

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE FERHAT ABBAS-SETIF
UFAS (ALGERIE)

THESE

Présentée à la Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Pour l'obtention du Diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Option : Mathématiques Appliquées

Par
MESSELMi FARID

Thème

**Ecoulement Dynamique du Fluide de Bingham Avec
Loi de Frottement du Type Sous-Différentiel**

Soutenue le : 07/07/2010

Devant le jury composé de :

Président: Mr. S. DJABI

Rapporteur: Mr. B. MEROUANI

Examineurs: Mr. A. AYADI

Mr. N. HAMRI

Mr. H. BENSERIDI

Mr. S. DJEZZAR

Prof. Université Ferhat Abbas-Sétif

Prof. Université Ferhat Abbas-Sétif

Prof. Université d'Oum el Bouaghi

Prof. Centre Universitaire de Mila

M.C. Université Ferhat Abbas-Sétif

M.C. Université Mentouri de Constantine

DEDICACE

Je dédis le fruit de mon modeste travail à ma famille,

Spécialement,

Ma mère Zoulikha,

Mon père Belkheir,

Mes frères et mes sœurs,

Et tous mes amis,

REMERCIEMENTS

*Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance au Professeur **Boubakeur MEROUANI** d'avoir accepté de diriger mon travail. Qu'il trouve ici toute ma gratitude pour ses encouragements, ses conseils tout au long de ce travail effectué sous sa direction au sein de l'Université de F. Abbas de Sétif. En plus de ses conseils et de ses encouragements, je tiens à le remercier spécialement pour sa disponibilité, sa sollicitude et sa générosité tant sur le plan professionnel que sur le plan humain.*

*Je voudrais également remercier Monsieur **S. DJABI** qui a bien voulu examiner ce travail et accepter d'être le président du jury. Je le remercie profondément pour ses remarques et ses suggestions importantes.*

*Je remercie sincèrement Messieurs **A. AYADI, N. HAMRI, H. BENSERIDI** et **S. DJEZZAR** qui m'ont honoré de leur participation pour l'évaluation de cette thèse et pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.*

Je tiens aussi à remercier tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin, surtout à concrétiser ce travail.

Messelmi Farid.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

NOTATIONS

CHAPITRE I: *FORMULATION DES PROBLEMES AUX LIMITES ET RAPPELS D'ANALYSE*

I.1. Formulation mathématique des problèmes aux limites.....	10
I.1.1. Loi de comportement du fluide de Bingham.....	10
I.1.2. Lois de frottement du type sous-différentiel.....	13
I.1.3. Equation de la conservation de l'énergie et conditions aux limites de Fourier...	16
I.1.4. Formulation mathématique des problèmes.....	19
I.2. Rappels d'analyse.....	22
I.2.1. Eléments d'analyse non linéaire.....	22
I.2.2. Espaces fonctionnels et opérateurs divergence et déformation.....	29

CHAPITRE II : *ECOULEMENT DYNAMIQUE DU FLUIDE DE BINGHAM AVEC CONTACT DU TYPE SOUS DIFFERENTIEL*

II.1. Formulation du problème mécanique.....	37
II.2. Formulation variationnelle du problème et hypothèses.....	38
II.3. Résultats d'existence et d'unicité.....	45
II.4. Dépendance continue de la solution par rapport à la fonction de contact.....	67
II.5. Exemples de loi de frottement du type sous-différentiel.....	71
II.5.1. Glissement avec loi de frottement Tresca.....	72
II.5.2. Glissement avec loi de frottement viscoélastique.....	74

**CHAPITRE III : ECOULEMENT THERMIQUE STATIONNAIRE DU FLUIDE
DE BINGHAM AVEC CONTACT DU TYPE SOUS
DIFFERENTIEL**

III.1. Formulation du problème mécanique.....	78
III.2. Formulation variationnelle du problème et hypothèses.....	79
III.3. Résultats d'existence et de dépendance continue.....	85
III.3.1. Existence.....	85
III.3.2. Dépendance continue.....	97
III.4. Exemples de loi de frottement du type sous-différentiel.....	100
III.4.1. Glissement avec loi de frottement Tresca.....	100
III.4.2. Glissement avec loi de frottement viscoélastique.....	101

CONCLUSION

INTRODUCTION

Un problème physique en sciences de l'ingénieur se présente sous la forme d'un système matériel pour lequel il faut résoudre ou prévoir le comportement associé à une ou plusieurs fonctions données. Sa résolution peut être d'une manière expérimentale à travers une expérience acquise après plusieurs essais. Elle peut être, aussi, d'une manière théorique. Dans ce cas, il faut lui associer un modèle mathématique qui traduit son comportement. Une fois un modèle mathématique est établi, il faut procéder à sa résolution. Cette résolution peut être quelques fois analytique exacte, mais dans la plupart des cas elle est numérique approchée.

L'étude du comportement des fluides en fonction de leur viscosité est l'un des problèmes physiques intéressants. Nous rappelons que la viscosité d'un fluide mesure sa résistance à la déformation ou à l'écoulement. Les physiciens, pour mesurer la viscosité, introduisent une certaine quantité de fluide entre deux plaques; puis, ils déplacent la plaque supérieure tout en maintenant constante l'épaisseur. La déformation que subit le fluide dans de telles conditions est nommée cisaillement. La vitesse des couches intermédiaires est proportionnelle à leur hauteur dans le fluide. On mesure la force nécessaire pour mouvoir la plaque supérieure; les physiciens en déduisent la valeur de la viscosité. Pour certains fluides, tels l'eau, l'huile ou encore le miel, cette force est proportionnelle à la vitesse de la plaque, ce qui entraîne que la viscosité est indépendante de la vitesse de cisaillement, la viscosité est indépendante du temps et les contraintes s'annulent immédiatement lorsque l'écoulement est arrêté. Des tels fluides sont appelés linéaires ou Newtoniens depuis que Newton analysa leur comportement.

Toute déviation de ces règles est le signe d'un comportement non Newtonien. En 1920, l'Américain Eugene Bingham, qui s'étonnait que certaines peintures n'obéissent pas aux règles Newtoniennes, étudia leur comportement et décrivit l'étrange phénomène. La viscosité diminue au fur et à mesure que l'on augmente le taux de cisaillement auquel est soumis le fluide. C'est le comportement rhéofluidifiant. En outre, il constata que ces peintures coulent puis s'arrêtent spontanément. En leur sein, les forces qui créent un écoulement atteignent d'abord un seuil avant que le fluide ne s'ébranle. Tant que ce seuil n'est pas atteint, le fluide se déforme sans couler, tel un solide. Des tels comportements sont également observés dans les suspensions de

particules solides et dans les suspensions de vésicules déformables comme le sang. Ces fluides portent le nom de fluides de Bingham, qui représentent un cas particulier des fluides non Newtoniens.

Outre la viscosité, les fluides réels possèdent aussi des propriétés thermiques. En effet, les variations de température entraînent des dilatations et ceci engendre en particulier dans les fluides des mouvements de convection, de même les coefficients caractéristiques d'un milieu dépendent de la température (par exemple l'huile chaude et plus fluide que l'huile froide). Inversement, les frottements internes ou externes au cours d'un mouvement engendrent des variations de température. Tout ceci montre que les variations de vitesse ou déplacement et de température sont couplées. En particulier, les coefficients caractérisant le modèle mécanique de Bingham doivent dépendre de la température et l'écoulement du fluide se traite comme un problème couplé "vitesse-température". Pour de plus amples détails sur toutes les notions citées ci-dessus, il conviendra au lecteur de consulter les ouvrages [14, 23, 30, 38].

Depuis les travaux de Bingham. La théorie des fluides non Newtoniens et en particulier celui de Bingham ne cesse de se développer, tant son domaine d'application est vaste, elle a connu récemment un développement considérable avec l'apparition des polymères synthétiques. Comme étapes récentes dans ce développement, on peut citer l'établissement des inéquations variationnelles, l'utilisation de l'analyse fonctionnelle convexe ainsi que l'analyse numérique. Il existe une littérature abondante en ingénierie concernant ce type de problèmes, voir par exemple [12, 13, 38]. La littérature concernant la modélisation, l'analyse et l'approximation numérique est extensive. L'analyse variationnelle concernant l'existence de solutions pour les écoulements évoquant le modèle de Bingham a été considérée dans les ouvrages [19, 20, 29]. Dans [11, 28] pour des conditions de contact avec loi de frottement non locale et dans [46] pour le cas statique avec des conditions de contact avec loi de frottement du type sous-différentiel. Le phénomène de blocage dans l'étude du modèle de Bingham a été traité dans [27] alors que l'analyse numérique a été considérée dans les ouvrages [22, 24, 25, 44]. L'écoulement thermique du modèle de Bingham en dimension deux a été considéré dans l'ouvrage [21].

L'objet de cette thèse est de proposer une contribution à l'étude de quelques problèmes aux limites pour le fluide de Bingham. Pour cela on considère deux types d'écoulement: écoulement

dynamique et écoulement thermique stationnaire. Les conditions aux limites sont modélisées par une condition générale de contact avec frottement du type sous-différentiel.

Cette thèse se subdivise en trois chapitres. Elle est structurée de la manière suivante:

Le premier chapitre aborde brièvement des notions générales pour faciliter la lecture de cette thèse, aussi bien que pour la bonne compréhension des problèmes traités dans la suite. Nous commençons par la formulation des problèmes soumis à l'étude pour la loi de comportement du fluide de Bingham donnée par:

$$\begin{cases} \tilde{\sigma} = 2\mu(\theta) \varepsilon(\mathbf{u}) + \mathbf{g}(\theta) \frac{\varepsilon(\mathbf{u})}{|\varepsilon(\mathbf{u})|} & \text{si } |\varepsilon(\mathbf{u})| \neq 0, \\ |\tilde{\sigma}| \leq \mathbf{g}(\theta) & \text{si } |\varepsilon(\mathbf{u})| = 0, \end{cases}$$

où $\tilde{\sigma}$ désigne le déviateur du tenseur des contraintes σ , $\mathbf{u}$ représente le champ des vitesses, $\varepsilon(\mathbf{u})$ désigne le tenseur taux de déformation, θ représente la température du fluide, $\mu(\theta)$, $\mathbf{g}(\theta)$ sont les coefficients qui caractérisent le modèle de Bingham et qui représentent, respectivement, la viscosité et le seuil de plasticité. Les conditions aux limites utilisées sont du type sous-différentiel, de la forme

$$\mathbf{u} : \varphi(\theta, \mathbf{v}) - \varphi(\theta, \mathbf{u}) \geq -\sigma \nu \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{U},$$

où $\sigma \nu$ est le vecteur de contrainte de Cauchy sur la frontière de contact, φ est une fonction convexe par rapport à la seconde variable et $\mathbf{U}$ est l'ensemble des fonctions admissibles de test.

