

Chapitre III
THÉORIE DES ENSEMBLES FLOUS ET DU SYSTEME
D'INFERENCE FLOU

Théorie des Ensembles Flous et du Système d'Inférence Flou

III.1 Introduction

La logique floue (*fuzzy logic*, en anglais) est une logique polyvalente qui est alternative à la logique classique bivalente. Les valeurs de vérité des variables - au lieu d'être vrai ou faux - sont des réels entre 0 et 1. En ce sens, elle étend la logique booléenne classique avec des valeurs de vérités partielles. Elle consiste à tenir compte de divers facteurs numériques pour aboutir à une décision qu'on souhaite acceptable. La logique floue est une technique de résolution de problèmes très puissants avec une large applicabilité dans le control et la prise de décision [36]. Elle est très utile lorsque le modèle mathématique du problème à traiter n'existe pas ou existe mais difficile à implémenter, ou il est trop complexe pour être évalué assez rapidement pour des opérations en temps réel [12] [36,37], ou bien lorsque des experts humains sont disponibles pour fournir des descriptions subjectives du comportement du système avec des termes en langage naturel. La logique floue est aussi supposée de travailler dans les situations où il y a de large incertitude et des variations inconnues dans les paramètres et la structure du système. Les systèmes flous appartiennent à la classe des "systèmes à base de connaissance" [36]. Leur but principal consiste à implémenter un savoir-faire humain sous forme d'un programme informatique. Les régulateurs flous modélisent l'expérience humaine sous forme de règles linguistiques "**si...alors**" ; un moteur d'inférence calcule les actions de commande pour chacune des situations données. Les algorithmes basés sur la logique floue sont considérés comme une solution très intéressante pour le réglage des systèmes non linéaires pour lesquels il n'existe pas de modèle mathématique [36] [12]. Cette théorie est très attractive, parce qu'elle est basée sur le raisonnement intuitif et prend en compte la subjectivité et l'imprécision. Mais ce n'est pas une théorie imprécise, c'est une théorie mathématique rigoureuse, adaptée au traitement de tout ce qui est subjectif et/ou incertain [12].

III.1.1. Exemples introductifs

Exemple 1 : Afin de mieux appréhender la logique envisagée, nous proposons, l'étude rigoureuse des divers aspects relatifs à la commande floue, d'examiner l'exemple qui suit représenté par la figure (III.1), dont le but est de donner une idée de la commande floue

en vue de permettre de mieux comprendre l'intérêt pratique des développements mathématiques présentés dans la suite de ce volume [38].

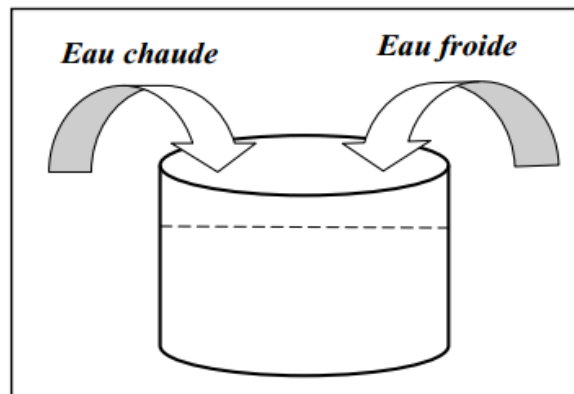


Fig. III.1 : Exemple introductif

Considérons une personne désirant compléter le niveau d'un réservoir contenant de l'eau à une température donnée de façon à remplir ce réservoir d'eau à une température souhaitée T à l'aide d'un mitigeur. Dans un premier temps, nous considérons trois températures possibles de l'eau d'alimentation : froide T_F , chaude T_C et tiède T_T . L'eau du réservoir pourra être appréciée comme froide, tiède ou chaude avec une certaine marge d'incertitude si on ne dispose pas d'appareils de mesure de température.

La commande du mitigeur sera simple :

- Si l'eau du réservoir est froide, mettre de l'eau chaude.
- Si l'eau du réservoir est tiède, mettre de l'eau tiède.
- Si l'eau du réservoir est chaude, mettre de l'eau froide.

Sans appareils de mesure précis, on a peut-être donné une information plus nuancée, telle que « tiède et plutôt chaude » et également définir des intervalles de température pour lesquels il n'y a pas d'incertitude comme « l'eau est nettement chaude » ou « réellement froide » et des zones pour lesquelles on peut hésiter. Dans ce cas, on peut définir une quantification, éventuelle grossière, du degré d'appartenance $\mu(T)$ à l'une des classes « tiède », « chaud » et « froid ». La valeur 1 correspond à une appartenance 100%, et 0 à la non appartenance.

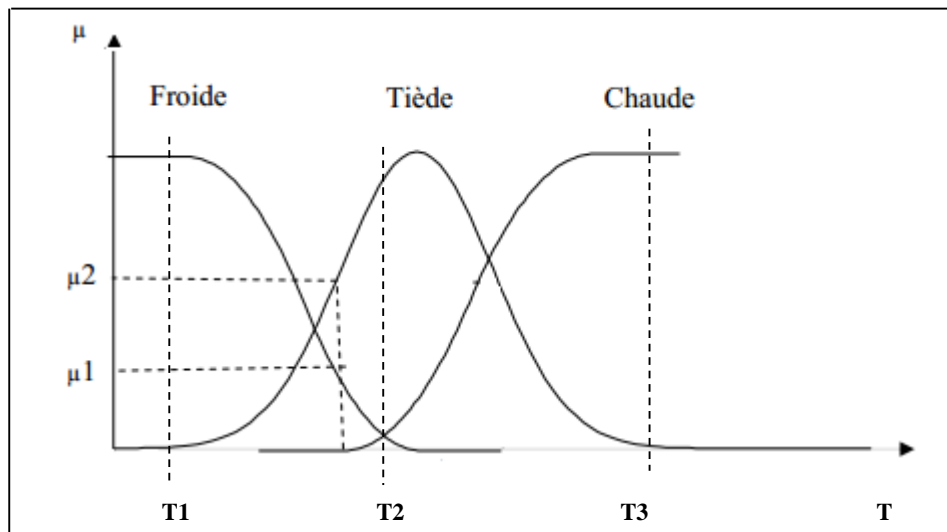


Fig. III.2 : Fonction d'appartenance, variable et terme

Dans l'exemple considéré :

- Pour $T = T_2$, l'eau est tiède
- Pour $T \leq T_1$, l'eau est froide
- Pour $T \geq T_3$, l'eau est chaude
- Pour $T \in] T_1, T_2[$, on hésite entre froide et tiède
- Pour $T \in] T_2, T_3[$, on hésite entre tiède et chaude

Un autre choix de répartition en classes aurait pu être défini suivant notre sensibilité, de façon à pouvoir par la suite associer à chaque classe une décision ou commande donnée : « si l'eau du réservoir est froide ajouter de l'eau chaude » correspond au principe de base de la détermination d'une commande floue. Pour simplifier nous dirons que la « fuzzification » est « l'opération » qui a une valeur donnée à la variable associée à un sous-ensemble flou particulier. Sa mise en œuvre conduit « l'expert » à proposer « une répartition en classes » des « caractéristiques » des propriétés considérées. Si l'on est maintenant capable de faire une mesure, même imprécise de la valeur $\mu(T)$ de la température de l'eau du réservoir, il faut pouvoir en déduire une valeur de la température d'alimentation, c'est-à-dire prendre la décision qui correspond à la classe d'appartenance la plus probable.

Exemple 2 : Pourquoi la logique floue ? Qu'elles sont les limites de la logique classique ?

Pour répondre à cette question nous donnons l'exemple suivant :

Un patient atteint d'hépatite présente généralement les symptômes suivants :

- le patient a une forte fièvre
- sa peau présente une coloration jaune
- il a des nausées

La figure (III.3) montre comment la logique classique et la logique floue traduit la donnée de la température sous forme d'une fonction d'activation.

