

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ FERHAT ABBAS-SÉTIF 1

THÈSE

Présentée à la Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Option : ALGÈBRE

Par

ROUABHI TAREK

THÈME

Groupes avec une condition sur les parties infinies

Soutenue le : 10/11/2018, devant le jury composé de :

Président	N. DAILI	Prof.	Université Ferhat Abbas Sétif 1
Directeur de thèse	N. MIDOUNE	MCA	Université Mohamed Boudiaf M'Sila
Examineur	A. BOUKAROURA	Prof.	Université Ferhat Abbas Sétif 1
	A. BOUCHAIR	MCA	Université Seddik Ben Yahyia Jijel

TABLE DES MATIÈRES

Liste des symboles	1
Introduction	2
1 Groupes avec certaines conditions combinatoires	8
1.1 Introduction	8
1.2 Le problème de Lennox et Wiegold sur les parties infinies	9
1.3 Quelques résultats similaires au problème de Lennox et Wiegold 13	
1.3.1 Les \mathcal{X}^* -groupes	13
1.3.2 Les $(\mathcal{X}\mathcal{Y})^*$ -groupes	16
1.3.3 Les \mathbf{E}^* -groupes et \mathbf{E}_k^* -groupes	18
2 Une condition de $\mathcal{F}d$ sur les parties infinies	22
2.1 Introduction	22
2.2 $(\mathcal{F}d)^\#$ -groupes et $(\mathcal{F}d_k)^\#$ -groupes	23
2.3 $(\mathcal{M}\mathcal{N})^\#$ -groupes et $(\mathcal{M}\mathcal{N}_k)^\#$ -groupes	31
2.4 $(\mathcal{M}\mathcal{E})^\#$ -groupes et $(\mathcal{M}\mathcal{E}_k)^\#$ -groupes	33
3 Groupes avec une condition de \mathcal{TN} sur les parties infinies	37
3.1 Introduction	37

3.2 Groupes résoluble-par-finis dans $(\mathcal{TN})^\#$ et $(\mathcal{TN}_k)^\#$	38
3.3 Groupes ayant une série normal dans les classes $(\mathcal{TN})^\#$ et $(\mathcal{TN}_k)^\#$	44
4 Groupes avec une condition de $\mathcal{T}_\pi\mathcal{N}$ sur les parties infinies	50
4.1 Introduction	50
4.2 $(\mathcal{T}_\pi\mathcal{N})^*$ –groupes et $(\mathcal{T}_\pi\mathcal{N}_k)^*$ –groupes	51
Bibliographie	57

LISTE DES SYMBOLES

On notera par :

\mathcal{F} : la classe des groupes finis.

\mathcal{A} : la classe des groupes abéliens.

\mathcal{N} : la classe des groupes nilpotents.

\mathcal{N}_k : la classe des groupes nilpotents de classe égale au plus à k .

$\mathcal{N}_k^{(m)}$: la classe des groupes dont tous les sous-groupes engendrés par m éléments sont nilpotents de classe égale au plus à k .

\mathcal{E} : la classe des groupes d'Engel

\mathcal{E}_k : la classe des groupes k -Engel

\mathcal{P} : la classe des groupes polycycliques.

\mathcal{Fd} : la classe des groupes de profondeur finie.

\mathcal{T} : la classe des groupes de torsion (périodiques).

Soient G un groupe, n un entier positif.

$x^y = y^{-1}xy$, où $x, y \in G$.

$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ le commutateur de deux éléments x et y de G .

$[x, {}_0 y] = x$, $[x, {}_n y] = [[x, {}_{n-1} y], y]$

$[x_1, x_2, \dots, x_n] = [[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}], x_n]$ où $x_1, x_2, \dots, x_n \in G$

$$Z_0(G) = 1,$$

$Z_1(G) = Z(G)$ le centre de G

$Z_n(G)$ le $(n + 1)^{\text{ème}}$ terme de la série centrale ascendante de G .

$$\gamma_1(G) = G,$$

$$\gamma_{n+1}(G) = [\gamma_n(G), G]$$

$\gamma_n(G)$ le $n^{\text{ème}}$ terme de la série centrale descendante de G .

$$G^{(0)} = G,$$

$$G^{(1)} = G' = [G, G]$$

$G^{(n)} = [G^{(n-1)}, G^{(n-1)}]$ le $(n + 1)^{\text{ème}}$ terme de la série dérivée de G .

INTRODUCTION

Actuellement, l'étude de la structure des groupes avec certaines conditions combinatoires sur eux, est l'un des sujets intéressants dans lesquels de nombreuses recherches sont impliquées. Une partie importante de ces recherches vient d'une célèbre question de Paul Erdős [60].

Soit G un groupe dont toute partie infinie contient deux éléments distincts x, y tels que $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy = 1$, ou d'autre terme G est un groupe dont toute partie d'éléments ne commutant pas deux à deux est fini.

Paul Erdős s'est intéressé par les ensembles d'éléments de G tel que chaque deux ne commute pas ; et il a posé la question suivante : existe-t-il une borne supérieure finie pour les cardinaux des ces parties finies ?.

La question de P. Erdős a été résolu par l'affirmative par B.H Neumann [60] en montrant que si G est un groupe dont toute partie infinie contient deux différents éléments qui commutent si, et seulement si, le centre de G , $Z(G)$, a un indice fini, donc cet indice est la borne demandée.

Lennox et Wiegold [48] ont prolongé le problème d'Erdős comme suit :

Soit \mathcal{X} une classe (ou une propriété) de groupes et soit G un groupe. Notons par \mathcal{X}^* -groupes, les groupes G dont tout sous-ensemble infini de G contient deux différents éléments x et y tels $\langle x, y \rangle \in \mathcal{X}$. Donc, le théorème de

B.H Neumann [60], affirme que les \mathcal{A}^* -groupes sont les groupes centre-par-fini, où \mathcal{A} désigne la classe des groupes abéliens. Lennox et Wiegold dans leur article [48], ont s'intéressé par les \mathcal{N}^* -groupes et les \mathcal{P}^* -groupes en se restreignant aux groupes résolubles et de type fini, où \mathcal{N} et \mathcal{P} désignent respectivement la classe des groupes nilpotents et polycycliques.

Cette approche qui semble très intéressante et fractueuse à été l'objet de plusieurs travaux et de nombreux documents ont été rédiger dans ce sens, on cite par exemple les résultats obtenus dans [1], [3], [9], [12], [13], [19]—[21], [24], [26], [79] - [80].

Cette thèse se compose de quatre 4 chapitres que nous allons brièvement décrire :

Dans le premier chapitre, on donnera la démonstration détaillé des résultats de Lennox et Wiegold cité ci-dessus [48]. Puis on illustrera quelques résultats connus similaires au problème de Lennox et Wiegold, qui ont été obtenus notamment dans [1], [3], [9], [12], [13], [19]—[21], [24], [26], [51], [79] - [80].

Soit \mathcal{X} une classe (ou une propriété) de groupes. Notons par $\mathcal{X}^\#$ -groupes, les groupes dont toute partie infinie contient deux éléments distincts x, y tels que $\langle x, x^y \rangle$ soit un \mathcal{X} -groupe. Notons que si la classe \mathcal{X} est stable par passage aux sous-groupes, alors tout \mathcal{X}^* -groupe est un $\mathcal{X}^\#$ -groupe.

Soit G un groupe, on dit que le groupe G est de profondeur finie si la série centrale descendante de G se stabilise après un nombre fini d'étapes. Donc G est de profondeur finie si, et seulement si, $\gamma_n(G) = \gamma_{n+1}(G)$ pour un certain entier positif n , où $\gamma_n(G)$ désigne le $n^{\text{ième}}$ terme de la série centrale descendante de G . On note la classe des groupes de profondeur finie par $\mathcal{F}d$. De plus, si k est un entier positif, on dit que G est dans la classe $\mathcal{F}d_k$, si $\gamma_k(G) = \gamma_{k+1}(G)$.

Boukaroura à prouvé dans [13], qu'un groupe G résoluble de type fini est un $(\mathcal{F}d)^*$ -groupe si, et seulement si, G est dans la classe \mathcal{FN} , où \mathcal{FN} désigne la classe des groupes finis-par-nilpotents.

Notons que si G est un groupe fini-par-nilpotent, alors G admet un sous-groupe normal fini N , tel que G/N soit nilpotent. Donc il existe un entier positif c tel que $\gamma_c(G) \leq N$. Or N est fini, d'où $\gamma_n(G) = \gamma_{n+1}(G)$ pour un certain entier positif $n \geq c$, et ainsi les $(\mathcal{FN})^\#$ -groupes sont des $(\mathcal{F}d)^\#$ -groupes.

Dans le deuxième chapitre, on généralisera le résultat de Boukaroura [13], on donnera une caractérisation des $(\mathcal{F}d)^\#$ -groupes dans les groupes hyper-(abélien-par-fini) et de type fini. On prouvera qu'un groupe G hyper-(abélien-par-fini) de type fini est un $(\mathcal{F}d)^\#$ -groupe si, et seulement si, G est fini-par-nilpotent. On prouvera aussi que si $k > 0$ est un entier et si G est un $(\mathcal{F}d_k)^\#$ -groupe hyper-(abélien-par-fini) de type fini, alors il existe un entier $c = c(k)$ tel que $G/Z_c(G)$ soit fini. Notons que notre résultat généralise le résultat de J.C. Lennox [45] qui affirme qu'un groupe résoluble-par-fini de type fini dont les sous-groupes engendrés par deux conjugués sont de profondeur finis, il est fini-par-nilpotent.

Puis on caractérisera les $(\mathcal{MN})^\#$ -groupes et les $(\mathcal{ME})^\#$ -groupes, où \mathcal{M} et \mathcal{E} désigne respectivement la classe des groupes vérifiant la condition minimale sur les sous-groupes et la classe des groupes d'Engel. On démontrera qu'un groupe G hyper-(abélien-par-fini) de type fini est un $(\mathcal{MN})^\#$ -groupe (respectivement, $(\mathcal{ME})^\#$ -groupe) si, et seulement si, G est fini-par-nilpotent. On prouvera aussi que si G est un $(\mathcal{MN}_k)^\#$ -groupe (respectivement, $(\mathcal{ME}_k)^\#$ -groupe) hyper-(abélien-par-fini) de type fini, alors il existe un entier $c = c(k)$ tel que $G/Z_c(G)$ soit fini.

Dans le chapitre trois, on donnera une caractérisation des $(\mathcal{TN})^\#$ -groupes, où \mathcal{T} désigne la classe des groupes de torsion (périodiques) et \mathcal{N} la classe des groupes nilpotents. Dans la première section, on établira que si G est

une extension d'un groupe résoluble par un groupe fini de type fini est un $(\mathcal{TN})^\#$ –groupes si, et seulement si, G est une extension d'un groupe de torsion par un groupe nilpotent. On établira aussi que si $k > 0$ est un entier et si G est un $(\mathcal{TN}_k)^\#$ –groupe résoluble-par-fini de type fini, alors il existe un entier $c = c(k)$ tel que G est dans la classe \mathcal{TN}_c , où \mathcal{N}_k désigne la classe des groupes nilpotents de classe égale au plus à k . Pour ce faire, nous allons ramener l'étude de la classe $(\mathcal{TN}_k)^\#$ à celle de $(\mathcal{N}_k)^\#$, laquelle est incluse dans la classe \mathbf{E}_{k+1}^* des groupes dont toute partie infinie contient deux éléments distincts x, y tels que $[y,_{k+1} x] = 1$; si bien que l'on pourra utiliser les résultats établis dans [3].

Notons par Ω la classe des groupes ayant une série normale finie dont les facteurs sont abéliens ou finis. Dans la deuxième section de ce chapitre, on améliorera le résultat obtenu dans la première section en considérant que le groupe est dans Ω ; on établira que si G est un groupe dans Ω de type fini est un $(\mathcal{TN})^\#$ –groupe si, et seulement si, G est torsion-par-nilpotent. On établira aussi que si $k > 0$ est un entier positif et si G est un $(\mathcal{TN}_k)^\#$ –groupe dans Ω de type fini, alors il existe un entier $c = c(k)$ tel que G est dans la classe \mathcal{TN}_c . Notons que les résultats obtenus dans ce chapitre généralise le résultat obtenus dans [80] affirmant qu'un groupe G résoluble de type fini est dans la classe des $(\mathcal{TN})^*$ –groupes si, et seulement si, G est dans la classe \mathcal{TN} .

Soit $\pi = \{p/p : \text{premier}\}$ un sous ensemble de l'ensemble des nombres premiers. Soit $n > 1$ un entier, on dit que n est un π – nombre si, et seulement si, les diviseurs premiers de n sont dans π . Soit G un groupe, on dit que G est π – groupe si, et seulement si, tout élément x de G est un π – élément, c'est à dire que $o(x)$ est un π – nombre.

Dans le dernier chapitre, on donnera une caractérisation des $(\mathcal{T}_\pi\mathcal{N})^*$ –groupes. Plus précisément, on établira qu'un $(\mathcal{T}_\pi\mathcal{N})^*$ –groupe G résoluble de type

fini, alors G est une extension d'un groupe de \mathcal{T}_π par un groupe fini-par-nilpotent. On établira aussi que si $k > 0$ est un entier positif et si G est un $(\mathcal{T}_\pi \mathcal{N}_k)^*$ -groupe résoluble de type fini, alors il existe un entier $c = c(k)$ tel que G soit dans $\mathcal{T}_\pi(\mathcal{FN}_c)$, où \mathcal{N}_k désigne la classe des groupes nilpotents de classe égale au plus à k .

CHAPITRE 1

GROUPES AVEC CERTAINES CONDITIONS COMBINATOIRES

1.1 Introduction

Lennox et Wiegold [48], en s'inspirant de la question de P. Erdős, ont formulé le problème suivant :

Soit \mathcal{X} une classe (ou une propriété) de groupes donnée, caractériser les \mathcal{X}^* -groupes G dont toute partie infinie de G contient deux éléments distincts engendrant un \mathcal{X} -groupe.

Dans ce chapitre, On donnera la démonstration des résultats de J.C. Lennox et J. Wiegold concernant les \mathcal{N}^* -groupes et \mathcal{P}^* -groupes, puis on illustrera quelques résultats similaires au problème de Lennox et Wiegold, qui ont été obtenus par plusieurs auteurs. Plus précisément pour les $(\mathcal{F}d)^*$ -groupes, $(\mathcal{FN})^*$ -groupes, $(\mathcal{NF})^*$ -groupes, $(\mathcal{TN})^*$ -groupes, $(\mathcal{MN})^*$ -groupes, $(\mathcal{ME})^*$ -groupes ... etc, où \mathcal{F} , \mathcal{N} , $\mathcal{F}d$, \mathcal{T} , \mathcal{M} et \mathcal{E} désignent respectivement la classe des groupes finis, nilpotents, de profondeur finie, de torsion, vérifiant la condi-

tion minimale sur les sous-groupes et d'Engel.

1.2 Le problème de Lennox et Wiegold sur les parties infinies

Soit G un groupe, on associe à G un graphe $\Gamma(G)$ défini comme suit : les sommets de $\Gamma(G)$ sont des éléments de G , et deux sommets x, y sont reliés par un côté si, et seulement si, x et y ne commutent pas en tant qu'éléments de G , c'est-à-dire que $[x, y] \neq 1$, où $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$. De plus, on dit qu'un sous-graphe $\Gamma(X)$ de $\Gamma(G)$ est complet si chaque sommet est relié avec tous les autres sommets, où $X \subseteq G$.

P. Erdős s'est intéressé par les sous-graphes complets de $\Gamma(G)$, ou d'une manière équivalente par les ensembles d'éléments de G tel que chaque deux ne commute pas, et il a posé le problème suivant :

Supposons que $\Gamma(G)$ ne contient aucun sous-graphe complet infini, alors est ce qu'il existe une borne finie pour les cardinaux des sous-graphes complets de $\Gamma(G)$?

B.H Neumann [60] a résolu le problème de P. Erdős par l'affirmative en prouvant que $\Gamma(G)$ n'admet pas de sous-graphes complets infinis si, et seulement si, $G/Z(G)$ est fini, où $Z(G)$ est le centre de G .

Lennox et Wiegold [48], ont prolongé le problème de P. Erdős comme suit :

Soit \mathcal{X} une propriété de groupes et soit G un groupe, on peut considérer le \mathcal{X} -graphe, $G_{\mathcal{X}}$, sur G dont les sommets sont les éléments de G , et deux sommets x et y sont connectés par un côté si et seulement si $\langle x, y \rangle \notin \mathcal{X}$. Donc le graphe de B.H. Neumann est $G_{\mathcal{A}}$, où \mathcal{A} est la classe des groupes abéliens.

Notons par \mathcal{X}^* (ou \mathcal{X}^* -groupes) la classe des groupes G tel que $G_{\mathcal{X}}$ ne contient aucun sous-graphe complet infini ou, en langage de la Théorie des

groupes, toute partie infinie de G contient deux différents éléments x et y tels $\langle x, y \rangle \in \mathcal{X}$. Donc, le théorème de B.H Neumann [60], affirme que les \mathcal{A}^* -groupes sont exactement les groupes centre-par-finis.

Lennox et Wiegold ont s'intéressé par les \mathcal{N}^* -groupes et \mathcal{P}^* -groupes dans les groupes résolubles et de type fini, où \mathcal{N} et \mathcal{P} désignent respectivement la classe des groupes nilpotents et la classe des groupes polycycliques.