Nous présentons ensuite quelques résultats classiques de l'analyse fonctionnelle non linéaire: on présente le théorème de Lax-Milgam, les fonctions convexes, les inéquations variationnelles elliptiques, les fonctions multivoques dans les espaces topologiques, le théorème de point fixe de Kakutani-Glicksberg et le lemme de Gronwall. Pour finir nous rappelons les espaces fonctionnels et les principales notations utilisées.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude du problème qui décrit l'écoulement dynamique du fluide incompressible, viscoplastique de Bingham dans un domaine partiellement limité par un obstacle. On suppose que la température n'intervient pas dans la loi de comportement et que le phénomène thermique n'a aucune influence sur l'écoulement du fluide. Les conditions

aux limites sont modélisées par des conditions de contact du type sous-différentiel. Un théorème d'existence de solutions faibles ainsi que quelques résultats d'existence et d'unicité de la solution forte sont établis pour ce problème dans le cadre général et qui restent valables pour les différents problèmes de contact conduisant aux inégalités du type sous-différentiel. Les démonstrations sont basées sur des divers arguments des inéquations variationnelles d'évolution, à savoir la régularisation, la méthode de Fædo-Galerkin, la compacité et la monotonie. Finalement, on établit un résultat de dépendance continue de la solution forte par rapport à la fonction de contact, ce résultat reste valable pour les différents problèmes se ramenant aux inégalités du type sous-différentiel.

L'étude de l'écoulement thermique stationnaire dans un domaine partiellement limité par un obstacle du fluide incompressible, viscoplastique de Bingham dont la viscosité et le seuil de plasticité dépendent de la température constitue l'objet du troisième chapitre. Le problème mécanique conduit à un modèle mathématique couplé formé de l'équation du mouvement et l'équation de la conservation de l'énergie. Les conditions aux limites sont modélisées par des conditions de contact du type sous-différentiel pour l'équation du mouvement ainsi qu'une condition de Fourier et une condition homogène de Neumann pour l'équation de la conservation de l'énergie. Nous établissons un théorème d'existence de solutions faibles et un résultat de dépendance continue des solutions par rapport à la fonction de contact pour ce problème dans le cadre général et qui restent valables pour les différents problèmes de contact conduisant aux inégalités du type sous-différentiel. Les preuves sont basées sur le théorème de point fixe de Kakutani-Glicksberg, la théorie des données $\mathbf{L}^1$ ($\mathbf{L}^1$ -Data theory), ainsi que quelques arguments de compacité et de monotonie.

On finira cette thèse par une petite conclusion.

NOTATIONS

Si Ω est un domaine de $\mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) et $1 \leq p \leq +\infty$ on note par

$\overline{\Omega}$	l'adhérence de Ω .
Γ	la frontière de Ω , supposée souvent régulière.
Γ_i ($i = 0, 1$)	une partie de la frontière Γ .
$\text{mes}(\Gamma_0)$	la mesure de Lebesgue superficielle de Γ_0 .
ν	la normale unitaire sortante à Γ .
$\mathbf{v}_\nu, \mathbf{v}_\tau$	les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel $\mathbf{v}$ sur $\overline{\Omega}$.
$C(\overline{\Omega})$	l'espace des fonctions réelles continues sur $\overline{\Omega}$.
$\mathcal{H}_1 = \{ \sigma \in \mathbf{L}^2(\Omega)_s^{n \times n} \mid \text{Div}(\sigma) \in \mathbf{L}^2(\Omega)^n \}$	
$\mathbf{W}^{m,p}(\Omega)$	l'espace de Sobolev de paramètres m et p .
$\mathbf{H}^m(\Omega)$	l'espace de Sobolev de paramètres m et 2, $\mathbf{H}^m(\Omega) = \mathbf{W}^{m,2}(\Omega)$.
$\mathbf{W}^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$	l'espace de traces d'ordre p .
$\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace de traces d'ordre 2, $\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma) = \mathbf{W}^{\frac{1}{2},2}(\Gamma)$.
$\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$	le dual topologique de l'espace $\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.
$\mathbf{H}_\Gamma = \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^n$	
$\mathbf{H}'_\Gamma$	le dual topologique de l'espace $\mathbf{H}_\Gamma$, $\mathbf{H}'_\Gamma = \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^n$.
γ	l'application trace.

Si $\mathbf{H}$ est un espace de Hilbert réel, on utilise les notations

$\mathbf{H}'$	le dual topologique de $\mathbf{H}$.
$\mathbf{H}^n = \{ \mathbf{x} = (x_i) \mid x_i \in \mathbf{H}, i = \overline{1, n} \}$	
$\mathbf{H}_s^{n \times n} = \{ \mathbf{x} = (x_{ij}) \mid x_{ij} = x_{ji} \in \mathbf{H}, i, j = \overline{1, n} \}$	
$(\cdot, \cdot)_{\mathbf{H}}$	le produit scalaire de $\mathbf{H}$.
$(\cdot, \cdot)_{\mathbf{H}' \times \mathbf{H}}$	le produit de dualité entre $\mathbf{H}'$ et $\mathbf{H}$.
$\ \cdot\ _{\mathbf{H}}$	la norme de $\mathbf{H}$.
$2^{\mathbf{H}}$	l'ensemble de toutes les parties de $\mathbf{H}$.
$\mathbf{x}_n \longrightarrow \mathbf{x}$	la convergence forte de la suite $(\mathbf{x}_n)$ vers l'élément $\mathbf{x}$ dans $\mathbf{H}$.
$\mathbf{x}_n \rightharpoonup \mathbf{x}$	la convergence faible de la suite $(\mathbf{x}_n)$ vers l'élément $\mathbf{x}$ dans $\mathbf{H}$.

Notations

Si $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ sont deux espaces de Hilbert et $0 \leq \theta \leq 1$, on note par

$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]_\theta$ l'espace intermédiaire d'indice θ .

Si de plus $[0, T]$ est un intervalle de temps, on note par

$\mathbf{L}^p(0, T; \mathbf{H})$ l'espace des fonctions mesurables de $[0, T] \longrightarrow \mathbf{H}$ telles que

$$\int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{H}}^p dt < +\infty \text{ avec les modifications usuelles si } p = +\infty.$$

Pour une fonction $\mathbf{f}$, on note

$\text{dom}(\mathbf{f})$ le domaine de $\mathbf{f}$.

$\text{epi}(\mathbf{f})$ l'épigraphe de $\mathbf{f}$.

$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}$ la dérivée de $\mathbf{f}$ par rapport à la i -ème composante x_i .

$\mathbf{f}'$ la dérivée de $\mathbf{f}$ par rapport au temps.

$\frac{D\mathbf{f}}{Dt}$ la dérivée particulaire de $\mathbf{f}$.

$\nabla \mathbf{f}$ le gradient de $\mathbf{f}$.

$\varepsilon(\mathbf{f})$ la partie symétrique du gradient de $\mathbf{f}$, $\varepsilon(\mathbf{f}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{f} + \nabla^\top \mathbf{f})$.

$\text{div}(\mathbf{f})$ la divergence de $\mathbf{f}$.

$\partial \mathbf{f}$ le sous-différentiel de $\mathbf{f}$.

Autres notations

$\liminf$ la limite inférieure.

$\mathbb{S}_n$ l'espace des tenseurs symétriques d'ordre 2 sur $\mathbb{R}^n$.

$\text{Div}(\boldsymbol{\sigma})$ la divergence du tenseur $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{S}_n$.

$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ le déviateur du tenseur $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{S}_n$.

$\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})$ la trace du tenseur $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{S}_n$.

$\boldsymbol{\delta}$ le tenseur identique.

p.p. presque partout.

$|\cdot|$ la norme Euclidienne de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{S}_n$.

$\cdot, \cdot$ le produit scalaire Euclidien de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{S}_n$.

CHAPITRE I

FORMULATION DES PROBLEMES AUX LIMITES ET RAPPELS D'ANALYSE

Le but de ce chapitre est la formulation des problèmes mécaniques qui feront l'objet de notre étude, ainsi que quelques rappels de l'analyse non linéaire dont nous aurons besoin.

Le chapitre comporte deux parties. La première est consacrée à la formulation mécanique de l'écoulement du fluide de Bingham avec frottement gouverné par une inégalité du type sous-différentiel. On propose deux types d'écoulement: écoulement dynamique et écoulement thermique stationnaire. La deuxième partie comprend des rappels sur les résultats classiques de l'analyse fonctionnelle non linéaire, on y présente ici quelques résultats fondamentaux qui concernent les fonctions convexes, les inéquations variationnelles elliptiques, les fonctions multivoques, le théorème de point fixe de Kakutani-Glicksberg et le lemme de Gronwall. Pour finir, nous rappelons les notions de bases ainsi que quelques résultats qui concernent les espaces de Sobolev et les espaces de fonctions à valeurs vectorielles.

I.1. Formulation mathématique des problèmes aux limites

Dans cette partie du premier chapitre, on commence par une description de la loi de comportement du fluide de Bingham. Dans la suite, on donne une caractérisation de la loi de contact avec frottement du type sous-différentiel. On décrit la loi de contact avec frottement du type sous-différentiel de manière générale, appuyée par deux exemples classiques. Puis, nous présentons un rappel concernant la thermodynamique des fluides, permettant la modélisation de l'écoulement thermique du fluide de Bingham. Pour terminer, on donne une formulation mathématique des problèmes mécaniques pour le fluide de Bingham.

I.1.1. Loi de comportement du fluide de Bingham

Les lois de comportement caractérisent le comportement de chaque type de milieu continu. Bien qu'elles doivent respecter certaines propriétés d'invariance, leur origine est souvent expérimentale et c'est toute une série d'essais physiques qu'il faut réaliser pour obtenir une loi de comportement. On présente ici une description de la loi de comportement viscoplastique du fluide de Bingham traité dans cette thèse en suivant [15], [28] et [45]. Le modèle de Bingham est caractérisé par la propriété suivante: le matériau commence à s'écouler seulement si les forces appliquées dépassent une certaine limite, dite le seuil de plasticité. Pour décrire ce modèle, on a besoin de certaines notations.