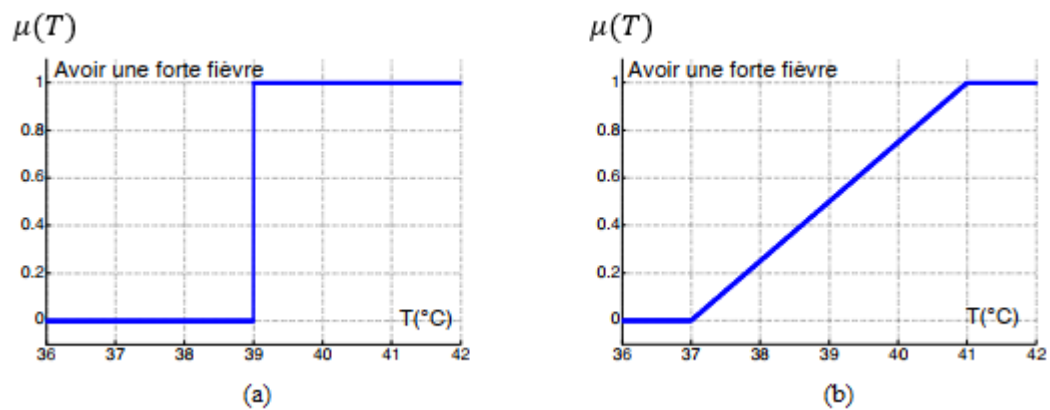


Fig. III.3 : (a) Degré d'activation en logique classique, (b) Degré d'activation en logique floue

Le patient a 38.9°C

- En **logique classique** : le patient n'a pas de forte fièvre => **pas d'hépatite**

- En **logique floue** : le patient a une forte fièvre à 50% => **hépatite à x%**

III.1.2 Historique [41]

Nous venons de voir que la logique floue sert à représenter des connaissances incertaines et imprécises. La commande floue sert à prendre une décision même si l'on ne peut pas estimer les entrées/sorties qu'à partir de prédicats vagues ou lorsque ses entrées/sorties sont entachées d'erreurs que l'on peut évaluer que grossièrement en utilisant une base de règles évaluées par des experts. On conçoit l'intérêt de faire entrer l'approche floue dans la régulation ou l'asservissement des processus industriels, pour lesquels les informations disponibles sont souvent imprécises, incertaines et parfois qualitatives, dans des boucles

de régulation parfois incomplètes. Le savoir-faire de l'opérateur, constitué entre autres souvent des règles simples, lui permet de conduire chaque machine plus correctement par rapport à un algorithme classique. Les prémisses de la logique floue sont apparues avant les années 1940, avec les premières approches, par des chercheurs américains, du concept d'incertitude. Il a fallu attendre 1965, pour que le concept de sous ensemble floue soit proposé par Lotfi *Zadeh*, automaticien de réputation internationale, professeur à l'université de Berkeley en Californie, qui a contribué à la modélisation de phénomène sous forme floue, en vue de pallier les limitations dues aux incertitudes des modèles classiques à équation différentielle. En 1974, M. *Mamdani* expérimentait la théorie énoncée par *Zadeh* sur une chaudière à vapeur, matériel dont on connaît la complexité, introduisant ainsi la commande floue dans la régulation d'un processus industriel. Plusieurs applications ont alors vu le jour en Europe, pour des systèmes parfois très complexes, telle la régulation de fours de cimenterie réalisée par la société F. L. Smidt-Fuller. Grâce au chercheur japonais *M.Sugeno*, la logique floue était introduite au Japon dès 1985. Les sociétés japonaises comprirent l'avantage à la fois technique et commercial de la logique floue :

- facilité d'implantation
- solution de problèmes multi variables complexes
- robustesse vis à vis des incertitudes
- possibilité d'intégration du savoir de l'expert

L'une des raisons principales est l'énorme succès des équipements domestiques produits par l'industrie Japonaise, utilisant des régulateurs flous [12] : ce marché atteignait 2 milliards de dollars en 1990.

III.2 Concepts Fondamentaux de la logique floue

Comme La science s'appuie sur la notion de mesure, la question qui se pose est : comment représenter les valeurs non mesurables ? Comment représenter ce qui est incertain ou subjectif ? Comment représenter les termes du langage humain ?. Les descriptions linguistiques d'un système sont souvent vagues. Mais le flou n'est pas imprécis. Si une donnée n'est pas connue précisément, elle peut être exprimée par un intervalle de confiance précis [37] [39]. Cet intervalle est un ensemble de valeurs possible pour la donnée.

III.2.1 Univers de discours et classes d'appartenance

L'univers de discours U représente le domaine de fonctionnement du processus, comme la température par exemple. Les problèmes qui peuvent se poser sont :

- Combien de sous-ensembles flous ou bien de prédicats sont nécessaires à la commande et comment les choisir ?
- Est-il nécessaire de choisir chaque prédicat ?

En général, on peut donner un nombre de règles de commande important, mais l'intérêt de la commande floue est que seul un petit nombre de règles est nécessaire. Le nombre de prédicats dépend essentiellement de la manière dont l'expert peut décrire le processus et de la précision souhaitée. Par exemple, en commande floue classique, 5 prédicats (grand, très grand, moyen, petit, très petit) est un bon compromis ; parfois trois peuvent suffire (dans le cas extrêmes, on peut aller jusqu'à 7). L'univers de discours d'une variable couvrira l'ensemble des valeurs prises par cette variable. En pratique, l'intersection entre deux prédicats consécutifs est non nulle, de façon à pouvoir exercer une pondération sur la commande. Il en résulte un chevauchement des variables qui doit être suffisant pour permettre une description continue des variables mais pas trop important pour limiter l'imprécision. Il est notamment envisagé d'éviter que les fonctions d'appartenance de deux prédicats voisins soient simultanément égales à 1.

III.2.2 Variables linguistiques

Le découpage d'un univers de discours U en ensembles flous est tout à fait subjectif et complètement lié au problème à traiter. L'appellation associée à chaque sous ensemble flou constitue ce qu'on appelle « variable linguistique ». Ils servent à modéliser les connaissances imprécises ou vagues sur une variable dont la valeur précise peut être inconnue [42, 43].

Exemple :

On donne un exemple d'un univers de discours à (05) sous-ensembles flous, où chacun de ces derniers prend un «code» ou un nom : ZE : zéro, PM : positif moyen, PG : positif grand, NM : négatif moyen, NG : négatif grand. Les codes représentent les variables linguistiques qui décrivent l'état d'un procédé ou phénomène à étudier.

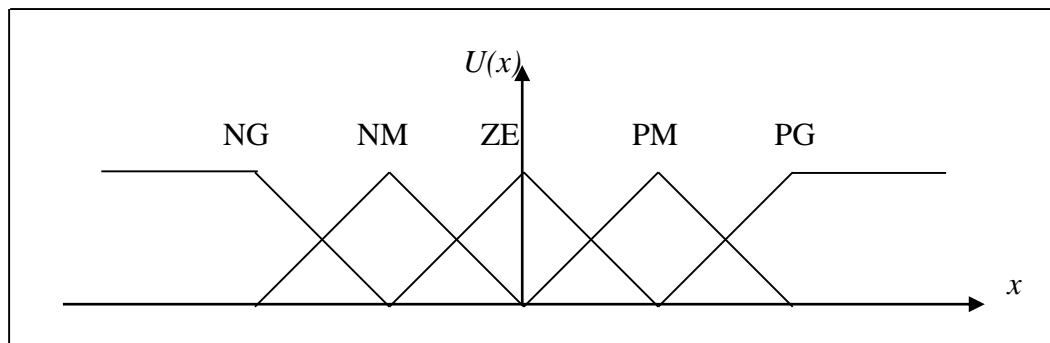


Fig. III.4 : Univers de discours avec (05) sous-ensembles flous

III.2.3 Fonctions d'appartenance

Un ensemble flou A dans U est défini par une fonction d'appartenance qui associe à chaque élément x de U , le degré $\mu_A(x)$, compris entre 0 et 1 avec lequel x appartient à A [44]. Donc un ensemble flou peut être représenté par un ensemble de paires ordonnées :

$$A = \{(x, \mu_A(x)) / x \in U\} \quad (3.1)$$

Tel que : $\mu_A(x)$ La fonction d'appartenance d'une variable x .

U : est appelé l'univers de discours il peut contenir des valeurs continues ou discrètes.

Notation : Si U est discret :

$$A = \sum \mu_A(x) / x \quad (3.2)$$

Si U est continu :

$$A = \int \frac{\mu_A(x)}{x} dx \quad (3.3)$$

Les formes des fonctions d'appartenances sont généralement arbitraires, mais il est judicieux de choisir des fonctions convexes de sorte qu'il existe au moins un point de degré maximal et tel que le degré décroît ; lorsqu'on s'éloigne de ce maximum, comme le montre la figure (III.5).

