وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة فرحات عباس –سطيف1-
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير
-قسم التعليم الأساسي-

إحصاء2

المستوى: سنة أولى ليسانس

د. وادة راضية

السنة الجامعية 2025-2026

بسم الله الرحمن الرحيم
١٤٣٨

الفهرس

العنوان	رقم الصفحة
الفهرس.....	
مقدمة	
الفصل الأول: مدخل إلى حساب الاحتمالات	
1-مفاهيم أساسية في نظرية الاحتمالات.....	02
1-1-نظرية المجموعات والعمليات عليها.....	02
2-العناصر الأساسية لمسألة الاحتمالات.....	10
2-1-التجربة.....	10
2-2-مجموعة الأساس.....	10
2-3-الحدث العشوائي.....	10
2-4-الاحتمال.....	13
3-قواعد حساب الاحتمالات.....	14
3-1-قاعدة جمع الحوادث المتنافية وغير المتنافية	14
3-2-قاعدة ضرب الحوادث المستقلة وغير المستقلة.....	17
4-الاحتمال الكلي ونظرية بايز.....	21
4-1-الاحتمال الكلي.....	21
4-2-نظرية بايز.....	22
5-مدخل إلى الطريق التركيبية واستعمالها في حساب الاحتمالات.....	25
5-1-التوفيقات.....	26
5-2-الترتيبات.....	27
5-3-التبديلات.....	28
الفصل الثاني: المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية	
1-مفاهيم عامة للمتغير العشوائي.....	32
1-1-تعريف المتغير العشوائي.....	32
1-2-أنواع المتغير العشوائي.....	33
2-التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي منفصل.....	33
2-1-مفهومه.....	33

2-2-تمثيل التوزيع الاحتمالي بيانيا.....	35
2-3-دالة التوزيع الاحتمالية F(x).....	36
2-4-حساب الاحتمالات.....	39
3-التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متصل.....	40
3-1-صيغة دالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$	40
3-2-شروط دالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$.....	40
3-3-التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل.....	41
3-4-دالة التوزيع الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل $F(X)$.....	43
3-5-التمثيل البياني لدالة التوزيع الاحتمالية $F(X)$ لمتغير عشوائي متصل.....	44
3-6-حساب الاحتمالات.....	45
4-معالم المتغير العشوائي.....	53
4-1-الأمل الرياضي.....	53
4-2-التباين والانحراف المعياري.....	54
الفصل الثالث: القوانين الاحتمالية لمتغيرعشوائي منفصل ومتصل	
1-القوانين الاحتمالية المنفصلة.....	63
1-1-قانون بارنولي.....	63
1-2-قانون ثنائي الحدين.....	66
1-3-قانون فوق الهندسي.....	71
1-4-قانون بواسون.....	75
2-التقريب بين القوانين الاحتمالية لمتغير عشوائي منفصل.....	79
2-1-التقريب بين قانون فوق الهندسي وقانون ثنائي الحدين.....	80
2-2-التقريب بين قانون ثنائي الحدين وقانون بواسون.....	81
3-القوانين الاحتمالية لمتغير عشوائي متصل.....	84
3-1-القانون الطبيعي العام.....	85
3-2-القانون الطبيعي المعياري.....	87
4-التقريب بين القوانين الاحتمالية لمتغير عشوائي منفصل والقانون الطبيعي.....	92

4-1-تقريب قانون ثنائي الحدين إلى القانون الطبيعي.....	92
4-2-تقريب قانون بواسون إلى القانون الطبيعي.....	95

مقدمة

تمهيد:

يعتبر الإحصاء02 أحد الفروع المكملة لعلم الإحصاء، يرتكز على مجموعة من المفاهيم والنظريات أهمها نظرية الاحتمالات، التي تمثل الدعائم الأساسية له كونها تهتم بدراسة الظواهر العشوائية التي لا يمكن التنبؤ بنتائجها الممكنة، بل يمكن وصفها وقياسها باستخدام أدوات رياضية دقيقة. وتعود نشأة هذه النظرية إلى ألعاب الصدفة كإلقاء قطعة النقد أو رمي زهرة نرد أو تدوير دولاب وغيرها من ألعاب المقامرة، التي يقوم بها أمراء أوربا في تلك الفترة، وبمجالسة علماء الرياضيات أمثال باسكال وفرمات ولابلاس ومشاركتهم هذه الألعاب، عكف هؤلاء العلماء على وضع أسس وقواعد وفق ما يسمى نظرية الاحتمالات.

وعليه فإن المتتبع لنشأة نظرية الاحتمالات يجدها ليست حديثة العهد، بل بدأ التفكير فيها منذ عدة قرون خاصة في مجال ألعاب الحظ، والتامين وبارتباطها بالعلوم الأخرى كعلم الإحصاء وعلم الرياضيات، فقد تزودت بمختلف الطرق والأساليب العلمية والرياضية في تصميم التجارب وتحليلها لتتطور وتصل إلى الشكل الراهن كنظرية لها أصولها وقواعدها وقوانينها، واتسع مجال استخدامها، كمجال اتخاذ القرارت الإدارية والاقتصادية وغيرها، وفي مجال التنبؤ وتحديد الاتجاهات المستقبلية للعديد من الظواهر.

لهذا عكفنا في هذه المطبوعة الموجهة لطلبة السنة أولى جذع مشترك على تقديم مجموعة من المفاهيم الأساسية في الاحتمالات، بطريقة مبسطة وسهلة الفهم موزعة على ثلاثة فصول بتسلسل منهجي، حيث تم التطرق في الفصل الأول إلى مدخل في حساب الاحتمالات، أين تم التطرق إلى المبادئ العامة في حساب الاحتمالات، والأحداث العشوائية، والاحتمال الشرطي ونظرية بايز، أما الفصل الثاني فقد خصص لدراسة المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية المرافقة لها، ليكون الفصل الثالث خاص بالتوزيعات الاحتمالية للمتغير العشوائي المنفصل والمتصل، أين يتم تناول أنواع القوانين الاحتمالية الخاصة بالمتغير العشوائي المنفصل ثم المتصل.

وفي الأخير نسأل الله أن يكون هذا العمل مفيد لطلبة السنة أولى، ولكل مهتم بصفة عامة.

مدخل إلى حساب الاحتمالات

تمهيد:

يعد علم الاحتمالات من أهم فروع علم الإحصاء، لأن معظم النظريات والأساليب الإحصائية تقوم على أسسه. ولا يقتصر دوره على الجانب النظري، بل يمتد إلى الحياة اليومية، حيث تعتمد العديد من القرارات الفردية والجماعية على تقدير احتمال وقوع أحداث معينة أو عدم وقوعها، كما تخضع الكثير من الظواهر الاقتصادية والاجتماعية لعامل الصدفة، لاختلاف نتائجها من تجربة إلى أخرى حتى في ظل توافر الشروط نفسها. ومن هذا المنطلق تأتي أهمية نظرية الاحتمالات، التي تقوم على دراسة الظواهر العشوائية ذات النتائج غير المؤكدة، سواء كانت طبيعية أو إنسانية أو اقتصادية أو اجتماعية، وتهدف إلى بناء نموذج رياضي يصف سلوكها ويفسر قوانينها. مما يساعد على استغلال الظواهر ذات الآثار الإيجابية، وتجنب أو تقليل آثار الظواهر السلبية قدر الإمكان.

1-مفاهيم أساسية في نظرية الاحتمالات Basic Notions on Probability Theory

1-1-نظرية المجموعات والعمليات عليها:

تعد نظرية المجموعات من المفاهيم الأساسية التي يقوم عليها علم الاحتمالات، إذ تستخدم في تمثيل الحوادث الناتجة عن التجارب العشوائية. لأن معظم الحوادث الناتجة عن إجراء التجارب العشوائية نعبر عليها كمجموعات من النتائج الممكنة، ويتم التعبير عن إمكانية وقوعها بدلالة الاحتمال. وبذلك تسهم نظرية المجموعات في تنظيم النتائج وتحليلها بطريقة رياضية دقيقة.

1-1-1-مفاهيم عامة حول المجموعات:

أ-**تعريف المجموعة Set**: تعرف المجموعة بأنها تجميع لعناصر أو مفردات أو مشاهدات معينة، بشرط ان تكون هذه العناصر من نفس النوع أي لها خصائص معينة تجعلها تنتمي لهذه المجموعة، كما يمكن تعريفها بأنها جمع من الأشياء المحددة والمتمايزة أو المتجانسة والمعرفة بشكل جيد، ومن أمثلة المجموعة مجموعة من الأرقام الطبيعية، مجموعة من الأسماء...الخ.

وتتميز المجموعة بعناصر رئيسية وهي:

-اسم المجموعة ويرمز له بالحروف اللاتينية الكبيرةA، B ، C، ويرمز لعناصرها بالحروف اللاتينية الصغيرة ... a, b, c ، ويقال أن العنصر a ينتمي إلى المجموعة A فنكتب $a \in A$، أما إذا كان العنصر a لا ينتمي إلى المجموعة A فنكتب $a \notin A$؛

-وجود عناصر المجموعة والفواصل التي تفصلها؛

-لا يتم تكرار العناصر داخل المجموعة كما أن ترتيب العناصر لا يهم.

ب-تعيين المجموعة: يتم تعيين المجموعة بعدة طرق نذكر منها:

-طريقة القائمة: والتي يتم فيها ذكر جميع عناصر المجموعة وكتابتها بين حاضنتين { } أو قوسين ( )، وهذه الطريقة تخص المجموعات القابلة للعد.

مثال(01): مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية الأقل من10 وتعرض كما يلي:

$$A = \{1, 3,5, 7,9\}$$

-طريقة القاعدة: وتعتمد على ذكر الخاصية او الخواص التي تميز عناصر المجموعة.

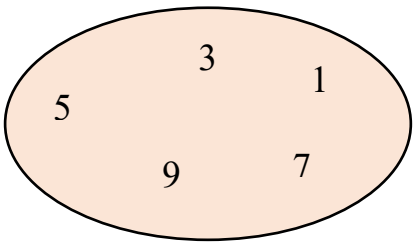
مثال(02): تعيين المجموعة A ق طريقة القاعدة، استنادا على المثال السابق.

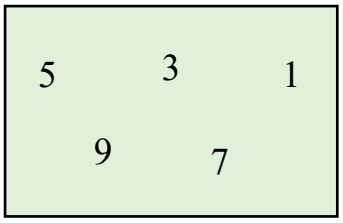
وتكتب بالشكل التالي:

$$A = \{a/a \text{عددفردي}, a \leq 10\}$$

ج-تمثيل المجموعة: تمثل المجموعة بيانيا باستخدام مخطط أولر فن أو باختصار "**مخطط فن**" باعتماد أشكال هندسية مختلفة كالدائرة أو المستطيل أو بخط مغلق.

مثال(03): لتكن$A = \{1, 3,5, 7,9\}$، يمكن تمثيل المجموعة Aكما يلي:





د-أنواع المجموعات:

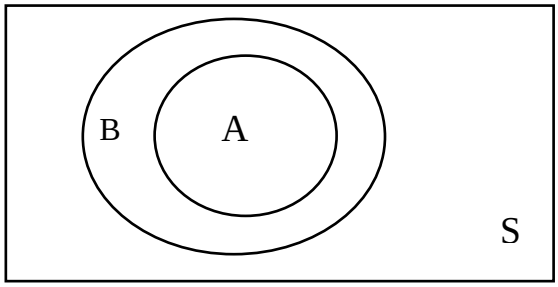
✓ **المجموعة الجزئية :Subset** نقول عن المجموعةA أنها مجموعة جزئية من المجموعةBإذا كان كل عنصر منA ينتمي إلىB في هذه الحالة، نقول أن Aمجموعة جزئية فعلية منB أوB تحوي A ونرمز لها بـ:

$$\boldsymbol{A \subset B \Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \epsilon B}$$

مثال(04): إن مجموعة الأعداد الطبيعيةN محتوة في مجموعة الأعداد الصحيحةZ ومجموعة الأعداد الصحيحة محتواة في مجموعة الأعداد الحقيقية Rوهذه الأخيرة محتواة في مجموعة الأعداد المركبة أي:

$$\boldsymbol{N \subset Z \subset R \subset C}$$

ويمكن تمثيل المجموعة الجزئية وفق "**مخطط فن**" كما يلي:



مثال (05): لتكن المجموعة Bتمثل مجموعة الأعداد الطبيعية الأقل من 10، والمجموعةA هي مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية الأقل من 10، وبالتالي فإن $B = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ و $A = \{1,3,5,7,9\}$ فنلاحظ أن$(A \subset B)$ وبذلك فإنAهي مجموعة جزئية منB.

✓ **المجموعتان المتساويتان:** تتساوى مجموعتان A و Bإذا كان لهما نفس العناصر وكانت كل من المجموعتين محتواة في الأخرى ويعبر عنها رياضيا بـ:

$$\boldsymbol{A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Longrightarrow A = B}$$

مثال(06): لتكن المجموعتانA وB:

$$A = \{x \in N, 4 \leq x \leq 12\}$$
$$B = \{4,5,6,7,8,9,10,11,12\} \Rightarrow A = B$$

إن المجموعتينA و Bمتساويتان لأن عدد عناصر المجموعةA هو نفسه عناصر المجموعةB.

✓ **المجموعة الكلية:** نسمي المجموعةU بالمجموعة الكلية أو الفضاء، إذا كانت تحتوي على كل المجموعات الجزئية.

مثال(07): إذا كانت المجموعةU هي مجموعة دول العالم، و A_iهي مجموعة الدولةi، فكل مجموعةA_i في هذه الحالة محتواة في المجموعةU وبالتالي تسمى Uبالمجموعة الكلية أو الفضاء.

✓ **المجموعة الخالية Empty Set**: إذا كان عدد عناصر المجموعة صفرا، أي لا تحتوي على أي عنصر تسمى بالمجموعة الخالية ويرمز لها بالرمز $A = \{\ \}$ أو $\emptyset$.

مثال(08): مضاعفات العدد 5 بين الصفر والواحد هي مجموعة خالية وتساوي$\emptyset$.

✓ **المجموعة المنتهية:**

تكون المجموعة منتهية إذا كانت خالية أو تحتوي على عدد محدود من العناصر، أي يمكن عد عناصرها، بمعنى تحتوي علىn عنصر، حيث nعدد طبيعي وهذا العدد يn يسمى أصلي المجموعة $(cardinal\ A)$ ونكتب $Card\ A = n$

مثال(09): إذا كانت المجموعةA تمثل مجموعة أشهر السنة فإن هذه المجموعة منتهية لأنها تحتوي على 12 عنصر، $n = 12$

✓ **المجموعة غير المنتهية:** نقول عن المجموعة A بأنها مجموعة غير منتهية إذا تضمنت عدد غير منتهي من العناصر المختلفة عن بعضها البعض مثنى مثنى.

مثال (10): إذا كانت المجموعةA تمثل العناصر التالية:

$$A = \{x \in R/0 < x < 10\}$$

إن هذه المجموعة غير منتهية لأنها تحتوي على عدد غير محدود من العناصر أي يوجد عدد لا نهائي من القيم الحقيقية المحصور في المجال 0و10.

✓ **المجموعة القابلة للعد:** تكون المجموعة قابلة للعد إذا كان بالإمكان عد عدد عناصرها، كتحديد عناصر مجموعة الاعداد الطبيعية مثل $\{x \in N/1 < x < 9\}$، وتكون غير قابلة للعد إذا كانت عدد عناصرها غير معروفة كتحديد عناصر مجموعة الاعداد الحقيقية.

مثل$\{x \in R/1 \leq x \leq 9\}$.

✓ **المجموعتان المنفصلتان Disjoint Serts**: تكون المجموعتان A وB منفصلتان إذا كان لا توجد عناصر مشتركة بينهما أي تقاطعهما يساوي مجموعة خالية أي:

$A \cap B = \emptyset$.

مثال(11): لتكن المجموعتان A وB:

$$\mathrm{A} = \{4,9,11\}$$
$$B = \{1,3\}$$

إذا نلاحظ أن: $A \cap B = \emptyset$، وبالتالي نقول أن A وB مجموعتان منفصلتان.

✓ **المجموعة المكملة Complement Sets:** إذا كانت المجموعةA مجموعة جزئية منB فإن متممةA بالنسبة لـ Bهي مجموعة العناصر التي تنتمي إلىB ولا تنتمي إلى A . ويرمز لمتممةA بـ $\bar{A}$

$$C_B A = \{x: x \in B \wedge X \notin A\} = \bar{A}$$

إذا كانت المجموعة $A \subseteq B$ فإن $A - B$ يسمى مكملة المجموعة B بالنسبة للمجموعة A ويرمز لها بالرمز (A^C):

$$A^C = \{x \in B, x \notin A\}$$

وإذا كانت Ω تمثل مجموعة شاملة فإن:

$$A^C = \{x \in \Omega, x \notin A\}$$

لكل مجموعة A مجموعة مكملة $\bar{A}$ تمثل بقية العناصر في مجموعة الأساس Ω والتي لا تنتمي إلى A.

ومن خصائص المجموعة المكملة نذكر منها:

1) $A \cup \bar{A} = \Omega$
2) $\Omega - A = \bar{A}$
3) $\bar{\emptyset} = \Omega$
4) $A - B = A \cap \bar{B}$

1) $A \cap \bar{A} = \emptyset$
2) $\bar{\Omega} = \emptyset$
3) $\bar{\bar{A}} = A$

1) $A \subseteq B \Longrightarrow \bar{B} \subseteq \bar{A}$
2) $A \cup \bar{A} = \Omega$
3) $A \cap \bar{A} = \emptyset$

ب-عمليات على المجموعات Operations on sets:

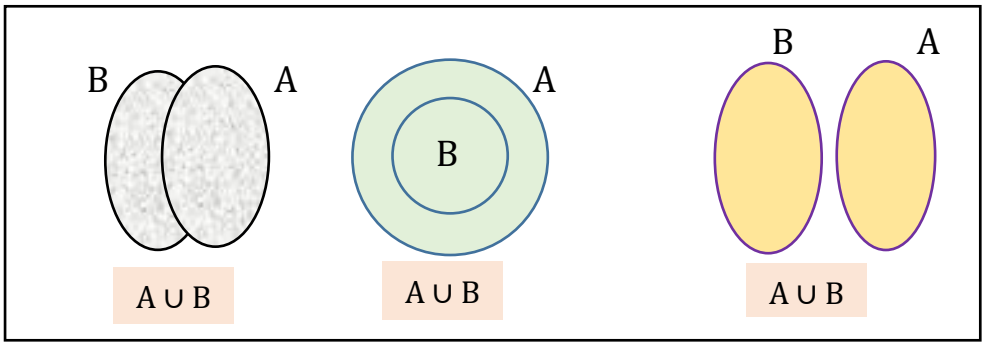
هناك مجموعة عمليات يمكن إجراءها على المجموعات للحصول على مجموعات جديدة يمكن تلخيصها كما يلي:

- **اتحاد مجموعتين Union of Sets:**

إذا كانت A و B مجموعتين فإن اتحادهما هو جميع العناصر التي تنتمي إلى كل منهما أو كليهما، ويرمز له بالرمز $(A \cup B)$ أي أن:

$$A \cup B = \{x: x \in A \ or \ x \in B\}$$

ولتوضيح ذلك يمكن الاستعانة بالرسم التالي:



مثال(11):

$$A = \{1,2,3\}$$
$$B = \{2,5,6,7,8,9,10\} \Rightarrow A \cup B = \{1,2,3,5,6,7,8,9,10\}$$

ومن خصائص الاتحاد نجد ما يلي:

- $A \subseteq A \cup B$
- $B \subseteq A \cup B$
- $A \cup \emptyset = A$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $A \cup A = A$
- $A \cup \Omega = \Omega$

➢ **تقاطع مجموعتين Intersection**

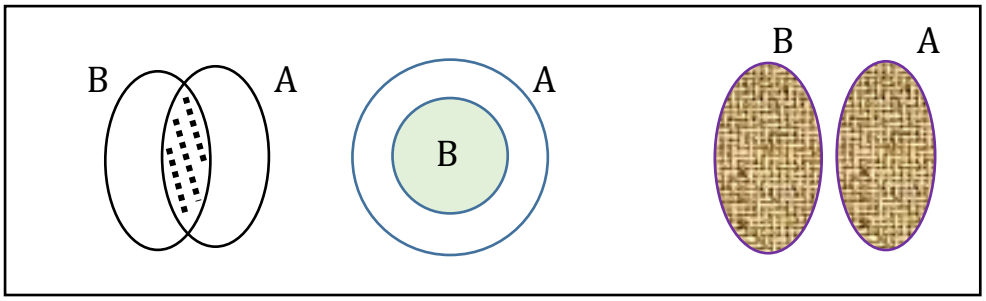
إذا كانت A و B مجموعتين فإن تقاطعهما هو جميع العناصر المشتركة بينهما، ويرمز له بالرمز $(A \cap B)$ أي أن:

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{x : x \in A \; and \; x \in B\}$$

وبالعودة إلى المثال السابق رقم (11) نجد:

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{2\}$$

ويمكن تمثيل التقاطع بالأشكال التالي:



ومن خصائص التقاطع نجد:

- $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \subseteq \mathrm{B}$
- $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$
- $\mathrm{A} \cap \emptyset = \emptyset$
- $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{B} \cap \mathrm{A}$
- إذا كان ثلاث مجموعات فإن: $(A \cap B) \cap C = (A \cap C) \cap (B \cap C)$
- $\mathrm{A} \cap \mathrm{A} = \mathrm{A}$
- $\mathrm{A} \cap \Omega = \mathrm{A}$

➢ الفرق بين المجموعات Sets Difference:

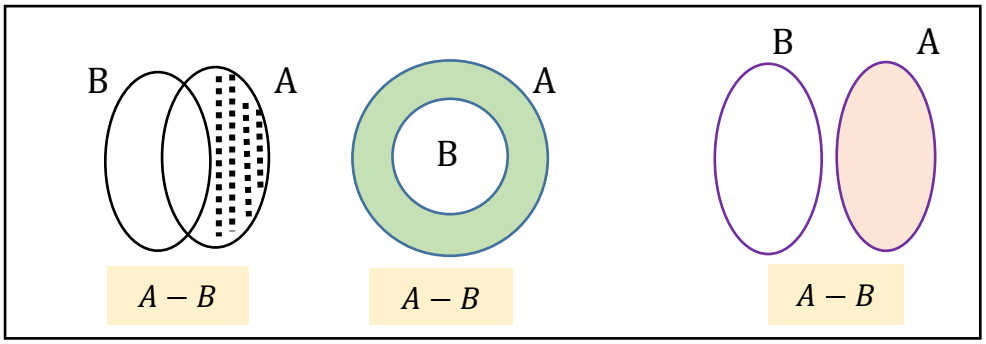
إذا كانت Aو B مجموعتين فإن الفرق بينهما هو المجموعة التي تتكون من جميع عناصر المجموعة A والتي لا تنتمي إلى المجموعةB، يرمز لها بالرمز $(A - B)$أي أن:

$$A - B = \{x: x \in A \wedge x \notin B\}$$

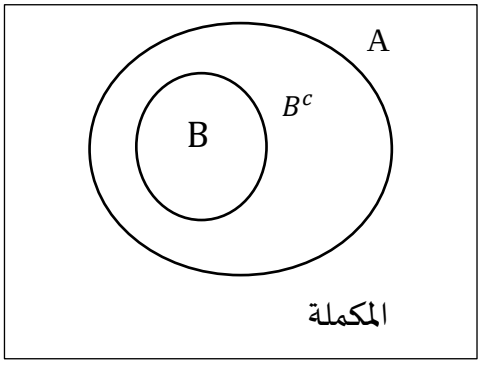
وبالعودة إلى المثال السابق نجد:

$$A - B = \{1,3\}$$

ويمكن تمثيل الفرق والمكملة بالأشكال التالية:



الشكل الملون والمضلل يمثل الفرق $A - B$



وفيما يأتي بعض خواص المجموعات:

❖ إذا كانت Ω مجموعة شاملة و A و B مجموعتين جزئيتين منها فإن:

- $A - B = A \cap B^c$
- $A - \emptyset = A, A - A = \emptyset$
- $A^c - B^c = B - A$
- $A - B = \emptyset \Leftrightarrow B \subseteq A$

❖ إذا كانت Ω مجموعة شاملة وA وB و C مجموعات جزئية منها فإن:

- $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

- $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

ج-قانون دي مورجان De Morgan's Law

لتكن S مجموعة، إذا كانت $C \subset S$ وكانت C^c مكملة C في S

$C^c = S - C$ فإنه لأي $A, B \subset S$ يكون:

- $(A \cap B)^c = A^C \cup B^C$
- $(A \cup B)^c = A^C \cap B^C$

د-الفرق التناظري Symmetric Difference

إذا كانت A و B مجموعتين، نسمي $(A + B)$ أو $(A \Delta B)$ بالفرق التناظري للمجموعتين وهو جميع عناصر B التي لا تنتمي A وجميع عناصر A التي لا تنتمي إلى B أي أن:

$$A + B = (A - B) \cup (B - A)$$

وبذلك نستطيع أن نعرف الفرق التناظري كما يلي:

$$A + B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$$
$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

وأن $A + B = B + A$

هـ-الجداء الديكارتي Cartesian Product

يسمى حاصل الجداء الديكارتي أو الجداء لمجموعتين A و B بأنه مجموعة كل الأزواج المرتبة التي مركبتها الأولى من A ومركبتها الثانية من B ويرمز لها بالرمز $A \times B$ أي أن:

$$A \times B = \{(a, b): a \in A \ \wedge b \in B\}$$

حيث أن (a, b) يمثل زوج مرتب.

مثال (12): لتكن المجموعتين A و B المعرفتين كما يلي:

$$A = \{x , y , z\}$$
$$B = \{2 , 3\}$$

الجداء الديكارتي $(A \times B)$ هو:

$$(A \times B) = \{(x , 2), (x , 3), (y , 2), (y , 3), (z , 2), (z , 3)\}$$

الجداء الديكارتي $(B \times A)$ هو:

$$(B \times A) = \{(2 , x), (2 , y), (2 , z), (3 , x), (3 , y), (3 , z)\}$$

2-العناصر الأساسية في مسألة الاحتمالات:

2-1-التجربة: هي كل عملية تؤدي إلى ملاحظة أو قياس، وترتبط نتائجها بجملة من الشروط التي أجريت ضمنها، فإما أن تكون خارج نطاق التحكم وإما ان تكون يمكن التحكم فيها، وبناءا على هذه الشروط تنقسم إلى قسمين:

أ. التجربة النظامية	ب. التجربة العشوائية
هي كل تجربة تحدد نتائجها مسبقا على أساس القوانين العلمية المعروفة، وذلك انطلاقا من جملة من شروط مرتبطة بالظاهرة ومتوفرة أثناء التجربة، حيث نجد هذا النوع من التجارب في مجال العلوم الدقيقة خاصة في مجال الفيزياء والكيمياء.	هي كل تجربة تكون نتائجها غير معروفة مسبقا وإذا كررنا نفس التجربة وبنفس الشروط لا نحصل على نفس النتائج بالضرورة.

2-2-مجموعة الأساس: هي مجموعة النتائج الممكنة في تجربة ما نرمز لها بالحرف Eكما أنها تكتب على شكل مجموعة رياضية$E = \{\dots\}$ ولعدد عناصرها بالرمز$|E|$.

مثال(13): نرمي زهرة نرد مرة واحدة بطريقة عشوائية:

$$E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}\ ;\ |E| = 6$$

مثال(14): نرمي قطعة نقد مرة واحدة وبطريقة عشوائية:

$$E = \{P, F\}\ ;\ |E| = 2$$

مثال(15): نرمي قطعتي نقد مرة واحدة وبطريقة عشوائية:

$$E = \{(P,F), (F,P), (P,P), (F,F)\}\ ;\ |E| = 4$$

ملاحظة: تتحدد مجموعة الأساس من خلال أداة التجربة (زهرة نرد، قطعة نقد، صندوق الكريات...) وطريقة التجربة العشوائية (رمي مرة واحدة، رمي مرتين، سحب دفعة واحدة، سحب مع الارجاع، سحب بدون ارجاع....).

2-3-الحدث العشوائي: هو جزء من مجموعة الأساس ويتمثل في النتيجة الأكثر اهتماما من طرف الباحث يظهر من خلال صيغة السؤال المطروح، ونرمز له بأي حرف لاتيني يختلف عنE مثل: $A\ ,\ B, C$ويعبر عنه في شكل مجموعة رياضية $A = \{\dots\}$، $B = \{\dots\}$ ، ونرمز لعدد عناصر A بالرمز$|A|$.

مثال(16): نرمي زهرة نرد مرة واحدة ما هو احتمال الحصول على عدد فردي:

A : الحدث العشوائي المتمثل في الحصول على عدد فردي

$$A = \{1,3,5\} \Rightarrow |A| = 3$$

مثال(17): نرمي زهرة نرد مرة واحدة ما هو احتمال الحصول على عدد زوجي:

B : الحدث العشوائي المتمثل في الحصول على عدد زوجي

$$B = \{2,4,6\} \Rightarrow |B| = 3$$

مثال(18): نرمي زهرة نرد مرة واحدة ما هو احتمال الحصول على عدد أكبر من 6:

D : الحدث العشوائي المتمثل في الحصول على عدد أكبر من6.

$$D = \{\} \Rightarrow |D| = \emptyset$$

مثال(19): نرمي قطعة نقد مرة واحدة، ما هو احتمال الحصول على صورة او كتابة

ليكن الحدثG: الحصول على صورة أو كتابة

$$G = \{P, F\} \quad |G| = 2$$

ومنه يمكن تمييز أنواع الحوادث التالية:

2-3-1-أنواع الحدث العشوائي:

أ-الحدث البسيط: نقول عن حدث أنه بسيط إذا كان يحتوي على عنصر واحد من عناصر مجموعة الأساس وغير قابل للتجزئة.

مثال (20): تجربة رمي زهرة نرد مرة واحدة، ليكن الحدث العشوائي Aظهور رقم 2.

$$A = \{2\} \Longrightarrow |A| = 1$$

ب-الحدث المركب: نقول عن حدث أنه مركب إذا كان قابل للتجزئة أي إمكانية تفكيكه إلى حوادث أبسط مثل ظهور رقم زوجي في رمي زهرة نرد مرة واحدة في هذه الحالة لدينا حدث مركب من 3 حوادث بسيطة

$A = \{2,4,6\}$.