Soient $\mathbf{u}$ le champ des vitesses et $\boldsymbol{\varepsilon}$ le tenseur taux de déformation défini par:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u}). \quad (\text{I.1.1})$$

On considère aussi son déviateur

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{n} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \boldsymbol{\delta}, \quad (\text{I.1.2})$$

où $\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$ représente la trace de $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\delta}$ le tenseur identique. On note par $\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur des contraintes de Cauchy et son déviateur

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} + p \boldsymbol{\delta}. \quad (\text{I.1.3})$$

Dans (I.1.3) le scalaire $-\mathbf{p} = \frac{1}{n} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})$ représente la partie sphérique du tenseur des contraintes. On peut identifier $\mathbf{p}$ avec la pression. En plus des déviateurs $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ et $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$, un autre tenseur $\mathbf{S}$ est introduit comme étant la partie des contraintes qui correspond aux propriétés plastiques du matériau. Pour décrire un tel processus, on utilise une collection de fonctions régulières $t \mapsto (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(t), \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t), \mathbf{S}(t))$ pour $t \in [0, T]$ où $T > 0$ est la durée du processus.

Le modèle rigide viscoplastique de Bingham suppose que

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{S} + 2\mu\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (\text{I.1.4})$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{S}) = |\mathbf{S}|^2 - \mathbf{g}^2 \leq 0, \quad (\text{I.1.5})$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \lambda 2\mathbf{S}, \quad (\text{I.1.6})$$

où μ est le coefficient de viscosité, $\frac{\mathbf{g}}{\sqrt{2}}$ est le seuil de plasticité pour le cisaillement pur et λ est une fonction telle que

$$\begin{cases} \lambda(t) = 0 & \text{si } \mathbf{f}(\mathbf{S}) < 0 \text{ ou } \mathbf{f}(\mathbf{S}) = 0 \text{ et } \mathbf{f}'(\mathbf{S}) < 0, \\ \lambda(t) > 0 & \text{si } \mathbf{f}(\mathbf{S}) = 0 \text{ et } \mathbf{f}'(\mathbf{S}) = 0. \end{cases} \quad (\text{I.1.7})$$

Dans (I.1.7) $\mathbf{f}'(\mathbf{S})$ désigne la dérivée par rapport au temps de la fonction $t \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{S}(t))$ et (I.1.5) est la condition de Von Mises.

En tenant compte de (I.1.5), l'invariant $\mathbf{S}_H = \frac{1}{2}|\mathbf{S}|^2$ ne doit pas dépasser la carré du seuil de plasticité pour le cisaillement pur $\frac{\mathbf{g}}{\sqrt{2}}$.

D'après (I.1.6) et (I.1.7) il vient que le déviateur du tenseur taux de déformation peut varier seulement si $\mathbf{S}$ reste sur la surface $\mathbf{f}(\mathbf{S}) = 0$, en se déplaçant le long de cette dernière. Pour tout autre processus, $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ est nul. C'est la raison pour laquelle $|\mathbf{S}| = \mathbf{g}$ est appelé condition d'écoulement.

Dans le modèle de Bingham, on suppose toujours l'incompressibilité du volume, c'est à dire

$$\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0, \quad (\text{I.1.8})$$

pour n'importe quel processus de n'importe quelle durée $T > 0$.

Le modèle de Bingham peut être considéré en utilisant seulement les tenseur ε et $\tilde{\sigma}$. En effet, de (I.1.4) et (I.1.6) on a

$$\tilde{\sigma} = (1 + 4\mu\lambda) \mathbf{S}, \quad (\text{I.1.9})$$

$$|\tilde{\sigma}| = (1 + 4\mu\lambda) |\mathbf{S}|. \quad (\text{I.1.10})$$

Si $|\tilde{\sigma}| > \mathbf{g}$ alors de (I.1.5) et (I.1.10) on déduit que $\lambda > 0$ et de (I.1.7) on a $|\mathbf{S}| = \mathbf{g} > 0$.

(I.1.10) entraîne que

$$\lambda = \frac{1}{4\mu} \left(\frac{|\tilde{\sigma}|}{\mathbf{g}} - 1 \right).$$

De (I.1.6) et (I.1.9) on a

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{2\lambda}{1 + 4\mu\lambda} \tilde{\sigma} = \frac{1}{2\mu} \left(1 - \frac{\mathbf{g}}{|\tilde{\sigma}|} \right) \tilde{\sigma}.$$

Comme $\text{tr}(\varepsilon) = 0$, on aura d'après (I.1.2) $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$. Par conséquent

$$\varepsilon = \frac{1}{2\mu} \left(1 - \frac{\mathbf{g}}{|\tilde{\sigma}|} \right) \tilde{\sigma}.$$

Supposons maintenant que $|\tilde{\sigma}| \leq \mathbf{g}$. Alors si $|\mathbf{S}| = \mathbf{g}$ de (I.1.10) on obtient $\lambda = 0$, et si $|\mathbf{S}| < \mathbf{g}$ de (I.1.7) on aura aussi $\lambda = 0$. D'où finalement $\varepsilon = 0$. Ainsi, on obtient la loi de comportement du fluide de Bingham suivante:

$$\varepsilon = \begin{cases} \frac{1}{2\mu} \left(1 - \frac{\mathbf{g}}{|\tilde{\sigma}|} \right) \tilde{\sigma} & \text{si } |\tilde{\sigma}| > \mathbf{g}, \\ 0 & \text{si } |\tilde{\sigma}| \leq \mathbf{g}. \end{cases} \quad (\text{I.1.11})$$

On peut aussi inverser l'équation constitutive (I.1.11). Si $|\varepsilon| = 0$, d'après (I.1.11) on a $|\tilde{\sigma}| \leq \mathbf{g}$ et si $|\varepsilon| \neq 0$, on a $|\tilde{\sigma}| > \mathbf{g}$.

Par ailleurs, on sait que $|\tilde{\sigma}| = 2\mu|\varepsilon| + \mathbf{g}$, donc si on combine cette formule avec (I.1.8), l'équation constitutive (I.1.11) s'écrit:

$$\begin{cases} \tilde{\sigma} = 2\mu\varepsilon + \mathbf{g} \frac{\varepsilon}{|\varepsilon|} & \text{si } |\varepsilon| \neq 0, \\ |\tilde{\sigma}| \leq \mathbf{g} & \text{si } |\varepsilon| = 0. \end{cases} \quad (\text{I.1.12})$$

Il est facile de voir que les deux lois constitutives (I.1.11) et (I.1.12) sont équivalentes. Par conséquent, on considère (I.1.12) comme étant la loi de comportement du fluide de Bingham.

Par ailleurs, les expériences physiques ont montré que les coefficients qui caractérisent le modèle mécanique de Bingham, autrement dit la viscosité μ et le seuil de plasticité $\mathbf{g}$, sont en fonction de la température, ce qui explique le comportement thermique du fluide de Bingham.

Remarque I.1.1. Si dans la loi de comportement (I.1.12), on prend $\mathbf{g} = 0$ on obtient la loi de comportement d'un fluide visqueux incompressible Newtonien. Par conséquent, pour $\mathbf{g}$ suffisamment petit, le fluide de Bingham peut être considéré comme un modèle voisin des fluides visqueux Newtoniens. Si $\mathbf{g}$ est strictement positif, on observe des zones rigides au sein de l'écoulement. Quand $\mathbf{g}$ croît, ces zones rigides augmentent et peuvent bloquer complètement l'écoulement. Cette propriété s'appelle propriété de blocage. Le fluide de Bingham possède la particularité supplémentaire, mise en évidence par la loi de comportement (I.1.12), tant que le seuil $\mathbf{g}$ n'est pas atteint, le fluide se déforme comme un milieu rigide sans couler. On explique physiquement ce phénomène par le fait que ces fluides sont pour la plupart des suspensions de particules quasi sphériques dans un solvant. Quand les particules sont faiblement concentrées, le seul effet de leur présence est d'augmenter la viscosité proportionnellement à la concentration des particules. Si l'on augmente toujours la concentration, les particules finissent par se toucher. Le solvant n'occupe plus que les interstices. Le liquide devient pâteux à cause des forces entre les particules en contact. Pour provoquer son écoulement, il faut vaincre toutes ces forces, ce qui permet d'expliquer l'existence du seuil $\mathbf{g}$.

Un tel comportement s'observe dans le cas de certaines huiles ou de certaines boues, utilisées dans la technique des forages pétrolières ainsi que dans certaines peintures. On l'utilise aussi pour décrire l'écoulement à haute température de certains corps solides, par exemple le processus de moulage de métaux, pour plus d'exemples on revoit aux ouvrages [12], [30] et [38].

I.1.2. Lois de frottement du type sous-différentiel

Supposons dans cette section que le fluide occupe un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de frontière régulière $\partial\Omega = \Gamma$ constituée de deux parties mesurables et disjointes Γ_0 et Γ_1 . Nous présentons ici des exemples de loi de contact avec frottement qui conduisent à une condition aux limites du type

sous-différentiel de la forme

$$\mathbf{u} : \varphi(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{v}) - \varphi(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}) \geq -\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{U}. \quad (\text{I.1.13})$$

où $\mathbf{U} = \{\mathbf{v} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n \mid \mathbf{v}_\nu = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$ est l'ensemble des fonctions admissibles de test, $\mathbf{u} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est le champ des vitesses, $\boldsymbol{\theta} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ la température du fluide, $\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu}$ est le vecteur de contrainte de Cauchy sur la frontière de contact et φ est une fonction mesurable et convexe par rapport à la deuxième variable. L'inégalité (I.1.13) est vérifiée sur toute la surface de contact Γ_1 .