Ils ont démontré les deux résultats suivants :

Théorème 1.2.1. *Soit G un groupe résoluble de type fini. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) G est un \mathcal{N}^* -groupe;
- (ii) G est fini-par-nilpotent.

Théorème 1.2.2. *Soit G un groupe résoluble de type fini. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) G est un \mathcal{P}^* -groupe;
- (ii) G est polycyclique.

Lennox et Wiegold ont cité deux exemples justifiant le choix des groupes résolubles et de type fini. En effet, il s'agit de l'exemple de M.F. Newman [62] d'un p -groupe 3-engendrés infini dans lequel les sous-groupes 2-engendrés sont (fini et) nilpotent. Il est clair que le groupe n'est pas résoluble car il est p -groupe infini. On a le groupe est un \mathcal{N}^* -groupe (et \mathcal{P}^* -groupe) mais il n'est pas fini-par-nilpotent car il est infini (et il n'est pas polycyclique car il n'est pas résoluble).

Aussi l'exemple de Vaughan-Lee et Wiegold [81] d'un groupe G infini, localement fini, parfait et d'exposant un nombre premier $p \geq 5$, donc tout sous-groupe deux-engendrés est nilpotent. Il est clair que le groupe G ni résoluble ni de type fini. On a G est un \mathcal{N}^* -groupe (et \mathcal{P}^* -groupe), mais il n'est pas fini-par-nilpotent car il infini (et n'est pas polycyclique car il n'est pas résoluble).

Pour démontrer le Théorème 1.2.1, on démontre d'abord le Théorème 1.2.2.

La clé de la démonstration du Théorème 1.2.2, est le Lemme suivant, qui est inclus dans la démonstration du Théorème B du Lennox [43] :

Lemme 1.2.3. *Soit G un groupe résoluble de type fini et A un sous-groupe normal abélien tels que G/A est polycyclique et $\langle a, x \rangle$ est polycyclique pour tout $a \in A, x \in G$. Alors G est polycyclique.*

Passant maintenant à la démonstration du Théorème 1.2.2

Démonstration. Puisque tout groupe résoluble de type fini est polycyclique si et seulement si chaque sous-groupe 2-engendrés est polycyclique [43], donc si G est polycyclique alors G est un \mathcal{P}^* -groupe.

Réciproquement, soit G un groupe résoluble de type fini et supposons que G est un \mathcal{P}^* -groupe. Montrons par récurrence sur la longueur dérivée d de G que G est polycyclique. Si $d = 1$, alors G est abélien, et comme G est de type fini, donc G est polycyclique. Supposons maintenant que $d > 1$ et que le théorème est vrai pour tout groupe de longueur dérivée inférieur à d . Soit $A = G^{(d-1)}$ le dernier terme non-trivial de la série dérivée de G . Par hypothèse de récurrence on a G/A est polycyclique. D'où, d'après le Lemme 1.2.3, il suffit montrer que $H = \langle a, x \rangle$ est polycyclique pour tout $a \in A, x \in G$. Supposons que H n'est pas polycyclique, alors x est d'ordre infini (autrement $\langle a^{x^i}, i \in \mathbb{Z} \rangle$ est de type fini) et donc la séquence

$$xa, x^2a, \dots, x^na, \dots$$

est infinie. Comme H est un \mathcal{P}^* -groupe, alors il existe deux éléments s et r tel que $\langle x^s a, x^r a \rangle$ est polycyclique, donc $\langle x^\alpha, x^r a \rangle$ est polycyclique où $\alpha \neq 0$. Puisque $\langle x^\alpha, (x^\alpha)^{x^r a} \rangle \leq \langle x^\alpha, x^r a \rangle$. Or $\langle x^\alpha, (x^\alpha)^{x^r a} \rangle = \langle [x^\alpha, x^r a], x^\alpha \rangle = \langle [x^\alpha, a], x^\alpha \rangle =$

$\langle [a, x^\alpha], x^\alpha \rangle$, donc $\langle [a, x^\alpha], x^\alpha \rangle$ est polycyclique. Si $[a, x^\alpha] = 1$ et comme $[x, x^\alpha] = 1$, alors $x^\alpha \in Z(H)$ on obtient que H est polycyclique, une contradiction. D'où on suppose que $y = [a, x^\alpha]$ est non trivial et comme $y^{\langle x^\alpha \rangle} \leq \langle y, x^\alpha \rangle = \langle [a, x^\alpha], x^\alpha \rangle$ alors $y^{\langle x^\alpha \rangle}$ est polycyclique donc vérifie la condition maximal sur les sous groupes, ainsi $y^{\langle x^\alpha \rangle}$ est de type fini, et alors $y^{\langle x \rangle}$ est de type fini. Puisque $y^{\langle x \rangle} \leq A$ est abélien et de type fini, on a $y^{\langle x \rangle}$ est polycyclique. Puisque $H/y^{\langle x^\alpha \rangle}$ est polycyclique, alors H est polycyclique, ce qui est contradictoire et le Théorème suit. \square

On passera maintenant à la démonstration du Théorème 1.2.1

Démonstration. Il est clair que si G est fini-par-nilpotent, alors G est un \mathcal{N}^* -groupe. Réciproquement, soit G un \mathcal{N}^* -groupe résoluble de type fini, donc G est un \mathcal{P}^* -groupe, et d'après le Théorème 1.2.2, G est polycyclique. Puisque G vérifie la condition maximale sur les sous-groupe, on peut supposer que tout image propre de G est fini-par-nilpotent mais G ne le soit pas. Comme G est résoluble, il admet un sous-groupe non-trivial A normal, abélien et sans torsion tel que G/A soit fini-par-nilpotent. Soit $x \in A$ et $y \in G$, alors la séquence

$$yx, y^2x, \dots, y^r x, \dots$$

est infinie, d'où par hypothèse $\langle y^m x, y^n x \rangle$ est nilpotent pour deux entiers positifs m et n ; comme $\langle y^m x, y^n x \rangle = \langle y^r, y^m x \rangle$ pour $r = n - m$, ainsi $\langle y^r, y^m x \rangle$ est nilpotent. Il s'ensuit que $[y^r, {}_t y^m x] = [y^r, {}_t x] = 1$ pour un certain entier t et donc $[y, {}_t x]^r = 1$ car A est abélien et normal dans G . On en déduit que $[y, {}_t x] = 1$ puisque A est sans-torsion. Donc $y \in R(G)$ l'ensemble des éléments d'Engel à droite. Comme G vérifie max, donc d'après le résultat de Baer [67, 7.21], $R(G) = Z_\omega(G)$ le ω -centre de G , alors $y \in Z_\omega(G)$ et $Z_\omega(G) \neq 1$. En particulier $Z_1(G) = Z(G)$ le centre de G est non-trivial. Ainsi $G/Z(G)$ est

fini-par-nilpotent, et d'après le résultat de Hall [37], G est fini-par-nilpotent et le Théorème suit. \square

Remarque 1.2.4. *Notons que le Théorème 1.2.2 généralise un résultat qui est dû à J.C. Lennox [43] affirmant qu'un groupe G résoluble de type fini dont tout sous-groupe 2-engendrés est polycyclique, alors G est polycyclique.*

1.3 Quelques résultats similaires au problème de Lennox et Wiegold

Après les résultats de Lennox et Wiegold [48], plusieurs auteurs ont caractérisé les \mathcal{X}^* -groupes pour diverses classes de groupes \mathcal{X} . Dans cette section, on va illustrer les résultats bien connus qui montre comment la structure d'un groupe peut être influencée par une condition combinatoire sur les parties infinies.

1.3.1 Les \mathcal{X}^* -groupes

Soit G un groupe, on dit que G est de profondeur finie si la série centrale descendante de G se stabilise après un nombre fini d'étapes. Donc G est de profondeur finie si, et seulement si, $\gamma_n(G) = \gamma_{n+1}(G)$ pour un certain entier positif n , où $\gamma_n(G)$ désigne le $n^{\text{ième}}$ terme de la série centrale descendante de G . On notera la classe des groupes de profondeurs finies par $\mathcal{F}d$. De plus, si k est un entier positif, on dit que G est dans la classe $\mathcal{F}d_k$, si $\gamma_k(G) = \gamma_{k+1}(G)$. Il est clair que, tout \mathcal{N}^* -groupe est un $(\mathcal{F}d)^*$ -groupe. Donc les résultats suivants généralise le Théorème de Lennox et Wiegold (Théorème 1.2.1) :

Théorème 1.3.1. *Soit G un groupe résoluble de type fini. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) G est fini-par-nilpotent;

(ii) G est un $(\mathcal{F}d)^*$ –groupe [13, A. Boukaroura];

(iii) G est un $(\mathcal{CN})^*$ –groupe, où \mathcal{CN} désigne la classe des groupes Chernikov-par-nilpotent [42, N. Lemnouar].

De même dans [13] A. Boukaroura, a montré aussi qu'un groupe résoluble de type fini est un $(\mathcal{F}d_k)^*$ –groupe si, et seulement si, il est une extension d'un groupe fini par un groupe dont tout sous-groupe 2-engendrés est nilpotent de classe au plus égale à k (c'est-à-dire que $G \in \mathcal{FN}_k^{(2)}$).

Soit $k > 0$ un entier, soit \mathcal{N}_k dénote la classe des groupes nilpotent de classe au plus égale à k .

C. Delizia dans [19] a caractérisé les $(\mathcal{N}_k)^*$ –groupes. Il a prouvé le résultat suivant :

Théorème 1.3.2. *Soit G un groupe résoluble de type fini. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G est un $(\mathcal{N}_2)^*$ –groupe ;

(ii) $G/Z_2(G)$ est fini.

Dans [21], C. Délizia a montré que ce dernier résultat reste vrai pour les groupes résiduellement finis de type fini. Il a montré :

Théorème 1.3.3. *Soit G un groupe résiduellement fini de type fini. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G est un $(\mathcal{N}_2)^*$ –groupe ;

(ii) $G/Z_2(G)$ est fini.

Mais, il n'est pas possible de prolonger ces deux derniers résultats aux $(\mathcal{N}_k)^*$ –groupes pour $k > 2$; c'est-à-dire si G est un $(\mathcal{N}_k)^*$ –groupe résoluble (ou résiduellement fini) de type fini où $k > 2$, alors $G/Z_k(G)$ n'est pas nécessairement fini. C. Delizia a cité l'exemple de L.C. Kappe et W.P. Kappe d'un groupe G de type fini, sans-torsion, 3-Engel et nilpotent de classe égale exactement 4. Donc le groupe G est résoluble (et résiduellement fini) et G est un

$(\mathcal{N}_3)^*$ –groupe, mais $G/Z_3(G)$ est infini car si $G/Z_3(G)$ est fini on obtient que G est nilpotent de classe au plus égale à 3; une contradiction. Par contre, C. Delizia dans [22] a montré les résultats suivants :

Théorème 1.3.4. *Soit G un groupe résoluble de type fini. Si G est un $(\mathcal{N}_k)^*$ –groupe, alors il existe un certain entier c dépendant de k et de la longueur dérivée de G tel que $G/Z_c(G)$ est fini.*

Théorème 1.3.5. *Soit G un $(\mathcal{N}_k)^*$ –groupe résoluble de type fini de longueur dérivée d . Alors $G/Z_{k^{d-1}}(G)$ est fini.*

C. Delizia [22] a montré aussi que si G est un $(\mathcal{N}_3)^*$ –groupe résoluble de type fini, alors $G/Z_4(G)$ est fini.

Les $(\mathcal{N}_k)^*$ –groupes résolubles de type finis ont été étudié aussi par A. Abdollahi et B. Taeri [9]. Ils ont montré que :

Théorème 1.3.6. *Soit G un groupe résoluble de type fini. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) G est un $(\mathcal{N}_k)^*$ –groupe ;
- (ii) G admet un sous-groupe normal N tel que N soit fini et G/N soit dans la classe $\mathcal{N}_k^{(2)}$, où $\mathcal{N}_k^{(2)}$ désigne la classe des groupes dans lesquels chaque sous-groupes 2-engendré est nilpotent de classe au plus égale à k .

Il a été remarqué dans [9] que si $G/Z_k(G)$ est fini alors G est dans $\mathcal{FN}_k^{(2)}$ mais l'inverse est faux pour $k \geq 3$, même si G est de type fini et résoluble de longueur dérivée trois. Les exemples cités, dû a Neumann [61], sont des groupes sans-torsion et donc résiduellement finis.

C. Delizia, A. Rhemtulla et H. Smith dans [23], ont étendu le résultat obtenu par Delizia [20] (Théorème 1.3.4) à une classe de groupes très intéressantes, la classe des groupes localement gradués.

Rappelons qu'un groupe G est dit localement gradué si tout sous-groupe non-trivial de type finie de G a un quotient fini non trivial.

Ils ont montré :

Théorème 1.3.7. *Soit G un groupe localement gradué de type fini. Si G est un $(\mathcal{N}_k)^*$ –groupe, alors il existe un entier c dépendant de k tel que $G/Z_c(G)$ est fini.*

1.3.2 Les $(\mathcal{X}\mathcal{Y})^*$ –groupes

Soit \mathcal{X}, \mathcal{Y} deux classes de groupes. Rappelons que le produit $\mathcal{X}\mathcal{Y}$ désigne la classe des groupes G qui admettant un sous-groupe normal H tels que $H \in \mathcal{X}$ et $G/H \in \mathcal{Y}$, on dit aussi $\mathcal{X}\mathcal{Y}$ est la classe des groupes \mathcal{X} -par- \mathcal{Y} .

Dans ce qui suit, nous allons donner quelques résultats sur les $(\mathcal{X}\mathcal{Y})^*$ –groupes et les $(\mathcal{X}\mathcal{Y}_k)^*$ –groupes.

Dans son article [79], N. Trablsi, a amélioré le résultat de Lennox et Wiegold (Théorème 1.2.1). Il a caractérisé les $(\mathcal{NF})^*$ –groupes et les $(\mathcal{FN})^*$ –groupes. Il a montré

Théorème 1.3.8. *Soit G est un groupe résoluble de type fini. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) G est un $(\mathcal{NF})^*$ –groupe;
- (ii) G est nilpotent-par-fini.

Théorème 1.3.9. *Soit G est un groupe résoluble de type fini. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) G est un $(\mathcal{FN})^*$ –groupe;
- (ii) G est fini -par-nilpotent.

A. Abdollahi dans [12] a montré le résultat suivant :

Théorème 1.3.10. *Soit G un groupe résoluble de type fini. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) G est un $(\mathcal{FN}_k)^*$ –groupe ;
- (ii) G est admet un sous-groupe normal N tel que N soit fini et G/N soit dans la classe $\mathcal{N}_k^{(2)}$, où $\mathcal{N}_k^{(2)}$ désigne la classe des groupes dans lesquels chaque sous-groupes 2-engendré est nilpotent de classe au plus égale à k (i.e G est $\mathcal{FN}_k^{(2)}$).

Notons que ce résultat est une amélioration du résultat obtenu dans [9] (Théorème 1.3.6) car si G est un $(\mathcal{N}_k)^*$ –groupe, il est un $(\mathcal{FN}_k)^*$ –groupe.

N. Trablsi dans [80] a caractérisé les $(\mathcal{TN})^*$ –groupes, où \mathcal{T} désigne la classe des groupes de torsion. Il a montré

Théorème 1.3.11. *Soit G groupe résoluble de type fini. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) G est un $(\mathcal{TN})^*$ –groupe ;
- (ii) G est torsion-par-nilpotent.

Notons que le Théorème 1.3.11 est une généralisation du Théorème 1.3.9, car la classe des groupes $\mathcal{F} \subset \mathcal{T}$.

A Boukaroura dans [13], a étudié les $(\mathcal{MN})^*$ –groupes et $(\mathcal{ME})^*$ –groupes, où \mathcal{M} désigne la classe de groupes vérifiant la condition minimale sur les sous-groupes et \mathcal{E} la classe des groupes d’Engel. Il a montré :

Théorème 1.3.12. *Soit G un groupe résoluble de type fini. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) G est un $(\mathcal{MN})^*$ –groupe ;
- (ii) G est fini -par-nilpotent.

Comme les $(\mathcal{FN})^*$ –groupes sont des $(\mathcal{MN})^*$ –groupes, alors le Théorème 1.3.12 est une amélioration du Théorème 1.3.9.

Théorème 1.3.13. *Soit G un groupe résoluble de type fini . Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) G est un $(\mathcal{ME})^*$ –groupe ;
- (ii) G est fini -par-nilpotent.

Dans [13] A Boukaroura a étudié aussi les $(\mathcal{XN}_k)^*$ –groupes et les $(\mathcal{XE}_k)^*$ –groupes. Il a prouvé :

Théorème 1.3.14. *Soient G un groupe résoluble de type fini et \mathcal{M} une classe de groupes vérifiant la condition minimale. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) G est un $(\mathcal{MN}_k)^*$ –groupe ;
- (ii) G est dans la classe $\mathcal{FN}_k^{(2)}$.

Notons que ce dernier Théorème est une généralisation du Théorème 1.3.10.

Théorème 1.3.15. *Soient \mathcal{M} une classe de groupes vérifiant la condition minimale et G un $(\mathcal{ME}_k)^*$ –groupe résoluble de type fini. Alors il existe une fonction $c = c(k)$ tel que G soit dans la classe \mathcal{FN}_c .*

1.3.3 Les \mathbf{E}^* –groupes et \mathbf{E}_k^* –groupes

Soit G un groupe. On dit que G est un \mathbf{E}^* –groupe si toute partie infinie de G contient deux éléments distincts x, y tels que $[x, {}_k y] = 1$ pour un certain entier positif k . Si k est le même pour tous les ensembles X de G , on dit que G est un \mathbf{E}_k^* –groupe.