ج-الحدث الأكيد: نقول عن حدث أنه أكيد إذا كان يحتوي على جميع الأحداث البسيطة بالتجربة.

مثال(21): تجربة رمي زهرة نرد مرة واحدة، ليكن Aحدث عشوائي يتمثل في الحصول على رقم أقل من 7إذن الحدث A هو حدث أكيد $A = \{1,2,3,4,5,6\} \Longrightarrow |A| = E$.

د-الحدث المستحيل: نقول عن حدث أنه مستحيل إذا كان غير قابل للتحقق أي لا يتضمن ولا حدث بسيط

مثال(22): حصول على رقم أكبر من 6 في تجربة رمي زهرة نرد مرة واحدة:

$$A = \emptyset \Longrightarrow |A| = 0 \text{ ،}$$

هـ-الحدث المتمم: نقول أنه لكل حدث A مرتبط بتجربة ما حدث متمم يتكون من مجموعة الامكانات غير المحققة لـ A ونرمز له بالرمز $\overline{A}$ حيث $\overline{A} = \{e_i \in E \ ; \ e_i \notin A\}$

$$A = \{2,4,6\} \ ; \ \bar{A} = \{1,3,5\}$$

وبالتالي نستنتج العلاقات التالية:

$$\overline{A} \cup A = E; \ \overline{A} \cap A = \emptyset; \emptyset = E; \ \overline{\overline{A}} = A; \ \overline{E} = \emptyset$$

قانوني دومرقان

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \text{ و } \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

و-الحوادث المتنافية: هي الحوادث التي لا يمكن وقوعها في آن واحد، حيث أن وقوع أحدها يمنع وقوع الآخر

مثال(23): عندما نرمي زهرة نرد مرة واحدة وبطريقة عشوائية نعرف الأحداث العشوائية التالية:

A : النتيجة العدد زوجي، B: النتيجة العدد فردي.

نقول عن الحدثين Aو B أنهما متنافيان لأن ظهور رقم زوجي يمنع تحقق الحدث الآخر (ظهور الرقم الفردي).

ز-الحوادث غير المتنافية: هي الحوادث التي يمكن وقوعها في آن واحد حيث أن وقوع أخذت ما لا يمنع وقوع الآخر.

مثال(24): عند رمي زهرة نرد بطريقة العشوائية التالية:

A: النتيجة عدد فردي

B: النتيجة عدد أولي

نقول عن الحدثين A و B أنهما غير متنافيتان لأن ظهور رقم فردي لا يمنع تحقق حدث آخر (ظهور العدد الأولي)

ف-الحوادث المستقلة: نقول عن الحدثين Aو B مستقلان إذا كان تحقق أحدهما غير مرتبط بأي شكل من الأشكال (غير مشروط بتحقق الآخر مثلا: سحب من مجتمع محدود مع الارجاع وبالتالي فالسحبة الموالية لا تتأثر بالسابقة.

ق-الحوادث غير المستقلة: نقول عن Aو B غير مستقلان إذا كان تحقق أحدهما (مثلا B) مرتبط بأي شكل من الأشكال (مشروط) بتحقق الآخر.

2-4-الاحتمال: يمثل نسبة الحظوظ كي يتحقق الحدث العشوائي، وهو حاصل قسمة عدد عناصر الحدث العشوائي (عدد الحالات الملائمة أو عدد النجاحات) على عدد عناصر مجموعة الأساس (عدد الحالات الممكنة)، ونرمز له بالرمز $P(A)$ويحسب كالتالي:

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{|A|}{|E|}} = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}} = \frac{\text{عدد عناصر الحدث العشوائي}}{\text{عدد عناصر مجموعة الأساس}}$$

مثال(25): نفس المثال السابق، ما هو احتمال الحصول على عدد موجب

A: الحصول على عدد زوجي.

$$A = \{2,4,6\}.\ |A| = 3\ ،\ E = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|E|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$$

وتتراوح قيمة الاحتمال ما بين 0 و1:

أي $\boldsymbol{0 \leq P(A) \leq 1}$

-إذا كان$P(A) = 0$ نقول أن الحدث مستحيل.

- إذا كان $P(A) = 1$نقول أن الحدث أكيد.

-إذا كان$0 < P(A) < 1$ نقول أن الحدث ممكن.

2-4-1-الاحتمال النظري والاحتمال التجريبي والعلاقة بينهما:

أ-الاحتمال النظري: أو الكلاسيكي هو احتمال مبني على فرضية نظرية، مفادها تكرار التجربة العشوائية ما لا نهاية مرة، وهذا الاحتمال ثابتا، ويعتمد في حسابه على أسس وقواعد رياضية لتحديد عدد النتائج الممكنة للتجربة وعدد النواتج الملائمة لوقوع الحدث، ويحسب بالعلاقة التالية:

$$P(A) = \frac{|A|}{|E|}$$

ب-الاحتمال التجريبي: هو الاحتمال القائم على إجراء تجربة فعلية، وهو ما يقتضي إحضار الأداة وتحديد عدد التجارب n، ثم إجراء التجربة عمليا وتسجيل النتائج(x) المتمثلة في عدد المرات التي تحصلنا فيها على الحدث العشوائي الذي يهمنا، حيث (x) يتغير من تجربة إلى أخرى، بعدها يتم حساب الاحتمال التجريبي f_n والذي يمثل التكرار النسبي للحدث A.

حيث:

$$f_n = \frac{x}{n}$$

يقتضي الاحتمال التجريبي ما يلي:

-احضار الأداة (مثلا قطعة نقد)

-تحديد عدد التجارب فعليا وليكن n

ج-العلاقة بين الاحتمال النظري والاحتمال التجريبي:

بما أن الاحتمال النظري هو احتمال ثابت قائم على فرضية نظرية، أما الاحتمال التجريبي فهو احتمال متغير قائم على تجربة فعلية، فقد لاحظ علماء الاحصاء من خلال تجارب عملية فإن العلاقة بين الاحتمال النظري والاحتمال التجريبي في انه كلما كان عدد التجارب n كبيرا اقترب الاحتمال التجريبي f_n من الاحتمال النظري $P(A)$.

ويمكن التعبير عنها رياضيا كما يلي:

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \frac{x}{n} \longrightarrow P(A)$$

وقد بينت على هذه النتيجة نظرية علمية كاملة وهي نظرية العينات والمعاينة، إلا أنه أصبح بالإمكان إجراء دراسة احصائية على عينة بدلا من الدراسة الشاملة ونحن متأكدون أن نتائج العينة أقرب ما يمكن من نتائج الدراسة الشاملة شرط أن يكون حكم العينة كبيرة (أكبر ما يمكن).

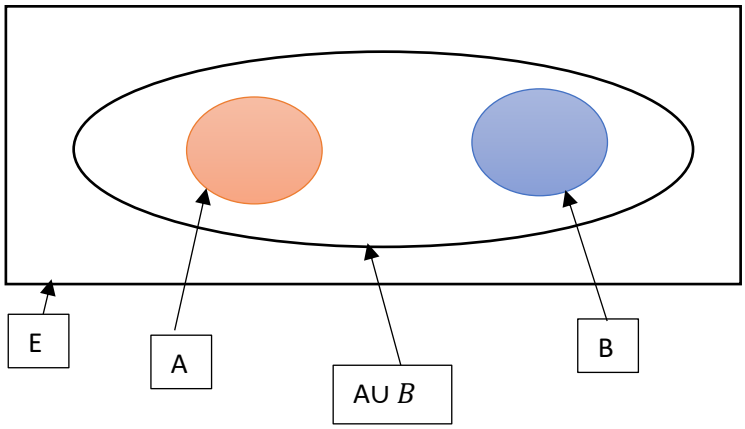
3-قواعد حساب الاحتمالات:

3-1-قاعدة الجمع:

3-1-1-قاعدة جمع الاحتمالات للأحداث المتنافية: نقول عن A و B حدثان عشوائيات متنافيان بالتبادل، إذا كان تحقق الحدث A ينفي تحقق الحدث B أي أنه لا يمكن وقوعهما في آن واحد في هذه الحالة نرمز لذلك بالرمز $P(A \cup B)$ أو $P(A$ أو $B) = P(A \cup B)$ ويحسب هذا الاحتمال كما يلي:

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

وعندما يكون A و B متنافيان فإن $(A \cap B) = \emptyset$ ونعبر عن ذلك بالمخطط الموالي:



مثال(26): نرمي زهرة نرد مرة واحدة نعرف الحدثان العشوائيان A و B كما يلي:

A: الحصول على نتيجة عدد فردي،

B : الحصول على نتيجة عدد زوجي.

-ما هو احتمال أن تكون النتيجة عددا زوجيا أو فرديا.

الحل:

$$E = \{1,2,3,4,5,6\} \quad \rightarrow |E| = 6$$

$$A = \{1,3,5\} \quad |A| = 3$$

$$\text{ومنه } P(A) = \frac{|A|}{|E|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$B = \{2,4,6\} \quad |B| = 3$$

$$\text{ومنه } P(B) = \frac{|B|}{|E|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

A و B حدثان عشوائيان متنافيان أي $(A \cap B) = \emptyset$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

ملاحظة:

-**حالة خاصة للتنافي (المتمم أو المكمل):** إذا كان A و $\bar{A}$ حدثان متنافيان أي $A \cap \bar{A} = \emptyset$ ومتكاملان بالنسبة لـ E أي $A \cup \bar{A} = E$ في هذه الحالة فإن:

$$A \cup \bar{A} = E \Leftrightarrow P(A \cup \bar{A}) = P(E) \Leftrightarrow P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

-**كما يمكن استخدام هذه القاعدة في حساب $P(A)$ أو $P(\bar{A})$ كل واحد بدلالة الآخر:**

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \text{ أو } P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

-يمكن تعميم هذه الخاصية على n حدث عشوائي:

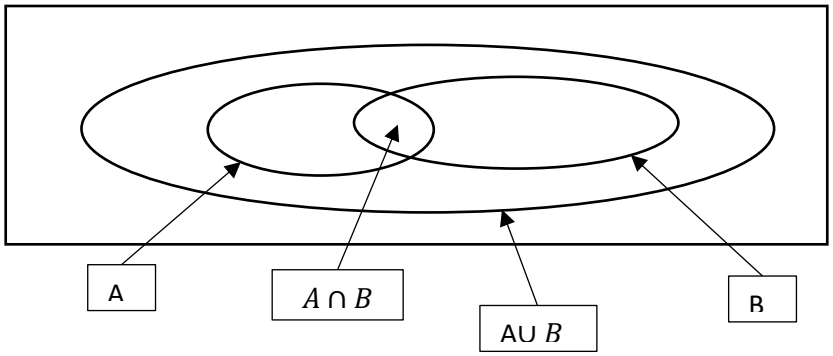
ليكن A_n . ... $A_1, A_2,$ حوادث عشوائية متنافية مثنى مثنى ومتكاملة جميعها بالنسبة لـ E ، فإنه في هذه الحالة:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_N) = 1$$

قاعدة جمع الأحداث غير متنافية: نقول أن الحدثان A و B غير متنافيان إذا كان تحقق A لا يمنع تحقق B في نفس الوقت والعكس صحيح ويكون حينئذ $(A \cap B) \neq \emptyset$ وفي هذه الحالة يحسب $P(A \cup B)$ كما يلي:

$$\boldsymbol{P(A \text{ أو } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

ونعبر عنها بالشكل الموالي:



مثال(27): نرمي زهرة نرد مرة واحدة نعرف الحدثان العشوائيان A و B كما يلي:

A: الحصول على نتيجة عدد أولي،

B : الحصول على نتيجة عدد فردي.

-ما هو احتمال الحصول على نتيجة أولية أو فردية؟

الحل:

$$E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \; ; \; |E| = 6$$

$$A = \{1,2,3,5\} \; ; \; |A| = 4 \quad , \quad P(A) = \frac{|A|}{|E|} = \frac{4}{6}$$

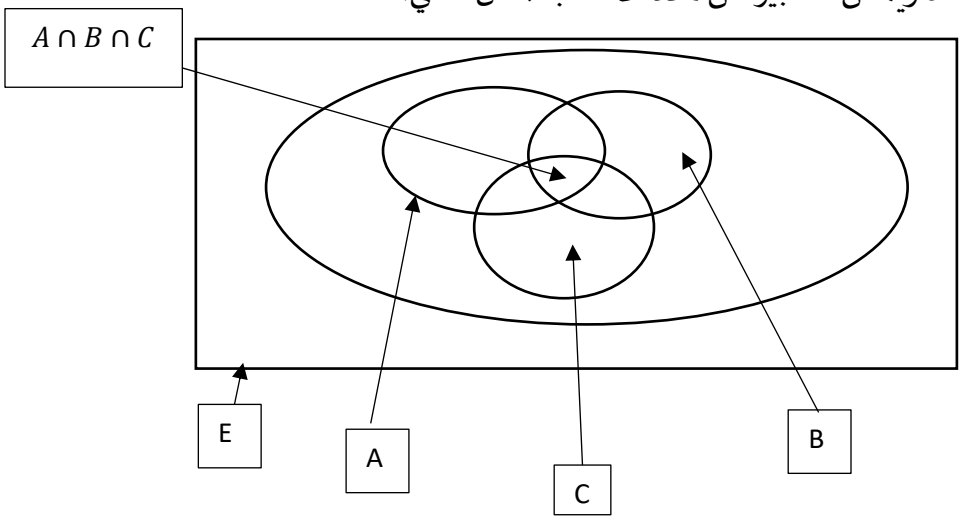
$$B = \{1,3,5\} \; ; \; |B| = 3 \; , \; P(B) = \frac{|B|}{|E|} = \frac{3}{6}$$

A و B حدثان عشوائيان غير متنافيان معناه :

$$A \cap B = \{1,3,5\} \ , \ P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|E|} = \frac{3}{6}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} - \frac{3}{6} = \frac{4}{6}$$

- **حالات خاصة من جمع احتمالات الأحداث المتنافية وغير المتنافية:** في حالة 3 أحداث غير متنافية A، B ، C ويمكن التعبير عن هذه الحالة بالشكل التالي:



ويحسب احتمال $P\left(A \text{أو} B \text{أو} C\right) = P(A \cup B \cup C)$ كما يلي:

$$\boldsymbol{P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)}$$

3-2-قاعدة الضرب:

3-2-1-قاعدة ضرب الحوادث المستقلة: نقول أن A و B مستقلان، إذا كان تحقق أحدهما مستقل تماما أو غير مرتبط بأي شكل من الأشكال بتحقق الآخر ، أي أن وقوع A لا يؤثر في وقوع B ، ووقوع الحدث B لا يؤثر في وقوع الحدث A ، وعليه يحسب احتمال وقوع A و B بالعلاقة التالية:

$$P(A \text{و} B) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

مثال(28): لدينا صندوق يحتوي على 10 كريات، 6 بيضاء و4 سوداء مرقمة نسحب كرتين على التوالي عشوائيا مع الارجاع.

-ما هو احتمال أن تكون الكرة الأولى بيضاء والثانية سوداء؟

-ما هو احتمال أن تكون الكرة الأولى سوداء والثانية بيضاء؟

-ما هو احتمال أن تكون واحدة بيضاء وأخرى سوداء؟

-ما احتمال أن تكون الكرتان من نفس اللون؟

الحل:

بما أن السحب مع الارجاع فإن الحوادث مستقلة وغير مرتبطة فيما بينها:

B: الكرة البيضاء.

N : الكرة سوداء.

1-احتمال أن تكون الكرة الأولى بيضاء والثانية سوداء:

$$P\left(B_1 و N_2\right) = P(B_1 \cap N_2) = P(B_1) \times P(N_2) = \frac{6}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{24}{100} = \frac{6}{25}$$

من بين 100 ثنائية ممكنة هناك 24 ثنائية تكون فيها الكرة الأولى بيضاء والثانية سوداء.

2-احتمال أن تكون الكرة الأولى سوداء والثانية بيضاء:

$$P\left(N_1 و B_2\right) = P(N_1 \cap B_2) = P(N_1) \times P(B_2) = \frac{4}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{24}{100} = \frac{6}{25}$$

من بين 100 ثنائية ممكنة هناك 24 ثنائية تكون فيها الكرة الأولى سوداء والثانية بيضاء.

3-احتمال أن تكون واحدة بيضاء وأخرى سوداء:

$$P(B \cap N) = P\left[\left(B_1 و N_2\right) \text{ أو } \left(N_1 و B_2\right)\right] = P\left[\left(B_1 و N_2\right) \cup \left(N_1 و B_2\right)\right]$$

$$= P(B_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap B_2) = \left(\frac{6}{10} \times \frac{4}{10}\right) + \left(\frac{4}{10} \times \frac{6}{10}\right) = \frac{48}{100}$$

من بين 100 ثنائية ممكنة هناك 48 ثنائية تكون فيها واحدة سوداء وأخرى بيضاء

4-احتمال أن تكون الكرتان من نفس اللون:

$$P[(B_1 \cap B_2) \cup (N_1 \cap N_2)] = P(B_1 \cap B_2) + P(N_1 \cap N_2)$$

$$= \left(\frac{6}{10} \times \frac{6}{10}\right) + \left(\frac{4}{10} \times \frac{4}{10}\right) = \frac{36}{100} + \frac{16}{100} = \frac{52}{100}$$

من بين 100 ثنائية ممكنة هناك 52 ثنائية تكون فيها الكرتين من نفس اللون.

3-2-2-قاعدة ضرب الحوادث غير المستقلة: نقول أن Aو Bحدثان غير مستقلان، إذا كان تحقق أحدهما مرتبط يتحقق الآخر بأي شكل من الأشكال ونقول أن تحقق الحدث Aمشروط بتحقق الحدث B أو العكس وعليه:

$$P\left(A و B\right) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$$

يقرأ احتمال وقوع الحدثين Aو Bفي نفس الوقت يساوي احتمال وقوع الحدث A مضروبا في وقوع الحدث B، علما أن A قد تحقق فعلا قبله.

الرمز $P(B/A)$يعني احتمال تحقق B شرط تحقق A قبله، علما أن A تحقق ما احتمال تحقق B؟ ويسمى هذا الاحتمال بالاحتمال الشرطي.

مثال(29): لدينا صندوق يحتوي على 10 كريات: 6 بيضاء و4 سوداء مرقمة نسحب كرتين على التوالي بطريقة عشوائية بدون ارجاع.

المطلوب:

-ما هو احتمال أن تكون الكرة الأولى بيضاء والثانية سوداء؟

-ما هو احتمال أن تكون الكرة الأولى سوداء والثانية بيضاء؟

-ما هو احتمال أن تكون واحدة بيضاء وأخرى سوداء؟

-ما احتمال أن تكون الكرتان من نفس اللون؟

الحل:

بما أن السحب بدون الارجاع فإن الحوادث غير مستقلة:

B: الكرة البيضاء.

N : الكرة سوداء.

1-احتمال أن تكون الكرة الأولى بيضاء والثانية سوداء:

$$P\left(B_1 و N_2\right) = P(B_1 \cap N_2) = P(B_1) \times P(N_2/B_1) = \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{24}{90}$$

من بين 90 ثنائية ممكنة هناك 24 ثنائية تكون فيها الكرة الأولى بيضاء والثانية سوداء.

2-احتمال أن تكون الكرة الأولى سوداء والثانية بيضاء:

$$P\left(N_1 و B_2\right) = P(N_1 \cap B_2) = P(N_1) \times P(B_2/N_1) = \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{24}{90}$$

من بين 90 ثنائية ممكنة هناك 24 ثنائية تكون فيها الكرة الأولى سوداء والثانية بيضاء.

3-احتمال أن تكون واحدة بيضاء وأخرى سوداء:

$$P(B \cap N) = P\left[\left(B_1 و N_2\right) \text{ أو } \left(N_1 و B_2\right)\right] = P\left[\left(B_1 و N_2\right) \cup \left(N_1 و B_2\right)\right]$$
$$= P(B_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap B_2) = \left(\frac{6}{10} \times \frac{4}{9}\right) + \left(\frac{4}{10} \times \frac{6}{9}\right) = \frac{48}{90}$$

من بين 90 ثنائية ممكنة هناك 48 ثنائية تكون فيها واحدة سوداء وأخرى بيضاء

4-احتمال أن تكون الكرتان من نفس اللون:

$$P[(B_1 \cap B_2) \cup (N_1 \cap N_2)] = P(B_1 \cap B_2) + P(N_1 \cap N_2)$$
$$= \left(\frac{6}{10} \times \frac{5}{9}\right) + \left(\frac{4}{10} \times \frac{3}{9}\right) = \frac{30}{90} + \frac{12}{90} = \frac{42}{90}$$

من بين 90 ثنائية ممكنة هناك 42 ثنائية تكون فيها الكرتين من نفس اللون.

3-2-3-الاحتمال الشرطي:

لدينا مجموعة الأساس Eمعرفة على تجربة عشوائية ليكن Aحدث عشوائيا ينتمي لـ Eبحيث:

$P(A) > 0$أي حدث ممكن وليكن Bحدثا ثانيا ينتمي لـ Eومرتبط بـ Aأي غير مستقل، بمعنى أن الحدث B مشروط بوقوع الحدثA، والذي نرمز له بالرمز$P(B/A)$ والذي يستنتج من القاعدة السابقة:

$$P(A \cap B) = P(A).P(^{B}/_{A})$$

ويحسب الاحتمال الشرطي لـ Bكما يلي:

$$P(^{B}/_{A}) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

مثال(30): نرمي زهرتين نرد متماثلتين مرة واحدة وعشوائيا، تعرف على هذه التجربة الحدثين:

A: مجموع النتيجتين 6،

B: احدى النتيجتين على الأقل 2.

-أحسب احتمال $P(A)$ A

- أحسب احتمال B،

- أحسب احتمال$P(A \cap B)$.

-علما أن المجموع يساوي 6 ما هو احتمال أن تكون احدى النتيجتين على الأقل 2.

-علما أن احدى النتيجتين على الأقل 2 ما هو احتمال أن يكون المجموع 6.

الحل

$$E = 6 \times 6 = 36$$

حساب$P(A)$:

$$A = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\} \quad |A| = 5$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|E|} = \frac{5}{36}$$

من بين 36 ثنائية ممكنة: هناك 5 ثنائيات مجموع النتيجتين 6

-حساب $P(B)$:

$$B = \{(1,2);(2,1) \dots (2,6);(3,2);(4,2);(5,2);(6,2)\} \quad , \quad |B| = 11$$

$$P(B) = \frac{|B|}{|E|} = \frac{11}{36}$$

-حساب$P(A \cap B)$:

$$(A \cap B) = \{(2,4);(4,2)\} \quad ; \quad |A \cap B| = 2 \quad ; \quad P(A \cap B) = \frac{2}{36}$$

- علما أن المجموع يساوي 6 ما هو احتمال أن تكون احدى النتيجتين على الأقل 2.

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2/36}{5/36} = \frac{2}{5}$$

- علما أن احدى النتيجتين على الأقل 2 ما هو احتمال أن يكون المجموع 6

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2/36}{11/36} = \frac{2}{11}$$

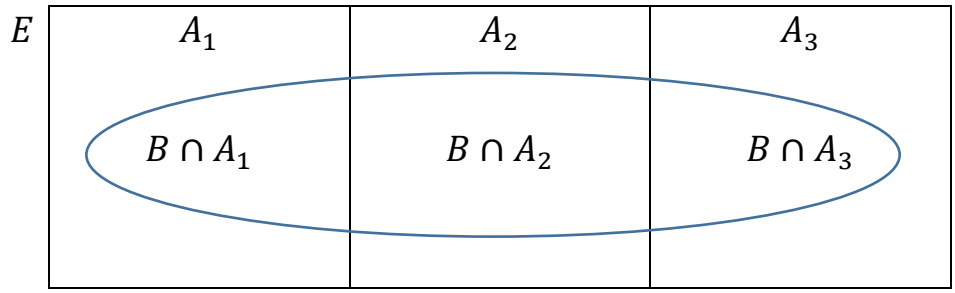
4-الاحتمال الكلي ونظرية بايز:

4-1-الاحتمال الكلي:

لتكن مجموعة الأساس Eفي تجربة عشوائية ولتكن الأحداث العشوائية المتنافية A_1 وA_2 وA_3 أي:

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$ والمتكاملة أي أن : $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = E$ وليكن B حدث غير مستقل عن هذه الأحداث الثلاثة بمفهوم الاحتمال الشرطي فإن: الحدث B مشروط إما بـ المتنافية A_1 أو A_2 أو A_3.

نلخص هذه التجربة في الشكل الموالي:



نلاحظ أن الأحداث $(B \cap A_1)$ و $(B \cap A_2)$ و $(B \cap A_3)$ متنافية مثنى مثنى وحسب خواص الاحتمالات للحوادث المتنافية نجد:

$$P(B) = P[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B)]$$
$$= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B)$$

وباستخدام قاعدة الضرب للحوادث غير المستقلة نجد:

$$P(B) = P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2) + P(A_3).P(B/A_3)$$

وبشكل مختصر فإن:

$$P(B) = \sum P(A_i) \times P(B/A_i)$$

تدعى هذه العلاقة الأخيرة بـ: صيغة الاحتمال الكلي والتي تأخذ الصيغة العامة التالية:

$$P(B) = P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2) + \cdots + P(A_i).P(B/A_i)$$

2-4-نظرية بايز:

بالاعتماد على قاعدة ضرب احتمالات الأحداث غير المستقلة وكذا قانون الاحتمال الشرطي، بحث الاحصائي بايز عن احتمال تحقق حدث نهائي انطلاقا من حدث أو عدة أحداث أولية التي كانت سببا في تحقق هذا الحدث النهائي.

لتكن الأحداث العشوائية المتنافية A_1 و A_2 و A_3 تنتمي لمجموعة الأساس E متنافية مثنى مثنى ومتكاملة بالنسبة لـ E وليكن B حدث غير مستقل عن هذه الأحداث وعليه:

$$P\left(A_1/B\right) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_1).P(B/A_1)}{P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2) + P(A_3).P\,B/A_3\,()}$$

$$P(A_n/B) = \frac{P(A_n \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_n).P(B/A_n)}{P(A_1).P\left(B/A_1\right) + P(A_2).P(B/A_2) + \cdots + P(A_n).P(B/A_n)}$$

ملاحظة: $P\left(A_1/B\right) + P\left(A_2/B\right) + \cdots + P(A_n/B) = 1$

ملاحظة هامة:

تسهيل لحل مسألة الاحتمالات خاصة المعقدة منها، بحيث تكون المسألة العشوائية مشكلة من سلسلة من التجارب الجزئية نلجأ إلى ترجمة المسألة الاحتمالية إلى شجرة احتمالية بحيث تحمل كل الأحداث الممكنة وكذا احتمالات كل حدث لكل مرحلة.

والشجرة الاحتمالية عبارة عن شكل بياني معقد أو بسيط يترجم مسألة احتمالية بأحداثها واحتمالاتها، يلخص كل المسألة الاحتمالية بحيث يساعد على فهم وحل المسألة.

مثال(31): في مصنع لإنتاج المصابيح الكهربائية توجد 3 آلات M_1 و M_2 و M_3 تنتج لليوم الواحد على التوالي 3000 مصباح 5000 مصباح، 2000 مصباح على الترتيب من جهة أخرى فإن M_1 لديها 5% انتاج معيب و M_2 عندها 2% انتاج معيب، و M_3 5% انتاج معيب.

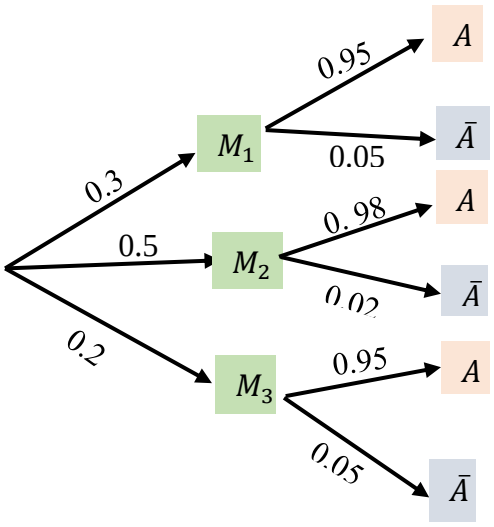
سحبنا مصباحا واحدا من الانتاج الكلي اليومي للمصنع.

المطلوب:

1. ترجم هذه المسألة إلى شجرة احتمالية.
2. أوجد احتمال أن يكون هذا المصباح من انتاج M_1 ؟ M_2 ؟ M_3؟
3. احتمال أن يكون هذا المصباح من انتاج M_1 أو M_2 وهو معيب واشرح النتيجة.
4. احتمال أن يكون هذا المصباح معيبا
5. احتمال أن يكون هذا المصباح صالحا؟ واشرح النتيجة
6. بعد السحب واجراء عملية المراقبة تأكدنا أن المصباح فعلا معيب. ما هو احتمال أن يكون من انتاج الآلة M_1؟ M_2؟ M_3؟

الحل:

1-ترجمة المسألة إلى شجرة احتمالية:



M_1: انتاج الآلة M_1

M_2 : انتاج الآلة M_2

M_3 : انتاج الآلة M_3

A : مصباح صالح

$\bar{A}$: مصباح معيب.

2-حساب احتمال أن يكون هذا المصباح من انتاج M_1 ؟ M_2؟ M_3؟

$$P(M_1) = \frac{|M_1|}{|E|} = \frac{3000}{10000} = 0.3$$

من بين 10000 مصباح لدينا 3000 مصباح من انتاج M_1

$$P(M_2) = \frac{|M_2|}{|E|} = \frac{5000}{10000} = 0{,}5$$

نفس الشرح السابق

$$P(M_3) = \frac{|M_3|}{|E|} = \frac{2000}{10000} = 0{,}2$$

نفس الشرح السابق

3-حساب احتمال أن يكون هذا المصباح من انتاج M_1 أو M_2 وهو معيب واشرح النتيجة

$$P(C) = P\left[(M_1 \cup M_2) \cap \overline{A}\right]$$

$$= P\left(M_1 \cap \overline{A}\right) \cup \mathrm{P}\left(M_2 \cap \overline{A}\right)$$

$$= P(M_1).P\left(\frac{\overline{A}}{M_1}\right) + P(M_2).P\left(\frac{\overline{A}}{M_2}\right)$$

$$= (0.3)(0.05) + (0.5)(0.02) = 0.025 = 25/1000$$

4-حساب احتمال أن يكون هذا المصباح معيبا

$$P\left(\overline{A}\right) = P\left[(M_1 \cup M_2 \cup M_3) \cap \overline{A}\right]$$

$$= P\left(M_1 \cap \overline{A}\right) \cup \mathrm{P}\left(M_2 \cap \overline{A}\right) \cup \mathrm{P}\left(M_3 \cap \overline{A}\right)$$

$$= P(M_1).P\left(\frac{\overline{A}}{M_1}\right) + P(M_2).P\left(\frac{\overline{A}}{M_2}\right) + P(M_3).P\left(\frac{\overline{A}}{M_3}\right)$$

$$= (0.3)(0.05) + (0.5)(0.02) + (0.2)(0.05) = 0.035 = 35/1000$$

الشرح: من 10000 م هناك 35 مصباح معيب.