I.1.2.1. Glissement avec loi de frottement Tresca

Le contact entre le fluide et l'obstacle se fait avec glissement. Cette propriété se traduit mathématiquement par

$$\mathbf{u}_\nu = 0,$$

c'est à dire la composante normale du vecteur vitesse s'annule sur la surface de contact. La loi de frottement Tresca présente un seuil de frottement $\mathbf{h}$ dépendant de la température: Lorsque le fluide et l'obstacle sont en contact, l'effort tangentiel ne peut dépasser un certain seuil, autrement dit

$$|\boldsymbol{\sigma}_\tau| \leq \mathbf{h}(\boldsymbol{\theta}).$$

Tant que la contrainte tangentielle n'atteint pas le seuil, le fluide ne peut se déplacer par rapport à l'obstacle et il y a blocage, cela se traduit par

$$|\boldsymbol{\sigma}_\tau| < \mathbf{h}(\boldsymbol{\theta}) \implies \mathbf{u}_\tau = 0.$$

Lorsque le seuil est atteint, le fluide peut se déplacer tangentiellement par rapport à l'obstacle et il y a glissement. La contrainte tangentielle s'oppose à la vitesse. Par conséquent il existe une constante positive λ telle que

$$\mathbf{u}_\tau = -\lambda \boldsymbol{\sigma}_\tau.$$

En conclusion, les conditions aux limites issues d'un contact glissant avec loi de frottement

Tresca s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{u}_\nu = 0, & |\boldsymbol{\sigma}_\tau| \leq \mathbf{h}(\boldsymbol{\theta}) \\ |\boldsymbol{\sigma}_\tau| < \mathbf{h}(\boldsymbol{\theta}) \implies \mathbf{u}_\tau = 0 \\ |\boldsymbol{\sigma}_\tau| = \mathbf{h}(\boldsymbol{\theta}) \implies \mathbf{u}_\tau = -\lambda \boldsymbol{\sigma}_\tau, & \lambda \geq 0 \end{array} \right. \quad \text{sur } \Gamma_1, \quad (\text{I.1.14})$$

où $\mathbf{h}(\boldsymbol{\theta})$ représente le seuil de frottement. Il facile de voir qu'on a $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ et par conséquent

$$\boldsymbol{\sigma}_\nu \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) = \boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot (\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{U}.$$

Comme on a supposé que $|\boldsymbol{\sigma}_\tau| \leq \mathbf{h}(\boldsymbol{\theta})$, il vient que

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot \mathbf{v}_\tau \geq -|\boldsymbol{\sigma}_\tau| |\mathbf{v}_\tau| \geq -\mathbf{h}(\boldsymbol{\theta}) |\mathbf{v}_\tau|, \\ \boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot \mathbf{u}_\tau = -|\boldsymbol{\sigma}_\tau| |\mathbf{u}_\tau| = -\mathbf{h}(\boldsymbol{\theta}) |\mathbf{u}_\tau|, \end{array} \right.$$

donc

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot \mathbf{u}_\tau + \mathbf{h}(\boldsymbol{\theta}) |\mathbf{u}_\tau| = 0 \quad \text{si } |\boldsymbol{\sigma}_\tau| \leq \mathbf{h}(\boldsymbol{\theta}).$$

Compte-tenu des relations précédentes, on en déduit l'inégalité

$$-\boldsymbol{\sigma}_\nu \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \leq \mathbf{h}(\boldsymbol{\theta}) |\mathbf{v}_\tau| - \mathbf{h}(\boldsymbol{\theta}) |\mathbf{u}_\tau| \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{U}.$$

Choisissons maintenant

$$\varphi(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{v}) = \mathbf{h}(\boldsymbol{\theta}) |\mathbf{v}_\tau|.$$

Nous remarquons que pour un tel choix, la condition du type sous-différentiel (I.1.13) est satisfaite.

I.1.2.2. Glissement avec loi de frottement viscoélastique (loi de puissance)

On considère les conditions aux limites sur la partie de la frontière Γ_1 , suivantes

$$\mathbf{u}_\nu = 0, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = -\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}) |\mathbf{u}_\tau|^{p-1} \mathbf{u}_\tau \quad \text{sur } \Gamma_1, \quad (\text{I.1.15})$$

où $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta})$ est le coefficient de frottement et $0 < p \leq 1$. La propriété $\mathbf{u}_\nu = 0$ sur Γ_1 est une

condition traduisant le glissement entre le fluide et l'obstacle. La condition de frottement viscoélastique s'écrit sous la forme

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau = -\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}) |\mathbf{u}_\tau|^{p-1} \mathbf{u}_\tau,$$

ici la contrainte tangentielle étant proportionnelle à une puissance de la vitesse tangentielle.

Il facile de voir qu'on a $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ et par conséquent

$$-\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) = \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}) |\mathbf{u}_\tau|^{p-1} \mathbf{u}_\tau \cdot \mathbf{v}_\tau - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}) |\mathbf{u}_\tau|^{p+1} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{U}.$$

Utilisons l'inégalité de Young, on aura

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) &\leq \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}) |\mathbf{u}_\tau|^p |\mathbf{v}_\tau| - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}) |\mathbf{u}_\tau|^{p+1} \\ &\leq \frac{p}{p+1} \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}) |\mathbf{u}_\tau|^{p+1} + \frac{1}{p+1} \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}) |\mathbf{v}_\tau|^{p+1} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}) |\mathbf{u}_\tau|^{p+1} \\ &= \frac{1}{p+1} \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}) |\mathbf{v}_\tau|^{p+1} - \frac{1}{p+1} \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}) |\mathbf{u}_\tau|^{p+1}. \end{aligned}$$

Choisissons pour ce type de conditions

$$\varphi(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{v}) = \frac{1}{p+1} \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}) |\mathbf{v}_\tau|^{p+1}.$$

On remarque que pour un tel choix, la condition du type sous-différentiel (I.1.13) est satisfaite.

I.1.3. Equation de la conservation de l'énergie et conditions aux limites de Fourier

On sait que les variations de température entraînent des dilatations et que ceci engendre en particulier dans le fluide des mouvements de convection (l'air chaud, plus léger, a tendance à monter et à laisser sa place à l'air plus froid). Inversement, les frottements internes ou externes au cours d'un mouvement engendrent des variations de température. Tout ceci montre que les

variations de pression, de vitesse ou déplacement et de température sont couplées. Pour tenir compte de ce couplage, il est nécessaire d'introduire de nouvelles relations constitutives faisant intervenir le tenseur des contraintes, le vecteur flux de chaleur et le champ des vitesses et de température. Cela est basé sur la thermodynamique des processus irréversibles, c'est à dire les principes définissant l'énergie interne et le fait que sur chaque unité de volume élémentaire du système la variation de l'énergie est égale à la somme du travail des forces extérieures et de la quantité de chaleur reçue. En mécanique des fluides, la variation est temporelle, il s'agit donc de puissances de forces et de taux de chaleur reçu, ce qui nous permet finalement d'obtenir l'équation de la conservation de l'énergie, pour plus de détails sur ces notions nous renvoyons aux ouvrages [23] et [30].

Supposons toujours que le fluide occupe un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de frontière régulière $\partial\Omega = \Gamma$ constituée de deux parties mesurables et disjointes Γ_0 et Γ_1 . De plus le fluide est supposé incompressible, on peut donc admettre que la densité du fluide $\rho = 1$. Sur le domaine Ω , la conservation de l'énergie s'écrit localement:

$$\frac{De}{Dt} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \nabla \mathbf{Q} + \mathbf{h}, \quad (\text{I.1.16})$$

où $\frac{D}{Dt}$ représente la dérivée particulaire, e désigne l'énergie interne spécifique du fluide, c'est à dire l'énergie par unité de masse, $\mathbf{Q}$ est le flux de chaleur, $\mathbf{h}$ est une densité volumique définissant un taux de chaleur fourni par des éléments extérieurs au fluide considéré (effet Joule, rayonnement, réaction chimique exothermique, ..., etc.), appelée aussi source de chaleur volumique. Le terme $\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ représente le taux d'énergie dû aux efforts intérieurs et $\mathbf{h} - \nabla \mathbf{Q}$ est le taux de chaleur reçue.

Pour préciser le terme de dissipation thermique, on adopte souvent la loi de conduction de Fourier qui de façon générale s'écrit:

$$\mathbf{Q} = -\mathbf{K} \cdot \nabla \theta,$$

où $\mathbf{K}$ est le tenseur de l'expansion thermique. En fait, dans le cas d'un milieu isotrope, cas des fluides en général $\mathbf{K} = k\boldsymbol{\delta}$, où k est le coefficient de la conductibilité thermique du fluide. Donc

$$\mathbf{Q} = -k \nabla \theta. \quad (\text{I.1.17})$$

En outre, si on suppose que la chaleur spécifique C_ε du fluide est supposée constante et égale à 1 alors l'énergie interne spécifique du fluide s'écrit:

$$\mathbf{e}(\theta) = \theta, \quad (\text{I.1.18})$$

on rappelle que la chaleur spécifique du fluide est la quantité de chaleur utilisée par le fluide pour élever sa température.

L'équation de l'énergie (I.1.16) s'écrit, compte-tenu des relations précédentes,

$$\frac{d\theta}{dt} - k \Delta \theta + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = \sigma \cdot \varepsilon(\mathbf{u}) + \mathbf{h} \quad \text{sur } \Omega.$$

Dans le cas d'un phénomène stationnaire, l'équation se réduit à

$$-k \Delta \theta + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = \sigma \cdot \varepsilon(\mathbf{u}) + \mathbf{h} \quad \text{sur } \Omega. \quad (\text{I.1.19})$$

On associe à l'équation de la conservation de l'énergie (I.1.19) une condition aux limites mixte du type Fourier de la forme

$$k \frac{\partial \theta}{\partial \nu} + \beta \theta = -\sigma \nu \cdot \mathbf{u} \quad \text{sur } \Gamma_1,$$

où $\sigma \nu \cdot \mathbf{u}$ est l'énergie dissipée par frottement sur l'obstacle et β une constante positive, dite coefficient de Robin. On peut montrer que la condition aux limites de Fourier s'écrit, en utilisant la fonction de contact introduite dans (I.1.13)

$$k \frac{\partial \theta}{\partial \nu} + \beta \theta \geq \varphi(\theta, \mathbf{u}) \quad \text{sur } \Gamma_1, \quad (\text{I.1.20})$$

On suppose dans cette thèse l'existence d'une constante $\omega \geq 1$ qui dépend seulement de la condition de contact utilisée, de telle sorte que la condition aux limites (I.1.20) se réduit à

$$k \frac{\partial \theta}{\partial \nu} + \beta \theta = \omega \varphi(\theta, \mathbf{u}) \quad \text{sur } \Gamma_1. \quad (\text{I.1.21})$$

Dans les conditions de contact sous-différentiel citées ci-dessus, on vérifie, en calculant le terme de dissipation $\sigma \nu \cdot \mathbf{u}$ que

- (i) $\omega = 1$ pour les conditions de glissement avec loi de frottement Tresca.
- (ii) $\omega = p + 1$ pour les conditions de glissement avec loi de frottement viscoélastique.

I.1.4. Formulation mathématique des problèmes

On considère deux problèmes aux limites pour le fluide de Bingham dont on impose des conditions de contact avec frottement du type sous-différentiel de la forme (I.1.13).

