الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية وزارة التعليم
العالي والبحث العلمي

Setif 1 University Ferhat Abbas
Faculty of Sciences
Department of Mathematics

جامعة سطيف 1 فرحات عباس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

Master's Thesis

in Mathematics

Option : Applied Mathematics

Theme :

MATHEMATICAL ANALYSIS OF A QUASISTATIC FRICTIONLESS ANTIPLANE CONTACT PROBLEM FOR PIEZOELECTRIC MATERIALS

Presented by

Miss. **Hana BENAROUR**

Supervisor: **Dr. Laldja BENZIANE**

Thesis defended on June 7, 2026, in front of the jury composed of:

Mr.	Toufik BOUREMANI	Prof.	Setif 1 University Ferhat Abbas	President
Mrs.	Laldja BENZIANE	MCB.	Setif 1 University Ferhat Abbas	Superviser
Mrs.	Sihem SMATA	MCA.	Setif 1 University Ferhat Abbas	Examinator

2025/2026

Contents

Acknowledgements i

Notation iii

Introduction 1

1 Mathematical Tools 4
1.1 Function Spaces 4
1.1.1 The Spaces $C^m(\Omega)$ and $L^p(\Omega)$ 5
1.1.2 Equivalent norms on the space $H^1(\Omega)$ 7
1.2 Bilinear Form in Hilbert Spaces 8
1.3 Diverse Additions 8
1.4 Some inequalities 9
1.5 Variational Inequalities and Equalities 10
1.5.1 Elliptic Variational Inequalities 10
1.5.2 Linear Variational Equalities 11

2 Mathematical Modeling of Antiplane Shear Deformation 12
2.1 Mathematical Model 12
2.2 A Function Space for Antiplane Problems 18

3 Variational Analysis of the Contact Problem 21
3.1 Mechanical Formulation of the Problem and Hypotheses 21
3.1.1 Mechanical Formulation 22
3.1.2 Hypotheses 22
3.1.3 Variational formulation 25
3.1.4 An Existence and Uniqueness Result 27
3.1.5 Proof of Theorem 3.3 28

ملخص:
في هذه الأطروحة، نتناول نموذجا رياضيا يصف تشوه القص خارج المستوي لأسطوانة كهر ضغطية في حالة تلامس عديم الاحتكاك مع قاعدة موصلة يفترض أن المادة ذات مرونة كهربائية وتتميز بخصائص متجانسة، ويتم نمذجة هذه العملية على أنها شبه ساكنة.
ينقسم هذا العمل إلى ثلاثة فصول؛ في الفصل الأول نعرض نتائج أولية من التحليل الدالي والمعادلات التفاضلية الجزئية، والتي تشكل الأساس الرياضي للتحليل اللاحق، بعد ذلك، يركز الفصل الثاني على النمذجة الرياضية لمشكلة تشوه القص خارج المستوي، وتجانس المرونة الكهربائية تحت فرضيات شبه ساكنة، وأخيرا يهدف الفصل الثالث إلى اشتقاق صياغة تباينية لنماذج المتمثلة في نظام يربط بين معادلتين تباينيتين لكل من مجالات الإزاحة والجهد الكهربائي. وباستخدام فضاء بناخ ونظرية لاكس-ميلغرام، نثبت وجود ووحدانية الحل الضعيف للمشكلة.
الكلمات المفتاحية: القص خارج المستوي، مادة ذات مرونة كهربائية، تلامس عديم الاحتكاك، الحل الضعيف، فضاء بناخ، لاكس-ميليغرام.

Abstract :

In this thesis ,we consider a mathematical model describing the antiplane shear deformation of a piezoelectric cylinder in frictionless contact with a conductive foundation. The material is assumed to be electro-elastic, and homogeneous properties, and the process is modeled as quasistatic.

This work is divided into three chapters. First, we present preliminary results from functional analysis and partial differential equations, which lay the mathematical foundation for the subsequent analysis. Next, the second chapter focuses on the mathematical modeling of the antiplane shear deformation problem, electro-elastic homogeneity under quasistatic assumptions. Finally, the third chapter establishes derive a variational formulation of the models which ares given by a system coupling two variational equations for the displacement and the electric potential fields . By using the Banach space,Lax-Milgram theorem, we prove the existence and uniqueness of a weak solution to the problem.
Keywords: Anti-plan shear, electro-elastic material, frictionless contact, weak solution, Banach space, Lax-Milgram.

Résumé:

Dans cette thèse, nous considérons un modèle mathématique décrivant la déformation par cisaillement anti-plan d'un cylindre piézoélectrique en contact sans frottement avec une fondation conductrice. Le matériau est supposé électro élastique et homogène, et le processus est modélisé comme quasistatique.

Ce travail est divisé en trois chapitres. D'abord, nous présentons des résultats préliminaires en analyse fonctionnelle et équations aux dérivées partielles, qui établissent les fondements mathématiques pour l'analyse ultérieure. Ensuite, le deuxième chapitre se concentre sur la modélisation mathématique du problème de déformation par cisaillement anti-plan, et l'hétérogénéité électro élastique sous des hypothèses quasi-statiques. Enfin, le troisième chapitre établit une formulation variationnelle des modèles, qui est donnée par un système couplant deux équations variationnelle pour les champs de déplacement et de potentiel électrique. En utilisant l espace de Banach et théorème de Lax-Milgram nous démontrons l'existence et l'unicité d'une solution faible au problème.
Mot-clé : Cisaillement anti-plan, matériau électro-élastique, contact sans fortement, solution faible, L'espace de Banach, Lax-Milgram.