5-حساب احتمال أن يكون هذا المصباح صالحا؟ واشرح النتيجة:

$$P(A) = P[(M_1 \cup M_2 \cup M_3) \cap A]$$

$$= P(M_1 \cap A) \cup \mathrm{P}(M_2 \cap A) \cup \mathrm{P}(M_3 \cap A)$$

$$P(A) = P(M_1).P(A/M_1) + P(M_2).P(A/M_2) + P(M_3).P(A/M_3)$$

$$(0.3)(0.95) + (0.5)(0.98) + (0.2)(0.95) = 0.965 = 965/1000$$

ط2: $P(A) + P\left(\overline{A}\right) = 1$

$$\rightarrow P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - 0{,}035 = 0{,}965$$

6-بعد السحب واجراء عملية المراقبة تأكدنا أن المصباح فعلا معيب. احتمال أن يكون من انتاج الآلة M_1 ؟ M_2 ؟ M_3؟

باستخدام قانون بايز: الحدث النهائي أكيد (وقع فعلا):

-احتمال أن يكون من انتاج الآلة M_1:

$$P(M_1/\overline{A}) = \frac{P(M_1 \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{P(M_1).P(\overline{A}/M_1)}{P(\overline{A})} = \frac{(0.3)(0.05)}{0.035}$$

$$= 0.428 = 428/1000$$

الشرح: من بين 1000 مصباح معيب منتج بالمصنع هناك 428 مصباح معيب من انتاج الآلة M_1

-احتمال أن يكون من انتاج الآلة M_2:

$$P(M_2/\overline{A}) = \frac{P(M_2 \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{P(M_2).P(\overline{A}/M_2)}{P(\overline{A})} = \frac{(0.5)(0.02)}{0.035}$$

$$= 0.286 = 286/1000$$

الشرح: من بين 1000 مصباح معيب منتج بالمصنع هناك 286 مصباح معيب من انتاج الآلة M_2

-احتمال أن يكون من انتاج الآلة M_3:

$$P(M_3/\overline{A}) = \frac{P(M_3 \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{P(M_3).P(\overline{A}/M_2)}{P(\overline{A})} = \frac{(0.2)(0.05)}{0.035}$$

$$= 0.286 = 286/1000$$

الشرح: من بين 1000 مصباح معيب منتج بالمصنع هناك 286 مصباح معيب من انتاج الآلة M_3

5-مدخل إلى الطريق التركيبية واستعمالها في حساب الاحتمالات:

لحساب الاحتمال نحتاج أولا إلى معرفة عدد عناصر مجموعة الأساس وكذا عدد عناصر الحدث العشوائي، فإذا كانت التجربة عشوائية بسيطة كرمي قطعة نقد أو زهرة نرد فإنه يتم حساب هذه العناصر ببساطة بطريقة التعداد، أما إذا كانت التجربة العشوائية معقدة نسبيا وكان بذلك عدد عناصر مجموعة الأساس وكذا عدد عناصر الحدث العشوائي كبيرا جدا أصبح شبه مستحيل الاعتماد على طريقة التعداد البسيطة في تحديد كل من $|A|$ ،$|B|$، وعليه نحتاج إلى طرق أخرى تسهل علينا حساب الاحتمالات في مثل هذه التجارب العشوائية المعقدة نستخدم طرق لحساب عدد عناصر كلا من مجموعة الأساس وعدد

عناصر الحدث العشوائي تسمى بالطرق التركيبية: وهي عبارة عن مفاهيم رياضية توظف في حساب الاحتمالات وهي ثلاثة أنواع رئيسية يتميز كل منها بعدة خصائص وهي:

1-5-التوفيقات C_n^x:

1-1-5-توفيقة بدون تكرار: هي منظومة غير مرتبة مشكلة من xعنصر يتم اختيارهم من nعنصر ويكون التكرار غير ممكن نرمز لها بالرمز C_n^x فهي تتميز عموما بالخصائص التالية:

-اختيار جزء من الكل؛

-الترتيب غير مهم؛

-التكرار غير ممكن.

وتحسب بالعلاقة التالية:

$$C_n^x = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}$$

مثال(32): لدينا 5 أشخاص نختار منهم 2 للمشاركة في ندوة علمية بكم يمكن اختيار هذين الشخصين؟

الحل:

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{5\times 4\times 3\times 2\times 1!}{(2\times 1)\times 3!} = \frac{20}{2} = 10$$

ومنه 10 طرق ممكنة.

2-1-5-توفيقة بتكرار: وتتميز بالخصائص التالية:

-اختيار جزء من الكل؛

-الترتيب غير مهم؛

- التكرار ممكن.

تحسب بالعلاقة التالي:

$$C_{n+(X-1)}^x = \frac{(n+x-1)!}{x!\,(n-1)!}$$

مثال(33): لدينا 5 أشخاص (ممثلين) نريد اختيار 2 منهم للمشاركة في فلمين مختلفين ويمكن لنفس الممثل أن يمثل في أكثر من فيلم، بكم طريقة يمكن اختيارهما؟

الحل:

$$\boldsymbol{n = 5} \quad , \quad \boldsymbol{x = 2}$$

$$C_{n+(X-1)}^{x} = \frac{(5+2-1)!}{2!\,(5-1)!} = \frac{6!}{2!\,4!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{(2 \times 1)4!} = \frac{30}{2} = 15$$

15 طريقة ممكنة.

ملاحظة:

يكون التكرار ممكنا إذا كان السحب مع الارجاع وغير ممكن عند السحب بدون ارجاع.

2-5-الترتيبات A_n^x

1-2-4-الترتيبة بدون تكرار

هي منظومة مترتبة مشكلة من xعنصر يتم اختيارهم عشوائيا ضمن مجموعة كلي n بحيث لا يظهر العنصر إلا مرة واحدة، نرمز لها بالرمز A_n^x.

$$A_n^x = \frac{n!}{(n-x)!}$$

-الخصائص:

اختيار جزء من الكل؛

-الترتيب مهم؛

- التكرار غير ممكن.

مثال(34): لدينا 5 أشخاص نختار منهم 2 للمشاركة في ندوة علمية بحيث يكون الأول رئيسا و 2 نائبا بكم طريقة يتم اختيارهما؟

الحل:

$$\boldsymbol{n = 5} \quad , \quad \boldsymbol{x = 2}$$

$$A_n^x = \frac{n!}{(n-x)!} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 20$$

20 طريقة ممكنة.

2-2-5-الترتيبة بتكرار:

أ-الخصائص

اختيار جزء من الكل؛

-الترتيب مهم؛

- التكرار ممكن.

ويحسب كما يلي:

$$A_n^x = n^x$$

مثال(35): نفس المثال السابق إلا أنه يمكن للرئيس أن يكون نائبا أو العكس، نفس السؤال؟

الحل:

$A_5^2 = 5^2 = 25$ طريقة

3-5-التبديلات P_n:

1-3-4-التبديلة بدون تكرار:

أ-الخصائص

-تشارك فيها كل العناصر n؛

-الترتيب مهم بحيث يتميز كل عن الآخر بمكانة داخل المنظومة

- والتكرار غير ممكن.

نرمز لها بـ: P_n وتحسب بالعلاقة التالية:

$$P_n = n!$$

مثال: لدينا الكلمة SAMI كم كلمة يمكن تشكيلها من هذه الكلمة؟

الحل:

$P_n = 4! = 24$ كلمة

2-3-4-التبديلة بتكرار:

أ-الخصائص:

اختيار الكل من الكل

-الترتيب مهم

-التكرار ممكن.

وتحسب بالعلاقة التالية:

$$P_n^{n_1 n_2 n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!}$$

و: $n_1!\, n_2!\, n_3! \dots \dots n_k! = n$

بحيث لدينا: مجموعة تتكون من nعنصر مصنفة إلى عدد من المجموعات المتجانسة n_1، n_2، n_3، ..... n_k

بحيث n_1 عدد عناصر المجموعة الأولى n_2 عدد عناصر المجموعة الثانية، n_k عدد عناصر المجموعة الأخيرة k.

مثال(36): لدينا مجموعة من المركبات، تنطلق في سباق وهي تتكون من 4 دراجات نارية، 3 سيارات، 3 شاحنات، بكم طريقة يمكن تشكيل هذه القافلة عند انطلاقها؟

الحل: $n_1 = 4$، $n_2 = 3$، $n_3 = 3$

$$P_{10}^{4,3,3} = \frac{10!}{4!\, 3!\, 3!} = 4200 \text{ طريقة}$$

-حالة جد خاصة من التبديلات:

إذا توفرت الخصائص التالية في التبديلية: الكل من الكل -الترتيب مهم - غير ممكن- شكل دائري نسمي التبديلة حينئذ تبديلة دائرية وتحسب بالعلاقة التالية:

$$P_n = (n-1)!$$

مثال(37): يتكون مجلس إدارة من 12 عضو من بينهم 9 رجال و3 نساء، نريد تكون لجنة 3 أشخاص. ما هو احتمال أن تحتوي اللجنة على امرأة واحدة فقط.

الحل: $x = 3; n = 12$

لحساب عدد عناصر E نعتمد ما يلي:

سحب جزء من الكل -الترتيب غير مهم-التكرار غير ممكن = توفيقة بتكرار.

$$|E| = C_{12}^3 = \frac{12!}{3!\,(12-3)!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{(3 \times 2 \times 1)9!} = 220$$

A: وجود امرأة واحدة فقط.

$$|A| = C_{12}^1 \times C_9^2 = 108$$

$$\Longrightarrow P(A) = \frac{|A|}{|E|} = \frac{C_3^1 \times C_9^2}{C_{12}^3} = \frac{108}{220} = 0{,}49$$

من بين 220 لجنة ممكنة هناك 108 لجنة تحتوي على امرأة واحدة فقط.

ما هو احتمال أن تتكون اللجنة من 3 أعضاء من نفس الجنس؟

الحل:

$$|B| = \{C_3^3 C_9^2 + C_9^3 C_3^0\} = \frac{3!}{3!\,(3-3)!} + \frac{9!}{3!\,(9-3)!} = 1 + 84 = 85$$

$$P(B) = \frac{|B|}{|E|} = \frac{85}{220} = 0{,}38$$

إذا افترضنا أن الأشخاص 3 المنتخبون يتم تعيينهم حسب ترتيبي القرعة رئيسا -نائبا-أمينا للمال (المقتصد).

-احتمال أن تحتوي اللجنة على رجلين على الأقل :

نستعمل الترتيبة بدون تكرار A_n^x

$$|E| = A_{12}^3 = \frac{12!}{(12-3)!} = 1320$$

B: تحتوي اللجنة على رجلين على الأقل

$$|B| = A_9^2 A_9^1 + A_9^1 A_3^0 = 720$$

$$P(B) = \frac{|B|}{|E|} = \frac{720}{1320} = 0{,}54$$

-احتمال أن تحتوي اللجنة على 3 نساء على الأكثر:

B: تحتوي اللجنة على ثلاثة نساء على الأكثر

$$|B| = A_3^3 A_9^0 + A_3^2 A_9^1 + A_3^1 A_9^2 + A_3^0 A_9^3 = 780$$

$$P(B) = \frac{780}{1320} = 0{,}59$$

المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

تمهيد:

يعتبر علم الاحتمالات من الركائز الأساسية في الإحصاء، وذلك من خلال استخدامه في وصف وتحليل الظواهر العشوائية التي لا يمكن التنبؤ بنتائجها بشكل دقيق. بالاعتماد على مفهوم المتغيرات العشوائية التي تمثل حلقة الوصل بين التجارب العشوائية والقيم العددية القابلة للتحليل الرياضي، مما يسمح باستخدام أدوات رياضية وإحصائية، مثل حساب التوقعات والتباينات ودراسة التوزيعات الاحتمالية، حيث نقوم بإرفاق كل قيمة من قيم مجموعة الأساس (كل نتيجة من نتائج التجربة العشوائية) في تجربة عشوائية لقيم جبرية (كمية)، فيتم تعريف في هذه التجربة العشوائية متغيرا عشوائيا والذي يحمل جملة من القيم صحيحة أو غير صحيحة تسمى بمجال التعريف.

ونشير للمتغير العشوائي بالرمز x وإلى مجال تعريفه بالرمز Ωx وحسب الظاهرة المدروسة، ونميز نوعين من المتغيرات العشوائية منفصلة ومتصلة.

1-مفاهيم عامة للمتغير العشوائي:

1-1-تعريف المتغير العشوائي:

1-1-1-التعريف الرياضي للمتغير العشوائي:

هو عبارة عن دالة ترفق كل نتيجة من نتائج التجربة العشوائية (كل عنصر من عناصر مجموعة الأساس) بعدد حقيقي يمكن أن يكون صحيح أو غير صحيح ومجموعة القيم التي يأخذها المتغير العشوائي والذي نرمز له بالرمز تxتسمى بمجال تعريفx.

1-1-2-التعريف العام للمتغير العشوائي:

هو متغير احصائي ترتبط كل قيمة من قيم مجال تعريفه باحتمال تحقق تلك القيمة ويكون مجموع احتمالات قيم مجال التعريف تساوي الواحد.

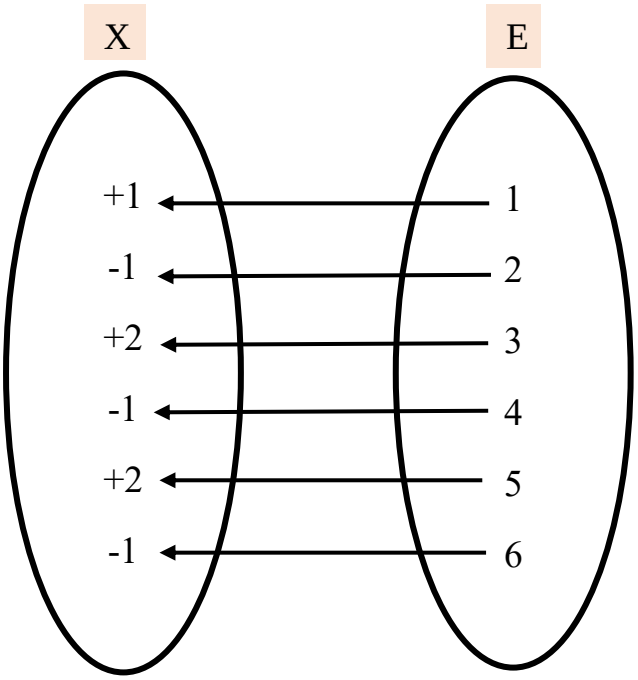
مثال(01): نرمي زهرة نرد بطريقة عشوائية، تعرف على هذه التجربة متغيرا عشوائيا xوالذي يمثل عدد النقاط المحصلة عند كل نتيجة، بحيث عند الحصول على الرقم 1 سنتحصل على نقطة معناها (+1) وعندما نتحصل على عدد زوجي ستخصم منك نقطة (1-) وعند الحصول على 3 أو 5 ستحصل على نقطتين.

x: عدد النقاط المحصلة.

الحل:

-نحدد مجال تعريف المتغير العشوائي x

$$\Omega x = [-1, +1, +2]$$



$$P(X = X_i) = \begin{cases} +1 \to {}^{1}/_{6} \\ -1 \to {}^{3}/_{6} \\ +2 \to {}^{2}/_{6} \end{cases}$$

2-1-أنواع المتغير العشوائي:

1-2-1-المتغير العشوائي المنفصل (المنقطع):

هو متغير عشوائي يقبل فقط قيما صحيحة لا تقبل التجزئة كأن نقول: $x \in \Omega = [1,2,3 \dots \dots n]$

x يمثل عدد النساء ضمن وفد معين، عدد الطلبة، عدد الآلات في المصنع، عدد المعاهد.

2-2-1-المتغير العشوائي المتصل (المستمر): هو متغير عشوائي يمكنه أن يأخذ عدد لا نهائي من القيم داخل مجال معلوم محصور بين قيمتين دنيا وعظمى كأن نقول: $x =]-\infty, +\infty[$ أو

$x \in \Omega = [a - b]$ مثل: المساحات، الأطوال، كمية التمور، النتيجة، أوزان الأطفال عند الولادة.....الخ.

2-التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل:

1-2-مفهومه:

التوزيع الاحتمالي هو جدول يلخص مجال تعريف المتغير العشوائي x والاحتمالات المرافقة لكل قيمة من قيم المتغير العشوائي x، وهناك شرطين ليكون التوزيع توزيعا احتماليا:

- $P(X = X_i) \geq 0$
- $\sum P(X = X_i) = 1$

ونعرض هذا التوزيع الاحتمالي كما يلي:

x	X_1	X_2	.....	X_n	$\sum P(X = X_i)$
$P(X = X_i)$	$P_1 = (X = 1)$	P_2	.....	P_n	1

مثال(02): نرمي زهرتي نرد متماثلتين مرة واحدة، نعرف على هذه التجربة العشوائية متغيرا عشوائيا Xكالتالي:

X: عدد الأعداد الزوجية التي تظهر في كل مرة.

عين التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير.

الحل:

$$E = \{(1,1); (1,2); (1,3) \dots \dots \dots \dots (6,6)\}$$

$$|E| = 36$$

$$A = \left\{ \begin{matrix} (1,2); (1,4); (1,6); (2,1); (2,2); (2,4); (2,3); \\ (2,5); (2,6); (3,4); (3,2), (3,6); (4,1); (4,2); (4,3); (4,4); (4,5); \\ (4,6); (5,2); (5,4); (5,6); (6,1); (6,2); (6,3); (6,4); (6,5); (6,6) \end{matrix} \right\}$$

نقوم بتحديد قيم المتغير العشوائي انطلاقا من التعريف الذي ورد في المثال، بحيث:

$x = 0$: إذا لم تتوفر الصفة أي لا توجد ولا ثنائية تحتوي على عدد زوجي؛

$x = 1$: إذا توفرت الصفة المطلوبة أي توجد ثنائيات تحتوي على عدد زوجي واحد؛

$x = 2$إذا توفرت الصفة المطلوبة أي توجد ثنائيات تحتوي على عددين زوجيين.

ومنه:

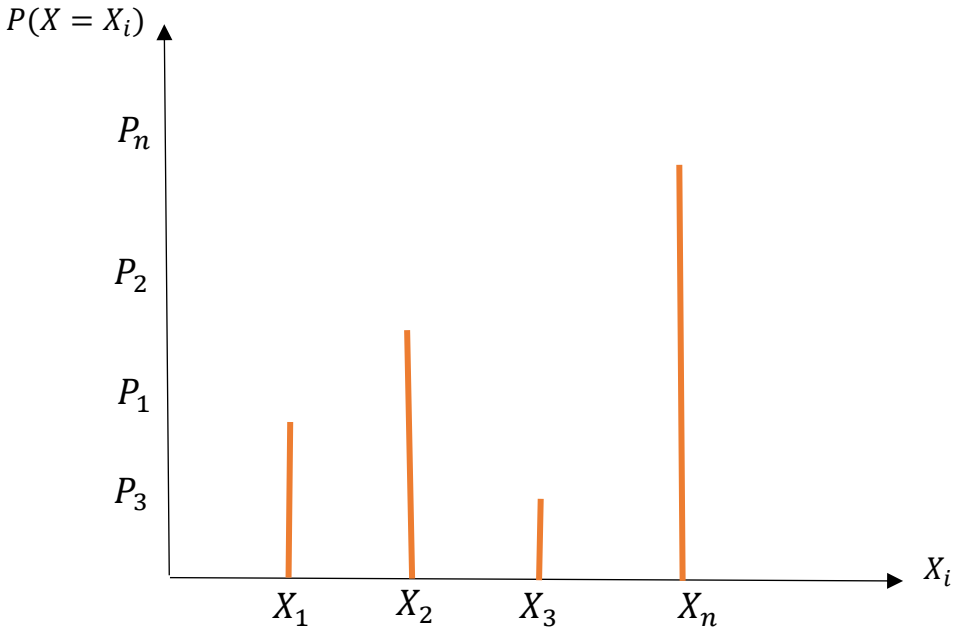
$$x \in \Omega \; x = [0,1,2]$$

X	0	1	2	$\sum P(X = X_i)$
$P(X = X_i)$	9/36	18/36	9/36	1

نلاحظ أن:

- $P(X = X_i) \geq 0$ ،
- $\sum P(X = X_i) = 1$ ومنه التوزيع فعلا هو توزيع احتمالي.

2-2-تمثيل التوزيع الاحتمالي بيانيا: يتم ذلك بواسطة الأعمدة البيانية لأن متغير عشوائي x منفصل.



مثال(03): نرمي قطعتي نقد مرة واحدة بطريقة عشوائية، ما احتمال الحصول على صورة، ما احتمال الحصول على كتابة.

نعرف على هذه التجربة العشوائية x عدد الصور الظاهرة.

حدد التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير؟

-مثله بيانيا.

الحل:

$$E = \{(ك،ك)\ ،\ (ص،ص)\ ،\ (ك،ص)\ ،\ (ص،ك)\} \qquad |E| = 4$$

احتمال الحصول على صورة:

$$P(ص) = \frac{3}{4}$$

احتمال الحصول على كتابة:

$$P(ك) = \frac{3}{4}$$

-تحديد التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير:

يمثل المتغير العشوائي x عدد الصور الظاهرة:

$$x = 0 \rightarrow (ك،ك)$$

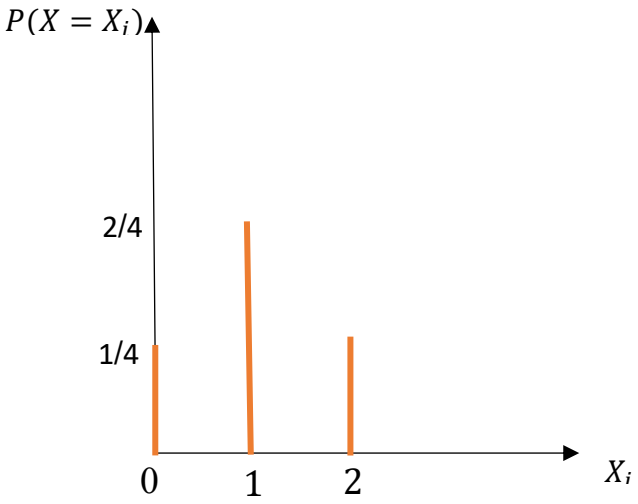
$x = 1 \rightarrow$ (ك،ص) ، (ص،ك)

$x = 2 \rightarrow$ (ص،ص)

X	0	1	2	$\sum P(X = X_i)$
$P(X = X_p)$	1/4	2/4	1/4	1

ومنه فالتوزيع هو فعلا توزيع احتمالي.

-التمثيل البياني للتوزيع الاحتمالي:



2-3-دالة التوزيع الاحتمالي F(x):

هي دالة عددية تسمى كذلك بالدالة الاحتمالية التجميعية المتصاعدة قيمتها محصورة بين 0 و 1

ونرمز لها بالرمز F(x).

ونعبر عنها رياضيا بالعلاقة التالية:

$$\boldsymbol{F(X) = P(X \leq x_i) = \sum P(X = x_i)}$$

وتحسب قيم **F(x)** بالصيغة التالية:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ P_1 & x_1 \leq x < x_2 \\ P_1 + P_2 & x_2 \leq x < x_3 \\ \vdots & \vdots \\ P_1 + P_2 + \cdots + P_{n-1} & x_{n-1} \leq x < x_n \\ 1 & x \geq x_n \end{cases}$$

مثل $F(x_4) = P(x \leq x_4) = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$

وللمزيد من التوضيح طريقة الحساب:

ليكن المتغير العشوائيx معرف على المجال $[x_1, x_2, \dots \dots \dots x_n]$

$$F(x_0) = P(x \leq x_0) = 0 \qquad P(x < x_1) = 0$$

$$F(x_1) = P(x \leq x_1) = P(x < x_2)$$

$$F(x_2) = P(x \leq x_2) = P(x < x_3)$$

$$F(x_n) = P(x \leq x_n) = 1$$

وعند أي قيمة من قيم x، بحيث: $x_n < x$ فإن $F(x)$ تبقى ثابتة عند 1:

$$F(x) = 1 \quad x \geq x_0$$

2-3-1-خصائص دالة التوزيع الاحتمالية للمتغير العشوائي المنفصل:

وتتمثل أهم خصائص دالة التوزيع الاحتمالية للمتغير العشوائي المنفصل فيما يلي:

- ✓ دالة عددية تراكمية (تجميعية) موجبة متزايدة$F(x) \geq 0$.
- ✓ قيم دالة التوزيع الاحتمالية محصورة ما بين الصفر والواحد أي: $0 \leq F(x) \leq 1$.
- ✓ لما يؤولx إلى -∞فإن دالة التوزيع الاحتمالية تساوي الصفر أي: $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
- ✓ لما يؤولx إلى +∞فإن دالة التوزيع الاحتمالية تساوي الواحد أي: $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$
- ✓ دالة التوزيع الاحتمالية، هي دالة سلمية.

مثال(04): بالاعتماد على المثال السابق أحسب دالة التوزيع الاحتمالية.

الحل:

$$F(X) = P(X \leq x_i) = \sum P(X = x_i)$$

$$F(0) = P(X \leq 0) = 1/4$$

$$F(1) = P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X + 1) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$$

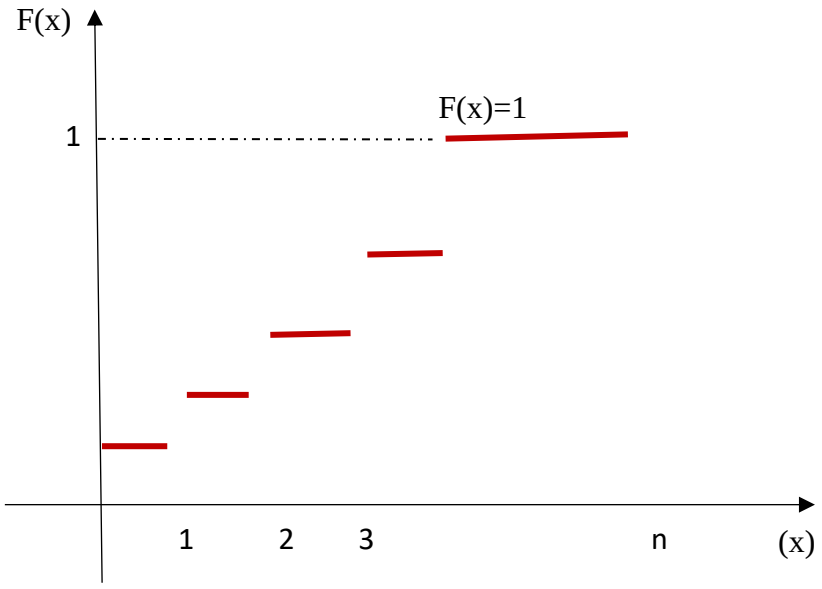
$$F(2) = P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

كما يمكن حساب $F(X)$ مباشرة على الجدول كما يلي:

X	0	1	2	$\sum P(X = X_i)$
$P(X = X_p)$	1/4	2/4	1/4	1
$F(X)$	1/4	3/4	1	-

2-3-2-تمثيل دالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$ بيانيا:

تمثل عن طريق المنحنى السلمي المتصاعد.



مثال(05): أحسب دالة التوزيع الاحتمالية $F(X)$ثم مثلها بيانيا للمثال السابق.