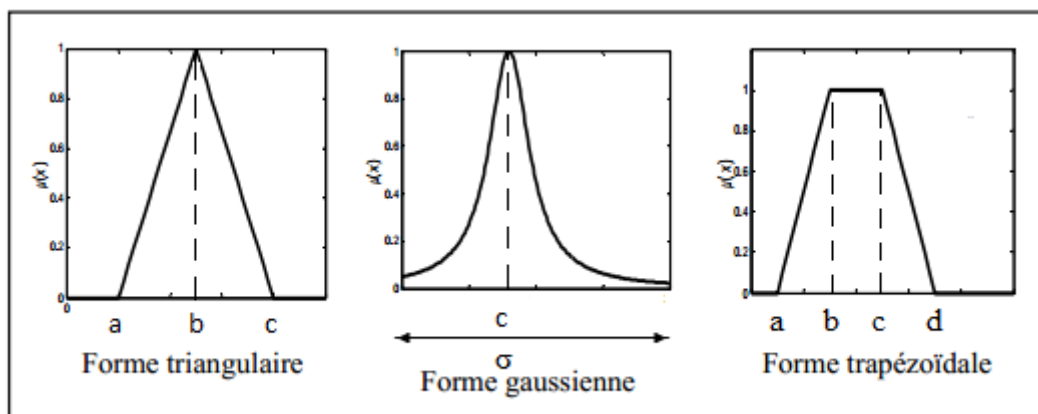


Fig. III.5 : Différentes formes des fonctions d'appartenances

Remarque

La forme gaussienne et la forme trapézoïdale sont généralement utilisées dans le contrôle des procédés chimiques, car la pente supérieure de la fonction (gaussienne, cloche), et la pente inférieure de la fonction (trapézoïdale), permettent au procédé d'avoir le temps pour réaliser ces réactions chimiques.

III.2.4 Les ensembles flous

La théorie des ensembles flous permet de traiter des domaines non exacts, incertains et mal quantifiés, contrairement à la théorie des ensembles nets, notant que les incertitudes d'un système flou sont représentées par les ensembles flous [11]. Dans la théorie classique des ensembles, un objet appartient ou n'appartient pas à un ensemble alors qu'en logique floue, un objet peut appartenir à un ensemble et en même temps à son complément. Tout élément x d'un référentiel (univers de discours) U est muni d'un degré d'appartenance à un ensemble flou A qui décrit le « degré avec lequel l'élément x appartient à A » [40], et qui prend ses valeurs dans l'intervalle $[0,1]$ au lieu du doublet $\{0,1\}$.

III.2.5 Propriété d'un sous-ensemble flou

Les ensembles flous sont décrits par leur fonction d'appartenance $\mu_A(x) \in [0, 1]$. Les propriétés d'un sous ensemble flou A de U les plus utiles pour le décrire, sont celles qui montrent à quel point il diffère d'un sous ensemble classique de U [12] [39], comme le montre la (Fig. III.6).

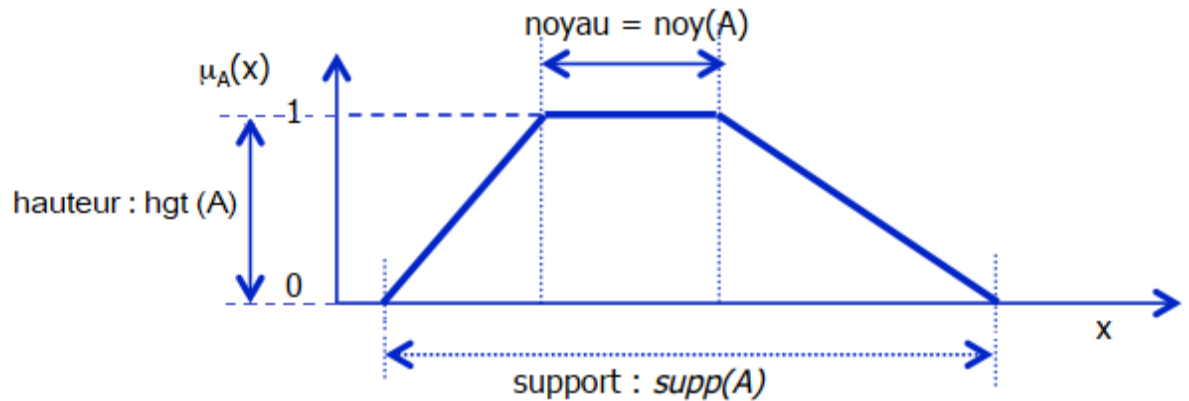


Fig. III.6 : Propriété d'un sous-ensemble flou A

A. support :

Le support de A noté $supp(A)$, est la partie de U sur laquelle la fonction d'appartenance de A n'est pas nulle :

$$Supp(A) = \{ x \in U / \mu_A(x) > 0 \} \quad (3.4)$$

B. La hauteur :

L'élément x de U pour lequel le degré d'appartenance $\mu_A(x)$ est maximal est appelé centre de l'ensemble flou ou la « hauteur » noté par $hgt(A)$.

$$\left[\begin{array}{l} \text{Si } hgt(A) = 1 \text{ } A \text{ est appelé normal.} \\ \text{Si } hgt(A) < 1 \text{ } A \text{ est appelé sous normal.} \end{array} \right. \quad (3.5)$$

C. Le noyau :

Le noyau d'un ensemble flou A est noté par $nucleus(A)$ est défini comme suit :

$$Nucleus(A) = \{ x \in U / \mu_A(x) = 1 \} \quad (3.6)$$

D. Ensemble flou singleton :

Si l'ensemble flou a comme support un seul élément tel que :

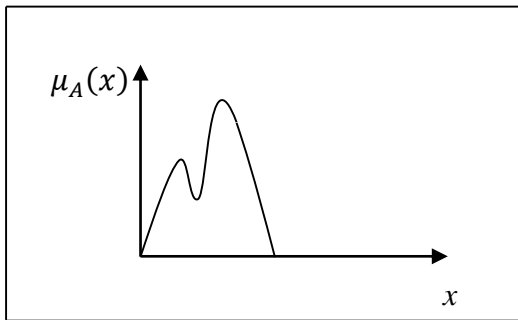
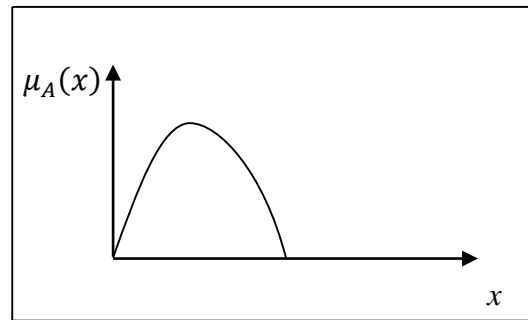
$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_A(x) = 1 \quad \text{si } x = x_0 \\ \mu_A(x) = 0 \quad \text{si } x \neq x_0 \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Donc il est appelé ensemble flou singleton.

E. La convexité :

Un ensemble flou F est convexe si et seulement si :

$$\forall x_1, x_2 \in U, \forall \lambda \in [0, 1] : \mu_A(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \geq \min \{ \mu_A(x_1), \mu_A(x_2) \} \quad (3.8)$$

**Fig. III.7 :** Ensemble flou non convexe**Fig. III.8 :** Ensemble flou convexe**F. Distance de Hamming entre deux sous-ensembles flous**

La distance de Hamming entre deux sous-ensembles flous A et B est une mesure qui dit que le degré global avec lequel les éléments de U appartiennent à A et/ou B :

$$D_H(A, B) = \sum_{x \in U} (\mu_A(x) - \mu_B(x)) \quad (3.9)$$

III.2.6 Opérateurs en logique floue

A et B deux ensembles flous définis sur l'univers de discours U. Soit x et y deux valeurs définies sur des domaines différentes. Les définitions suivantes, représentent les opérateurs logiques les plus redondants :

A. L'opérateur NON (complément)

$$\forall x \in U, \bar{A} = \{ x / x \notin A \} .$$

Ou bien :

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad \forall x \in U \quad (3.10)$$

Exemple :