Il est clair que les \mathcal{E}^* –groupes sont des \mathbf{E}^* –groupes et les \mathcal{E}_k^* –groupes sont des \mathbf{E}_k^* –groupes, où \mathcal{E}^* (respectivement, \mathcal{E}_k^*) désigne la classe des groupes dont toute partie infinie contient deux éléments distincts x, y tels que $\langle x, y \rangle$ est un groupe d’Engel (respectivement, un groupe k –Engel).

Dans cette section, on donnera quelques résultats sur les E^* -groupes, les E_k^* -groupes et les \mathcal{E}_k^* -groupes.

P. Longobardi et M. Maj [51], ont caractérisé les E^* -groupes, elles ont montré le résultat suivant :

Théorème 1.3.16. *Soit G un groupe résoluble de type fini. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes*

- (i) G est un E^* -groupe ;
- (ii) G est fini-par-nilpotent.

Comme les \mathcal{N}^* -groupes sont des E^* -groupes, alors le Théorème 1.3.16 est une généralisation du Théorème 1.2.1.

G. Endimioni [26] a obtenu le même résultat, mais avec d'autre argument, il a montré :

Théorème 1.3.17. *Soit G un groupe résoluble de type fini. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) G est fini-par-nilpotent ;
- (ii) Tout ensemble infini d'éléments de G contient une paire $\{x, y\}$ tel que $[x, {}_n y] = 1$ pour un certain entier positif n .

P. Longobardi et M. Maj, dans [51], ont étudié aussi les E_k^* -groupes. Elles ont montré que :

Théorème 1.3.18. *Soit G un groupe résoluble de type fini. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) G est un E_2^* -groupe ;
- (ii) $G/R(G)$ est fini, où $R(G)$ désigne le sous-groupe caractéristique de G qui contient tous les éléments 2-Engel de G .

Dans [1] A. Abdollahi, en utilisant quelques résultats dans [51], a démontré :

Théorème 1.3.19. *Soit G un groupe résoluble de type fini. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) G est un \mathbf{E}_2^* -groupe ;
- (ii) $G/Z_2(G)$ est fini.

Notons que le Théorème 1.3.19 généralise le Théorème 1.3.2 et le Théorème 1.3.18, car la classe $(\mathcal{N}_2)^* \subset \mathbf{E}_2^*$; aussi on a $Z_2(G) \leq R(G)$, donc si $G/Z_2(G)$ est fini alors $G/R(G)$ est fini.

C. Delizia et C. Nicotera [24], ont démontré que le résultat dans [1] reste vrai même si nous remplaçons l'hypothèse résoluble par l'hypothèse résiduellement fini. En d'autre terme, ils ont prouvé

Théorème 1.3.20. *Soit G un groupe résiduellement fini de type fini. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) G est un \mathbf{E}_2^* -groupe ;
- (ii) $G/Z_2(G)$ est fini.

A. Abdollahi [3] a étudié les \mathbf{E}_k^* -groupes résolubles de type fini. Il a montré :

Théorème 1.3.21. *Soit G un groupe résoluble de type fini. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) G est dans la classe des \mathbf{E}_3^* -groupe ;
- (ii) G est fini par un groupe dont tout sous-groupe 2-engendré est nilpotent de la classe au plus égale à 3.

Théorème 1.3.22. *Soit G un \mathbf{E}_k^* -groupe résoluble de type fini. Alors il existe un entier positif c dépendant seulement de k tel que $G/Z_c(G)$ est fini.*

A. Abdollahi [3] a caractérisé les \mathbf{E}_k^* -groupes dont le cas où le groupe est métabélien de type fini, il a prouvé

Théorème 1.3.23. *Soit G un groupe métabélien de type fini. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) G est un E_k^* -groupe ;
- (ii) $G/Z_k(G)$ est fini.

Dans son Article [49] P. Longobardi a étudié les \mathcal{E}_k^* -groupes dans le cas où le groupe est localement gradué de type fini. Elle a montré

Théorème 1.3.24. *Soit G un groupe localement gradué de type fini. Si G est un \mathcal{E}_k^* -groupe, alors G est fini-par- $(k$ -Engel), et donc est $(k$ -Engel)-par-fini.*

CHAPITRE 2

UNE CONDITION DE $\mathcal{F}D$ SUR LES PARTIES INFINIES

2.1 Introduction

Soit \mathcal{X} une classe des groupes et soit G un groupe. On dit que G est un $\mathcal{X}^\#$ -groupe, si toute partie infinie de G contient deux éléments distincts x, y tels que $\langle x, x^y \rangle$ soit un \mathcal{X} -groupe. Notons que si la classe \mathcal{X} est stable par passage aux sous-groupes, alors tout \mathcal{X}^* -groupe est un $\mathcal{X}^\#$ -groupe.

Dans ce chapitre, on donnera une caractérisation des $(\mathcal{F}d)^\#$ -groupes et des $(\mathcal{F}d_k)^\#$ -groupes dans les groupes hyper-(abélien-par-fini) et de type fini, où $\mathcal{F}d$ (respectivement, $\mathcal{F}d_k$) désigne la classe des groupes de profondeur finie (respectivement, de profondeur finie égale au plus k). Puis on caractérisera les $(\mathcal{M}\mathcal{N})^\#$ -groupes, $(\mathcal{M}\mathcal{N}_k)^\#$ -groupes, $(\mathcal{M}\mathcal{E})^\#$ -groupes et $(\mathcal{M}\mathcal{E}_k)^\#$ -groupes, où \mathcal{M} , \mathcal{N} , \mathcal{N}_k , \mathcal{E} et \mathcal{E}_k désignent respectivement la classe des groupes vérifiant la condition minimale sur les sous-groupes, nilpotents, nilpotents de classe au plus égale à k , d'Engel et k -Engel où k est un entier

positif.

Soit G un groupe, on dit que le groupe G est de profondeur finie si la série centrale descendante de G se stabilise après un nombre fini d'étapes. Donc G est de profondeur finie si, et seulement si, $\gamma_n(G) = \gamma_{n+1}(G)$ pour un certain entier positif n , où $\gamma_n(G)$ désigne le $n^{\text{ième}}$ terme de la série centrale descendante de G . On note la classe des groupes de profondeur finie par $\mathcal{F}d$. De plus, si k est un entier positif, on dit que G est dans la classe $\mathcal{F}d_k$, si $\gamma_k(G) = \gamma_{k+1}(G)$.

Rappelons qu'un groupe G est dit hyper- \mathcal{X} s'il admet une série normale ascendante $1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_\beta \triangleleft G_{\beta+1} \triangleleft \dots \triangleleft G_\alpha = G$ telle que $G_{\beta+1}/G_\beta \in \mathcal{X}$ pour tout ordinal $\beta < \alpha$, et $G_\lambda = \bigcup_{\beta < \lambda} G_\beta$ si λ est un ordinal limite.

Notons que tout groupe abélien-par-fini, admet un sous-groupe abélien, caractéristique et d'indice fini. On en déduit, que tout groupe hyper-(abélien-par-fini) admet un sous-groupe normal non trivial, abélien ou fini.

2.2 $(\mathcal{F}d)^\#$ –groupes et $(\mathcal{F}d_k)^\#$ –groupes

A. Boukaroura a prouvé dans [13], qu'un groupe résoluble de type fini est un $(\mathcal{F}d)^*$ –groupe si, et seulement si, G est dans la classe \mathcal{FN} , où $\mathcal{F}d$ désigne la classe des groupes de profondeur finie et \mathcal{FN} la classe des groupes finis-par-nilpotents. Dans cette section, on généralisera le résultat de A. Boukaroura [13]. Plus précisément, on donnera une caractérisation des $(\mathcal{F}d)^\#$ –groupes dans le cas où le groupe est hyper-(abélien-par-fini) et de type fini. On établira qu'un groupe G hyper-(abélien-par-fini) de type fini est un $(\mathcal{F}d)^\#$ –groupe si, et seulement si, G est fini-par-nilpotent. On établira aussi que si $k > 0$ est un entier et si G est un $(\mathcal{F}d_k)^\#$ –groupe hyper-(abélien-par-fini) de type fini, alors il existe un entier $c = c(k)$ tel que $G/Z_c(G)$ soit fini.

Notons que notre résultat généralise le résultat de J.C. Lennox [45] qui af-

firme qu'un groupe résoluble-par-fini de type fini dont les sous-groupes engendrés par deux conjugués sont de profondeur finis, il est fini-par-nilpotent.

Notons que si G est un groupe fini-par-nilpotent, alors G admet un sous-groupe normal fini N , tel que G/N soit nilpotent. Donc il existe un entier positif c tel que $\gamma_c(G) \leq N$. Or N est fini, d'où $\gamma_n(G) = \gamma_{n+1}(G)$ pour un certain entier positif $n \geq c$, et ainsi la classe des $(\mathcal{FN})^\#$ -groupes est incluse dans la classe des $(\mathcal{F}d)^\#$ -groupe.

Pour démontrer notre résultat, établissons d'abord quelques résultats préliminaires

Soit E^* la classe des groupes dont toute partie infinie contient deux éléments distincts x, y tels que $[x, {}_n y] = 1$ pour un entier positif $n = n(x, y)$. Dans [51], Longobardi et Maj ont démontré qu'un groupe résoluble de type fini est un E^* -groupes si, et seulement si, est fini-par-nilpotent. On généralise ce résultat au groupe hyper-(abélien-par-fini) de type fini (Proposition 2.2.5).

Notre premier Lemme est une version faible du Lemme 11 [80]

Lemme 2.2.1. *Soit G un groupe abélien-par-fini de type fini. Si G est un $(\mathcal{FN})^*$ -groupe, alors G est fini-par-nilpotent.*

Démonstration. Soit G un groupe abélien-par-fini de type fini et supposons que G est $(\mathcal{FN})^*$ -groupe. Donc G admet un sous-groupe normal A abélien, sans-torsion et d'indice fini. Soit $1 \neq x \in A$ et soit $g \in G$. Alors l'ensemble $\{x^i g, \hat{i} \text{ un entier positif} \}$ est infini, donc il existe deux entiers positive m, n tels que $\langle x^m g, x^n g \rangle \in \mathcal{FN}$, d'où $\langle x^{m-n}, x^n g \rangle \in \mathcal{FN}$. Donc il existe deux entiers positifs c et d tels que $[x^{m-n}, {}_c x^n g]^d = 1$. Comme x est un élément de A qui est abélien et normal dans G , alors $[x^{m-n}, {}_c x^n g] = [x^{m-n}, {}_c g] = [x, {}_c g]^{m-n}$ et d'où $[x, {}_c g]^{(m-n)d} = 1$. Maintenant, $[x, {}_c g]$ est dans le groupe sans-torsion A , donc $[x, {}_c g] = 1$. On en déduit que x est un élément d'Engel à droite de G . Puisque G est abélien-par-fini et de type fini, il vérifie la condition maximale sur les sous-groupes ; donc l'ensemble des éléments d'Engel à droite de G coïncide

avec l'hypercentre qui est égale à $Z_i(G)$, le $(i+1)^{ime}$ terme de la série centrale ascendante de G , pour un certain entier $i > 0$ [67, Théorème 7.21]. Donc, $A \leq Z_i(G)$; et comme A est d'indice fini dans G , alors $G/Z_i(G)$ est fini. Par suite, par un résultat de Baer [37, Théorème 1], G est fini-par-nilpotent. \square

Lemme 2.2.2. *Soit G un E^* -groupe abélien-par-fini de type fini. Alors G est fini-par-nilpotent.*

Démonstration. Soit G un E^* -groupe abélien-par-fini de type fini et soit A un sous-groupe normal abélien d'indice fini dans G . Il est clair que toute partie infinie de G contient deux différents éléments x, y tel que $xA = yA$; donc $y = xa$ pour un certain a dans A et $\langle x, y \rangle = \langle x, a \rangle$. Donc $\langle x, y \rangle$ est un groupe métabélien de type fini dans la classe E^* . Il s'ensuit par un résultat de Longobardi et Maj [51, Théorème 1], que $\langle x, y \rangle$ est fini-par-nilpotent. D'où G est un $(\mathcal{FN})^*$ -groupe. Par suite, d'après le Lemme (2.2.1), G est fini-par-nilpotent. \square

Lemme 2.2.3. *Un E^* -groupe hyper-(abélien-par-fini) de type fini est nilpotent-par-fini.*

Démonstration. Soit G un E^* -groupe hyper-(abélien-par-fini) de type fini. Comme la classe E^* est stable par passage aux quotients et les groupes nilpotents-par-fini de type fini sont de présentation finie, alors d'après [67, Lemme 6.17] on peut supposer que tout quotient propre de G soit nilpotent-par-fini, mais G lui-même ne le soit pas. Comme G est hyper-(Abélien-par-fini), G contient un sous-groupe normal non trivial H tel que H est fini ou abélien; donc on a G/H est dans \mathcal{NF} . Si H est fini, alors G est $\mathcal{F}(\mathcal{NF})$, donc $(\mathcal{FN})\mathcal{F}$, d'où $(\mathcal{NF})\mathcal{F}$ et donc G est nilpotent-par-fini, une contradiction. Par conséquent H est Abélien et donc G est Abélien-par-(nilpotent-par-fini) et par suite est (Abélien-par-nilpotent)-fini. D'où, G est une extension finie d'un groupe résoluble; donc il existe un sous-groupe normal résoluble K de

G d'indice fini. Maintenant, K est un groupe résoluble de type fini dans la classe \mathbf{E}^* ; il s'ensuit, par le résultat de Longobardi et Maj [51, Théorème 1], que K est fini-par-nilpotent. Par un résultat de P. Hall [37, Théorème 2], K est nilpotent-par-fini et donc G est nilpotent-par-fini, une contradiction, et le lemme suit. \square

Puisque les groupes nilpotents-par-finis de type fini vérifient la condition maximale sur les sous-groupes, le Lemme 2.2.3, à la conséquence suivante :

Corollaire 2.2.4. *Soit G un \mathbf{E}^* -groupe hyper-(abélien-par-fini) de type fini. Alors G vérifie la condition maximale sur les sous-groupes.*

Proposition 2.2.5. *Soit G un groupe hyper-(abélien-par-fini) de type fini. Si G est un \mathbf{E}^* -groupe, alors il est fini-par-nilpotent.*

Démonstration. Soit G un groupe hyper-(abélien-par-fini) de type fini et supposons que G est un \mathbf{E}^* -groupe. D'après le Corollaire 2.2.4, G vérifie la condition maximale sur les sous-groupes. Maintenant, puisque la classe \mathbf{E}^* est stable par passage aux quotients, alors on peut supposer que tout quotient propre de G soit \mathcal{FN} , mais G lui-même ne soit pas dans \mathcal{FN} . Puisque le groupe G est hyper-(Abélien-par-fini), il admet un sous-groupe normal non trivial H tel que H est fini ou Abélien; donc par hypothèse G/H est dans la classe \mathcal{FN} . Si H est fini, alors G est fini-par-nilpotent, une contradiction. Par conséquent H est abélien et donc G est dans la classe $\mathcal{A}(\mathcal{FN})$, d'où G est dans $(\mathcal{AF})\mathcal{N}$. Maintenant, puisque G vérifie la condition maximale sur les sous-groupes, il s'ensuit par le lemme 2.2.2, que G est dans $(\mathcal{FN})\mathcal{N}$, donc il est dans $\mathcal{F}(\mathcal{NN})$. Par conséquent, G admet un sous-groupe normal K fini tel que G/K est résoluble. Puisque le G/K est un \mathbf{E}^* -groupe résoluble de type fini, il est dans \mathcal{FN} , d'après le résultat de Longobardi et Maj [51, Théorème 1]. Donc G est dans la classe \mathcal{FN} , qui est une contradiction et la proposition suite. \square

Le reste de la démonstration de notre Théorème (2.2.9) est adaptée de celle du Théorème de Lennox [44, Théorème 3]

Lemme 2.2.6. *Soit G un $(\mathcal{F}d)^\#$ -groupe hyper-(abélien-par-fini) de type fini. Si G est résiduellement nilpotent, alors G est fini-par-nilpotent.*

Démonstration. Soit G un $(\mathcal{F}d)^\#$ -groupe hyper-(abélien-par-fini) de type fini et supposons que G est résiduellement nilpotent. Soit X un ensemble infini de G , il existe donc deux éléments distincts x et y de X tels que $\langle x, x^y \rangle \in \mathcal{F}d$. D'où il existe un entier $k > 0$ tel que $\gamma_k(\langle x, x^y \rangle) = \gamma_{k+1}(\langle x, x^y \rangle)$. Puisque $\langle x, x^y \rangle$ est résiduellement nilpotent, d'où $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \gamma_i(\langle x, x^y \rangle) = 1$. Par conséquent $\gamma_k(\langle x, x^y \rangle) = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \gamma_i(\langle x, x^y \rangle) = 1$. Or $\langle x, x^y \rangle = \langle x^{-1}x^y, x \rangle = \langle [y, x], x \rangle = 1$, et ainsi $[y, {}_k x] = 1$. Par suite G est un \mathbf{E}^* -groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini. Il en résulte, par la proposition 2.2.5, que G est fini-par-nilpotent. \square

Lemme 2.2.7. *Soit G un groupe hyper-(abélien-par-fini) de type fini. Si G est un $(\mathcal{F}d)^\#$ -groupe, alors G est nilpotent-par-fini.*

