$\int_A |F_1| \rightarrow 0 \text{ quand } |A| \rightarrow 0$$

Donc

$$\sup_n \int_{[u_{1,n} \geq \delta]} |f_{1,n}| \leq \sup \left\{ \int_A |F_1| ; |A| \leq C\delta^{-1} \right\} \xrightarrow{\delta \rightarrow \infty} 0$$

Nous concluons que

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} \int_{[u_{1,n} \geq \delta]} |f_{1,n}| = 0, \text{ uniformément en } n$$

b) L'idée principale est de considérer l'équation satisfaite par $\theta_n = \sum_{1 \leq i \leq m} (m-i+1) u_{i,n}$ et de prendre $P_{t,\delta}(\theta_n)$ comme fonction test, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_{[\delta \leq \theta_n \leq t+\delta]} |\nabla \theta_n|^2 - \int_{[\theta_n \geq t+\delta]} P_{t,\delta}(\theta_n) \sum_{1 \leq i \leq m} (m-i+1) f_{i,n} \\ \leq \int_{[\theta_n \geq t+\delta]} P_{t,\delta}(\theta_n) \sum_{1 \leq i \leq m} (m-i+1) F_i \end{aligned}$$

Puisque $\sum_{1 \leq j \leq i} f_{j,n} \leq 0$, $0 \leq i \leq m$ et $P_{t,\delta}(\theta_n) \geq 0$, nous obtenons

$$\int_{[\theta_n \geq t+\delta]} |f_{j,n}| P_{t,\delta}(\theta_n) \leq \int_{[\theta_n \geq t+\delta]} P_{t,\delta}(\theta_n) \sum_{i=1}^m (m-i+1) F_i$$

pour tout $1 \leq j \leq m$. Le reste de la preuve s'exécute comme dans l'étape précédente.

ii) Nous multiplions la première équation dans (5.3) par $T_k(u_{1,n})$ et nous intégrons sur Ω , nous obtenons

$$\int_{\Omega} |\nabla T_k(u_{1,n})|^2 = \int_{\Omega} f_{1,n} T_k(u_{1,n}) + \int_{\Omega} F_1 T_k(u_{1,n}) \leq \int_{\Omega} F_1 T_k(u_{1,n}),$$

puisque $f_{1,n} T_k(u_{1,n}) \leq 0$. Nous avons alors

$$\int_{\Omega} |\nabla T_k(u_{1,n})|^2 \leq k \|F_1\|_{L^1(\Omega)}$$

De la même manière, nous multiplions la $i^{\text{ème}}$ équation dans (5.3) par $T_k(u_{i,n})$ et nous intégrons sur Ω , nous obtenons, pour tout $1 \leq i \leq m$

$$\int_{\Omega} |\nabla T_k(u_{i,n})|^2 = \int_{\Omega} f_{i,n} T_k(u_{i,n}) + \int_{\Omega} F_i T_k(u_{i,n}) \leq \int_{\Omega} (F_i + |f_{i,n}|) T_k(u_{i,n})$$

Nous avons alors

$$\int_{\Omega} |\nabla T_k(u_{i,n})|^2 \leq k \left(R_1 + \|F_i\|_{L^1(\Omega)} \right)$$

iii) De la même manière, nous multiplions par $T_k \left(\sum_{1 \leq j \leq i} u_{j,n} \right)$ l'équation satisfaite par $\sum_{1 \leq j \leq i} u_{j,n}$, $1 \leq i \leq m$ et nous intégrons sur Ω , nous obtenons

$$\int_{\Omega} \left| \nabla T_k \left(\sum_{1 \leq j \leq i} u_{j,n} \right) \right|^2 \leq k \left(R_1 + \sum_{1 \leq j \leq i} \|F_j\|_{L^1(\Omega)} \right), \text{ pour tout } 1 \leq i \leq m$$

iv) Remarquons d'abord que $u_{1,n}$ satisfait

$$-\Delta u_{1,n} \leq F_1, \text{ dans } D'(\Omega)$$

Si nous multiplions cette inégalité par $T_{\delta}(u_{1,n})$ et nous intégrons sur Ω , nous obtenons pour chaque $M > 0$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla T_{\delta}(u_{1,n})|^2 &\leq \int_{\Omega \cap [u_{1,n} \leq M]} T_{\delta}(u_{1,n}) F_1 + \int_{\Omega \cap [u_{1,n} > M]} T_{\delta}(u_{1,n}) F_1 \\ &\leq M \int_{\Omega} F_1 + \delta \int_{\Omega} F_1 \chi_{[u_{1,n} > M]} \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{1}{\delta} \int_{\Omega} |\nabla T_{\delta}(u_{1,n})|^2 \leq \frac{M}{\delta} \|F_1\|_{L^1(\Omega)} + \int_{\Omega} F_1 \chi_{[u_{1,n} > M]}$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque $u_{1,n}$ est bornée dans $L^1(\Omega)$, nous avons $|[u_{1,n} > k]| \leq Ck^{-1}$. Par conséquent, il existe k_{ε} indépendant de n tel que

$$\int_{\Omega} F \chi_{[u_{1,n} > k_{\varepsilon}]} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

En prenant $M = k_{\varepsilon}$ et en faisant tendre δ vers l'infini, nous obtenons la conclusion souhaitée.

La dernière assertion du lemme 3.1 nous permet d'assurer l'existence d'une sous-suite notée par $(u_{1,n}, \dots, u_{m,n})$ telle que

$$\begin{aligned} u_{i,n} &\longrightarrow u_i && \text{fortement dans } W_0^{1,q}(\Omega) \\ u_{i,n} &\longrightarrow u_i && \text{dans } \Omega, \text{ p.p.} \\ \nabla u_{i,n} &\longrightarrow \nabla u_i && \text{dans } \Omega, \text{ p.p.} \end{aligned} \quad , \text{ pour tout } 1 \leq i \leq m$$

Dans l'étape suivante, nous allons montrer que cette sous-suite $(u_{1,n}, \dots, u_{m,n})$ vérifie certaines propriétés utiles. $\square$

Lemme 3.3 *Supposons que $u_{i,n}$, u_i , $1 \leq i \leq m$, sont comme ci-dessus.*

i) Si

$$|f_{1,n}| \leq C_1 (|u_{1,n}|) \left(\lambda_1(x) + |\nabla u_{1,n}|^2 + \sum_{2 \leq j \leq m} |\nabla u_{j,n}|^{\alpha_j} \right)$$

où $C_1 \geq 0$, C_1 est non décroissante, $\lambda_1 \in L^1(\Omega)$, $1 \leq \alpha_j < 2$, alors, pour chaque k fixe,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla T_k(u_{1,n}) - \nabla T_k(u_1)|^2 \chi_{\left[\sum_{1 \leq i \leq m} u_{i,n} \leq k \right]} = 0$$

ii) Si

$$|f_{i,n}| \leq C_i \left(\sum_{1 \leq j \leq i} |u_{j,n}| \right) \left(\lambda_i(x) + \sum_{1 \leq j \leq m} |\nabla u_{j,n}|^2 \right), \text{ pour tout } 2 \leq i \leq m$$

où $C_i \geq 0$, C_i est non décroissante, $\lambda_i \in L^1(\Omega)$, alors, pour chaque k fixe et pour tout $2 \leq i \leq m$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left| \nabla T_k \left(\sum_{1 \leq j \leq i} u_{j,n} \right) - \nabla T_k \left(\sum_{1 \leq j \leq i} u_j \right) \right|^2 \chi_{\left[\sum_{1 \leq i \leq m} u_{i,n} \leq k \right]} = 0$$

Démonstration. i) Soit

$$\varphi(s) = s \exp(\mu s^2), \text{ où } \mu \geq \max \left\{ \frac{1}{4} C_1^2(k), 36 \left(\sum_{2 \leq j \leq m} C_i(k) \right)^2 \right\}$$

Un calcul facile nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} \varphi'(s) - C_1(k) |\varphi(s)| &> \frac{1}{2} \\ \varphi'(s) - 12 |\varphi(s)| \sum_{2 \leq i \leq r} C_i(k) &> \frac{1}{2}, \text{ pour } 2 \leq r \leq m \end{aligned}$$

Soit aussi la fonction $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$, $0 \leq \Phi(s) \leq 1$ pour $\forall s \in \mathbb{R}$, définie par

$$\Phi(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } |s| \geq 1 \\ 1 & \text{si } |s| \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Maintenant, soit δ et k des nombres réels positifs tels que $k < \delta$ et nous prenons

$$\varphi(T_k(u_{1,n}) - T_k(u_1)) \Phi \left(\frac{1}{\delta} \sum_{1 \leq i \leq m} u_{i,n} \right)$$

comme une fonction test dans la première équation de (5.3). Nous avons

$$J = - \int_{\Omega} \Delta u_{1,n} \varphi(T_k(u_{1,n}) - T_k(u_1)) \Phi \left(\frac{1}{\delta} \sum_{1 \leq i \leq m} u_{i,n} \right) = J_3 + J_4 \quad (7.3)$$

où

$$\begin{aligned} J_3 &= \int_{\Omega} f_{1,n} \varphi(T_k(u_{1,n}) - T_k(u_1)) \Phi \left(\frac{1}{\delta} \sum_{1 \leq i \leq m} u_{i,n} \right) \\ J_4 &= \int_{\Omega} F_1 \varphi(T_k(u_{1,n}) - T_k(u_1)) \Phi \left(\frac{1}{\delta} \sum_{1 \leq i \leq m} u_{i,n} \right) \end{aligned}$$

Pour des raisons de brièveté, nous noterons

$$\begin{aligned} \xi_{k,n} &= T_k(u_{1,n}) - T_k(u_1) \\ E_n &= \sum_{1 \leq i \leq m} u_{i,n} \end{aligned}$$

Une intégration par parties nous donne

$$\begin{aligned} J &= \int_{\Omega} \nabla u_{1,n} (\nabla T_k(u_{1,n}) - \nabla T_k(u_1)) \varphi'(\xi_{k,n}) \Phi \left(\frac{E_n}{\delta} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\delta} \int_{\Omega} \nabla u_{1,n} \nabla (E_n) \varphi(\xi_{k,n}) \Phi' \left(\frac{E_n}{\delta} \right) \\ &= J_1 + J_2 \end{aligned}$$

Pour J_1 , nous avons

$$\begin{aligned}
J_1 &= - \int_{[u_{1,n} > k]} \nabla u_{1,n} \nabla T_k(u_1) \varphi'(\xi_{k,n}) \Phi\left(\frac{E_n}{\delta}\right) \\
&\quad + \int_{[u_{1,n} \leq k]} |\nabla(T_k(u_{1,n}) - T_k(u_1))|^2 \varphi'(\xi_{k,n}) \Phi\left(\frac{E_n}{\delta}\right) \\
&\quad + \int_{[u_{1,n} \leq k]} \nabla T_k(u_1) \nabla(T_k(u_{1,n}) - T_k(u_1)) \varphi'(\xi_{k,n}) \Phi\left(\frac{E_n}{\delta}\right) \\
&= J_{1.1} + J_{1.2} + J_{1.3}
\end{aligned}$$

Pour le terme J_3 , nous avons

$$\begin{aligned}
J_3 &= \int_{[u_{1,n} \leq k]} f_{1,n} \varphi(\xi_{k,n}) \Phi\left(\frac{E_n}{\delta}\right) + \int_{[u_{1,n} > k]} f_{1,n} \varphi(\xi_{k,n}) \Phi\left(\frac{E_n}{\delta}\right) \\
&\leq \int_{[u_{1,n} \leq k]} f_{1,n} \varphi(\xi_{k,n}) \Phi\left(\frac{E_n}{\delta}\right)
\end{aligned}$$

puisque $\varphi(\xi_{k,n}) \Phi\left(\frac{E_n}{\delta}\right) \geq 0$ sur $[u_{1,n} > k]$ ($\Phi \geq 0$, $\xi_{k,n} \geq 0$ sur $[u_{1,n} > k]$) et $f_{1,n} \leq 0$ par hypothèse. Donc

$$\begin{aligned}
J_3 &\leq C_1(k) \int_{[u_{1,n} \leq k]} \lambda_1(x) |\varphi(\xi_{k,n})| \Phi\left(\frac{E_n}{\delta}\right) \\
&\quad + C_1(k) \int_{[u_{1,n} \leq k]} |\nabla u_{1,n}|^2 |\varphi(\xi_{k,n})| \Phi\left(\frac{E_n}{\delta}\right) \\
&\quad + C_1(k) \sum_{2 \leq j \leq m} \left(\int_{[u_{1,n} \leq k]} |\nabla T_\delta(u_{j,n})|^{\alpha_j} |\varphi(\xi_{k,n})| \Phi\left(\frac{E_n}{\delta}\right) \right) \\
&= \sum_{0 \leq j \leq m} J_{3,j}
\end{aligned}$$

Par conséquent, par l'égalité (7.3), nous avons

$$J_{1.1} + J_{1.2} + J_{1.3} + J_2 \leq J_4 + \sum_{0 \leq j \leq m} J_{3,j} \quad (8.3)$$

Nous pouvons voir que $J_{1.1}$ peut s'écrire comme suit

$$\begin{aligned}
J_{1.1} &= - \int_{\Omega} \nabla T_\delta(u_{1,n}) \nabla T_k(u_1) \varphi'(\xi_{k,n}) \Phi\left(\frac{E_n}{\delta}\right) \chi_{[u_{1,n} \geq k]} \chi_{[u_1 \geq k]} \\
&\quad - \int_{\Omega} \nabla T_\delta(u_{1,n}) \nabla T_k(u_1) \varphi'(\xi_{k,n}) \Phi\left(\frac{E_n}{\delta}\right) \chi_{[u_{1,n} \geq k]} \chi_{[u_1 < k]}
\end{aligned}$$

Puisque $\nabla T_k(u_1) \chi_{[u_1 \geq k]} = 0$ dans Ω , p.p. et $\chi_{[u_{1,n} \geq k]} \chi_{[u_1 < k]} \rightarrow 0$ dans Ω , p.p. quand $n \rightarrow \infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_{1.1} = 0$$

D'autre part, $\nabla T_k(u_{1,n})$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ et converge vers $\nabla T_k(u_1)$ p.p., et $\left| \varphi'(\xi_{k,n}) \Phi\left(\frac{E_n}{\delta}\right) \right| \leq C |\varphi'(2k)|$. Par conséquent, il résulte de ([17] lemme 1.3 p 12) que $\nabla(T_k(u_{1,n}) - T_k(u_1)) \varphi'(\xi_{k,n}) \Phi\left(\frac{E_n}{\delta}\right)$ converge faiblement vers 0 dans $L^2(\Omega)$. Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_{1.3} = 0$$

Maintenant, nous étudions J_2 . Puisque $u_{1,n}$ et E_n vérifient les hypothèses du lemme précédent, nous obtenons

$$\begin{aligned} |J_2| \leq & \frac{1}{2\delta} \int_{\Omega} |\nabla T_{\delta}(u_{1,n})|^2 \left| \varphi(\xi_{k,n}) \Phi\left(\frac{E_n}{\delta}\right) \right| \\ & + \frac{1}{2\delta} \int_{\Omega} |\nabla T_{\delta}(E_n)|^2 \left| \varphi(\xi_{k,n}) \Phi\left(\frac{E_n}{\delta}\right) \right| \end{aligned}$$

Alors $\lim_{\delta \rightarrow \infty} |J_2| = 0$ uniformément en n .

Pour le terme $J_{3,0}$, nous utilisons le théorème de Lebesgue pour conclure que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_{3,0} = 0$$

Pour $J_{3,1}$, nous écrivons

$$\begin{aligned} J_{3,1} = & C_1(k) \int_{[u_{1,n} \leq k]} |\nabla(T_k(u_{1,n}) - T_k(u_1))|^2 |\varphi(\xi_{k,n})| \Phi\left(\frac{E_n}{\delta}\right) \\ & + 2C_1(k) \int_{[u_{1,n} \leq k]} \nabla T_k(u_{1,n}) \nabla T_k(u_1) |\varphi(\xi_{k,n})| \Phi\left(\frac{E_n}{\delta}\right) \\ & - C_1(k) \int_{[u_{1,n} \leq k]} |\nabla T_k(u_1)|^2 |\varphi(\xi_{k,n})| \Phi\left(\frac{E_n}{\delta}\right) \end{aligned}$$

Puisque $|\varphi(\xi_{k,n})| \Phi\left(\frac{E_n}{\delta}\right) \chi_{[u_{1,n} \leq k]}$ converge vers 0 p.p., $\nabla T_k(u_{1,n})$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ et $|\varphi(\xi_{k,n})| \Phi\left(\frac{E_n}{\delta}\right) \chi_{[u_{1,n} \leq k]} \leq \varphi(2k)$, il résulte de ([17] lemme 1.3 p 12) que $\nabla T_k(u_{1,n}) |\varphi(\xi_{k,n})| \Phi\left(\frac{E_n}{\delta}\right) \chi_{[u_{1,n} \leq k]}$ converge faiblement vers 0 dans $L^2(\Omega)$. Cela implique que le second terme de cette égalité tend vers zéro quand n tend vers l'infini. En ce qui concerne le dernier terme, nous remarquons que

$$|\varphi(\xi_{k,n})| \Phi\left(\frac{E_n}{\delta}\right) \chi_{[u_{1,n} \leq k]} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \text{ sur } \Omega, \text{ p.p.}$$

et

$$|\nabla T_k(u_{1,n})|^2 |\varphi(\xi_{k,n})| \Phi\left(\frac{E_n}{\delta}\right) \chi_{[u_{1,n} \leq k]} \leq |\nabla T_k(u_1)|^2 \varphi(2k) \in L^1(\Omega)$$

Grâce au théorème de Lebesgue, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[u_{1,n} \leq k]} |\nabla T_k(u_1)|^2 |\varphi(\xi_{k,n})| \Phi\left(\frac{E_n}{\delta}\right) = 0$$

Pour étudier les autres termes $J_{3,j}$, $2 \leq j \leq m$, nous appliquons l'inégalité de Hölder comme suit :

Nous choisissons $\alpha_j - 1 < \beta_j < 1$, nous avons

$$\begin{aligned} J_{3,j} &\leq C_1(k) \int_{[u_{1,n} \leq k]} |\nabla T_\delta(u_{j,n})|^{\alpha_j} |\xi_{k,n}| \exp(\mu \xi_{k,n}^2) \Phi(E_n) \\ &\leq C(k) \left(\int_{\Omega} |\nabla T_\delta(u_{j,n})|^{\alpha_j \frac{2}{\alpha_j}} |\xi_{k,n}|^{\frac{2\beta_j}{\alpha_j}} \right)^{\frac{\alpha_j}{2}} \left(\int_{\Omega} |\xi_{k,n}|^{\frac{2(1-\beta_j)}{2-\alpha_j}} \right)^{\frac{2-\alpha_j}{2}} \\ &\leq C(k) \left(\int_{\Omega} |\nabla T_\delta(u_{j,n})|^2 \right)^{\frac{\alpha_j}{2}} \left(\int_{\Omega} |\xi_{k,n}|^2 \right)^{\frac{1-\beta_j}{2}} |\Omega|^{\frac{1+\beta_j-\alpha_j}{2}} \end{aligned}$$

Maintenant, nous utilisons le lemme 3.2 (ii) pour obtenir

$$J_{3,j} \leq C(k) \left[\delta \left(R_1 + \|F_j\|_{L^1(\Omega)} \right) \right]^{\frac{\alpha_j}{2}} \left(\int_{\Omega} |\xi_{k,n}|^2 \right)^{\frac{1-\beta_j}{2}} |\Omega|^{\frac{1+\beta_j-\alpha_j}{2}}$$

En passant à la limite quand n tend vers l'infini (pour δ , k fixés), la convergence forte de $\xi_{k,n}$ vers 0 dans $L^2(\Omega)$ nous donne

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} J_{3,j} = 0$$

Pour le dernier terme J_4 , nous avons par une application directe du théorème de Lebesgue

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_4 = 0$$

puisque $F_1 \in L^1(\Omega)$, et $\left| \varphi(\xi_{k,n}) \Phi\left(\frac{E_n}{\delta}\right) \right| \leq C |\varphi(2k)|$.

Compte tenu de l'inégalité (8.3), nous avons montré que pour k , δ fixés

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (J_{1,2} + J_2 - J_{3,1}) \leq 0$$

Alors

$$\limsup_{\delta \rightarrow \infty} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} (J_{1,2} + J_2 - J_{3,1}) \right) \leq 0$$

Mais $\lim_{n \rightarrow \infty} J_2 = 0$ uniformément en n , cela devrait être

$$\limsup_{\delta \rightarrow \infty} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} |J_2| \right) = \limsup_{\delta \rightarrow \infty} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} J_2 \right) = 0$$

Il résulte

$$\limsup_{\delta \rightarrow \infty} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} (J_{1,2} - J_{3,1}) \right) \leq 0$$

Par conséquent

$$\limsup_{\delta \rightarrow \infty} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \Gamma(\delta, n) \right) \leq 0$$

où

$$\Gamma(\delta, n) := \int_{\Omega} |\nabla (T_k(u_{1,n}) - T_k(u_1))|^2 [\varphi'(\xi_{k,n}) - C_1(k) |\varphi(\xi_{k,n})|] \Phi\left(\frac{E_n}{\delta}\right)$$

Par le choix de μ nous déduisons que

$$\limsup_{\delta \rightarrow \infty} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla (T_k(u_{1,n}) - T_k(u_1))|^2 \Phi\left(\frac{E_n}{\delta}\right) \right) = 0$$

D'autre part

$$\begin{aligned} & \int_{[E_n \leq k]} |\nabla (T_k(u_{1,n}) - T_k(u_1))|^2 \Phi\left(\frac{E_n}{\delta}\right) \\ & \leq \int_{\Omega} |\nabla (T_k(u_{1,n}) - T_k(u_1))|^2 \Phi\left(\frac{E_n}{\delta}\right) \end{aligned}$$

Alors, pour tous δ et k fixés tels que $k < \delta$,

$$\limsup_{\delta \rightarrow \infty} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{[E_n \leq k]} |\nabla (T_k(u_{1,n}) - T_k(u_1))|^2 \Phi\left(\frac{E_n}{\delta}\right) \right) = 0$$

Nous choisissons $2k < \delta$. Par la définition de Φ , nous obtenons $\Phi\left(\frac{E_n}{\delta}\right) = 1$ sur $[E_n \leq k]$.