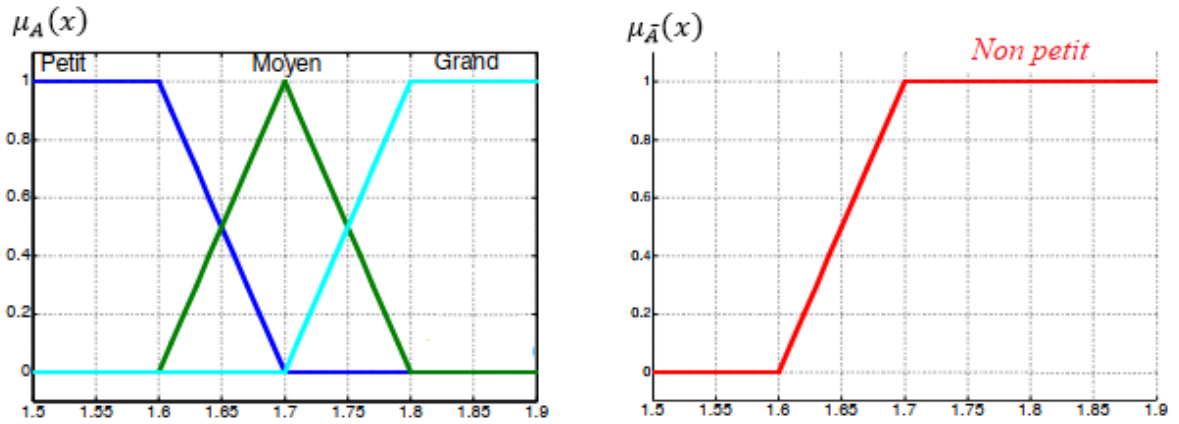


Fig. III.9: L'opérateur NON

B. L'opérateur ET (intersection)

$$\forall x \in U : A \cap B = \{ x / x \in A \wedge x \in B \} .$$

Ou bien : $\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$ (3.11)

Exemple :

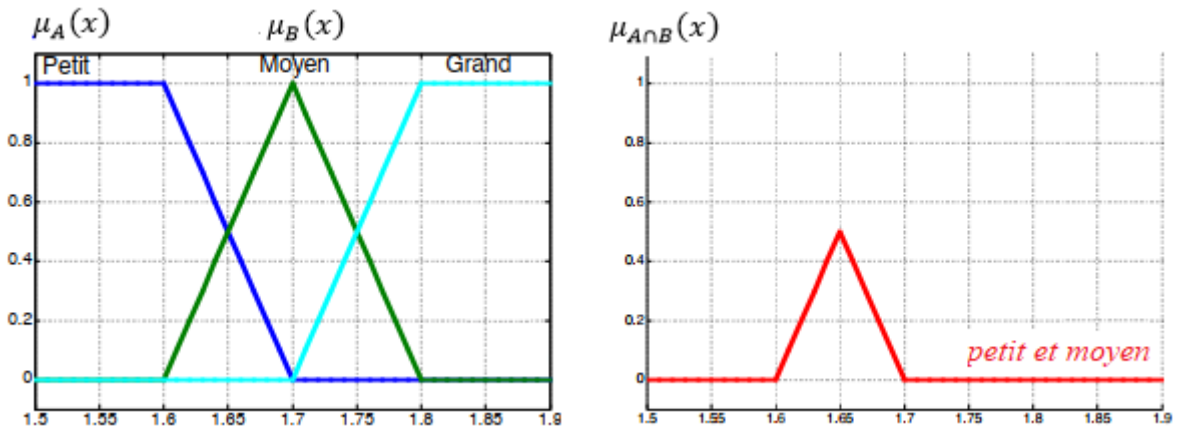


Fig. III.10 : L'opérateur ET

C. L'opérateur OU (union)

$$\forall x \in U : A \cup B = \{ x / x \in A \vee x \in B \}$$

Ou bien : $\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$ (3.12)

Exemple :

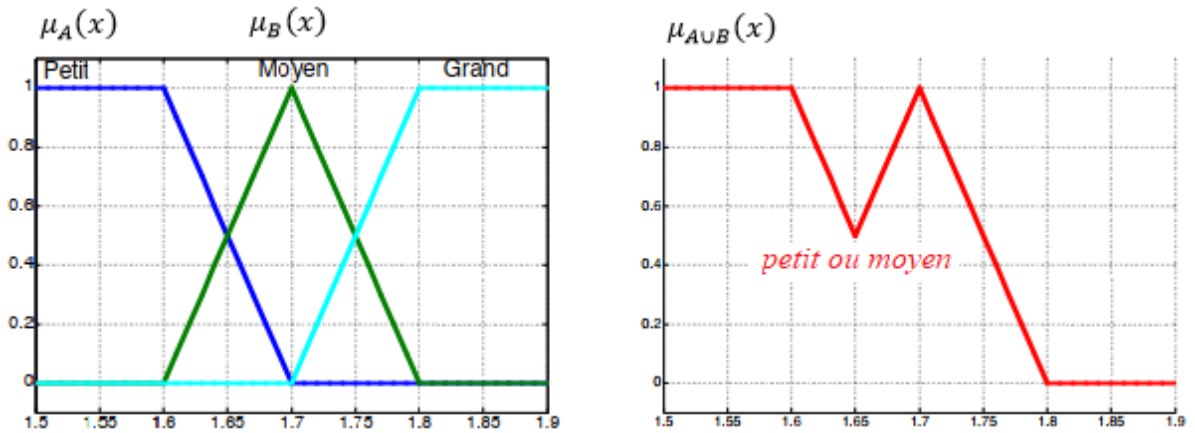


Fig. III.11 : L'opérateur OU

D. Le produit cartésien

Soient A_1, A_2, \dots, A_n des ensembles flous définis sur les univers de discours U_1, U_2, \dots, U_n respectivement, leur produit cartésien est un ensemble flou (relation flou) noté par : $A = A_1. A_2. \dots A_n$, avec une fonction d'appartenance définis par

$$\mu_{A_1, A_2, \dots, A_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min[\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2), \dots, \mu_{A_n}(x_n)] \quad (3.13)$$

Exemple : Nous voulons obtenir une grande vitesse angulaire en consommant une petite énergie.

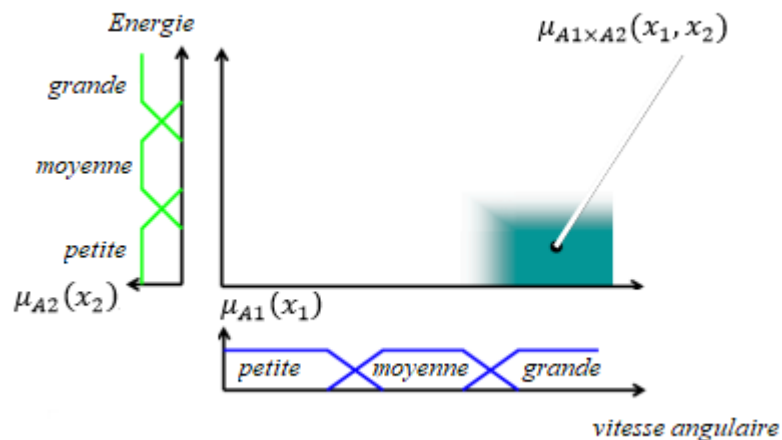


Fig. III.12 : Le produit cartésien

E. Egalité des sous ensemble flous

Deux sous-ensembles flous A et B sont égaux, si leurs fonctions d'appartenance prennent la même valeur pour tout élément de U :

$$\forall x \in U : \mu_A(x) = \mu_B(x) \quad (3.14)$$

III.2.7 Règles linguistiques

L'idée principale des systèmes basés sur la logique floue, est d'exprimer la connaissance humaine sous la forme de règles linguistiques de forme **Si...alors...** Chaque règle a deux parties [45, 22,36]:

- Partie antécédente (prémisse ou condition), exprimée par **Si...**,
- Partie conséquente (conclusion) exprimée par **alors**.

La partie antécédente est la description de l'état du système. La partie conséquente exprime l'action du contrôleur qui doit être exécuté. Chaque règle floue est basée sur une implication floue. La forme générale d'une règle est :

Si (un ensemble de conditions est satisfait) **alors** (un ensemble de conséquences peut être exécuté).