Démonstration. Soit G un groupe hyper-(abélien-par-fini) de type fini et supposons que G est un $(\mathcal{F}d)^\#$ -groupe. Comme les groupes nilpotents-par-finis de type fini sont de présentation finie et la classe $(\mathcal{F}d)^\#$ est stable par passage aux quotients, d'après [67, Lemme 6.17], on peut supposer que tout quotient propre de G soit nilpotent-par-fini, mais G lui-même ne le soit pas. Puisque G est hyper-(Abélien-par-fini), il contient un sous-groupe normal non-trivial K tel que K soit fini ou abélien ; donc G/K est nilpotent-par-fini. Si K est fini, alors G est $\mathcal{F}(\mathcal{NF})$, et par suite G est \mathcal{NF} , une contradiction. Par conséquent K est abélien, d'où G est dans la classe $\mathcal{A}(\mathcal{NF})$ et donc dans la classe $(\mathcal{AN})\mathcal{F}$. D'où G admet un sous-groupe normal H abélien-par-nilpotent et d'indice fini. Comme G est de type fini, on obtient que H est un groupe de type fini dans la classe \mathcal{AN} ; par suite, d'après Ségal [72, Corollaire 1], H admet un sous-groupe normal résiduellement nilpotent et d'indice

fini. Par conséquent, G admet un sous-groupe normal N résiduellement nilpotent et d'indice fini. Donc N est un $(\mathcal{F}d)^\#$ -groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini et résiduellement nilpotent. Donc, d'après le Lemme 2.2.6, N est fini-par-nilpotent et donc nilpotent-par-fini [37]. Par conséquent G est nilpotent-par-fini, une contradiction et le Lemme suit. \square

Lemme 2.2.8. *Soient G un $(\mathcal{F}d)^\#$ -groupe hyper-(abélien-par-fini) type fini et K un sous-groupe normal de G tel que K soit nilpotent et G/K soit cyclique fini. Alors G est fini-par-nilpotent.*

Démonstration. Soit G un $(\mathcal{F}d)^\#$ -groupe hyper-(abélien-par-fini) de type fini et soit K un sous-groupe normal de G tel que K soit nilpotent et G/K soit cyclique fini. Posons $n = |G/K|$, montrons par récurrence sur n que G est fini-par-nilpotent. Si $n = 1$, alors $G = K$ et G est nilpotent, donc G est fini-par-nilpotent. On suppose maintenant que $n > 1$, donc il existe un nombre premier p tel que $p|n$. Comme G/K est cyclique, alors il admet un sous-groupe normal d'indice p . Donc G admet un sous-groupe normal N d'indice p contenant K . Comme $|N/K| < |G/K|$, par l'hypothèse de récurrence N est fini-par-nilpotent. Soit T le sous-groupe de torsion de N . On a T est fini, Car N est de type fini. Donc N/T est un groupe sans-torsion et fini-par-nilpotent, par suite N/T est nilpotent. Par suite N/T est un groupe nilpotent de type fini et sans-torsion; d'où d'après Gruenberg [68, 5.2.21], N/T est résiduellement un p -groupe fini. Puisque $|G/N| = p$, alors G/T est résiduellement un p -groupe fini [73, Exercice 10, page 17]. Comme les p -groupes finis sont nilpotents, on en déduit que G/T est résiduellement nilpotent. Il s'ensuit, par le Lemme 2.2.6, que G/T est fini-par-nilpotent. D'où G est fini-par-nilpotent et le Lemme suit. \square

Maintenant, on passe à démontrer notre résultat :

Théorème 2.2.9. *Soit G un groupe hyper-(abélien-par-fini) de type fini. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) G est un $(\mathcal{F}d)^\#$ -groupe;
- (ii) G est fini-par-nilpotent.

Démonstration. Il est clair que tout groupe fini-par-nilpotent est un $(\mathcal{F}d)^\#$ -groupe. Réciproquement; soit G un groupe hyper-(abélien-par-fini) de type fini et supposons que G est un $(\mathcal{F}d)^\#$ -groupe. D'après le Lemme 2.2.7, G est nilpotent-par-fini. Donc G admet un sous-groupe normal N tel que N nilpotent et G/N soit fini. Comme N est un groupe nilpotent de type fini, il admet un sous-groupe normal, sans-torsion et d'indice fini [68, 5.4.15 (i)]. Donc, G admet un sous-groupe normal H nilpotent, sans torsion et d'indice fini. Soit g un élément non-trivial de G . Comme H est de type fini, $\langle H, g \rangle$ est un $(\mathcal{F}d)^\#$ -groupe hyper-(abélien-par-fini) de type fini. Comme $\langle H, g \rangle / N$ est cyclique, car $\langle H, g \rangle / H = \langle g \rangle H / H \simeq \langle g \rangle / \langle g \rangle \cap N$, alors, d'après le Lemme 2.2.8, $\langle H, g \rangle$ est fini-par-nilpotent. Par conséquent, il existe un sous-groupe normal K de $\langle H, g \rangle$ tel que K est fini et $\langle H, g \rangle / K$ est nilpotent. Donc $\gamma_{k+1}(\langle H, g \rangle / K) = K/K$ pour un certain entier positif k , d'où $\gamma_{k+1}(\langle H, g \rangle) \leq K$; comme K est fini, $\gamma_{k+1}(\langle H, g \rangle)$ est fini. Il existe donc un entier m tel que $[a, k g]^m = 1$, pour tout $a \in H$. Comme $[a, k g]$ est un élément du groupe sans-torsion H , on obtient que $[a, k g] = 1$. Par suite, a est un élément d'Engel à droite de G ; et ainsi $H \subseteq R(G)$, où $R(G)$ désigne l'ensemble des éléments d'Engel à droite de G . D'autre part, comme G est nilpotent-par-fini de type fini, il vérifie la condition maximale sur les sous-groupes. Donc, d'après Baer [67, Théorème 7.21], $R(G)$ coïncide avec l'hypercentre de G qui égal à $Z_n(G)$ pour un certain entier n . Par suite $N \leq Z_n(G)$, d'où $Z_n(G)$ est d'indice fini dans G . Il en résulte, par un résultat de Baer [37, Théorème 1] que G est fini-par-nilpotent. \square

Comme conséquence du Théorème 2.2.9 on a les résultats suivants :

Corollaire 2.2.10. *Soit k un entier positif et soit G un groupe hyper-(abélien-par-fini) de type fini. Alors*

- (i) Si G est un $(\mathcal{F}d_k)^\#$ –groupe, alors il existe un entier positif $c = c(k)$, qui dépend seulement de k , tel que $G/Z_c(G)$ est fini.
- (ii) Si G est un $(\mathcal{F}d_2)^\#$ –groupe, alors $G/Z_2(G)$ est fini.
- (iii) Si G est un $(\mathcal{F}d_3)^\#$ –groupe, alors G est dans la classe $\mathcal{FN}_3^{(2)}$ (i.e G est une extension d'un groupe fini par un groupe nilpotent dont chaque sous-groupe 2-engendré est nilpotent de classe au plus égal à 3).

Démonstration. Soit G un groupe hyper-(abélien-par-fini) de type fini.

(i) Supposons que G soit un $(\mathcal{F}d_k)^\#$ –groupe; d'après le Théorème 2.2.9, G est dans la classe \mathcal{FN} . Soit H un sous-groupe normal fini de G tel que G/H soit nilpotent. Il est clair que G/H est dans la classe $(\mathcal{F}d_k)^\#$. Soit \bar{X} un ensemble infini de G/H ; donc il existe deux éléments distincts $\bar{x} = xH$, $\bar{y} = yH$ ($x, y \in G$) de \bar{X} tels que $\langle \bar{x}, \bar{x}^{\bar{y}} \rangle \in \mathcal{F}d_k$, donc $\gamma_k(\langle \bar{x}, \bar{x}^{\bar{y}} \rangle) = \gamma_{k+1}(\langle \bar{x}, \bar{x}^{\bar{y}} \rangle)$. De plus, comme $\langle \bar{x}, \bar{x}^{\bar{y}} \rangle \in \mathcal{N}$, il existe donc un entier i tel que $\gamma_i(\langle \bar{x}, \bar{x}^{\bar{y}} \rangle) = 1$; on obtient $\gamma_k(\langle \bar{x}, \bar{x}^{\bar{y}} \rangle) = 1$. Or $\langle \bar{x}, \bar{x}^{\bar{y}} \rangle = \langle [\bar{y}, \bar{x}], \bar{x} \rangle$, et ainsi $\gamma_k(\langle [\bar{y}, \bar{x}], \bar{x} \rangle) = 1$. Il en résulte que $[\bar{y}, \bar{x}] = 1$, d'où G/H est dans la classe \mathbf{E}_k^* . On en déduit que G/H est un groupe résoluble de type fini dans la classe \mathbf{E}_k^* , donc par Abdollahi [3, Théorème 3], il existe un entier $c = c(k)$ tel que $(G/H)/Z_c(G/H)$ est fini. Il s'ensuit, par un résultat de Baer [37] que $\gamma_{c+1}(G/H) = \gamma_{c+1}(G)H/H$ est fini. Comme H est fini, $\gamma_{c+1}(G)$ est fini, il en résulte par Hall [37, 1.5] que $G/Z_c(G)$ est fini.

(ii) Supposons que G soit un $(\mathcal{F}d_2)^\#$ –groupe; d'après le Théorème 2.2.9, G est dans la classe \mathcal{FN} . D'où G admet un sous-groupe normal fini H tel que G/H soit nilpotent. Comme G/H est dans la classe $(\mathcal{F}d_2)^\#$, il est dans la classe \mathbf{E}_2^* . On en déduit que G/H est un groupe résoluble de type fini dans la classe \mathbf{E}_2^* , donc par Abdollahi [1, Théorème], $(G/H)/Z_2(G/H)$ est fini, d'où $\gamma_3(G/H) = \gamma_3(G)H/H$ est fini, donc $\gamma_3(G)$ est fini. Il s'ensuit par Hall [37, 1.5] que $G/Z_2(G)$ est fini.

(iii) Supposons que G soit dans la classe $(\mathcal{F}d_3)^\#$ –groupe; d'après le Théo-

rème 2.2.9, G est dans la classe \mathcal{FN} . Soit H un sous-groupe normal fini de G tel que G/H soit nilpotent. Comme G/H est dans la classe $(\mathcal{F}d_3)^\#$, d'après ce qui précède, G/H est dans la classe E_3^* . Par suite G/H est un groupe résoluble de type fini dans la classe E_3^* . On en déduit par un résultat de Abdollahi [3, Théorème 1] que G/H est dans la classe $\mathcal{FN}_3^{(2)}$; par conséquent G est dans la classe $\mathcal{FN}_3^{(2)}$. \square

Remarque 2.2.11. *Il est clair que si G est un $(\mathcal{F}d_1)^\#$ -groupe abélien, il est fini. En effet, si G est infini, alors il admet un ensemble infini $X = G \setminus \{1\}$. Donc il existe deux éléments distincts $x \neq 1, y \neq 1$ tels que $\gamma_1(\langle x, x^y \rangle) = \gamma_2(\langle x, x^y \rangle) = 1$, d'où $x = 1$, une contradiction. On en déduit qu'un groupe hyper-(Abélien-par-fini) G dans la classe $(\mathcal{F}d_1)^\#$ est hyper(fini) puisque $(\mathcal{F}d_1)^\#$ est fermée par passage aux sous-groupes et par quotient. Comme G est hyper(fini), il est localement fini [67, Part 1, page 36]. Maintenant si G est infini, il contient un sous-groupe abélien infini A [67, Théorème 3.43]. Puisque A est dans la classe $(\mathcal{F}d_1)^\#$, il est fini; une contradiction et G , donc, est fini.*

2.3 $(\mathcal{MN})^\#$ –groupes et $(\mathcal{MN}_k)^\#$ –groupes

Soit \mathcal{M} la classe des groupes vérifiant la condition minimale sur les sous-groupes. Dans cette section, nous allons caractériser les $(\mathcal{MN})^\#$ –groupes et les $(\mathcal{MN}_k)^\#$ –groupes.

Théorème 2.3.1. *Soit G un groupe hyper-(abélien-par-fini) de type fini. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) G est un $(\mathcal{MN})^\#$ –groupe;
- (ii) G est fini-par-nilpotent.

Démonstration. Il est clair que si G est fini-par-nilpotent, alors G est un $(\mathcal{MN})^\#$ –groupe. Réciproquement, soit G un $(\mathcal{MN})^\#$ –groupe hyper-(abélien-par-fini) de type fini et soit X un ensemble infini de G . Alors il existe deux

éléments distinct x, y de X tels que $\langle x, x^y \rangle$ est dans la classe \mathcal{MN} , donc il existe un sous-groupe normal N de $\langle x, x^y \rangle$ tel que $N \in \mathcal{M}$ et $\langle x, x^y \rangle / N$ est nilpotent. Donc $\gamma_{i+1}(\langle x, x^y \rangle) \leq N$ pour un certain entier positif i , D'où $\gamma_{i+1}(\langle x, x^y \rangle) \geq \gamma_{i+2}(\langle x, x^y \rangle) \geq \dots$ est une chaîne infinie de sous-groupes normaux de N . Comme N est dans \mathcal{M} alors il existe un entier positif $n \geq i + 1$ tel que $\gamma_n(\langle x, x^y \rangle) = \gamma_{n+1}(\langle x, x^y \rangle)$. Par conséquent G est un $(\mathcal{F}d)^\#$ -groupe ; il s'ensuit, par le Théorème 2.2.9, que G est fini-par-nilpotent. \square

Notons que Le Théorème 2.3.1 généralise le résultat de A. Boukaroura [13] (Théorème 1.3.12)

Comme la classe \mathcal{C} de groupes de Chernikov est incluse dans la classe \mathcal{M} des groupes vérifiant la condition minimale sur les sous-groupes, alors le corollaire suivant est une conséquence directe du Théorème 2.3.1

Corollaire 2.3.2. *Soient G un groupe hyper-(abélien-par-fini) de type fini et \mathcal{C} la classe des groupes de Chernikov. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) G est un $(\mathcal{CN})^\#$ -groupe,
- (ii) G est fini-par-nilpotent.

Théorème 2.3.3. *Soit G un groupe hyper-(abélien-par-fini) de type fini. Si G est un $(\mathcal{MN}_k)^\#$ -groupe, alors il existe un entier positif $c = c(k)$, dépend que de k , tel que $G/Z_c(G)$ soit fini.*

Démonstration. Soit G un groupe hyper-(abélien-par-fini) de type fini et supposons que G est un $(\mathcal{MN}_k)^\#$ -groupe. D'après le Théorème 2.3.1, G est fini-par-nilpotent. Soit H un sous-groupe normal fini de G tel que G/H soit nilpotent. Puisque G/H est nilpotent et de type fini son sous-groupe de torsion T/H est fini, d'où T est fini et G/T est un groupe nilpotent sans-torsion.. Il est clair que G/T est un $(\mathcal{MN}_k)^\#$ -groupe, et puisque G/T est sans-torsion et résoluble, il est un $\mathcal{N}_k^\#$ -groupe [67, Théorème 5.25]. Comme $\mathcal{N}_k^\#$ est inclu

dans \mathbf{E}_{k+1}^* , on en déduit que G/T est un groupe résoluble de type fini dans la classe \mathbf{E}_{k+1}^* . Par suite, d'après [3, Théorème 3], il existe un entier $c = c(k)$ dépend seulement de k tel que $(G/T)/Z_c(G/T)$ soit fini. On en déduit par un résultat de Baer [37] que $\gamma_{c+1}(G/T) = \gamma_{c+1}(G)T/T$ est fini, comme T est fini on obtient que $\gamma_{c+1}(G)$ est fini. Par suite, d'après le résultat de P. Hall [37, 1.5], $G/Z_c(G)$ est fini. \square

2.4 $(\mathcal{M}\mathcal{E})^\#$ –groupes et $(\mathcal{M}\mathcal{E}_k)^\#$ –groupes

Soit k un entier positif fixé, notons par \mathcal{M} , \mathcal{E} et \mathcal{E}_k respectivement la classe des groupes vérifiant la condition minimale sur les sous-groupes, la classe des groupes d'Engel et la classe des groupes k -Engel. Dans cette section, on utilisera le résultat obtenu sur les $(\mathcal{F}d)^\#$ –groupes (Théorème 2.2.9), pour caractériser les $(\mathcal{M}\mathcal{E})^\#$ –groupes et $(\mathcal{M}\mathcal{E}_k)^\#$ –groupes. On établira que si G est un groupe hyper-(abélien-par-fini) de type fini, alors G est un $(\mathcal{M}\mathcal{E})^\#$ –groupe si, et seulement si G est fini-par-nilpotent. On établira aussi que G est un $(\mathcal{M}\mathcal{E}_k)^\#$ –groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini, alors il existe un entier $c = c(k)$ tel que $G/Z_c(G)$ soit fini.

Pour démontrer notre résultat, établissant d'abord quelques résultats préliminaires.

