الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي



Sétif 1 University-Ferhat ABBAS
Faculty of Sciences
Department of mathematics



FACULTÉ DES SCIENCES

Mémoire de Master

DOMAINE : Mathématiques et Informatique

FILIÈRE: Mathématique

SPÉCIALITÉ : Mathématiques Appliquées

Thème

Exact Solutions of the Fractional Coupled Boiti-Leon-Pempinelli Equation Using Analytical Techniques

Présenté par :
ZAIDI Imene

Dirigé par :
Dr. HEDLI Riadh

Mémoire Soutenu le 24 septembre 2026, devant le jury composé de :

Président :	Dr. BEROUAL Nabil	Université Sétif 1 Ferhat Abbas
Encadrant :	Dr. HEDLI Riadh	Université Sétif 1 Ferhat Abbas
Examinateur :	Pr. CHOUGUI Nadhir	Université Sétif 1 Ferhat Abbas

Promotion: 2025/2026

Contents

Dedication 2
Acknowledgement 3
List of Figures 6
List of Abbreviations 7
General Introduction 8
1 Some Fundamental Concepts and Properties 10
1.1 Introduction 10
1.2 Definition of a ODE 10
1.3 Definition of a PDE 12
1.4 Classification of PDE 13
1.5 Homogeneous and Inhomogeneous PDEs 15
1.5.1 Homogeneous PDE 15
1.5.2 Inhomogeneous PDE 15
1.6 Solution of a PDE 16
1.7 Fractional Calculus 18
1.7.1 Introduction to Fractional Derivatives 18
1.7.2 Riemann-Liouville Definition 19
1.7.3 Caputo Definition 20
1.7.4 Conformable Fractional Derivative (CFD) 21
1.7.5 Properties of Conformable Derivative 22
1.8 Traveling Waves 24
1.9 Types of Traveling Wave Solutions 25
1.9.1 Solitary Waves and Solitons 26
1.9.2 Periodic Waves 27
1.9.3 Kinks 28
1.9.4 Peakons 28
1.9.5 Cuspons 29
1.9.6 Compactons 30
1.10 The Coupled Boiti-Leon-Pempinelli (CBLP) Equation 31
1.10.1 Introduction 31
1.10.2 Mathematical Formulation 31
2 The Sub-Equation and Extended tanh-Function Methods 34
2.1 Introduction 34
2.2 Basic idea of the methods 34
2.2.1 The Sub-Equation Method 34
2.2.2 The Extended tanh-Function Method 36
2.3 Examples 37
2.3.1 The Sub-Equation Method 37
2.3.2 The Extended tanh-Function Method 39
3 Analytical Solutions of the Fractional Coupled Boiti–Leon–Pempinelli Equation 42
3.1 Introduction 42
3.2 Mathematical Formulation and Detailed Wave Reduction 43
3.3 Method I: The Sub-Equation Method 44
3.4 Method II: The Extended tanh-Function Method 46
3.5 Comparative Analysis and Discussion 47
3.6 Physical Application 47

Conclusion 53
Bibliography I
Abstract III

Abstract
This thesis investigates the exact analytical solutions for the time-fractional Coupled Boiti-Leon-Pempinelli (CBLP) equation in (2+1) dimensions. The mathematical formulation is developed using the framework of the Conformable Fractional Derivative (CFD). By employing a suitable fractional wave transformation, the governing system of non-linear coupled partial differential equations is successfully reduced to a non-linear second-order ordinary differential equation.
Two effective direct integration techniques are implemented: The Sub-Equation Method and The Extended tanh-Function Method. These approaches yield a diverse class of exact traveling wave solutions, including kink-type solitons, dark solitons, singular solutions, and combined hyperbolic wave profiles. Furthermore, 2D and 3D graphical visualizations generated via Maple highlight the impact of the fractional order ℓ on wave amplitude, steepness, and propagation velocity. These derived solutions provide useful physical insights into shallow water wave interactions, non-linear fiber optics, and plasma dynamics.
Keywords: Nonlinear Partial Differential Equations (NLPDEs), Fractional Calculus, Conformable Fractional Derivative, Coupled Boiti-Leon-Pempinelli Equation, Sub-Equation Method, Extended tanh-Function Method, Traveling Wave Solutions, Solitons.

Résumé

Cette mémoire est consacrée à l'étude et à l'extraction de solutions analytiques exactes pour l'équation couplée de Boiti-Leon-Pempinelli fractionnaire (CBLP) en dimensions (2+1). L'étude est menée dans le cadre de la dérivée fractionnaire conformable (CFD). En utilisant une transformation d'onde fractionnaire appropriée, le système d'équations aux dérivées partielles non linéaires couplées est réduit à une équation différentielle ordinaire non linéaire du second ordre.
Pour résoudre cette équation, deux méthodes analytiques directes sont appliquées : la méthode de la sous-équation (Sub-Equation Method) et la méthode de la fonction tanh étendue (Extended tanh-Function Method). Ces méthodes ont permis de construire une variété de solutions d'ondes progressives, notamment des solitons de type Kink, des solitons sombres (Dark), des solutions singulières et des formes combinées. De plus, les représentations graphiques en 2D et 3D réalisées à l'aide du logiciel Maple illustrent l'influence significative de l'ordre fractionnaire ϵ sur l'amplitude et la vitesse de propagation des ondes, offrant des interprétations physiques utiles dans la dynamique des vagues en eau peu profonde, l'optique non linéaire et la physique des plasmas.
Mots-clés: Équations aux dérivées partielles non linéaires (EDPNL), Calcul fractionnaire, Dérivée fractionnaire conformable, Équation couplée de Boiti-Leon-Pempinelli, Méthode de la sous-équation, Méthode de la fonction tanh étendue, Solutions d'ondes progressives, Solitons.

ملخص
تتناول هذه المذكرة دراسة واستخراج الحلول التحليلية الدقيقة لمعادلة بويتي-ليون-بيمبينيلي الكسرية المقترنة في بُعدين مكانيين وبُعد زمني (1+2). تُطبَّق هذه الدراسة اعتمادًا على مفهوم المشتق الكسري المتوافق ، حيث أُجري تحويل موجي كسري اختزل النظام المقترن وغير الخطّي من المعادلات التفاضلية الجزئية إلى معادلة تفاضلية عادية غير خطية من الدرجة الثانية .
لتحقيق هذا الهدف، أُستُخدمت طريقتان تحليليتان دقيقتان: طريقة المعادلة الفرعية وطريقة دالة tanh\ الممتدة . مكّنت هاتان الطريقتان من الحصول على مجموعة واسعة ومتنوعة من حلول الأمواج المتنقلة، بما في ذلك أمواج السوليتون من نوع الكينك ، والأمواج المظلمة ، والحلول المفردة ، والحلول المركبة. كما أظهرت التحليلات والرسومات البيانية ثنائية وثلاثية الأبعاد المُنجزة بواسطة برنامج Maple التأثير المباشر لمرتبة المشتق الكسري alpha\ على سعة الموجة وسرعة انتشارها، مما يسهم في نمذجة الظواهر الفيزيائية مثل انتشار أمواج المياه الضحلة، والتفاعلات غير الخطية في الألياف البصرية والبلازما .
الكلمات المفتاحية:
معادلات تفاضلية جزئية غير خطية
حساب كسري
مشتق كسري متوافق
معادلة بويتي-ليون-بيمبينيلي المقترنة طريقة المعادلة الفرعية
طريقة دالة tanh\ الممتدة
حلول الأمواج المتنقلة
سوليتون.