Par conséquent, cela devrait être

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla (T_k(u_{1,n}) - T_k(u_1))|^2 \chi_{[E_n \leq k]} \\ & \leq \limsup_{\delta \rightarrow \infty} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla (T_k(u_{1,n}) - T_k(u_1))|^2 \chi_{[E_n \leq k]} \right) = 0 \end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla (T_k(u_{1,n}) - T_k(u_1))|^2 \chi_{[E_n \leq k]} = 0$$

ii) Considérons l'équation satisfaite par $\sum_{1 \leq i \leq r} u_{i,n}$, $2 \leq r \leq m$

$$-\Delta \left(\sum_{1 \leq i \leq r} u_{i,n} \right) = \sum_{1 \leq i \leq r} f_{i,n} + \sum_{1 \leq i \leq r} F_i$$

et nous utilisons à nouveau $\varphi \left(T_k \left(\sum_{1 \leq i \leq r} u_{i,n} \right) - T_k \left(\sum_{1 \leq i \leq r} u_i \right) \right) \Phi \left(\frac{E_n}{\delta} \right)$ comme fonction test où δ et k sont tels que $0 < k < \delta$. Nous avons

$$\begin{aligned} K &= - \int_{\Omega} \Delta u_n \varphi \left(T_k \left(\sum_{1 \leq i \leq r} u_{i,n} \right) - T_k \left(\sum_{1 \leq i \leq r} u_i \right) \right) \Phi \left(\frac{E_n}{\delta} \right) \\ &= K_3 + K_{49.3} \end{aligned} \tag{3.1}$$

où

$$\begin{aligned} K_3 &= \int_{\Omega} \left(\sum_{1 \leq i \leq r} f_{i,n} \right) \varphi \left(T_k \left(\sum_{1 \leq i \leq r} u_{i,n} \right) - T_k \left(\sum_{1 \leq i \leq r} u_i \right) \right) \Phi \left(\frac{E_n}{\delta} \right) \\ K_4 &= \int_{\Omega} \left(\sum_{1 \leq i \leq r} F_i \right) \varphi \left(T_k \left(\sum_{1 \leq i \leq r} u_{i,n} \right) - T_k \left(\sum_{1 \leq i \leq r} u_i \right) \right) \Phi \left(\frac{E_n}{\delta} \right) \end{aligned}$$

Pour des raisons de brièveté, nous noterons

$$\xi_{k,n}^{(r-1)} = T_k \left(\sum_{1 \leq i \leq r} u_{i,n} \right) - T_k \left(\sum_{1 \leq i \leq r} u_i \right)$$

Une intégration par parties nous donne

$$\begin{aligned} K &= \int_{\Omega} \nabla \left(\sum_{1 \leq i \leq r} u_{i,n} \right) \left(\nabla T_k \left(\sum_{1 \leq i \leq r} u_{i,n} \right) - \nabla T_k \left(\sum_{1 \leq i \leq r} u_i \right) \right) \\ &\quad \times \varphi' \left(\xi_{k,n}^{(r-1)} \right) \Phi \left(\frac{E_n}{\delta} \right) + \frac{1}{\delta} \int_{\Omega} |\nabla E_n|^2 \varphi \left(\xi_{k,n}^{(r-1)} \right) \Phi \left(\frac{E_n}{\delta} \right) \\ &= K_1 + K_2 \end{aligned}$$

La preuve de cette assertion suit de près les étapes utilisées dans la preuve de l'assertion précédente ; il suffit de remplacer $u_{1,n}$ par $\sum_{1 \leq i \leq r} u_{i,n}$ et u_1 par $\sum_{1 \leq i \leq r} u_i$. Ainsi nous obtenons

$$\limsup_{\delta \rightarrow \infty} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} K_2 \right) = 0$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_4 = 0$$

Pour le terme K_1 , nous avons

$$\begin{aligned} K_1 &= - \int_{[E_n > k]} \nabla \left(\sum_{1 \leq i \leq r} u_{i,n} \right) \nabla T_k \left(\sum_{1 \leq i \leq r} u_i \right) \varphi' \left(\xi_{k,n}^{(r-1)} \right) \Phi \left(\frac{E_n}{\delta} \right) \\ &\quad + \int_{[E_n \leq k]} \left| \nabla \left(T_k \left(\sum_{1 \leq i \leq r} u_{i,n} \right) - T_k \left(\sum_{1 \leq i \leq r} u_i \right) \right) \right|^2 \varphi' \left(\xi_{k,n}^{(r-1)} \right) \Phi \left(\frac{E_n}{\delta} \right) \\ &\quad + \int_{[E_n \leq k]} \nabla T_k \left(\sum_{1 \leq i \leq r} u_i \right) \nabla \left(T_k \left(\sum_{1 \leq i \leq r} u_{i,n} \right) - T_k \left(\sum_{1 \leq i \leq r} u_i \right) \right) \\ &\quad \times \varphi' \left(\xi_{k,n}^{(r-1)} \right) \Phi \left(\frac{E_n}{\delta} \right) \\ &= K_{1,1} + K_{1,2} + K_{1,3} \end{aligned}$$

Il est facile de voir que K_1 peut être traité de la même manière que J_1 .

La seule différence est l'étude du terme K_3 , en effet,

$$\begin{aligned} K_3 &= \int_{[E_n \leq k]} \left(\sum_{1 \leq i \leq r} f_{i,n} \right) \varphi \left(\xi_{k,n}^{(r-1)} \right) \Phi \left(\frac{E_n}{\delta} \right) + \int_{[E_n > k]} \left(\sum_{1 \leq i \leq r} f_{i,n} \right) \\ &\quad \times \varphi \left(\xi_{k,n}^{(r-1)} \right) \Phi \left(\frac{E_n}{\delta} \right) \\ &\leq \int_{[E_n \leq k]} \left(\sum_{1 \leq i \leq r} f_{i,n} \right) \varphi \left(\xi_{k,n}^{(r-1)} \right) \Phi \left(\frac{E_n}{\delta} \right) \end{aligned}$$

puisque $\varphi \left(\xi_{k,n}^{(r-1)} \right) \geq 0$ sur $[E_n \leq k]$ et $\Phi \geq 0$, $\sum_{1 \leq i \leq r} f_{i,n} \leq 0$ par hypothèse.

D'où

$$\begin{aligned} |K_3| &\leq C_1(k) \int_{[E_n \leq k]} |\nabla u_{1,n}|^2 \left| \varphi \left(\xi_{k,n}^{(r-1)} \right) \right| \Phi \left(\frac{E_n}{\delta} \right) \\ &\quad + C_1(k) \int_{[E_n \leq k]} \left(\lambda_1(x) + \sum_{2 \leq j \leq m} |\nabla u_{j,n}|^{\alpha_j} \right) \left| \varphi \left(\xi_{k,n}^{(r-1)} \right) \right| \Phi \left(\frac{E_n}{\delta} \right) \\ &\quad + \sum_{2 \leq i \leq r} C_i(k) \left(\int_{[E_n \leq k]} \left(\lambda_i(x) + \sum_{1 \leq j \leq m} |\nabla u_{j,n}|^2 \right) \left| \varphi \left(\xi_{k,n}^{(r-1)} \right) \right| \Phi \left(\frac{E_n}{\delta} \right) \right) \\ &= \sum_{0 \leq i \leq r} K_{3,i} \end{aligned}$$

Par conséquent l'égalité (9.3) implique

$$K_{1,1} + K_{1,2} + K_{1,3} + K_2 \leq K_4 + \sum_{0 \leq i \leq r} K_{3,i} \quad (10.3)$$

Nous avons

$$\begin{aligned} K_{3,0} &= C_1(k) \int_{[E_n \leq k]} |\nabla u_{1,n}|^2 \left| \varphi \left(\xi_{k,n}^{(r-1)} \right) \right| \Phi \left(\frac{E_n}{\delta} \right) \\ &\leq 2C_1(k) \int_{[E_n \leq k]} |\nabla T_k(u_{1,n}) - \nabla T_k(u_1)|^2 \left| \varphi \left(\xi_{k,n}^{(r-1)} \right) \right| \Phi \left(\frac{E_n}{\delta} \right) \\ &\quad + 2C_1(k) \int_{[E_n \leq k]} |\nabla T_k(u_1)|^2 \left| \varphi \left(\xi_{k,n}^{(r-1)} \right) \right| \Phi \left(\frac{E_n}{\delta} \right) \\ &\leq 2C_1(k) \varphi(2k) \int_{\Omega} |\nabla T_k(u_{1,n}) - \nabla T_k(u_1)|^2 \Phi \left(\frac{E_n}{\delta} \right) \\ &\quad + 2C_1(k) \int_{\Omega} |\nabla T_k(u_1)|^2 \left| \varphi \left(\xi_{k,n}^{(r-1)} \right) \right| \Phi \left(\frac{E_n}{\delta} \right) \end{aligned}$$

En utilisant la première assertion (i) pour la première intégrale et théorème de Lebesgue pour la seconde, nous obtenons

$$\limsup_{\delta \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} K_{3,0} \right) = 0$$

En ce qui concerne le terme $K_{3,1}$, nous écrivons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_{3,1} = 0$$

Nous allons maintenant étudier $K_{3,i}$ pour $2 \leq i \leq r$. Remarquons d'abord que ce terme peut être contrôlé comme suit :

$$\begin{aligned} K_{3,i} &= C_i(k) \left(\int_{[E_n \leq k]} \left(\lambda_i(x) + \sum_{1 \leq j \leq m} |\nabla u_{j,n}|^2 \right) \left| \varphi \left(\xi_{k,n}^{(r-1)} \right) \right| \Phi \left(\frac{E_n}{\delta} \right) \right) \\ &\leq C_i(k) \int_{[E_n \leq k]} \left(\lambda_i(x) + 4 |\nabla T_k(u_{r,n})|^2 \right) \left| \varphi \left(\xi_{k,n}^{(r-1)} \right) \right| \Phi \left(\frac{E_n}{\delta} \right) \\ &\quad + C_i(k) \int_{[E_n \leq k]} \left(\sum_{1 \leq j \leq r-1} |\nabla T_k(u_{j,n})|^2 + \sum_{r+1 \leq j \leq m} |\nabla T_k(u_{j,n})|^2 \right) \\ &\quad \times \left| \varphi \left(\xi_{k,n}^{(r-1)} \right) \right| \Phi \left(\frac{E_n}{\delta} \right) \\ &\quad + 12 C_i(k) \int_{[E_n \leq k]} \left| \nabla T_k \left(\sum_{1 \leq j \leq r} |\nabla u_j|^2 \right) \right|^2 \left| \varphi \left(\xi_{k,n}^{(r-1)} \right) \right| \Phi \left(\frac{E_n}{\delta} \right) \\ &\quad + 12 C_i(k) \int_{[E_n \leq k]} \left| \nabla T_k \left(\sum_{1 \leq j \leq r} |\nabla u_{j,n}|^2 - \sum_{1 \leq j \leq r} |\nabla u_j|^2 \right) \right|^2 \\ &\quad \times \left| \varphi \left(\xi_{k,n}^{(r-1)} \right) \right| \Phi \left(\frac{E_n}{\delta} \right) \end{aligned}$$

La première, la seconde et la troisième intégrale peuvent être diminuer en utilisant les mêmes arguments comme auparavant.

En conclusion, nous obtenons

$$\begin{aligned} &\limsup_{\delta \rightarrow \infty} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left| \nabla T_k \left(\sum_{1 \leq i \leq r} u_{i,n} \right) - \nabla T_k \left(\sum_{1 \leq i \leq r} u_i \right) \right|^2 \right. \\ &\quad \times \left[\varphi' \left(\xi_{k,n}^{(r-1)} \right) - 12 \left| \varphi \left(\xi_{k,n}^{(r-1)} \right) \right| \sum_{2 \leq i \leq r} C_i(k) \right] \Phi \left(\frac{E_n}{\delta} \right) \Big) \leq 0 \end{aligned}$$

Comme dans l'assertion précédente, nous obtenons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left| \nabla \left(T_k \left(\sum_{1 \leq i \leq r} u_{i,n} \right) - T_k \left(\sum_{1 \leq i \leq r} u_i \right) \right) \right|^2 \chi_{[E_n \leq k]} = 0$$

□

3.3.3 Convergence

Le but de ce paragraphe est de prouver que $(u_1, \dots, u_m)$ limite de $(u_{1,n}, \dots, u_{m,n})$ est, en effet, solution faible du problème (1.3) dans le sens de la définition 3.1.

Par la continuité des fonctions $f_{1,n}, \dots, f_{m,n}$, nous en déduisons

$$f_{i,n}(x, u_n, \nabla u_n) \longrightarrow f_i(x, u, \nabla u) \text{ dans } \Omega, \text{ p.p., pour tout } 1 \leq i \leq m$$

Cette convergence presque point par point n'est pas suffisante pour assurer que $(u_1, \dots, u_m)$ est solution de (1.3). En effet, nous devons prouver que la convergence précédente est dans $L^1(\Omega)$. Compte tenu du théorème de Vitali, nous devons montrer que $f_{1,n}, \dots, f_{m,n}$ sont équi-intégrables dans $L^1(\Omega)$.

Lemme 3.4 *Les suites $(f_{i,n}(x, u_n, \nabla u_n))_n$, sont équi-intégrables dans $L^1(\Omega)$, pour tout $1 \leq i \leq m$.*

Démonstration. Soit A un sous-ensemble mesurable de Ω , nous avons

$$\begin{aligned} \int_A |f_{1,n}(x, u_n, \nabla u_n)| &= \int_{A \cap [E_n > k]} |f_{1,n}| + \int_{A \cap [E_n \leq k]} |f_{1,n}| \\ &\leq \int_{A \cap [\theta_n > k]} |f_{1,n}| + \int_{A \cap [E_n \leq k]} |f_{1,n}| \end{aligned}$$

Grâce au lemme 3.3, nous obtenons $\forall \varepsilon > 0, \exists k_0$ tel que, si $k \geq k_0$ alors

$$\int_{A \cap [\theta_n > k]} |f_{1,n}(x, u_n, \nabla u_n)| \leq \frac{\varepsilon}{m+2}, \text{ pour tout } n$$

L'hypothèse (Γ3) implique que pour tout $k > k_0$

$$\begin{aligned} \int_A |f_{1,n}(x, u_n, \nabla u_n)| &\leq \frac{\varepsilon}{m+2} + C_1(k) \left(\int_A \lambda_1(x) + \int_{A \cap [E_n \leq k]} |\nabla T_k(u_{1,n})|^2 \right) \\ &\quad + \sum_{2 \leq j \leq m} C_1(k) \left(\int_{A \cap [E_n \leq k]} |\nabla T_k(u_{j,n})|^{\alpha_j} \right) \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder pour $1 \leq \alpha_j < 2$ et le lemme 3.3 (ii), nous obtenons

$$\begin{aligned} C_1(k) \int_{A \cap [E_n \leq k]} |\nabla T_k(u_{j,n})|^{\alpha_j} &\leq C_1(k) \left(\int_A |\nabla T_k(u_{j,n})|^2 \right)^{\frac{\alpha_j}{2}} |A|^{\frac{2-\alpha_j}{2}} \\ &\leq C_1(k) R_2^{\frac{\alpha_j}{2}} |A|^{\frac{2-\alpha_j}{2}} \leq \frac{\varepsilon}{m+2} \end{aligned}$$

lorsque $|A| \leq \varrho_j$, avec $\varrho_1 = \left(\frac{\varepsilon}{m+2} C_1^{-1}(k) R_2^{-\frac{\alpha_j}{2}} \right)^{\frac{2}{2-\alpha_j}}$, $2 \leq j \leq m$.

Pour traiter la seconde intégrale nous écrivons

$$\int_{A \cap [E_n \leq k]} |\nabla T_k(u_{1,n})|^2 \leq 2 \int_{A \cap [E_n \leq k]} |\nabla T_k(u_{1,n}) - \nabla T_k(u_1)|^2 + 2 \int_A |\nabla T_k(u_1)|^2$$

D'après le lemme 3.3, $|\nabla T_k(u_{1,n}) - \nabla T_k(u_1)|^2 \chi_{[E_n \leq k]}$ est équi-intégrable dans $L^1(\Omega)$ puisqu'elle converge fortement vers 0 dans $L^1(\Omega)$.

Donc, il existe ϱ_{m+1} tel que si $|A| \leq \varrho_{m+1}$, alors

$$2C_1(k) \int_{A \cap [E_n \leq k]} |\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)|^2 \leq \frac{\varepsilon}{m+2}$$

D'autre part $\lambda_1, |\nabla T_k(u_1)|^2 \in L^1(\Omega)$, par conséquent il existe ϱ_{m+2} tel que

$$C_1(k) \left(2 \int_A |\nabla T_k(u_1)|^2 + \int_A \lambda_1(x) \right) \leq \frac{\varepsilon}{m+2}$$

lorsque $|A| \leq \varrho_{m+2}$. Nous choisissons $\varrho_0 = \inf \{ \varrho_j, 2 \leq j \leq m+2 \}$, si $|A| \leq \varrho_0$ nous obtenons

$$\int_A |f_{1,n}(x, u_n, \nabla u_n)| \leq \varepsilon$$

De la même manière, nous obtenons pour $2 \leq i \leq m$

$$\int_A |f_{i,n}| \leq \frac{\varepsilon}{m+2} + \int_{A \cap [E_n \leq k]} |f_{i,n}|$$

Par hypothèse $(\Gamma 4)$, nous avons

$$\begin{aligned} \int_A |f_{i,n}| &\leq \frac{\varepsilon}{m+2} \\ &+ C_i(k) \int_{A \cap [E_n \leq k]} \left(\lambda_i(x) + 6 |\nabla u_1|^2 + 6 |\nabla T_k(u_{1,n}) - \nabla T_k(u_1)|^2 \right) \\ &+ 8C_i(k) \sum_{1 \leq r \leq m} \left(\int_{A \cap [E_n \leq k]} \left| \nabla T_k \left(\sum_{1 \leq j \leq r} u_j \right) \right|^2 \right) \\ &+ 8C_i(k) \sum_{2 \leq r \leq m} \left(\int_{A \cap [E_n \leq k]} \left| \nabla T_k \left(\sum_{1 \leq j \leq r} u_{j,n} \right) - \nabla T_k \left(\sum_{1 \leq j \leq r} u_j \right) \right|^2 \right) \end{aligned}$$

En arguant de la même manière que précédemment, on obtient le résultat voulu. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. Alaa and M. Pierre, *Weak solutions for some quasi-linear elliptic equations with data measures*, SIAM J. Math. Anal. **24** (1993), no. 1, 23-35. (Cité pages 10, 13, 16, 45, 66, 107, 134 et 136.)
- [2] N. Alaa, *Solution faibles d'équations paraboliques quasi-linéaires avec données initiales mesures*. Ann. Math. Blaise Pascal, **3** (1996), no. 2, 1-15. (Cité pages 12, 66, 84, 107 et 108.)
- [3] N. Alaa and I. Mounir, *Weak solutions for some reaction-diffusion systems with balance law and critical growth with respect to the gradient*, Ann. Math. Blaise Pascal, **8** (2001), no. 2, 1-19. (Cité pages 15, 45, 84, 85 et 107.)
- [4] N. Alaa and I. Mounir, *Global existence for reaction-diffusion systems with mass control and critical growth with respect to the gradient*, J. Math. Anal. Appl. **253** (2001), 532-557. (Cité pages 9, 36, 45, 73, 108, 113, 118 et 119.)
- [5] N. Alaa, I. Fatmi, J. R. Roche, and A. Tounsi, *Mathematical analysis for a model of nickel-iron alloy electrodeposition on rotating disk electrode : parabolic case*, Int. J. Math. Stat. **2** (2008), So8, 30-48. (Cité pages 11, 37, 38, 73, 84 et 107.)
- [6] N. Alaa, I. Fatmi, and M. Pierre, *Quasilinear elliptic degenerated equations with non linearity in the gradient and L^1 data*, Int. J. Math. Stat. Spring **8** (2011), S11, 62-69. (Cité pages 13, 38, 75, 84 et 107.)
- [7] N. D. Alikakos, *L^p -bounded of solutions of reaction-diffusion equations*, Comm. Partial Differential Equations, **4** (1979), 827-868. (Cité pages 6, 13, 27, 37, 38, 45, 77, 84, 107 et 108.)
- [8] P. Baras, *Non-unicité des solutions d'une équation d'évolution non-linéaire*, Ann. Fac. Sci. Toulous Math. **5** (1983), 287-302. (Cité pages 6, 16, 27, 66 et 107.)

- [9] A. Bensoussan, L. Boccardo, and F. Murat, *On a Nonlinear Partial Differential Equation Having Natural Growth Terms and Unbounded Solution*, Ann. Inst. Henri Poincaré, **5** (1989), no.4, 347-364, . (Cité pages 6, 26, 46, 84, 85, 117, 134 et 136.)
- [10] L. Boccardo, F. Murat, and J. P. Puel, *Existence de solutions faibles des équations elliptiques quasi-linéaires à croissance quadratique*. Nonlinear P.D.E. and their applications, collège de France Seminar, vol. IV, 19-73, ed. by H. Brezis & J. L. Lions, Research Notes in Mathematics **84**, Pitman, London, 1983. (Cité pages 9, 27, 32, 46, 47, 84, 85, 107, 108 et 134.)
- [11] L. Boccardo and T. Gallouet, *Strongly nonlinear elliptic equations having natural growth terms in L^1 data*, Nonlinear Anal. T.M.A., **19** (1992), 573-579. (Cité pages 6, 27, 45, 84, 85, 107 et 134.)
- [12] N. Boudiba, *Existence globale pour des systèmes de réaction-diffusion avec contrôle de masse*, Ph.D thesis, Université de Rennes 1, France, 1999. (Cité pages 11, 13, 16, 27, 45, 74, 84, 108, 109 et 134.)
- [13] N. Boudiba and M. Pierre, *Global existence for coupled Reaction-Diffusion Systems*, J. Math. Anal. Appl. **250** (2000), 1-12. (Cité pages 9, 37, 38, 66, 108 et 139.)
- [14] H. Brezis and W. Strauss, *Semi-linear elliptic equation in L^1* , J. Math. Soc. Japan, **25** (1973), 565-590. (Cité pages 9, 75, 87, 88, 107 et 135.)
- [15] W. E. Fitzgibbon, J. Morgan, and R. Sanders, *Global existence and boundedness for class of inhomogeneous semilinear parabolic systems*, Nonlinear Analysis. Theory methods and Applications, **19** (1992), no. 9, 885-899. (Cité pages 6, 38, 75, 84, 107, 134 et 135.)
- [16] S. L. Hollis, R. H. Martin, and M. Pierre, *Global existence and boundedness in reaction-diffusion systems*, SIAM J. Math. Anal. **18** (1987), 744-761. (Cité pages 11, 13, 28, 66, 108, 109 et 134.)
- [17] J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod-Gauthier Villars, (1969). (Cité pages 6, 30, 32, 45, 84, 94, 107 et 141.)