Lemme 2.4.1. *Si G est un $(\mathcal{M}\mathcal{E})^\#$ –groupe hyper-(abélien-par-fini) de type fini, alors G est nilpotent-par-fini.*

Démonstration. Soit G un groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini et supposons que G est un $(\mathcal{M}\mathcal{E})^\#$ –groupe. Puisque la classe $(\mathcal{M}\mathcal{E})^\#$ est stable par passage aux quotient et les groupes nilpotent-par-finis de type fini sont de présentation fini, on peut supposer que toute image homomorphe de G est nilpotent-par-fini, mais G lui même ne le soit pas. Comme G est hyper-(Abélien-par-fini), il admet un sous-groupe normal non-trivial H abélien

ou fini, d'où G/H est nilpotent-par-fini. Si H est fini, alors G est fini-par-(nilpotent-par-fini) et donc (fini-par-nilpotent)-par-fini. Comme les groupes fini-par-nilpotent sont nilpotent-par-fini [37, Théorème 2], on obtient que G est nilpotent-par-fini, une contradiction. Par conséquent H est abélien et donc G est abélien-par-(nilpotent-par-fini) et d'où il est (abélien-par-nilpotent)-par-fini. Par suite G est une extension fini d'un groupe résoluble. Soit K un sous-groupe normal résoluble de G tel G/K soit fini. Il est clair que K est un $(\mathcal{M}\mathcal{E})^\#$ -groupe, et comme tout groupe résoluble d'Engel coïncide avec son radical de Hirsch-Plotkin qui est localement nilpotent [67, Théorème 7.34], on en déduit que K est un $(\mathcal{M}\mathcal{N})^\#$ -groupe. Il s'ensuit, par le Lemme 2.3.1 que K est fini-par-nilpotent et donc nilpotent-par-fini. Par suite G est nilpotent-par-fini, une contradiction et le Lemme suit. \square

Comme les groupes nilpotents-par-finis de type fini vérifient la condition maximale sur les sous-groupes, alors le corollaire suivant est une conséquence du Lemme 2.4.1 :

Corollaire 2.4.2. *Soit G un $(\mathcal{M}\mathcal{E})^\#$ -groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini. Alors G vérifie la condition maximale sur les sous-groupes.*

Théorème 2.4.3. *Soit G un groupe hyper-(abélien-par-fini) de type fini. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) G est un $(\mathcal{M}\mathcal{E})^\#$ -groupe ;
- (ii) G est fini-par-nilpotent.

Démonstration. Il est clair que tout groupe fini-par-nilpotent est un $(\mathcal{M}\mathcal{E})^\#$ -groupe. Réciproquement, soit G un $(\mathcal{M}\mathcal{E})^\#$ -groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini. D'après le Corollaire 2.4.2, G vérifie la condition maximale sur les sous-groupes. Comme les groupes d'Engel qui vérifient la condition maximale sur les sous-groupes sont nilpotents [68, 12.3.7], on en déduit que G est un $(\mathcal{M}\mathcal{N})^\#$ -groupe. Il s'ensuit, par le Théorème 2.3.1, que G est fini-par-nilpotent. \square

Comme conséquence du Théorème 2.4.3, on a les résultats suivants :

Corollaire 2.4.4. *Soit k un entier positif et soit G un groupe hyper-(abélien-par-fini) de type fini. Si G est un $(\mathcal{M}\mathcal{E}_k)^\#$ -groupe, alors il existe un entier positif $c = c(k)$, dépend que de k , tel que $G/Z_c(G)$ soit fini.*

Démonstration. Soit G un $(\mathcal{M}\mathcal{E}_k)^\#$ -groupe hyper-(abélien-par-fini) de type fini; d'après le Théorème 2.4.3, G est fini-par-nilpotent. Soit N un sous-groupe normal fini de G tel que G/N soit nilpotent. Puisque G/N est nilpotent et de type fini son sous-groupe de torsion T/N est fini, d'où T est fini et G/T est un groupe nilpotent sans-torsion.. Il est clair que G/T est un $(\mathcal{M}\mathcal{E}_k)^\#$ -groupe, et puisque G/T est sans-torsion et résoluble, il est un $(\mathcal{E}_k)^\#$ -groupe [67, Théorème 5.25]. Soit \bar{X} un ensemble infini de G/T ; donc il existe deux éléments distincts $\bar{x} = xT, \bar{y} = yT$ ($x, y \in G$) de \bar{X} tels que $\langle \bar{x}, \bar{x}^{\bar{y}} \rangle$ est un groupe k -Engel. Comme $\langle \bar{x}, \bar{x}^{\bar{y}} \rangle = \langle [\bar{y}, \bar{x}], \bar{x} \rangle$, alors on a $[\bar{y},_{k+1} \bar{x}] = [[\bar{y}, \bar{x}],_k \bar{x}] = 1$. Donc G/T est dans la classe \mathbf{E}_{k+1}^* . Le groupe G/T résoluble de type fini dans la classe \mathbf{E}_{k+1}^* ; il s'ensuit par le résultat de Abdollahi [3, Théorème 3], qu'il existe un entier positif $c = c(k)$, dépend que de k , tel que $(G/T)/Z_c(G/T)$ est fini. Par un résultat de Baer [37, Théorème 1], $\gamma_{c+1}(G/T) = \gamma_{c+1}(G)T/T$ est fini, et comme T est fini, $\gamma_{c+1}(G)$ est fini. Par suite, d'après le résultat de P. Hall [37, 1.5], $G/Z_c(G)$ est fini. \square

Corollaire 2.4.5. *Soit k un entier positif et soit G un groupe hyper-(abélien-par-fini) de type fini. Si G est un $(\mathcal{M}\mathcal{E}_k)^\#$ -groupe, alors :*

- (i) Si $k = 1$, c'est-à-dire que G est un $(\mathcal{M}\mathcal{A})^\#$ -groupe, alors $G/Z_2(G)$ est fini.
- (ii) Si $k = 2$, alors G est dans la classe $\mathcal{FN}_3^{(2)}$.

Démonstration. Soit G un $(\mathcal{M}\mathcal{E}_k)^\#$ -groupe hyper-(Abélien-par-fini) de type fini.

- (i) Si $k = 1$, alors G est un $(\mathcal{M}\mathcal{E}_1)^\# = (\mathcal{M}\mathcal{A})^\#$ -groupe. D'après le Théorème 2.4.3, G est fini-par-nilpotent. Soit N un sous-groupe normal fini de G tel

que G/N soit nilpotent. Puisque G/N est nilpotent et de type fini son sous-groupe de torsion T/N est fini, d'où T est fini et G/T est un groupe nilpotent sans-torsion. Il est clair que G/T est un $(\mathcal{M}\mathcal{E}_k)^\#$ -groupe, et puisque G/T est sans-torsion et résoluble, il est un $(\mathcal{A})^\#$ -groupe [67, Théorème 5.25]. Soit \bar{X} un ensemble infini de G/T ; donc il existe deux éléments distincts $\bar{x} = xT$, $\bar{y} = yT$ ($x, y \in G$) de \bar{X} tels que $\langle \bar{x}, \bar{x}^{\bar{y}} \rangle$ est un groupe abélien. Comme $\langle \bar{x}, \bar{x}^{\bar{y}} \rangle = \langle [\bar{y}, \bar{x}], \bar{x} \rangle$, alors on a $[\bar{y}, {}_2\bar{x}] = [[\bar{y}, \bar{x}], \bar{x}] = 1$. Donc G/T est dans la classe \mathbf{E}_2^* . Le groupe G/T est résoluble de type fini dans la classe \mathbf{E}_2^* ; il s'ensuit par le résultat de Abdollahi [1, Théorème], que $(G/T)/Z_2(G/T)$ est fini, doù $\gamma_3(G/T)$ est fini. Puisque T est fini, alors $\gamma_3(G)$ est fini. Par suite, d'après le résultat de P. Hall [37, 1.5], $G/Z_2(G)$ est fini.

(ii) Si $k = 2$, alors G est un $(\mathcal{M}\mathcal{E}_2)^\#$ -groupe. D'après le Théorème 2.4.3, G est fini-par-nilpotent. Soit N un sous-groupe normal fini de G tel que G/N soit nilpotent. Puisque G/N est nilpotent et de type fini son sous-groupe de torsion T/N est fini, d'où T est fini et G/T est un groupe nilpotent sans-torsion. Il est clair que G/T est un $(\mathcal{M}\mathcal{E}_k)^\#$ -groupe, et puisque G/T est sans-torsion et résoluble, il est un $(\mathcal{E}_2)^\#$ -groupe [67, Théorème 5.25]. Soit \bar{X} un ensemble infini de G/T ; donc il existe deux éléments distincts $\bar{x} = xT$, $\bar{y} = yT$ ($x, y \in G$) de \bar{X} tels que $\langle \bar{x}, \bar{x}^{\bar{y}} \rangle$ est un groupe 2-Engel. Comme $\langle \bar{x}, \bar{x}^{\bar{y}} \rangle = \langle [\bar{y}, \bar{x}], \bar{x} \rangle$, alors on a $[\bar{y}, {}_3\bar{x}] = [[\bar{y}, \bar{x}], {}_2\bar{x}] = 1$. Donc G/T est dans la classe \mathbf{E}_3^* . Le groupe G/T est donc résoluble de type fini dans la classe \mathbf{E}_3^* . D'où, par [3, Théorème 1], (G/T) est un groupe $\mathcal{FN}_3^{(2)}$. Par suite G est dans la classe $\mathcal{FN}_3^{(2)}$. □

CHAPITRE 3

GROUPES AVEC UNE CONDITION DE \mathcal{TN} SUR LES PARTIES INFINIES

3.1 Introduction

Il est prouvé dans [80] qu'un groupe G résoluble de type fini est un $(\mathcal{TN})^*$ -groupe si, et seulement si, G est torsion-par-nilpotent, où \mathcal{T} désigne la classe des groupes de torsion (périodiques) et \mathcal{N} la classe des groupes nilpotents. Dans ce chapitre, on généralisera ce résultat, on donnera une caractérisation des $(\mathcal{TN})^\#$ -groupes. Dans la première section, on établira que si G est une extension d'un groupe résoluble par un groupe fini et de type fini est un $(\mathcal{TN})^\#$ -groupe si, et seulement si, G est une extension d'un groupe de torsion par un groupe nilpotent. On établira aussi que si $k > 0$ est un entier et si G est un $(\mathcal{TN}_k)^\#$ -groupe résoluble-par-fini de type fini, alors il existe un entier $c = c(k)$ tel que G est dans la classe \mathcal{TN}_c , où \mathcal{N}_k désigne la

classe des groupes nilpotents de classe au plus égale à k .

Notons par Ω la classe des groupes ayant une série normale finie dont les facteurs sont abéliens ou finis. Dans la deuxième section de ce chapitre, on établira qu'un Ω -groupe de type fini G est un $(\mathcal{TN})^\#$ -groupe si, et seulement si, G est torsion-par-nilpotent. On établira aussi que si $k > 0$ est un entier positif et si G est un $(\mathcal{TN}_k)^\#$ -groupe dans Ω de type fini, alors il existe un entier $c = c(k)$ tel que G soit dans la classe \mathcal{TN}_c .

3.2 Groupes résoluble-par-finis dans $(\mathcal{TN})^\#$ et $(\mathcal{TN}_k)^\#$

Dans cette section, nous allons caractériser les $(\mathcal{TN})^\#$ -groupes dans le cas où le groupe est résoluble-par-fini. On établira que si G est une extension d'un groupe résoluble par un groupe fini et de type fini est un $(\mathcal{TN})^\#$ -groupe si, et seulement si, G est une extension d'un groupe de torsion par un groupe nilpotent (Théorème 3.2.3). On établira aussi que si $k > 0$ est un entier positif et si G est un $(\mathcal{TN}_k)^\#$ -groupe résoluble-par-fini de type fini, alors il existe un entier $c = c(k)$ tel que G est dans la classe \mathcal{TN}_c , où \mathcal{N}_k désigne la classe des groupes nilpotents de classe au plus égale à k . Pour ce faire, nous allons ramener l'étude des $(\mathcal{TN}_k)^\#$ -groupes à celle des $(\mathcal{N}_k)^\#$ -groupes, qui sont des \mathbf{E}_{k+1}^* -groupes dont toute partie infinie contient deux éléments distincts x, y tels que $[y,_{k+1}x] = 1$; si bien que l'on pourra utiliser les résultats établis dans [3]. Pour démontrer notre résultat, établissons d'abord les résultats préliminaires suivants.

Dans [51, Théorème 1], Longobardi et Maj ont prouvé qu'un \mathbf{E}^* -groupe résoluble de type fini, il est fini-par-nilpotent. On généralisera ce résultat aux groupes résolubles-par-finis de type fini, on démontrera le Lemme suivant :

Lemme 3.2.1. *Soit G un \mathbf{E}^* -groupe résoluble-par-fini de type fini. Alors G est fini-par-nilpotent.*

Démonstration. Soit G un \mathbf{E}^* -groupe infini résoluble-par-fini de type fini. Comme G est résoluble-par-fini, alors il admet un sous groupe normal H résoluble tel que G/H soit fini, donc H est un groupe résoluble d'indice fini. Notons d'abord que d'après [51], G est nilpotent-par-fini. En effet, comme H est un \mathbf{E}^* -groupe résoluble de type fini, alors, d'après Longobardi et Maj [51], H est fini-par-nilpotent et donc nilpotent-par-fini et comme G/H est fini, on en déduit que G est nilpotent-par-fini. D'où G vérifie la condition maximal sur les sous-groupes et par suite tous ses sous-groupes sont de type fini. Pour démontré notre Lemme, nous allons fait par récurrence sur la longueur dérivée d de H .

Si $d = 1$, alors H est abélien et donc G est un groupe abélien-par-fini de type fini, donc admet un sous-groupe normal sans-torsion abélien A et d'indice fini. Soit $1 \neq a \in A$ et soit $g \in G$, alors l'ensemble $\{a^i g, \hat{i} > 0\}$ est infini. Donc il existe deux entiers positive m, n tels que $\langle a^m g, a^n g \rangle \in \mathbf{E}^*$, d'où $[a^m g, a^n g] = 1$, pour un entier positive c . Comme A est normal et abélien, on obtient que $[a, c g]^{m-n} = 1$, il en résulte que $[a, c g] = 1$ car A est sans-torion. Par suite a est un élément d'Engel à droite de G (i.e $a \in R(G)$), et ainsi $A \subseteq R(G)$, où $R(G)$ désigne l'ensemble des éléments d'Engel à droite de G . Comme G vérifie la condition maximale sur les sous-groupes, donc l'ensemble des éléments d'Engel à droite coïncide avec l'hypercentre de G qui est égal à $Z_i(G)$ pour un certain entier positif i [67, Théorème 7.21]. Par conséquent $A \leq Z_i(G)$ et comme G/A est fini, alors $G/Z_i(G)$ est fini. On en déduit, par Baer [67, Corollaire 2 du Théorème 4.21], que G est fini-par-nilpotent.

Maintenant, supposons que $d > 1$, donc par hypothèse de récurrence $G/H^{(d-1)}$ est fini-par-nilpotent. Donc G est dans la classe $\mathcal{A}(\mathcal{FN})$, et d'où dans $(\mathcal{AF})\mathcal{N}$, où \mathcal{A} désigne la classe des groupes abéliens et \mathcal{F} la classe des groupes finis.

Donc, d'après la première partie de la démonstration, G est dans la classe $(\mathcal{FN})\mathcal{N}$. Il s'ensuit que G est un groupe fini-par-résoluble de type fini. Par conséquent, d'après [51, Théorème 1], G est fini-par-nilpotent, et le lemme suit. \square

Lemme 3.2.2. *Soit G un $(\mathcal{TN})^\#$ -groupe résoluble-par-fini. Si G est abélien-par-torsion, alors il est torsion-par-abélien.*

Démonstration. Soit G un $(\mathcal{TN})^\#$ -groupe résoluble-par-fini et supposons que G est abélien-par-torsion.

Montrons d'abord que G admet un sous-groupe de torsion. Soit $x, y \in G$ deux éléments d'ordre fini. Donc $H = \langle x, y \rangle$ est un groupe résoluble-par-fini qui est dans la classe \mathcal{AT} , donc dans \mathcal{AF} . Il est clair qu'on peut supposer que H est infini. Donc H admet un sous-groupe normal abélien et sans-torsion A d'indice fini. Soit a un élément non-trivial de A et $h \in H$. L'ensemble $\{a^i h; i \text{ entier positif}\}$ étant infini, on a $\langle a^i h, (a^i h)^{a^m h} \rangle \in \mathcal{TN}$ pour deux entiers positifs m et n , d'où $\langle [a^m h, a^n h], a^n h \rangle \in \mathcal{TN}$. Il existe donc deux entiers positifs c et d tels que $[[a^m h, a^n h],_c a^n h]^d = 1$. Or $[[a^m h, a^n h],_c a^n h] = [[a^{m-n}, h],_c h a^n]^a$, d'où $[[a^{m-n}, h],_c h a^n]^d = 1$. Comme $[a^{m-n}, h]$ est dans A , on a $[[a^{m-n}, h],_c h a^n] = [[a^{m-n}, h],_c h]$ et on déduit que $[a^{m-n},_{c+1} h]^d = 1$. Comme $[a^{m-n},_{c+1} h]^d = [a,_{c+1} h]^{(m-n)d}$, on a $[a,_{c+1} h]^{(m-n)d} = 1$. Or $[a,_{c+1} h]$ est dans le groupe sans-torsion A , il en résulte que $[a,_{c+1} h] = 1$. Par suite a est un élément d'Engel à droite de H , et ainsi $A \subseteq R(H)$, où $R(H)$ désigne l'ensemble des éléments d'Engel à droite de H . Comme H vérifie la condition maximale sur les sous-groupes, donc l'ensemble des éléments d'Engel à droite coïncide avec l'hypercentre de H qui est égal à $Z_i(G)$ pour un certain entier positif i [67, Théorème 7.21] et donc $H/Z_i(H)$ est fini. Donc par un résultat de Baer [67, Corollaire 2 du Théorème 4.21], H est un groupe fini-par-nilpotent engendré par deux éléments d'ordre fini. D'où H est fini, ce qui est contradictoire. Par conséquent, H est un groupe fini et par suite G admet

un sous-groupe de torsion T .