I.1.4.1. Ecoulement dynamique du fluide de Bingham avec contact du type sous-différentiel

L'écoulement dynamique du fluide de Bingham dans un domaine régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$), sous l'action des efforts extérieurs, est modélisé par un système aux dérivées partielles contenant l'équation du mouvement, la loi de comportement ainsi que les conditions aux limites et la condition initiale. On désigne par $\mathbf{Q}$ l'ensemble $\mathbf{Q} = \Omega \times [0, T]$, $T > 0$. Nous admettons que des forces volumiques de densité $\mathbf{f}$ agissent dans $\mathbf{Q}$. Par ailleurs, la frontière est divisée en deux parties mesurables et disjointes Γ_0 et Γ_1 telles que $\text{mes}(\Gamma_0) > 0$. Sur $\Gamma_0 \times [0, T]$ le champ des vitesses est connu et égale à 0. On impose sur $\Gamma_1 \times [0, T]$ des conditions de contact avec frottement du type sous-différentiel. La température du fluide est supposée constante.

Le problème peut se formuler de la manière suivante.

Trouver le champ des vitesses $\mathbf{u} = (u_i)_{1 \leq i \leq n} : \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et le champ des contraintes $\sigma = (\sigma_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} : \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbb{S}_n$ tels que

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \text{Div}(\sigma) + \mathbf{f} \quad \text{sur } \mathbf{Q},$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} &= 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \mathbf{g} \frac{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})}{|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|} \quad \text{si } |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})| \neq 0, \\ |\tilde{\boldsymbol{\sigma}}| &\leq \mathbf{g} \quad \text{si } |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})| = 0, \end{aligned} \right\} \quad \text{sur } \mathbf{Q},$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{sur } \mathbf{Q},$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } \mathbf{\Gamma}_0 \times [0, T],$$

$$\mathbf{u}_\nu = 0 \quad \text{sur } \mathbf{\Gamma}_1 \times [0, T],$$

$$\varphi(\mathbf{v}) - \varphi(\mathbf{u}(t)) \geq -\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{U} \quad \text{sur } \mathbf{\Gamma}_1 \times [0, T],$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \quad \text{sur } \mathbf{\Omega}.$$

On étudiera ce problème dans le deuxième chapitre de cette thèse. Le problème se modélise par une inéquation variationnelle d'évolution non linéaire. On utilisera pour la résolution des techniques fonctionnelles diverses, à savoir la régularisation, la méthode de Fædo-Galerkin, la compacité et la monotonie.

I.1.4.2. Écoulement thermique stationnaire du fluide de Bingham avec contact du type sous-différentiel

L'écoulement thermique stationnaire du fluide de Bingham dans un domaine régulier $\mathbf{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$), sous l'action des efforts extérieurs, est modélisé par un système aux dérivées partielles contenant l'équation du mouvement, l'équation de la conservation de l'énergie, la loi de comportement ainsi que les conditions aux limites. Nous admettons que des forces volumiques de densité $\mathbf{f}$ ainsi qu'une source de chaleur volumique de densité $\mathbf{h}$ agissent dans $\mathbf{\Omega}$. Par ailleurs, la frontière est divisée en deux parties mesurables et disjointes $\mathbf{\Gamma}_0$ et $\mathbf{\Gamma}_1$ telles que $\operatorname{mes}(\mathbf{\Gamma}_0) > 0$.

Sur Γ_0 le champ des vitesses est connu et égale à 0 et la température est donnée par une condition aux limites homogène de Neumann. On impose sur Γ_1 des conditions de contact avec frottement du type sous-différentiel pour l'équation du mouvement et une condition aux limites de Fourier pour l'équation de la conservation de l'énergie.

Le problème peut se formuler de la manière suivante.

Trouver le champ des vitesses $\mathbf{u} = (u_i)_{1 \leq i \leq n} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, le champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} : \Omega \longrightarrow \mathbb{S}_n$ et la température $\theta : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = \mathbf{Div}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{f} \quad \text{sur } \Omega,$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} &= 2\mu(\theta) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \mathbf{g}(\theta) \frac{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})}{|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|} \quad \text{si } |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})| \neq 0, \\ |\tilde{\boldsymbol{\sigma}}| &\leq \mathbf{g}(\theta) \quad \text{si } |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})| = 0, \end{aligned} \right\} \quad \text{sur } \Omega,$$

$$\mathbf{div}(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{sur } \Omega,$$

$$-k\Delta\theta + \mathbf{u} \cdot \nabla\theta = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \mathbf{h} \quad \text{sur } \Omega,$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0,$$

$$\mathbf{u}_\nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1,$$

$$\varphi(\theta, \mathbf{v}) - \varphi(\theta, \mathbf{u}) \geq -\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{U} \quad \text{sur } \Gamma_1,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0,$$

$$k \frac{\partial \theta}{\partial \nu} + \beta \theta = \omega \varphi(\theta, \mathbf{u}) \quad \text{sur } \Gamma_1.$$

L'étude de ce problème fera l'objet du troisième chapitre de cette thèse. La formulation du problème conduit à un système non linéaire constitué d'une inéquation variationnelle et une équation variationnelle. La résolution du problème est basée sur le théorème de point fixe de Kakutani-Glicksberg, la théorie des données $\mathbf{L}^1$, ainsi que quelques arguments de compacité et de monotonie.

I.2. Rappels d'analyse

I.2.1. Eléments d'analyse non linéaire

Dans la première partie de cette section, $\mathbf{H}$ désigne un espace de Hilbert réel muni de son produit scalaire usuel $(\cdot, \cdot)_{\mathbf{H}}$ ainsi que de la norme induite $\|\cdot\|_{\mathbf{H}}$. On note aussi par $\mathbf{H}'$ l'espace dual de $\mathbf{H}$ et par $(\cdot, \cdot)_{\mathbf{H}' \times \mathbf{H}}$ le produit de dualité entre $\mathbf{H}'$ et $\mathbf{H}$.

I.2.1.1. Propriétés générales

Théorème I.2.1. (Théorème de représentation de Riesz-Frechet). *Pour tout $\varphi \in \mathbf{H}'$, il existe un unique $\mathbf{f} \in \mathbf{H}$ tel que*

$$(\varphi, \mathbf{v})_{\mathbf{H}' \times \mathbf{H}} = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{\mathbf{H}} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}.$$

En outre, on a

$$\|\varphi\|_{\mathbf{H}'} = \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}}.$$

Ce qui montre que toute forme linéaire continue sur $\mathbf{H}$ peut se représenter de manière unique à l'aide du produit scalaire. L'application $\varphi \mapsto \mathbf{f}$ est une isométrie qui permet d'identifier $\mathbf{H}$ avec son dual $\mathbf{H}'$.

On dit que la suite $(\mathbf{x}_n)_n \in \mathbf{H}$ converge faiblement vers $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$ et on note $\mathbf{x}_n \rightharpoonup \mathbf{x}$ si

$$(\mathbf{v}, \mathbf{x}_n)_{\mathbf{H}} \longrightarrow (\mathbf{v}, \mathbf{x})_{\mathbf{H}} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}.$$

Dans ce cas, $\mathbf{x}$ s'appelle limite faible de la suite $(\mathbf{x}_n)_n$.

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, il résulte que si $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}$, alors $\mathbf{x}_n \rightharpoonup \mathbf{x}$. La réciproque n'est pas toujours vraie. De plus, puisque tout espace de Hilbert est réflexif, on a le résultat suivant:

Théorème I.2.2. *Soit $(\mathbf{x}_n)_n$ une suite bornée de $\mathbf{H}$, il existe alors un élément $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$ et une sous-suite de $(\mathbf{x}_n)_n$ notée $(\mathbf{x}_\mu)_\mu$ telle que $\mathbf{x}_\mu \rightharpoonup \mathbf{x}$.*

Nous considérons maintenant quelques résultats classiques de l'analyse fonctionnelle, à savoir la représentation des formes bilinéaires, le théorème de Lax-Milgram et la théorie d'interpolation des espaces de Hilbert.

On dit qu'une forme bilinéaire $\mathbf{a} : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \rightarrow \mathbb{R}$ est:

(i) Continue, s'il existe un réel $C > 0$ tel que

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq C \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}.$$

(ii) Coercive, s'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq \alpha \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}}^2 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}.$$

Théorème I.2.3. (Représentation des formes bilinéaires). *Soit $\mathbf{a} : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, continue sur $\mathbf{H} \times \mathbf{H}$. Alors il existe un unique opérateur linéaire borné $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(\mathbf{H}; \mathbf{H}')$ tel que:*

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H} : \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{H}' \times \mathbf{H}}.$$

De plus

$$\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{A}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{H}; \mathbf{H}')}.$$

Théorème I.2.4. (Théorème de Lax-Milgram). *Soit $\mathbf{a} : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, continue et coercive sur $\mathbf{H} \times \mathbf{H}$. Alors pour tout $\varphi \in \mathbf{H}'$, il existe un unique $\mathbf{u} \in \mathbf{H}$ tel que*

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\varphi, \mathbf{v})_{\mathbf{H}' \times \mathbf{H}} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}.$$

Si de plus $\mathbf{a}$ est symétrique, alors $\mathbf{u}$ est solution du problème de minimisation suivant:

$$\mathbf{u} \in \mathbf{H}, \quad \frac{1}{2} \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - (\varphi, \mathbf{u})_{\mathbf{H}' \times \mathbf{H}} = \min_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}} \left[\frac{1}{2} \mathbf{a}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - (\varphi, \mathbf{v})_{\mathbf{H}' \times \mathbf{H}} \right].$$

On va finir ce paragraphe par un petit rappel sur la notion d'interpolation des espaces de Hilbert, qui joue un rôle fondamental dans le travail de cette thèse.

Soient $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ deux espaces de Hilbert qui vérifient l'hypothèse suivante:

$$\mathbf{X} \subset \mathbf{Y}, \quad \mathbf{X} \text{ dense dans } \mathbf{Y} \text{ avec injection continue.} \quad (\text{I.2.1})$$

Dans ce cas $\mathbf{X}$ peut être défini comme le domaine d'un opérateur Λ non borné dans $\mathbf{Y}$, auto-adjoint et positif, ayant une norme équivalente à la norme du graphe, c'est à dire

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{X}} = \left(\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{Y}}^2 + \|\Lambda \mathbf{u}\|_{\mathbf{Y}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{X} = \mathbf{D}(\Lambda).$$

On pose alors la définition suivante des espaces d'interpolation (espaces intermédiaires)

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]_{\theta} = \mathbf{D}(\Lambda^{1-\theta}), \quad 0 \leq \theta \leq 1,$$

et on munit l'espace intermédiaire $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]_{\theta}$ de la norme du graphe de $\Lambda^{1-\theta}$, i.e.

$$\|\mathbf{u}\|_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]_{\theta}} = \left(\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{Y}}^2 + \|\Lambda^{1-\theta} \mathbf{u}\|_{\mathbf{Y}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall \mathbf{u} \in [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]_{\theta}.$$

Il résulte de la théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints que $\mathbf{X} \subset [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]_{\theta} \subset \mathbf{Y}$, chaque espace étant dense dans le suivant avec des injections continues.