Exemple :

Pour une variable d'entrée (x), appartenant à un univers de discours continu, et des fonctions d'appartenance représentées par trois triangles et des valeurs linguistiques : (négative, zéro, positive), l'ensemble flou relatif à une valeur (0.9) de la variable d'entrée (x) sera alors : (négative, zéro, positive) = (0, 0.3, 0.8). Que l'univers du discours soit continu ou discret, les règles floues activées seront celles dont la valeur linguistique est différente de zéro. Pour cette exemple représentée dans la figure (III.13), avec l'ensemble flou (0, 0.3, 0.8), les règles linguistiques ayant pour prémisse (x est zéro) et (x est positive) seront les seuls règles activées.

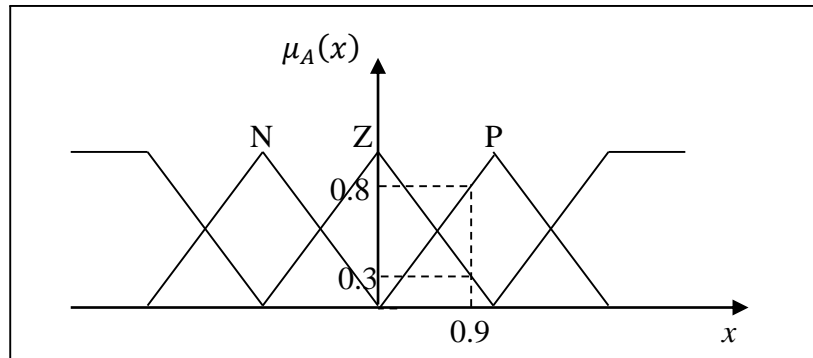


Fig III.13 : Univers de discours avec (03) sous-ensembles flous

III.3 Structure générale d'un contrôleur flou

Le système à base de la logique floue est composé de quatre blocs principaux (Fig. III.14) :

- Fuzzificateur
- Base de connaissances floues,
- Engin d'inférence floue,
- Défuzzificateur.

Chacun de ces blocs fera l'objet d'un développement détaillé.

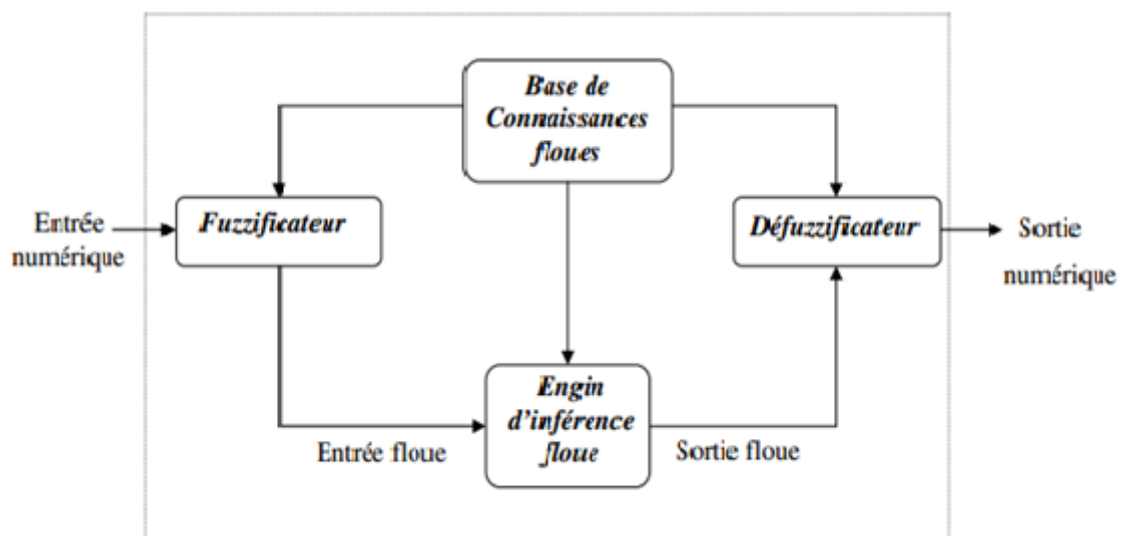


Fig III.14: Structure générale d'un contrôleur flou

III.3.1. Fuzzificateur

Le fuzzificateur effectue la conversion de l'entrée numérique observée :

$$x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})^T \in U$$

En un ensemble flou A_x définie dans U . Cette opération est nécessaire, car dans les applications de la logique floue, les données observées sont souvent numériques, mais dans le système flou la manipulation des données est basée sur la théorie des ensembles flous. Il y'a au minimum deux choix pour cette conversion :

A. Fuzzification singleton

L'opérateur de fuzzification converti l'entrée numérique $x_0 \in U$ en un singleton flou A_i dans U tel que :

$$\begin{aligned} \mu_{A_i}(x) &= 1 \quad \text{Si } x = x_0 \\ \mu_{A_i}(x) &= 0 \quad \text{Si } x \neq x_0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Exemple

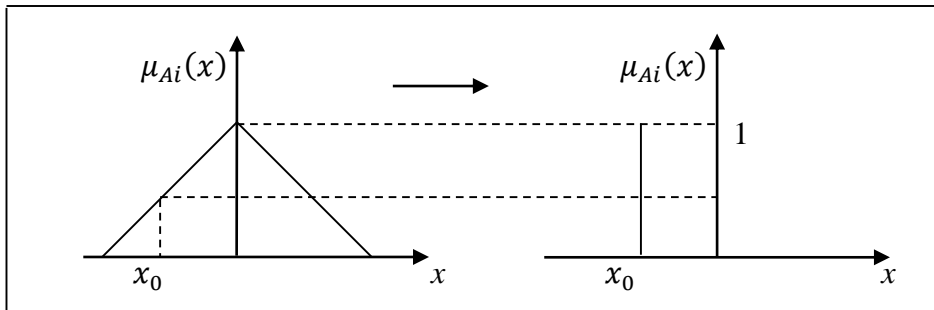


Fig III.15 : Fuzzification singleton

Cette stratégie est largement utilisée dans les applications de contrôle flou, car elle est facile à implémenter.

B. Fuzzification non – singleton

Dans cette fuzzification $\mu_{B_i}(x)$ est égal à l'unité si $x = x_0$ et décroît quand on s'éloigne de x_0 . Soit un sous-ensemble flou triangulaire décrit par la fonction :

$$\begin{cases} \mu_{B_i}(x) = x + a & x \in [-a, 0] \\ \mu_{B_i}(x) = -x + a & x \in [0, a] \end{cases} \quad (3.16)$$

a est un paramètre caractérisant la forme de $\mu_{B_i}(x)$ comme le montre la figure (III.16).

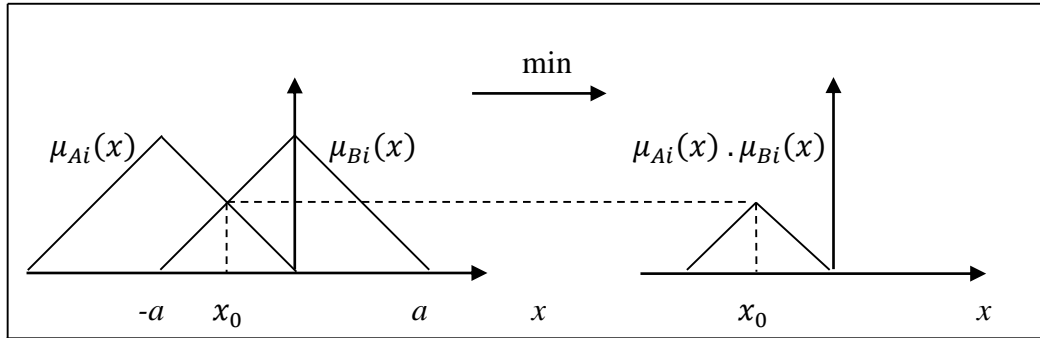


Fig III.16 : Fuzzification non singleton

III.3.2. Engin d'inférence flou (régulateur flou)

Elle repose sur l'utilisation d'un opérateur d'implication permettant d'évaluer le degré de vérité d'une règle R de la forme «**Si** (x_1 est A_1) **et** (x_2 est B_1) **alors** (y est C_1) ». En d'autres termes, cet opérateur quantifie la force de la liaison entre la prémisse et la conclusion de la règle. Les opérateurs les plus courants en commande sont de type conjonctif :

- L'implication de Mamdani (1974) :

$$\mu_R(x, y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad (3.17)$$

- L'implication de Larsen (1980) :

$$\mu_R(x, y) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \quad (3.18)$$

Nous trouvons dans la littérature plusieurs types d'inférences floues [39] parmi lesquels :

A. Mécanisme d'inférence " Max - \otimes "

Cette méthode utilise les représentations standards pour les sous-ensembles d'entrées et de sorties. L'action globale (la valeur de commande) est l'union des actions produites par chaque sous-ensemble individuellement comme le montre l'exemple suivant.