Maintenant G/T est un groupe sans-torsion dans la classe $(\mathcal{TN})^\#$. Donc G/T est un $\mathcal{N}^\#$ -groupe, donc il est un E^* -groupe; on en déduit, par le Lemme 3.2.1, que G/T est localement fini-par-nilpotent. Par suite, G/T est un groupe localement nilpotent sans-torsion et abélien-par-torsion; donc par [67, Lemme 6.33] G/T est abélien. Par conséquent, G/T est torsion-par-abélien. \square

Passant maintenant à la démonstration de notre résultat :

Théorème 3.2.3. *Soit G un groupe résoluble-par-fini de type fini. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) G est un $(\mathcal{TN})^\#$ -groupe;
- (ii) G est dans la classe \mathcal{TN} .

Démonstration. Il est clair que si G est torsion-par-nilpotent, alors G est un $(\mathcal{TN})^\#$ -groupe. Soit G un groupe résoluble-par-fini de type fini et supposons que G est un $(\mathcal{TN})^\#$ -groupe. Soit H le sous-groupe normal résoluble de G d'indice fini. Montrons notre Théorème par récurrence sur la longueur dérivée d de H .

Si $d = 1$, alors H est abélien, d'où G est abélien-par-fin et d'après le lemme 2.2, G est dans la classe \mathcal{TN} . Supposons maintenant que $d > 1$. Par hypothèse de récurrence $G/H^{(d-1)}$ est torsion-par-nilpotent. Donc G est dans la classe $(\mathcal{AT})\mathcal{N}$, et par suite, d'après le Lemme 3.2.2, il est dans la classe $(\mathcal{TA})\mathcal{N}$. Soit N un sous-groupe normal torsion-par-abélien de G tel G/N est nilpotent et soit T le sous-groupe de torsion de N . Il est clair que T est normal dans G et G/T est (abélien sans-torsion)-par-nilpotent. Puisque $(\mathcal{TN})^\#$ est une classe de groupe fermé par quotient, on peut, donc supposer que G est (abélien sans-torsion)-par-nilpotent. Soit A le sous-groupe normal sans-torsion abélien de G tel que G/A soit nilpotent. Soit $1 \neq a \in A$ et soit

$g \in G$, alors l'ensemble $\{a^i g; i \text{ entier positif}\}$ est infini. Donc il existe deux entiers positifs m et n telque l'on a $\langle a^n g, (a^n g)^{a^m g} \rangle$ est torsion-par-nilpotent, d'où $\langle [a^m g, a^n g], a^n g \rangle$ est torsion-par-nilpotent. Il existe donc deux entiers positifs c et d tels que $[[a^m g, a^n g]_{,c} a^n g]^d = 1$. Comme $[[a^m g, a^n g]_{,c} a^n g] = [[a^{m-n}, g]_{,c} g a^n]^a$, alors $[[a^{m-n}, g]_{,c} g a^n]^d = 1$. Puisque $[a^{m-n}, g]$ est dans A , on a $[[a^{m-n}, g]_{,c} g a^n] = [[a^{m-n}, g]_{,c} g]$ et on déduit que $[a^{m-n},_{c+1} g]^d = 1$. Comme $[a^{m-n},_{c+1} g]^d = [a_{,c+1} g]^{(m-n)d}$, on a $[a_{,c+1} g]^{(m-n)d} = 1$. Or $[a_{,c+1} g]$ est dans le groupe sans-torsion A , il en résulte que $[a_{,c+1} g] = 1$. Par suite a est un élément d'Engel à droite de G , et ainsi $A \subseteq R(G)$, où $R(G)$ désigne l'ensemble des éléments d'Engel à droite de G . Puisque G est résoluble de type fini, donc l'ensemble des éléments d'Engel à droite coïncide avec l'hypercentre $\bar{Z}(G)$ de G [14, Théorème A]. Donc $A \leq \bar{Z}(G)$, par suite $G/\bar{Z}(G) \simeq (G/A)/(\bar{Z}(G)/A)$ est nilpotent. Or $Z(G/\bar{Z}(G)) = \bar{Z}(G)/\bar{Z}(G)$, donc $G = \bar{Z}(G)$, ce qui veut dire que G est un groupe hypercentral [68, 12.2.3]. Il s'ensuit que G est localement nilpotent [68, 12.2.4]. Comme G est de type fini, il est nilpotent. Donc G est dans torsion-par-nilpotent. \square

Remarque 3.2.4. Notons que le Théorème 3.2.3 n'est pas vrai pour un groupe arbitraire, En effet, L. Hamoudi a prouvé, dans [35, Corollaire 4.2], que pour tout entier $d \geq 2$, il existe un groupe non nilpotent, résiduellement nilpotent et sans-torsion engendré par d éléments tel que tout groupe engendré par $d - 1$ éléments est nilpotent. Donc pour $d = 3$, on obtient que le groupe tous ses sous-groupe 2-engendrés sont nilpotent et par suite torsion-par-nilpotent, d'où le groupe est $(\mathcal{TN})^\#$ -groupe mais le groupe lui même n'appartient pas à \mathcal{TN} car il n'est pas nilpotent.

Dans [3] Abdollahi a prouvé qu'un groupe métabélien de type fini G est un E_k^* -groupe si, et seulement si, $G/Z_k(G)$ est fini; et si G est un E_k^* -groupe résoluble de type fini, alors il existe un entier $c = c(k)$ qui dépend seulement de k tel que $G/Z_c(G)$ est fini.

Notons que si G est un $(\mathcal{N}_k)^\#$ -groupe, où \mathcal{N}_k désigne la classe des groupes nilpotents de classe au plus égale à k , alors pour toute partie infinie X de G il existe deux éléments distincts x et y de X tels que $\langle x, x^y \rangle \in \mathcal{N}_k$, d'où $\langle [y, x], x \rangle \in \mathcal{N}_k$, on en déduit que $[[x, y], {}_k y] = [x, {}_{k+1} y] = 1$. Par suite G est un \mathbf{E}_{k+1}^* -groupe. Donc on Combine les résultats dans [3] et notre résultat (Théorème 3.2.3), on obtient les conséquences suivantes :

Corollaire 3.2.5. *Si G est un groupe résoluble-par-fini de type fini. Si G est un $(\mathcal{TN}_k)^\#$ -groupe, alors il existe un entier $c = c(k)$ dépend seulement de k , tel que G est dans \mathcal{TN}_c .*

Démonstration. Soit k un entier positif et soit G un groupe résoluble-par-fini de type fini et supposons que G est un $(\mathcal{TN}_k)^\#$ -groupe. D'après le Théorème 3.2.3, G est dans la classe \mathcal{TN} , soit T le sous-groupe de torsion de G , donc G/T est sans-torsion dans \mathcal{TN} , d'où il nilpotent et par suite résoluble. D'autre part on a G/T est un $(\mathcal{TN}_k)^\#$ -groupes sans-torsion, donc il est un $(\mathcal{N}_k)^\#$ -groupes. Comme les $(\mathcal{N}_k)^\#$ -groupes sont des \mathbf{E}_{k+1}^* -groupes, on en déduit que G/T est un \mathbf{E}_{k+1}^* -groupe résoluble de type fini. Par suite, d'après [3, Théorème 3], il existe un entier $c = c(k)$ dépend seulement de k tel que $(G/T)/Z_c(G/T)$ soit fini. On en déduit par un résultat de Baer [37] que $\gamma_{c+1}(G/T) = \gamma_{c+1}(G)T/T$ est fini, donc il est de torsion; comme T est de torsion on obtient que $\gamma_{c+1}(G)$ est de torsion. Comme $G/\gamma_{c+1}(G)$ est dans la classe \mathcal{N}_c , il en résulte que G est dans la classe \mathcal{TN}_c . \square

Corollaire 3.2.6. *Soit G un groupe métabélien-par-fini de type fini. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) G est un $(\mathcal{TN}_k)^\#$ -groupe;
- (ii) G est dans la calsse \mathcal{TN}_{k+1} .

Démonstration. Soit G un groupe métabélien-par-fini de type fini et supposons que G est un $(\mathcal{TN}_k)^\#$ -groupes. Donc, d'après le Théorème 3.2.3, G est

dans la classe \mathcal{TN} . Soit T le sous-groupe de torsion de G , d'où G/T est un $(\mathcal{N}_k)^\#$ -groupe sans-torsion métabélien-par-fini et donc il est un \mathbf{E}_{k+1}^* -groupes. Soit H/T un sous-groupe de G/T tel que H/T est métabélien et $(G/T)/(H/T)$ soit fini. Donc H/T est un \mathbf{E}_{k+1}^* -groupe métabélien de type fini; il s'ensuit par un résultat de Abdollahi [3, Théorème 2] que $(H/T)/Z_{k+2}(H/T)$ est fini. On en déduit par [37, Théorème 1] que $\gamma_{k+2}(H/T) = \gamma_{k+2}(H)T/T$ est fini; comme T est de torsion, on obtient que $\gamma_{k+2}(H)$ est de torsion. Comme $H/\gamma_{k+2}(H)$ est dans la classe \mathcal{N}_{k+1} , alors que H est dans la classe \mathcal{TN}_{k+1} . Par suite, G est dans la classe $\mathcal{TN}_{k+1}\mathcal{F}$. On en déduit que G/T est un groupe nilpotent sans-torsion dans la classe $\mathcal{N}_{k+1}\mathcal{F}$. Donc par [67, Lemme 6.33] G/T est dans la classe \mathcal{N}_{k+1} . D'où G est dans \mathcal{TN}_{k+1} .

Réciproquement, Supposons que G est un groupe métabélien-par-fini de type fini dans la classe \mathcal{TN}_{k+1} . On a $\langle x, x^y \rangle$ est inclus dans $\langle x, \langle x, y \rangle' \rangle$. Donc si $\langle x, y \rangle$ est dans \mathcal{TN}_{k+1} , alors $\langle x, x^y \rangle$ est dans \mathcal{TN}_k , d'où G est un $(\mathcal{TN}_k)^\#$ -groupe. \square

3.3 Groupes ayant une série normal dans les classes

$(\mathcal{TN})^\#$ et $(\mathcal{TN}_k)^\#$

Notons par Ω la classe des groupes ayant une série normale finie dont les facteurs sont abéliens ou finis. Dans cette section, on améliorera le résultat obtenu dans la première section; on établira qu'un Ω -groupe de type fini G est un $(\mathcal{TN})^\#$ -groupe si, et seulement si, G est torsion-par-nilpotent, où \mathcal{T} est la classe des groupes de torsion (ou périodiques) et \mathcal{N} la classe des groupes nilpotents. On établira aussi pour tout entier $k > 0$, un Ω -groupe de type fini G est un $(\mathcal{TN}_k)^\#$ -groupe, alors il existe un entier $c = c(k)$ tel que G soit dans la classe \mathcal{TN}_c , où \mathcal{N}_k désigne la classe des groupes nilpotents de classe au plus égale à k .

Pour démontrer notre résultat, établissons d'abord les Lemmes suivants :

Lemme 3.3.1. *Un Ω -groupe de torsion, il est localement fini.*

Démonstration. Soit G un Ω -groupe de torsion. Soit H un sous-groupe de type fini de G , montrons que H est fini. Soit n la longueur de la série de H . Si $n = 1$, alors H est abélien ou fini. Si H est abélien et comme H est de torsion et de type fini, il est fini. Supposons maintenant que $n > 1$ et que tout Ω -groupe de torsion et de type fini et de longueur inférieure à n est fini. Comme H est un Ω -groupe, alors il existe un sous-groupe non-trivial N normal de H tel que N est abélien ou fini. Donc par hypothèse de récurrence, H/N est fini. Si N est fini, alors H est fini. Si N est abélien ; comme H/N est fini et H est de type fini, alors N est de type fini. Donc N est un groupe abélien, de torsion, et de type fini, donc il est fini. Par suite H est fini et Lemme suit. □

Lemme 3.3.2. *Soit G un Ω -groupe abélien-par-torsion. Si G est un $(\mathcal{TN})^\#$ -groupe, alors G admet un sous-groupe de torsion.*

Démonstration. Soit G un Ω -groupe abélien-par-torsion et supposons que G est un $(\mathcal{TN})^\#$ -groupe. Soit x, y deux éléments de G d'ordre fini. Montrons que $H = \langle x, y \rangle$ est fini. Comme H est abélien-par-torsion, alors il existe un sous-groupe M de H , normal et abélien tel que H/M est de torsion. Puisque la classe Ω est stable par passage aux quotients ; on obtient que H/M est un Ω -groupe de torsion et de type fini, donc par le Lemme 3.3.1 H/M est fini, et ainsi H est abélien-par-fini.

Donc on procède comme la première partie de la démonstration du Lemme 3.2.2, jusqu'à on obtient que H est fini-par-nilpotent. Donc il admet un sous-groupe normal K fini tel que H/K est nilpotent. Comme H/K est un groupe nilpotent et engendré par deux éléments d'ordre fini ; il est de torsion. Par suite H/K est un Ω -groupe de type fini et de torsion, d'où par le Lemme 3.3.1, H/K est fini. Par suite H est fini, et le Lemme suit. □

La clé de la démonstration du Lemme suivant (Lemme 3.3.3) est le Théorème 3.2.3.

Lemme 3.3.3. *Soit G un Ω -groupe sans-torsion . Si G est un $\mathcal{TN}^\#$ -groupe, alors G est localement nilpotent.*

Démonstration. Soit G un Ω -groupe sans-torsion et supposons que G est un $(\mathcal{TN})^\#$ -groupe. Soit H un sous-groupe de type fini de G , et montrons que H est nilpotent. Comme $(\mathcal{TN})^\#$ est stable par passage aux quotients et les groupes nilpotents de type fini sont de présentation finie, alors d'après [67, Lemme 6.17] on peut supposer que tout quotient propre de H soit nilpotent, mais H lui-même ne le soit pas. Comme H est un Ω -groupe, il admet un sous-groupe non-trivial K normal, abélien ou fini. Donc H/N est nilpotent. Si K est fini, alors H est fini-par-nilpotent ; et comme H est sans-torsion, il est nilpotent, une contradiction. On suppose maintenant que K est abélien, donc H est abélien-par-nilpotent. D'où H est un $(\mathcal{TN})^\#$ -groupe résoluble (et donc résoluble-par-fini) de type fini ; il s'ensuit, par le Théorème 3.2.3, que H est dans la classe \mathcal{TN} . Comme H est sans-torsion, il s'ensuit que H est nilpotent, une contradiction ; et le Lemme suit. \square

Lemme 3.3.4. *Soit G un Ω -groupe et supposons que G est un $(\mathcal{TN})^\#$ -groupe. Si G abélien-par-torsion, alors G torsion-par-abélien.*

Pour la démonstration de ce résultat, on procède de la même façon que la deuxième partie de la démonstration du Lemme 3.2.2 et en combinant avec le Lemme 3.3.3

Passant maintenant à démontrer notre principal résultat

Théorème 3.3.5. *Soit G un Ω -groupe de type fini. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) G est un $(\mathcal{TN})^\#$ -groupe ;
- (ii) G est torsion-par-nilpotent.

Démonstration. Soit G un Ω -groupe de type fini. Puisque la classe \mathcal{TN} est stable par passage aux sous-groupes, donc si G est dans \mathcal{TN} , alors G est un classe $(\mathcal{TN})^\#$ -groupe. Réciproquement, supposons que G est un $(\mathcal{TN})^\#$ -groupe. Soit n la longueur de la série de G . Montrons par récurrence sur n que G est torsion-par-nilpotent. Si $n = 1$, alors G est abélien ou fini, et dans les deux cas on obtient que G est torsion-par-nilpotent. Maintenant on suppose que $n > 1$ et que tout Ω -groupe de type fini et est $(\mathcal{TN})^\#$ -groupe de longueur inférieure à n est torsion-par-nilpotent. Comme G est un Ω -groupe, alors il existe un sous-groupe non-trivial normal N de G tel que N abélien ou fini. Donc par hypothèse de récurrence, G/N est torsion-par-nilpotent. Si N est fini, donc est de torsion. D'où G est torsion-par-nilpotent. Si N est abélien, donc G est abélien-par-(torsion-par-nilpotent), et ainsi il est (abélien-par-torsion)-par-nilpotent. Donc, par le Lemme 3.3.4, G est (torsion-par-abélien)-par-nilpotent, par suite G est torsion-par-(abélien-par-nilpotent). Par suite G admet un sous-groupe M , normal et de torsion tel que G/M soit abélien-par-nilpotent. D'où G/M est un $(\mathcal{TN})^\#$ -groupe résoluble de type fini; il s'ensuit, par le Théorème 3.2.3, que G/K est torsion-par-nilpotent. Comme K est de torsion, alors G est torsion-par-nilpotent. \square

Maintenant, on va caractériser les $(\mathcal{TN}_k)^\#$ -groupes dans les Ω -groupes.