La résultat suivant est une conséquence immédiate de la définition des espaces $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]_{\theta}$ et du fait que $\|\Lambda^{1-\theta} \mathbf{u}\|_{\mathbf{Y}} \leq \|\Lambda \mathbf{u}\|_{\mathbf{Y}}^{1-\theta} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{Y}}^{\theta}$.

Lemme I.2.1. (Inégalité d'interpolation). *Pour tout $\mathbf{u} \in \mathbf{X}$, on a*

$$\|\mathbf{u}\|_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]_{\theta}} \leq C \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{X}}^{1-\theta} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{Y}}^{\theta}.$$

Introduisons une situation que nous retrouvons souvent dans le chapitre II.

Soient $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ deux espaces de Hilbert qui vérifient l'hypothèse (I.2.1). Identifiant $\mathbf{Y}$ à son dual et $\mathbf{X}'$ désignant le dual de $\mathbf{X}$, donc par dualité $\mathbf{X} \subset \mathbf{Y} \subset \mathbf{X}'$, chaque espace étant dense dans le suivant avec des injections continues. Nous avons donc l'identité suivante:

$$[\mathbf{X}, \mathbf{X}']_{\frac{1}{2}} = \mathbf{Y}.$$

I.2.1.2. Fonctions convexes et sous-différentiabilité

Nous commençons ici par quelques préliminaires sur les fonctions convexes et les fonctions semi-continues inférieurement, ensuite nous donnons une généralisation de la notion de gradient aux fonctions convexes.

Soit φ une fonction définie sur un espace vectoriel réel $\mathbf{E}$ et à valeur dans $] -\infty, \infty]$.

φ est dite propre si elle n'est pas identiquement égale à ∞ , c'est à dire s'il existe $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$ tel que $\varphi(\mathbf{x}) < \infty$. φ est dite convexe si

$$\varphi(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) \leq t\varphi(\mathbf{x}) + (1-t)\varphi(\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{E}, \quad t \in [0, 1],$$

φ est dite strictement convexe si cette dernière inégalité est stricte pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{E}$ et tels que $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$.

On définit le domaine et l'épigraphe de φ , respectivement, par:

$$\text{dom}(\varphi) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E} \text{ tel que } \varphi(\mathbf{x}) < \infty\},$$

$$\text{epi}(\varphi) = \{(\mathbf{x}, \alpha) \in \mathbf{E} \times \mathbb{R} \text{ tel que } \varphi(\mathbf{x}) \leq \alpha\}.$$

Il clair qu'on peut établir les résultats suivants:

- (i) φ est propre si et seulement si $\text{dom}(\varphi) \neq \emptyset$.
- (ii) Le domaine de φ est un convexe de $\mathbf{E}$ si φ est convexe.
- (iii) φ est convexe si et seulement si $\text{epi}(\varphi)$ est un ensemble convexe dans $\mathbf{E} \times \mathbb{R}$.

Une fonction φ définie sur un espace topologique $\mathbf{E}$ et à valeur dans $] -\infty, \infty]$ est dite semi-continue inférieurement si $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ l'ensemble $\{\mathbf{x} \in \mathbf{E} \text{ tel que } \varphi(\mathbf{x}) \leq \alpha\}$ est fermé.

Nous donnons ici quelques propriétés des fonctions semi-continues inférieurement.

Lemme I.2.2. *Soit $\varphi : \mathbf{H} \rightarrow \mathbb{R}$. Alors*

- (i) *φ est semi-continue inférieurement si et seulement si $\text{epi}(\varphi)$ est fermé dans $\mathbf{H} \times \mathbb{R}$.*
- (ii) *φ est semi-continue inférieurement si et seulement si pour tout $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage $V_{\mathbf{x}}$ de $\mathbf{x}$ dans $\mathbf{H}$ tel que $\varphi(\mathbf{u}) \geq \varphi(\mathbf{x}) - \varepsilon$ pour tout $\mathbf{u} \in V_{\mathbf{x}}$.*

Il en résulte en particulier que si φ est semi-continue inférieurement et si $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}$, alors

$$\liminf \varphi(\mathbf{x}_n) \geq \varphi(\mathbf{x}).$$

Ce lemme nous conduit au résultat suivant:

Théorème I.2.5. *Soit $\varphi : \mathbf{H} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et propre. Alors φ est semi-continue inférieurement si et seulement si elle est semi-continue inférieurement pour la topologie faible de $\mathbf{H}$.*

Une fonction $\varphi : \mathbf{H} \rightarrow]-\infty, \infty]$ est dite Gâteaux-différentiable en un point $\mathbf{u} \in \mathbf{H}$ s'il existe un élément $\nabla \varphi(\mathbf{u}) \in \mathbf{H}$ tel que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(\mathbf{u} + t\mathbf{v}) - \varphi(\mathbf{u})}{t} = (\nabla \varphi(\mathbf{u}), \mathbf{v})_{\mathbf{H}} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}.$$

L'élément $\nabla \varphi(\mathbf{u})$ est appelé la différentielle au sens de Gâteaux de φ au point $\mathbf{u}$.

La fonction φ est dite Gâteaux-différentiable si elle est Gâteaux-différentiable en tout point de $\mathbf{H}$; dans ce cas l'opérateur $\mathbf{u} \mapsto \nabla \varphi(\mathbf{u}) : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ s'appelle le gradient de la fonction φ .

La convexité des fonctions Gâteaux-différentiables peut être caractérisée de la façon suivante.

Lemme I.2.3. *Soit $\varphi : \mathbf{H} \rightarrow]-\infty, \infty]$ une fonction Gâteaux-différentiable. Alors φ est convexe si et seulement si*

$$\varphi(\mathbf{v}) - \varphi(\mathbf{u}) \geq (\nabla \varphi(\mathbf{u}), \mathbf{v} - \mathbf{u})_{\mathbf{H}} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}. \quad (\text{I.2.2})$$

L'inégalité (I.2.2) suggère une généralisation de la notion de gradient aux fonctions convexes. On dit que la fonction $\varphi : \mathbf{H} \rightarrow]-\infty, \infty]$ est sous-différentiable en un point $\mathbf{u} \in \mathbf{H}$ s'il existe

$\mathbf{f} \in \mathbf{H}$ tel que

$$\varphi(\mathbf{v}) - \varphi(\mathbf{u}) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_{\mathbf{H}} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}. \quad (\text{I.2.3})$$

L'élément $\mathbf{f}$ est appelé sous-gradient de φ au point $\mathbf{u}$ et l'ensemble des sous-gradients de φ en $\mathbf{u}$ est appelé le sous-différentiel de φ en $\mathbf{u}$ et est noté $\partial\varphi(\mathbf{u})$:

$$\partial\varphi(\mathbf{u}) = \{\mathbf{f} \in \mathbf{H} \mid \varphi(\mathbf{v}) - \varphi(\mathbf{u}) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_{\mathbf{H}} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}\}. \quad (\text{I.2.4})$$

On note par $\text{dom}(\partial\varphi)$ l'ensemble défini par:

$$\text{dom}(\partial\varphi) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H} \mid \partial\varphi(\mathbf{u}) \neq \emptyset\}. \quad (\text{I.2.5})$$

En utilisant (I.2.4), (I.2.5) et la définition du domaine d'une fonction, il résulte:

$$\text{dom}(\partial\varphi) \subset \text{dom}(\varphi). \quad (\text{I.2.6})$$

L'opérateur multivoque $\mathbf{H} \longrightarrow 2^{\mathbf{H}} : \mathbf{u} \longmapsto \partial\varphi(\mathbf{u})$ s'appelle le sous-différentiel de φ .

La fonction φ est dite sous-différentiable si elle sous-différentiable en tout point de $\mathbf{H}$, c'est à dire $\text{dom}(\partial\varphi) = \mathbf{H}$.

Lemme I.2.4. *Soit $\varphi : \mathbf{H} \longrightarrow]-\infty, \infty]$ une fonction sous-différentiable. Alors φ est convexe, propre et semi-continue inférieurement.*

Dans le cas d'une fonction convexe, le lien entre l'opérateur gradient et le sous-différentiel est donné par:

Lemme I.2.5. *Soit $\varphi : \mathbf{H} \longrightarrow]-\infty, \infty]$ une fonction convexe et Gâteaux-différentiable. Alors φ est sous-différentiable et on a*

$$\partial\varphi(\mathbf{u}) = \{\nabla\varphi(\mathbf{u})\} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}.$$

I.2.1.3. Opérateurs fortement monotones et inéquations variationnelles

Soient $\mathbf{A} : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{H}$ un opérateur, $\varphi : \mathbf{H} \longrightarrow]-\infty, \infty]$ une fonction propre et $\mathbf{f} \in \mathbf{H}$. Un nombre considérable de problèmes aux limites en mécanique des milieux continus ont un lieu

avec les problèmes suivants.

Trouver $\mathbf{u} \in \mathbf{H}$ tel que

$$(\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_{\mathbf{H}} + \varphi(\mathbf{v}) - \varphi(\mathbf{u}) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_{\mathbf{H}} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}. \quad (\text{I.2.7})$$

Le problème (I.2.7) est appelé inéquation variationnelle elliptique de seconde espèce sur $\mathbf{H}$.

L'opérateur $\mathbf{A}$ est dit:

(i) Fortement monotone s'il existe un réel $m > 0$ tel que

$$(\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{A}\mathbf{v}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_{\mathbf{H}} \geq m \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^2 \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}. \quad (\text{I.2.8})$$

(ii) Lipschitzien s'il existe un réel $M > 0$ tel que

$$\|\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{A}\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}} \leq M \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{H}} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}. \quad (\text{I.2.9})$$

En ce qui concerne le problème (I.2.7) on a le résultat d'existence et d'unicité suivant.

Théorème I.2.6. *Soit $\mathbf{A} : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{H}$ un opérateur fortement monotone et de Lipschitz et φ une fonction convexe et semi-continue inférieurement. Alors l'inéquation variationnelle elliptique de seconde espèce (I.2.7) admet une solution unique.*

I.2.1.4. Fonctions multivoques et théorème de point fixe de Kakutani-Glicksberg

Dans cette partie on rappelle et on résume quelques notions et résultats de base concernant les fonctions multivoques dans les espaces topologiques ainsi que le théorème de point fixe de Kakutani-Glicksberg.

