الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Setif 1 University Ferhat Abbas
Faculty of Sciences
Department of Mathematics

جامعة سطيف 1 فرحات عباس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

Master's Thesis

in Mathematics

Option : Optimization and control

Theme :

A MULTI-OBJECTIVE UNCERTAIN PORTFOLIO OPTIMIZATION MODEL BASED ON TSALLIS ENTROPY

Presented by

Miss **Ibtihel Bezzah**

Miss **Rania Boudiaf**

Supervisor: **Dr. Souaad Chennaf**

Thesis defended on June 22, 2026, in front of the jury composed of:

Mrs.	Chafia DAILI	Dr.	Setif 1University Ferhat Abbas	President
Mrs.	Souaad CHENNAF	Dr.	Setif 1University Ferhat Abbas	Supervisor
Mr.	Raouf ZIADI	Dr.	Setif 1 University Ferhat Abbas	Examiner

2025 / 2026

Contents

1 Preliminaries **9**
1.1 Uncertainty theory 9
1.1.1 Uncertain measure 9
1.1.2 Uncertain variable 10
1.1.3 Uncertainty distribution 11
1.1.3.1 Regular uncertainty distribution 13
1.1.3.2 Inverse uncertainty distribution 13
1.1.3.3 Independence 15
1.1.4 Operational law 15
1.1.4.1 Functions with monotonicity of single uncertain variables 15
1.1.4.2 Functions with monotonicity of multiple uncertain variables..... 16
1.1.5 Expected value of uncertain variables 16
1.1.6 Variance and covariance of uncertain variables 17
1.1.6.1 Definition and calculation formulae of variance and covariance..... 18
1.2 Entropy of uncertain variables 19
1.2.1 Properties of Tsallis entropy 20
1.2.2 Monte Carlo simulation for Tsallis entropy 21

2 Modeling the uncertain portfolio selection problem **23**
2.1 Single-objective optimization 23
2.2 Multi-objective optimization 24
2.2.1 General form of the multi-objective optimization problem (MOOP)..... 24
2.2.2 Basic definitions and Pareto optimality 24
2.2.3 Formulation of the uncertain bi-objective portfolio optimization model..... 25
2.3 Solution methods 26
2.3.1 Classical methods 26
2.3.1.1 Weighted sum method 26
2.3.1.2 ε-constraint method 27
2.3.1.3 Weighted metric method 29
2.3.2 Metaheuristic optimization methods 31
2.3.2.1 Particle swarm optimization 31
2.3.2.2 Multi-objective particle swarm optimization (MOPSO) 34
2.3.2.3 Genetic algorithm 35
2.3.2.4 Non-dominated sorting genetic algorithm II (NSGA-II) 38

3 Numerical Application **42**
3.1 Numerical example utilising the proposed model 42
3.1.1 Results using classical methods 43
3.1.1.1 Comparative study using classical methods 44
3.1.2 Results using metaheuristic methods 47
3.1.2.1 Comparative study using metaheuristic methods 48

Conclusion **51**
Bibliography **51**

ملخص

يقترح هذا البحث إطارا جديدا متعدد الأهداف لتحسين المحافظ الاستثمارية، يقوم على دمج نظرية عدم اليقين مع إنتروبيا تساليس بوصفها مقياسا للمخاطر. وعلى خلاف النماذج التقليدية التي تشتغل ضمن فضاء احتمالي وتعتمد أساسا على البيانات التاريخية، وهو ما يطرح إشكالات حقيقية في حالات محدودية المعلومات أو عدم استقرارها، ينطلق هذا العمل من فضاء عدم اليقين باعتباره بديلا أكثر مرونة وملاءمة لتمثيل المعطيات غير المكتملة. وتكمن المساهمة الرئيسة في بناء نموذج لتحسين المحافظ الاستثمارية قائم على متوسط عدم اليقين وإنتروبيا تساليس (UMTPO). ويستهدف هذا النموذج تحقيق توازن مزدوج يتمثل في تعظيم العوائد غير المؤكدة وفي الوقت نفسه تقليل المخاطر المقاسة بإنتروبيا تساليس. وتتيح إنتروبيا تساليس، بوصفها تعميما لإنتروبيا شانون، يعتمد على المعلمة المرنة beta\، قدرة أكبر على التقاط سلوك الذيول في توزيعات العوائد المالية، وهو ما تعجز عنه المقاييس التقليدية مثل التباين الذي يظل محدود الحساسية تجاه القيم المتطرفة. ولإيجاد حلول للنموذج المقترح، تم اعتماد مقاربتين كلاسيكيتين إلى جانب خوارزميتين فوق استدلاليتين. وقد أظهر التحليل المقارن، عند مواجهة نموذج ماركويتز والنموذج القائم على إنتروبيا ريني، أن المحافظ المستخلصة من النموذج المقترح تحقق أداء أفضل بصورة مستقرة من حيث العوائد، مع الحفاظ على مستويات أدنى من المخاطر عبر مختلف إعدادات المعلمات.