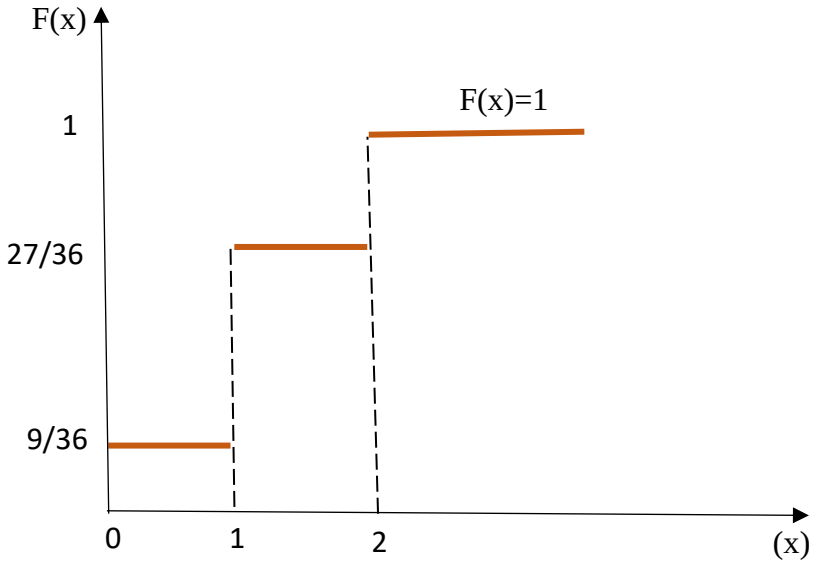
X	0	1	2	مجموع
$P(X = X_i)$	9/36	18/36	9/36	1
$F(X)$	9/36	27/36	1	/

$$F(X) = P(X \leq x_i) = \sum P(X = x_i)$$

$$F(0) = P(x \leq 0) = P(X = 0) = \frac{9}{36}$$

$$F(1) = P(x \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{9}{36} + \frac{18}{36} = \frac{27}{36}$$

$$F(2) = P(x \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{27}{36} + \frac{9}{36} = \frac{36}{36} = 1$$



2-4-حساب الاحتمالات:

يتم حساب الاحتمالات عن طريق الاستنتاج القم من جدول التوزيع الاحتمالي مباشرة، كما يمكن استخدام دالة التوزيع الاحتمالية في حساب الاحتمالات في حالة متغير عشوائي منفصل كما يلي:

- $P(X \leq a) = F(a)$
- $P(X < a) = P(X \leq a - 1) = F(a - 1)$
- $P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$
- $P(X \geq a) = 1 - P(X < a) = 1 - P(X \leq a - 1) = 1 - F(a - 1)$
- $P(a < X < b) = P(X < b) - P(X \leq a) = P(X \leq b - 1) - P(X \leq a) = F(b - 1) - F(a)$
- $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X < a) = P(X \leq b) - P(X \leq a - 1) = F(b) - F(a - 1)$
- $P(a \leq X < b) = P(X < b) - P(X < a) = P(X \leq b - 1) - P(X \leq a - 1) = F(b - 1) - F(a - 1)$
- $P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$

مثال(06): أحسب الاحتمالات التالية للمثال السابق:

- $P(X \leq 1) = F(1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{9}{36} + \frac{18}{36} = \frac{27}{36}$
- $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X \leq 0) = 1 - F(0) = 1 - \frac{9}{36} = \frac{27}{36}$
- $P(0 < X \leq 2) = P(X \leq 2) - P(X \leq 0) = F(2) - F(0) = 1 - \frac{9}{36} = \frac{27}{36}$

3-التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متصل:

3-1-صيغة دالة الكثافة الاحتمالية:

إذا كان تعريف التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل x، هو إيجاد احتمال لكل قيمة من قيم المتغير العشوائي داخل مجال التعريف، فإن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتصل يعرف بدالة تسمى دالة الكثافة الاحتمالية، وهي دالة رياضية يتم استخدامها في حساب الاحتمالات للقيم الممكنة للمتغير العشوائي المتصل ويرمز لها بالرمز $f(X)$، وتعرف بالصيغة الرياضية التالية:

$$f(X) = \begin{cases} f(X) & X \in [a-b] \\ 0 & X \notin [a-b] \end{cases}$$

3-2-شروط دالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$:

حتى تكون الدالة $f(x)$ دالة كثافة احتمالية يجب أن تتوفر فيها شروط وهي:

بحيث $x \in [a-b]$

1) $\forall x \in [a-b]: f(x) > 0$
2) $\forall x \notin [a-b]: f(x) = 0$
3) $\int_a^b f(x)dx = 1$

هذه الخاصية 3 أهمها على الاطلاق وهي تقابل الشرط $\sum P_i = 1$ في المتغير العشوائي المنفصل.

وبتلخيص الشروط يمكن القول حتى تكون $f(X)$ دالة كثافة احتمالية يجب أن تحقق شرطين:

$$\begin{cases} f(X) \geq 0 \\ \int f(X)dx = 1 \end{cases}$$

وتأخذ دالة الكثافة الاحتمالية عدة صيغ رياضية، فقد تكون دالة خطية ثابتة $f(X) = a$، أو دالة خطية تمر بالمبدأ بالصيغة $f(X) = ax$، أو خطية لا تمر بالمبدأ $f(X) = ax + b$، أو قطع مكافئ من الشكل $f(X) = ax^2 + bx + c$ ...الخ.

مثال(07): لتكن $f(X)$ دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي x والمعرفة كما يلي:

$$f(X) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & x \in [0-2] \\ 0 & x \notin [0-2] \end{cases}$$

المطلوب:

-تأكد أن $f(X)$ فعلا دالة كثافة احتمالية

الحل:

تكون $f(X)$دالة كثافة احتمالية إذا توفر الشرطين التاليين:

$$\begin{cases} f(X) \geq 0 \\ \int_{\Omega} f(X)dx = 1 \end{cases}$$

-نلاحظ أن دالة الكثافة الاحتمالية$f(X) = \frac{1}{2}x$موجبة لما $x \in [0-2]$ومنه الشرط الأول محقق.

$$\int_0^{10} f(X)dx = 1$$

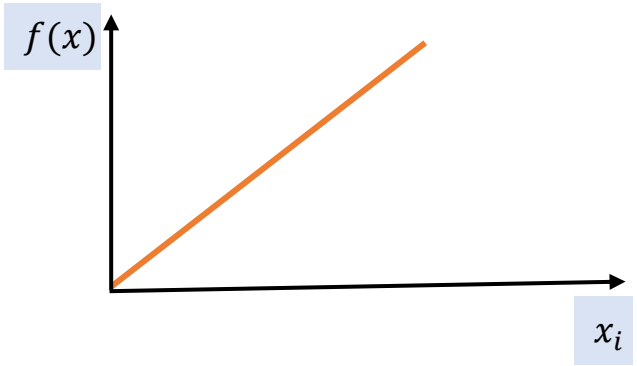
$$\int_0^2 f(X)dx = 1 = \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x\right)dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^2 = \frac{2^2}{4} - 0 = 1$$

وبتحقق الشرطين نستنتج أن $f(X)$هي فعلا دالة كثافة احتمالية.

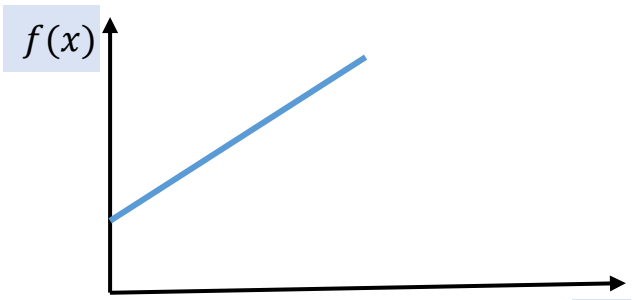
3-3-التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل:

يتم التمثيل البياني للتوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتصل بواسطة منحنى تكراري الذي يشمل قيم مجال تعريف ذلك المتغيرΩ لدالة الكثافة الاحتمالية، وذلك عن طريق الاحداثيات $(x_i, f(x))$ويتحدد الشكل حسب الصيغة الرياضية كما يلي:

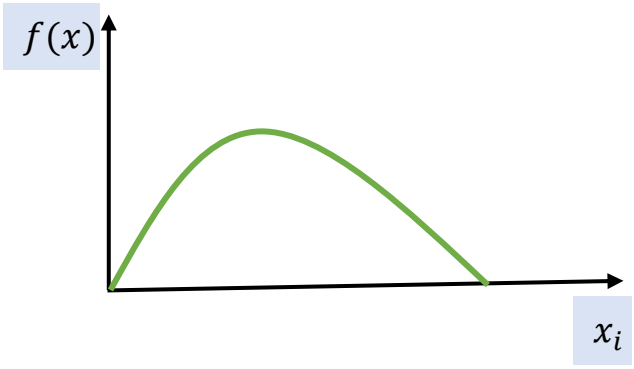
-إذا كان $\boldsymbol{f(X) = ax}$فيكون تمثيلها البياني عبارة خط مستقيم يمر بالمبدأ ويكون كما يلي:



-إذا كان $\boldsymbol{f(X) = ax + b}$فيكون تمثيلها البياني عبارة خط مستقيم ويكون كما يلي:



-إذا كان $x_i\ x^2 + bx + c$ فيكون تمثيلها البياني على شكل قطع مكافئ $f(X)$ كما يلي:



مثال(08): مثل بيانيا دالة الكثافة الاحتمالية للمثال السابق.

الحل:

تمثيل دالة الكثافة الاحتمالية للمثال السابق:

$$f(X) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & x \in [0-2] \\ 0 & x \notin [0-2] \end{cases}$$

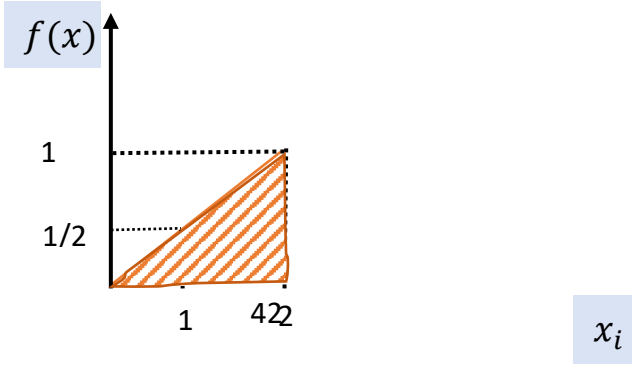
-نلاحظ ومن خلال صيغة الدالة أن تمثيلها يكون في شكل خط مستقيم يمر بالمبدأ.

-لما $x = 0$ تكون قيمة $f(X) = 0$

-وعند $x = 1$ تكون قيمة $f(X) = \frac{1}{2}$

-وعند $x = 2$ تكون قيمة $f(X) = \frac{2}{2} = 1$

وعليه يكون التمثيل البياني كما يلي:



3-4-دالة التوزيع الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل $F(X)$:

هي دالة عددية تعبر عن مقدار التكامل الرياضي لدالة الكثافة الاحتمالية ضمن المجال $]-\infty\ ,\ x[$

وتعطى بالصيغة التالية:

$$F(X) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

$$F(X) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

مثال(09): أحسب دالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$ للمثال السابق.

$$F(X) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

$$f(X) = \begin{cases} 0 & X < 0 \\ \frac{1}{2}x & x \in [0-2] \\ 0 & X > 2 \end{cases}$$

- $\boldsymbol{X < 0}$

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x<0} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x<0} 0\ dx = 0$$

- $\boldsymbol{X \in [0-2]}$

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0\ dx\ + \int_{0}^{X\in[0-2]} \frac{1}{2}xdx\ = 0 + \left[\frac{X^2}{4}\right]^{X\in[0-2]}$$

$$= F(X) - F(0) = \frac{X^2}{4} - \frac{0^2}{4} = \frac{X^2}{4}$$

- $\boldsymbol{X > 2}$

$$F(X) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0\ dx\ + \int_{0}^{2} \frac{1}{2}xdx + \int_{2}^{X>2} 0\ dx\ + =$$

$$0 + \left[\frac{X^2}{4}\right]_0^2 + 0 = 0 + \frac{4}{4} + 0 = 1$$

ومنه يمكن تلخيص دالة التوزيع الاحتمالية كما يلي:

$$F(X)=\begin{cases}0 & X<0\\ \frac{1}{4}X^2 & X\in[0-2]\\ 1 & X>2\end{cases}$$

3-4-1-خصائص دالة التوزيع الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل:

تتمثل أهم خصائص دالة التوزيع الاحتمالية لمتغير عشوائي متصل فيما يلي:

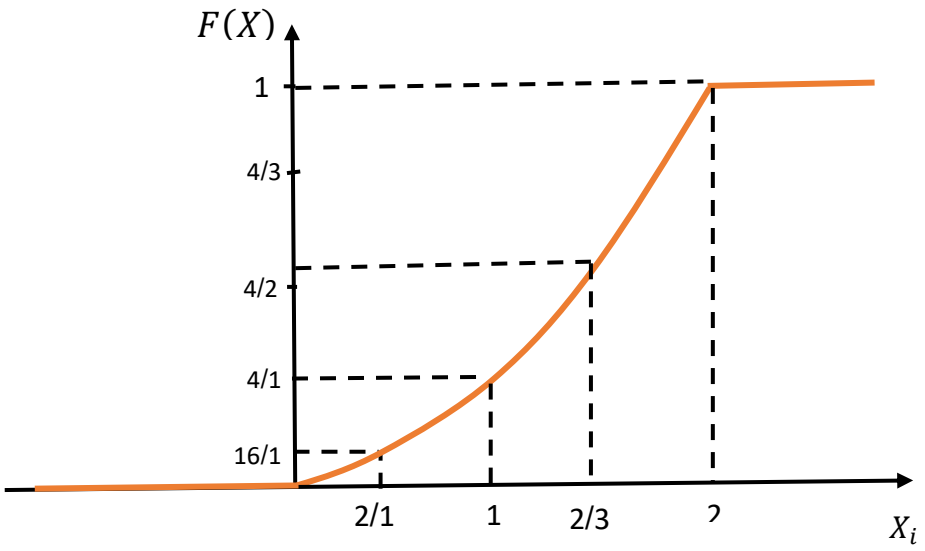
- دالة عددية تراكمية (تجميعية) موجبة متزايدة $F(x)\geq 0$.
- قيم دالة التوزيع الاحتمالية محصورة ما بين الصفر والواحد أي: $0\leq F(x)\leq 1$.
- لما يؤول x إلى $-\infty$ فإن دالة التوزيع الاحتمالية تساوي الصفر أي: $\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$.
- لما يؤول x إلى $+\infty$ فإن دالة التوزيع الاحتمالية تساوي الواحد أي: $\lim_{x\to+\infty}F(x)=1$.
- بما أن $F(X)$ هي عبارة دالة التوزيع الاحتمالية لمتغير عشوائي متصل و $f(X)$ هي عبارة عن دالة الكثافة الاحتمالية لمتغير عشوائي متصل، فيمكن حساب كل واحدة بدلالة الأخرى بحساب $f(X)$ باشتقاق $F(X)$ و حساب $F(X)$ بتكامل $f(X)$ أي:

$$\begin{cases}F(X)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx\\ f(X)=F(X)'\end{cases}$$

3-5-التمثيل البياني لدالة التوزيع الاحتمالية $F(X)$ لمتغير عشوائي متصل:

يتم تمثيل دالة التوزيع الاحتمالية $F(X)$ لمتغير عشوائي متصل بيانيا عن طريق منحنى.

مثال (10): مثل بيانيا دالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$ للمثال السابق.



3-6-حساب الاحتمالات:

يتم حساب الاحتمالات عن طريق دالة التوزيع الاحتمالية، أو عن طريق تكامل دالة الكثافة الاحتمالية ضمن المجال المعطى والذي ينتمي إليه المتغير العشوائي.

❖ لدالة التوزيع الاحتمالية $F(X)$ دور في حساب الاحتمالات لأي مجال جزئي محصور بين قيمتين a و b أي:

$$P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(X)dX = \int_{-\infty}^{b} f(X)dX - \int_{-\infty}^{a} f(X)dX = F(a) - F(b)$$

❖ كما يحسب الاحتمال التالي:

$$P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b)$$
$$= \int_a^b f(X)dX = \int_{-\infty}^{b} f(X)dX - \int_{-\infty}^{a} f(X)dX = F(a) - F(b)$$

❖ إذا كان X يساوي قيمة ثابتة أي: $X = a$ فإن احتمالها يساوي الصفر أي:

$$P(X = a) = \int_a^a f(X)dX = 0$$

❖ كما يمكن حساب الاحتمال $P(X < a)$ أيضا من خلال الصيغة التالية:

$$P(X < a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(X)dX = F(a)$$

❖ كذلك يمكن حساب الاحتمال $P(X > a)$ و $P(X \geq a)$ من خلال الصيغة التالية:

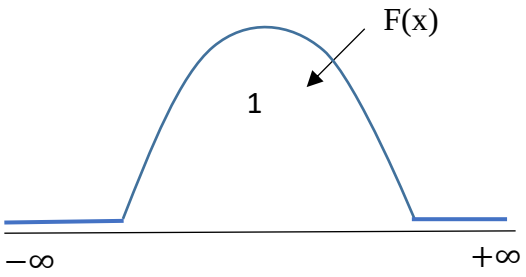
$$P(X \geq a) = P(X > a) = \int_a^{+\infty} f(X)dX = 1 - \int_{-\infty}^{a} f(X)dX = 1 - F(a)$$

ليكن X متغير عشوائي من النوع المتصل معرفة على مجال القيم الحقيقية أي $x\epsilon\Omega =]-\infty, +\infty[$ ، ولتكن $F(X)$ دالة التوزيع الاحتمالية للمتغير العشوائي X معرفة كالتالي: $F(X) = P(X \leq x)$ والتي من خصائصها كما رأينا سابقا:

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1 \qquad \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$$

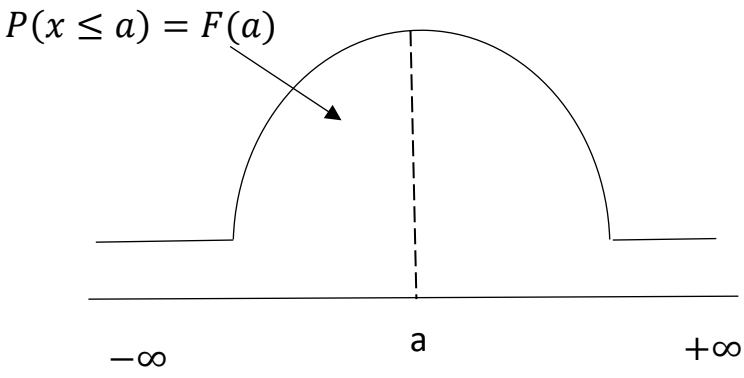
بما أن مجال تعريف المتغير العشوائي المتصل X يحتوي على عدد لا نهائي من القيم الممكنة X_i وعليه يستحيل أن نحسب دالة التوزيع الاحتمالية $F(X)$ عن طريق التجميع كما هو الحال في المتغير العشوائي المنفصل وعليه سنقوم بحسابها عن طريق حساب المساحات.

مثلا: تحديد هذه الاحتمالات: $P(a \leq x \leq b); P(x > b); P(x \leq a)$ بواسطة المساحات مستعملا التوزيع الاحتمالية $F(X)$

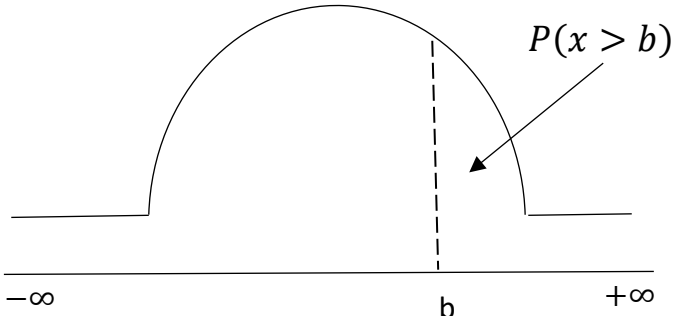


وللمزيد من التوضيح نأخذ بعض الأمثلة على ذلك:

1) $\boldsymbol{P(x \leq a) = F(a)}$

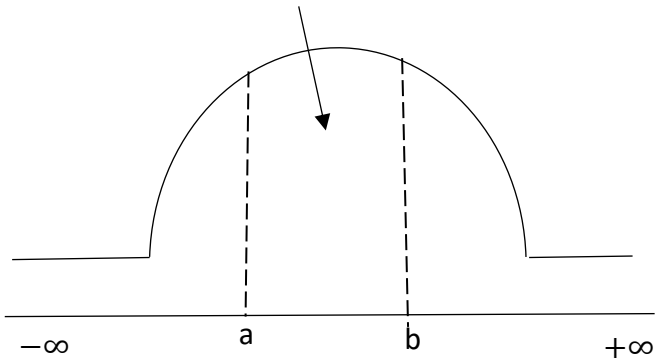


2) $P(x > b) = 1 - P(x \leq b) = 1 - F(b)$



3) $P(a \leq x \leq b) = P(x \leq b) - P(x \leq a) = F(b) - F(a)$

$$P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a)$$



ملاحظة: نلاحظ أنه إذا كان x متصلا فإن كل الاحتمالات تكون مرتبطة بمجالات وعليه فإن:

$$\forall x \in \Omega \Longrightarrow P(x = x) = 0$$

البرهان: ليكن $x=a$، لحساب هذا الاحتمال يجب تحويله إلى مجال لأن X متصل كالتالي:

$$P(x = a) = P(a \leq X \leq b)$$

$$= P(x \leq a) - F(x \leq a)$$

$$= F(a) - F(a) = 0$$

العلاقة بين دالة التوزيع الاحتمالية$F(x)$ ودالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$مشتق دالة التوزيع الاحتمالية تسمى دالة الكثافة الاحتمالية ونرمز لها بالرمز أي:

$$F'(x) = f(x)$$

فيمكن الحصول على أي واحدة منهما بدلالة الأخرى إما بالاشتقاق أو بالتكامل.

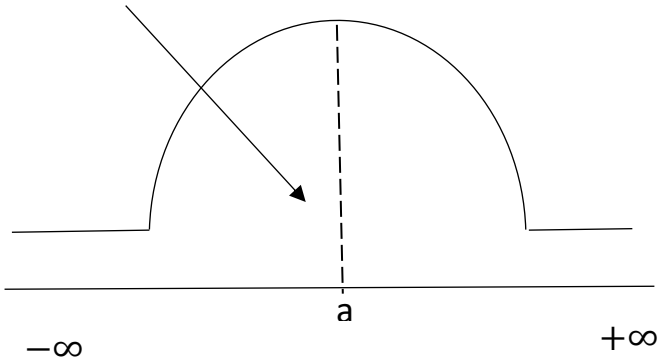
$f(x)$هي: التعبير الرياضي على شكل المنحنى التكراري في إذا تسمح لنا بحساب كل الاحتمالات الممكنة بواسطة التكامل.

إذا كان $x \in [a,b]$ فإن: $f(x) = \begin{cases} f(x): f(x) \in [a,b] \\ 0: f(x) \notin [a,b] \end{cases}$

مثلا: لحساب الاحتمالات السابقة باستخدام $f(x)$

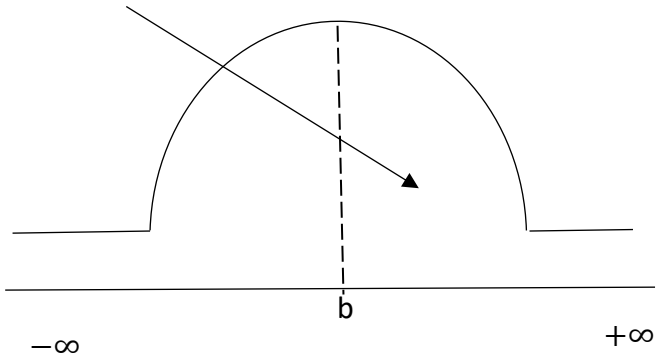
$$P(x \leq a) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(a)$$

$P(x \leq a) = F(a)$



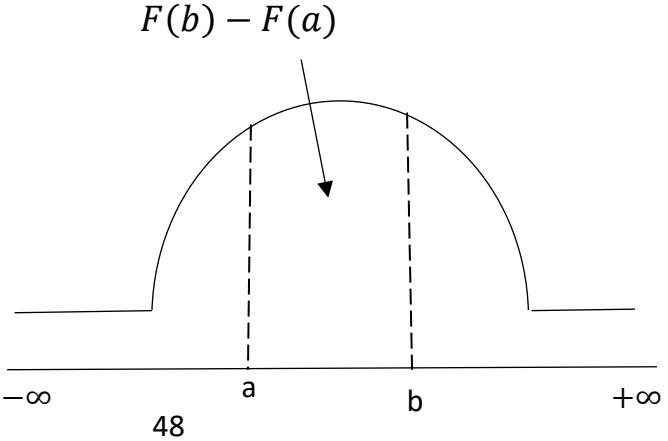
1) $P(x > b) = 1 - P(x \leq b) = 1 - \int_{-\infty}^{b} f(x)dx = 1 - F(b)$

$P(x > b) = 1 - F(b)$



2) $P(a \leq x \leq b) = P(x \leq b) - P(x \leq a) = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = F(b) - F(a)$

$F(b) - F(a)$



مثال(11): أحسب الاحتمالات التالية:

$P(\frac{1}{2} < X < 1)$ ، $P(X \leq \frac{1}{2})$ ، $P(X > 1)$ ، $P(X < \frac{3}{2})$.

الحل:

$$P\left(X < \frac{3}{2}\right) = \int_0^{\frac{3}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2}xdx = \left[\frac{X^2}{4}\right]_0^{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{3^2}{2^2}}{4} - 0 = \frac{9}{16}$$

$$P(X > 1) = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \frac{1}{2}xdx = \left[\frac{X^2}{4}\right]_1^2 = \frac{2^2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

أو باستخدام دالة التوزيع الاحتمالية:

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F(1) = 1 - \frac{1}{4}(1)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P\left(X \leq \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{16}$$

$$P\left(\frac{1}{2} < X < 1\right) = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2}xdx = \left[\frac{X^2}{4}\right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1^2}{4} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{4-1}{16} = \frac{3}{16}$$

تمرين:

ليكن X الانتاج السنوي من التمور في احدى المؤسسات أقصى طاقة انتاجية هي: 120 طن.

دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير معرفة كما يلي: $f(x) = \frac{1}{\alpha}x$

1) ما هي طبيعة ونوع المتغير X علل ذلك.

2) حدد مجال تعريف X ثم أوجد قيمة α حتى تكون $f(x)$ دالة كثافة احتمالية ومثلها بيانيا.

3) أوجد دالة التوزيع احتمالية $F(x)$ ومثلها بيانيا.

4) ما هو احتمال أن يبلغ انتاج المؤسسة أقل من 20 طن أكثر من 100 طن ما بين 70 و90 طن.

الحل:

$f(x) = \frac{1}{\alpha}x$; $X_{max} = 120$ طن

طبيعة المتغير X: هو متغير متصل، عشوائي لأن النتائج غير محددة مسبقا لأن انتاج التمور تتحكم فيه عدة عوامل عشوائية تجعل الانتاج غير ثابت من سنة لأخرى مثل: انقطاع التيار الكهربائي، العوامل

الطبيعية تأخر استلام المواد الأولية، تأخر وتغير العمل...الخ، أي لا يمكن أن نعرف مسبقا حد الانتاج السنوي من التمور.

متصل: لأنه معرف بدالة كثافة احتمالية كما أن حجم الانتاج السنوي من التمور والمقدر بالطن قابل للتجزئة.

-تحديد مجال تعريف X :

اقصى طاقة انتاجية هي: 120 طن وانتاج التمور لا يمكن أن يكون سالب إذا: $x \in \Omega; x = [0 - 120]$ ،

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}x & : x \in [0 - 120] \\ 0 & : x \notin [0 - 120] \end{cases}$$

-ايجاد قيمة α حتى تكون $f(x)$ دالة كثافة احتمالية:

حتى تكون $f(x)$ دالة كثافة احتمالية إذا تحقق شرطين:

$$f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{120} f(x)dx + \int_{120}^{+\infty} f(x)dx$$

$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{120} \left(\frac{1}{\alpha}x\right)dx + \int_{0}^{+\infty} 0dx = 1$$

$$\Longrightarrow 0 + \frac{1}{\alpha}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{120} + 0 = 1$$

$$\Rightarrow F(120) - F(0) = 1$$

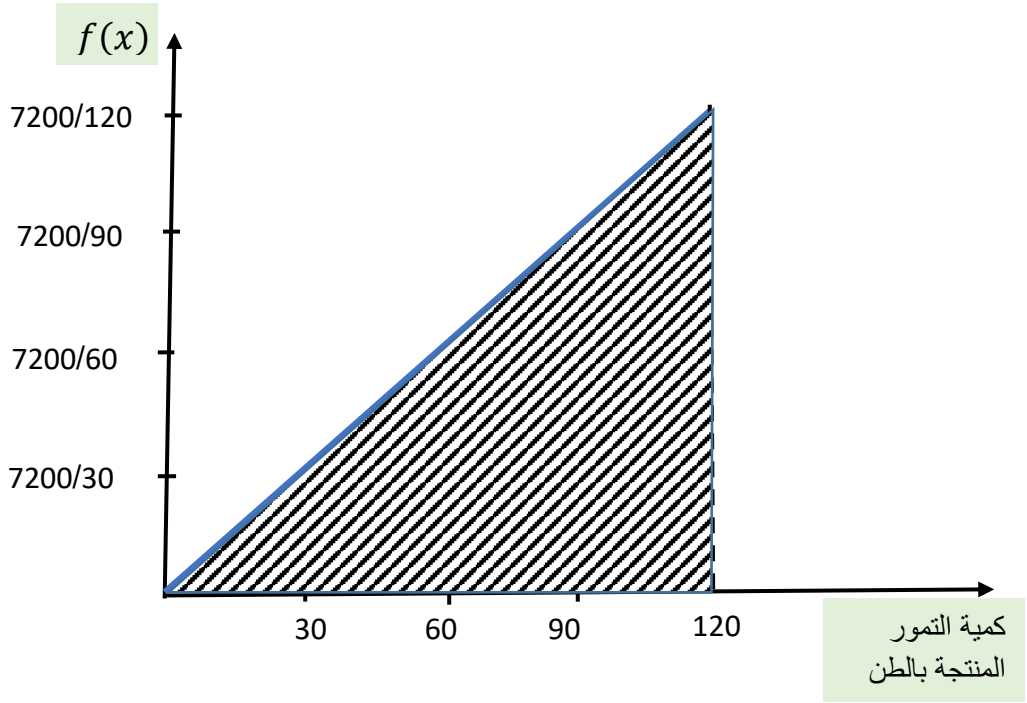
$$\Rightarrow \frac{(120)^2}{2\alpha} - \frac{0^2}{2\alpha} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{14400}{2\alpha} = 1 \Rightarrow \alpha = 7200$$

أي أن $f(X) = \frac{1}{7200}X$

ولدينا من جهة أخرى $f(X) \geq 0$ ومنه نقول أن $f(X)$ دالة كثافة احتمالية.