Exemple : Etant données les deux règles suivantes :

R⁽¹⁾ : Si (x_1 est A_1) et (x_2 est B_1) alors (y est C_1) .

R⁽²⁾ : Si (x_1 est A_2) et (x_2 est B_2) alors (y est C_2) .

Pour schématiser la procédure d'inférence on utilise le mécanisme **Max- \otimes** .

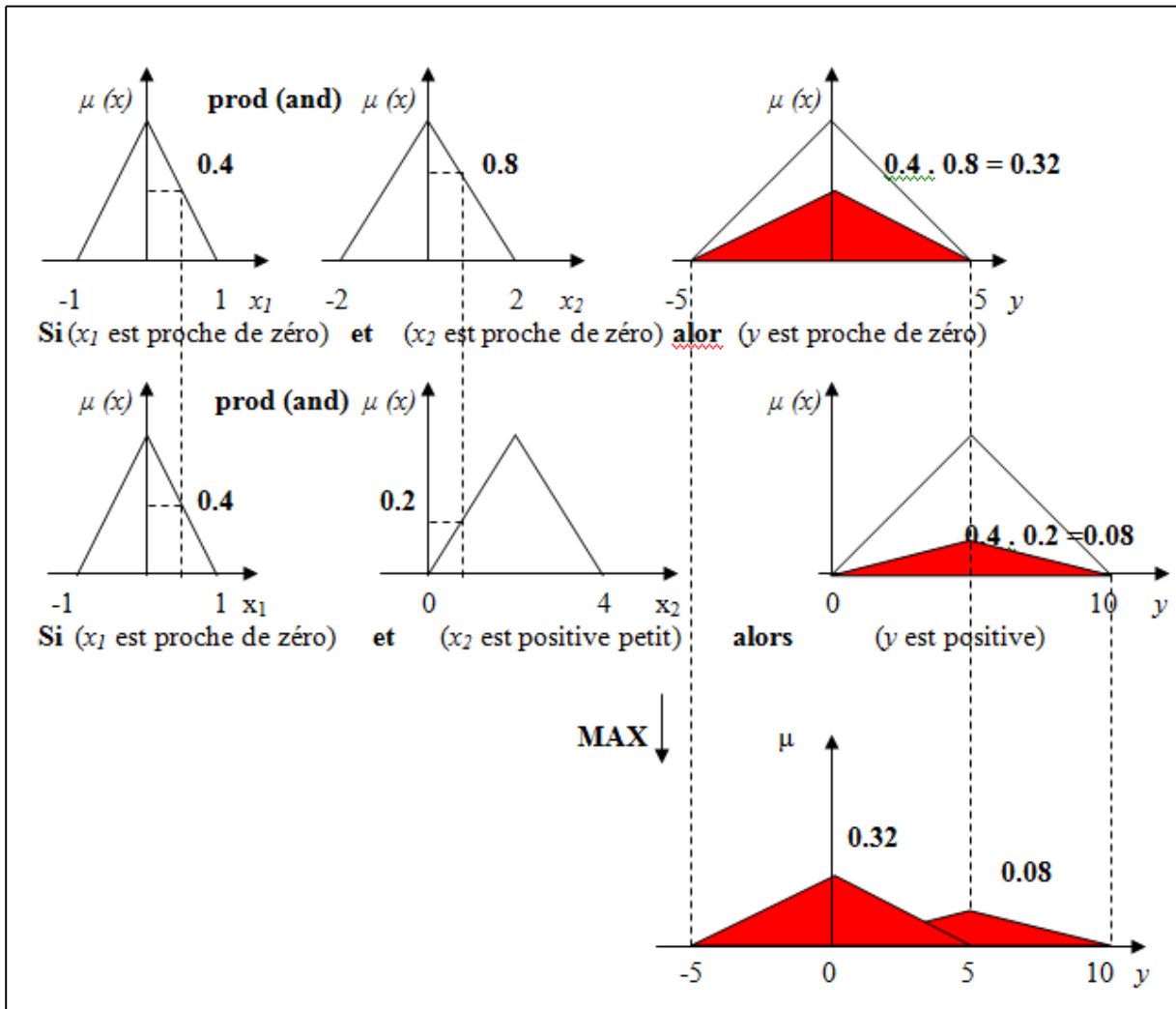


Fig III.17 : Mécanisme d'inférence " Max - \otimes "

B. Mécanisme d'inférence " Max-min "

Cette méthode utilise les mêmes descriptions pour les sous-ensembles de sortie que pour les sous-ensembles d'entré. Pour l'opération et, on utilise l'opérateur **min** comme le montre l'exemple suivant.

Exemple : Etant données les deux règles suivantes :

$R^{(1)}$: Si (x_1 est A_1) et (x_2 est B_1) alors (y est C_1) .

$R^{(2)}$: Si (x_1 est A_2) et (x_2 est B_2) alors (y est C_2) .

Pour schématiser la procédure d'inférence on utilise le mécanisme **Max-min**

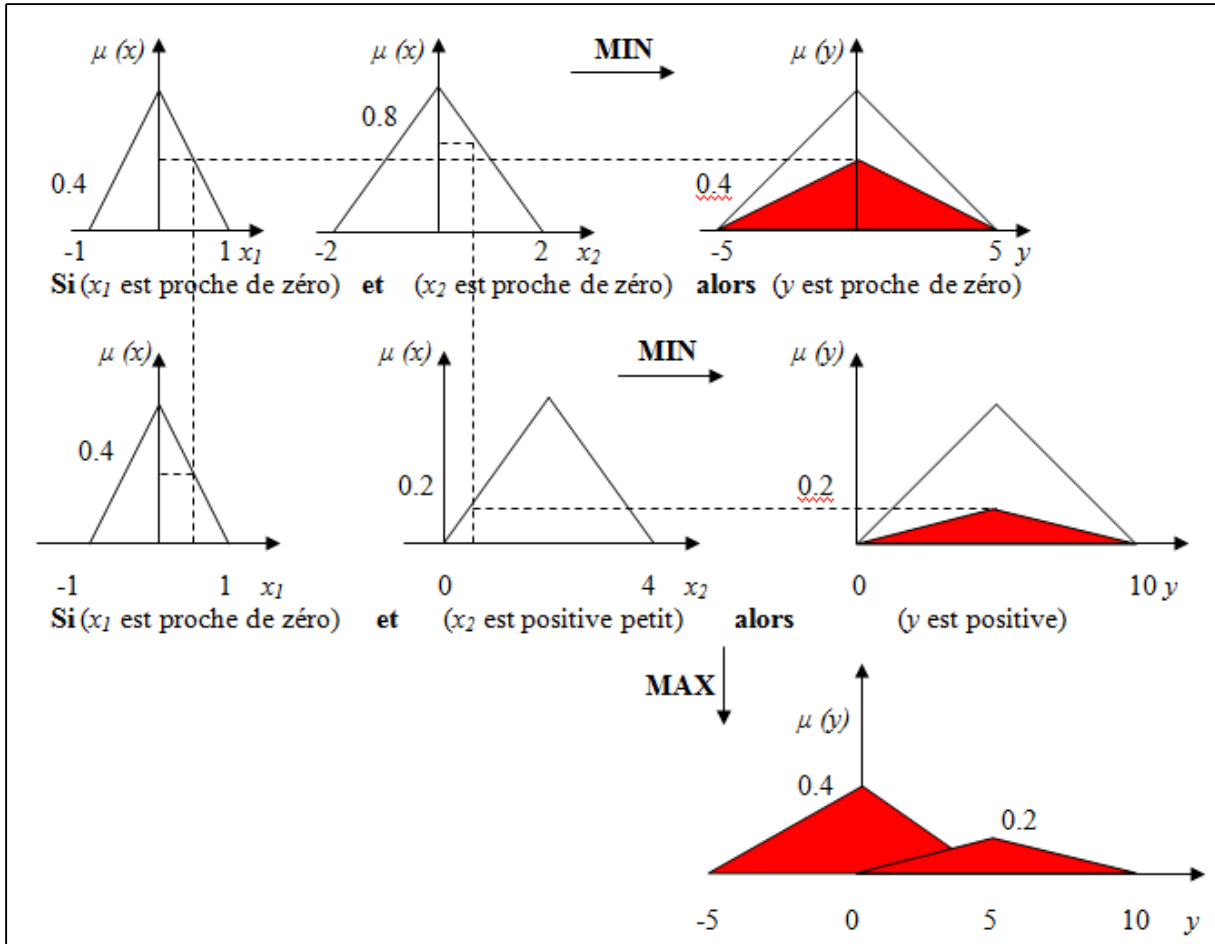


Fig III.18 : Mécanisme d'inférence "Max-min"