الكلمات المفتاحية: التحسين متعدد الأهداف، فضاء عدم اليقين، إنتروبيا تساليس، متوسط عدم اليقين لتساليس، نموذج تحسين المحافظ الاستثمارية القائم على متوسط عدم اليقين وإنتروبيا تساليس، الأساليب الكلاسيكية، الخوارزميات فوق الاستدلالية.

Résumé

Ce travail introduit un nouveau cadre multi-objectif pour l'optimisation de portefeuille, intégrant la théorie de l'incertitude avec l'entropie de Tsallis comme mesure du risque. Contrairement aux modèles traditionnels qui opèrent dans un espace probabiliste et reposent sur des données historiques ce qui constitue une difficulté pour les investisseurs publics notre approche s'appuie sur un espace d'incertitude. Notre principale contribution est le développement du modèle d'optimisation de portefeuille basé sur la moyenne incertaine et l'entropie de Tsallis (UMTPO). Ce cadre permet de maximiser simultanément les rendements incertains et de minimiser le risque, lequel est quantifié à l'aide de l'entropie de Tsallis. En utilisant l'entropie de Tsallis, une généralisation de l'entropie de Shannon avec un paramètre flexible β, notre modèle capture plus efficacement le comportement des queues de distribution des rendements, ce qui constitue une limite des mesures conventionnelles telles que la variance. Pour résoudre le modèle proposé, deux approches classiques, ainsi que deux algorithmes métaheuristiques sont utilisés. Enfin, une analyse comparative avec le modèle de Markowitz et un modèle basé sur l'entropie de Rényi montre que le portefeuille issu du modèle proposé surpasse systématiquement les autres en termes de rendement, tout en présentant un risque réduit pour l'ensemble des paramètres spécifiés.

Mots clés : Optimisation multi-objectif, espace d'incertitude, l'entropie de Tsallis, modèle d'optimisation de portefeuille basé sur la moyenne incertaine et l'entropie de Tsallis, approches classiques, algorithmes métaheuristiques.

Abstract

This work introduces a novel multi-objective framework for portfolio optimization that integrates un certainty theory with Tsallis entropy as a risk metric. Unlike traditional models that operate within a probability space and rely on historical data—a challenge for public investors—our approach leverages an uncertain space. Our primary contribution is the development of the uncertain mean-Tsallis entropy portfolio optimization (UMTPO) model. This framework simultaneously maximizes uncertain returns and minimizes risk, which is quantified by Tsallis entropy. By using Tsallis entropy, a generalized form of Shannon entropy with a flexible parameter β, our model more effectively captures the tail behavior of return distributions, a limitation of conventional metrics like variance. To solve the proposed model, two classical approaches and two meta-heuristic algorithms are employed. Finally, a comparative analysis with the Markowitz model and a model based on Renyi entropy shows that the portfolio derived from the suggested model consistently outperforms in terms of returns while exhibiting reduced risk across all specified parameters.

Keywords : Multi-objective optimization, uncertainty space, Tsallis entropy, uncertain mean-Tsallis entropy portfolio optimisation model, classical approaches, meta-heuristic algorithms.