- [18] F. Maach, *Existence pour des systèmes de réaction-diffusion quasi-linéaires avec loi de balance*, Ph.D. thesis, Université Henri Poincaré, Nancy I, France, (1994). (Cité pages 6, 13, 14, 30, 66, 68, 69, 85, 87 et 108.)
- [19] R. H. Martin and M. Pierre, *Nonlinear reaction-diffusion systems*, in “Nonlinear Equations in the Applied Sciences”, ed. W. F. Ames, C. Rogers and Kapell, Academic Press (1991), Notes and reports in Mathematics in Science and Engineering. (Cité pages 11, 27, 69, 84, 85 et 108.)
- [20] M. Pierre and Schmitt, *Global existence for a reaction-diffusion system with a balance law*. Proc. of Curaçao Conf. on Semigroups of Nonlinear Operators and Applications, G.R. Goldstein ed., (1993). (Cité pages 16, 25, 27, 36, 74, 84 et 112.)
- [21] M. Pierre, *Global existence in reaction-diffusion systems with dissipation of mass : a survey*, to appear in Milan Journal of Mathematics. (Cité pages 6, 13, 14, 27, 38, 74, 84, 108 et 134.)
- [22] A. Porretta, *Existence for elliptic equations in L^1 having lower order terms with natural growth*, Portugaliae Math. **57** (2000), no. 2, 179-190. (Cité pages 1, 27, 38, 74, 84 et 107.)
- [23] F. Rothe, *Global Solutions of Reaction-Diffusion Systems*, Lectures Notes in Math. **1072**, Springer, New York, (1984). (Cité pages 6, 26, 38, 66, 68, 69, 84, 107, 108, 135 et 139.)
- [24] J. Smoller, *Shock waves and reaction-diffusion equations*, in Comprehensive Studies in Mathematics, **258**, Springer, New York (1984). (Cité pages 9, 26, 58, 84, 107, 139 et 144.)

EXISTENCE GLOBALE DE SOLUTIONS FAIBLES POUR DES SYSTÈMES $M \times M$ TRIANGULAIRES PARABOLIQUES DE RÉACTION-DIFFUSION AVEC EXPOSANT CRITIQUE EN GRADIENT

SOMMAIRE

4.1	INTRODUCTION	107
4.2	HYPOTHÈSES ET RÉSULTAT PRINCIPAL	109
4.2.1	Hypothèses	109
4.2.2	Résultat principal	110
4.3	PREUVE DU RÉSULTAT PRINCIPAL	111
4.3.1	Schéma approché	111
4.3.2	Estimations a priori	113
4.3.3	Convergence	117

Nous nous intéressons dans ce chapitre à l'existence de solutions faibles pour certaine classe de systèmes $m \times m$ quasi-linéaires tri-

angulaires paraboliques de réaction-diffusion. La positivité des solutions et la masse totale des composantes sont conservées avec le temps. L'originalité de cette étude persiste dans le fait que les non-linéarités de notre système ont une croissance critique en gradient de solutions.

Mots Clés. systèmes de réaction-diffusion, systèmes paraboliques, solutions faibles, troncature.

4.1 INTRODUCTION

Les mathématiques sont fortement impliquées dans le développement de la science. Ces interactions revitalisent et renforcent le champ de la science biomédicale et toutes les sciences, par conséquent, les mathématiciens doivent être impliqués dans la biologie comme toutes les importantes et excitantes découvertes scientifiques de tous les temps sont dans le domaine de la recherche biologique dans la biologie mathématique. Les meilleurs modèles montrent comment un processus marche et ensuite prévoient ce qui peut suivre, c'est ce qu'on essaie de décrire dans ce travail. Plusieurs méthodes ont été proposées pour l'étude de l'existence et la propriété qualitative des solutions. La majorité des travaux dans la littérature est dédiée aux systèmes elliptiques quasi-linéaires avec des conditions aux limites de Dirichlet ou de Neumann, voir Alaa et Mesbahi [7], Alikakos [8], Fitzgibbon et al. [17], Lions [22], et Rothe [28]. Tous ces travaux examinent les solutions classiques. Récemment, l'attention a été donnée aux solutions faibles des systèmes, et différentes méthodes pour le problème d'existence ont été utilisées, voir Alaa et Pierre [1], Alaa [2], Alaa et Mounir [3], Alaa et al. [5], Alaa et al. [6], Bensoussan et al. [10], Boccardo et al. [11], Boudiba [14], Boudiba et Pierre [15], Martin et Pierre [23], Pierre et Schmitt [24], Pierre [26], Porretta [27], etc..

Dans ce chapitre, nous prouvons l'existence de solutions faibles pour les systèmes paraboliques de réaction-diffusion de la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} - d_i \Delta u_i = f_i(t, x, u, \nabla u) & \text{dans } Q_T \\ u_i(0, x) = u_{i,0} & \text{dans } \Omega \\ u_i = 0 & \text{sur } \Sigma_T \end{cases}, \text{ pour } 1 \leq i \leq m \quad (1.4)$$

où $u = (u_1, \dots, u_m)$, $\nabla u = (\nabla u_1, \dots, \nabla u_m)$, $f = (f_1, \dots, f_m)$, $m \geq 2$ et Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière assez régulière $\partial\Omega$, $Q_T =]0, T[\times \Omega$, $\Sigma_T =]0, T[\times \partial\Omega$, $T > 0$, $-\Delta$ est l'opérateur de Laplace sur $L^1(\Omega)$ avec les conditions aux limites de Dirichlet, d_i , $1 \leq i \leq m$, sont des constantes positives, et les non-linéarités f_i , $1 \leq i \leq m$, ont de croissance critique par rapport à $|\nabla u|$. En outre, nous avons les hypothèses suivantes :

- La positivité de la solution est préservée au cours du temps, ce qui

est assuré par

$$\left\{ \begin{array}{l} f_i(\hat{u}_i) \geq 0, \text{ où} \\ \hat{u}_i = (t, x, u_1, \dots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \dots, u_m, p_1, \dots, p_{i-1}, 0, p_{i+1}, \dots, p_m), \\ \text{pour tout } 1 \leq i \leq m, (u, p) \in (\mathbb{R}^+)^m \times \mathbb{R}^{Nm} \text{ et } (t, x) \in Q_T, \text{ p.p.} \\ u_{i,0} \geq 0, \text{ pour tout } 1 \leq i \leq m \end{array} \right. \quad (2.4)$$

• La masse totale des composantes $u_1, \dots, u_m$ est contrôlée en fonction du temps, ce qui est assurée par

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{1 \leq i \leq r} f_i(t, x, u, p) \leq 0, \text{ pour tout } 1 \leq r \leq m, \\ \text{pour tout } (u, p) \in (\mathbb{R}^+)^m \times \mathbb{R}^{Nm} \text{ et } (t, x) \in Q_T, \text{ p.p.} \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Nous savons que si les non-linéarités f ne dépendent du gradient (système (1.4) est semi-linéaire), l'existence de solutions globales positives a été obtenue par Hollis et al. [18], Hollis et Morgan [19] et Martin et Pierre [23]. Nous pouvons voir que dans tous ces travaux, la structure triangulaire, à savoir l'hypothèse (3.4), joue un rôle important dans l'étude des systèmes semi-linéaires. En effet, si (3.4) n'est pas satisfaite, Pierre et Schmitt [25] ont prouvé l'explosion en temps fini des solutions de certains systèmes semi-linéaires de réaction-diffusion.

Lorsque $f = (f_1, f_2)$ dépend du gradient, Alaa et Mounir [4] ont résolu le problème où la structure triangulaire est satisfaite et la croissance de f_1 et f_2 par rapport à $|\nabla u_1|, |\nabla u_2|$ est sub-quadratique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{il existe } 1 \leq p < 2, C : [0, \infty)^2 \rightarrow [0, \infty) \text{ non décroissante,} \\ \text{telle que } |f_1| + |f_2| \leq C(|u_1|, |u_2|) (1 + |\nabla u_1|^p + |\nabla u_2|^p) \end{array} \right.$$

A propos de la croissance critique par rapport au gradient ($p = 2$), nous rappelons que dans le cas d'une seule équation ($d_1 = d_2$ et $f_1 = f_2$), des résultats d'existence ont été prouvés dans le cas elliptique Alaa [2] et Bensoussan et al. [10]. Les équations paraboliques correspondantes ont également été étudiées par de nombreux auteurs, voir par exemple Alaa [2], Boccardo et al. [12], Boccardo et Gallouet [13], Dall'aglio et Orsina [16], et Landes et Mustonen [21].

Ce travail représente une généralisation au cas parabolique de l'étude que nous avons fait (dans le chapitre précédent) dans le cas elliptique, voir Alaa et Mesbahi [7] pour ces systèmes d'ordre arbitraire. Ce passage

au cas parabolique, nécessite des nouvelles approches et des difficultés également techniques à surmonter.

Nous avons trouvé judicieux de présenter ce chapitre comme suit :

Nous commençons d'abord par cette introduction qui présente certains rappels sur les principaux résultats obtenus précédemment. Cela mettra en évidence la contribution de notre travail et son originalité. Dans la deuxième section, nous donnons la définition de la notion de solution utilisée ici. Nous présentons ensuite les principaux résultats de ce chapitre. Dans la dernière section, nous donnons la preuve de l'existence globale de solution faible de notre système, cela se fait en trois étapes : dans la première nous tronquons le système, dans la seconde nous donnons des estimations appropriées sur les solutions approchées et dans la dernière étape, nous montrons la convergence du système approché en utilisant les techniques introduites par Boccardo et al. [12] et Dall'Aglio et Orsina [16].

4.2 HYPOTHÈSES ET RÉSULTAT PRINCIPAL

4.2.1 Hypothèses

Tout d'abord, nous devons préciser dans quel sens nous voulons résoudre le problème (1.4) .

Définition 4.1 *Nous disons que $(u_1, \dots, u_m)$ est une solution de (1.4) si, pour tout $1 \leq i \leq m$*

$$\begin{cases} u_i \in C([0, T]; L^1(\Omega)) \cap L^1(0, T; W_0^{1,1}(\Omega)) \\ f_i(t, x, u, \nabla u) \in L^1(Q_T) \\ u_i(t) = S_{d_i}(t) u_0 + \int_0^t S_{d_i}(t-s) f_i(., s, u(s), \nabla u(s)) ds, \forall t \geq 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

où S_{d_i} , $1 \leq i \leq m$, désignent les semi-groupes dans $L^1(\Omega)$ générés par $-d_i \Delta$ avec conditions aux limites de Dirichlet.

Tout au long de ce chapitre, nous supposons que f satisfait les hypothèses suivantes, pour tout $1 \leq i \leq m$

$$f_i :]0, T[\times \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{mN} \rightarrow \mathbb{R} \text{ sont mesurables} \quad (5.4)$$

$$f_i : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{mN} \rightarrow \mathbb{R} \text{ sont localement lipschitzienne} \quad (6.4)$$

soit

$$\sum_{1 \leq i \leq m} |f_i(x, t, u, p) - f_i(x, t, \hat{u}, \hat{p})| \leq K(r) \left(\sum_{1 \leq i \leq m} |u_i - \hat{u}_i| + \sum_{1 \leq i \leq m} \|p_i - \hat{p}_i\| \right)$$

pour presque tout (t, x) et pour tout $0 \leq |u_i|, |\hat{u}_i|, \|p_i\|, \|\hat{p}_i\| \leq r$.

$$|f_1(t, x, u, \nabla u)| \leq C_1(|u_1|) \left(F_1(t, x) + \|\nabla u_1\|^2 + \sum_{2 \leq j \leq m} \|\nabla u_j\|^{\alpha_j} \right) \quad (7.4)$$

où $C_1 : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ est non décroissante, $F_1 \in L^1(Q_T)$ et $1 \leq \alpha_j < 2$.

$$|f_i(t, x, u, \nabla u)| \leq C_i \left(\sum_{j=1}^i |u_j| \right) \left(F_i(t, x) + \sum_{1 \leq j \leq m} \|\nabla u_j\|^2 \right) \quad (8.4)$$

où $C_i : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ est non décroissante, $F_i \in L^1(Q_T)$ pour tout $2 \leq i \leq m$.

Exemple

Un exemple typique où le résultat de ce chapitre peut être appliqué est

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} - d_i \Delta u_i = \sum_{1 \leq j \leq i} a_{ij} \frac{u_j}{\sum_{1 \leq k \leq m} u_k} |\nabla u_j|^2 + f_i(t, x) & \text{dans } Q_T \\ u_i(0, x) = u_{i,0} & \text{dans } \Omega \\ u_i = 0 & \text{sur } \Sigma_T \end{cases}, \quad 1 \leq i \leq m$$

4.2.2 Résultat principal

Théorème 4.1 *Supposons que (2.4), (3.4) et (5.4) – (8.4) sont satisfaites. Si $u_{i,0} \in L^2(\Omega)$, pour tout $1 \leq i \leq m$, alors il existe une solution positive globale $u = (u_1, \dots, u_m)$ du système (1.4). De plus, $u_1, \dots, u_m \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$.*

Avant de donner la preuve de ce théorème, nous allons définir les fonctions suivantes :

Étant donné un nombre réel k positif, nous posons

$$\begin{aligned} T_k(s) &= \max \{-k, \min(k, s)\} \\ G_k(s) &= s - T_k(s) \end{aligned}$$

Nous remarquons que pour $0 \leq s \leq k$, $T_k(s) = s$ et $T_k(s) = k$ pour $s > k$.

4.3 PREUVE DU RÉSULTAT PRINCIPAL

4.3.1 Schéma approché

Pour chaque fonction h définie de $\mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{mN}$ dans $\mathbb{R}$, nous associons $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}(t, x, u, p)$ telle que

$$\hat{\varphi} = \begin{cases} \varphi(t, x, u_1, \dots, u_m, p_1, \dots, p_m) & \text{si } u_i \geq 0, 1 \leq i \leq m \\ \varphi(t, x, u_1, \dots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \dots, u_m, p_1, \dots, p_m) & \text{si } u_i \leq 0 \text{ et } u_j \geq 0, j \neq i \\ \varphi(t, x, 0, \dots, 0, p_1, \dots, p_m) & \text{si } u_i \leq 0, 1 \leq i \leq m \end{cases}$$

et considérons le système

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} - d_i \Delta u_i = \hat{f}_i(t, x, u, \nabla u) & \text{dans }]0, +\infty[\times \Omega \\ u_i(0, x) = u_{i,0} & \text{dans } \Omega \\ u_i = 0 & \text{sur }]0, +\infty[\times \partial\Omega \end{cases}, 1 \leq i \leq m \quad (9.4)$$

Il est évidemment vu, par la structure de $\hat{f}_i$, $1 \leq i \leq m$, que les systèmes (1.4) et (9.4) sont équivalents sur l'ensemble où $u_i \geq 0$, $1 \leq i \leq m$. Par conséquent, pour démontrer le théorème 4.1, nous devons montrer que le problème (9.4) a une solution faible positive.

Pour ceci, nous définissons ψ_n une fonction de troncature par $\psi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $0 \leq \psi_n \leq 1$, et

$$\psi_n(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } |z| \leq n \\ 0 & \text{si } |z| \geq n+1 \end{cases}$$

Et la mollification par rapport à (t, x) est définie comme suit. Soit $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ telle que

$$\text{supp} \rho \subset B(0, 1), \quad \int \rho = 1, \quad \rho \geq 0 \text{ sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$$

et $\rho_n(y) = n^N \rho(ny)$. Nous pouvons voir que

$$\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N), \quad \text{supp} \rho_n \subset B\left(0, \frac{1}{n}\right), \quad \int \rho_n = 1, \quad \rho_n \geq 0 \text{ sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$$

Nous considérons aussi les suites non décroissantes $u_{i,0}^n \in C_c^\infty(\Omega)$ telles que

$$u_{i,0}^n \rightarrow u_{i,0} \text{ dans } L^2(\Omega), \quad 1 \leq i \leq m$$

et définissons pour tout (t, x, u, p) dans $\mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{mN}$ et $1 \leq i \leq m$,

$$f_{i,n}(t, x, u, p) = \left[\psi_n \left(\sum_{1 \leq j \leq m} (|u_j| + \|p_j\|) \right) f_i(t, x, u, p) \right] * \rho_n(t, x)$$

Notons que ces fonctions vérifient les mêmes propriétés que de f_i , $1 \leq i \leq m$, en outre, ils sont continue au sens de Hölder par rapport à (t, x) et $|f_{i,n}| \leq M_n$, $1 \leq i \leq m$, où M_n est une constante ne dépendant que de n (ces estimations peuvent être dérivées de (6.4), les propriétés du produit de convolution, et le fait que $\int \rho_n = 1$).

Considérons maintenant le système tronqué

$$\begin{cases} \frac{\partial u_{i,n}}{\partial t} - d_i \Delta u_{i,n} = f_{i,n}(x, t, u_n, \nabla u_n) & \text{dans } Q_T \\ u_{i,n}(0, x) = u_{i,0}^n & \text{dans } \Omega, \quad 1 \leq i \leq m \\ u_{i,n} = 0 & \text{sur } \Sigma_T \end{cases} \quad (10.4)$$

Il est bien connu que le problème (10.4) admet une solution globale classique, voir Ladyzhenskaya et al. [20] (théorème 7.1, p. 591) pour l'existence, et (corollaire du théorème 4.9, p. 341) pour la régularité des solutions. Il reste à montrer la positivité des solutions.

Lemme 4.1 *Soit $u_n = (u_{1,n}, \dots, u_{m,n})$ est une solution classique de (10.4) et supposons que $u_{1,0}^n, \dots, u_{m,0}^n \geq 0$. Alors $u_{1,n}, \dots, u_{m,n} \geq 0$*

Démonstration. Soit $\bar{u}_{i,n} = e^{-\lambda t} u_{i,n}$, $1 \leq i \leq m$ et $\lambda > 0$

Par (10.4), nous avons

$$\frac{\partial u_{i,n}}{\partial t} = e^{\lambda t} \left(\frac{\partial \bar{u}_{i,n}}{\partial t} + \lambda \bar{u}_{i,n} \right), \quad 1 \leq i \leq m$$

Par conséquent $(\bar{u}_{1,n}, \dots, \bar{u}_{m,n})$ est une solution du système

$$\begin{cases} \lambda \bar{u}_{i,n} + \frac{\partial \bar{u}_{i,n}}{\partial t} - d_i \Delta \bar{u}_{i,n} = e^{-\lambda t} f_{i,n} & \text{dans } Q_T \\ \bar{u}_{i,n}(x, 0) = u_{i,0}^n & \text{dans } \Omega, \quad 1 \leq i \leq m \\ \bar{u}_{i,n} = 0 & \text{sur } \Sigma_T \end{cases}$$

Soit $Z_{0,i} = (x_{0,i}, t_{0,i})$ le minimum de $\bar{u}_{i,n}$ sur Q_T , pour $1 \leq i \leq m$. Nous allons montrer que $\bar{u}_{i,n}(Z_{0,i}) \geq 0$ ce qui implique que $\bar{u}_{i,n} \geq 0$ sur Q_T et alors $u_{i,n} \geq 0$ sur Q_T .