C. Mécanisme d'inférence " Somme - \otimes "

Par opposition aux méthodes d'inférence précédentes, la méthode d'inférence **Somme- \otimes** réalise, au niveau de la condition, l'opérateur OU par la formation de la somme, tandis que l'opérateur ET est réalisé par la formation du produit. La conclusion de chaque règle, précédée par le mot **ALORS**, est réalisée par la formation du produit. L'opérateur **OU** qui lie les différentes règles est réalisé par la formation de la somme, donc de la valeur moyenne. Ainsi s'explique la désignation par **Somme- \otimes** de cette méthode d'inférence.

D. Mécanisme d'inférence de Takagi et Sugeno (TS) [13] [45]

Chaque fonction d'appartenance de la sortie est une combinaison linéaire de valeurs d'entrée. La règle de Takagi Sugeno présente une conséquence qui n'est pas un ensemble flou mais une fonction des entrées. Soit la règle linguistique suivante :

Si (x_1 est A_1) **et** (x_2 est A_2) **alors** (y est $B(x)$)

$B(x)$ est une fonction des entrées, nommée fonction de Takagi-Sugeno :

$$B(x) = B_1 x_1 + B_2 x_2 + \dots + B_n a_n$$

$$B^i = \sum_{j=1}^n B_j^i \cdot x_j \quad (3.19)$$

($B_1, B_2 \dots B_n$) : représentent les coefficients de Takagi-Sugeno. Dans cette définition j représente le nombre d'entrées et i représente le nombre de règles.

Pour un vecteur d'entrée $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, la sortie inférée est obtenue par :

D.1- Calcule du degré d'appartenance $\mu_{A_j}^i(x_j)$ de chaque entrée aux différents sous ensemble flous.

D.2- Calcule de la valeur de vérité de chaque règle :

$$\alpha_i(x) = ET.(\mu_{A_1}^i(x_1), \dots, \mu_{A_n}^i(x_n)) \quad (3.20)$$

D.3- Calcule de la sortie du system d'inférence flou (SIF) :

La sortie précise est la moyenne pondérée des poids d'activation et des sorties de fonctions d'appartenance.

$$y = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \cdot B^i / \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \quad (3.21)$$

La sortie obtenue n'est pas floue, ce qui supprime une étape dans l'inférence. Le SIF de type Takagi Sugeno permet donc le passage aisé d'une expression symbolique (la base de règle) à sa traduction numérique. On parle parfois de méthode de Takagi Sugeno simplifiée ou d'ordre zéro quand la conclusion est une constante.

III.3.3 Base de connaissance et modèle de raisonnement flou

Soit un système flou à n entrées et une seule sortie, constitué de n règles de la forme [12]:

$$R_j : \mathbf{SI} (x_1 \text{ est } A_{j,1}) \mathbf{ET} (x_2 \text{ est } A_{j,2}) \dots \mathbf{ET} (x_n \text{ est } A_{j,n}) \mathbf{ALORS} (y \text{ est } B_j) \quad (3.22)$$

Les variables linguistiques x_1, x_2, \dots, x_n et y sont définis dans les univers de discours U_1, U_2, \dots, U_n et V , respectivement. Les labels $A_{j,1}, A_{j,2}, \dots, A_{j,n}$ et B_j représentent les antécédents et la conséquence de la règle R_j . On voit que la partie condition est constituée de n citations liées par le conjonctif "ET". Chaque proposition " x_i est $A_{j,i}$ " induit un ensemble flou caractérisé par une fonction d'appartenance $\mu_{A_{j,i}}(x_i)$. Ainsi, la partie condition de la règle R_j induit un ensemble flou composé $A_j = A_{j,1} \wedge A_{j,2} \wedge \dots \wedge A_{j,n}$ à travers l'espace produit $U = U_1 * U_2 * \dots * U_n \subset R_n$. Cet ensemble est décrit par :

$$\begin{aligned} \mu_{A_j}(x) &= \mu_{A_j}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mu_{A_{j,1}}(x_1) \wedge \mu_{A_{j,2}}(x_2) \dots \wedge \mu_{A_{j,n}}(x_n) \\ &= \bigwedge_{i=1}^n \mu_{A_{j,i}}(x_i) \end{aligned} \quad (3.23)$$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in U$ est le vecteur d'entrée, A_j est l'antécédent composé par l'intersection floue des conditions élémentaires, et ' \wedge ' désigne l'opérateur de conjonction défini, généralement, par l'une des normes T suivantes :

$$\text{- Produit Algébrique : } \mu_1(x_1) \wedge \mu_2(x_2) = \mu_1(x_1) * \mu_2(x_2) \quad (3.24)$$

$$\text{- Minimum : } \mu_1(x_1) \wedge \mu_2(x_2) = \text{Min} [\mu_1(x_1) \wedge \mu_2(x_2)] \quad (3.25)$$

La modélisation floue donc est déduite d'un raisonnement élaboré des états des processus et d'une liste des règles décrivant la manière selon laquelle le modèle doit fonctionner. Afin d'illustrer les idées considérons un système flou avec n règles linguistiques :

Si $x = A_1$ et $y = B_1$ alors $z = C_1$

Si $x = A_2$ et $y = B_2$ alors $z = C_2$

⋮

Si $x = A_n$ et $y = B_n$ alors $z = C_n$

Où x, y et z sont des variables linguistiques qui représente les variables d'état du processus et la variable de contrôle ; A_i, B_i et C_i sont les sous-ensembles flous définis dans les

ensembles de référence pour x , y et z respectivement. Le schéma de ce système est représenté dans la figure (III-19).

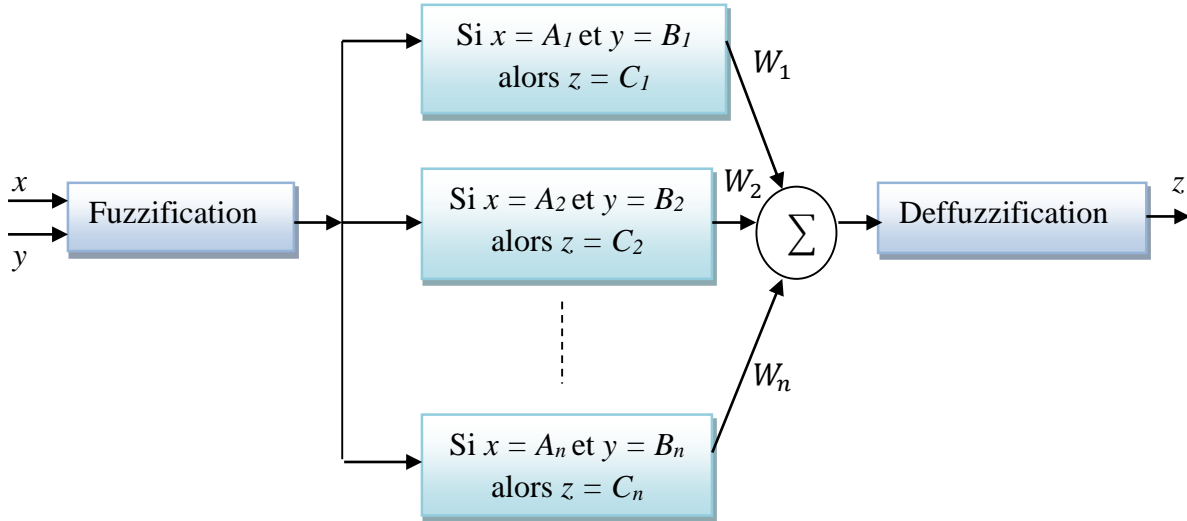


Fig. III.19 : Structure générale de la partie floue du système

Dans le sens mathématique, l'activation de règles est l'application de la fonction **t-norme** pour obtenir le poids d'activation de chaque règle. D'habitude, cela veut dire que l'on applique l'opérateur **min** ou le **produit** sur les valeurs d'appartenance. Dans le cas du système de la figure (III-19), le poids W_i obtenu de la i -ème règle est :

$$W_i = \mu_{A_i}(x) \cdot \mu_{B_i}(y) \quad (3.26)$$

Où $\mu_{A_i}(x)$ et $\mu_{B_i}(y)$ sont les valeurs d'appartenance de x et y respectivement aux sous-ensembles flous A_i et B_i . Cela veut dire que la partie conséquente de la i -ème règle ($Z=C_i$) doit être activée avec un niveau de vérité W_i (poids d'activation ou niveau d'activation).