Théorème 3.3.6. *Soit $k > 0$ un entier et soit G un Ω -groupe de type fini. Si G est un $(\mathcal{TN}_k)^\#$ -groupe, alors il existe un entier $c = c(k)$ tel que G soit dans la classe \mathcal{TN}_c .*

Démonstration. Soit G un Ω -groupe de type fini et supposons que G est un $(\mathcal{TN}_k)^\#$ -groupe. D'après le Théorème 3.3.5, G admet un sous-groupe non-trivial normal et de torsion K tel que G/K est nilpotent. Soit T/K le sous-groupe de torsion de G/K , comme G/K est nilpotent de type fini, alors

T/K est fini et donc de torsion. On en déduit que T est de torsion car K est de torsion. D'autre part, comme G/T est un $(\mathcal{TN}_k)^\#$ -groupe sans-torsion il est un $(\mathcal{N}_k)^\#$ -groupe. Comme les $(\mathcal{N}_k)^\#$ -groupes sont des \mathbf{E}_{k+1}^* -groupes, on en déduit que G/T est un \mathbf{E}_{k+1}^* -groupe résoluble de type fini. Donc par [3, Théorème 3], il existe un entier un entier $c = c(k)$ tel que $(G/T)/Z_c(G/T)$ soit fini. On en déduit par un résultat de Baer [37] que $\gamma_{c+1}(G/T) = \gamma_{c+1}(G)T/T$ est fini, donc il est de torsion ; comme T est de torsion on obtient que $\gamma_{c+1}(G)$ est de torsion. Comme $G/\gamma_{c+1}(G)$ est dans la classe \mathcal{N}_c , il en résulte que G est dans la classe \mathcal{TN}_c . \square

Pour $k = 1$ et $k = 2$, on obtient les deux conséquences suivantes :

Corollaire 3.3.7. *Soit G un Ω -groupe de type fini. Si G est un $(\mathcal{TN}_1)^\#$ -groupe, alors G est dans la classe \mathcal{TN}_2 .*

Démonstration. Soit G un Ω -groupe de type fini et supposons que G est un $(\mathcal{TN}_1)^\#$ -groupe. D'après le Théorème 3.3.5, G admet un sous-groupe non-trivial normal et de torsion K tel que G/K est nilpotent. Soit T/K le sous-groupe de torsion de G/K , comme G/K est nilpotent de type fini, alors T/K est fini et donc de torsion. On en déduit que T est de torsion car K est de torsion. Comme G/T est un $(\mathcal{TN}_1)^\#$ -groupe sans-torsion il est un $(\mathcal{N}_1)^\#$ -groupe. Comme les $(\mathcal{N}_1)^\#$ -groupes sont des \mathbf{E}_2^* -groupes, on en déduit que G/T est un \mathbf{E}_2^* -groupe résoluble de type fini. Donc par [1, Théorème], $(G/T)/Z_2(G/T)$ est fini. On en déduit par un résultat de Baer [37] que $\gamma_3(G/T) = \gamma_3(G)T/T$ est fini, donc il est de torsion ; comme T est de torsion on obtient que $\gamma_3(G)$ est de torsion. Puisque $G/\gamma_3(G)$ est dans la classe \mathcal{N}_2 , il en résulte que G est dans la classe \mathcal{TN}_2 . \square

Corollaire 3.3.8. *Soit G un Ω -groupe de type fini. Si G est un $(\mathcal{TN}_2)^\#$ -groupe, alors G est dans la classe $\mathcal{TN}_3^{(2)}$.*

Démonstration. Soit G un Ω -groupe de type fini et supposons que G est un $(\mathcal{TN}_2)^\#$ -groupe. D'après le Théorème 3.3.5, G admet un sous-groupe non-trivial normal et de torsion K tel que G/K est nilpotent. Soit T/K le sous-groupe de torsion de G/K , comme G/K est nilpotent de type fini, alors T/K est fini et donc de torsion. On en déduit que T est de torsion car K est de torsion. Comme G/T est un $(\mathcal{TN}_2)^\#$ -groupe sans-torsion il est un $(\mathcal{N}_2)^\#$ -groupe. Comme les $(\mathcal{N}_2)^\#$ -groupes sont des \mathbf{E}_3^* -groupes, on en déduit que G/T est un \mathbf{E}_3^* -groupe résoluble de type fini. Donc par [3, Théorème 1], G/T est $\mathcal{FN}_3^{(2)}$ et donc $\mathcal{TN}_3^{(2)}$; par conséquent G est dans la classe $\mathcal{TN}_3^{(2)}$. \square

CHAPITRE 4

GROUPES AVEC UNE CONDITION DE $\mathcal{T}_\pi\mathcal{N}$ SUR LES PARTIES INFINIES

4.1 Introduction

Soit π un sous-ensemble de l'ensemble des nombres premiers. Dans ce chapitre, on caractérisera les $(\mathcal{T}_\pi\mathcal{N})^*$ -groupes, où \mathcal{T}_π et \mathcal{N} désignent respectivement la classe des groupes dont tout élément d'ordre un π -nombre et la classe des groupes nilpotents. Plus précisément, on établira qu'un $(\mathcal{T}_\pi\mathcal{N})^*$ -groupe G résoluble de type fini alors G est une extension d'un groupe de \mathcal{T}_π par un groupe fini-par-nilpotent. On établira aussi que si $k > 0$ est un entier positif et si G est un $(\mathcal{T}_\pi\mathcal{N}_k)^*$ -groupe résoluble de type fini, alors il existe un entier $c = c(k)$ tel que G soit dans la classe $\mathcal{T}_\pi(\mathcal{FN}_c)$, où \mathcal{N}_k désigne la classe des groupes nilpotents de classe au plus égale à k . Notons que notre résultat est une amélioration du résultat de Lennox et Wiegold

[48] affirmant qu'un groupe G résoluble de type fini est un \mathcal{N}^* -groupe si, et seulement si, G est dans la classe \mathcal{FN} .

Définition 4.1.1. Soit G un groupe et soit π un sous-ensemble de l'ensemble des nombres premiers.

Soit $n > 1$ un entier, on dit que n est un π -nombre si et seulement si les diviseurs premiers de n sont dans π .

Un élément x de G est dit un π -élément si son ordre est un π -nombre. (i.e : $o(x)$ est un π -nombre).

Si tout élément x de G est un π -élément, on dit que G est π -groupe (i.e. $G \in \mathcal{T}_\pi$), c-à-d. $G \in \mathcal{T}_\pi \Leftrightarrow \forall x \in G : o(x)$ est un π -nombre.

Si G n'admet aucun π -élément, on dit que G est π -free.

4.2 $(\mathcal{T}_\pi \mathcal{N})^*$ -groupes et $(\mathcal{T}_\pi \mathcal{N}_k)^*$ -groupes

Dans cette section, nous allons caractériser les $(\mathcal{T}_\pi \mathcal{N})^*$ -groupes, où π est un sous-ensemble de l'ensemble des nombres premiers. Plus précisément, on va démontrer qu'un groupe G résoluble de type fini est un $(\mathcal{T}_\pi \mathcal{N})^*$ -groupe, alors G est une extension d'un groupe de \mathcal{T}_π par un groupe fini-par-nilpotent. On établira aussi que si $k > 0$ est un entier positif et si G est un $(\mathcal{T}_\pi \mathcal{N}_k)^*$ -groupe résoluble de type fini, alors il existe un entier $c = c(k)$ tel que G soit dans $\mathcal{T}_\pi(\mathcal{FN}_c)$, où \mathcal{N}_k désigne la classe des groupes nilpotents de classe au plus égale à k .

Pour démontrer notre résultat, établissons d'abord quelques résultats préliminaires :

Lemme 4.2.1. Soit G un groupe engendré par les π -éléments. Si G est localement $(\mathcal{T}_\pi$ -par-nilpotent), alors $G \in \mathcal{T}_\pi$.

Démonstration. Soit G un groupe engendré par les π -éléments et supposons que G est localement $(\mathcal{T}_\pi$ -par-nilpotent). Comme tout groupe localement $(\mathcal{T}_\pi$)

est un \mathcal{T}_π , alors on peut supposer que $G \in \mathcal{T}_\pi$ -par-nilpotent). Soit N un sous-groupe normal de G tel que N soit un π -groupe et G/N soit nilpotent. Donc, on obtient que $(G/N)/(G/N)'$ est un groupe abélien engendré par les π -éléments et donc est un π -groupe. Comme G/N est nilpotent, on en déduit, par [47, 1.2.12], que G/N est un π -groupe. Par suite, G est un π -groupe. \square

Le Lemme suivant est une version similaire du Lemme [67, Lemme 6.33].

Lemme 4.2.2. *Soit $c \geq 0$ et soit G un groupe localement nilpotent, π -free. Si $G \in \mathcal{N}_c\mathcal{T}_\pi$, alors $G \in \mathcal{N}_c$*

Démonstration. Soit G un groupe localement nilpotent et π -free et supposons que $G \in \mathcal{N}_c\mathcal{T}_\pi$. Par récurrence sur c , montrons que $G \in \mathcal{N}_c$. Si $c = 0$, alors $G \in \mathcal{N}_0\mathcal{T}_\pi$, d'où $G \in \mathcal{T}_\pi$ et comme G est π -free, alors $G = 1$, donc $G \in \mathcal{N}_0$. Supposons maintenant que $c > 0$. Comme $G \in \mathcal{N}_c\mathcal{T}_\pi$, alors il existe un sous-groupe normal N de G , tel que $N \in \mathcal{N}_c$ et $G/N \in \mathcal{T}_\pi$. Soit $g \in G$, alors $gN \in G/N$ et comme $G/N \in \mathcal{T}_\pi$, alors il existe un π -nombre $m > 0$ tel que $(gN)^m = N$, d'où $g^m N = N$ et donc $g^m \in N$. Par suite, $[a, g^m] = 1$ pour tout $a \in Z(N)$. On en déduit que $g^m \in Z(H)$, où $H = \langle a, g \rangle$. Comme H est un sous-groupe de G , on obtient que H est un groupe nilpotent de type fini et π -free. D'autre part, $Z(H)$ est π -free et donc, d'après [67, Théorème 2.25], l'hypercentre de $H/Z(H)$ est π -free. Or $\overline{Z}(H/Z(H)) = H/Z(H)$ puisque $H/Z(H)$ est nilpotent. Donc, on obtient que $H/Z(H)$ est π -free. Puisque $g^m \in Z(H)$, nous donne que $(gZ(H))^m = Z(H)$; et comme $H/Z(H)$ est π -free, alors $gZ(H) = Z(H)$; donc $g \in Z(H)$. Par suite $[a, g] = 1$, d'où $a \in Z(G)$ et donc $Z(N) \leq Z(G)$. Par suite $G/Z(G)$ est un groupe localement nilpotent, π -free et dans $\mathcal{N}_{c-1}\mathcal{T}_\pi$. Donc, par hypothèse de récurrence, on obtient que $G/Z(G) \in \mathcal{N}_{c-1}$ et donc $G \in \mathcal{N}_c$. \square

Lemme 4.2.3. *Soit G un $(\mathcal{T}_\pi\mathcal{N})^*$ -groupe résoluble de type fini. Si G est une extension finie d'un groupe nilpotent, alors G fini-par-nilpotent.*

Démonstration. Soit G un $(\mathcal{T}_\pi\mathcal{N})^*$ -groupe résoluble de type fini supposons que G est admet un sous-groupe normal nilpotent tel que le quotient soit fini. Supposons, pour avoir une contradiction, que G n'est pas fini-par-nilpotent. Comme la classe des groupes $(\mathcal{T}_\pi\mathcal{N})^*$ est fermée par passage aux quotients, et comme les groupes nilpotent-par finis de type fini vérifie la condition maximale sur les sous-groupes, alors on peut supposer que toute image homomorphe propre de G soit fini-par-nilpotent. Soit H un sous-groupe normal de G nilpotent et d'indice fini. Donc H est un groupe nilpotent de type fini et ainsi H est une extension finie d'un sous-groupe sans-torsion [68, 5.4.15 (i)]. Par suite G admet un sous-groupe normal d'indice fini N , tel que N soit nilpotent et sans-torsion. Posons $K = Z(N)$ et soit $1 \neq k$ un élément de K et g un élément de G . Donc l'ensemble $\{k^i g; i \text{ est un } \pi\text{-nombre}\}$ est infini et comme G est un $(\mathcal{T}_\pi\mathcal{N})^*$ -groupe, il existe deux entiers positifs m et n tel que $\langle k^m g, k^n g \rangle \in \mathcal{T}_\pi\mathcal{N}$. Ainsi il existe un entier positif c et un π -nombre positif d tels que $[k^{m-n},_c k^n g]^d = 1$. Comme K est abélien et normal dans G , on a $[k^{m-n},_c k^n g] = [k^{m-n},_c g]$, on en déduit que $[k^{m-n},_c g]^d = 1$. Puisque $[k^{m-n},_c g]^d = [k,_c g]^{(m-n)d}$, on a $[k,_c g]^{(m-n)d} = 1$. Comme $[k,_c g] \in K$ et K est sans-torsion, alors $[k,_c g] = 1$. D'où $1 \neq k \in R(G)$, où $R(G)$ est l'ensemble des éléments d'Engel à droite de G . Maintenant, comme G vérifie la condition maximale sur les sous-groupes, $R(G)$ coïncide avec l'hypercentre de G qui est égal à $Z_i(G)$ pour un certain entier i [67, Théorème 7.21], qui est donc non-trivial. Par suite, le centre de G , $Z(G)$ est non-trivial, et donc d'après l'hypothèse $G/Z(G)$ est fini-par-nilpotent. On en déduit, par Hall [37], que $(G/Z(G))/Z_i(G/Z(G))$ est fini et donc $G/Z_{i+1}(G)$ est fini où i est un certain entier positif. Il s'ensuit, par Baer [37, Théorème 1], que G est fini-par-nilpotent; ce qui est contradictoire et le Lemme suit. \square

Passant maintenant à la démonstration de notre résultat

Théorème 4.2.4. *Soit G un groupe résoluble de type fini. Si G est un $(\mathcal{T}_\pi\mathcal{N})^*$ -groupe, alors G est dans la classe $\mathcal{T}_\pi(\mathcal{FN})$.*

Démonstration. Soit G un groupe résoluble de type fini et supposons que G est un $(\mathcal{T}_\pi\mathcal{N})^*$ -groupe. Soit $T_\pi(G)$ le π -sous-groupe normal maximal de G , alors $G/T_\pi(G)$ n'admet aucun π -sous-groupe normal non-trivial. Donc tout sous-groupe normal hypercentral de $G/T_\pi(G)$ est π -free. Montrons que $G/T_\pi(G)$ est fini-par-nilpotent. Puisque $T_\pi(G) \in \mathcal{T}_\pi$, donc il suffit montrer que G est fini-par-nilpotent. Comme les groupes fini-par-nilpotents de type fini sont de présentation finie et la classe $(\mathcal{T}_\pi\mathcal{N})^*$ est stable par passage aux quotients donc, d'après [67, Lemme 6.17], on peut supposer que tout quotient propre de G soit fini-par-nilpotent mais G lui même ne le soit pas. Soit d la longueur dérivée de G . Si $d = 1$, alors G est abélien, d'où nilpotent et ainsi fini-par-nilpotent, une contradiction. Supposons que $d > 1$, donc G admet un sous-groupe non-trivial $A(= G^{(d-1)})$ normal et abélien. Donc par hypothèse G/A est fini-par-nilpotent. Si A est fini, alors on obtient que G est fini-par-nilpotent, une contradiction. Supposons maintenant que A est infini, et comme A est abélien alors il est π -free. Donc A est un $(\mathcal{T}_\pi\mathcal{N})^*$ -groupe abélien π -free. Donc il est un $(\mathcal{N})^*$ -groupe. On en déduit, que G est nilpotent-par-fini. D'où, d'après le Lemme 4.2.3, G est fini-par-nilpotent, une contradiction. et le Théorème suit. \square

Maintenant, passant à la caractérisation des $(\mathcal{T}_\pi\mathcal{N}_k)^*$ -groupes. Pour cela, établissons d'abord le Lemme suivant :

Lemme 4.2.5. *Soit G un groupe résoluble de type fini. Si G est un $(\mathcal{T}_\pi\mathcal{N}_k)^*$ -groupe, alors G admet un sous-groupe normal T tel que $T \in \mathcal{T}_\pi\mathcal{F}$ et G/T est un $(\mathcal{N}_k)^*$ -groupe.*

Démonstration. Soit G un groupe résoluble de type fini et supposons que G est un $(\mathcal{T}_\pi\mathcal{N}_k)^*$ -groupe. D'après le Théorème 4.2.4, G est dans la classe $\mathcal{T}_\pi(\mathcal{FN})$. Donc il existe un sous-groupe normal H de G tel que $H \in \mathcal{T}_\pi$ et G/H est fini-par-nilpotent. Soit T/H le sous-groupe de torsion de G/H . Comme G/H est fini-par-nilpotent et de type fini, T/H est fini et donc $T \in \mathcal{T}_\pi\mathcal{F}$. D'autre part on a G/T est un $(\mathcal{T}_\pi\mathcal{N}_k)^*$ -groupe sans-torsion, donc il $(\mathcal{N}_k)^*$ -groupe. \square

En combinant le résultat de [9], le Théorème 4.2.4 et le Lemme 4.2.5, on a la caractérisation des $(\mathcal{T}_\pi\mathcal{N}_k)^*$ -groupes.