Supposons le contraire, à savoir $\bar{u}_{i,n}(Z_{0,i}) < 0$

Par les propriétés du minimum, nous pouvons assurer que $Z_{0,i} \in]0, T] \times \Omega$ et

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_{i,n}}{\partial t}(Z_{0,i}) &= 0, \quad \nabla \bar{u}_{i,n}(Z_{0,i}) = 0, \quad \Delta \bar{u}_{i,n}(Z_{0,i}) \geq 0, \quad \text{si } 0 < t_{0,i} < T \\ \frac{\partial \bar{u}_{i,n}}{\partial t}(Z_{0,i}) &\leq 0, \quad \nabla \bar{u}_{i,n}(Z_{0,i}) = 0, \quad \Delta \bar{u}_{i,n}(Z_{0,i}) \geq 0, \quad \text{si } t_{0,i} = T \end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons

$$\begin{aligned} \lambda \bar{u}_{i,n}(Z_{0,i}) &= -\frac{\partial \bar{u}_{i,n}}{\partial t}(Z_{0,i}) + d_i \Delta \bar{u}_{i,n}(Z_{0,i}) + \\ &+ e^{-\lambda t_0} f_{i,n}(Z_{0,i}, \bar{u}_{1,n}(Z_{0,i}), \dots, \bar{u}_{m,n}(Z_{0,i}), \nabla \bar{u}_{1,n}(Z_{0,i}), \\ &\dots, \nabla \bar{u}_{(i-1),n}(Z_{0,i}), 0, \nabla \bar{u}_{(i+1),n}(Z_{0,i}), \dots, \nabla \bar{u}_{m,n}(Z_{0,i})) \end{aligned}$$

Maintenant, nous utilisons la structure de $\bar{u}_{i,n}(Z_{0,i})$ et l'hypothèse (3.4) pour écrire

$$\begin{aligned} &f_{i,n}(Z_{0,i}, \bar{u}_{1,n}(Z_{0,i}), \dots, \bar{u}_{m,n}(Z_{0,i}), \nabla \bar{u}_{1,n}(Z_{0,i}), \dots, \nabla \bar{u}_{(i-1),n}(Z_{0,i}), \\ &0, \nabla \bar{u}_{(i+1),n}(Z_{0,i}), \dots, \nabla \bar{u}_{m,n}(Z_{0,i})) = \\ &= f_{i,n}(Z_{0,i}, \bar{u}_{1,n}(Z_{0,i}), \dots, \bar{u}_{(i-1),n}(Z_{0,i}), 0, \bar{u}_{(i+1),n}(Z_{0,i}), \bar{u}_{m,n}(Z_{0,i}), \\ &\nabla \bar{u}_{1,n}(Z_{0,i}), \dots, \nabla \bar{u}_{(i-1),n}(Z_{0,i}), 0, \nabla \bar{u}_{(i+1),n}(Z_{0,i}), \dots, \nabla \bar{u}_{m,n}(Z_{0,i})) \geq 0 \end{aligned}$$

Cela implique que $\bar{u}_{i,n}(Z_{0,i}) \geq 0$, pour $1 \leq i \leq m$, ce qui est impossible par hypothèse. Nous obtenons la positivité de $(u_{1,n}, \dots, u_{m,n})$. Voir Alaa et Mounir [4]. $\square$

4.3.2 Estimations a priori

Les hypothèses (2.4) et (3.4) nous donne le lemme suivant :

Lemme 4.2 *Il existe une constante M dépendant de $\sum_{1 \leq j \leq m} \|u_{j,0}\|_{L^1(\Omega)}$ telle que*

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{1 \leq j \leq m} u_{j,n}(t) \right) \leq M, \text{ pour tout } t \in [0, T] \quad (11.4)$$

Démonstration. Nous considérons l'équation satisfaite par $\sum_{1 \leq j \leq m} u_{j,n}$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{1 \leq j \leq m} u_{j,n} \right) - \sum_{1 \leq j \leq m} d_j \Delta u_{j,n} = \sum_{1 \leq j \leq m} f_{j,n}$$

L'hypothèse (3.4) implique

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{1 \leq j \leq m} u_{j,n} \right) \leq \sum_{1 \leq j \leq m} d_j \Delta u_{j,n}$$

Puisque $u_{j,n} \geq 0$ pour tout $1 \leq j \leq m$ et l'opérateur Δ est dissipatif sur $L^1(\Omega)$, alors

$$\int_{\Omega} \Delta u_{j,n} \leq 0 \text{ pour tout } 1 \leq j \leq m \quad (12.4)$$

D'où

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{1 \leq j \leq m} u_{j,n} \right) \leq 0$$

L'intégration de cette inégalité sur $[0, t]$, pour tout $0 < t < T$, nous donne

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{1 \leq j \leq m} u_{j,n}(t) \right) \leq \int_{\Omega} \left(\sum_{1 \leq j \leq m} u_{j,0} \right) = \sum_{1 \leq j \leq m} \|u_{j,0}\|_{L^1(\Omega)}$$

Ceci termine la preuve du lemme. $\square$

Lemme 4.3 *Il existe une constante R_1 dépendant de $\sum_{1 \leq j \leq m} \|u_{j,0}\|_{L^1(\Omega)}$, telle que*

$$\sum_{1 \leq j \leq m} \int_{\Omega} |f_{j,n}(x, t, u_n, \nabla u_n)| \leq R_1$$

Démonstration. En considérant les équations satisfaites par $u_{i,n}$, $1 \leq i \leq m$, nous pouvons écrire

$$-f_{i,n} = -\frac{\partial u_{i,n}}{\partial t} + d_i \Delta u_{i,n}$$

En intégrant sur Q_T et en utilisant (12.4), la positivité des solutions donne

$$-\int_{Q_T} f_{i,n} \leq \int_{\Omega} u_{i,0} dx \text{ pour tout } 1 \leq i \leq m$$

Ainsi, par hypothèse (3.4)

$$\int_{Q_T} |f_{1,n}| \leq \int_{\Omega} u_{1,0} dx = \|u_{1,0}\|_{L^1(\Omega)} \quad (13.4)$$

De la même manière, on obtient, par hypothèse (3.4), pour tout $2 \leq j \leq m$

$$\int_{Q_T} \left| \sum_{1 \leq i \leq j} f_{i,n} \right| = \int_{Q_T} \left(- \sum_{1 \leq i \leq j} f_{i,n} \right) \leq \sum_{1 \leq i \leq j} \int_{\Omega} u_{i,0} dx = \sum_{1 \leq i \leq j} \|u_{i,0}\|_{L^1(\Omega)}$$

Alors

$$\int_{Q_T} |f_{j,n}| \leq \sum_{1 \leq i \leq j} (j - i + 1) \|u_{i,0}\|_{L^1(\Omega)}$$

$\square$

Lemme 4.4 (i) *Il existe une constante R_2 dépendant de k et $\sum_{1 \leq i \leq m} \|u_{i,0}\|_{L^1(\Omega)}$, telle que, pour tout $1 \leq j \leq m$*

$$\int_{Q_T} |\nabla T_k(u_{j,n})|^2 \leq R_2$$

(ii) *Il existe une constante R_3 dépendant de $\sum_{1 \leq i \leq r} \|u_{j,0}\|_{L^2(\Omega)}$, telle que, pour tout $2 \leq r \leq m$*

$$\int_{Q_T} \left| \nabla T_k \left(\sum_{1 \leq i \leq r} u_{j,n} \right) \right|^2 \leq R_3$$

Démonstration. (i) Nous multiplions la $j^{\text{ème}}$ équation dans (10.4) par $T_k(u_{j,n})$ et nous intégrons sur Q_T , il viens

$$\int_{\Omega} \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} u_{j,n} T_k(u_{j,n}) + d_j \int_{Q_T} |\nabla T_k(u_{j,n})|^2 \leq k \int_{Q_T} |f_{j,n}|$$

Alors

$$\int_{\Omega} S_k(u_{j,n}(T)) + d_j \int_{Q_T} |\nabla T_k(u_{j,n})|^2 \leq k \int_{Q_T} |f_{j,n}| + \int_{\Omega} S_k(u_{j,n}(0))$$

où $S_k(r) = \int_0^r T_k(s) ds$. Puisque

$$\begin{cases} S_k(u_{j,n}(T)) \geq 0, \\ |S_k(r)| \leq \frac{k^2}{2} + k(r-k)^+, \text{ pour tout } r \geq 0 \end{cases}$$

En utilisant le résultat du lemme 4.3, nous avons

$$\begin{aligned} d_j \int_{Q_T} |\nabla T_k(u_{j,n})|^2 &\leq k \int_{Q_T} |f_{j,n}| + \int_{\Omega} \left(\frac{k^2}{2} + k(u_{j,n}(0) - k)^+ \right) \\ &\leq kR_1 + \frac{k^2}{2} |\Omega| + \int_{\Omega} (u_{j,n}(0) - k)^+ \leq C(k, \|u_{j,n}(0)\|) \end{aligned}$$

(ii) Nous considérons l'équation satisfaite par $\sum_{1 \leq j \leq r} u_{j,n}$, $2 \leq r \leq m$, et nous utilisons l'hypothèse (3.4), nous obtenons

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{1 \leq j \leq r} u_{j,n} \right) - d_r \Delta \left(\sum_{1 \leq j \leq r} u_{j,n} \right) + \left(\sum_{1 \leq j \leq r-1} (d_r - d_j) \Delta u_{j,n} \right) = \sum_{1 \leq j \leq r} f_{j,n}$$

Notons $U_{r,n} = \sum_{1 \leq j \leq r} u_{j,n}$, il viens

$$\frac{\partial U_{r,n}}{\partial t} - d_r \Delta U_{r,n} + \sum_{1 \leq j \leq r-1} (d_r - d_j) \Delta u_{j,n} \leq 0$$

Maintenant, nous multiplions par $T_k(U_{r,n})$, et nous intégrons sur Q_T , nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} T_k(U_{r,n}) \frac{\partial U_{r,n}}{\partial t} + d_r \int_{Q_T} |\nabla T_k(U_{r,n})|^2 + \\ \sum_{1 \leq j \leq r-1} (d_r - d_j) \int_{Q_T} \nabla T_k(U_{r,n}) \nabla T_k(u_{j,n}) \leq 0 \end{aligned}$$

Alors

$$d_r \int_{Q_T} |\nabla T_k(U_{r,n})|^2 + \sum_{1 \leq j \leq r-1} (d_r - d_j) \int_{Q_T} \nabla T_k(U_{r,n}) \nabla T_k(u_{j,n}) \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} U_{r,n}^2(0)$$

Ce qui nous donne

$$d_r \int_{Q_T} |T_k(U_{r,n})|^2 \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} U_{r,n}^2(0) +$$

$$\sum_{1 \leq j \leq r-1} \left(|d_r - d_j| \int_{Q_T} |\nabla T_k(U_{r,n})| \cdot |\nabla T_k(u_{j,n})| \right)$$

En utilisant l'inégalité de Young, nous avons

$$\begin{aligned} d_r \int_{Q_T} |T_k(U_{r,n})|^2 &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} U_{r,n}^2(0) + \\ &\sum_{1 \leq j \leq r-1} \left(\frac{1}{2} |d_r - d_j| \int_{Q_T} [|T_k(U_{r,n})|^2 + |\nabla T_k(u_{j,n})|^2] \right) \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} &\left(d_r - \frac{1}{2} \sum_{1 \leq j \leq r-1} |d_r - d_j| \right) \int_{Q_T} |\nabla T_k(U_{r,n})|^2 \leq \\ &\frac{1}{2} \int_{\Omega} U_{r,n}^2(0) + \sum_{1 \leq j \leq r-1} \left(\frac{1}{2} |d_r - d_j| \int_{Q_T} |\nabla T_k(u_{j,n})|^2 \right) \end{aligned}$$

Par (i), nous avons

$$(d_r - \varepsilon_k) \int_{Q_T} |\nabla T_r(U_{k,n})|^2 \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} U_{r,n}^2(0) + \frac{1}{2} R_2 \sum_{2 \leq j \leq r-1} |d_r - d_j|$$

□

Lemme 4.5 *Il existe une constante R_4 dépendant de $\sum_{1 \leq j \leq m} \|u_{j,0}\|_{L^2(\Omega)}$ et $d_1, \dots, d_m$ telle que, pour tout $1 \leq j \leq m$*

$$\int_{Q_T} |f_{j,n}(x, t, u_n, \nabla u_n)| \left(\sum_{1 \leq r \leq m} (m - r + 1) u_{k,n} \right) \leq R_4$$

Démonstration. Nous définissons pour tout $2 \leq r \leq m$

$$R_{r,n} = - \sum_{1 \leq j \leq r} f_{j,n}$$

et

$$\theta_n = \sum_{1 \leq r \leq m} (m - r + 1) u_{r,n} \quad , \quad z_n = \sum_{1 \leq r \leq m} (m - r + 1) d_r u_{r,n}$$

Nous avons par hypothèse (3.4)

$$R_{r,n} \geq 0, \text{ pour tout } 2 \leq r \leq m$$

En combinant les équations du système (10.4), nous avons

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta_n - \Delta z_n + |f_{1,n}| + \sum_{2 \leq r \leq m} R_{r,n} = 0$$

En multipliant par θ_n et en intégrant sur Q_T , il viens

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \theta_n^2(T) + \int_{Q_T} \nabla z_n \nabla \theta_n + \int_{Q_T} \theta_n |f_{1,n}| +$$

$$\sum_{2 \leq r \leq m} \int_{Q_T} \theta_n R_{r,n} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \theta_n^2(0)$$

Alors

$$\int_{Q_T} \nabla z_n \nabla \theta_n + \int_{Q_T} \theta_n |f_{1,n}| + \sum_{2 \leq r \leq m} \int_{Q_T} \theta_n R_{r,n} \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \theta_n^2(0)$$

D'où

$$\int_{Q_T} \theta_n |f_{1,n}| + \sum_{2 \leq r \leq m} \int_{Q_T} \theta_n R_{r,n} \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \theta_n^2(0) + \int_{Q_T} |\nabla z_n| \cdot |\nabla \theta_n|$$

En utilisant l'inégalité de Young, nous concluons que

$$\int_{Q_T} \theta_n |f_{1,n}| + \sum_{2 \leq r \leq m} \int_{Q_T} \theta_n R_{r,n} \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \theta_n^2(0) +$$

$$\frac{1}{2} \int_{Q_T} [|\nabla z_n|^2 + |\nabla \theta_n|^2] \leq C$$

Alors

$$\int_{Q_T} \theta_n |f_{1,n}| \leq C \text{ et } \sum_{2 \leq r \leq m} \int_{Q_T} \theta_n \left| \sum_{1 \leq j \leq r} f_{j,n} \right| \leq C \text{ pour } 2 \leq r \leq m \quad (14.4)$$

Nous avons par (14.4)

$$\int_{Q_T} \theta_n |f_{2,n}| \leq \int_{Q_T} \theta_n |f_{1,n} + f_{2,n}| + \int_{Q_T} \theta_n |f_{1,n}| \leq \tilde{C}$$

et pour tout $2 \leq k \leq m$, nous avons

$$\int_{Q_T} \theta_n |f_{k,n}| \leq \int_{Q_T} \theta_n \left| \sum_{1 \leq j \leq k} f_{j,n} \right| + \int_{Q_T} \theta_n \left| \sum_{1 \leq j \leq k-1} f_{j,n} \right| \leq \tilde{C}$$

Ce qui nous donne le résultat. $\square$

4.3.3 Convergence

Notre objectif est de montrer que $u_n = (u_{1,n}, \dots, u_{m,n})$ converge vers une certaine $u = (u_1, \dots, u_m)$ solution du problème (4.4). Les suites $u_{1,0}^n, \dots, u_{m,0}^n$ sont uniformément bornées dans $L^1(\Omega)$ (car elles convergent dans $L^2(\Omega)$), et par le lemme 4.3, les non-linéarités $f_{1,n}, \dots, f_{m,n}$ sont uniformément bornées dans $L^1(Q_T)$. Alors selon un résultat dans Baras et al. [9] les applications

$$(u_{i,0}^n, f_{i,n}) \rightarrow u_{i,n}, \quad 1 \leq i \leq m$$

sont compactes de $L^1(\Omega) \times L^1(Q_T)$ dans $L^1(0, T; W_0^{1,1}(\Omega))$.

Par conséquent, nous pouvons extraire une sous-suite, encore notée $(u_{1,n}, \dots, u_{m,n})$, telle que

$$\begin{aligned} (u_{1,n}, \dots, u_{m,n}) &\rightarrow (u_1, \dots, u_m) && \text{dans } L^1(0, T; W_0^{1,1}(\Omega)) \\ (u_{1,n}, \dots, u_{m,n}) &\rightarrow (u_1, \dots, u_m) && \text{dans } Q_T, \text{ p.p.} \\ (\nabla u_{1,n}, \dots, \nabla u_{m,n}) &\rightarrow (\nabla u_1, \dots, \nabla u_m) && \text{dans } Q_T, \text{ p.p.} \end{aligned}$$

Puisque $f_{1,n}, \dots, f_{m,n}$ sont continues, nous avons

$$f_{i,n}(t, x, u_n, \nabla u_n) \rightarrow f_i(t, x, u, \nabla u) \quad \text{dans } Q_T, \text{ p.p., } 1 \leq i \leq m$$

Ce n'est pas suffisant pour assurer que $(u_1, \dots, u_m)$ est une solution de (4.4). En effet, nous devons prouver que les convergences précédentes sont dans $L^1(Q_T)$. Compte tenu du théorème de la convergence de Vitali, montrer que $f_{i,n}(t, x, u_n, \nabla u_n)$, $1 \leq i \leq m$, converge vers $f_i(t, x, u, \nabla u)$ dans $L^1(Q_T)$, est équivalent à prouver que $f_{i,n}(t, x, u_n, \nabla u_n)$, $1 \leq i \leq m$ sont équi-intégrables dans $L^1(Q_T)$.

Lemme 4.6 $f_{i,n}(t, x, u_n, \nabla u_n)$, pour tout $1 \leq i \leq m$, sont équi-intégrables dans $L^1(Q_T)$.

La preuve de ce lemme nécessite le résultat suivant basé sur certaines propriétés de régularisations temporelles notées u_γ and u_σ ($\gamma, \sigma > 0$) que nous définissons pour une fonction $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ telle que $u(0) = u_0 \in L^2(\Omega)$ (pour plus de détails, voir Alaa et Mounir [4]). Dans ce qui suit nous noterons $\omega(\varepsilon)$ une quantité qui tend vers zéro quand ε tend vers zéro, et $\omega^\sigma(\varepsilon)$ une quantité qui tend vers zéro pour chaque σ fixe quand ε tend vers zéro.

Lemme 4.7 Soit (u_n) une suite dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T])$ telle que $u_n(0) = u_0^n \in L^2(\Omega)$ et $(u_n)_t = \rho_{1,n} + \rho_{2,n}$ avec $\rho_{1,n} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ et $\rho_{2,n} \in L^1(Q_T)$. En outre, supposons que u_n converge vers u dans $L^2(Q_T)$, et u_0^n converge vers $u(0)$ dans $L^2(\Omega)$.

Soit Ψ est une fonction dans $C^1([0, T])$ telle que $\Psi \geq 0$, $\Psi' \leq 0$, $\Psi(T) = 0$. Soit φ est une fonction lipschitzienne croissante dans $C^0(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(0) = 0$.

Alors pour tout $k, \gamma > 0$,

$$\begin{aligned} & \left\langle \rho_{1n}, \Psi \varphi \left(T_k(u_n) - T_k(u_m)_\gamma \right) \right\rangle + \int_{Q_T} \Psi \varphi \left(T_k(u_n) - T_k(u_m)_\gamma \right) \geq \\ & \geq \omega^{\gamma,n} \left(\frac{1}{m} \right) + \omega^\gamma \left(\frac{1}{n} \right) + \int_{Q_T} \Psi(0) \Phi \left(T_k(u) - T_k(u_m)_\gamma \right) (0) dx \\ & - \int_{Q_T} G_k(u)(0) \Psi(0) \varphi \left(T_k(u) - T_k(u_m)_\gamma \right) (0) dx \end{aligned}$$

où $\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s) ds$ et $G_k(s) = s - T_k(s)$.

Démonstration. (Voir Alaa et Mounir [4], lemme 7, p 544). $\square$

Lemme 4.8 Supposons que $u_{j,n}, u_j, 1 \leq j \leq m$, sont comme ci-dessus

i) Si

$$|f_{1,n}| \leq C_1(|u_{1,n}|) \left(F_1(t, x) + |\nabla u_{1,n}|^2 + \sum_{2 \leq j \leq m} |\nabla u_j|^{\alpha_j} \right) \quad (15.4)$$

où $C_1 : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ est non décroissante, $F_1 \in L^1(Q_T)$ et $1 \leq \alpha_j < 2$.

Alors, pour chaque k fixe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Q_T} |\nabla T_k(u_{1,n}) - \nabla T_k(u_1)|^2 \chi_{\left[\sum_{1 \leq j \leq m} u_{j,n} \leq k \right]} = 0$$

ii) Si

$$|f_{i,n}(t, x, u, \nabla u)| \leq C_i \left(\sum_{j=1}^i |u_j| \right) \left(F_i(t, x) + \sum_{1 \leq j \leq m} |\nabla u_j|^2 \right) \quad (16.4)$$

où $C_i : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ est non décroissante, $F_i \in L^1(Q_T)$ pour tout $2 \leq i \leq m$.

Alors, pour chaque k fixe et pour tout $2 \leq i \leq m$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Q_T} \left| \nabla T_k \left(\sum_{1 \leq j \leq i} u_{j,n} \right) - \nabla T_k \left(\sum_{1 \leq j \leq i} u_j \right) \right|^2 \chi_{\left[\sum_{1 \leq j \leq m} u_{j,n} \leq k \right]} = 0$$

Démonstration. (i) Il s'agit d'une conséquence directe d'un résultat établi dans Alaa et Mounir [4] dans le cas d'un système 2×2 (voir la preuve du lemme 6, p 548). La généralisation dans le cas d'un système $m \times m$ est immédiate.

(ii) Soient k et γ sont des nombres réels positifs, soit $\ell \in \mathbb{N}$, et choisissons Ψ comme dans le lemme précédent. Soit $\varphi(s) = s \exp(\mu s^2)$, avec μ sera fixée ultérieurement. Considérons l'équation satisfaite par $(u_{1,n} + u_{2,n})$.

$$\frac{\partial}{\partial t} (u_{1,n} + u_{2,n}) = d_2 \Delta (u_{1,n} + u_{2,n}) - (d_2 - d_1) \Delta u_{1,n} + f_{1,n} + f_{2,n}$$

et nous utilisons $\Psi \varphi \left(T_k(u_{1,n} + u_{2,n}) - T_k(u_{1,n} + u_{2,n})_\gamma \right)$ comme une fonction test, puis nous allons intégrer sur Q_T . Enfin, nous allons utiliser le lemme 4.7 pour obtenir le résultat.

Par simplicité, nous noterons

$$U_{r,n} = \sum_{1 \leq j \leq r} u_{j,n} \quad , \quad U_r = \sum_{1 \leq j \leq r} u_j \quad \text{pour tout } 2 \leq r \leq m$$

Puisque $\frac{\partial}{\partial t} (U_{2,n}) = \rho_{1,n}^{(2)} + \rho_{2,n}^{(2)}$ où

$$\begin{cases} \rho_{1,n}^{(2)} = d_2 \Delta (U_{2,n}) - (d_2 - d_1) \Delta u_{1,n} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \\ \rho_{2,n}^{(2)} = f_{1,n} + f_{2,n} \in L^1(Q_T) \end{cases}$$

nous avons par le lemme 4.7

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial t} (U_{2,n}) \Psi \varphi \left(T_k(U_{2,n}) - T_k(U_{2,\ell})_\gamma \right) \geq \\ & \omega^{\gamma,n} \left(\frac{1}{\ell} \right) + \omega^\gamma \left(\frac{1}{n} \right) - \int_{\Omega} \Psi(0) \Phi \left(T_k(U_2) - T_k(U_2)_\gamma \right) dx \\ & - \int_{\Omega} G_k(U_2)(0) \Psi(0) \varphi \left(T_k(U_2) - T_k(U_2)_\gamma \right) (0) dx \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} I + J + \lambda + \beta = & d_2 \int_{Q_T} \nabla (U_{2,n}) \Psi \varphi' \left(T_k(U_{2,n}) - T_k(U_{2,\ell})_\gamma \right) \nabla \left(T_k(U_{2,n}) - T_k(U_{2,\ell})_\gamma \right) \\ & - \int_{Q_T} (f_{1,n} + f_{2,n}) \Psi \varphi \left(T_k(U_{2,n}) - T_k(U_{2,\ell})_\gamma \right) \\ & - (d_2 - d_1) \int_{Q_T} (\nabla u_{1,n} - \nabla u_1) \Psi \varphi' \left(T_k(U_{2,n}) - T_k(U_{2,\ell})_\gamma \right) \nabla \left(T_k(U_{2,n}) - T_k(U_{2,\ell})_\gamma \right) \\ & - (d_2 - d_1) \int_{Q_T} \nabla u_1 \Psi \varphi' \left(T_k(U_{2,n}) - T_k(U_{2,\ell})_\gamma \right) \nabla \left(T_k(U_{2,n}) - T_k(U_{2,\ell})_\gamma \right) \\ & \leq \omega^{\gamma,n} \left(\frac{1}{\ell} \right) + \omega^\gamma \left(\frac{1}{n} \right) + \int_{\Omega} \Psi(0) \Phi \left(T_k(U_2) - T_k(U_2)_\gamma \right) \\ & \quad + \int_{\Omega} G_k(U_2)(0) \Psi(0) \varphi \left(T_k(U_2) - T_k(U_2)_\gamma \right) (0) \\ & \leq \omega^{\gamma,n} \left(\frac{1}{\ell} \right) + \omega^\gamma \left(\frac{1}{n} \right) + \omega \left(\frac{1}{\gamma} \right) \end{aligned}$$

puisque $T_k(U_2)_\gamma \rightarrow T_k(U_2)$ dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ faiblement.