III.3.4 Defuzzification

Le résultat d'une inférence floue est une fonction d'appartenance. C'est un sous-ensemble flou. Un organe de commande nécessite un signal de commande précis. La transformation floue en une information déterminée est la defuzzification (concrétisation) c.-à-d. que cet interface convertit le sous-ensemble flou de sortie en action de commande physique selon un univers de discours choisi. Il y a plusieurs méthodes de defuzzification

proposées dans la littérature. Il n'y a pas de stratégie systématique pour choisir parmi l'une de ces méthodes [39].

A. Méthode du centre de gravité

L'abscisse du centre de gravité peut être déterminée en utilisant la formule générale :

$$z = \frac{\sum_{i=1}^n \mu_i z_i}{\sum_{i=1}^n \mu_i} \quad (3.27)$$

Où n est le nombre des niveaux de quantification ou bien le nombre des sous-ensembles flous de l'espace de sortie, z_i la valeur de sortie, et μ_i sa valeur d'appartenance.

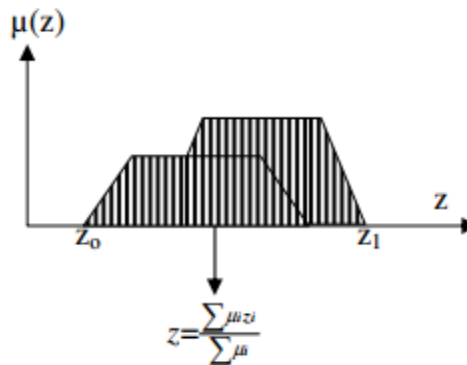
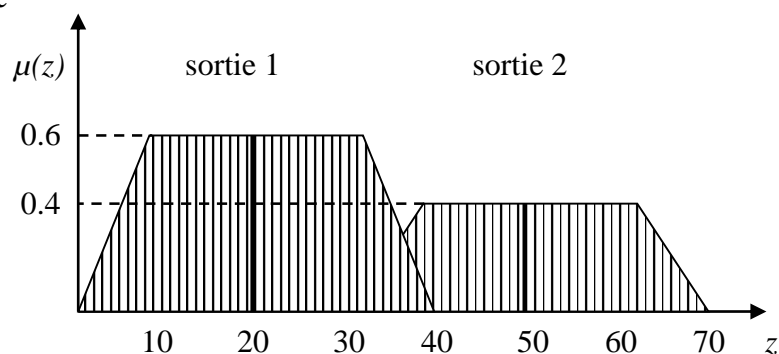


Fig III.20: Défuzzification par le centre de gravité.

Exemple



$$Z = \frac{0.6 * 20 + 0.4 * 50}{0.6 + 0.4} = 32.0$$

B. Méthode de Tsukamoto

La valeur précise de la commande est calculée par l'équation (3.28), où n est le nombre de règles activées avec le poids $W_i > 0$, et Z_i est la valeur de la fonction de sortie pour la $i^{\text{ème}}$ règle.

$$z = \frac{\sum_{i=1}^n w_i z_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \quad (3.28)$$

C. Méthode de moyenne pondérée

Cette méthode est utilisée lorsque les sorties sont définies comme fonctions linéairement dépendantes des entrées, comme la fonction de Takagi Sugeno. En général, la partie conséquente de la règle est $Z = f(x,y)$. Si W_i est le poids d'activation de la $i^{\text{ème}}$ règle, la valeur précise de la commande est :

$$z = \frac{\sum_{i=1}^n w_i f(x_i, y_i)}{\sum_{i=1}^n w_i} \quad (3.29)$$

La variable n représente le nombre de règles activées.

D. La stratégie du maximum

Cette stratégie choisie comme sortie du système la valeur z_0 pour la quelle $\mu_{A(B_1, B_2, \dots)}(z_0)$ soit la plus grande valeur de la fonction d'appartenance de $A(B_1, B_2, \dots)$

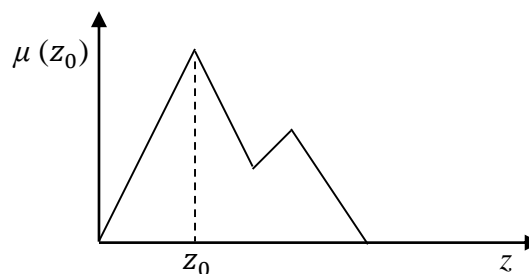


Fig III.21 : Stratégie du maximum

E. La stratégie des hauteurs

Soit Z^i le centre de gravité de la $i^{\text{ème}}$ règle. Le calcul de la sortie est comme suit :

$$Z = \sum_{i=1}^n Z^i \cdot \frac{\mu_c^i(Z^i)}{\sum_{i=1}^n \mu_c^i(Z^i)} \quad (3.30)$$

Bien que cette stratégie est facile à utiliser parce que le centre de gravité des fonctions d'appartenance les plus utilisées est connu en avance.

F. La stratégie des hauteurs modifiée :

La sortie du système flou est calculée par la formule suivante :

$$Z = \sum_{i=1}^n Z^i \cdot \frac{\mu_c^i(Z^i)}{G^i} / \sum_{i=1}^n \mu_c^i(Z^i) / G^i \quad (3.31)$$

Où G^i est une mesure de support de la fonction d'appartenance pour la $i^{\text{ème}}$ règle. Pour les fonctions d'appartenance triangulaires et trapézoïdales et gaussiennes G^i représente respectivement la base du triangle ou du trapézoïde ou l'écart type. Il y a d'autres méthodes de defuzzification proposée dans la littérature telle que [46].

III.4 Avantages et inconvénients des régulateurs flous

A- Avantages : Les avantages principaux des régulateurs flous sont les suivants :

- L'incorporation directe des informations floues et linguistiques, provenant d'un expert humain, dans le système flou.
- Il n'est pas nécessaire de faire un modèle mathématique du système à régler.
- Le système flou est un approximateur universel, c'est-à-dire, il est suffisamment générale pour générer n'importe quelle action.
- La logique floue est facile à comprendre par ceux qui ne sont pas des spécialistes, car elle imite la stratégie du raisonnement humain.
- On peut maîtriser les systèmes non linéaires et difficiles à modéliser.

B- Inconvénients

- Manque de directives précises pour la conception d'un régulateur.
- La phase d'acquisition des connaissances « construction de la base de règles » est la phase la plus difficile dans des cas où le domaine d'expertise n'est pas disponible.

III.5 Conclusion

La majorité des systèmes industriels complexes sont difficiles à contrôler automatiquement. Cette difficulté provient de leurs non-linéarités et de la variation de leurs paramètres. Ces difficultés ont conduit à l'avènement et au développement de nouvelles techniques, telles que la commande floue qui est particulièrement intéressante lorsqu'on ne dispose pas de modèle mathématique précis du processus à commander, ou lorsque ce dernier présente de fortes non linéarités ou imprécisions. La logique floue est une théorie très puissante qui permet d'obtenir des conclusions et de générer des réponses à partir des informations incomplètes et imprécises, là où le monde mathématique du système est inconnu ou difficile à extraire. L'objectif est de concevoir ou de réaliser des systèmes qui peuvent prendre en charge certaines tâches avec la même habileté que possède l'être humain. La phase d'acquisition des connaissances est la plus difficile dans des cas où le domaine d'expertise n'est pas disponible, Pour cette raison, des recherches très poussées ont conduit au développement des méthodes systématiques et optimales pour la conception des contrôleurs flous. Parmi ces méthodes on trouve Les réseaux de neurones qui sont très puissants dans le domaine de l'apprentissage et la reconnaissance. Ceci fera l'objet du prochain chapitre.