-التمثيل البياني للدالة الكثافة الاحتمالية:



3-ايجاد دالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$وتمثيلها البياني:

$$F(X) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

$$f(X) = \begin{cases} 0 & X < 0 \\ \frac{1}{7200}x & x \in [0-120] \\ 0 & X > 120 \end{cases}$$

- $X < 0$

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x<0} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x<0} 0\ dx = 0$$

- $X \in [0-120]$

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0\ dx + \int_{0}^{X\in[0-120]} \frac{1}{7200}xdx = 0 + \left[\frac{X^2}{14400}\right]^{X\in[0-120]}$$

$$= \frac{X^2}{14400}$$

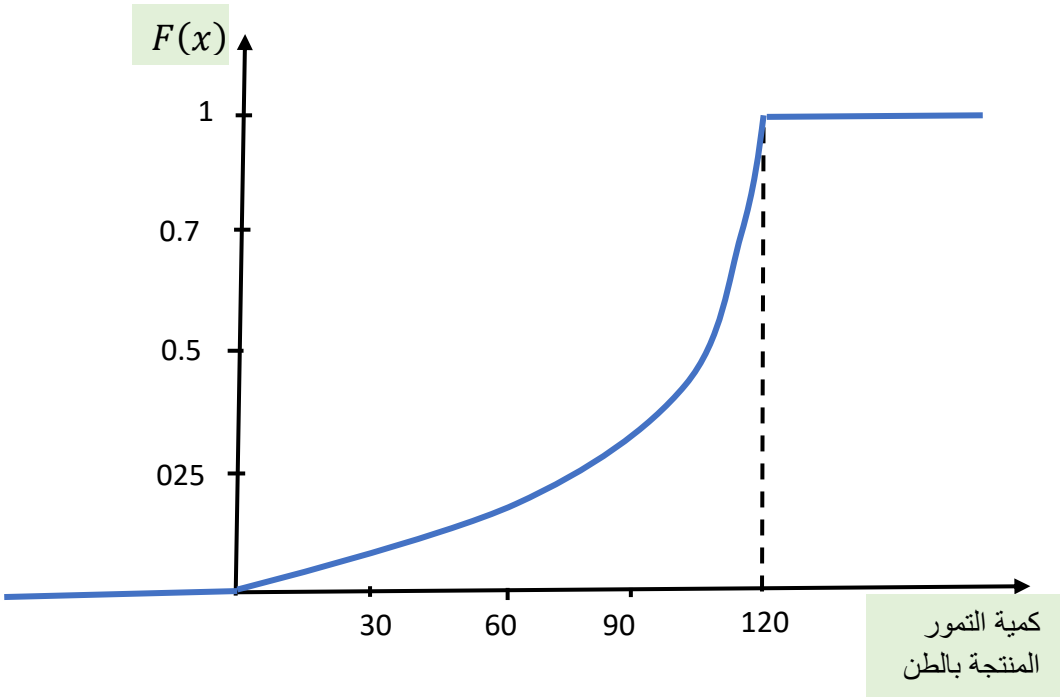
- $X > 120$

$$F(X) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{120} \frac{1}{7200} x dx +$$
$$\int_{2}^{X>120} 0\,dx + = 0 + \left[\frac{X^2}{14400}\right]_0^{120} + 0 = 0 + \frac{14400}{14400} + 0 = 1$$

ومنه يمكن تلخيص دالة التوزيع الاحتمالية كما يلي:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & X < 0 \\ \frac{1}{14400} X^2 & X \in [0 - 120] \\ 1 & X > 120 \end{cases}$$

-التمثيل البياني:



4-احتمال أن يبلغ انتاج المؤسسة أقل من 20 طن أكثر من 100 طن ما بين 70 و90 طن.

-أن يبلغ انتاج المؤسسة أقل من 20 طن:

$$P(X < 20) = F(20) = \frac{(20)^2}{14400} = 0.027$$

- أن يبلغ انتاج المؤسسة أكثر من 100 طن:

$$P(X > 100) = 1 - P(X \leq 100) = 1 - F(100) = 1 - \frac{(100)^2}{14400} = 0.305$$

- أن يبلغ انتاج المؤسسة ما بين 70 و90 طن.

$$P(70 \leq X \leq 90) = P(X \leq 90) - P(X \leq 70) = F(90) - F(70) = \frac{(90)^2}{14400} - \frac{(70)^2}{14400} = 0.22$$

4-معالم المتغير العشوائي:

والمتمثلة في مقاييس النزعة المركزية، التشتت، العزوم، وسيتم التطرق إلى التوقع الرياضي (الأمل الرياضي)، التباين، والانحراف المعياري، والعزوم.

4-1-الأمل الرياضي:

4-1-1-حالة متغير عشوائي منفصل:

يحسب الأمل الرياضي في حالة متغير عشوائي منفصل كما يلي:

$$E(x) = \sum_{i=1}^{k} P_i x_i$$

مثال(12): أحسب الامل الرياضي للتوزيع التكراري التالي:

X	1	2	3	4	5	6	المجموع
P_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	/
$\sum P_i x_i$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{21}{6}$

ومنه:

$$E(x) = \sum_{i=1}^{k} P_i x_i = \frac{21}{6}$$

4-1-2-حالة متغير عشوائي متصل:

وفي حالة متغير عشوائي متصل فإن الامل الرياضي يحسب بالعلاقة التالية:

$$E(x) = \int x f(x) dx$$

مثال(13): أحسب الامل الرياضي للتوزيع التكراري التالي:

$$f(X) = \frac{1}{8} \qquad X \in [0\ ,\ 8]$$

$$E(x) = \int xf(x)dx = \int_0^8 x\frac{1}{8} = \left[\frac{X^2}{16}\right]_0^8 = \frac{64}{16} = 4$$

4-1-2-خواص الامل الرياضي:

- التوقع الرياضي لعدد ثابت a هو العدد الثابت نفسه أي:

$$E(a) = a$$

- إذا كان Xمتغير عشوائي وa عدد ثابت فإن:

$$E(aX) = aE(X)$$

- إذا كان Xمتغير عشوائي، وZ متغير عشوائي آخر يرتبط بـX بعلاقة خطية من الشكل $Z = aX \pm b$ فإن $E(Z)$يحسب بدلالة$E(X)$:

$$E(Z) = E(aX \pm b) = E(aX) + E(b) = aE(X) \pm b$$

- إذا كانت المتغيرات العشوائيةZ , Y , X مرتبطة بالعلاقة التالية:

$$Z = aX \pm bY$$

فإن:

$$E(Z) = E(aX \pm bY) = E(aX) + E(bY) = aE(X) \pm bE(Y)$$

- إذا كانت العلاقة $Z = X.Y$ و كان X و Yمتغيرين عشوائيان مستقلان.

فإن:

$$E(Z) = E(X.Y) = E(X).E(Z)$$

4-2-التباين والانحراف المعياري:

يعرف التباين$V(X)$ لمتغير عشوائيX بانه الأمل الرياضي لمربع الفرق بين المتغير العشوائيX وأمله الرياضي $E(X)$أي:

$$V(X) = E[(X - E(X)^2]$$

ويمثل الانحراف المعياري والذي يرمز له بالرمز$\sigma(X)$الجذر التربيعي للتباين$V(X)$، وهو يقيس مدى تباعد قيم المتغير العشوائي عن المتوسط الحسابي (التوقع الرياضي)، كما يقيس مدى تشتت قيم الظاهرة أو تجانسها، فهو يعتبر من أدق مقاييس التشتت.

4-2-1-التباين والانحراف المعياري في حالة متغير عشوائي منفصل:

أ-الطريقة المباشرة:

يحسب التباين في حالة متغير عشوائي منفصل بالطريقة المباشرة كما يلي:

$$V(X) = \sum_{i=1}^{k} P_i\,(X_i - E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

ب-بدلالة العزوم:

كما يحسب التباين بدلالة العزوم وفق العلاقة التالية:

$$V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = m_2 - m_1^2$$

حيث:

m_1: العزم من الدرجة الأولى ويحسب كما يلي:

$$m_1 = E(X) = \sum P_i X_i$$

m_2 : العزم من الدرجة الثانية ويحسب كما يلي:

$$m_2 = E(X^2) = \sum P_i X_i^2$$

ومنه $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{m_2 - m_1^2}$

4-2-2-أهم خصائص التباين:

- تباين العدد الثابت a يساوي الصفر، $V(a) = 0$؛
- إذا كان X متغير عشوائي و a عدد ثابت فإن: $V(aX) = a^2V(X)$
- إذا كان X و Y متغيرين عشوائيان فإن تباين المجموع او الفرق بينهما يساوي:

$$V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)$$

- إذا كان X متغير عشوائي و a و b عددان ثابتان فإن:

$$V(aX \pm b) = a^2V(X)$$

مثال(14): بالعودة إلى المثال السابق الخاص بالمتغير المنفصل أحسب:

-التباين $V(X)$ والانحراف المعياري $\sigma(X)$

- إذا كان Z متغير عشوائي، حيث $Z = 3X + 1$ أحسب $E(Z)$، $V(Z)$.

الحل:

X_i	1	2	3	4	5	6	**المجموع**
P_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	/
P_iX_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{21}{6} = 3.5$
$P_iX_i^2$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{9}{6}$	$\frac{16}{6}$	$\frac{25}{6}$	$\frac{36}{6}$	$\frac{91}{6}$
$(X_i - E(X))^2$	6.25	2.25	0.25	0.25	2.25	6.25	/
$P_i(X_i - E(X))^2$	1.04	0.3735	0.0415	0.0415	0.3735	1.04	2.91

حساب التباين $V(X)$:

الطريقة المباشرة:

$$V(X) = \sum_{i=1}^{k} P_i\,(X_i - E(X))^2$$

ومن الجدول نجد:

$$V(X) = \sum_{i=1}^{k} P_i\,(X_i - E(X))^2 = 2.91$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2.91} = 1.7$$

-بطريقة العزوم:

$$V(X) = m_2 - m_1^2$$

و

$$m_1 = E(X) = \sum P_iX_i = \frac{21}{6}$$

و

$$m_2 = \sum P_iX_i^2 = \frac{91}{6}$$

ومنه:

$$V(X) = m_2 - m_1^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{21}{6}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{441}{36} = \frac{546-441}{36} = \frac{105}{36} = 2.91$$

والانحراف المعياري $\sigma(X)$:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{m_2 - m_1^2} = \sqrt{2.91} = 1.7$$

- **حساب $E(Z)$**:

$$E(Z) = E(Z) = E(3X+1) = 3E(X) + 1 = 3(3.5) + 1 = 12.5$$

-**حساب $V(Z)$**:

$$V(Z) = V(3X+1) = 3^2 V(X) = 9(2.91) = 26.19$$

4-2-2-التباين والانحراف المعياري في حالة متغير عشوائي متصل:

يحسب التباين في حالة متغير عشوائي متصل بالعلاقة التالية:

$$V(X) = \int_{\Omega} \left(X_i - E(X)\right)^2 f(X)dx = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = m_2 - m_1^2$$

حيث:

$$m_2 = \int_{\Omega} X^2 f(X) d(x) \text{ و } m_1 = \int_{\Omega} Xf(X)d(x)$$

ملاحظة: خصائص التباين في المتغير المنفصل هي نفسها في المتغير المتصل.

مثال(15): بالعودة إلى المثال السابق والمتمثل في التوزيع الاحتمالي التالي:

$$\begin{cases} f(X) = \frac{1}{8} & X \in [0\ ,\ 8] \\ 0 & X \notin [0\ ,\ 8] \end{cases}$$

المطلوب:

-أحسب m_2

-أحسب $V(X)$، $\sigma(X)$

أ-بالطريقة المباشرة، ب-بدلالة العزوم.

الحل:

-حساب m_2 :

$$m_2 = E(X^2) = \int X^2 f(X)dx = \int_0^8 X^2 \frac{1}{8} = \left[\frac{X^3}{24}\right]_0^8 = \frac{512}{24} = 21.33$$

-حساب التباين $V(X)$:

أ-الطريقة المباشرة: علما أن $E(X) = 4$

$$V(X) = \int_0^8 \big(X - E(X)\big)^2 f(X)dx = \int_0^8 (X-4)^2 \frac{1}{8}dx = \int_0^8 (X^2 - 8X + 16)\frac{1}{8}dx =$$
$$\int_0^8 \left(\frac{X^2}{8}\right)dx - \int_0^8 (X)dx + \int_0^8 (2)dx = \left[\frac{X^3}{24}\right]_0^8 - \left[\frac{X^2}{2}\right]_0^8 + [2X]_0^8 = \frac{512}{24} - \frac{64}{2} + 16 = 5.33$$

ب-طريقة العزوم:

$$V(X) = m_2 - m_1^2 = 21.33 - 4^2 = 21.33 - 16 = 5.33$$

حساب الانحراف المعياري:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{5.33} = 2.31$$

تمرين: لتكن دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$f(X) = \frac{-X}{2} + 1$ المعرفة على المجال $X \in [0 - 2]$

المطلوب:

1) حدد نوع المتغير العشوائي X ثم أثبت أن الدالة فعلا دالة كثافة احتمالية.
2) أوجد دالة التوزيع الاحتمالية $F(X)$
3) أحسب الاحتمالات التالية: $P(0{,}5 < X < 2); P(X \leq 1)$
4) أحسب الأمل الرياضي والانحراف المعياري علما أن m_2 يساوي 0.6
5) أحسب كلا من:

(*$E(2X+1)$ (*، $V(2X+1)$

الحل:

1) نوع المتغير العشوائي: متصل وهذا لكون التوزيع الاحتمالي بدلالة دالة الكثافة الاحتمالية.

-اثبات أن $f(X)$ هي فعلا دالة كثافة احتمالية:

لدينا: $\int_0^2 f(X)dx = 1$

$$\int_0^2 \left(\frac{-X}{2}+1\right)dx = \int_0^2 \left(\frac{-X}{2}\right)dx + \int_0^1 1dx = \left[\frac{-X^2}{4}\right]_0^2 + [x]_0^2 = -1+2 = 1$$

وعليه فإن $f(X)$ هي فعلا دالة كثافة احتمالية.

2) ايجاد دالة التوزيع الاحتمالية $F(X)$:

$$X < 0 \qquad F(X) = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0$$

$$X \in [0,2]: F(X) = \int_{-\infty}^{X} \left(\frac{-1}{2}X+1\right)dx = \frac{-X^2}{4}+X$$

$$X > 2: F(X) = \int_{-\infty}^{X} 0dx = 1$$

3) حساب الاحتمالات:

$$P(X \leq 1) = F(1) = \frac{-1}{4}(1)^2 + 1 = 0{,}75$$

$$P(0{,}5 < X < 2) = P(X < 2) - P(X < 0{,}5)$$

$$= F(2) - F(0{,}5)$$

$$= 1 - (\frac{-1}{4}(0{,}5)^2 + 0{,}5)$$

$$= 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16} = 0{,}56$$

4) حساب الأمل الرياضي $E(X)$ و $\sigma(x)$:

$$E(X) = \int_0^2 Xf(X)dx$$

$$= \int_0^2 X\left(-\frac{1}{2}X+1\right)dx$$

$$= \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}X^2+X\right)dx$$

$$= \left[\frac{-X^3}{6}+\frac{X^2}{2}\right]_0^2$$

$$= -\frac{8}{6}+2 = \frac{2}{3} = 0{,}66$$

$$V(X) = m_2 - m_1^2 = 0{,}6 - (0{,}66)^2 = 0{,}16$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0{,}16} = 0{,}4$$

أ-حساب $\boldsymbol{E(2X+1)}$

$$E(2X+1) = E(2X) + E(1)$$
$$= 2E(X) + 1 = 2(0{,}66) + 1 = 2{,}32$$

ب-حساب $\boldsymbol{V(2X+1)}$

$$V(2X+1) = 2^2V(X) + V(1)$$
$$= 4V(X) + V(1) = 4(0{,}16) + 0 = 0{,}64$$

القوانين الاحتمالية للمتغير العشوائي المنفصل والمتصل

تمهيد:

بعد استعراض المفاهيم الأساسية المتعلقة بالمتغيرات العشوائية بنوعيها المنفصل والمتصل في الفصل السابق، والتطرق إلى توزيعاتها الاحتمالية باعتبارها دوالا رياضية تحدد احتمالات القيم الممكنة لهذه المتغيرات، إضافة إلى دراسة أهم مميزاتها العددية، يتبين أن الظواهر العشوائية، رغم ما تتسم به من عدم اليقين، لا تخضع للعشوائية المطلقة، بل تقع ضمن أطر وقوانين احتمالية يمكن نمذجتها وتحليلها بدقة. هذه التوزيعات (القوانين) الاحتمالية توفر اطارا نظريا يسمح بفهم آليات حدوث الظواهر العشوائية، من حيث توقيت وقوعها، والعوامل المؤثرة فيها، وكذا النتائج المحتملة المترتبة عنها. الأمر الذي يسمح ببناء نماذج تنبؤية تساعد على اتخاذ قرارات مبنية على أسس علمية، سواء من خلال الحد من الآثار السلبية لبعض الظواهر أو تعزيز الجوانب الإيجابية منها.

وانطلاقا من طبيعة المتغير العشوائي، تصنف التوزيعات الاحتمالية إلى صنفين رئيسيين: توزيعات تخص المتغيرات العشوائية المنفصلة، وأخرى تعنى بالمتغيرات العشوائية المتصلة، حيث يختلف أسلوب توصيف التوزيع الاحتمالي باختلاف طبيعة القيم التي يمكن أن يتخذها المتغير.

وفي هذا الإطار، سوف نستعرض في هذا الفصل مجموعة من أهم التوزيعات الاحتمالية الشائعة، لاسيما تلك المرتبطة بالمتغيرات العشوائية المنفصلة، مثل توزيع برنولي(Bernoulli) ، والتوزيع ثنائي الحدين (Binomial)، وتوزيع بواسون (Poisson)، وتوزيع فوق الهندسي Hypergeometric Distribution إلى جانب بعض التوزيعات الأساسية للمتغيرات العشوائية المتصلة، وعلى رأسها التوزيع الطبيعي والتوزيع الطبيعي المعياري، لما لها من أهمية بالغة في النمذجة الإحصائية والتطبيقات العملية.

1-التوزيعات(القوانين) الاحتمالية لمتغير عشوائي منفصل:

يعد الانتقال من دراسة الاحتمال لتحقق مختلف الحوادث إلى تحليل سلوك المتغيرات العشوائية، مرحلة أساسية في تعميق فهم الظواهر العشوائية. وفي هذا الإطار، تبرز أهمية القوانين الاحتمالية كأداة رياضية محورية تسمح بتحديد الكيفية التي تتوزع بها القيم الممكنة لمتغير عشوائي، من بينها التوزيعات(القوانين) الاحتمالية لمتغير عشوائي منفصل التي تكتسي أهمية كبيرة، لكونها لا تقتصر على تحديد احتمالات القيم المختلفة، بل تتيح كذلك دراسة الخصائص الكمية للمتغيرات العشوائية، مثل الأمل الرياضي والتباين، مما يسهم في تحليل الظواهر وتفسيرها والتنبؤ بسلوكها في المستقبل.

لهذا سوف يتم التطرق إلى تقديم عرض منهجي للقوانين الاحتمالية لمتغير عشوائي منفصل، من خلال تعريفها وتبيان خصائصها الأساسية، والتطرق إلى أبرز التوزيعات الاحتمالية التي يعتمد عليها في التطبيقات الإحصائية.

1-1-قانون بارنولي Bernoulli Distribution:

1-1-1-مفهوم قانون بارنولي:

يعرف هذا النوع من التجارب أيضا باسم تجارب برنولي(Bernoulli Trials) ، ويعد من أبسط النماذج في إطار التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المنفصلة، كونه يعتمد على تجربة عشوائية بسيطة جدا. وذلك لأنها لا تقبل إلا نتيجتين محتملتين فقط، هما: النجاح أو الفشل.

ومن الأمثلة على ذلك رمي قطعة نقود مرة واحدة، حيث يمكن أن تكون النتيجة إما صورة أو كتابة، أو سحب كرة، سحب طالب واحد، قطعة واحدة من إنتاج معين، حيث تكون النتيجة إما قطعة معيبة أو غير معيبة.

وبهذا يتبع المتغير العشوائي Xالمنفصل قانون بارنولي إذا كان يعبر عن تجربة عشوائية واحدة تحتوي على حدثين فقط، وهما متنافيين، فإذا افترضنا أن الحدث الأول هو A، فإن الحدث الثاني هو $\bar{A}$، فإذا كان وقوع الحدث A يمثل نجاح عندها يأخذ المتغير العشوائي X القيمة الواحد باحتمال P، فإن عدم وقوع الحدث A، أي وقوع $\bar{A}$يعتبر فشلا، فيأخذ المتغير العشوائي X القيمة صفر باحتمال q، حيث $q = 1 - P$.

فنقول أن المتغير العشوائي X يتبع قانون بارونولي ذا المعلمين $(1\ ,\ P)$ونرمز لذلك:

حيث: $$X \to B(1, P)$$

X: يمثل المتغير العشوائي في التجربة العشوائية ومرتبط بالنتيجة محل الاهتمام؛

B: يرمز إلى قانون بارنولي؛

1: يرمز إلى تكرار التجربة مرة واحدة؛

P: يمثل احتمال النجاح.

1-1-2-التوزيع الاحتمالي لقانون بارنولي:

وإذا كان X يتبع قانون بارنولي الذي يعبر عن تجربة بارنولي وهي تجربة عشوائية تكرر مرة واحدة، فإنه يأخذ قيمتين $X = 1$ إذا كانت الوحدة المسحوبة تتوفر فيها الصفة المدروسة واحتمالها P و $X = 0$ إذا كانت الوحدة المسحوبة لا تتوفر بها الصفة المدروسة واحتمالها q، بحيث $P + q = 1$

فيكون التوزيع الاحتمالي حينئذ كالتالي:

X	0	1	مجموع
$P(X = x)$	q	P	$P + q = 1$

مثال(01): نرمي قطعة نقد مرة واحدة بطريقة عشوائية، ليكن X متغير عشوائي يمثل عدد الصور المتحصل عليها، عين التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير وحدد قانونه الاحتمالي:

الحل:

$$x \in \Omega = [0,1]$$

X	0	1	مجموع
$P(X = x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

القانون الاحتمالي:

$$x \to B(1, \frac{1}{2})$$

1-1-3-المميزات العددية لقانون بارنولي:

وتتمثل أهم المميزات العددية للقانون بارنولي في:

أ-التوقع الرياضي: والذي يعطى بالعلاقة التالية:

$$E(X) = \sum P_i x_i = 0q + 1P = P$$

$$\boxed{E(X) = P}$$

مثال(02): احسب التوقع الرياضي $E(x)$ *للمثال السابق:*

$$E(x) = P = \frac{1}{2}$$

ب-التباين والانحراف المعياري:

$$V(X) = pq \quad ، \quad \sigma(X) = \sqrt{pq}$$

مثال(03): أحسب $V(x)$، $\sigma(x)$

$$V(X) = pq = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{pq} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

مثال(04): إذا علمنا أن نسبة النجاح لطلبة سنة أول جذع مشترك خلال السنة الماضية هي 40%نختار عشوائيا طالبا واحدا من هذا المجتمع، ليكن Xعدد الطلبة الناجحين في هذه التجربة.

المطلوب:

-ما هو القانون الاحتمالي لـ X؟

-اعرض التوزيع الاحتمالي لـX.

-أحسب $E(X)$،$V(X)$، $\sigma(X)$.

الحل:

القانون الاحتمالي لX:

$$X \in \Omega = [0,1]$$

$$X \to B(1,P)$$

$$X \to B(1\ ,0{,}4)$$

التوزيع لـ: $x = 1 \to P = 0{,}4$

$$X = 0 \to q = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$$

X	*0*	*1*	مجموع
$P(X = x)$	0,6	0,4	1

حساب: $E(X)$، $V(X)$، $\sigma(X)$

$$E(X) = p = 0{,}4$$

$$V(X) = pq = (0{,}4)(0{,}6) = 0{,}24$$

$$\sigma(X) = \sqrt{pq} = \sqrt{24} = 0{,}49$$

1-2-قانون ثنائي الحدين:Binomial Distribution

1-2-1-مفهومه:

يعد قانون ثنائي الحدين أحد أهم التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المنفصلة، حيث يستخدم لوصف عدد مرات حدوث "النجاح" في سلسلة من التجارب العشوائية المتكررة والمستقلة، والتي تعرف بتجارب برنولي، حيث تكون لكل تجربة نتيجتان فقط، نجاح أو فشل، مع ثبات احتمال النجاح في كل تجربة.

ومن الأمثلة على ذلك:

- إعطاء مريض نوع معين من الأدوية، لهما نتيجتان (استجابة الدواء، أو عدم استجابة)؛
- فحص عبوة بها نوع معين من الفاكهة، لها نتيجتان (الوحدة سليمة، أو معيبة)؛
- إلقاء قطعة نقد، لها نتيجتان (ظهور صورة، او كتابة)؛
- نتيجة طالب في الامتحان (نجاح، رسوب).
- استخدام مزارع برنامج معين للزراعة (يستخدم أو لا يستخدم).

فنقول عن المتغير العشوائي X أنه يتبع قانون ثنائي الحدين ذا المعلمين (n, P) إذا كان يعبر على مجموع n متغير عشوائي مستقل لبارنولي أي $X = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n$، بحيث كل متغير يتبع قانون بارنولي ذا المعلمين $(1, P)$.

$$x_1 \to B(1, P)$$

$$x_2 \to B(1, P)$$

$$x_3 \to B(1, P)$$

$$\vdots$$

$$x_n \to B(1, P)$$

ويتحقق هذا التوزيع عندما تتوفر الشروط التالية:

- أن يكون عدد التجارب مكررا n مرة؛
- أن تكون التجارب مستقلة عن بعضها البعض؛
- أن يكون لكل تجربة نتيجتان فقط: نجاح أو فشل؛
- أن يبقى احتمال النجاح P ثابتا في جميع التجارب، بينما يكون احتمال الفشل q.

فإذا كان المتغير العشوائي X يتبع قانون ثنائي الحدين ذا المعلمين (n, P)، فإنه يتم التعبير عن ذلك بالصيغة التالية:

$$X \rightsquigarrow B(n, P)$$

حيث:

X: يمثل المتغير العشوائي في التجربة ومرتبط بالنتيجة محل اهتمام الباحث؛

B: يمثل قانون ثنائي الحدين؛

n: يمثل عدد مرات تكرار التجربة؛

P: احتمال التجربة.

ملاحظة: مجموع n متغير عشوائي مستقل يعني تكرار تجربة بارنولي n مرة مع الارجاع.

عمليا قانون ثنائي الحدين يعني اجراء دراسة احصائية على عينة حجمها n وحدة (n كرية، n طالب، n مؤسسة...) شرط أن يتم سحب العينة مع الارجاع وحدة، فكل سحب يعبر عن تجربة بارنولي.

1-2-2-التوزيع الاحتمالي لقانون ثنائي الحدين:

وتتمثل في:

-تحديد مجال التعريف:

$$x \in \Omega = [0,1,2,3 \dots \dots \dots n]$$

وعموما $x \in \Omega = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]$

-حساب الاحتمالات: يتم حساب الاحتمالات في قانون ثنائي الحدين بالصيغة الرياضية التالية:

$$P(X = x) = C_n^x P^x q^{n-x} \quad ، \quad q = 1 - P$$

ويعبر عن التوزيع الاحتمالي في قانون ثنائي الحدين في الجدول التالي:

X	x_1	x_2	x_3	.....	x_n	مجموع
$P(X = x)$	$C_n^{x_1} P^{x_1} P^{n-x_1}$				$C_n^x P^x P^{n-x}$	1

ملاحظة: يمكن الاعتماد على جدول قانون ثنائي الحدين في حساب الاحتمالات.

1-2-3-التمثيل البياني:

يتم التمثيل البياني بواسطة الأعمدة البيانية.

ويتحدد شكل التمثيل البياني حسب قيمة P

-إذا كانت $P \approx 0.5$ نقول أن التوزيع متماثل.

- إذا كانت $P > 0.5$ نقول أن التوزيع ملتوي نحو اليسار والحالة الأكثر انتشار.

- إذا كانت $P < 0.5$ نقول أن التوزيع ملتوي نحو اليمين وهي الحالة النادرة.

1-2-4-المميزات العددية لقانون ثنائي الحدين:

وتتمثل أهم المميزات العددية لقانون ثنائي الحدين في:

أ-الأمل الرياضي: ويحسب بالعلاقة الرياضية التالية:

$X = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n$ بحيث $X \to B(1, P)$ و $E(X) = P$ و $V(X) = pq$

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + \cdots + E(X_n)$$
$$= P + P + P + \cdots + P = nP$$

$$E(X) = nP$$

ب-التباين: ويحسب كما يلي:

$$V(X) = V(X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) + \cdots + V(X_n)$$
$$= Pq + Pq + Pq + \cdots + Pq = nPq$$

$$V(X) = npq$$

ج-الانحراف المعياري: يحسب بالعلاقة التالية:

$$\sigma(x) = \sqrt{npq}$$

ملاحظة: ليكن $Z = X + Y$ بحيث:

$$X \to B(nX, P)$$

$$Y \to B(nY, P)$$

يكون القانون الاحتمالي لـ Z

$$Z \to B(nX + nY \ , \quad P)$$

$$E(Z) = E(X) + E(Y)$$

$$V(Z) = V(X) + V(Y)$$

مثال(05): إذا كان من المعلوم أن نسبة الشفاء من مرض معين باستخدام نوع معين من الأدوية هو 0.6 إذا تناول هذا الدواء 5 مصابين بهذا المرض.

فإذا عرف المتغير العشوائي X بأنه عدد الذين يستجيبون (حالات الشفاء) لهذا الدواء.

المطلوب:

-ما هو نوع المتغير العشوائي؟

- ما هو القانون الاحتمالي لـ Xمع التعليل.

-عين التوزيع الاحتمالي لـ X ومثله بيانيا.

-أحسب العدد المتوسط للذين يستجيبون للدواء (حالات الشفاء) والانحراف المعياري.

-ما هو احتمال أن يكون عدد حالات الشفاء مريض واحد على الأقل، مريضين على الأكثر؟

-حدد شكل التوزيع.

الحل:

X: عدد المرضى الذين يستجيبون للدواء أي عدد حالات الشفاء.

-**نوع المتغير العشوائي:** متغير عشوائي منفصل لأنه غير قابل للتجزئة.