Le terme I peut s'écrire

$$\begin{aligned} I &= d_2 \int_{Q_T} \nabla (U_{2,n}) \Psi \varphi' \left(T_k(U_{2,n}) - T_k(U_{2,\ell})_\gamma \right) \nabla \left(T_k(U_{2,n}) - T_k(U_{2,\ell})_\gamma \right) \\ & \quad + d_2 \int_{E_n \geq k} \nabla (U_{2,n}) \Psi \varphi' \left(T_k(U_{2,n}) - T_k(U_{2,\ell})_\gamma \right) \nabla \left(T_k(U_{2,n}) - T_k(U_{2,\ell})_\gamma \right) \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

Pour I_2 , nous avons

$$\begin{aligned}
I_2 &= -d_2 \int_{E_n \geq k} \nabla (U_{2,n}) \Psi \varphi' \left(T_k (U_{2,n}) - T_k (U_{2,\ell})_\gamma \right) \nabla \left(T_k (U_{2,\ell})_\gamma \right) \chi_{[E_n \geq k]} \\
&= \omega^{\gamma,n} \left(\frac{1}{\ell} \right) - d_2 \int_{Q_T} \nabla (U_{2,n}) \Psi \varphi' \left(T_k (U_{2,n}) - T_k (U_{2,\ell})_\gamma \right) \nabla \left(T_k (U_2)_\gamma \right) \chi_{[E_n \geq k]} \\
&= \omega^{\gamma,n} \left(\frac{1}{\ell} \right) - d_2 \int_{Q_T} \nabla (U_{2,n}) \Psi \varphi' \left(T_k (U_{2,n}) - T_k (U_2)_\gamma \right) \nabla \left(T_k (U_2)_\gamma \right) \chi_{[E_n \geq k]} \chi_{[E \geq k]} \\
&\quad - d_2 \int_{Q_T} \nabla (U_{2,n}) \Psi \varphi' \left(T_k (U_{2,n}) - T_k (U_2)_\gamma \right) \nabla \left(T_k (U_2)_\gamma \right) \chi_{[E_n \geq k]} \chi_{[E < k]} \\
&= \omega^{\gamma,n} \left(\frac{1}{\ell} \right) + I_{2.1} + I_{2.2}
\end{aligned}$$

Pour $I_{2.1}$, nous avons par l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}
|I_{2.1}| &\leq d_2 \left\| \nabla (U_{2,n}) \varphi' \left(T_k (U_{2,n}) - T_k (U_2)_\gamma \right) \right\|_{L^2(Q_T)} \times \\
&\quad \left\| \nabla \left(T_k (U_2)_\gamma \right) \chi_{[E \geq k]} \right\|_{L^2(Q_T)}
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\varphi' \left(T_k (U_{2,n}) - T_k (U_2)_\gamma \right) \leq \varphi' (2k)$ et le lemme 4.4, nous obtenons

$$|I_{2.1}| \leq d_2 C \left\| \nabla \left(T_k (U_2)_\gamma \right) \chi_{[E \geq k]} \right\|_{L^2(Q_T)} = \omega \left(\frac{1}{\gamma} \right)$$

puisque $T_k (U_2)_\gamma \rightarrow T_k (U_2)$ dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ et $\nabla T_k (U_2) \chi_{[E \geq k]} = 0$ dans Q_T , p.p.

Maintenant, nous étudions le terme $I_{2.2}$

$$\begin{aligned}
I_{2.2} &= -d_2 \int_{Q_T} \nabla (U_{2,n}) \Psi \varphi' \left(T_k (U_{2,n}) - T_k (U_2)_\gamma \right) \nabla \left(T_k (U_2)_\gamma \right) \chi_{[E_n \geq k]} \chi_{[E < k]} \\
&= \omega^\gamma \left(\frac{1}{n} \right)
\end{aligned}$$

puisque $\chi_{[E_n \geq k]} \chi_{[E < k]} \rightarrow 0$ dans Q_T , p.p., ainsi

$$I_2 \geq \omega^{\gamma,n} \left(\frac{1}{\ell} \right) + \omega^\gamma \left(\frac{1}{n} \right) + \omega \left(\frac{1}{\gamma} \right)$$

Pour I_1

$$\begin{aligned}
I_1 &= \omega^{\gamma,n} \left(\frac{1}{\ell} \right) \\
&\quad + d_2 \int_{Q_T} \nabla T_k (U_{2,n}) \Psi \varphi' \left(T_k (U_{2,n}) - T_k (U_2)_\gamma \right) \nabla \left(T_k (U_{2,n}) - T_k (U_2)_\gamma \right) \\
&= \omega^{\gamma,n} \left(\frac{1}{\ell} \right) \\
&\quad + d_2 \int_{Q_T} \nabla T_k (U_2) \Psi \varphi' \left(T_k (U_{2,n}) - T_k (U_2)_\gamma \right) \nabla \left(T_k (U_{2,n}) - T_k (U_2)_\gamma \right) \\
&\quad + d_2 \int_{Q_T} \left[\nabla \left(T_k (U_{2,n}) - T_k (U_2) \right) \Psi \varphi' \left(T_k (U_{2,n}) - T_k (U_2)_\gamma \right) \times \right. \\
&\quad \left. \nabla \left(T_k (U_{2,n}) - T_k (U_2)_\gamma \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \omega^{\gamma,n} \left(\frac{1}{\ell} \right) + \omega^\gamma \left(\frac{1}{n} \right) \\
&\quad + d_2 \int_{Q_T} \nabla T_k(U_2) \Psi \varphi' \left(T_k(U_2) - T_k(U_2)_\gamma \right) \nabla \left(T_k(U_2) - T_k(U_2)_\gamma \right) \\
&\quad + d_2 \int_{Q_T} \left[\nabla (T_k(U_{2,n}) - T_k(U_2)) \Psi \varphi' \left(T_k(U_{2,n}) - T_k(U_2)_\gamma \right) \times \right. \\
&\quad \left. \nabla \left(T_k(U_{2,n}) - T_k(U_2)_\gamma \right) \right] \\
&= \omega^{\gamma,n} \left(\frac{1}{\ell} \right) + \omega^\gamma \left(\frac{1}{n} \right) + \omega \left(\frac{1}{\gamma} \right) + \\
&\quad d_2 \int_{Q_T} |\nabla (T_k(U_{2,n}) - T_k(U_2))|^2 \Psi \varphi' \left(T_k(U_{2,n}) - T_k(U_2)_\gamma \right) + \\
&\quad d_2 \left[\int_{Q_T} \nabla (T_k(U_{2,n}) - T_k(U_2)) \Psi \varphi' \left(T_k(U_{2,n}) - T_k(U_2)_\gamma \right) \times \right. \\
&\quad \left. \nabla \left(T_k(U_2) - T_k(U_2)_\gamma \right) \right] \\
&= \omega^{\gamma,n} \left(\frac{1}{\ell} \right) + \omega^\gamma \left(\frac{1}{n} \right) + \omega \left(\frac{1}{\gamma} \right) \\
&\quad + d_2 \int_{Q_T} |\nabla (T_k(U_{2,n}) - T_k(U_2))|^2 \Psi \varphi' \left(T_k(U_{2,n}) - T_k(U_2)_\gamma \right)
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
I &\geq \omega^{\gamma,n} \left(\frac{1}{\ell} \right) + \omega^\gamma \left(\frac{1}{n} \right) + \omega \left(\frac{1}{\gamma} \right) \\
&\quad + d_2 \int_{Q_T} |\nabla (T_k(U_{2,n}) - T_k(U_2))|^2 \Psi \varphi' \left(T_k(U_{2,n}) - T_k(U_2)_\gamma \right)
\end{aligned}$$

Pour J , nous avons

$$\begin{aligned}
J &= \omega^{\gamma,n} \left(\frac{1}{\ell} \right) - \int_{Q_T} (f_{1,n} + f_{2,n}) \Psi \varphi \left(T_k(U_{2,n}) - T_k(U_2)_\gamma \right) \\
&= \omega^{\gamma,n} \left(\frac{1}{\ell} \right) - \int_{E_n > k} (f_{1,n} + f_{2,n}) \Psi \varphi \left(T_k(U_{2,n}) - T_k(U_2)_\gamma \right) \\
&\quad - \int_{E_n \leq k} (f_{1,n} + f_{2,n}) \Psi \varphi \left(T_k(U_{2,n}) - T_k(U_2)_\gamma \right)
\end{aligned}$$

Alors

$$J \geq \omega^{\gamma,n} \left(\frac{1}{\ell} \right) - \int_{E_n \leq k} (f_{1,n} + f_{2,n}) \Psi \varphi \left(T_k(U_{2,n}) - T_k(U_2)_\gamma \right)$$

puisque $\varphi \left(T_k(U_{2,n}) - T_k(U_2)_\gamma \right) \geq 0$ sur $[E_n > k]$, $\Psi \geq 0$ et

– $(f_{1,n} + f_{2,n}) \geq 0$ par hypothèse (3.4). D'autre part

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\{E_n \leq k\}} (f_{1,n} + f_{2,n}) \Psi \varphi \left(T_k(U_{2,n}) - T_k(U_2)_\gamma \right) \right| \leq \\
& \leq C_1(k) \int_{\{E_n \leq k\}} F_1(t, x) \Psi \left| \varphi \left(T_k(U_{2,n}) - T_k(U_2)_\gamma \right) \right| \\
& + C_1(k) \sum_{2 \leq j \leq m} \int_{\{E_n \leq k\}} |\nabla u_{j,n}|^{\alpha_j} \Psi \left| \varphi \left(T_k(U_{2,n}) - T_k(U_2)_\gamma \right) \right| \\
& + C_1(k) \int_{\{E_n \leq k\}} |\nabla T_k(u_{1,n})|^2 \Psi \left| \varphi \left(T_k(U_{2,n}) - T_k(U_2)_\gamma \right) \right| \\
& + C_2(k) \int_{\{E_n \leq k\}} F_2(t, x) \Psi \left| \varphi \left(T_k(U_{2,n}) - T_k(U_2)_\gamma \right) \right| \\
& + C_2(k) \sum_{1 \leq j \leq m} \int_{\{E_n \leq k\}} |\nabla T_k(u_{j,n})|^2 \Psi \left| \varphi \left(T_k(U_{2,n}) - T_k(U_2)_\gamma \right) \right| \\
& = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5
\end{aligned}$$

Nous avons établi que

$$\begin{aligned}
J_1 &= C_1(k) \int_{\{E_n \leq k\}} F_1(t, x) \Psi \left| \varphi \left(T_k(U_{2,n}) - T_k(U_2)_\gamma \right) \right| \\
&= \omega^\gamma \left(\frac{1}{n} \right) + \omega \left(\frac{1}{\gamma} \right)
\end{aligned}$$

De même, pour J_4

$$\begin{aligned}
J_4 &= C_2(k) \int_{\{E_n \leq k\}} F_2(t, x) \Psi \left| \varphi \left(T_k(U_{2,n}) - T_k(U_2)_\gamma \right) \right| \\
&= \omega^\gamma \left(\frac{1}{n} \right) + \omega \left(\frac{1}{\gamma} \right)
\end{aligned}$$

Puisque $1 \leq \alpha_j < 2$, pour tout $2 \leq j \leq m$, nous avons

$$\begin{aligned}
J_2 &= C_1(k) \sum_{2 \leq j \leq m} \int_{\{E_n \leq k\}} |\nabla u_j|^{\alpha_j} \Psi \left| \varphi \left(T_k(U_{2,n}) - T_k(U_2)_\gamma \right) \right| \\
&= \omega^\gamma \left(\frac{1}{n} \right) + \omega \left(\frac{1}{\gamma} \right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
J_3 &= C_1(k) \int_{\{E_n \leq k\}} |\nabla T_k(u_{1,n})|^2 \Psi \left| \varphi \left(T_k(U_{2,n}) - T_k(U_2)_\gamma \right) \right| \\
&= C_1(k) \int_{\{E_n \leq k\}} |\nabla (T_k(u_{1,n}) - T_k(u_1))|^2 \Psi \left| \varphi \left(T_k(U_{2,n}) - T_k(U_2)_\gamma \right) \right| \\
&\quad + 2C_1(k) \int_{\{E_n \leq k\}} \nabla T_k(u_{1,n}) \nabla T_k(u_1) \Psi \left| \varphi \left(T_k(U_{2,n}) - T_k(U_2)_\gamma \right) \right| \\
&\quad - C_1(k) \int_{\{E_n \leq k\}} |\nabla T_k(u_1)|^2 \Psi \left| \varphi \left(T_k(U_{2,n}) - T_k(U_2)_\gamma \right) \right| \\
&= \omega^\gamma \left(\frac{1}{n} \right) + \omega \left(\frac{1}{\gamma} \right) \\
&\quad + C_1(k) \int_{\{E_n \leq k\}} |\nabla (T_k(u_{1,n}) - T_k(u_1))|^2 \Psi \left| \varphi \left(T_k(U_{2,n}) - T_k(U_2)_\gamma \right) \right|
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} J_5 &= C_2(k) \sum_{1 \leq j \leq m} \int_{\{E_n \leq k\}} |\nabla T_k(u_{j,n})|^2 \Psi \left| \varphi \left(T_k(U_{2,n}) - T_k(U_2)_\gamma \right) \right| \\ &= \omega^\gamma \left(\frac{1}{n} \right) + \omega \left(\frac{1}{\gamma} \right) \end{aligned}$$

puisque

$$\int_{\{E_n \leq k\}} |\nabla T_k(u_{j,n})|^2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\{E_n \leq k\}} |\nabla T_k(u_{j,n})|^2 \right) \leq R_2$$

Ainsi

$$\begin{aligned} & - \int_{\{E_n \leq k\}} (f_{1,n} + f_{2,n}) \Psi \varphi \left(T_k(U_{2,n}) - T_k(U_2)_\gamma \right) \geq \omega^\gamma \left(\frac{1}{n} \right) + \omega \left(\frac{1}{\gamma} \right) \\ & - C_1(k) \int_{\{u_{1,n} \leq k\}} |\nabla (T_k(u_{1,n}) - T_k(u_1))|^2 \Psi \left| \varphi \left(T_k(u_{1,n}) - T_k(u_1)_\gamma \right) \right| \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} J &\geq \omega^\gamma \left(\frac{1}{n} \right) + \omega \left(\frac{1}{\gamma} \right) \\ &\quad - C_1(k) \int_{\{E_n \leq k\}} |\nabla (T_k(u_{1,n}) - T_k(u_1))|^2 \Psi \left| \varphi \left(T_k(U_{2,n}) - T_k(U_2)_\gamma \right) \right| \end{aligned}$$

Pour λ , nous avons

$$\begin{aligned} \lambda &= -(d_2 - d_1) \int_{Q_T} \left[(\nabla u_{1,n} - \nabla u_1) \Psi \varphi' \left(T_k(U_{2,n}) - T_k(U_{2,\ell})_\gamma \right) \times \right. \\ &\quad \left. \nabla \left(T_k(U_{2,n}) - T_k(U_{2,\ell})_\gamma \right) \right] \\ &= \omega^{\gamma,n} \left(\frac{1}{\ell} \right) + \omega^\gamma \left(\frac{1}{n} \right) + \omega \left(\frac{1}{\gamma} \right) \end{aligned}$$

puisque $\nabla T_k(u_{1,n}) \rightarrow \nabla T_k(u_1)$ fortement dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$. Nous avons

$$\begin{aligned} \beta &= -(d_2 - d_1) \int_{Q_T} \nabla u_1 \Psi \varphi' \left(T_k(U_{2,n}) - T_k(U_{2,\ell})_\gamma \right) \nabla \left(T_k(U_{2,n}) - T_k(U_{2,\ell})_\gamma \right) \\ &= \omega^{\gamma,n} \left(\frac{1}{\ell} \right) + \omega^\gamma \left(\frac{1}{n} \right) + \omega \left(\frac{1}{\gamma} \right) \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} I + J + \lambda + \beta &\geq \omega^{\gamma,n} \left(\frac{1}{\ell} \right) + \omega^\gamma \left(\frac{1}{n} \right) + \omega \left(\frac{1}{\gamma} \right) \\ &\quad + d_2 \int_{Q_T} |\nabla (T_k(U_{2,n}) - T_k(U_2))|^2 \Psi \varphi' \left(T_k(U_{2,n}) - T_k(U_2)_\gamma \right) \\ &\quad - C_1(k) \int_{\{E_n \leq k\}} |\nabla (T_k(u_{1,n}) - T_k(u_1))|^2 \Psi \left| \varphi \left(T_k(U_{2,n}) - T_k(U_2)_\gamma \right) \right| \end{aligned}$$

Nous choisissons

$$\mu \geq \left(\frac{C_1(k)}{2d_2} \right)^2$$

nous avons

$$d_2 \varphi' (s) - C_1 (k) |\varphi (s)| > \frac{d_2}{2}$$

Nous concluons que

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} \Psi \left[d_2 \varphi' \left(T_k (U_{2,n}) - T_k (U_2)_\gamma \right) - C_1 (k) \left| \varphi \left(T_k (U_{2,n}) - T_k (U_2)_\gamma \right) \right| \right] \times \\ |\nabla (T_k (U_{2,n}) - T_k (U_2))|^2 \leq \omega^{\gamma,n} \left(\frac{1}{\ell} \right) + \omega^\gamma \left(\frac{1}{n} \right) + \omega \left(\frac{1}{\gamma} \right) \end{aligned}$$

Nous avons ensuite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Q_T} |\nabla (T_k (U_{2,n}) - T_k (U_2))|^2 \chi_{[U_{2,n} \leq k]} = 0.$$

De la même manière comme précédemment, étape par étape, en tenant compte de l'équation satisfaite par $U_{r,n} = \sum_{1 \leq j \leq r} u_{j,n}$ et en choisissant

$$\mu \geq \max \left\{ \left(\frac{C_1 (k)}{2d_j} \right)^2, 1 \leq j \leq r \right\}$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} |\nabla (T_k (U_{r,n}) - T_k (U_r))|^2 \Psi \left[d_r \varphi' \left(T_k (U_{r,n}) - T_k (U_r)_\gamma \right) \right. \\ \left. - C_1 (k) \left| \varphi \left(T_k (U_{r,n}) - T_k (U_r)_\gamma \right) \right| \right] \leq \omega^{\gamma,n} \left(\frac{1}{\ell} \right) + \omega^\gamma \left(\frac{1}{n} \right) + \omega \left(\frac{1}{\gamma} \right) \end{aligned}$$

Ce qui montre le résultat souhaité. $\square$

Démonstration. du lemme 4.6.

Soit A un sous-ensemble mesurable de Ω , nous avons

$$\begin{aligned} \int_A |f_{1,n} (t, x, u_n, \nabla u_n)| &= \int_{A \cap [E_n > k]} |f_{1,n}| + \int_{A \cap [E_n \leq k]} |f_{1,n}| \\ &\leq \int_{A \cap [\theta_n > k]} |f_{1,n}| + \int_{A \cap [E_n \leq k]} |f_{1,n}| \end{aligned}$$

avec $E_n = \sum_{1 \leq j \leq m} u_{j,n}$ et $\theta_n = \sum_{1 \leq k \leq m} (m - k + 1) u_{k,n}$

Grâce au lemme 4.4, nous obtenons $\forall \varepsilon > 0, \exists k_0$ de sorte que si $k \geq k_0$ alors pour tout n

$$\begin{aligned} \int_{A \cap [E_n > k]} |f_{1,n} (t, x, u_n, \nabla u_n)| &\leq \frac{1}{k} \int_{[E_n > k]} k |f_{1,n}| \leq \\ \frac{1}{k} \int_{Q_T} E_n |f_{1,n}| &\leq \frac{1}{k} \int_{Q_T} \theta_n |f_{1,n}| \leq \frac{\varepsilon}{m+2} \end{aligned}$$

L'hypothèse (7.4) implique que pour tout $k > k_0$

$$\begin{aligned}
\int_A |f_{1,n}(t, x, u_n, \nabla u_n)| &\leq \frac{\varepsilon}{m+2} + C_1(k) \left(\int_A F_1(x, t) + \int_{A \cap [E_n \leq k]} |\nabla u_{1,n}|^2 \right) \\
&\quad + C_1(k) \sum_{2 \leq j \leq m} \left(\int_{A \cap [E_n \leq k]} |\nabla u_{j,n}|^{\alpha_j} \right) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{m+2} + C_1(k) \left(\int_A F_1(x, t) + \int_{A \cap [E_n \leq k]} |\nabla T_k(u_{1,n})|^2 \right) \\
&\quad + C_1(k) \sum_{2 \leq j \leq m} \left(\int_{A \cap [E_n \leq k]} |\nabla T_k(u_{j,n})|^{\alpha_j} \right)
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder pour $1 \leq \alpha_j < 2$ et le lemme 4.4, nous obtenons

$$\begin{aligned}
C_1(k) \int_{A \cap [E_n \leq k]} |\nabla T_k(u_{j,n})|^{\alpha_j} &\leq C_1(k) \left(\int_A |\nabla T_k(u_{j,n})|^2 \right)^{\frac{\alpha_j}{2}} |A|^{\frac{2-\alpha_j}{2}} \\
&\leq C_1(k) R_2^{\frac{\alpha_j}{2}} |A|^{\frac{2-\alpha_j}{2}} \leq \frac{\varepsilon}{m+2}
\end{aligned}$$

lorsque $|A| \leq \varrho_j$, avec $\varrho_j = \left(\frac{\varepsilon}{m+2} C_1^{-1}(k) R_2^{-\frac{\alpha_j}{2}} \right)^{\frac{2}{2-\alpha_j}}$, $2 \leq j \leq m$.