Théorème 4.2.6. *Soit k un entier positif et soit G un groupe résoluble de type fini. Si G est un $(\mathcal{T}_\pi\mathcal{N}_k)^*$ -groupe, alors G est dans la classe $\mathcal{T}_\pi(\mathcal{FN}_k^{(2)})$.*

Démonstration. Soit G un groupe résoluble de type fini et supposons que G est un $(\mathcal{T}_\pi\mathcal{N}_k)^*$ -groupe. D'après le Lemme 4.2.5, G admet un sous-groupe normal T tel que $T \in \mathcal{T}_\pi\mathcal{F}$ et G/T est un $(\mathcal{N}_k)^*$ -groupe. On en déduit que G/T est un $(\mathcal{N}_k)^*$ -groupe résoluble de type fini. D'où, d'après [9, Théorème], G/T est dans la classe $\mathcal{FN}_k^{(2)}$. Comme $T \in \mathcal{T}_\pi\mathcal{F}$, alors $G \in \mathcal{T}_\pi(\mathcal{FN}_k^{(2)})$. \square

En combinant le résultat de [22], le Théorème 4.2.4 et le Lemme 4.2.5, on a une autre caractérisation des $(\mathcal{T}_\pi\mathcal{N}_k)^*$ -groupes.

Théorème 4.2.7. *Soit k un entier positif et soit G un groupe résoluble de type fini. Si G est un $(\mathcal{T}_\pi\mathcal{N}_k)^*$ -groupe, alors il existe un entier $c = c(k)$ tel que G est dans la classe $\mathcal{T}_\pi(\mathcal{FN}_c)$.*

Démonstration. Soit G un groupe résoluble de type fini et supposons que G est un $(\mathcal{T}_\pi\mathcal{N}_k)^*$ -groupe. D'après le Lemme 4.2.5, G admet un sous-groupe normal T tel que $T \in \mathcal{T}_\pi\mathcal{F}$ et G/T est un $(\mathcal{N}_k)^*$ -groupe. On en déduit que G/T est un $(\mathcal{N}_k)^*$ -groupe résoluble de type fini. D'où, d'après [22, Théorème], il existe un entier c dépend de k tel que $(G/T)/Z_c(G/T)$ est fini. On en déduit

par Baer [37], que $\gamma_{c+1}(G/T)$ est fini. Il s'ensuit, que G/T est dans la classe \mathcal{FN}_c . Comme $T \in \mathcal{T}_\pi\mathcal{F}$, alors $G \in \mathcal{T}_\pi(\mathcal{FN}_c)$. \square

Pour $k = 1$, $k = 2$ et $k = 3$, on a les résultats suivants :

Corollaire 4.2.8. *Soit G un groupe résoluble de type fini. Si G est un $(\mathcal{T}_\pi\mathcal{A})^*$ –groupe, alors G est dans la classe $\mathcal{T}_\pi(\mathcal{FA})$.*

Démonstration. Soit G un groupe résoluble de type fini et supposons que G est un $(\mathcal{T}_\pi\mathcal{A})^*$ –groupe. D'après le Lemme 4.2.5, G admet un sous-groupe normal T tel que $T \in \mathcal{T}_\pi\mathcal{F}$ et G/T est un \mathcal{A}^* –groupe. Donc G/T est un \mathcal{A}^* –groupe résoluble de type fini. D'où, d'après Neumann [60, Théorème], $(G/T)/Z(G/T)$ est fini. On en déduit par Baer [37], que $\gamma_2(G/T)$ est fini. Par suite, G/T est dans la classe \mathcal{FA} . Comme $T \in \mathcal{T}_\pi\mathcal{F}$, donc $G \in \mathcal{T}_\pi(\mathcal{FA})$. \square

Corollaire 4.2.9. *Soit G un groupe résoluble de type fini. Si G est un $(\mathcal{T}_\pi\mathcal{N}_2)^*$ –groupe, alors G est dans la classe $\mathcal{T}_\pi(\mathcal{FN}_2)$.*

Démonstration. Soit G un groupe résoluble de type fini et supposons que G est un $(\mathcal{T}_\pi\mathcal{N}_2)^*$ –groupe. D'après le Lemme 4.2.5, G admet un sous-groupe normal T tel que $T \in \mathcal{T}_\pi\mathcal{F}$ et G/T est un $(\mathcal{N}_2)^*$ –groupe. Par suite G/T est un $(\mathcal{N}_2)^*$ –groupe résoluble de type fini. Donc, d'après [19, Théorème], $(G/T)/Z_2(G/T)$ est fini. On en déduit par Baer [37], que $\gamma_3(G/T)$ est fini. Par suite, G/T est dans la classe \mathcal{FN}_2 . Comme $T \in \mathcal{T}_\pi\mathcal{F}$, alors $G \in \mathcal{T}_\pi(\mathcal{FN}_2)$. \square

Corollaire 4.2.10. *Soit G un groupe résoluble de type fini. Si G est un $(\mathcal{T}_\pi\mathcal{N}_3)^*$ –groupe, alors G est dans la classe $\mathcal{T}_\pi(\mathcal{FN}_3^{(2)})$.*

Démonstration. Soit G un groupe résoluble de type fini et supposons que G est un $(\mathcal{T}_\pi\mathcal{N}_3)^*$ –groupe. D'après le Lemme 4.2.5, G admet un sous-groupe normal T tel que $T \in \mathcal{T}_\pi\mathcal{F}$ et G/T est un $(\mathcal{N}_3)^*$ –groupe. Comme les $(\mathcal{N}_3)^*$ –groupes sont des \mathbf{E}_3^* –groupes, on en déduit que G/T est un \mathbf{E}_3^* –groupe résoluble de type fini. D'où par [2, Théorème 1] G/T est dans la classe $\mathcal{FN}_3^{(2)}$. Par suite, $G \in \mathcal{T}_\pi(\mathcal{FN}_3^{(2)})$. \square

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Abdollahi, 'Finitely generated soluble groups with an Engel condition on infinite subsets', *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **103** (2000), 47-49.
- [2] A. Abdollahi, 'A characterization of infinite 3-abelian groups', *Arch. Math.* **73** (1999), 104-108.
- [3] A. Abdollahi, 'Some Engel conditions on infinite subsets of certain groups', *Bull. Austral. Math. Soc.* **62** (2000), 141-148.
- [4] A. Abdollahi, 'Some Engel conditions on finite subsets of certain groups', *Houston J. Math.* **27** (2001), 511-522.
- [5] A. Abdollahi, 'Infinite groups with an Engel condition on infinite subsets', *Bull. Iranian Math. Soc.* **26** (2000), 73-79.
- [6] A. Abdollahi, A. Mohammadi Hassanabadi, 'A permutability problem in infinite groups and Ramsey's theorem', *Bull. Austral. Math. Soc.* **64** (2001), 27-32.
- [7] A. Abdollahi, A. Mohammadi Hassanabadi et B. Taeri, 'An n -rewritability criterion for infinite groups', *Comm. Algebra* **29** (2001), 1571-1581.

- [8] A. Abdollahi, A. Mohammadi Hassanabadi et B. Taeri, 'A property equivalent to n -permutability for infinite groups', *J. Algebra* **221** (1999), 570-578.
- [9] A. Abdollahi et B. Taeri, 'A condition on finitely generated soluble groups', *Comm. Algebra* **27** (1999), 5633-5638.
- [10] A. Abdollahi et B. Taeri, 'A condition on certain variety of groups', *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **104** (2000), 47-49.
- [11] A. Abdollahi et B. Taeri, 'Some conditions on infinite subsets of infinite groups', *Bull. Malaysian Math. Soc. (2)* **22** (1999), 87-93.
- [12] A. Abdollahi et N. Trabelsi, 'Quelques extensions d'un problème de Paul Erdos sur les groupes', *Bull. Belg. Math. Soc.* **9** (2002), 1-11.
- [13] A. Boukaroura, 'Characterisation of finitely generated finite-by-nilpotent groups', *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **111** (2004), 119-126.
- [14] C.J.B. Brookes, 'Engel elements of soluble groups', *Bull. London. Mat. Soc.* **18** (1986), 7-10.
- [15] B. Bruno, R. E. Phillips, 'On minimal conditions related to Miller-Moreno type groups', *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **69** (1983), 153-168.
- [16] O. Chapuis, 'Variétés de groupes et m -identités', *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I* **316** (1993), 15-17.
- [17] M. Curzio, J. C. Lennox, A. H. Rhemtulla et J. Wiegold, 'Groups with many permutable subgroups', *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **48** (1990), 397-401.
- [18] M. Curzio, P. Longobardi, M. Maj et A. H. Rhemtulla, 'Groups with many rewritable products', *Proc. Amer. Math. Soc.* **115** (1992), 931-934.
- [19] C. Delizia, 'Finitely generated soluble groups with a condition on infinite subsets', *Rend. Sci. Mat. Appl. Ser. A* **128** (1994), 201-208.

- [20] C. Delizia, 'On groups with a nilpotence condition on infinite subsets', *Algebra colloq.* **2** (1995), 97-104.
- [21] C. Delizia, 'On certain residually finite groups', *Comm. Algebra* **24** (1996), 3531-3535.
- [22] C. Delizia, 'A Nilpotency condition for finitely generated soluble groups', *Atti. Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* **9** (1998), 237-239.
- [23] C. Delizia, A. H. Rhemtulla et H. Smith, 'Locally graded groups with a nilpotence condition on infinite subsets', *J. Austral. Math. Soc. (series A)* **69** (2000), 415-420.
- [24] C. Delizia et C. Nicotera, 'On residually finite groups with an Engel condition on infinite subsets', *Houston. J. Math.* **27** (2001), N°4, 757-761.
- [25] C. Delizia et C. Nicotera, 'Locally graded groups with a Bell condition on infinite subsets', *J. Group theory* **12** (2009), 753-759.
- [26] G. Endimioni, 'Groups covered by finitely many nilpotent subgroups', *Bull. Austral. Math. Soc.* **50** (1994), 459-464.
- [27] G. Endimioni, 'Groupes finis satisfaisant la condition (N, n) ', *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I* **319** (1994), 1245-1247.
- [28] G. Endimioni, 'Groups in which certain equations have many solutions', *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **106** (2001), 77-82.
- [29] F. Gharbi et T. Rouabhi, 'Hyper-(Abelian-by-finite) groups with many subgroups of finite depth', *Ann. Math. Blaise Pascal*, **14 N°1** (2007), 17-28.
- [30] E. S. Golod, 'Some problems of Burnside type', *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2* **84** (1969), 83-88.
- [31] J. R. J. Groves, 'A conjecture of Lennox and Wiegold concerning super-soluble groups', *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **35** (1983), 218-220.

- [32] K. W. Gruenberg, 'Two theorems on Engel groups', *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **49** (1953), 377-380.
- [33] K. W. Gruenberg, 'The upper central series in soluble groups', *Illinois J. Math.* **5** (1961), 436-466.
- [34] N. D. Gupta et M. F. Newman, 'Third Engel groups', *Bull. Austral. Math. Soc.* **40** (1989), 215-230.
- [35] L. Hammoudi, 'Burnside and Kuroch problems', *Internat. J. Algebra Comput.*, **14** (2004), 197-211.
- [36] P. Hall, 'Finiteness conditions for soluble groups', *Proc. London Math. Soc.* (3) **4** (1954), 419-436.
- [37] P. Hall, 'Finite-by-nilpotent groups', *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **52** (1956), 611-616.
- [38] P. S. Kim, 'A characterization of infinite metabelian groups', *Houston J. Math.* **17** (1991), 429-437.
- [39] P. S. Kim, 'A condition for locally soluble groups to be metabelian', *Houston J. Math.* **20** (1994), 193-199.
- [40] Y. K. Kim et A. H. Rhemtulla, 'On locally graded groups', *Proceedings of Groups-Korea 94*, Walter de Gruyter & Co, (Berlin, New York 1995), 189-197.
- [41] Y. K. Kim et A. H. Rhemtulla, 'Weak maximality condition and polycyclic groups', *Proc. Amer. Math. Soc.* **123** (1995), 711-714.
- [42] N. Lemnouar, 'On Cernikov-by-nilpotent groups', *J. Algebra Appl.* **5** (2006), 119-123.
- [43] J. C. Lennox, 'Bigenetic properties of finitely generated hyper-(abelian-by-finite) groups', *J. Austral. Math. Soc.* **16** (1973), 309-315.

- [44] J. C. Lennox, 'Finitely generated soluble groups in which all subgroups have finite lower central depth', *Bull. London. Math. Soc.* **7** (1975), 273-278.
- [45] J. C. Lennox, 'Lower central depth in finitely generated soluble-by-finite groups', *Glasgow. Math. Soc.* **19** (1978), 153-154.
- [46] J. C. Lennox, A. M. Hassanabadi et J. Wiegold, 'Some commutativity criteria', *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **84** (1990), 135-141.
- [47] J. C. Lennox and D. J. S. Robinson, '*The Theory of Infinite Soluble Groups*', Clarendon Press, Oxford 2004.
- [48] J. C. Lennox and J. Wiegold, 'Extensions of a problem of Paul Erdos on groups', *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **31** (1981), 459-463.
- [49] P. Longobardi, 'On locally graded groups with an Engel condition on infinite subsets', *Arch. Math.* **76** (2001), 88-90.
- [50] P. Longobardi et M. Maj, 'A finiteness condition concerning commutators in groups', *Houston J. Math.* **19** (1993), 505-512.
- [51] P. Longobardi and M. Maj, 'Finitely generated soluble groups with an Engel condition on infinite subsets', *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **89** (1993), 97-102.
- [52] P. Longobardi, M. Maj, A. Mann et A. H. Rhemtulla, 'Groups with many nilpotent subgroups', *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **95** (1996), 143-152.
- [53] P. Longobardi, M. Maj et A. H. Rhemtulla, 'Infinite groups in a given variety and Ramsey's theorem.', *Comm. in Algebra* **20** (1992), 127-139.
- [54] P. Longobardi, M. Maj, A. H. Rhemtulla et H. Smith, 'Periodic groups with many permutable subgroups', *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **53** (1992), 116-119.

- [55] P. Longobardi, M. Maj et H. Smith, 'A note on locally graded groups', *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **94** (1995), 275-277.
- [56] A. Lubotzky et A. Mann, 'Residually finite groups of finite rank', *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **106** (1989), 385-388.
- [57] A. I. Mal'cev, '*Collected works*', (Nauka, Moscow 1976).
- [58] F. Menegazzo, 'A property equivalent to commutativity for infinite groups', *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **87** (1992), 299-301.
- [59] R. F. Morse, 'Solvable Engel groups with nilpotent normal closures', *Lond. Math. Soc. Lect. Notes Series* **576** (1999), *Ste Andrews groups theory II* 1997, 560-567.
- [60] B. H. Neumann, 'A problem of Paul Erdos on groups', *J. Austral. Math. Soc. ser. A* **21** (1976), 467-472.
- [61] M. F. Newman, 'Some varieties of groups', *J. Austral. Math. Soc.* **16** (1973), 481-494.
- [62] M. F. Newman, 'A theorem of Golod-Sasarevic and an application in group theory', non publié.
- [63] A. Y. Ol'shanskii, 'An infinite group with subgroups of prime orders', *Math. USSR-Izv.* **16** (1981), 279-289.
- [64] O. Puglisi et L. S. Spiezia, 'A combinatorial property of certain infinite groups', *Comm. in Algebra* **22** (1994), 1457-1465.
- [65] A. H. Rhemtulla, 'Groups with many elliptic subgroups', *Lect. Notes in Math.* **1398** (1988), 156-162.
- [66] A. H. Rhemtulla et H. Smith, 'On infinite locally finite groups', *Canad. Math. Bull.* **20** (1994), 1-8.
- [67] D. J. S. Robinson, '*Finiteness conditions and generalized soluble groups*', (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1972).

- [68] D. J. S. Robinson, 'A course in the theory of groups', (Springer-verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1982).
- [69] T. Rouabhi et N. Trablasi, 'A note on torsion-by-nilpotent groups', *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*, **117** (2007), 175-179.
- [70] A. F. Salles, 'Finitely generated soluble groups with a condition on infinite subsets', *Bull. Aust. Mat. Soc.* **87** (2013), 152-157.
- [71] A. F. Salles et F. P. Shanbehbazari, 'Locally graded groups with a condition on infinite subsets', *Int. Jour. Group. Theory* **7** (2018), 1-7.
- [72] D. Segal, 'A residual property of finitely generated abelian by nilpotent groups', *J. Algebra* **32** (1974), 389-399.
- [73] D. Segal, 'Polycyclic groups', Cambridge University Press, Cambridge, London, New York, New Rochelle, Melbourne, Sydney, 1984.
- [74] H. Smith, 'On homomorphic images of locally graded groups', *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **91** (1994), 53-60.
- [75] L. S. Spiezia, 'Infinite locally soluble k-Engel groups', *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* **3** (1992), 177-183.
- [76] L. S. Spiezia, 'A characterization of third Engel groups', *Arch. Math.* **64** (1995), 369-373.
- [77] B. Taeri, 'A question of P. Erdos and nilpotent-by-finite groups', *Bull. Austral. Math. Soc.* **64** (2001), 245-254.
- [78] B. Taeri, 'On finite groups with some condition on subsets', *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* **(2) 32 (1)** (2009), 63-73.
- [79] N. Trablasi, 'Soluble groups with a condition on infinite subsets', *Algebra Colloq.* **9** (2002), 427-432.
- [80] N. Trablasi, 'Soluble groups with many 2-generated torsion-by-nilpotent subgroups', *Publ. Math. Debrecen*, **67/1-2** (2005), 93-102.

- [81] M. R. Vaughan-Lee et J. Wiegold, 'Countable locally nilpotent groups of finite exponent with no maximal subgroups', *Bull. Lond. Math.* **13** (1981), 45-46.
- [82] B. A. F. Werhfritz, 'Periodic-by-nilpotent Linear Groups', *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*, **124** (2010), 139-144.
- [83] E. I. Zelmanov, 'On some problems of group theory and Lie algebras', *Math. USSR-Sb* **66** (1990), 159-168.