-**القانون الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي:**

القانون الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي هو قانون ثنائي الحدين لأن السحب يتم مع الارجاع أي $X \rightsquigarrow B(n,P)$ حيث $P = 0.6$ و $n = 5$ أي أن:

$$X \rightsquigarrow B(5,0.6)$$

-**التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي:**

-**مجال التعريف:**

$$X \in \Omega = [0,1,2,3,4,5]$$

-**حساب الاحتمالات:**

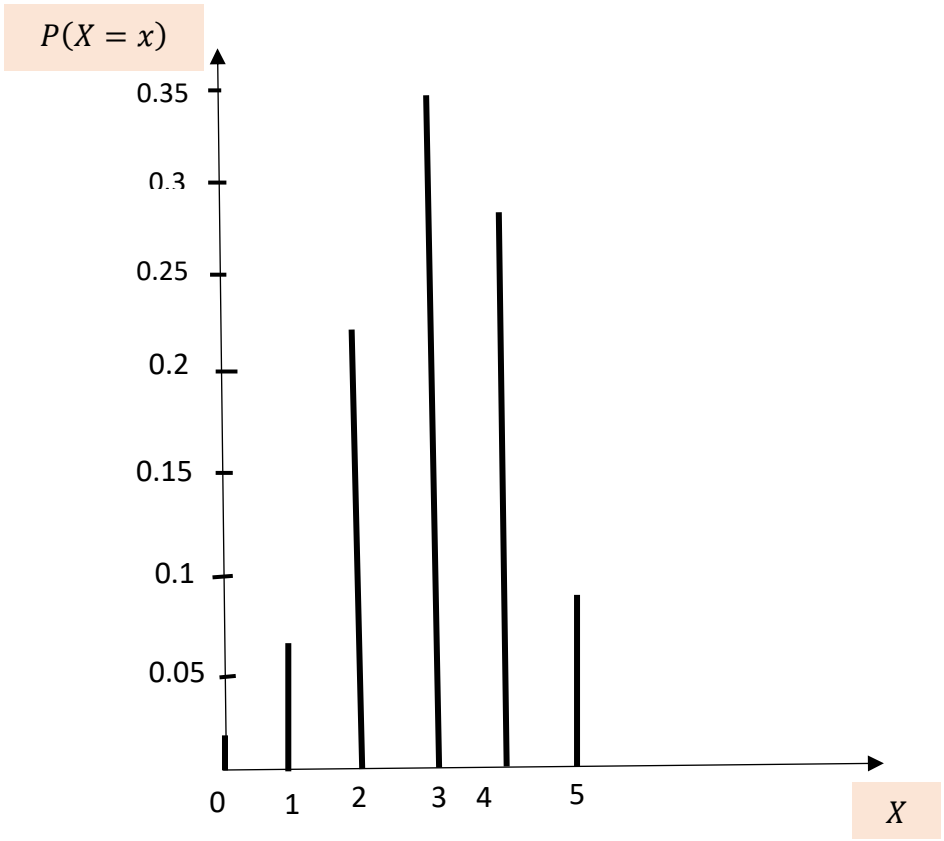
$$P(X = x) = C_n^x P^x q^{n-x} \qquad q = 1 - P = 1 - 0.6 = 0.4$$

$$P(X = 0) = C_5^0 (0,6)^0 (0,4)^{5-0} = 0.01$$
$$P(X = 1) = C_3^1 (0,6)^1 (0,4)^{5-1} = 0.06$$
$$P(X = 2) = C_5^2 (0,6)^2 (0,4)^{5-2} = 0.23$$
$$P(X = 3) = C_5^3 (0,6)^3 (0,4)^{5-3} = 0.35$$
$$P(X = 4) = C_5^4 (0,6)^4 (0,4)^{5-4} = 0.27$$
$$P(X = 5) = C_5^5 (0,6)^5 (0,4)^{5-5} = 0.08$$

ومنه جدول التوزيع الاحتمالي يكون كما يلي:

X	0	1	2	3	4	5	مجموع
$P(X=x)$	0.01	0.06	0.23	0.35	0.27	0.08	1

التمثيل البياني:



-حساب العدد المتوسط للذين يستجيبون للدواء (حالات الشفاء) والانحراف المعياري:

$$E(X) = nP = 5(0.6) = 3$$

$$\sigma(x) = \sqrt{npq} = \sqrt{3(0.6)(0.4)} = \sqrt{0.72} = 0.85$$

- احتمال أن يكون عدد حالات الشفاء مريض واحد على الأقل:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.01 = 0.99$$

- احتمال أن يكون عدد حالات الشفاء مريضين على الأكثر:

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0.01 + 0.06 + 0.23 = 0.3$$

-تحديد شكل التوزيع:

بما أن$P = 0.6$ أي $P > 0.5$فنقول أت التوزيع ملتوي نحو اليسار.

1-3-قانون فوق الهندسي: Hypergeometric Distribution

1-3-1-تعريفه:

يعرف القانون الاحتمالي فوق الهندسي بأنه توزيع احتمالي لمتغير عشوائي منفصل يوافق تكرار تجربة بارنولي n مرة دون ارجاع، ويستخدم لوصف عدد النجاحات في عينة مسحوبة من مجتمع محدود الحجم دون إرجاع، حيث يتم السحب من مجتمع يحتوي على عناصر مكونة من نوعين (نجاح/فشل).

بمعنى آخر، إذا كان لدينا مجتمع حجمه N يحتوي على K عنصرا تمثل "نجاحًا" و $N-K$عنصرا تمثل "فشلًا"، وتم سحب عينة حجمها nدون إرجاع، فإن المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد النجاحات في هذه العينة يتبع القانون فوق الهندسي.

فنقول أن المتغير العشوائي X يتبع قانون فوق الهندسي ذا المعالم N و n و P ونرمز له بالرمز:

$$X \rightsquigarrow H(N,n,P)$$

إذا كان X هو مجموع nمتغير عشوائي لبارنولي غير مستقل أي:$X = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n$ بحيث:

$$X_1 \rightsquigarrow B(1,P)$$

$$X_2 \rightsquigarrow B(1,P)$$

$$X_3 \rightsquigarrow B(1,P)$$

$$\vdots$$

$$X_n \rightsquigarrow B(1,P)$$

$X_1, X_2, X_3 \ldots . X_n$أحداث غير مستقلة يعني عمليا تكرار تجربة بارنوليn مرة بدون إرجاع.

ويتحقق هذا التوزيع عندما تتوفر الشروط التالية:

- التجربة العشوائية مكررة n مرة (نسحب عينة حجمهاn عنصر) وكل تجربة غير مستقلة عن الأخرى؛
- التجربة لها نتيجتين متنافيتين (النجاح او الفشل)؛
- مجتمع إحصائي يتكون من N عنصر وهو مقسم إلى:

N_1: عدد عناصر النجاح وN_2: عدد عناصر الفشل بحيث$N = N_1 + N_2$

1-3-2-التوزيع الاحتمالي لقانون فوق الهندسي:

ويتمثل التوزيع الاحتمالي لقانون فوق الهندسي في مجال التعريف لقيم المتغير العشوائي X، والاحتمالات الموافقة لكل قيمة من قيم المتغير العشوائي:

أ-مجال التعريف: بما أن قانون فوق الهندسي هو تكرار برنولي n مرة دون ارجاع أي الحوادث غير مستقلة، فإن مجال التعريف X هو:

$$x \in \Omega = [0,1,2,3 \dots \dots \dots n]$$

ب-الصيغة الرياضية لحساب الاحتمالات: يتم حساب الاحتمالات وفق قانون فوق الهندسي بالعلاقة الرياضية التالية:

$$\mathrm{P}(\mathrm{x} = x) = \frac{C_{N_1}^{x} \times C_{N_2}^{n-x}}{C_N^n} \quad \text{و} \quad N = N_1 + N_2$$

حيث:

N: الحجم الكلي للمجتمع؛

N_1: عدد عناصر النجاح أي عدد عناصر المجتمع التي تتوفر فيهم الصفة محل اهتمام الباحث؛

N_2: عدد عناصر الفشل أي عدد عناصر المجتمع التي لا تتوفر فيهم الصفة محل اهتمام الباحث؛

n: حجم العينة (عدد الكريات المسحوبة دون ارجاع)؛

x: تمثل القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X.

وعليه يكون جدول التوزيع الاحتمالي لقانون فوق الهندسي كما يلي:

X	x_1	x_2	x_3	.....	x_n	$\sum P(X=x)$
$P(X=x)$	$\frac{C_{N_1}^{x_1} \times C_{N_2}^{n-x_1}}{C_N^n}$				$\frac{C_{N_1}^{x_n} \times C_{N_2}^{n-x_n}}{C_N^n}$	1

1-3-3-تمثيله البياني :

يتم تمثيل التوزيع الاحتمالي لقانون فوق الهندسي بيانيا بواسطة أعمدة بيانية.

1-3-4-المميزات العددية لقانون فوق الهندسي:

تتمثل المميزات العددية لقانون فوق الهندسي في التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري:

أ-التوقع الرياضي: والذي يعطى بالعلاقة الرياضية التالية:

$$E(X) = nP$$

ب-التباين: يعطى بالصيغة التالية:

$$V(X) = npq\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

ج-الانحراف المعياري: يعطى بالعلاقة الرياضية التالية:

$$\sigma(x) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{npq\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$$

ملاحظة : $\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ يسمى معامل الشمولية وله مدلول إحصائي ونميز حالتين:

- $\lim_{n\to N} \frac{N-n}{N-1} \longrightarrow 0 \Rightarrow V(X) = 0$

وتعني هذه الحالة أنه كلما زاد حجم العينة n انخفض التباين $V(X)$ ومن ثم الانحراف المعياري $\sigma(x)$ يقل التشتت إلى أن يصبح $N = n$ عندها يكون $V(X) = 0$ وينعدم التشتت كليا وتكون النتائج دقيقة 100% (دراسة شاملة).

- $\lim_{N\to\infty} \frac{N-n}{N-1} \longrightarrow 1 \Rightarrow V(X) = npq$

وتعني هذه العبارة أنه كلما كان حجم المجتمع N كبيرا أو غير محدود تكون حجم العينة n صغيرا جدا بالنسبة لـ N، في هذه الحالة يكون التباين وفق قانون ثنائي الحدين هو نفسه التباين وفق قانون فوق الهندسي أي أن السحب بالإرجاع أو بدون ارجاع لا يؤثر في النتائج.

مثال(06): لدينا نادي يتشكل من 10 أعضاء 6 رجال و4 نساء، نريد أن نختار عشوائيا 3 أفراد دون ارجاع، ليكن X عدد النساء من بين 3 أشخاص الذين تم اختيارهم.

المطلوب:

-ما هو القانون الاحتمالي لـ X مع التعليل.

-عين التوزيع الاحتمالي لـ X وهل هو فعلا توزيع احتمالي.

-أحسب العدد المتوسط للنساء والانحراف المعياري.

ما هو احتمال أن يكون عدد النساء من بين 3 أعضاء الذين تم اختيارهم يساوي 0، أقل من 3، يساوي أو يفوق 2 محصورين بين 2 و3.

الحل:

-تعيين القانون الاحتمالي :

-بما أن السحب يتم بدون ارجاع، فإن Xيتبع قانون فوق الهندسي:

$$X \rightsquigarrow H(N,n,P)$$

$$N = 10 \quad ، \quad n = 3 \quad ، \quad N_1 = 4 \quad ، \quad N_2 = 6 \quad ، \quad P = \frac{N_1}{N} = \frac{4}{10} = 0{,}4 \text{،}$$

$$q = 1 - P = 1 - 0.4 = 0.6$$

$$X \rightsquigarrow H(10{,}3{,}0.4)$$

-التوزيع الاحتمالي لـ X :

-مجال التعريف:

$$x \in \Omega = [0{,}1{,}2{,}3]$$

-حساب الاحتمالات:

$$\mathrm{P}(\mathrm{x} = x) = \frac{C_{N_1}^{x} \times C_{N_2}^{n-x}}{C_N^n}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{x} = 0) = \frac{C_4^0 \times C_6^{3-0}}{C_{10}^3} = \frac{20}{120}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{x} = 1) = \frac{C_n^1 \times C_6^{3-1}}{C_{10}^3} = \frac{60}{120}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{x} = 2) = \frac{C_n^2 \times C_6^{3-2}}{C_{10}^3} = \frac{36}{120}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{x} = 3) = \frac{C_4^3 \times C_6^{3-3}}{C_{10}^3} = \frac{4}{120}$$

X	0	1	2	3	Σ
$\mathrm{P}(X = \mathrm{x})$	$\frac{20}{120}$	$\frac{60}{120}$	$\frac{36}{120}$	$\frac{4}{120}$	1

بما أن مجموع الاحتمالات يساوي الواحد أي:

$$\sum P_i = \frac{20 + 60 + 36 + 4}{120} = \frac{120}{120} = 1$$

فنقول أن التوزيع هو فعلا توزيع احتمالي.

-حساب العدد المتوسط للنساء والانحراف المعياري:

$$E(X) = nP = 3(0.4) = 1.2$$

-التباين:

$$V(X) = npq\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = 3(0.4)(0.6)\left(\frac{10-3}{10-1}\right) = 0.56$$

-الانحراف المعياري:

$$\sigma(x) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.56} = 0.74$$

1-4-قانون بواسون Poisson Distribution:

1-4-1-مفهومه:

يعتبر توزيع بواسون من التوزيعات الاحتمالية المنفصلة الهامة، التي تعبر عن الكثير من الظواهر في الحياة العملية، حيث يستخدم للتعبير عن عدد مرات حدوث ظاهرة معينة في فترة زمنية محددة أو مساحة محددة أو طول محدد، على أن تتصف هذه الأحداث بالندرة والاستقلالية، لهذا يدعى بقانون الظواهر النادرة أو قانون الاحتمالات الضعيفة ومن هذه الظواهر على سبيل المثال:

-عدد الأخطاء المطبعية في كتاب معين، حيث تعتبر هذه الأخطاء نادرة إذا ما تمت مقارنتها بعدد الكلمات الموجودة في الكتاب؛

-عدد الحوادث التي تقع في إحدى الطرق السريعة في اليوم، حيث تعتبر هذه الحوادث نادرة إذا ما تمت مقارنتها بعدد السيارات التي تسلك هذه الطرق في اليوم؛

-عدد المرضى الذين يقبلون على عيادة أحد الأطباء في اليوم؛

-عدد العيوب الموجودة في ثوب القماش؛

-عدد الركاب الذين يصلون المحطة في الساعة؛

-عدد العيوب الموجودة في كيلومتر من قضبان ميترو الأنفاق ..... الخ

فنقول ان المتغير العشوائي X يتبع قانون بواسون ذا المعلمة λ ونرمز لذلك بالرمز:

$$X \rightsquigarrow P(\lambda)$$

حيث:

λ: هي متوسط عدد مرات النجاح في وحدة الزمن.

1-4-2-التوزيع الاحتمالي لقانون بواسون:

ويتمثل التوزيع الاحتمالي لقانون بواسون في مجال التعريف لقيم المتغير العشوائي X، والاحتمالات الموافقة لكل قيمة من قيم المتغير العشوائي:

أ-مجال التعريف: إذا كان المتغير العشوائي Xيتبع قانون بواسون$P(\lambda)$ $X \rightsquigarrow$، فإن:

$$x \in \Omega_X = [0,1,2,3 \dots \dots \dots X_{max}]$$

حيث:

X_{max}: وهي أقصى قيمة لـ Xوالتي عندها دالة التوزيع الاحتمالية تساوي الواحد أي $F(\text{Xmax}) = 1$

وهذه القيم تتحدد حسب قيمةλ.

ب-حساب الاحتمالات: يتم حساب الاحتمالات وفق قانون بواسون بالعلاقة الرياضية التالية:

$$\text{P}(\text{X} = x) = e^{-\lambda}.\frac{\lambda^x}{x!}$$

حيث:

λ: يمثل عدد حقيقي موجب أي أن$\lambda \geq 0$، وهو يعبر عن العدد المتوسط لحدوث الظاهرة في فترة زمنية معينة؛

e: العدد النيبيري والذي يساوي $e = 2.718$

x: قيم المتغير العشوائيX.

ومنه يكون جدول التوزيع الاحتمالي لقانون بواسون كما يلي:

X	x_1	x_2	x_3	.....	x_n	$\sum P(X = x)$
$P(X = x)$	$e^{-\lambda}.\frac{\lambda^{x_1}}{x_1!}$				$e^{-\lambda}.\frac{\lambda^{x_n}}{x_n!}$	1

1-4-3-التمثيل البياني لقانون بواسون:

يتم التمثيل البياني للتوزيع الاحتمالي لقانون بواسون عن طريق أعمدة بيانية.

1-4-4-المميزات العددية لقانون بواسون:

تتمثل أهم المميزات العددية لقانون بواسون في التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري:

أ-التوقع الرياضي: والذي يعطى بالعلاقة الرياضية التالية:

$$E(X) = \lambda$$

ب-التباين: يعطى بالصيغة التالية:

$$V(X) = \lambda$$

ج-الانحراف المعياري: يعطى بالعلاقة الرياضية التالية:

$$\sigma(x) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\lambda}$$

ملاحظة(01):

قانون بواسون هو القانون المنفصل الوحيد الذي يتساوى فيه التوقع الرياضي والتباين أي أن:

$$E(X) = V(X) = \lambda$$

ملاحظة(02):

يتم حساب الاحتمالات وفق قانون بواسون بطريقتين:

الطريقة الأولى: وهي استخدام القانون المعطى سابقا $\mathrm{P(X} = x) = e^{-\lambda}.\frac{\lambda^x}{x!}$

الطريقة الثانية: وهي الطريقة التي يتم فيها استخدام جدول بواسون والذي يحتوي دالة التوزيع الاحتمالية$F(X) = P(X \leq x)$ وعبارة عن دالة تراكمية تجميعية للاحتمالات، وحتى يتم استخراج الاحتمال من الجدول فإنه يتم عملية الطرح للقيمة من القيمة السابقة أي أن:

$$P(X = a) = F(a) - F(a-1)$$

مثال(07): تفيد إحصائيات مصالح الشرطة في مدينة سطيف أنه يقع 04 حوادث مرور سنويا في المدخل الغربي للمدينة، بعد تحليل النتائج الخاصة بهذه الظاهرة على مدى سنة ماضية تبين أن هذه الظاهرة تتبع قنون بواسون.

المطلوب:

- حدد المتغير العشوائي في هاته المسألة.

- ما هو قانونه الاحتمالي.

-عين التوزيع الاحتمالي.

- احسب العدد المتوسط لحوادث المرور سنويا بواسطة القانون وبواسطة التوزيع الاحتمالي.

-أحسب التباين والانحراف المعياري.

-ما هو أقصى عدد ممكن لحوادث المرور سنويا.

-ما هو احتمال أن يقع في هدا لمكان أكثر من 04 حوادث مرور، أقّل من 10 حوادث، يقع 08 حوادث مرور.

الحل:

-**المتغير لعشوائي**: عدد حوادث لمرور التي تقع في المدخل الغربي لمدينة سطيف سنويا.

- **القانون الاحتمالي**: قانون بواسون Poisson أي $X \rightsquigarrow P(4)$

-**تعيين التوزيع الاحتمالي:**

أ-مجال التعريف:

عند $\lambda = 4$ ومن جدول توزيع بواسون يكون مجال التعريف $X \in [0,1,2,3,4 \ldots \ldots \ldots 14]$

-**حساب الاحتمالات**: كما سبق وذكرنا يمكن حسابها بطريقتين:

باستخدام القانون$\mathrm{P}(\mathrm{X} = x) = e^{-\lambda}.\frac{\lambda^x}{x!}$أو من جدول بواسون مباشرة.

مثلا$\mathrm{P}(\mathrm{X} = 0) = e^{-4}.\frac{4^0}{0!} = 0.0183$ أو من الجدول $\mathrm{P}(\mathrm{X} = 0) = F(0) = 0.0183$

$\mathrm{P}(\mathrm{X} = 1) = e^{-4}.\frac{4^1}{1!} = 0.0733$ أو من جدول بواسون:

$\mathrm{P}(\mathrm{X} = 1) = F(1) - F(0) = 0.0916 - 0.0183 = 0.0733$

وهكذا بنفس الطريقة مع بقية القيم.

ليكون جدول التوزيع الاحتمالي لقانون بواسون عند$\lambda = 4$:

X	0	1	2	3 14	$\sum P(X = x_i)$
$P(X = x_i)$	0.0183	0.0733	.....	0.1954.....0.0001	1
$P_i x_i$	**0**	**0.0733**	.....	**0.5862.....0.0014**	**4**

-حساب العدد المتوسط لحوادث المرور سنويا:

أ-من التوزيع الاحتمالي:

$$E(X) = \sum P_i x_i = 4$$

ب-بواسطة القانون:

$$E(X) = \lambda = 4$$

الشرح: يقع في المتوسط 4 حوادث مرور سنويا في المدخل الغربي لمدينة سطيف.

-حساب التباين والانحراف المعياري:

-التباين:

$$V(X) = \lambda = 4$$

-الانحراف المعياري:

$$\sigma(x) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\lambda} = \sqrt{4} = 2$$

- أقصى عدد ممكن لحوادث المرور سنويا:

من جدول بواسون ومن أجل $\lambda = 4$ يكون $X_{max} = 14$

-حساب الاحتمالات التالية:

❖ $P(X = 8) = 0.0298 \approx 0.03 = \frac{3}{100}$

الشرح: لو تتبعنا الظاهرة على مدار 100 سنة لوجدنا 3 سنوات تحدث فيها 8 حوادث مرور سنويا.

❖ $P(X > 4) = 1 - (X \leq 4) = 1 - F(4) = 1 - 0.6288 = 0.3712$

❖ $P(X < 10) = F(10) = 0.9972$

2-التقريب بين التوزيعات الاحتمالية لمتغير عشوائي منفصل:

نقصد بالتقريب بين التوزيعات الاحتمالية لمتغير عشوائي منفصل هو استبدال توزيع احتمالي بتوزيع احتمالي آخر يسمح بتسهيل الحساب، مع إعطاء نتائج قريبة جدا من النتائج الحقيقية للتوزيع الأصلي، وهذا تحت شروط معينة، أو بمعنى آخر أنه في بعض الحالات يكون التوزيع الأصلي معقدا في الحساب، خاصة عندما يكون حجم العينة كبيرا. لذلك يتم تقريبه بتوزيع آخر لتسهيل العمليات الحسابية دون فقدان دقة كبيرة.

2-1-التقريب بين قانون فوق الهندسي وقانون ثنائي الحدين:

يتم تقريب قانون فوق الهندسي إلى قانون ثنائي الحدين، إذا كان حجم العينة صغير جدا مقارنة بحجم المجتمع فيؤول معامل الشمولية$\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ إلى الواحد، عندها يكون السحب بدون إرجاع هو نفسه السحب مع الارجاع، وتكون قيمة التباين في قانون فوق الهندسي تساوي قيمة التباين في قانون ثنائي الحدين هذا من الناحية النظرية، اما من الناحية التطبيقية حتى يتم تقريب قانون فوق الهندسي إلى قانون ثنائي الحدين يجب توفر شرط$0.05 \leq \frac{n}{N}$، فنقول أن Xمتغير عشوائي يتبع قانون فوق الهندسي$X \rightsquigarrow H(N,n,P)$ ويمكن تقريبه إلى قانون ثنائي الحدين، إذا توفر الشرط التالي:

$$\frac{n}{N} \leq 0.05$$

حيث:

-القانون الأصلي: $X \rightsquigarrow H(N,n,P)$

$$x \in \Omega = [0,1,2,3 \dots \dots \dots n]$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{x} = x) = \frac{C_{N_1}^{x} \times C_{N_2}^{n-x}}{C_N^n}$$

$$E(X) = nP$$

$$V(X) = npq\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

-القانون المقرب إليه:$X \rightsquigarrow H(N,n,P) \rightarrow X \rightsquigarrow B(n\ ,P)$

حيث nصغيرة جدا مقارنة بحجم المجتمع Nوتحقق الشرط $\frac{n}{N}.100 \leq 5\%$

ونكتب$\mathrm{P}(\mathrm{x} = x) = \frac{C_{N_1}^{x} \times C_{N_2}^{n-x}}{C_N^n} \rightarrow C_n^x P^x q^{n-x}$

فيكون $E(X) = nP$ و $V(X) = npq$لأن $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{N-n}{N-1}\right) \rightarrow 1$

مثال(08): في مصنع لإنتاج المصابيح الكهربائية، يتم إنتاج 500 مصباح يوميا من بينها 20مصباح معيب (غير صالح)، قام قسم الجودة بسحب عينة حجمها 10 مصابيح بدون إرجاع للفحص.

ليكن X عدد المصابيح المعيبة في العينة.

المطلوب:

1-ما هو القانون الاحتمالي للمتغير X؟

2-ما هو القانون الاحتمالي الذي يمكن أن نقرب إليه؟

3-أحسب التوقع الرياضي والانحراف المعياري باستعمال القانونين.

الحل:

1-القانون الاحتمالي الأصلي للمتغير العشوائي هو: قانون فوق الهندسي لأن السحب بدون إرجاع، أي أن:

$X \rightsquigarrow H(N,n,P)$ أي $X \rightsquigarrow H(500,10,0.04)$ حيث $P = \frac{20}{500} = 0.04$

2-نلاحظ أن حجم العينة $n = 10$ صغير جدا مقارنة مع حجم المجتمع $N = 500$ كما نلاحظ أن الشرط $\frac{10}{500} = 0.02 \leq 0.05$ محقق ومنه يمكن تقريب قانون فوق الهندسي إلى قانون ثنائي الحدين ويصبح المتغير العشوائي X يخضع لقانون ثنائي الحدين أي:

$$X \rightsquigarrow H(N,n,P) \rightarrow X \rightsquigarrow B(n,P)$$

$$X \rightsquigarrow H(500,10,0.04) \rightarrow X \rightsquigarrow B(10,0.04)$$

3-حساب التوقع الرياضي والانحراف المعياري:

-حساب التوقع الرياضي باستعمال قانون فوق الهندسي:

$$E(X) = nP = 10 \times 0.04 = 0.4$$

-حساب التوقع الرياضي باستعمال قانون ثنائي الحدين:

$$E(X) = nP = 10 \times 0.04 = 0.4$$

-حساب الانحراف المعياري باستعمال قانون فوق الهندسي:

$$V(X) = npq\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = 10 \times 0.04 \times 0.96\left(\frac{500-10}{500-1}\right) = 0.377$$

$$\sigma(x) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.377} = 0.614$$

-حساب الانحراف المعياري باستعمال قانون ثنائي الحدين:

$$V(X) = npq = 10 \times 0.04 \times 0.96 = 0.384$$

$$\sigma(x) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.384} = 0.619$$

ومنه فالنتائج متقاربة جدا.

2-2-التقريب بين قانون ثنائي الحدين وقانون بواسون:

نقول عن المتغير العشوائي X أنه يتبع قانون ثنائي الحدين ويتم تقريبه لقانون بواسون، إذا كان حجم العينة كبير والاحتمال P ضعيف أي أن الظاهرة نادرة، عندها يكون جداء $n.P$ مساويا لمتوسط النجاحات λ.

ويتم هذا التقريب تحت الشروط التالية:

حجم العينة كبير $n \geq 50$ والاحتمال P ضعيف أي $P < 0.1$ فيكون $n.P \leq 5$

وانطلاقا من هذه الشروط يمكن تحويل قانون ثنائي الحدين إلى قانون بواسون ويكتب:

$$P(X = x) = C_n^x P^x q^{n-x} \cong e^{-\lambda}.\frac{\lambda^x}{x!}$$ ، حيث $np = \lambda$

مثال(09): في إطار تحسين جودة الإنتاج الزراعي يقوم أحد الفلاحين في مزرعة الواحة الخضراء، المتخصصة في زراعة نبات الطماطم، بمتابعة الحالة الصحية لنباتاته بشكل دوري.

خلال موسم معين، لاحظ الفلاح ظهور مرض نادر يصيب بعض النباتات بشكل عشوائي، وقد قدر احتمال إصابة النبتة الواحدة بهذا المرض بـ$P = 0.001$، ولأغراض المراقبة قرر الفلاح فحص عينة عشوائية مكونة من $n = 2500$ نبتة من مجموع نباتات المزرعة، مع افتراض أن إصابة كل نبتة مستقلة عن الأخرى.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد النباتات المصابة في هذه العينة.

1-حدد التوزيع الاحتمالي الدقيق للمتغير العشوائي X مع تبرير ذلك؟

2-أحسب احتمال وجود نبتة واحدة مصابة؟

3-أحسب احتمال وجود أكثر من نبتة واحدة مصابة؟

4-أحسب احتمال وجود ما بين 0 و3 نباتات مصابة؟

وذلك باستعمال قانون ثنائي الحدين وباستعمال قانون بواسون كتقريب لقانون ثنائي الحدين، قارن النتائج.

5-أحسب التوقع الرياضي والانحراف المعياري ماذا تلاحظ؟

الحل:

1-تحديد التوزيع الاحتمالي الدقيق للمتغير العشوائي X مع تبرير ذلك

لدينا $n = 2500$ ، $P = 0.001$ ، افتراض أن إصابة كل نبتة مستقلة عن الأخرى أي استقلالية الحوادث وبالتالي القانون الاحتمالي الأصلي للمتغير العشوائي هو قانون ثنائي الحدين أي:

$$X \rightsquigarrow B(n\,,P)$$

$$X \rightsquigarrow B(2500\,,0.001)$$

$$X \in \Omega = [0,1,2,3,4,5]$$

نلاحظ من خلال معطيات المثال أن حجم العينة كبير $n = 2500$ والاحتمال ضعيف $P = 0.001$ و$n.P = 2500 \times 0.001 = 2.5 \leq 5$ وبتحقق شرط التقريب يمكن تقريب قانون ثنائي الحدين إلى قانون بواسون فيصبح:

$$X \rightsquigarrow P(\lambda) \quad , \quad n.P = \lambda = 2.5 \quad \rightarrow X \rightsquigarrow P(2.5)$$

$$X \in \Omega = [0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11]$$

2-حساب احتمال وجود نبتة واحدة مصابة:

- **باستعمال قانون ثنائي الحدين:**

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=1) = C_n^x P^x q^{n-x} = C_{2500}^1 0.001^1 0.999^{2500-1}$$
$$= 2500 \times 0.001 \times 0.999^{2499} = 2.5 \times 0.0822 = \mathbf{0.2055}$$

- **باستعمال قانون بواسون:**

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=1) = F(1) - F(0) = 0.2873 - 0.0821 = \mathbf{0.2052}$$

3-حساب احتمال وجود أكثر من نبتة واحدة مصابة:

- **باستعمال قانون ثنائي الحدين:**

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}>1) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 1) = 1 - [\mathrm{P}(\mathrm{X}=0) + \mathrm{P}(\mathrm{X}=1)]$$

نحسب $\mathrm{P}(\mathrm{X}=0)$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=0) = C_n^x P^x q^{n-x} = C_{2500}^0 0.001^0 0.999^{2500-0} = 1 \times 0.001 \times 0.999^{2499}$$
$$= 1 \times 1 \times 0.082 = 0.082$$

إذن:

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}>1) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 1) = 1 - [0.082 + 0.2052] = 1 - 0.2872 = \mathbf{0.7128}$$

- **باستعمال قانون بواسون:**

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}>1) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 1) = 1 - F(1) = 1 - 0.2873 = \mathbf{0.7127}$$

4-حساب احتمال وجود ما بين 0 و3 نباتات مصابة:

- **باستعمال قانون ثنائي الحدين:**

$$\mathrm{P}(0 \leq \mathrm{X} \leq 3) = [\mathrm{P}(\mathrm{X}=0) + \mathrm{P}(\mathrm{X}=1) + \mathrm{P}(\mathrm{X}=2) + \mathrm{P}(\mathrm{X}=3)]$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=0) = 0.082$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=1) = 0.2055$$

نحسب $\mathrm{P}(\mathrm{X}=2)$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=2) = C_{2500}^2 0.001^2 0.999^{2500-2} = 3.12375 \times 0.0821 = 0.256$$

$$P(X = 3) = C_{2500}^{3} 0.001^{3} 0.999^{2500-3} = 2.6 \times 0.0822 = 0.2138$$
$$P(0 \leq X \leq 3) = 0.082 + 0.2055 + 0.256 + 0.2138 = 0.7573$$

- **باستعمال قانون بواسون:**

باستعمال جدول بواسون

$$P(0 \leq X \leq 3) = P(X \leq 3) = F(3) = 0.7576$$

نلاحظ من خلال حساب الاحتمالات أن كل النتائج متقاربة جدا، وبالتالي لتسهيل الحساب يكون من الأفضل التقريب لقانون بواسون.