Pour traiter la seconde intégrale nous écrivons

$$\int_{A \cap [E_n \leq k]} |\nabla T_k(u_{1,n})|^2 \leq 2 \int_{A \cap [E_n \leq k]} |\nabla T_k(u_{1,n}) - \nabla T_k(u_1)|^2 + 2 \int_A |\nabla T_k(u_1)|^2$$

Selon le lemme 4.4, $|\nabla T_k(u_{1,n}) - \nabla T_k(u_1)|^2 \chi_{[E_n \leq k]}$ est équi-intégrable dans $L^1(\Omega)$ car il converge fortement vers 0 dans $L^1(\Omega)$. Donc, il existe ϱ_{m+1} tel que si $|A| \leq \varrho_{m+1}$, alors

$$2C_1(k) \int_{A \cap [E_n \leq k]} |\nabla T_k(u_{1,n}) - \nabla T_k(u_1)|^2 \leq \frac{\varepsilon}{m+2}$$

D'autre part $F_1, |\nabla T_k(u_1)|^2 \in L^1(\Omega)$, donc il existe ϱ_{m+2} tel que

$$C_1(k) \left(2 \int_A |\nabla T_k(u_1)|^2 + \int_A F_1(t, x) \right) \leq \frac{\varepsilon}{m+2}$$

lorsque $|A| \leq \varrho_{m+2}$. Nous choisissons $\varrho_0 = \inf \{ \varrho_j, 2 \leq j \leq m+2 \}$, si $|A| \leq \varrho_0$ nous obtenons

$$\int_A |f_{1,n}(x, u_n, \nabla u_n)| \leq \varepsilon$$

De la même manière, nous obtenons pour tout $2 \leq i \leq m$

$$\begin{aligned}
\int_A |f_{i,n}| &\leq \frac{\varepsilon}{m+2} \\
&+ C_i(k) \left(\int_A F_i(x, t) + \int_{A \cap [E_n \leq k]} \left(6 |\nabla u_1|^2 + 6 |\nabla T_k(u_{1,n}) - \nabla T_k(u_1)|^2 \right) \right) \\
&+ 8C_i(k) \sum_{2 \leq r \leq m} \left(\int_{A \cap [E_n \leq k]} \left| \nabla T_k \left(\sum_{1 \leq j \leq r} u_j \right) \right|^2 \right) \\
&+ 8C_i(k) \sum_{2 \leq r \leq m} \left(\int_{A \cap [E_n \leq k]} \left| \nabla T_k \left(\sum_{1 \leq j \leq r} u_{j,n} \right) - \nabla T_k \left(\sum_{1 \leq j \leq r} u_j \right) \right|^2 \right)
\end{aligned}$$

En arguant de la même manière comme précédemment, nous obtenons le résultat voulu. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. Alaa and M. Pierre, *Weak solutions for some quasi-linear elliptic equations with data measures*. SIAM J. Math. Anal. vol 24, N1, pp. 23-35, (1993). (Cité pages 10, 13, 16, 45, 66, 107, 134 et 136.)
- [2] N. Alaa, *Solution faibles d'équations paraboliques quasi-linéaires avec données initiales mesures*. Ann. Math. Blaise Pascal, 3 N2, pp.1-15, (1996). (Cité pages 12, 66, 84, 107 et 108.)
- [3] N. Alaa and I. Mounir, *Weak solutions for some reaction-diffusion systems with balance law and critical growth with respect to the gradient*. Ann. Math. Blaise Pascal, 8(2), pp 1-19, (2001). (Cité pages 15, 45, 84, 85 et 107.)
- [4] N. Alaa and I. Mounir, *Global existence for reaction-diffusion systems with mass control and critical growth with respect to the gradient*. J. Math. Anal. Appl. 253 (2001), 532-557. (Cité pages 9, 36, 45, 73, 108, 113, 118 et 119.)
- [5] N. Alaa, N. Idrissi Fatmi and I. Mounir, *Weak Solutions for Some Quasilinear Parabolic Systems with Data Measures and Arbitrary Growth Non-linearities*. Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol. 4, 2009, no. 22, 1085 - 1099. (Cité pages 11, 37, 38, 73, 84 et 107.)
- [6] N. Alaa, I. Fatmi and M. Pierre, *Quasilinear elliptic degenerated equations with nonlinearity in the gradient and L^1 data*. Int. J. Math. Stat. Spring (2011), V8, S11, 62-69. (Cité pages 13, 38, 75, 84 et 107.)
- [7] N. Alaa, S. Mesbahi, *Existence result for triangular Reaction-Diffusion systems with L^1 data and critical growth with respect to the gradient*, Mediterr. J. Math. 10 (2013), 255-275. (Cité pages 6, 13, 27, 37, 38, 45, 77, 84, 107 et 108.)
- [8] N.D. Alikakos, *L^p -bounded of solutions of reaction-diffusion equations*.

- Comm. Partial Differential Equations, 4 (1979), 827-868. (Cité pages 6, 16, 27, 66 et 107.)
- [9] P. Baras, J. C. Hassan and L. Veron, *Compacité de l'opérateur définissant la solution d'une équation non homogène*, C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A 284 (1977), 799-802. (Cité pages 6, 26, 46, 84, 85, 117, 134 et 136.)
- [10] A. Bensoussan, L. Boccardo and F. Murat, *On a Nonlinear Partial Differential Equation Having Natural Growth Terms and Unbounded Solution*. Ann. Inst. Henri Poincaré, vol 5, N4, pp. 347-364, (1989). (Cité pages 9, 27, 32, 46, 47, 84, 85, 107, 108 et 134.)
- [11] L. Boccardo, F. Murat and J. P. Puel. *Existence de solutions faibles des équations elliptiques quasi-linéaires à croissance quadratique*. Nonlinear P.D.E. and their applications, collège de France Seminar, vol IV, ed. by H. Brezis & J. L. Lions. Research Notes in Mathematics 84, Pitman, London, pp. 19-73, (1983). (Cité pages 6, 27, 45, 84, 85, 107 et 134.)
- [12] L. Boccardo, F. Murat and J. P. Puel, *Existence results for some quasilinear parabolic equations*, Nonlinear Anal. 13 (1989), 373-392. (Cité pages 11, 13, 16, 27, 45, 74, 84, 108, 109 et 134.)
- [13] L. Boccardo and T. Gallouet, *Strongly nonlinear elliptic equations having natural growth terms in L^1 data*. Nonlinear Anal. T.M.A., vol 19, pp 573-579, (1992). (Cité pages 9, 37, 38, 66, 108 et 139.)
- [14] N. Boudiba, *Existence globale pour des systèmes de réaction-diffusion avec contrôle de masse*. Ph.D thesis, Université de Rennes 1, France, 1999. (Cité pages 9, 75, 87, 88, 107 et 135.)
- [15] N. Boudiba and M. Pierre, *Global existence for coupled Reaction-Diffusion Systems*. J. Math. Anal. Appl. 250 (2000), 1-12. (Cité pages 6, 38, 75, 84, 107, 134 et 135.)
- [16] A. Dall'aglio and L. Orsina, *Nonlinear parabolic equations with natural growth conditions and L^1 data*, Nonlinear Anal. 27 (1996), 59-73. (Cité pages 11, 13, 28, 66, 108, 109 et 134.)
- [17] W. E. Fitzgibbon, J. Morgan and R. Sanders. *Global existence and boundedness for class of inhomogeneous semilinear parabolic systems*. Nonlinear

- Analysis. Theory methods and Applications, vol.19, N9, pp. 885-899, (1992). (Cité pages 6, 30, 32, 45, 84, 94, 107 et 141.)
- [18] S. L. Hollis, R. H. Martin, and M. Pierre, *Global existence and boundedness in reaction-diffusion systems*. SIAM J. Math. Anal. 18, pp. 744-761, (1987). (Cité pages 6, 13, 14, 30, 66, 68, 69, 85, 87 et 108.)
- [19] S. Hollis and J. Morgan, *Interior estimates for a class of reaction-diffusion systems from L^1 a priori estimates*, J. Differential Equations 98 (1992), 260-276. (Cité pages 11, 27, 69, 84, 85 et 108.)
- [20] O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonikov and N. N. Ural'ceva, "*Linear and Quasi Linear Equations of Parabolic Type*," Translation of Mathematical Monographs, Vol. 23, Amer. Math. Soc., Providence, 1968. (Cité pages 16, 25, 27, 36, 74, 84 et 112.)
- [21] R. Landes and V. Mustonen, *On parabolic initial-boundary value problems with critical growth for the gradient*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 11 (1994), 135-158. (Cité pages 6, 13, 14, 27, 38, 74, 84, 108 et 134.)
- [22] J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod-Gauthier Villars, (1969). (Cité pages 1, 27, 38, 74, 84 et 107.)
- [23] R. H. Martin and M. Pierre, *Nonlinear reaction-diffusion systems*. in "Nonlinear Equations in the Applied Sciences", ed W. F. Ames, C. Rogers, and Kapell, Academic Press (1991), Notes and reports in Mathematics in Science and Engineering. (Cité pages 6, 26, 38, 66, 68, 69, 84, 107, 108, 135 et 139.)
- [24] M. Pierre and Schmitt, *Global existence for a reaction-diffusion system with a balance law*. Proc. of Curaçao Conf. on Semigroups of Nonlinear Operators and Applications, G.R. Goldstein ed., (1993). (Cité pages 9, 26, 58, 84, 107, 139 et 144.)
- [25] M. Pierre and D. Schmitt, "*Existence globale ou explosion pour les systèmes de réaction-diffusion avec contrôle de masse*," Thèse de Doctorat, Université Henri Poincaré, Nancy I, 1995. (Cité pages 9, 27, 31, 73 et 108.)

- [26] M. Pierre, *Global existence in reaction-diffusion systems with dissipation of mass* : a survey, to appear in Milan Journal of Mathematics. (Cité pages 9, 28, 32, 73, 107 et 134.)
- [27] A. Porretta, *Existence for elliptic equations in L^1 having lower order terms with natural growth*. Portugaliae Math. vol. 57(2), pp. 179-190, (2000), . (Cité pages 9, 38, 66, 107 et 134.)
- [28] F. Rothe, *Global Solutions of Reaction-Diffusion Systems*. Lectures Notes in Math. 1072, Springer, New York, (1984). (Cité pages 12, 37, 38, 66, 107 et 134.)

EXISTENCE DE SOLUTIONS POUR DES SYSTÈMES QUASI-LINÉAIRES ELLIPTIQUES DÉGÉNÉRÉS AVEC DONNÉES L^1 ET NON-LINÉARITÉS EN GRADIENT

5

SOMMAIRE

5.1	INTRODUCTION	134
5.2	HYPOTHÈSES ET RÉSULTAT PRINCIPAL	136
5.2.1	Hypothèses	136
5.2.2	Résultat principal	137
5.3	PREUVE DU RÉSULTAT PRINCIPAL	138
5.3.1	Schéma approché	138
5.3.2	Estimations a priori	139
5.3.3	Convergence	143

L'OBJET de ce chapitre est d'étudier l'existence de solutions faibles pour certaine classe de systèmes dégénérés 2×2 quasi-linéaires de réaction-diffusion du type elliptique. Nous nous intéressons à la situation où les données sont non régulières et les non-linéarités de notre système ont une croissance critique en gradient de solutions. L'originalité de cette étude persiste dans le fait que les non-linéarités de notre système sont dégénérées.

Mots Clés. systèmes de réaction-diffusion, systèmes elliptiques dégénérés, solutions faibles, troncature.

5.1 INTRODUCTION

Les systèmes de réaction-diffusion sont importants pour un large éventail de domaines appliqués tels que les processus cellulaires, la libération de drogue, l'écologie, la propagation de maladies, les procédés catalytiques industriels, transport de contaminants dans l'environnement. Pour ne citer que quelques-uns, certaines de ces applications, en particulier dans la chimie et la biologie, sont expliquées dans les livres de Murray [26], [27] et Baker [10]. Bien qu'une théorie générale de systèmes de réaction-diffusion est détaillée dans les livres de Rothe [34] et Grzybowski [21]. Diverses formes de ces problèmes ont été proposées dans la littérature. La plupart des discussions dans la littérature actuelle sont pour des systèmes linéaires ou non linéaires et des méthodes différentes pour le problème d'existence ont été utilisées, voir Alaa et al [1]-[9], Baras [11], [12], Boccardo et al [15], Boudiba [16] et Pierre et al [29]-[32]. C'est un sujet relativement récent de la recherche mathématique et appliquée. La plupart des travaux qui ont été fait jusqu'à présent sont préoccupé par l'exploration des aspects particuliers de systèmes très spécifiques et des équations. C'est parce que ces systèmes sont généralement très complexes et ouvrent un large éventail de phénomènes encore mal compris. Par conséquent, il n'existe pas de programme établi pour résoudre une large classe de systèmes. Par exemple, un système de chimiotactisme, qui est un phénomène biologique décrivant le changement de mouvement d'une densité de population ou de particules simples (tels que les amibes, bactéries, cellules endothéliales, cellules quelconques, les animaux, etc.) en réponse (taxis) à une stimulus chimique externe propage dans l'environnement où il réside, voir par exemple Othmer et al [28].

Le modèle mathématique simple qui décrit un tel phénomène est

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - D_u \Delta u + \nabla \cdot (\kappa(u) \nabla u + \chi(v) \nabla v) = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ \frac{\partial v}{\partial t} - D_v \Delta v + \nabla \cdot (\zeta(u) \nabla u + \eta(v) \nabla v) = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ u(0) = u_0, v(0) = v_0 \end{cases}$$

ici u et v sont les densités de population. Par un developement simple avec

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{\partial \kappa(u)}{\partial u}, \quad b(x) = \frac{\partial \chi(v)}{\partial v}, \quad c(x) = \frac{\partial \zeta(u)}{\partial u}, \quad d(x) = \frac{\partial \eta(v)}{\partial v} \\ f &= -(\kappa(u) \Delta u + \chi(v) \Delta v), \quad g = -(\zeta(u) \Delta u + \eta(v) \Delta v) \end{aligned}$$

le système peut s'écrire

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - D_u \Delta u + a(x) |\nabla u|^2 + b(x) |\nabla v|^\alpha = f & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ \frac{\partial v}{\partial t} - D_v \Delta v + c(x) |\nabla u|^\beta + d(x) |\nabla v|^2 = g & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ u(0) = u_0, v(0) = v_0 \end{cases}$$

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au problème elliptique quasi-linéaire dégénéré suivant

$$\begin{cases} u - D_1 \Delta u + a(x) |\nabla u|^2 + b(x) |\nabla v|^\alpha = f(x) & \text{dans } \Omega \\ v - D_2 \Delta v + c(x) |\nabla u|^\beta + d(x) |\nabla v|^2 = g(x) & \text{dans } \Omega \\ u = v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.5)$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, de frontière assez régulière $\partial\Omega$. Les coefficients de diffusion D_1 et D_2 sont des constantes positives. a, b, c, d, f et $g : \Omega \rightarrow [0, +\infty)$ sont des fonctions intégrables non négatives et $1 \leq \alpha, \beta < 2$.

Nous nous intéressons particulièrement au cas où les données ne sont pas régulières et où la croissance des termes non linéaires est arbitraire en le gradient.

En effet, et pour mieux comprendre la situation, nous présentons ci-dessous quelques travaux précédents concernant le problème où $a, b, c, d \in L^\infty(\Omega)$.

- Si f, g sont suffisamment régulières ($f, g \in W^{1,\infty}(\Omega)$) et pour tout $\alpha, \beta \geq 1$, la méthode de sous- et sur-solution peuvent être utilisées pour prouver l'existence dans le problème (1.5). En effet, $(0, 0)$ est une sous-solution et $w = (w_1, w_2)$ solution du problème linéaire

$$\begin{cases} w_1 - D_1 \Delta w_2 = f(x) & \text{dans } \Omega \\ w_1 - D_1 \Delta w_2 = g(x) & \text{dans } \Omega \\ w_1 = w_2 = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

est une sur-solution, alors (1.5) présente une solution $(u, v) \in W_0^{1,\infty}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$, voir Lions [23].

- Si $f, g \in L^2(\Omega)$ et $1 \leq \alpha, \beta \leq 2$, alors $|\nabla u|^\alpha, |\nabla v|^\beta \in L^1(\Omega)$. Plusieurs auteurs ont travaillé sur ce problème et prouvé que (1.5) admet une solution $(u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, voir Bensoussan et al [14], Boccardo et al [15].

• Si $f, g \in L^1(\Omega)$ et $1 \leq \alpha, \beta < 2$, Alaa et Mesbahi [1] ont prouvé que (1.5) admet une solution non négative $(u, v) \in W_0^{1,1}(\Omega) \times W_0^{1,1}(\Omega)$.

• Le cas où $f, g \in M_B^+(\Omega)$ (f, g sont des mesures positives et bornées sur Ω) a été traité par Alaa et Pierre dans [9], ils ont prouvé que si $1 \leq \alpha, \beta \leq 2$ et la sur-solution $w = (w_1, w_2) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, alors le problème (1.5) admet une solution non négative $(u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

Pour notre propos, nous nous intéressons particulièrement au cas du système (1.5) où a, b, c, d, f et g sont non régulières, plus précisément, a, b, c, d, f et g sont dans $L^1(\Omega)$.

Pour plus de précisions, nous proposons le problème modèle suivant

$$\begin{cases} u - D_1 \Delta u + b(r) |\nabla v|^\alpha = f & \text{dans } B \\ v - D_2 \Delta v + c(r) |\nabla u|^\beta = g & \text{dans } B \\ u = v = 0 & \text{sur } \partial B \end{cases} \quad (2.5)$$

où B est la boule unité dans $\mathbb{R}^N$, $r = \|x\|$ et $b(r), c(r)$ sont données par

$$b(r) = c(r) = \begin{cases} -\ln r & \text{si } N = 2 \\ r^{2-N} & \text{si } N \geq 3 \end{cases} \quad (3.5)$$

Dans ce cas, $b(r), c(r)$ sont dans $L_{loc}^1(B)$ mais pas dans $L^\infty(B)$. Par conséquent, les techniques usuelles et classiques utilisées pour prouver l'existence, que nous avons rappelé précédemment, tombent en défaut. Pour surmonter ces difficultés, nous allons développer une nouvelle méthode complètement différente de la précédente approche.

Nous avons organisé ce chapitre comme suit. Dans la deuxième section nous posons avec précision notre problème et nous exposons le résultat principal de ce chapitre. La troisième section sera consacré à la preuve du résultat principal et ceci en passant par un problème approché et en obtenant des estimations appropriées pour passer après à la limite et prouver que (1.5) admet une solution.

5.2 HYPOTHÈSES ET RÉSULTAT PRINCIPAL

5.2.1 Hypothèses

Soit f, g, a, b, c , et d sont des fonctions vérifiant les hypothèses suivantes

$$f, g \in L^1(\Omega) \text{ et } f, g \geq 0 \quad (4.5)$$

$$a, b, c, d \in L^1_{loc}(\Omega) \text{ et } a, b, c, d \geq 0 \quad (5.5)$$

Tout d'abord, nous devons préciser dans quel sens nous voulons résoudre le problème (1.5).

Définition 5.1 On dit que (u, v) est une solution faible de (1.5) si

$$\begin{cases} u, v \in W^{1,1}_0(\Omega) \\ a(x)|\nabla u|^2, b(x)|\nabla v|^\alpha, c(x)|\nabla u|^\beta, d(x)|\nabla v|^2 \in L^1_{loc}(\Omega) \\ u - D_1\Delta u + a(x)|\nabla u|^2 + b(x)|\nabla v|^\alpha = f(x), \text{ dans } D'(\Omega) \\ v - D_2\Delta v + c(x)|\nabla u|^\beta + d(x)|\nabla v|^2 = g(x), \text{ dans } D'(\Omega) \end{cases} \quad (6.5)$$

Nous nous intéressons donc à prouver l'existence de solution faible positive du problème (1.5). Pour ceci, nous introduisons la fonction de troncature T_k de classe C^2 , définie pour tout $k > 0$ par

$$\begin{cases} T_k(r) = r & \text{si } 0 \leq r \leq k \\ T_k(r) \leq k+1 & \text{si } r \geq k \\ 0 \leq T'_k(r) \leq 1 & \text{si } r \geq 0 \\ T'_k(r) = 0 & \text{si } r \geq k+1 \\ 0 \leq -T''_k(r) \leq C(k) \end{cases}$$

A titre d'exemple, la fonction T_k est définie comme suivant

$$\begin{cases} T_k(r) = r & \text{dans } [0, k] \\ T_k(r) = \frac{1}{2}(r-k)^4 - (r-k)^3 + r & \text{dans } [k, k+1] \\ T_k(r) = \frac{1}{2}(k+1) & \text{pour } r > k+1 \end{cases}$$

Nous aurons besoin aussi de la fonction $H \in C^1(\mathbb{R})$, telle que $0 \leq H(s) \leq 1$, et

$$H(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } |s| \geq 1 \\ 1 & \text{si } |s| \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Nous définissons alors l'espace $\tau^{1,2}(\Omega)$ par

$$\tau^{1,2}(\Omega) = \left\{ w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N \text{ mesurable, telle que } T_k(w) \in H^1(\Omega) \text{ pour } \forall k > 0 \right\}$$

5.2.2 Résultat principal

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 5.1 *Supposons que les hypothèses (4.5) et (5.5) sont satisfaites. Si de plus il existe une fonction $\theta \in \tau^{1,2}(\Omega)$ et une suite de fonctions $\theta_n \in L^\infty(\Omega)$ telle que*

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq a, b, c, d \leq \theta \text{ dans } \Omega \\ \theta_n \rightarrow \theta \text{ presque partout dans } \Omega \\ \nabla T_k(\theta_n) \rightarrow \nabla T_k(\theta) \text{ fortement dans } L^2(\Omega) \\ \limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{k} \int_{\Omega} |\nabla T_k(\theta_n)|^2 \right) = 0 \end{array} \right. \quad (7.5)$$

Alors le problème (1.5) admet une solution faible non négative.