Soient $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ deux espaces vectoriels topologiques. On appelle fonction multivoque de $\mathbf{X}$ dans $\mathbf{Y}$ une application $\mathcal{L}$ qui associe à chaque point de $\mathbf{X}$ un ou plusieurs points de $\mathbf{Y}$, formellement $\mathcal{L}$ peut être voir comme une application de $\mathbf{X}$ dans $2^{\mathbf{Y}}$.

La fonction multivoque $\mathcal{L} : \mathbf{X} \longrightarrow 2^{\mathbf{Y}}$ est dite:

(i) à graphe fermé si l'ensemble $\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \mid \mathbf{y} \in \mathcal{L}(\mathbf{x})\}$ est fermé dans $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ pour la topologie produit.

(ii) semi-continue supérieurement si pour tout ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbf{Y}$ l'ensemble $\{\mathbf{x} \in \mathbf{X} \mid \mathcal{L}(\mathbf{x}) \subset \mathcal{U}\}$

est ouvert dans $\mathbf{X}$.

Supposons que $\mathbf{Y}$ est convexe, l'application est dite de Kakutani si elle est semi-continue supérieurement et si $\mathcal{L}(\mathbf{x})$ est une partie non-vide compacte et convexe pour tout $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$.

Soit maintenant $\mathcal{L} : \mathbf{X} \longrightarrow 2^{\mathbf{X}}$ une fonction multivoque sur un espace vectoriel topologique, on dit que $\mathcal{L}$ possède un point fixe s'il existe un point $\mathbf{z} \in \mathbf{X}$ tel que $\mathbf{z} \in \mathcal{L}(\mathbf{z})$.

Théorème I.2.7. (Théorème de point fixe de Kakutani-Glicksberg). *Soit $\mathbf{S}$ un sous-ensemble non-vide compact et convexe d'un espace vectoriel topologique localement convexe et soit $\mathcal{L} : \mathbf{S} \longrightarrow 2^{\mathbf{S}}$ une application de Kakutani. Alors $\mathcal{L}$ possède un point fixe.*

Corollaire I.2.1. *Soit $\mathbf{S}$ un sous-ensemble non-vide compact et convexe d'un espace de Hausdorff localement convexe et soit $\mathcal{L} : \mathbf{S} \longrightarrow 2^{\mathbf{S}}$ une fonction multivoque ayant un graphe fermé et telle que $\mathcal{L}(\mathbf{x})$ est une partie non-vide compacte et convexe pour tout $\mathbf{x} \in \mathbf{S}$. Alors l'ensemble des points fixes de $\mathcal{L}$ est non-vide et compact.*

I.2.1.5. Lemme de Gronwall

Nous rappelons ici le lemme du type Gronwall qui intervient dans plusieurs problèmes de majoration, en particulier pour établir l'unicité de la solution.

Lemme I.2.6. *Soient $n \in \mathbf{L}^1(0, T; \mathbb{R}_+)$ et $a \geq 0$. Si $\varphi \in \mathbf{L}^1(0, T; \mathbb{R})$ est une fonction telle que*

$$\varphi(t) \leq a + \int_0^t n(s) \varphi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\varphi(t) \leq a \exp \left(\int_0^t n(s) ds \right) \quad \forall t \in [0, T].$$

Pour plus de détails sur cette partie nous renvoyons aux ouvrages [6], [9], [18], [20] et [32].

I.2.2. Espaces fonctionnels et opérateurs divergence et déformation

On introduit ici des notions générales sur les espaces de Sobolev ainsi que les espaces de fonctions à valeurs vectorielles. On présente en plus leurs principales propriétés, notamment les injections de Sobolev, le théorème de trace et les différents résultats de compacité. On rappelle

ensuite les espaces de Sobolev utilisés en mécanique des milieux continus et liés aux opérateurs divergence et déformation. Pour plus de détails sur cette partie on revoit aux ouvrages [1], [9], [16], [31], [32] et [49].

I.2.2.1. Espaces de Sobolev

Dans toute la suite, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un domaine borné, $1 \leq p \leq \infty$ et $m \in \mathbb{N}$. On rappelle que $\mathbf{W}^{m,p}(\Omega)$ est l'espace

$$\mathbf{W}^{m,p}(\Omega) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^p(\Omega) \mid D^\alpha \mathbf{u} \in \mathbf{L}^p(\Omega), \quad 0 \leq |\alpha| \leq m\},$$

où $D^\alpha \mathbf{u}$ désigne la dérivée d'ordre $\alpha \in \mathbb{N}^n$ au sens des distributions.

Si $1 \leq p < \infty$, alors $\mathbf{W}^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach réel pour la norme

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{W}^{m,p}(\Omega).$$

En particulier, $\mathbf{H}^m(\Omega) = \mathbf{W}^{m,2}(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire et la norme induite, respectivement,

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{H}^m(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (D^\alpha \mathbf{u}, D^\alpha \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^m(\Omega),$$

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^m(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}^m(\Omega).$$

Pour s réel positif quelconque, on définit l'espace de Sobolev $\mathbf{H}^s(\Omega)$ comme étant l'espace intermédiaire d'ordre θ entre $\mathbf{H}^m(\Omega)$ et $\mathbf{H}^0(\Omega) = \mathbf{L}^2(\Omega)$

$$\mathbf{H}^s(\Omega) = [\mathbf{H}^m(\Omega), \mathbf{L}^2(\Omega)]_\theta, \quad (1-\theta)m = s \text{ et } 0 \leq \theta \leq 1.$$

D'autre part, $\mathbf{W}^{m,\infty}(\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} (\sup_{\text{ess}} |D^\alpha \mathbf{u}|) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{W}^{m,\infty}(\Omega).$$

Nous utiliserons très souvent dans les raisonnements, les théorèmes de compacité et en particulier celui de Rellich, les injections de Sobolev et le théorème de trace de Sobolev.

Théorème I.2.8. (Injections de Sobolev). *Soit Ω un ouvert Lipschitzien de $\mathbb{R}^n$ et $1 \leq p < \infty$.*

- (i) *Si $p \in [1, n[$, alors $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ s'injecte continuellement dans $\mathbf{L}^q(\Omega)$ avec $q \in \left[1, \frac{np}{n-p}\right]$.*
- (ii) *Si $p = n$, alors $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ s'injecte continuellement dans $\mathbf{L}^q(\Omega)$ ceci $\forall q \in [n, +\infty[$.*
- (iii) *Si $p \in]n, +\infty[$, alors $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ s'injecte continuellement dans $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$.*

Théorème I.2.9. (Théorème de compacité de Rellich). *Soit Ω un ouvert borné et Lipschitzien de $\mathbb{R}^n$ et $p \in [1, +\infty[$. Alors $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ s'injecte compactement dans $\mathbf{L}^p(\Omega)$.*

Théorème I.2.10. (Compacité $\mathbf{L}^p - \mathbf{L}^q$). *Soit Ω un ensemble de mesure finie de $\mathbb{R}^n$ et $1 \leq q < p < \infty$. Si $(\mathbf{u}_\mu)_{\mu \geq 1}$ est une suite qui converge presque partout vers $\mathbf{u}$ et qui est bornée dans $\mathbf{L}^p(\Omega)$, alors $\mathbf{u}_\mu \longrightarrow \mathbf{u}$ dans $\mathbf{L}^q(\Omega)$.*

Lemme I.2.7. *Soit Θ un ouvert borné de $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t$ et $\mathbf{g}_\mu, \mathbf{g}$ des fonctions de $\mathbf{L}^q(\Theta)$, $1 < q < \infty$ telles que*

$$\|\mathbf{g}_\mu\|_{\mathbf{L}^q(\Theta)} \leq c \text{ et } \mathbf{g}_\mu \longrightarrow \mathbf{g} \text{ p.p. dans } \Theta.$$

Alors

$$\mathbf{g}_\mu \longrightarrow \mathbf{g} \text{ dans } \mathbf{L}^q(\Theta) \text{ faible.}$$

Théorème I.2.11. (Théorème de trace de Sobolev). *Soit Ω un ouvert borné et Lipschitzien de $\mathbb{R}^n$. Alors l'application*

$$\mathcal{D}(\bar{\Omega}) \longrightarrow \mathcal{D}(\Gamma) : \mathbf{u} \longmapsto \mathbf{u}|_\Gamma,$$

se prolonge par continuité en une application linéaire continue

$$\mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbf{L}^p(\Gamma) : \mathbf{u} \longmapsto \gamma(\mathbf{u}) = \mathbf{u}|_\Gamma,$$

γ est appelée application trace sur $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$.

Soit $1 \leq p < \infty$. On appelle espace de traces, l'espace vectoriel

$$\mathbf{W}^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma) = \gamma(\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)) = \{\gamma(\mathbf{u}), \mathbf{u} \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)\},$$

que l'on munit de la norme

$$\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}^{1-\frac{1}{p}, p}(\Gamma)} = \inf \left\{ \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{1, p}(\Omega)} \mid \gamma(\mathbf{u}) = \mathbf{f} \right\}.$$

$\mathbf{W}^{1-\frac{1}{p}, p}(\Gamma)$ est un sous-espace de $\mathbf{L}^p(\Gamma)$, de plus c'est un Banach, qui est réflexif lorsque $1 < p < \infty$.

On constate aisément que l'application

$$\gamma : \mathbf{W}^{1, p}(\Omega) \longrightarrow \mathbf{W}^{1-\frac{1}{p}, p}(\Gamma).$$

est continue de norme inférieure à 1.