5-حساب التوقع الرياضي والانحراف المعياري:

- **باستعمال قانون ثنائي الحدين:**

$$E(X) = nP = 2500 \times 0.001 = 2.5$$
$$V(X) = npq = 2500 \times 0.001 \times 0.999 = 2.4975 \approx 2.5$$
$$\sigma(x) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2.4975} = 1.58$$

- **باستعمال قانون بواسون:**

$$E(X) = V(X) = 2.5$$
$$\sigma(x) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2.5} = 1.58$$

نلاحظ أن $E(X)$ يساوي التباين $V(X)$ والنتائج متقاربة جدا في القانونين وهذا يعني أن في ظل توفر شرط التقريب فإن قانون بواسون مناسب للتقريب من قانون ثنائي الحدين.

3-القوانين الاحتمالية لمتغير عشوائي متصل:

تعتبر التوزيعات الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل أداة هامة لوصف سلوك هذا النوع من المتغيرات، التي تأخذ قيما من خلال مجالات أو فترات، فيتم التعبير عن احتمالاتها باستخدام دالة الكثافة الاحتمالية. التي تستخدم في تحديد كيفية توزيع القيم الممكنة للمتغير، وتحليل خصائصه الأساسية مثل الأمل الرياضي والتباين.

لهذا فإن أهمية هذه التوزيعات تكمن في قدرتها على تحليل العديد من الظواهر الواقعية التي تتسم بالاستمرارية، مثل الزمن، والمسافة، ودرجات الحرارة، وغيرها من الظواهر القابلة للقياس على نحو متصل، مما يجعلها ذات دور محوري في التحليل الإحصائي والتطبيقات العملية.

وفي هذا الإطار توجد العديد من التوزيعات الاحتمالية وأهمها التوزيع الطبيعي العام والتوزيع الطبيعي المعياري.

3-1-القانون الطبيعي العام:

3-1-1-تعريفه: يعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل، وذلك لاستخدامه في النواحي التطبيقية منها الاستدلال الاحصائي، التقدير، اختبار الفروض، حيث أن معظم الظواهر تخضع للتوزيع الطبيعي، كما أن التوزيعات الاحتمالية الأخرى سواء المنفصلة أو المتصلة تؤول إلى التوزيع الطبيعي عند حجم معين للعينة.

ونقول أن Xمتغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي ذو المعلمتينm وσوالذي نعبر عنه رياضيا كما يلي:

$$X \rightsquigarrow N(m\ ,\sigma)$$

حيث:

m: المتوسط الحسابي للمتغير العشوائي؛

σ: الانحراف المعياري للمتغير العشوائي

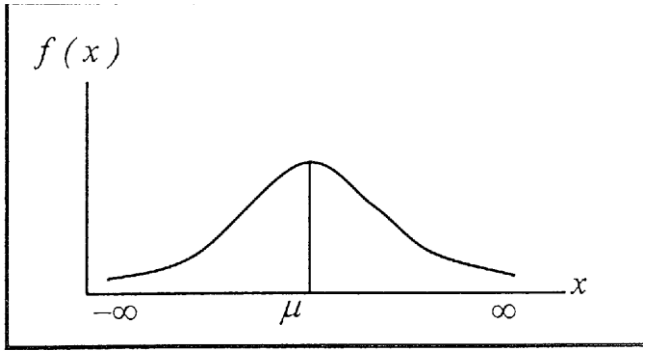
إذا كان:

أ-**مجال التعريف:** $X \in\ ]-\infty\ ,+\infty[$

ب-دالة الكثافة الاحتمالية: وتتمثل صيغتها الرياضية كما يلي:

$$f(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-m}{\sigma}\right]^2}$$

3-1-2-التمثيل البياني: يمثل التوزيع الطبيعي بمنحنى متماثل ويأخذ الشكل التالي:



3-1-3-خصائص القانون الطبيعي: من خلال التمثيل البياني يتبين أن التوزيع الطبيعي يتميز بما يلي:

-أنه توزيع متماثل (50% من المساحة على يمينm و50% من المساحة على يسارm).

-كلا من المتوسط والوسيط والمنوال في التوزيع الطبيعي يأخذ قيمة متساوية؛

- تعتمد دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي $X \rightsquigarrow N(m\ ,\sigma)$على معلمتي التوزيع mالذي يحدد موضع التوزيع والانحراف المعياري σالذي يحدد شكل وتشتت التوزيع؛

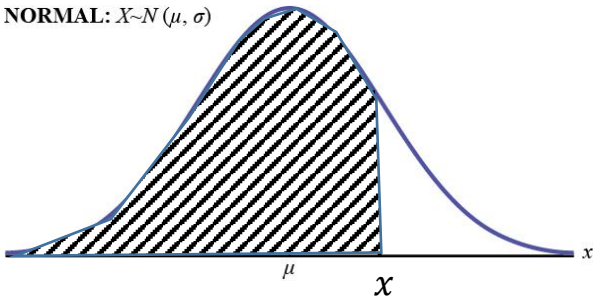
-المساحة الكلية تحت منحنى دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي تساوي الواحد؛

-أنه توزيع متناظر حول متوسط التوزيع m.

3-1-4-حساب الاحتمالات بواسطة القانون الطبيعي:

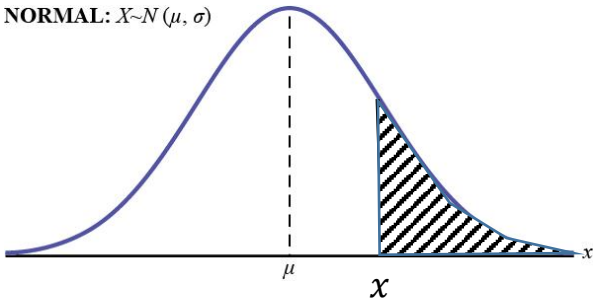
بما ان المتغير العشوائي X متصل و $f(X)$ دالة الكثافة الاحتمالية معلومة، يتم حساب الاحتمالات بواسطة التكامل ، ونميز ثلاث حالات:

الحالة الأولى: $P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(X)dx$ وتمثيلها البياني يكون كما يلي:



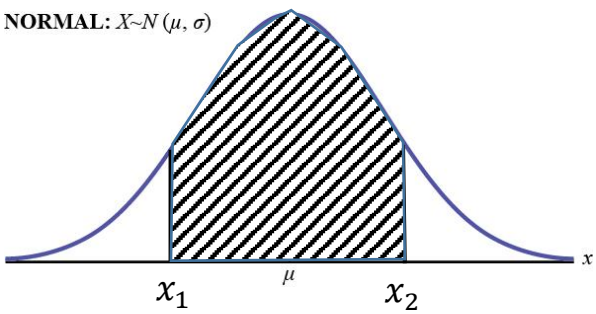
الحالة الثانية: $P(X > x) = \int_{x}^{+\infty} f(X)dx$ وتمثيلها البياني يكون كما يلي:

$$P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - \int_{-\infty}^{x} f(X)dx$$



الحالة الثالثة: $P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(X)dx$ وتمثيلها البياني يكون كما يلي:

$$P(x_1 < X < x_2) = P(X < x_2) - P(X < x_1) = \int_{-\infty}^{x_2} f(X)dx - \int_{-\infty}^{x_1} f(X)dx$$



3-1-5-دالة التوزيع الاحتمالية: والتي تمثل تكامل دالة الكثافة الاحتمالية كما يلي:

$$F(X) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

3-1-6-المميزات العددية للقانون الطبيعي: والمتمثلة في:

-التوقع الرياضي: والذي يعطى بالعلاقة التالية:

$$E(X) = m$$

-التباين: والذي يحسب بالصيغة الرياضية التالية:

$$V(X) = \sigma^2$$

-الانحراف المعياري: الذي هو الجذر التربيعي للتباين ويحب كالتالي:

$$\sigma(x) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\sigma^2} = \sigma$$

ملاحظة هامة: يعتبر التوزيع الطبيعي والمعرف بكل مميزاته المذكورة أعلاه مجال التعريف، الشكل البياني، دالة الكثافة الاحتمالية، من التوزيعات التي يصعب فيها حساب الاحتمالات نظرا للشكل المعقد والصعب لدالة الكثافة الاحتمالية، إذ يصعب تحديد دالتهما الأصلية، لهذا تم إجراء تحويلات رياضية بسيطة بهدف تبسيط دالة الكثافة الاحتمالية، للحصول على نفس الاحتمالات، ويصبح التوزيع توزيع طبيعي معياري.

3-2-القانون الطبيعي المعياري:

3-2-1-مفهومه:

هو توزيع احتمالي طبيعي يستنتج من التوزيع الطبيعي الأصلي$X \rightsquigarrow N(m\ ,\sigma)$ وذلك بإجراء التحويل الرياضي البسيط التالي:

$Z = \frac{x-m}{\sigma}$، حيث Zمتغير عشوائي متصل تابع لـ Xومجال تعريفه هو$]-\infty\ ,+\infty[$ $z \in$، وهذا التحويل الرياضي يسمح بحساب الاحتمالات بطريقة مبسطة وتكون نفس القيم.

فنقول أنzيتبع التوزيع الطبيعي المعياري بمتوسط حسابي معدوم $m = 0$وانحراف معياري يساوي الواحد $\sigma = 1$ونعبر عنه رياضيا كما يلي:

$$z \rightsquigarrow N(0\ ,1)$$

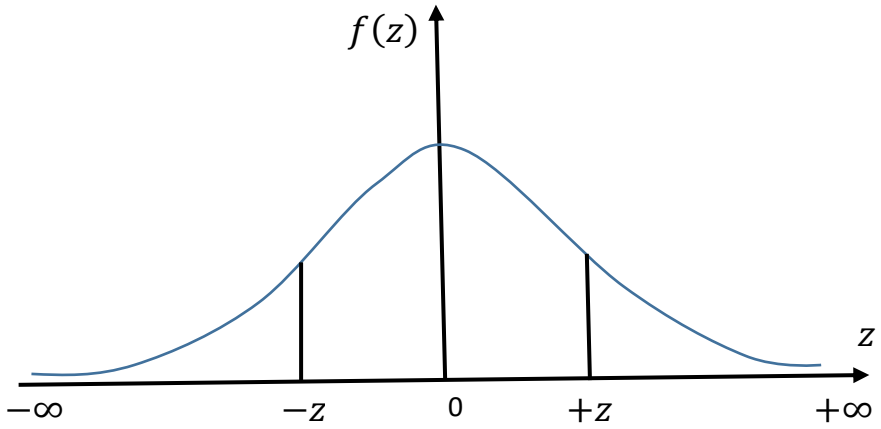
3-2-2-دالة الكثافة الاحتمالية للقانون الطبيعي المعياري:

وتأخذ الصيغة التالية:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z)^2}$$

3-2-3-التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية $f(z)$:

يأخذ التمثيل البياني نفس الشكل لدالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي العام $f(x)$، كما يتميز هذا التوزيع بنفس خصائص التوزيع الطبيعي(من حيث التماثل والتناظر...) أي: $f(-z) = f(z)$.



3-2-4-المميزات العددية للتوزيع الطبيعي المعياري: والمتمثلة في:

-التوقع الرياضي: والذي يعطى بالعلاقة التالية:

$$E(X) = m = 0$$

-التباين: والذي يحسب بالصيغة الرياضية التالية:

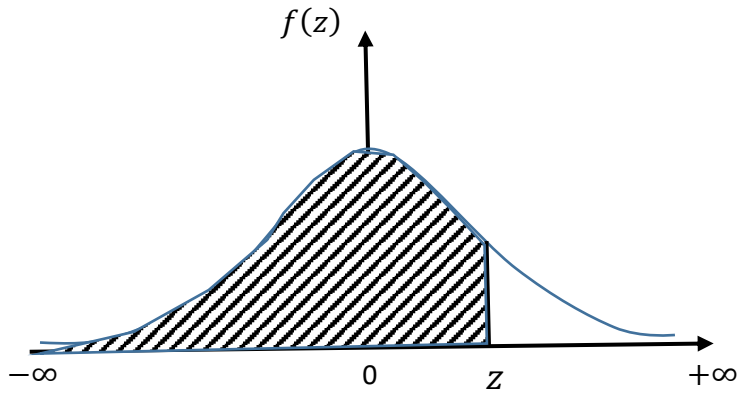
$$V(X) = 1$$

-الانحراف المعياري: الذي هو الجذر التربيعي للتباين ويحسب كالتالي:

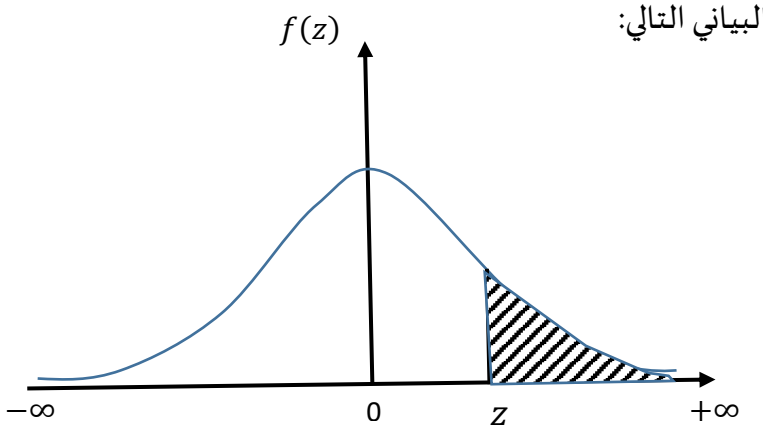
$$\sigma(x) = \sqrt{V(X)} = 1$$

3-2-5-حساب الاحتمالات بواسطة $f(z)$: نميز ثلاث حالات:

الحالة الأولى: $P(Z < z) = \int_{-\infty}^{Z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z)^2} dz$ ويكون تمثيلها البياني التالي:

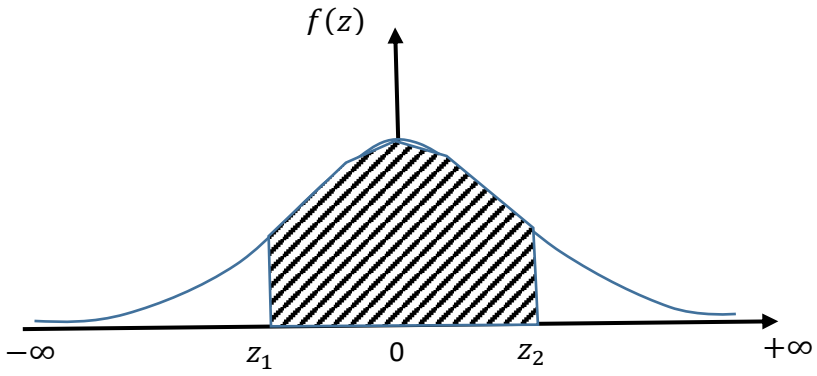


الحالة الثانية: $P(Z > z) = 1 - P(Z < z) = 1 - \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z)^2} dz$ ويكون تمثيلها البياني التالي:



الحالة الثالثة:

$P(z_1 < Z < z_2) = P(Z < z_2) - P(Z < z_1) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z)^2} dz$ ويكون تمثيلها البياني كما يلي:



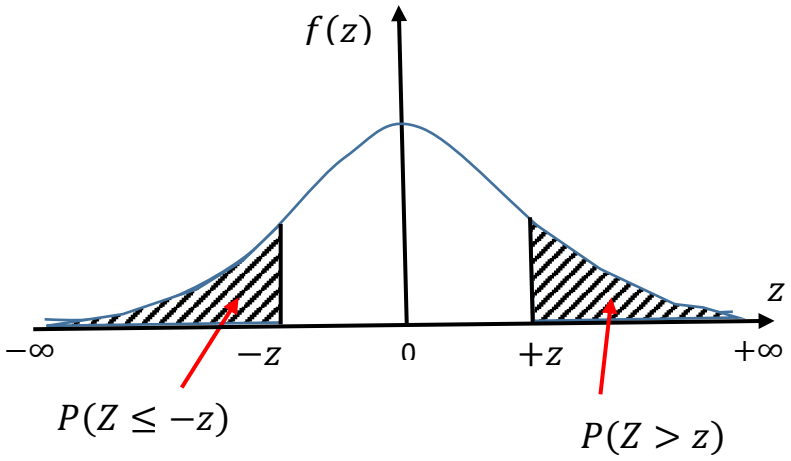
وتجدر الإشارة إلى أن الاحتمالات وفق القانون الطبيعي المعياري تم حسابها ووضعها في جداول تضمنت دالة التوزيع الاحتمالية $F(z)$.

$$F(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} f(z)dz = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z)^2} dz.$$

ويستخرج الاحتمال مباشرة من جدول التوزيع الطبيعي المعياري بشرط أن يكون:

- z موجب أما إذا كانzسالبا توظف خاصية التناظر، لأن جدول التوزيع الطبيعي المعياري يتضمن فقط الاحتمالات لما تكون قيمzموجبة$[0 , +\infty[$ $z \in [0 , +\infty[$ ويحسب بالطريقة التالية:

$$F(-z) = P(Z \leq -z)$$



$P(Z \leq -z)$ يناظره في الرسم $P(Z > z)$ومنه:

$$F(-z) = P(Z > z) = 1 - P(Z < z)$$

النتيجة: $F(-z) = 1 - F(z)$

3-2-6-قراءة جدول القانون الطبيعي المعياري: ونميز حالتين:

➢ **الحالة الأولى: لما يكون المطلوب حساب الاحتمال P بدلالة z أي أن P مجهولة وz معلومة:**

وحتى يتم شرح هذه الحالة يجب أخذ بعض الأمثلة على ذلك وحساب بعض الاحتمالات:

$$P(z < 2.5) = F(2.5) = 0.9938 = 99.38\%$$

حيث تم حساب هذا الاحتمال باستخراج القيمة من جدول التوزيع الطبيعي المعياري الخاص بـ P مجهولة وz معلومة، وعند استعمال هذا الجدول نتأكد من توفر شرط الإشارة " $<$ " أولا وأن z موجبة لأن الجدول يستخدم القيم الموجبة فقط ، لهذا إذا كانت القيم سالبة يتم تحويلها بالتناظر إلى قيم موجبة ثم نحدد القيمة في الجدول بتقاطع السطر مع العمود أي $2.5 = 2.5 + 0$ أي 2.5 نجدها على العمود و0 نجدها على السطر.

$$P(z < 1.68) = F(1.68) = 0.9535 = 95.35\%$$

أي $1.68 = 1.6 + 0.08$ حيث 1.6 نجده على العمود و0.08 نجده على السطر، وبتقاطع السطر مع العمود في جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد القيمة 0.9535، وهكذا مع بقية كل القيم.

$$P(z < -1.35) = 1 - P(z < 1.35) = 1 - F(1.35) = 1 - 0.9115 = 0.0885 = 8.85\%$$

$$P(z > 1.28) = 1 - P(z < 1.28) = 1 - F(1.28) = 1 - 0.8997 = 0.1003 = 10.03\%$$

$$P(-2.18 < z < 1.25) = P(z < 1.25) - P(z < -2.18)$$
$$= P(z < 1.25) - [1 - P(z < 2.18)] = F(1.25) + F(2.18) - 1$$
$$= 0.8944 + 0.9854 - 1 = 0.8798 = 87.98\%$$

$$P(z > -1.45) = P(z < 1.45) = F(1.45) = 0.9265 = 92.65\%$$

الحالة الثانية: لما يكون المطلوب حساب z بدلالة الاحتمال P أي أن P معلومة وz مجهولة:

لشرح الحالة يتطلب الامر أخذ بعض الأمثلة على ذلك:

$$P(Z < z) = 0.766$$

نلاحظ أن $P = 0.766 > 0.5$ فيتم استخراج قيمة $z = 0.7257$ من جدول التوزيع الطبيعي المعياري الخاص بـ P معلومة وz مجهولة، حيث $P = 0.766 = 0.76 + 0.006$ وبتقاطع العمود الذي يحتوي على القيمة 0.76 والعمود الذي يحتوي على القيمة 0.006.

وهكذا مع بقية القيم شرط أن تكون قيمة الاحتمال $P > 0.5$ أما إذا كانت قيمة الاحتمال $P < 0.5$ فإن قيمة z تكون سالبة، على أن يتم استخدام الجزء الآخر من الجدول.

$$P(Z < z) = 0.225$$

نلاحظ أن $P = 0.225 < 0.5$ فيتم استخراج قيمة $z = -0.7554$ من جدول التوزيع الطبيعي المعياري الخاص بـ P معلومة وz مجهولة، حيث $P = 0.225 = 0.22 + 0.005$ وبتقاطع العمود الذي يحتوي على القيمة 0.22 والعمود الذي يحتوي على القيمة 0.005.

مثال(08): تفيد دراسة إحصائية أن متوسط الوزن للطفل ما دون 6 سنوات يقدر بـ 20 كغ وانحراف معياري 4 كغ، التحليل الاحصائي للبيانات أثبت أن التوزيع يتبع القانون الطبيعي.

المطلوب:

1-أحسب نسبة الأطفال الذين: يقل وزنهم عن 28 كغ، يقل وزنهم عن 16كغ، يتراوح ما بين 22كغ و25كغ وما بين 18 كغ و23كغ.

2-احسب الربيع الأول والربيع الثالث.

الحل:

X: وزن الطفل ما دون 6 سنوات.

X: متغير عشوائي لأنه لا يمكن معرفة الوزن وهو يتغير عشوائيا، نوعه متصل لأنه قابل للتجزئة.

$m = 20$كغ ، $\sigma = 4$كغ

X يخضع للتوزيع الطبيعي أي:

$$X \rightsquigarrow N(m, \sigma) \quad \Longrightarrow X \rightsquigarrow N(20,4)$$

$$z = \frac{X - m}{\sigma} \rightsquigarrow N(0,1)$$

-حساب نسبة الأطفال الذين: يقل وزنهم عن 28 كغ:

$$P(X < 28) = P\left(\frac{X-m}{\sigma} < \frac{28-20}{4}\right) = P(z < 2) = F(2) = 0.9772 = 97.72\%$$

-حساب نسبة الأطفال الذين: يقل وزنهم عن 16 كغ:

$$P(X < 16) = P\left(\frac{X-m}{\sigma} < \frac{16-20}{4}\right) = P(z < -1) = 1 - P(z < 1) = 1 - F(1) = 1 - 8413 = 0.1587 = 15.87\%$$

-حساب نسبة الأطفال الذين يتراوح وزنهم ما بين 22كغ و25كغ:

$$P(22 < X < 25) = P(X < 25) - P(X < 22) = P\left(\frac{X-m}{\sigma} < \frac{25-20}{4}\right) - P\left(\frac{X-m}{\sigma} < \frac{22-20}{4}\right) = P(z < 1.25) - P(z < 0.5) = F(1.25) - F(0.5) = 0.8944 - 0.6915 = 0.2029 = 20.29\%$$

-حساب الربيع الثالث Q_3:

$$P(X < Q_3) = 0.75 \Longrightarrow P\left(\frac{X-m}{\sigma} < \frac{Q_3 - 20}{4}\right) = 0.75 \Longrightarrow P\left(z < \frac{Q_3 - 20}{4}\right) = 0.75$$

من جدول التوزيع الطبيعي المعياري $P = 0.75 \quad \Longrightarrow z = 0.6745$

ومنه $\frac{Q_3-20}{4} = 0.75$ وبالتبسيط نجد:

$$Q_3 = 0.75 \times 4 + 20 = 23$$كغ

4-التقريب بين القوانين الاحتمالية لمتغير عشوائي منفصل والقانون الطبيعي:

4-1-تقريب قانون ثنائي الحدين إلى القانون الطبيعي:

ويعني أن المتغير العشوائي X الذي يتبع توزيع ثنائي الحدين يأخذ قيم فردية منفصلة من 0,1, 2 ,3, 4, 5 ... ... nوعند ارتفاع عدد المشاهدات ووصول العينة إلى حجم كبير يصبح قانون ثنائي الحدين صعب في الحساب، عندها يمكن التعامل مع قيمه في شكل مجالات وذلك تسهيلا للحسابات، حيث تصبح قيمه تتوزع في شكل توزيع طبيعي، ويتم الانتقال من القانون الأصلي ثنائي الحدين إلى قانون مقرب إليه المتمثل في القانون الطبيعي، وهذا بتوفر الشرط التالية:

-حجم العينة كبير $n \geq 30$ ؛

-P يقارب 0.5

أي $n.P \geq 15$

وتجدر الإشارة أنه عند تقريب توزيع ثنائي الحدين إلى توزيع طبيعي يجب تصحيح الاستمرارية عند حساب الاحتمالات وذلك بإضافة أو طرح 0.5 وذلك كما يلي:

- $P(X = a) = P(a - 0.5 \leq X \leq a + 0.5)$
- $P(X < a) = P(X < a - 0.5)$
- $P(X \leq a) = P(X \leq a + 0.5)$
- $P(X > a) = P(X > a + 0.5)$
- $P(X \geq a) = P(X \geq a - 0.5)$
- $P(a \leq X \leq b) = P(a - 0.5 \leq X \leq b + 0.5)$

فنقول:

$$X \rightsquigarrow B(n,p) \longrightarrow X \rightsquigarrow N(m,\sigma)$$

حيث:

$$m = n.p \text{ و } \sigma = \sqrt{n.p.q}$$

أي $X \rightsquigarrow N(n.p\ , \sqrt{n.p.q})$

مثال(09):

في إحدى المزارع، لاحظ مهندس فلاحي أن بعض أشجار الزيتون تتعرض لمرض يؤدي إلى انخفاض كبير في الإنتاج (قلة الزيت). بعد عدة سنوات من المراقبة، تبيّن أن احتمال إصابة الشجرة بهذا المرض خلال موسم معين هو $P = 0.4$ في بداية الموسم، قام الفلاح بفحص عينة عشوائية $n = 100$ من شجرة زيتون.

ليكن X عدد الأشجار المصابة في العينة.

المطلوب:

-ما هو القانون الاحتمالي لهذا التوزيع؟

-أحسب الأمل الرياضي والتباين والانحراف المعياري.

-أحسب احتمال أن تكون عدد الأشجار المصابة في العينة كما يلي:

$P(30 < X < 60)$ ، $P(X > 70)$ ، $P(X < 60)$

الحل:

ليكن X عدد الأشجار المصابة في العينة، ويبدو انه عند فحص العينة يكون السحب مع الارجاع أي ان هناك تكرار، وبالتالي القانون الاحتمالي الذي يخضع له المتغير العشوائي X هو قانون ثنائي الحدين أي $X \rightsquigarrow B(n,p)$ ومنه $X \rightsquigarrow B(100,0.4)$

-مجال التعريف: $X \in \Omega = [0,1,2,3,4,5,6,7, \dots \dots \dots 100]$

-حساب الامل الرياضي:

$$E(X) = n.P = 100 \times 0.4 = 40$$

-حساب التباين والانحراف المعياري:

$$V(X) = n.p.q = 100 \times 0.4 \times 0.6 = 24$$

-الانحراف المعياري: الذي هو الجذر التربيعي للتباين ويحب كالتالي:

$$\sigma(x) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{24} = 4.89 \approx 5$$

-حساب الاحتمالات:

$$P(X < 60) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + \cdots + P(X = 59)$$

نلاحظ أن هناك صعوبة في حساب الاحتمالات لهذا نقوم بالتقريب لتسهيل حساب الاحتمالات:

نلاحظ أن $n = 100$ و $P = 0.4$ و $n.P = 100 \times 0.4 = 40 > 15$ (الشرط محقق) وعليه نقرب إلى القانون الطبيعي:

$$X \rightsquigarrow B(n,p) \longrightarrow X \rightsquigarrow N(m,\sigma)$$
$$X \rightsquigarrow N(n.p\ , \sqrt{n.p.q})$$
$$X \rightsquigarrow N(40\ , 4.89)$$

ولأجل تسهيل حساب الاحتمالات نستخدم القانون الطبيعي بدلا من قانون ثنائي الحدين كما يلي:

نقوم أولا بتصحيح الاستمرارية:

- $P(X < 60) = P\left(z < \frac{59.5-40}{4.89}\right) = P(z < 3.98) = F(3.98) = 0.9999$
- $P(X > 70) = P\left(z > \frac{70.5-40}{4.89}\right) = P(z > 6.23) = 1 - P(z < 6.23) = 1 - F(6.23) = 1 - 1 = 0$

- $P(30 < X < 60) = P\left(\frac{29.5-40}{4.89} < X < \frac{60.5-40}{4.89}\right) = P(-2.14 < z < 4.19) = F(4.19) - F(-2.14) = F(4.19) + F(2.14) - 1 = 1 - 1 - +0.9838 = 09838$

2-4-تقريب قانون بواسون إلى القانون الطبيعي:

يعتبر قانون بواسون من أهم التوزيعات الاحتمالية المنفصلة التي تستخدم لحساب احتمالات ظواهر عشوائية التي وقعت خلال فترة زمنية معينة أو خلال مجال معين، لكن في العديد من التطبيقات العملية خاصة عندما يكون متوسط عدد الحوادث كبير، يصبح حساب الاحتمالات صعب ومعقد يتطلب القيام بتقريبات إحصائية، من أجل تسهيل حساب الاحتمالات وتبسيطها دون فقدان الدقة في النتائج، ومن هذه التقريبات تقريب قانون بواسون إلى القانون الطبيعي، فنقول عن المتغير العشوائي X الذي يتبع قانون بواسون أنه يمكن تقريبه إلى قانون الطبيعي عندما يكون متوسطه λ كبير جدا. وعموما يتم تقريب توزيع بواسون إلى التوزيع الطبيعي إذا توفر الشرط التالي:

-المعلمة $\lambda \geq 10$

فقد يجدر الإشارة أنه عند تقريب قانون بواسون إلى القانون الطبيعي يتطلب تصحيح الاستمرارية لحساب الاحتمالات وذلك بإضافة أو طرح 0.5 وفق الحالات التي تم ذكرها سابقا عند تقريب قانون ثنائي الحدين إلى القانون الطبيعي.