Remarque 5.1 (i) *Si $a, b, c, d \in L^\infty(\Omega)$, alors les hypothèses (7.5) sont satisfaites, car dans ce cas, θ peut avoir la valeur de toute constante non négative C , telle que*

$$C \geq \max \{ \|a\|_{L^\infty}, \|b\|_{L^\infty}, \|c\|_{L^\infty}, \|d\|_{L^\infty} \}$$

(ii) *Les hypothèses (7.5) sont vérifiées pour la fonction $\xi = b$ ou c données dans (3.5). En effet, $-\Delta \xi = \lambda$ est dans ce cas la mesure de Dirac qui est une mesure non négative et bornée sur Ω . Par conséquent, nous prenons $\theta = \xi$ et θ_n solution de*

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta \theta_n = \lambda_n & \text{dans } \Omega \\ \theta_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

où $\lambda_n \in C_0^\infty(\Omega)$, $\lambda_n \rightarrow \lambda$ dans $L^1(\Omega)$ et $\lambda_n \leq \lambda$. Ainsi, nous pouvons appliquer le théorème précédent et conclure l'existence d'une solution faible non négative de notre problème modèle (2.5).

5.3 PREUVE DU RÉSULTAT PRINCIPAL

5.3.1 Schéma approché

Dans ce paragraphe, nous définissons un système approché de (1.5). Pour ceci, nous tranquons les fonctions a, b, c, d, f et g en introduisant les suites a_n, b_n, c_n, d_n, f_n and g_n définies par

$$\begin{aligned} a_n &= \min \{a, \theta_n\} \quad , \quad b_n = \min \{b, \theta_n\} \\ c_n &= \min \{c, \theta_n\} \quad , \quad d_n = \min \{d, \theta_n\} \end{aligned} \quad (8.5)$$

et

$$\begin{aligned} f_n &\in C_0^\infty(\Omega) \quad , \quad f_n \rightarrow f \quad \text{dans } L^1(\Omega) \quad \text{et } f_n \leq f \\ g_n &\in C_0^\infty(\Omega) \quad , \quad g_n \rightarrow g \quad \text{dans } L^1(\Omega) \quad \text{et } g_n \leq g \end{aligned} \quad (9.5)$$

Alors le problème approché est

$$\begin{cases} u_n, v_n \in W_0^{1,\infty}(\Omega) & \text{dans } \Omega \\ u_n - D_1 \Delta u_n + a_n(x) |\nabla u_n|^2 + b_n(x) |\nabla u_n|^\alpha = f_n(x) & \text{dans } D'(\Omega) \\ v_n - D_2 \Delta v_n + c_n(x) |\nabla u_n|^\beta + d_n(x) |\nabla u_n|^2 = g_n(x) & \text{dans } D'(\Omega) \end{cases} \quad (10.5)$$

Nous pouvons voir que a_n, b_n, c_n et d_n ainsi définies sont dans $L^\infty(\Omega)$. D'autre part, $(0,0)$ est une sous-solution du problème (10.5) et (U_n, V_n) solution du problème linéaire suivant

$$\begin{cases} -\Delta U_n = f_n & \text{dans } \Omega \\ -\Delta V_n = g_n & \text{dans } \Omega \\ U_n, V_n \in W_0^{1,\infty}(\Omega) \end{cases}$$

est une sur-solution, alors, en vertu des résultats classiques dans Amann et Grandall [13] et Lions [23], [24], il existe (u_n, v_n) solution de (10.5) telle que

$$\begin{cases} 0 \leq u_n \leq U_n & \text{pour tout } n \\ 0 \leq v_n \leq V_n & \text{pour tout } n \end{cases}$$

5.3.2 Estimations a priori

Pour prouver le théorème 5.1, nous proposons de tendre n vers l'infini dans (10.5). Pour cela nous avons besoin de certaines estimations proposées dans le lemme suivant :

Lemme 5.1 *Soit u_n, v_n, a_n, b_n, c_n et d_n les suites définies auparavant. Nous avons alors*

(i)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla T_k(u_n)|^2 &\leq k \|f\|_{L^1(\Omega)} \\ \int_{\Omega} |\nabla T_k(v_n)|^2 &\leq k \|g\|_{L^1(\Omega)} \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} b_n \cdot |\nabla T_k(v_n)|^\alpha &\leq k \|f\|_{L^1(\Omega)} \\ \int_{\Omega} c_n \cdot |\nabla T_k(u_n)|^\beta &\leq k \|g\|_{L^1(\Omega)} \end{aligned}$$

pour tout $1 \leq \alpha, \beta < 2$

Démonstration. (i) En multipliant la première équation de (10.5) par $T_k(u_n)$ et la seconde équation par $T_k(v_n)$ et en intégrant sur Ω , nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |T_k(u_n)|^2 + D_1 \int_{\Omega} |\nabla T_k(u_n)|^2 + \int_{\Omega} a_n \cdot T_k(u_n) \cdot |\nabla T_k(u_n)|^2 + \\ + \int_{\Omega} b_n \cdot T_k(u_n) \cdot |\nabla T_k(v_n)|^\alpha \leq \int_{\Omega} f_n \cdot T_k(u_n) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |T_k(v_n)|^2 + D_2 \int_{\Omega} |\nabla T_k(v_n)|^2 + \int_{\Omega} c_n \cdot T_k(v_n) \cdot |\nabla T_k(u_n)|^\beta + \\ + \int_{\Omega} d_n \cdot T_k(v_n) \cdot |\nabla T_k(v_n)|^2 \leq \int_{\Omega} g_n \cdot T_k(v_n) \end{aligned}$$

grâce à la positivité de a_n , b_n , c_n et d_n , les hypothèses sur f_n et g_n et la définition de la fonction T_k nous déduisons le résultat.

(ii) En intégrant la première équation du système (10.5) sur Ω , nous obtenons

$$\int_{\Omega} u_n - D_1 \int_{\Omega} \Delta u_n + \int_{\Omega} a_n(x) |\nabla u_n|^2 + \int_{\Omega} b_n(x) |\nabla v_n|^\alpha = \int_{\Omega} f_n(x) \quad (11.5)$$

D'autre part, il est très bien connu que pour toute fonction y de $W_0^{1,1}(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} -\Delta y = H, & H \in L^1(\Omega) \\ y \geq 0 \end{cases}$$

il existe une suite y_n dans $C^2(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$ qui satisfait

$$\begin{aligned} y_n &\rightarrow y \text{ fortement dans } W_0^{1,1}(\Omega) \\ \Delta y_n &\rightarrow \Delta y \text{ fortement dans } L^1(\Omega) \end{aligned}$$

Nous utilisons la régularité de y_n pour écrire que

$$\int_{\Omega} \Delta y_n = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial y_n}{\partial \nu} d\sigma$$

Cependant $y_n \geq 0$ dans Ω et $y_n = 0$ sur $\partial\Omega$, ainsi $\frac{\partial y_n}{\partial \nu} \leq 0$. Nous déduisons en passant à la limite que $\int_{\Omega} \Delta y \leq 0$, donc

$$\int_{\Omega} \Delta u_n \leq 0$$

La relation (11.5) entraîne que

$$\int_{\Omega} u_n + \int_{\Omega} a_n(x) |\nabla u_n|^2 + \int_{\Omega} b_n(x) |\nabla u_n|^\alpha \leq \int_{\Omega} f_n(x)$$

Et d'après (9.5) ; nous concluons que

$$\int_{\Omega} u_n + \int_{\Omega} a_n(x) |\nabla u_n|^2 + \int_{\Omega} b_n(x) |\nabla u_n|^\alpha \leq \|f\|_{L^1(\Omega)}$$

De la même manière, si nous intégrons la seconde équation de (10.5) sur Ω , nous obtenons

$$\int_{\Omega} v_n + \int_{\Omega} c_n(x) |\nabla u_n|^\beta + \int_{\Omega} d_n(x) |\nabla u_n|^2 = \|g\|_{L^1(\Omega)}$$

D'où le résultat. $\square$

Remarque 5.2 1) En utilisant l'assertion (ii) du lemme 5.1, et la compacité de l'opérateur défini pour tout $1 \leq q < \frac{N}{N-1}$ par

$$\begin{aligned} L^1(\Omega) &\rightarrow W_0^{1,q}(\Omega) \\ G &\mapsto \vartheta \end{aligned}$$

où ϑ est la solution du problème

$$\begin{cases} \vartheta \in W_0^{1,q}(\Omega) \\ \alpha \vartheta - \Delta \vartheta = G \text{ in } D'(\Omega) \end{cases}$$

Nous concluons l'existence de u , et d'une sous-suite notée encore u_n , pour simplifier, telle que

$$u_n \rightarrow u \text{ fortement dans } W_0^{1,q}(\Omega), \quad 1 \leq q < \frac{N}{N-1}$$

et

$$(u_n, \nabla u_n) \rightarrow (u, \nabla u) \text{ presque par tout dans } \Omega$$

voir Brezis [17].

2) L'assertion (i) implique que

$$(T_k(u_n), T_k(v_n)) \rightarrow (T_k(u), T_k(v)) \text{ faiblement dans } H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \quad (12.5)$$

Lemme 5.2 Soit (u_n, v_n) solution de (10.5), alors

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \sup_n \left(\frac{1}{h} \int_{\Omega} |\nabla T_h(u_n)|^2 dx \right) = \lim_{h \rightarrow +\infty} \sup_n \left(\frac{1}{h} \int_{\Omega} |\nabla T_h(v_n)|^2 dx \right) = 0$$

Démonstration. Tout d'abord nous remarquons que u_n satisfait

$$-\Delta u_n \leq f_n \text{ in } D'(\Omega)$$

Nous multiplions cette inégalité par $T_h(u_n)$ et nous intégrons sur Ω , nous obtenons alors pour tout $0 < M < h$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla T_h(u_n)|^2 &\leq \int_{\Omega \cap \{u_n \leq M\}} f \cdot T_h(u_n) + \int_{\Omega \cap \{u_n > M\}} f \cdot T_h(u_n) \\ &\leq M \int_{\Omega} f + h \int_{\Omega} f \chi_{\{u_n > M\}} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{1}{h} \int_{\Omega} |\nabla T_h(u_n)|^2 \leq \frac{M}{h} \int_{\Omega} f + \int_{\Omega} f \chi_{\{u_n > M\}}$$

$$|\{u_n > M\}| = \int_{\{u_n > M\}} dx \leq \frac{1}{M} \|u_n\|_{L^1(\Omega)} \leq \frac{C}{M}$$

Alors

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \left(\sup_n |\{u_n > M\}| \right) = 0$$

D'autre part, puisque $f \in L^1(\Omega)$, nous avons pour tout $\varepsilon > 0$, il existe δ tel que pour tout $E \subset \Omega$:

$$|E| < \delta \int_E |f| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Tenant compte de la limite ci-dessus, on obtient que pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe M_ε tel que, pour tout $M \geq M_\varepsilon$

$$\sup_n \left(\int_{\Omega} f \chi_{\{u_n > M\}} \right) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

En prenant $M = M_\varepsilon$ et en faisant tendre h vers l'infini, nous obtenons

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \sup_n \left(\frac{1}{h} \int_{\Omega} |\nabla T_h(u_n)|^2 dx \right) = 0$$

De la même manière, nous pouvons arriver à la deuxième égalité. $\square$

Lemme 5.3 Soit η_n une suite telle que $\eta_n \rightarrow \eta$, presque partout dans Ω et $\int_{\Omega} |\eta_n|^2 \leq C$, alors $\eta_n \rightarrow \eta$ dans $L^\alpha(\Omega)$ pour tout $1 \leq \alpha < 2$.

Démonstration. Nous démontrons que η_n est équi-intégrable dans $L^\alpha(\Omega)$. Soit E un sous-ensemble mesurable de Ω , nous avons

$$\int_E |\eta_n|^\alpha \leq |E|^{\frac{2-\alpha}{2}} \cdot \left(\int_E |\eta_n|^2 \right)^{\frac{\alpha}{2}} \leq C \cdot |E|^{\frac{2-\alpha}{2}}$$

Puisque $1 \leq \alpha < 2$ alors $0 < 2 - \alpha \leq 1$. Nous choisissons $|E| = \left(\frac{\varepsilon}{C} \right)^{\frac{2}{2-\alpha}}$, nous obtenons $\int_E |\eta_n|^\alpha \leq \varepsilon$. $\square$

5.3.3 Convergence

Le but de ce paragraphe est de prouver que (u, v) (obtenue dans la section précédente) est, en effet, solution faible du problème (1.5). En se référant à la définition 5.1, nous aurons seulement démontrer que

$$\begin{cases} u - D_1 \Delta u + a(x) |\nabla u|^2 + b(x) |\nabla v|^\alpha = f(x) & \text{dans } D'(\Omega) \\ v - D_2 \Delta v + c(x) |\nabla u|^\beta + d(x) |\nabla v|^2 = g(x) & \text{dans } D'(\Omega) \end{cases}$$

Nous savons par le lemme 5.1, $a_n(x) |\nabla u_n|^2$, $d_n(x) |\nabla u_n|^2$, $b_n(x) |\nabla u_n|^\alpha$ et $c_n(x) |\nabla u_n|^\beta$ sont uniformément bornées dans $L^1(\Omega)$. Cependant

$$a_n(x) |\nabla u_n|^2 \geq 0, d_n(x) |\nabla u_n|^2 \geq 0, b_n(x) |\nabla u_n|^\alpha \geq 0, c_n(x) |\nabla u_n|^\beta \geq 0$$

et pour presque tout x dans Ω , nous avons

$$\begin{aligned} a_n(x) |\nabla u_n|^2 &\rightarrow a(x) |\nabla u|^2 \\ d_n(x) |\nabla u_n|^2 &\rightarrow d(x) |\nabla u|^2 \\ b_n(x) |\nabla u_n|^\alpha &\rightarrow b(x) |\nabla u|^\alpha \\ c_n(x) |\nabla u_n|^\beta &\rightarrow c(x) |\nabla u|^\beta \end{aligned}$$

Nous utilisons alors le résultat de Schwartz dans [35] pour déduire l'existence de deux mesures non négatives μ_1, μ_2 telles que

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(u_n - D_1 \Delta u_n + a_n(x) |\nabla u_n|^2 + b_n(x) |\nabla u_n|^\alpha \right) = \\ \quad u - D_1 \Delta u + a(x) |\nabla u|^2 + b(x) |\nabla v|^\alpha + \mu_1 & \text{dans } D'(\Omega) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(v_n - D_2 \Delta v_n + c_n(x) |\nabla u_n|^\beta + d_n(x) |\nabla u_n|^2 \right) = \\ \quad v - D_2 \Delta v + c(x) |\nabla u|^\beta + d(x) |\nabla v|^2 + \mu_2 & \text{dans } D'(\Omega) \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\begin{cases} u - D_1 \Delta u + a(x) |\nabla u|^2 + b(x) |\nabla v|^\alpha \leq f & \text{dans } D'(\Omega) \\ v - D_2 \Delta v + c(x) |\nabla u|^\beta + d(x) |\nabla v|^2 \leq g & \text{dans } D'(\Omega) \end{cases}$$

Par conséquent, pour conclure la preuve du théorème 5.1, nous devons établir les inégalités opposées. Pour ceci, soit une fonction H dans $C^1(\mathbb{R})$, telle que

$$0 \leq H(s) \leq 1$$

et

$$H(s) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } |s| \geq 1 \\ 1 & , \text{ si } |s| \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

et nous introduisons les fonctions test suivantes

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \psi_1 \cdot \exp \left[-\frac{\theta_n}{D_1} u_n \right] \cdot H \left(\frac{\theta_n}{k} \right) \cdot H \left(\frac{u_n}{k} \right) \\ \Phi_2 &= \psi_2 \cdot \exp \left[-\frac{\theta_n}{D_2} v_n \right] \cdot H \left(\frac{\theta_n}{k} \right) \cdot H \left(\frac{v_n}{k} \right)\end{aligned}$$

où H désigne la fonction définie précédemment et $\psi_1, \psi_2 \leq 0$, $\psi_1, \psi_2 \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Nous multiplions la première équation dans (10.5) par Φ_1 et nous intégrons sur Ω , nous obtenons

$$\int_{\Omega} f_n \cdot \Phi_1 = \sum_{1 \leq j \leq 7} I_j$$

où

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_{\Omega} u_n \Phi_1 \\ I_2 &= D_1 \int_{\Omega} \nabla u_n \cdot \nabla \psi_1 \cdot \exp \left[-\frac{\theta_n}{D_1} u_n \right] \cdot H \left(\frac{\theta_n}{k} \right) \cdot H \left(\frac{u_n}{k} \right) \\ I_3 &= - \int_{\Omega} u_n \cdot \nabla u_n \cdot \nabla \theta_n \cdot \Phi_1 \\ I_4 &= \frac{D_1}{k} \int_{\Omega} \nabla u_n \cdot \nabla \theta_n \cdot \psi_1 \cdot \exp \left[-\frac{\theta_n}{D_1} u_n \right] \cdot H' \left(\frac{\theta_n}{k} \right) \cdot H \left(\frac{u_n}{k} \right) \\ I_5 &= \int_{\Omega} (a_n - \theta_n) |\nabla u_n|^2 \cdot \Phi_1 \\ I_6 &= \frac{D_1}{k} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 \cdot \psi_1 \cdot \exp \left[-\frac{\theta_n}{D_1} u_n \right] \cdot H \left(\frac{\theta_n}{k} \right) \cdot H' \left(\frac{u_n}{k} \right) \\ I_7 &= \int_{\Omega} b_n \cdot |\nabla v_n|^\alpha \cdot \Phi_1\end{aligned}$$

En étudiant séparément chaque terme, nous obtenons pour le premier

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} I_1 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} T_k(u_n) \cdot \psi_1 \cdot \exp \left[-\frac{\theta_n}{D_1} u_n \right] \cdot H \left(\frac{\theta_n}{k} \right) \cdot H \left(\frac{u_n}{k} \right) \\ &= \int_{\Omega} u \cdot \psi_1 \cdot \exp \left[-\frac{\theta}{D_1} u \right] \cdot H \left(\frac{\theta}{k} \right) \cdot H \left(\frac{u}{k} \right)\end{aligned}$$

puisque

$$\psi_1 \cdot \exp \left[-\frac{\theta_n}{D_1} u_n \right] \cdot H \left(\frac{\theta_n}{k} \right) \cdot H \left(\frac{u_n}{k} \right)$$

converge fortement dans $L^2(\Omega)$ vers

$$\psi_1 \cdot \exp \left[-\frac{\theta}{D_1} u \right] \cdot H \left(\frac{\theta}{k} \right) \cdot H \left(\frac{u}{k} \right) \quad \text{dans } L^2(\Omega)$$

et $\nabla T_k(u_n)$ converge faiblement vers $\nabla T_k(u)$ dans $L^2(\Omega)$, (voir Lions [24], lemme 1.3, p 12).

Concernant le second terme, nous obtenons

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} I_2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} D_1 \int_{\Omega} \nabla T_k(u_n) \cdot \nabla \psi_1 \cdot \exp \left[-\frac{\theta_n}{D_1} u_n \right] \cdot H \left(\frac{\theta_n}{k} \right) \cdot H \left(\frac{u_n}{k} \right) \\ &= D_1 \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \psi_1 \cdot \exp \left[-\frac{\theta}{D_1} u \right] \cdot H \left(\frac{\theta}{k} \right) \cdot H \left(\frac{u}{k} \right)\end{aligned}$$

puisque

$$\nabla \psi_1 \cdot \exp \left[-\frac{\theta_n}{D_1} u_n \right] \cdot H \left(\frac{\theta_n}{k} \right) \cdot H \left(\frac{u_n}{k} \right)$$

converge fortement dans $L^2(\Omega)$ vers

$$\nabla \psi_1 \cdot \exp \left[-\frac{\theta}{D_1} u \right] \cdot H \left(\frac{\theta}{k} \right) \cdot H \left(\frac{u}{k} \right)$$

Pour I_3 , Nous remarquons d'abord que

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} I_3 &= -\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} T_k(u_n) \cdot \nabla T_k(u_n) \cdot \nabla T_k(\theta_n) \cdot \psi_1 \cdot \exp \left[-\frac{\theta_n}{D_1} u_n \right] \cdot H \left(\frac{\theta_n}{k} \right) \cdot H \left(\frac{u_n}{k} \right) \\ &= -\int_{\Omega} T_k(u) \cdot \nabla T_k(u) \cdot \nabla T_k(\theta) \cdot \psi_1 \cdot \exp \left[-\frac{a}{D_1} u \right] \cdot H \left(\frac{\theta}{k} \right) \cdot H \left(\frac{u}{k} \right)\end{aligned}$$

puisque

$$T_k(u_n) \longrightarrow T_k(u) \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega)$$

$$T_k(\theta_n) \longrightarrow T_k(\theta) \quad \text{fortement dans } H_0^1(\Omega)$$

Pour traiter I_4 et I_6 , nous utilisons le lemme 5.2. Pour I_4 , nous avons

$$\begin{aligned}I_4 &\leq D_1 \left[\frac{1}{k} \int_{\Omega} |\nabla T_k(u_n)|^2 \cdot \psi_1 \cdot \exp \left[-\frac{\theta_n}{D_1} u_n \right] \cdot H' \left(\frac{\theta_n}{k} \right) \cdot H \left(\frac{u_n}{k} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \times \\ &\quad \left[\frac{1}{k} \int_{\Omega} |\nabla T_k(\theta_n)|^2 \cdot \psi_1 \cdot \exp \left[-\frac{\theta_n}{D_1} u_n \right] \cdot H' \left(\frac{\theta_n}{k} \right) \cdot H \left(\frac{u_n}{k} \right) \right]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

puisque $\exp \left[-\frac{\theta_n}{D_1} u_n \right] \leq 1$, ainsi

$$I_4 \leq D_1 \left[\|\psi_1\|_{L^\infty(\Omega)} \cdot \delta_k \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\|\psi_1\|_{L^\infty(\Omega)} \cdot \rho_k \right]^{\frac{1}{2}}$$

où

$$\delta_k = \sup_n \left(\frac{1}{k} \int_{\Omega} |\nabla T_k(u_n)|^2 \right)$$

et

$$\rho_k = \sup_n \left(\frac{1}{k} \int_{\Omega} |\nabla T_k(\theta_n)|^2 \right)$$

