الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Setif 1 University Ferhat Abbas
Faculty of Sciences
Department of Mathematics

جامعة سطيف 1 فرحات عباس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

Master's Thesis

In Mathematics

Option: Nonlinear Analysis and PDEs

Theme:

Le Comportement Asymptotique des solutions de L'équations de Burgers Visqueuse et Non Visqueuse

Presented by

Miss/. **Nermine DEBBACHE**

Supervisor: **Pr. Saida BENDAAS**

Thesis defended on June 23, 2026, in front of the jury composed of:

Mr.	**Salim Mesbahi**	Prof.	Setif 1 University Ferhat Abbas	President
Mr.	**Saida BENDAAS**	Prof.	Setif 1 University Ferhat Abbas	Supervisor
Mr.	**Abdelouahab KADEM**	Prof.	Setif 1 University Ferhat Abbas	Examiner

2025/2026

TABLE DES MATIÈRES

1 Rappels sur les EDP **1**

1.1 Introduction 1

1.2 Généralités 2

1.2.1 Définitions et Notations 2

1.3 Exemples d'EDP Fondamentales 2

1.3.1 Équation de Laplace 2

1.3.2 Équation de Poisson 3

1.3.3 Équation des Ondes 3

1.3.4 Équation de Burgers 3

1.3.5 Équation de Fourier (ou de la Chaleur) 4

1.4 Classification des EDP 4

1.4.1 Exemples de classification 4

1.5 Propriétés des EDP : Ordre et Linéarité 5

1.5.1 Ordre d'une EDP 5

1.5.2 EDP Linéaires et Non Linéaires 5

1.6 Conditions Initiales et aux Limites 6

1.6.1 Condition Initiale 6

1.6.2 Conditions aux Limites 6

1.7 Méthodes de résolution des EDP 7

1.7.1 Méthodes Analytiques 7

1.7.1.1 Méthode de séparation des variables 7

1.7.1.2 Méthode des caractéristiques pour les EDP du 1^{er} ordre 8

1.7.1.3 Transformation de Cole-Hopf 9

1.7.2 Méthodes Numériques 9

Conclusion du Chapitre 1 10

2 Le comportement asymptotique des solutions de l'équation de Burgers visqueuse et non visqueuse **11**

2.1 Introduction 11

2.2 Historique et fondements de l'équation de Burgers 12

2.3 l'équation de Burgers Non visqueuse 13

2.3.1 Méthode des caractéristiques 13

2.3.2 Le Problème de Riemann 15
2.3.2.1 La transformation de Cole-Hopf 21
Conclusion du Chapitre 2 23

3 Étude de l'équation de Burgers par l'Analyse Non Standard 24
3.1 Introduction 24
3.2 Analyse Non Standard 24
3.3 les outils de l'Analyse non standard 25
3.3.1 Les grands entiers (Entiers non standards) 25
3.3.2 Les infinitésimaux 26
3.3.3 La S-continuité 26
3.4 Problème aux limites de l'équation de Burgers non visqueuse . . . 27
3.4.1 Ajustement des chocs discontinus 27
3.4.2 solution à bosse unique 28
3.4.3 formation des N-WAVES 30
3.5 Problème aux limites pour l'équation de
Burgers visqueuse 33
3.5.1 La transformation de Cole-Hopf 33
3.5.2 Comportement des solutions pour ε assez petit 34
3.5.3 Le cas N-wave : Résultats principaux 35
Conclusion du Chapitre 3 38

Bibliographie 39

Résumé

Ce mémoire est dédié à l'étude de l'équation de Burgers, un modèle cinématique fondamental en mécanique des fluides, abordé sous l'angle de l'Analyse Non Standard (ANS). Dans un premier temps, nous rappelons les concepts clés et les méthodes de résolution des Équations aux Dérivées Partielles (EDP) classiques. Nous examinons ensuite le comportement asymptotique de l'équation de Burgers dans ses versions visqueuse et non visqueuse, en mettant l'accent sur le problème de Riemann, la formation des chocs, les conditions d'entropie et la transformation de Cole-Hopf. Enfin, en introduisant le formalisme de l'Analyse Non Standard , nous revisitons l'évolution asymptotique des solutions, en particulier les N-wave, et nous présentons une vérification rigoureuse du Lemme de Van Den Berg. Cette approche originale démontre la puissance de l'ANS pour simplifier et clarifier l'analyse géométrique et asymptotique des EDP non linéaires.

Mots-clés

Équation de Burgers, Analyse Non Standard (ANS), Comportement asymptotique, N-wave, Lemme de Van Den Berg, EDP non linéaires, Transformation de Cole-Hopf.

Abstract

This thesis is devoted to the study of Burgers' equation, a fundamental kinematic model in fluid dynamics, investigated through the framework of Non-Standard Analysis (NSA). First, we review the core concepts and resolution methods for classical Partial Differential Equations (PDEs). We then examine the asymptotic behavior of both viscous and inviscid Burgers' equation, focusing on the Riemann problem, shock formation, entropy conditions, and the Cole-Hopf transformation Finally, by introducing the formalism of Non-Standard Analysis, we revisit the asymptotic evolution of solutions, particularly N-waves, and provide a rigorous verification of Van Den Berg's Lemma. This innovative approach demonstrates the efficiency of NSA in simplifying and clarifying the geometric and asymptotic analysis of non-linear PDEs.

Keywords

Burgers'Equation, Non-Standard Analysis (NSA), Asymptotic Behavior, N-wave, Van Den Berg's Lemma, Non-linear PDEs, Cole-Hopf Transformation

---

ملخص

تتمحور هذه المذكرة حول دراسة معادلة بورغرز، والتي تعد نموذجاً حركياً أساسياً في ديناميكا الموائع، حيث تم تناولها من منظور التحليل غير القياسي (ANS) في البداية، قمنا بمراجعة المفاهيم الأساسية وطرق الحل للمعادلات التفاضلية الجزئية (EDP) الكلاسيكية. بعد ذلك، تطرقنا إلى السلوك التقاربي لمعادلة بورغرز في حالتيها اللزجة وغير اللزجة، مع التركيز على مسألة ريمان، تشكل الصدمات، شروط الإنتروبيا، وتحويل كول-هوبف. وأخيراً، ومن خلال إدخال صياغة التحليل غير القياسي، أعدنا دراسة التطور التقاربي للحلول، لا سيما الموجات من النوع N ، وقدمنا تحققاً دقيقاً لمبرهنة فان دن بيرغ. يظهر هذا النهج المبتكر مدى كفاءة التحليل غير القياسي في تبسيط وتوضيح التحليل الهندسي والتقاربي للمعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية.

الكلمات المفتاحية

معادلة بورغرز، التحليل غير القياسي (ANS)، السلوك التقاربي، الموجة من النوع N ،مبرهنة فان دن بيرغ، المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية، تحويل كول-هوبف.