-القانون الأصلي لـ X:

$$X \rightsquigarrow P(\lambda)$$

$$E(X) = \lambda$$

$$\sigma(x) = \sqrt{V(X)}$$

-القانون المقرب إليه:

$$X \rightsquigarrow N(m, \sigma)$$

$$E(X) = m$$

$$\sigma(x) = \sqrt{V(X)} = \sigma$$

وبتوفر شرط التقريب $\lambda \geq 10$ نكتب:

$$X \rightsquigarrow N(\lambda, \sqrt{\lambda})$$

مثال(10): في محطة للحافلات في إحدى المدن، ومن خلال الملاحظة لعدة أيام، تم تسجيل عدد الحافلات التي تصل خلال فترة 10 دقائق بمتوسط 10 حافلات، كما تبين أن عدد الحافلات تخضع لقانون بواسون.

X يمثل عدد الحافلات خلال 10 دقائق.

المطلوب:

-أحسب احتمال أن يكون عدد الحافلات التي تصل إلى المحطة خلال 10 دقائق ما بين 30 و42 حافلة.

الحل:

X : يمثل عدد الحافلات خلال 10 دقائق.

$$X \rightsquigarrow P(\lambda)$$

$$X \rightsquigarrow P(36)$$

بما أن$\lambda = 36 \geq 10$ فإنه يمكن تقريب قانون بواسون إلى القانون الطبيعي.

$$X \rightsquigarrow P(\lambda) \rightarrow X \rightsquigarrow N(m, \sigma)$$

$$\sigma = \sqrt{36} = 6 \quad ، m = 36$$

$$X \rightsquigarrow P(36) \rightarrow X \rightsquigarrow N(36,6)$$

- حساب احتمال أن يكون عدد الحافلات التي تصل إلى المحطة خلال 10 دقائق ما بين 30 و42 حافلة:

$$P(30 \leq X \leq 42) = P\left(\frac{30-36}{6} \leq z \leq \frac{42-36}{6}\right) = P(-1 \leq z \leq 1)$$
$$= F(1) - F(-1) = F(1) - 1 + F(1) = 2F(1) - 1$$
$$= 2(0.8413) - 1 = 0.6826$$

الملاحق

الملحق (01): دالة التوزيع الاحتمالية لقانون ثنائي الحدين

$$F(X) = P(X \leq x) = \sum_{k \leq x} C^k p^k (1-p)^{n-k}$$

n	x	p								
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
n=5	0	0,5905	0,3277	0,1681	0,0778	0,0313	0,0102	0,0024	0,0003	0,0000
	1	0,9185	0,7373	0,5282	0,3370	0,1875	0,0870	0,0308	0,0067	0,0005
	2	0,9914	0,9421	0,8369	0,6826	0,5000	0,3174	0,1631	0,0579	0,0086
	3	0,9995	0,9933	0,9692	0,9130	0,8125	0,6630	0,4718	0,2627	0,0815
	4	1	0,9997	0,9976	0,9898	0,9688	0,9222	0,8319	0,6723	0,4095
	5	1	1	1	1	1	1	1	1	1
n=10	0	0,3487	0,1074	0,0282	0,0060	0,0010	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,7361	0,3758	0,1493	0,0464	0,0107	0,0017	0,0001	0,0000	0,0000
	2	0,9298	0,6778	0,3828	0,1673	0,0547	0,0123	0,0016	0,0001	0,0000
	3	0,9872	0,8791	0,6496	0,3823	0,1719	0,0548	0,0106	0,0009	0,0000
	4	0,9984	0,9672	0,8497	0,6331	0,3770	0,1662	0,0473	0,0064	0,0001
	5	0,9999	0,9936	0,9527	0,8338	0,6230	0,3669	0,1503	0,0328	0,0016
	6	1	0,9991	0,9894	0,9452	0,8281	0,6177	0,3504	0,1209	0,0128
	7	1	0,9999	0,9984	0,9877	0,9453	0,8327	0,6172	0,3222	0,0702
	8	1	1	0,9999	0,9983	0,9893	0,9536	0,8507	0,6242	0,2639
	9	1	1	1	0,9999	0,9990	0,9940	0,9718	0,8926	0,6513
	10	1	1	1	1	1	1	1	1	1
n=15	0	0,2059	0,0352	0,0047	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,5490	0,1671	0,0353	0,0052	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,8159	0,3980	0,1268	0,0271	0,0037	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,9444	0,6482	0,2969	0,0905	0,0176	0,0019	0,0001	0,0000	0,0000
	4	0,9873	0,8358	0,5155	0,2173	0,0592	0,0093	0,0007	0,0000	0,0000
	5	0,9978	0,9389	0,7216	0,4032	0,1509	0,0338	0,0037	0,0001	0,0000
	6	0,9997	0,9819	0,8689	0,6098	0,3036	0,0950	0,0152	0,0008	0,0000
	7	1	0,9958	0,9500	0,7869	0,5000	0,2131	0,0500	0,0042	0,0000
	8	1	0,9992	0,9848	0,9050	0,6964	0,3902	0,1311	0,0181	0,0003
	9	1	0,9999	0,9963	0,9662	0,8491	0,5968	0,2784	0,0611	0,0022
	10	1	1	0,9993	0,9907	0,9408	0,7827	0,4845	0,1642	0,0127
	11	1	1	0,9999	0,9981	0,9824	0,9095	0,7031	0,3518	0,0556
	12	1	1	1	0,9997	0,9963	0,9729	0,8732	0,6020	0,1841
	13	1	1	1	1	0,9995	0,9948	0,9647	0,8329	0,4510
	14	1	1	1	1	1	0,9995	0,9953	0,9648	0,7941
	15	1	1	1	1	1	1	1	1	1

n	x	p								
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
n=20	0	0,1216	0,0115	0,0008	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,3917	0,0692	0,0076	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,6769	0,2061	0,0355	0,0036	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,8670	0,4114	0,1071	0,0160	0,0013	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,9568	0,6296	0,2375	0,0510	0,0059	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,9887	0,8042	0,4164	0,1256	0,0207	0,0016	0,0000	0,0000	0,0000
	6	0,9976	0,9133	0,6080	0,2500	0,0577	0,0065	0,0003	0,0000	0,0000
	7	0,9996	0,9679	0,7723	0,4159	0,1316	0,0210	0,0013	0,0000	0,0000
	8	0,9999	0,9900	0,8867	0,5956	0,2517	0,0565	0,0051	0,0001	0,0000
	9	1	0,9974	0,9520	0,7553	0,4119	0,1275	0,0171	0,0006	0,0000
	10	1	0,9994	0,9829	0,8725	0,5881	0,2447	0,0480	0,0026	0,0000
	11	1	0,9999	0,9949	0,9435	0,7483	0,4044	0,1133	0,0100	0,0001
	12	1	1	0,9987	0,9790	0,8684	0,5841	0,2277	0,0321	0,0004
	13	1	1	0,9997	0,9935	0,9423	0,7500	0,3920	0,0867	0,0024
	14	1	1	1	0,9984	0,9793	0,8744	0,5836	0,1958	0,0113
	15	1	1	1	0,9997	0,9941	0,9490	0,7625	0,3704	0,0432
	16	1	1	1	1	0,9987	0,9840	0,8929	0,5886	0,1330
	17	1	1	1	1	0,9998	0,9964	0,9645	0,7939	0,3231
	18	1	1	1	1	1	0,9995	0,9924	0,9308	0,6083
	19	1	1	1	1	1	1	0,9992	0,9885	0,8784
	20	1	1	1	1	1	1	1	1	1
n=30	0	0,0424	0,0012	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,1837	0,0105	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,4114	0,0442	0,0021	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,6474	0,1227	0,0093	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,8245	0,2552	0,0302	0,0015	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,9268	0,4275	0,0766	0,0057	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	6	0,9742	0,6070	0,1595	0,0172	0,0007	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	7	0,9922	0,7608	0,2814	0,0435	0,0026	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	8	0,9980	0,8713	0,4315	0,0940	0,0081	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
	9	0,9995	0,9389	0,5888	0,1763	0,0214	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000
	10	0,9999	0,9744	0,7304	0,2915	0,0494	0,0029	0,0000	0,0000	0,0000
	11	1	0,9905	0,8407	0,4311	0,1002	0,0083	0,0002	0,0000	0,0000
	12	1	0,9969	0,9155	0,5785	0,1808	0,0212	0,0006	0,0000	0,0000
	13	1	0,9991	0,9599	0,7145	0,2923	0,0481	0,0021	0,0000	0,0000
n	x	p								
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
n=30	14	1	0,9998	0,9831	0,8246	0,4278	0,0971	0,0064	0,0001	0,0000
	15	1	0,9999	0,9936	0,9029	0,5722	0,1754	0,0169	0,0002	0,0000
	16	1	1	0,9979	0,9519	0,7077	0,2855	0,0401	0,0009	0,0000

	17	1	1	0,9994	0,9788	0,8192	0,4215	0,0845	0,0031	0,0000
	18	1	1	0,9998	0,9917	0,8998	0,5689	0,1593	0,0095	0,0000
	19	1	1	1	0,9971	0,9506	0,7085	0,2696	0,0256	0,0001
	20	1	1	1	0,9991	0,9786	0,8237	0,4112	0,0611	0,0005
	21	1	1	1	0,9998	0,9919	0,9060	0,5685	0,1287	0,0020
	22	1	1	1	1	0,9974	0,9565	0,7186	0,2392	0,0078
	23	1	1	1	1	0,9993	0,9828	0,8405	0,3930	0,0258
	24	1	1	1	1	0,9998	0,9943	0,9234	0,5725	0,0732
	25	1	1	1	1	1	0,9985	0,9698	0,7448	0,1755
	26	1	1	1	1	1	0,9997	0,9907	0,8773	0,3526
	27	1	1	1	1	1	1	0,9979	0,9558	0,5886
	28	1	1	1	1	1	1	0,9997	0,9895	0,8163
	29	1	1	1	1	1	1	1	0,9988	0,9576
	30	1	1	1	1	1	1	1	1	1
n=40	0	0,0148	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,0805	0,0015	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,2228	0,0079	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,4231	0,0285	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,6290	0,0759	0,0026	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,7937	0,1613	0,0086	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	6	0,9005	0,2859	0,0238	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	7	0,9581	0,4371	0,0553	0,0021	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	8	0,9845	0,5931	0,1110	0,0061	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	9	0,9949	0,7318	0,1959	0,0156	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	10	0,9985	0,8392	0,3087	0,0352	0,0011	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	11	0,9996	0,9125	0,4406	0,0709	0,0032	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	12	0,9999	0,9568	0,5772	0,1285	0,0083	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	13	1	0,9806	0,7032	0,2112	0,0192	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000
	14	1	0,9921	0,8074	0,3174	0,0403	0,0012	0,0000	0,0000	0,0000
	15	1	0,9971	0,8849	0,4402	0,0769	0,0034	0,0000	0,0000	0,0000
	16	1	0,9990	0,9367	0,5681	0,1341	0,0083	0,0001	0,0000	0,0000
	17	1	0,9997	0,9680	0,6885	0,2148	0,0189	0,0003	0,0000	0,0000
	x	p								
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
	18	1	0,9999	0,9852	0,7911	0,3179	0,0392	0,0009	0,0000	0,0000
	19	1	1	0,9937	0,8702	0,4373	0,0744	0,0024	0,0000	0,0000
n=40	20	1	1	0,9976	0,9256	0,5627	0,1298	0,0063	0,0000	0,0000
	21	1	1	0,9991	0,9608	0,6821	0,2089	0,0148	0,0001	0,0000
	22	1	1	0,9997	0,9811	0,7852	0,3115	0,0320	0,0003	0,0000
	23	1	1	0,9999	0,9917	0,8659	0,4319	0,0633	0,0010	0,0000
	24	1	1	1	0,9966	0,9231	0,5598	0,1151	0,0029	0,0000
	25	1	1	1	0,9988	0,9597	0,6826	0,1926	0,0079	0,0000

26	1	1	1	0,9996	0,9808	0,7888	0,2968	0,0194	0,0000
27	1	1	1	0,9999	0,9917	0,8715	0,4228	0,0432	0,0001
28	1	1	1	1	0,9968	0,9291	0,5594	0,0875	0,0004
29	1	1	1	1	0,9989	0,9648	0,6913	0,1608	0,0015
30	1	1	1	1	0,9997	0,9844	0,8041	0,2682	0,0051
31	1	1	1	1	0,9999	0,9939	0,8890	0,4069	0,0155
32	1	1	1	1	1	0,9979	0,9447	0,5629	0,0419
33	1	1	1	1	1	0,9994	0,9762	0,7141	0,0995
34	1	1	1	1	1	0,9999	0,9914	0,8387	0,2063
35	1	1	1	1	1	1	0,9974	0,9241	0,3710
36	1	1	1	1	1	1	0,9994	0,9715	0,5769
37	1	1	1	1	1	1	0,9999	0,9921	0,7772
38	1	1	1	1	1	1	1	0,9985	0,9195
39	1	1	1	1	1	1	1	0,9999	0,9852
40	1	1	1	1	1	1	1	1	1

الملحق(02): دالة التوزيع الاحتمالية لقانون بواسون:

$$F(X) = P(X \leq x) = \sum_{k \leq x} e^{-\lambda} . \frac{\lambda^k}{k!}$$

x	λ									
	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
0	0,6065	0,3679	0,2231	0,1353	0,0821	0,0498	0,0302	0,0183	0,0111	0,0067
1	0,9098	0,7358	0,5578	0,4060	0,2873	0,1991	0,1359	0,0916	0,0611	0,0404
2	0,9856	0,9197	0,8088	0,6767	0,5438	0,4232	0,3208	0,2381	0,1736	0,1247
3	0,9982	0,9810	0,9344	0,8571	0,7576	0,6472	0,5366	0,4335	0,3423	0,2650
4	0,9998	0,9963	0,9814	0,9473	0,8912	0,8153	0,7254	0,6288	0,5321	0,4405
5	1	0,9994	0,9955	0,9834	0,9580	0,9161	0,8576	0,7851	0,7029	0,6160
6	1	0,9999	0,9991	0,9955	0,9858	0,9665	0,9347	0,8893	0,8311	0,7622
7	1	1	0,9998	0,9989	0,9958	0,9881	0,9733	0,9489	0,9134	0,8666
8	1	1	1	0,9998	0,9989	0,9962	0,9901	0,9786	0,9597	0,9319
9	1	1	1	1	0,9997	0,9989	0,9967	0,9919	0,9829	0,9682
10	1	1	1	1	0,9999	0,9997	0,9990	0,9972	0,9933	0,9863
11	1	1	1	1	1	0,9999	0,9997	0,9991	0,9976	0,9945
12	1	1	1	1	1	1	0,9999	0,9997	0,9992	0,9980
13	1	1	1	1	1	1	1	0,9999	0,9997	0,9993
14	1	1	1	1	1	1	1	1	0,9999	0,9998
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,9999
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

x	λ									
	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10
0	0,0041	0,0025	0,0015	0,0009	0,0006	0,0003	0,0002	0,0001	0,0001	0,0000
1	0,0266	0,0174	0,0113	0,0073	0,0047	0,0030	0,0019	0,0012	0,0008	0,0005
2	0,0884	0,0620	0,0430	0,0296	0,0203	0,0138	0,0093	0,0062	0,0042	0,0028
3	0,2017	0,1512	0,1118	0,0818	0,0591	0,0424	0,0301	0,0212	0,0149	0,0103
4	0,3575	0,2851	0,2237	0,1730	0,1321	0,0996	0,0744	0,0550	0,0403	0,0293
5	0,5289	0,4457	0,3690	0,3007	0,2414	0,1912	0,1496	0,1157	0,0885	0,0671
6	0,6860	0,6063	0,5265	0,4497	0,3782	0,3134	0,2562	0,2068	0,1649	0,1301
7	0,8095	0,7440	0,6728	0,5987	0,5246	0,4530	0,3856	0,3239	0,2687	0,2202
8	0,8944	0,8472	0,7916	0,7291	0,6620	0,5925	0,5231	0,4557	0,3918	0,3328
9	0,9462	0,9161	0,8774	0,8305	0,7764	0,7166	0,6530	0,5874	0,5218	0,4579
10	0,9747	0,9574	0,9332	0,9015	0,8622	0,8159	0,7634	0,7060	0,6453	0,5830
11	0,9890	0,9799	0,9661	0,9467	0,9208	0,8881	0,8487	0,8030	0,7520	0,6968
12	0,9955	0,9912	0,9840	0,9730	0,9573	0,9362	0,9091	0,8758	0,8364	0,7916
13	0,9983	0,9964	0,9929	0,9872	0,9784	0,9658	0,9486	0,9261	0,8981	0,8645
14	0,9994	0,9986	0,9970	0,9943	0,9897	0,9827	0,9726	0,9585	0,9400	0,9165
15	0,9998	0,9995	0,9988	0,9976	0,9954	0,9918	0,9862	0,9780	0,9665	0,9513
16	0,9999	0,9998	0,9996	0,9990	0,9980	0,9963	0,9934	0,9889	0,9823	0,9730
17	1	0,9999	0,9998	0,9996	0,9992	0,9984	0,9970	0,9947	0,9911	0,9857
18	1	1	0,9999	0,9999	0,9997	0,9993	0,9987	0,9976	0,9957	0,9928
19	1	1	1	1	0,9999	0,9997	0,9995	0,9989	0,9980	0,9965
20	1	1	1	1	1	0,9999	0,9998	0,9996	0,9991	0,9984
21	1	1	1	1	1	1	0,9999	0,9998	0,9996	0,9993
22	1	1	1	1	1	1	1	0,9999	0,9999	0,9997
23	1	1	1	1	1	1	1	1	0,9999	0,9999
24	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

الملحق(03): دالة التوزيع الاحتمالية للتوزيع الطبيعي المعياري (حالة z معلومة و P مجهولة)

$$F(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z)^2} . dz$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
قيم دالة التوزيع من أجل القيم الكبيرة لـ z										
z	**3,0**	**3,1**	**3,2**	**3,3**	**3,4**	**3,5**	**3,6**	**3,8**	**4,0**	**4,5**
F(z)	0,99865	0,999032	0,999313	0,999517	0,999663	0,999767	0,999841	0,999928	0,999968	0,999997

الملحق(04): جدول التوزيع الطبيعي المعياري (حالة P معلومة و z مجهولة)

p	0,000	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009	0,010	
0,00	∞	3,0902	2,8782	2,7478	2,6521	2,5758	2,5121	2,4573	2,4089	2,3656	2,3263	**0,99**
0,01	2,3263	2,2904	2,2571	2,2262	2,1973	2,1701	2,1444	2,1201	2,0969	2,0749	2,0537	**0,98**
0,02	2,0537	2,0335	2,0141	1,9954	1,9774	1,9600	1,9431	1,9268	1,9110	1,8957	1,8808	**0,97**
0,03	1,8808	1,8663	1,8522	1,8384	1,8250	1,8119	1,7991	1,7866	1,7744	1,7624	1,7507	**0,96**
0,04	1,7507	1,7392	1,7279	1,7169	1,7060	1,6954	1,6849	1,6747	1,6646	1,6546	1,6449	**0,95**
0,05	1,6449	1,6352	1,6258	1,6164	1,6072	1,5982	1,5893	1,5805	1,5718	1,5632	1,5548	**0,94**
0,06	1,5548	1,5464	1,5382	1,5301	1,5220	1,5141	1,5063	1,4985	1,4909	1,4833	1,4758	**0,93**
0,07	1,4758	1,4684	1,4611	1,4538	1,4466	1,4395	1,4325	1,4255	1,4187	1,4118	1,4051	**0,92**
0,08	1,4051	1,3984	1,3917	1,3852	1,3787	1,3722	1,3658	1,3595	1,3532	1,3469	1,3408	**0,91**
0,09	1,3408	1,3346	1,3285	1,3225	1,3165	1,3106	1,3047	1,2988	1,2930	1,2873	1,2816	**0,90**
0,10	1,2816	1,2759	1,2702	1,2646	1,2591	1,2536	1,2481	1,2426	1,2372	1,2319	1,2265	**0,89**
0,11	1,2265	1,2212	1,2160	1,2107	1,2055	1,2004	1,1952	1,1901	1,1850	1,1800	1,1750	**0,88**
0,12	1,1750	1,1700	1,1650	1,1601	1,1552	1,1503	1,1455	1,1407	1,1359	1,1311	1,1264	**0,87**
0,13	1,1264	1,1217	1,1170	1,1123	1,1077	1,1031	1,0985	1,0939	1,0893	1,0848	1,0803	**0,86**
0,14	1,0803	1,0758	1,0714	1,0669	1,0625	1,0581	1,0537	1,0494	1,0450	1,0407	1,0364	**0,85**
0,15	1,0364	1,0322	1,0279	1,0237	1,0194	1,0152	1,0110	1,0069	1,0027	0,9986	0,9945	**0,84**
0,16	0,9945	0,9904	0,9863	0,9822	0,9782	0,9741	0,9701	0,9661	0,9621	0,9581	0,9542	**0,83**
0,17	0,9542	0,9502	0,9463	0,9424	0,9385	0,9346	0,9307	0,9269	0,9230	0,9192	0,9154	**0,82**
0,18	0,9154	0,9116	0,9078	0,9040	0,9002	0,8965	0,8927	0,8890	0,8853	0,8816	0,8779	**0,81**
0,19	0,8779	0,8742	0,8705	0,8669	0,8633	0,8596	0,8560	0,8524	0,8488	0,8452	0,8416	**0,80**
0,20	0,8416	0,8381	0,8345	0,8310	0,8274	0,8239	0,8204	0,8169	0,8134	0,8099	0,8064	**0,79**
0,21	0,8064	0,8030	0,7995	0,7961	0,7926	0,7892	0,7858	0,7824	0,7790	0,7756	0,7722	**0,78**
0,22	0,7722	0,7688	0,7655	0,7621	0,7588	0,7554	0,7521	0,7488	0,7454	0,7421	0,7388	**0,77**
0,23	0,7388	0,7356	0,7323	0,7290	0,7257	0,7225	0,7192	0,7160	0,7128	0,7095	0,7063	**0,76**
0,24	0,7063	0,7031	0,6999	0,6967	0,6935	0,6903	0,6871	0,6840	0,6808	0,6776	0,6745	**0,75**
0,25	0,6745	0,6713	0,6682	0,6651	0,6620	0,6588	0,6557	0,6526	0,6495	0,6464	0,6433	**0,74**
0,26	0,6433	0,6403	0,6372	0,6341	0,6311	0,6280	0,6250	0,6219	0,6189	0,6158	0,6128	**0,73**
0,27	0,6128	0,6098	0,6068	0,6038	0,6008	0,5978	0,5948	0,5918	0,5888	0,5858	0,5828	**0,72**

0,28	0,5828	0,5799	0,5769	0,5740	0,5710	0,5681	0,5651	0,5622	0,5592	0,5563	0,5534	**0,71**
0,29	0,5534	0,5505	0,5476	0,5446	0,5417	0,5388	0,5359	0,5330	0,5302	0,5273	0,5244	**0,70**
0,30	0,5244	0,5215	0,5187	0,5158	0,5129	0,5101	0,5072	0,5044	0,5015	0,4987	0,4959	**0,69**
0,31	0,4959	0,4930	0,4902	0,4874	0,4845	0,4817	0,4789	0,4761	0,4733	0,4705	0,4677	**0,68**
0,32	0,4677	0,4649	0,4621	0,4593	0,4565	0,4538	0,4510	0,4482	0,4454	0,4427	0,4399	**0,67**
0,33	0,4399	0,4372	0,4344	0,4316	0,4289	0,4261	0,4234	0,4207	0,4179	0,4152	0,4125	**0,66**
0,34	0,4125	0,4097	0,4070	0,4043	0,4016	0,3989	0,3961	0,3934	0,3907	0,3880	0,3853	**0,65**
0,35	0,3853	0,3826	0,3799	0,3772	0,3745	0,3719	0,3692	0,3665	0,3638	0,3611	0,3585	**0,64**
0,36	0,3585	0,3558	0,3531	0,3505	0,3478	0,3451	0,3425	0,3398	0,3372	0,3345	0,3319	**0,63**
0,37	0,3319	0,3292	0,3266	0,3239	0,3213	0,3186	0,3160	0,3134	0,3107	0,3081	0,3055	**0,62**
0,38	0,3055	0,3029	0,3002	0,2976	0,2950	0,2924	0,2898	0,2871	0,2845	0,2819	0,2793	**0,61**
0,39	0,2793	0,2767	0,2741	0,2715	0,2689	0,2663	0,2637	0,2611	0,2585	0,2559	0,2533	**0,60**
0,40	0,2533	0,2508	0,2482	0,2456	0,2430	0,2404	0,2378	0,2353	0,2327	0,2301	0,2275	**0,59**
0,41	0,2275	0,2250	0,2224	0,2198	0,2173	0,2147	0,2121	0,2096	0,2070	0,2045	0,2019	**0,58**
0,42	0,2019	0,1993	0,1968	0,1942	0,1917	0,1891	0,1866	0,1840	0,1815	0,1789	0,1764	**0,57**
0,43	0,1764	0,1738	0,1713	0,1687	0,1662	0,1637	0,1611	0,1586	0,1560	0,1535	0,1510	**0,56**
0,44	0,1510	0,1484	0,1459	0,1434	0,1408	0,1383	0,1358	0,1332	0,1307	0,1282	0,1257	**0,55**
0,45	0,1257	0,1231	0,1206	0,1181	0,1156	0,1130	0,1105	0,1080	0,1055	0,1030	0,1004	**0,54**
0,46	0,1004	0,0979	0,0954	0,0929	0,0904	0,0878	0,0853	0,0828	0,0803	0,0778	0,0753	**0,53**
0,47	0,0753	0,0728	0,0702	0,0677	0,0652	0,0627	0,0602	0,0577	0,0552	0,0527	0,0502	**0,52**
0,48	0,0502	0,0476	0,0451	0,0426	0,0401	0,0376	0,0351	0,0326	0,0301	0,0276	0,0251	**0,51**
0,49	0,0251	0,0226	0,0201	0,0175	0,0150	0,0125	0,0100	0,0075	0,0050	0,0025	0,0000	**0,50**
	0,010	**0,009**	**0,008**	**0,007**	**0,006**	**0,005**	**0,004**	**0,003**	**0,002**	**0,001**	**0,000**	**p**

قائمة المراجع

باللغة العربية:

1-أنيس إسماعيل كنجو، **الإحصاء والاستدلال**، الطبعة الأولى، مكتبة العبيكان، الرياض، 2000.

2-السعدي رجال، نظرية الاحتمالات، الجزء الأول، الطبعة الثالثة، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2008.

3-أحمد عامر عامر، **محاضرات وتمارين في الإحصاء 02: حساب الاحتمالات ومبادئ الإحصاء الرياضي**، دار الغرب للنشر والتوزيع، الجزائر، 2002.

4-العمري علي وآخرون، مدخل لنظرية الاحتمالات، النشر الجامعي الجديد، تلمسان، الجزائر، 2021.

5-حسن ياسين طعمة وايمان حسين حنوش، الإحصاء الاستدلالي، الطبعة الثانية، دار صفاء للنشر والتوزيع، عمان، 2015.

6- جبار عبد مضحي، **مقدمة في نظرية الاحتمالات**، الطبعة الأولى، دار المسيرة للنشر والتوزيع، الأردن، 2011.

7-عبد الحفيظ مصطفى، نظرية الاحتمالات مبادئ وتطبيقات، الجزء الأول، الطبعة الثالثة، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، .2008

8-عبد اللطيف الطروانة عوض، **الإحصاء التطبيقي**، الطبعة الأولى، دار الخليج، عمان، 2018.

9-سالم عيسى بدر وعماد غصاب عبابنة، **مبادئ الإحصاء الوصفي والاستدلالي**، الطبعة الأولى، دار المسيرة للنشر والتوزيع، عمان، 2007.

10-لحسن عبد الله باشيوة، **مقدمة في الاحتمالات**، الطبعة الأولى، دار الوراق للنشر والتوزيع، عمان، 2014.

11-كمال سلطان محمد سالم، **الإحصاء الاحتمالي**، الطبعة الأولى، الدار الجامعية، الإسكندرية، 2004.

12-محمد يوسف أشقر وعبد اللطيف يوسف الصديقي، **أساسيات الإحصاء والاحتمالات**، الطبعة الأولى، دار الراتب الجامعية، بيروت، 2001.

13-عبد النور موساوي، يوسف بركان، **الإحصاء 02**، دار العلوم للنشر والتوزيع، الجزائر، 2010.

باللغة الأجنبية:

1-Foata. D, Fuchs. A, **Calcul des probabilités**, 2éme édition, Dunod, Paris, 1998.

2-Khalid Khaled, **Méthodes Statistiques : rappel de cours – exercices corrigés**, OPU, Alger, 2005.

3-lecoutre. J-P, **Statistique et Probabilités**, 4éme édition, Dunod, Paris, 2008.

4- Khalid Khaled, **Probabilités,** OPU, Alger, 1994.

5-Charles M. Grinstead and J. Laurie Snell, **Introduction to Probability**, Swarthmore College, 2005.

6-Dimitri P. Bertsekas and John N. Tsitsiklis, **Introduction to Probability**, Problem Solutions, 2nd edition, Massachusetts Institue of Technology, 2015.

7-Dirk P. Kroese, **A Short Introduction to Probability**, the University of Queensland, 2009.

تم بحمد الله