Par le lemme 5.2, nous avons

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k = 0$$

Alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_n (I_4) = 0$$

De la même manière, pour I_6 , nous obtenons

$$I_6 \leq D_1 \cdot \|\psi_1\|_{L^\infty(\Omega)} \cdot \delta_k$$

Alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_n (I_6) = 0$$

Et pour I_5 , puisque $a_n \leq \theta_n$ et $\psi_1 \leq 0$, nous obtenons

$$(a_n - \theta_n) \cdot |\nabla u_n|^2 \cdot \exp \left[-\frac{\theta_n}{D_1} u_n \right] \cdot H \left(\frac{\theta_n}{k} \right) \cdot H \left(\frac{u_n}{k} \right) \geq 0, \text{ dans } \Omega$$

Par conséquent, par le lemme de Fatau, nous obtenons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_5 \geq \int_{\Omega} (a - \theta) \cdot |\nabla u|^2 \cdot \exp \left[-\frac{\theta}{D_1} u \right] \cdot H \left(\frac{\theta}{k} \right) \cdot H \left(\frac{u}{k} \right)$$

Pour I_7 , nous obtenons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_7 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} T_k(b_n) \cdot |\nabla T_k(v_n)|^\alpha \cdot \psi_1 \cdot \exp \left[-\frac{\theta_n}{D_1} u_n \right] \cdot H \left(\frac{\theta_n}{k} \right) \cdot H \left(\frac{u_n}{k} \right)$$

Par une application directe du lemme 5.3, nous obtenons $|\nabla T_k(v_n)|^\alpha \rightarrow |\nabla T_k(v)|^\alpha$ fortement dans $L^1(\Omega)$, donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_7 = \int_{\Omega} b |\nabla v|^\alpha \cdot \psi_1 \cdot \exp \left[-\frac{\theta}{D_1} u \right] \cdot H \left(\frac{\theta}{k} \right) \cdot H \left(\frac{u}{k} \right)$$

Finalement, nous avons montré que

$$\begin{aligned} & \omega \left(\frac{1}{k} \right) + \int_{\Omega} u \cdot \psi_1 \cdot \exp \left[-\frac{\theta}{D_1} u \right] \cdot H \left(\frac{\theta}{k} \right) \cdot H \left(\frac{u}{k} \right) \\ & + D_1 \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \psi_1 \cdot \exp \left[-\frac{\theta}{D_1} u \right] \cdot H \left(\frac{\theta}{k} \right) \cdot H \left(\frac{u}{k} \right) \\ & - \int_{\Omega} u \cdot \nabla u \cdot \nabla \theta \cdot \psi_1 \cdot \exp \left[-\frac{\theta}{D_1} u \right] \cdot H \left(\frac{\theta}{k} \right) \cdot H \left(\frac{u}{k} \right) \\ & + \int_{\Omega} (a - \theta) \cdot |\nabla u|^2 \cdot \exp \left[-\frac{\theta}{D_1} u \right] \cdot H \left(\frac{\theta}{k} \right) \cdot H \left(\frac{u}{k} \right) \\ & + \int_{\Omega} b \cdot |\nabla v|^\alpha \cdot \psi_1 \cdot \exp \left[-\frac{\theta}{D_1} u \right] \cdot H \left(\frac{\theta}{k} \right) \cdot H \left(\frac{u}{k} \right) \\ & \leq \int_{\Omega} f \cdot \psi_1 \cdot \exp \left[-\frac{\theta}{D_1} u \right] \cdot H \left(\frac{\theta}{k} \right) \cdot H \left(\frac{u}{k} \right) \end{aligned}$$

où $\omega(\varepsilon)$ désigne une quantité qui tend vers 0 quand ε tend vers 0. Maintenant, nous choisissons

$$\psi_1 = -\varphi_1 \cdot \exp \left[-\frac{\theta}{D_1} u \right] \cdot H \left(\frac{\theta}{k} \right) \cdot H \left(\frac{u}{k} \right)$$

où $\varphi_1 \geq 0$, $\varphi_1 \in D(\Omega)$ et nous remplaçons ψ_1 par cette expression dans l'inégalité précédente pour obtenir

$$\omega \left(\frac{1}{k} \right) - \int_{\Omega} u \cdot \varphi_1 \cdot H^2 \left(\frac{\theta}{k} \right) \cdot H^2 \left(\frac{u}{k} \right) - D_1 \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi_1 \cdot H^2 \left(\frac{\theta}{k} \right) \cdot H^2 \left(\frac{u}{k} \right)$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} u \cdot \nabla u \cdot \nabla \theta \cdot \varphi_1 \cdot H^2 \left(\frac{\theta}{k} \right) \cdot H^2 \left(\frac{u}{k} \right) - \int_{\Omega} \theta \cdot |\nabla u|^2 \cdot \varphi_1 \cdot H^2 \left(\frac{\theta}{k} \right) \cdot H^2 \left(\frac{u}{k} \right) \\
& - \frac{D_1}{k} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \theta \cdot \varphi_1 \cdot H \left(\frac{\theta}{k} \right) \cdot H' \left(\frac{\theta}{k} \right) \cdot H^2 \left(\frac{u}{k} \right) + \int_{\Omega} u \cdot \nabla u \cdot \nabla \theta \cdot \varphi_1 \cdot H^2 \left(\frac{\theta}{k} \right) \cdot H^2 \left(\frac{u}{k} \right) \\
& - \frac{D_1}{k} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \cdot \varphi_1 \cdot H^2 \left(\frac{\theta}{k} \right) \cdot H \left(\frac{u}{k} \right) \cdot H' \left(\frac{u}{k} \right) - \int_{\Omega} b \cdot |\nabla v|^{\alpha} \cdot \varphi_1 \cdot H^2 \left(\frac{\theta}{k} \right) \cdot H^2 \left(\frac{u}{k} \right) \\
& - \int_{\Omega} a \cdot |\nabla u|^2 \cdot \varphi_1 \cdot H^2 \left(\frac{\theta}{k} \right) \cdot H^2 \left(\frac{u}{k} \right) + \int_{\Omega} \theta \cdot |\nabla u|^2 \cdot \varphi_1 \cdot H^2 \left(\frac{\theta}{k} \right) \cdot H^2 \left(\frac{u}{k} \right) \\
& \leq - \int_{\Omega} f \cdot \varphi_1 \cdot H^2 \left(\frac{\theta}{k} \right) \cdot H^2 \left(\frac{u}{k} \right)
\end{aligned}$$

En développant les calculs en remarquant que le sixième et le huitième terme sont équivalents à $\omega \left(\frac{1}{k} \right)$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} u \cdot \varphi_1 \cdot H^2 \left(\frac{\theta}{k} \right) \cdot H^2 \left(\frac{u}{k} \right) - D_1 \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi_1 \cdot H^2 \left(\frac{\theta}{k} \right) \cdot H^2 \left(\frac{u}{k} \right) \\
& - \int_{\Omega} \left[a \cdot |\nabla u|^2 + b \cdot |\nabla v|^{\alpha} \right] \cdot \varphi_1 \cdot H^2 \left(\frac{\theta}{k} \right) \cdot H^2 \left(\frac{u}{k} \right) + \omega \left(\frac{1}{k} \right) \\
& \leq - \int_{\Omega} f \cdot \varphi_1 \cdot H^2 \left(\frac{\theta}{k} \right) \cdot H^2 \left(\frac{u}{k} \right)
\end{aligned}$$

Finalement, nous passons à la limite quand k tend vers l'infini et nous utilisons le fait que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} H \left(\frac{\theta}{k} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} H \left(\frac{u}{k} \right) = 1$$

pour conclure que, pour chaque $\varphi_1 \geq 0$, $\varphi_1 \in D(\Omega)$, nous avons

$$\int_{\Omega} \left[u - D_1 \Delta u + a(x) |\nabla u|^2 + b(x) |\nabla v|^{\alpha} \right] \cdot \varphi_1 \geq \int_{\Omega} f \cdot \varphi_1$$

De la même manière, nous multiplions la seconde équation dans (10.5) par Φ_2 et nous intégrons sur Ω . En étudiant séparément chaque terme comme dans le cas précédent, en utilisant encore les lemmes 5.1, 5.2 et 5.3, nous choisissons

$$\psi_2 = -\varphi_2 \cdot \exp \left[-\frac{\theta}{D_2} u \right] \cdot H \left(\frac{\theta}{k} \right) \cdot H \left(\frac{v}{k} \right)$$

où $\varphi_2 \geq 0$, $\varphi_2 \in D(\Omega)$ et nous remplaçons ψ_2 par cette expression dans l'inégalité obtenue pour conclure que, pour chaque $\varphi_2 \geq 0$, $\varphi_2 \in D(\Omega)$ nous avons

$$\int_{\Omega} \left[v - D_2 \Delta v + c(x) |\nabla u|^{\beta} + d(x) |\nabla v|^2 \right] \cdot \varphi_2 \geq \int_{\Omega} g \cdot \varphi_2$$

Ceci termine la démonstration du théorème 5.1.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. Alaa, S. Mesbahi, *Existence result for triangular Reaction-Diffusion systems with L^1 data and critical growth with respect to the gradient*, Mediterr. J. Math. 10 (2013), 255-275. (Cité pages 10, 13, 16, 45, 66, 107, 134 et 136.)
- [2] N. Alaa, N. Idrissi, M. Pierre, *Quasilinear elliptic degenerated equations with nonlinearity in the gradient and L^1 data*, Int. Nat. J. of Math. and Stat. Winter 2010, Vol 7, N W10. (Cité pages 12, 66, 84, 107 et 108.)
- [3] N. Alaa, N. Idrissi, J. R. Roche, A. Tounsi, *Mathematical analysis for a model of Nickel-Iron alloy electrodeposition on rotating disk electrode : parabolic case*, Int. J. Math. Stat. 2 (2008), So8, 30-48. (Cité pages 15, 45, 84, 85 et 107.)
- [4] N. Alaa, F. Maach, I. Mounir, *Existence for some quasilinear elliptic systems with critical growth nonlinearity and L^1 data*, J. of App. Anal. Vol. 11, No. 1 (2005), 81-94. (Cité pages 9, 36, 45, 73, 108, 113, 118 et 119.)
- [5] N. Alaa, M. Igurnane, *Weak Periodic Solutions of Some Quasilinear Elliptic Equations with data measures*, Issue 3, Article 46, JIPAM, 3, 2002. (Cité pages 11, 37, 38, 73, 84 et 107.)
- [6] N. Alaa, I. Mounir, *Weak solutions for some reaction-diffusion systems with balance law and critical growth with respect to the gradient*, Ann. Math. Blaise Pascal 8(2). (2001), 1-19. (Cité pages 13, 38, 75, 84 et 107.)
- [7] N. Alaa, I. Mounir, *Global existence for reaction-diffusion systems with mass control and critical growth with respect to the gradient*, J. Math. Anal. Appl. 253 (2001), 532-557. (Cité pages 6, 13, 27, 37, 38, 45, 77, 84, 107 et 108.)
- [8] N. Alaa, *Solutions faibles d' equations paraboliques quasi-linéaires avec données initiales mesures*, Ann. Math. Blaise Pascal 3(2) (1996), 1-15. (Cité pages 6, 16, 27, 66 et 107.)

- [9] N. Alaa, M. Pierre, *Weak solution of some quasilinear elliptic equations with measures*, SIAM J. Math. Anal. **24**(1) (1993), 23-35. (Cité pages 6, 26, 46, 84, 85, 117, 134 et 136.)
- [10] RE. Baker, *Mathematical Biology and Ecology Lecture Notes*. 2011. (Cité pages 9, 27, 32, 46, 47, 84, 85, 107, 108 et 134.)
- [11] P. Baras, *Semilinear Problem With Convex Nonliarity*, In *Recent Advances in Nonlinear Elliptic and Parabolic Problems*, Proc. Nancy 88, Ph. Bénéilan, M. Chipot, L.C. Evans, M. Pierre ed. Pitman Res. Notes in Math. 1989. (Cité pages 6, 27, 45, 84, 85, 107 et 134.)
- [12] P. Baras, M. Pierre, *Problèmes Paraboliques Semi-Linéaires Avec Données Mesures*, Applicable Analysis, 18 (1984), pp. 11-49. (Cité pages 11, 13, 16, 27, 45, 74, 84, 108, 109 et 134.)
- [13] H. Amann, M. G. Crandall, *On some existence theorems for semi linear equations*, Indiana Univ. Math. J. 27 (1978), 779-790. (Cité pages 9, 37, 38, 66, 108 et 139.)
- [14] A. Bensoussan, L. Boccardo, F. Murat, *On a non linear partial differential equation having natural growth terms and unbounded solution*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **5**(4) (1988), 347-364. (Cité pages 9, 75, 87, 88, 107 et 135.)
- [15] L. Boccardo, F. Murat, J. P. Puel, *Existence de solutions non bornées pour certaines équations quasi-linéaires*, Portugal. Math. **41** (1982), 507-534. (Cité pages 6, 38, 75, 84, 107, 134 et 135.)
- [16] N. Boudiba, *Existence globale pour des systèmes de réaction-diffusion avec contrôle de masse*, Ph.D. thesis, Université de Rennes I, France, 1999. (Cité pages 11, 13, 28, 66, 108, 109 et 134.)
- [17] H. Brezis, W. Strauss, *Semilinear elliptic equation in L^1* , J. Math. Soc. Japan **25** (1973), 565-590. (Cité pages 6, 30, 32, 45, 84, 94, 107 et 141.)
- [18] Y. Choquet-Bruhat, J. Leray, *Sur le problème de Dirichlet quasilinéaire d'ordre deux*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. **274** (1972), 81-85. (Cité pages 6, 13, 14, 30, 66, 68, 69, 85, 87 et 108.)

- [19] W. E. Fitzgibbon, J. Morgan, *Existence of solutions for a class of weakly coupled semilinear elliptic systems*, J. Differential Equations **77** (1989), 351-368. (Cité pages 11, 27, 69, 84, 85 et 108.)
- [20] W. E. Fitzgibbon, J. Morgan, Sanders, R., *Global existence and boundedness for class of inhomogeneous semilinear parabolic systems*, Nonlinear Anal. **19**(9) (1992), 885-899. (Cité pages 16, 25, 27, 36, 74, 84 et 112.)
- [21] B.A. Grzybowski, *Chemistry in Motion : Reaction-Diffusion Systems for Micro- and Nanotechnology*, Wiley, (2009). (Cité pages 6, 13, 14, 27, 38, 74, 84, 108 et 134.)
- [22] S. L. Hollis, R. H. Martin, M. Pierre, *Global existence and boundeness in reaction diffusion systems*, SIAM. J. Math. Anal. **18** (1987), 744-761. (Cité pages 1, 27, 38, 74, 84 et 107.)
- [23] P. L. Lions, *Résolution de problèmes elliptiques quasilinéaires*, Arch. Rational Mech. Anal. **74** (1980), 335-353. (Cité pages 6, 26, 38, 66, 68, 69, 84, 107, 108, 135 et 139.)
- [24] J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolutions des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod ; Gauthier Villars, Paris, 1969. (Cité pages 9, 26, 58, 84, 107, 139 et 144.)
- [25] F. Maach, *Existence pour des systèmes de réaction-diffusion quasi-linéaires avec loi de balance*, Ph.D. thesis, Université Henri Poincaré, Nancy I, France, 1994. (Cité pages 9, 27, 31, 73 et 108.)
- [26] J. D. Murray, *Mathematical Biology I : An Introduction*, volume I. Springer-Verlag, 3rd edition, 2003. (Cité pages 9, 28, 32, 73, 107 et 134.)
- [27] J. D. Murray, *Mathematical Biology II : Spatial Models and Biochemical Applications*, volume II. Springer-Verlag, 3rd edition, 2003. (Cité pages 9, 38, 66, 107 et 134.)
- [28] H. G. Othmer, S. R. Dunbar and W. Alt. *Models of dispersal in biological systems*. J. Math. Biol., **26**, (1988) 263-298. (Cité pages 12, 37, 38, 66, 107 et 134.)
- [29] M. Pierre, *Global existence in reaction-diffusion systems with dissipation of mass : a survey*, to appear in Milan Journal of Mathematics. (Cité pages 12, 28, 71 et 134.)

- [30] M. Pierre, *An L^1 -method to prove global existence in some reaction-diffusion systems*, in "Contribution to Nonlinear Partial Differential Equations", Vol. II (Paris, 1985), Pitman Res. Notes Math. Ser. **155** (1987), 220-231. (Cité pages 6, 31, 32, 34, 35, 36, 45 et 51.)
- [31] M. Pierre, D. Schmitt, *Blow up in reaction-diffusion systems with dissipation of mass*, SIAM J. Math. Anal. **28**(2) (1987), 259-269. (Cité pages 13, 27 et 51.)
- [32] M. Pierre, D. Schmitt, *Blow up in reaction-diffusion systems with dissipation of mass*, SIAM Rev. **42**(1) (2000), 93-106. (Cité pages 16, 38 et 134.)
- [33] A. Porretta, *Existence for elliptic equations in L^1 having lower order terms with natural growth*, Portugal. Math. **57**(2) (2000), 179-190. (Cité pages 6, 26, 45 et 75.)
- [34] F. Rothe, *Global Solutions of Reaction-Diffusion Systems, Lectures Notes in Math.* 1072 (1984), Springer, New York. (Cité pages 10, 38, 74 et 134.)
- [35] J. T. Schwartz, *Nonlinear Functional Analysis*, Gordon and Breach Science Publishers, New York-London, Paris, 1969. (Cité pages 7, 27, 45, 71 et 143.)

CONCLUSION GÉNÉRALE

Cette étude concerne l'existence globale en temps de solutions pour les systèmes de réaction-diffusion présentant deux propriétés essentielles : la positivité des solutions est préservée au cours du temps et la masse totale des composantes est contrôlée, propriété qui est satisfaite si la somme des termes réactifs est négative ou nulle (ou plus généralement a croissance sous linéaire). Ces propriétés apparaissent naturellement dans de nombreux systèmes issus d'applications. L'originalité ici est que les non linéarités (termes réactifs) dépendent non seulement des constituants mais aussi de leurs gradients. Plusieurs résultats partiels d'existence globale pour cette classe de systèmes ont été obtenus avec des hypothèses supplémentaires. Essentiellement celles-ci nécessitent que l'une des composantes de la solution soit uniformément bornée, ce qui est assuré en général par une structure triangulaire des termes réactifs. Ce travail est principalement consacré à l'étude de l'existence globale de solutions dans le cas des données initiales sont peu régulières et les croissances des non linéarités sont critiques. Nous développons des méthodes originales pour surmonter de telles difficultés et nous obtenons des théorèmes d'existence pour ce type de systèmes.

PERSPECTIVES

Dans un avenir proche nous allons aborder les questions intéressantes suivantes :

- Unicité : en considérant la notion de solutions entropiques.
- Système de Réaction-Diffusion anisotropique' c'est-à-dire que les coefficients de diffusion $d_i = d_i(t, x)$ ou plus généralement $d_i = d_i(t, x, u, \nabla u)$, (c'est l'actualité).
- Comportement asymptotique lorsque $t \rightarrow \infty$.
- Simulation numérique

NOTATIONS

$\square$	la fin de la démonstration
$p.p.$	presque partout.
$\mathbb{R}$	l'ensemble des réels
$\mathbb{R}^N$	l'ensemble des vecteurs réels à N dimensions
Ω	un ouvert de $\mathbb{R}^N$
$\partial\Omega$	la frontière de Ω
$-\Delta$	l'opérateur de Laplace
∇	le gradient
$ A $	mesure de l'ensemble A
$supp\rho$	support de la fonction ρ
$D(\Omega)$	l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω
$D'(\Omega)$	l'espace des distributions à support dans Ω
$L^p(\Omega)$	$= \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurable et } \int_\Omega f(x) ^p dx < \infty\}, 1 \leq p < \infty$
$\ f\ _{L^p(\Omega)}$	$= \left(\int_\Omega f(x) ^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$
$L^\infty(\Omega)$	$= \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurable et } \exists C \in \mathbb{R}_+ : f \leq C, \text{ p.p.}\}$
$\ f\ _{L^\infty(\Omega)}$	$= \inf \{C, f(x) \leq C, \text{ p.p.}\}$
$L^1_{loc}(\Omega)$	$= \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurable} : \forall K \subset \Omega, K \text{ compact}, \int_K f(x) dx < \infty\}$
$H^1(\Omega)$	$= \left\{u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i = 1, \dots, N\right\}$
$H^1_0(\Omega)$	$=$ l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$
$\ u\ _{H^1(\Omega)}$	$= \ u\ _{L^2(\Omega)} + \ \nabla u\ _{L^2(\Omega)}$
$W^{1,p}(\Omega)$	$= \left\{u \in L^p(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), \forall i = 1, \dots, N\right\}$
$W^{1,p}_0(\Omega)$	$=$ l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$
$\ u\ _{W^{1,p}(\Omega)}$	$= \ u\ _{L^p(\Omega)} + \ \nabla u\ _{L^p(\Omega)}$

Titre Analyse Mathématique de Systèmes de Réaction-Diffusion Quasi-linéaires avec Données non Régulières

Résumé Le travail constituant cette thèse est une contribution à l'étude et l'analyse mathématique de systèmes de réaction-diffusion. Nous nous intéressons à l'existence de solutions faibles de certaines classes de systèmes de réaction diffusion elliptiques et paraboliques avec données non régulières. Ce travail est alors composé de cinq chapitres indépendants, il est précédé par une introduction générale qui met en évidence l'art du sujet et les problèmes abordés.

Mots-clés systèmes de réaction-diffusion, systèmes elliptiques, systèmes paraboliques, systèmes elliptiques dégénérés, solutions faibles, troncature.

Title Mathematical Analysis of Quasi-linear Reaction-Diffusion Systems with Non-regular Data

Abstract The work that constitutes this thesis is a contribution to the study and the mathematical analysis of reaction-diffusion systems. We are interested in the existence of weak solutions of certain classes elliptic and parabolic of reaction-diffusion systems with non regular data. This work is then composed of five independent chapters, it is preceded by a general introduction that highlights the art of the subject and the problems addressed.

Keywords reaction-diffusion systems, elliptic systems, parabolic systems, degenerate elliptic systems, weak solutions, truncation.