Lorsque $p = 2$, l'espace $\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma) = \mathbf{W}^{\frac{1}{2}, 2}(\Gamma)$ est un Hilbert pour la structure transportée. De plus, en identifiant $\mathbf{L}^2(\Gamma)$ à son dual, on a

$$\left(\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \right)' = \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma). \quad (\text{I.2.11})$$

Théorème I.2.12. (Injections de Sobolev pour les espaces de traces). *Soit Ω un ouvert borné et Lipschitzien de $\mathbb{R}^n$ et $1 \leq p < \infty$.*

(i) *Si $p \in [1, n[$, alors $\mathbf{W}^{1-\frac{1}{p}, p}(\Gamma)$ s'injecte continuellement dans $\mathbf{L}^q(\Gamma)$ avec $q \in \left[1, \frac{(n-1)p}{n-p}\right]$ et compactement dans $\mathbf{L}^p(\Gamma)$.*

(ii) *Si $p = n$, alors $\mathbf{W}^{1-\frac{1}{p}, p}(\Gamma)$ s'injecte continuellement dans $\mathbf{L}^q(\Gamma)$ ceci $\forall q \in [1, +\infty[$.*

(iii) *Si $p \in]n, +\infty[$, alors $\mathbf{W}^{1-\frac{1}{p}, p}(\Gamma)$ s'injecte continuellement dans $\mathcal{C}(\Gamma)$.*

I.2.2.2. Espaces de fonctions à valeurs vectorielles

Soit $\mathbf{H}$ un espace de Hilbert, $1 \leq p \leq \infty$ et $T > 0$, on désigne par $\mathbf{L}^p(0, T; \mathbf{H})$ l'espace des classes de fonctions $t \mapsto \mathbf{u}(t)$ de $[0, T] \longrightarrow \mathbf{H}$ qui sont mesurables à valeurs dans $\mathbf{H}$ telles que

$$\left(\int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{H}}^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^p(0, T; \mathbf{H})} < +\infty. \quad (\text{I.2.12})$$

Si $1 \leq p < \infty$, $\mathbf{L}^p(0, T; \mathbf{H})$ est un espace de Banach pour la norme (I.2.12). En particulier,

si $p = 2$, $\mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{H})$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{H})} = \int_0^T (\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t))_{\mathbf{H}} dt \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{H}). \quad (\text{I.2.13})$$

Si $p = \infty$, $\mathbf{L}^\infty(0, T; \mathbf{H})$ est un espace de Banach pour la norme définie par

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^\infty(0, T; \mathbf{H})} = \sup_{]0, T[} \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{H}} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathbf{H}). \quad (\text{I.2.14})$$

Pour traiter les problèmes d'évolution, on a besoin des résultats suivants.

Théorème I.2.13. (Théorème de Dunford-Pettis). *Soit $\mathbf{H}$ un espace de Hilbert et $T > 0$, alors l'espace $\mathbf{L}^\infty(0, T; \mathbf{H}')$ est le dual de l'espace $\mathbf{L}^1(0, T; \mathbf{H})$.*

Lemme I.2.8. *Soient $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ deux espaces de Hilbert vérifiant l'hypothèse (I.2.1) et $T > 0$. Si*

$$\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{X}) \text{ et } \frac{d\mathbf{u}}{dt} \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{Y}),$$

alors $\mathbf{u}$ est après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle de $[0, T]$, continue de $[0, T]$ dans $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]_{\frac{1}{2}}$.

Théorème I.2.14. (Théorème de compacité d'Aubin). *Soient $\mathbf{B}_0, \mathbf{B}$ et $\mathbf{B}_1$ trois espaces de Banach tels que $\mathbf{B}_0 \subset \mathbf{B} \subset \mathbf{B}_1$, l'injection $\mathbf{B}_0 \longrightarrow \mathbf{B}$ est compacte et $\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1$ sont réflexifs.*

Considérons pour $T > 0$ et $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$, l'espace de Banach suivant:

$$\mathbf{W} = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}^{p_0}(0, T; \mathbf{B}_0) \text{ et } \frac{d\mathbf{u}}{dt} \in \mathbf{L}^{p_1}(0, T; \mathbf{B}_1) \right\},$$

muni de la norme

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^{p_0}(0, T; \mathbf{B}_0)} + \left\| \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right\|_{\mathbf{L}^{p_1}(0, T; \mathbf{B}_1)}.$$

Alors l'injection $\mathbf{W} \longrightarrow \mathbf{L}^{p_0}(0, T; \mathbf{B})$ est compacte.

I.2.2.3. Opérateurs divergence et déformation

Nous désignons par $\mathbb{S}_n$ l'espace des tenseurs d'ordre deux sur $\mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$), " $\cdot$ " et $|\cdot|$ représentent, respectivement, le produit scalaire et la norme Euclidienne induite sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{S}_n$.

Ainsi,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i, \quad |\mathbf{u}| = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})^{\frac{1}{2}} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n,$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} = \sum_{i,j=1}^n \sigma_{ij} \tau_{ij}, \quad |\boldsymbol{\tau}| = (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau})^{\frac{1}{2}} \quad \forall \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{S}_n.$$

On utilise les notations suivantes:

$$\mathbf{L}^2(\Omega)_s^{n \times n} = \{ \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij}) \mid \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \mid i, j = \overline{1, n} \},$$

$$\mathbf{H}^1(\Omega)^n = \{ \mathbf{u} = (u_i) \mid u_i \in \mathbf{H}^1(\Omega) \mid i = \overline{1, n} \} = \{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)^n \mid \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \in \mathbf{L}^2(\Omega)_s^{n \times n} \},$$

$$\mathcal{H}_1 = \{ \boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{L}^2(\Omega)_s^{n \times n} \mid \mathbf{Div}(\boldsymbol{\sigma}) \in \mathbf{L}^2(\Omega)^n \},$$

où $\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{H}^1(\Omega)^n \longrightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)_s^{n \times n}$ et $\mathbf{Div} : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)^n$ sont les opérateurs de déformation et de divergence définis par

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = (\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})) : \quad \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{i,j} + \mathbf{u}_{j,i}) \quad \text{et} \quad \mathbf{Div}(\boldsymbol{\sigma}) = (\sigma_{ij,j}). \quad (\text{I.2.15})$$

Comme la frontière Γ est Lipschitzienne, le vecteur normale sortant $\boldsymbol{\nu}$ à la frontière est défini p.p. Pour tout champ de vecteurs $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)^n$ nous conservons la notation $\mathbf{v}$ pour désigner la trace de $\mathbf{v}$ sur Γ et on note par $\mathbf{v}_\nu$ et $\mathbf{v}_\tau$ les composantes normale et tangentielle de $\mathbf{v}$ sur la frontière, données par la formule:

$$\mathbf{v}_\nu = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu}, \quad \mathbf{v}_\tau = \mathbf{v} - \mathbf{v}_\nu \boldsymbol{\nu}. \quad (\text{I.2.16})$$

Désignons par γ l'application trace

$$\gamma : \mathbf{H}^1(\Omega)^n \longrightarrow \mathbf{L}^2(\Gamma)^n,$$

et faisons introduire les notations

$$\mathbf{H}_\Gamma = \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^n = \gamma(\mathbf{H}^1(\Omega)^n) \quad \text{et} \quad \mathbf{H}'_\Gamma = \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^n,$$

et par $(\cdot, \cdot)_{\mathbf{H}'_\Gamma \times \mathbf{H}_\Gamma}$ le produit de dualité entre $\mathbf{H}'_\Gamma$ et $\mathbf{H}_\Gamma$. Pour tout $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}_1$, il existe un élément noté $\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} \in \mathbf{H}'_\Gamma$ tel que la formule de Green suivante soit satisfaite

$$(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu}, \gamma\mathbf{v})_{\mathbf{H}'_\Gamma \times \mathbf{H}_\Gamma} = (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathbf{L}^2(\Omega)^{n \times n}} + (\mathbf{Div}(\boldsymbol{\sigma}), \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(\Omega)^n} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)^n.$$

En outre, si $\boldsymbol{\sigma}$ est assez régulier (par exemple $\mathcal{C}^1$), nous avons

$$(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu}, \gamma\mathbf{v})_{\mathbf{H}'_\Gamma \times \mathbf{H}_\Gamma} = \int_\Gamma \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} d\gamma \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)^n,$$

où $d\gamma$ représente l'élément de surface. Nous définissons de façon analogue les composantes normale et tangentielle de $\boldsymbol{\sigma}$ sur la frontière Γ par la formule:

$$\boldsymbol{\sigma}_\nu = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\sigma}_\nu \boldsymbol{\nu}. \quad (\text{I.2.17})$$

Tout au long de cette thèse, dans les problèmes mécaniques, Γ est partitionnée en deux parties mesurables et disjointes Γ_0 et Γ_1 , telles que $\text{mes}(\Gamma_0) > 0$. Nous aurons besoin de l'espace des déplacements admissibles

$$\mathbf{V} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)^n \mid \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}.$$

L'inégalité de Korn s'applique sur $\mathbf{V}$: il existe une constante $C > 0$ dépendant uniquement de Ω et Γ_0 , telle que

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)^{n \times n}} \geq C \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)^n} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)^n. \quad (\text{I.2.18})$$

CHAPITRE II

ÉCOULEMENT DYNAMIQUE DU FLUIDE DE BINGHAM AVEC CONTACT DU TYPE SOUS-DIFFÉRENTIEL

Dans ce chapitre, on considère un modèle mathématique qui décrit l'écoulement dynamique du fluide incompressible et viscoplastique de Bingham dans un domaine partiellement limité par un obstacle. Les conditions aux limites sont modélisées par des conditions de contact du type sous-différentiel. Un théorème d'existence de solutions faibles et quelques résultats d'existence et d'unicité de la solution forte sont établis pour ce problème dans le cadre général et qui restent valables pour les différents problèmes de contact conduisant aux inégalités du type sous-différentiel. Les démonstrations sont basées sur des arguments des inéquations d'évolution non linéaires, à savoir la régularisation, la méthode de Fædo-Galerkin, la compacité et la monotonie. On établit ensuite un résultat de dépendance continue de la solution forte par rapport à la fonction de contact. Enfin, on présente deux exemples de loi de contact conduisant à une inégalité du type sous-différentiel, voir [33].

II.1. Formulation du problème mécanique

On considère un problème mécanique qui décrit l'écoulement dynamique du fluide incompressible, viscoplastique de Bingham dans un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$), de frontière régulière $\partial\Omega = \Gamma$ constituée de deux parties mesurables et disjointes Γ_0 et Γ_1 , telles que $\text{mes}(\Gamma_0) > 0$. On désigne par $\mathbf{Q}$ l'ensemble $\mathbf{Q} = \Omega \times [0, T]$, $T \geq 0$. Les forces volumiques de densité $\mathbf{f}$ agissent dans $\mathbf{Q}$. On impose sur $\Gamma_1 \times [0, T]$ des conditions de contact avec frottement du type sous-différentiel.

On désigne par $\tilde{\sigma}$ le déviateur du tenseur des contraintes σ , donné par

$$\tilde{\sigma} = (\tilde{\sigma}_{ij}), \quad \tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\text{tr}\sigma}{n} \delta_{ij},$$

où $\delta = (\delta_{ij})$ est le tenseur identique.

Le problème mécanique peut se formuler de la manière suivante.

Problème (P.II.1). Trouver le champ des vitesses $\mathbf{u} = (u_i)_{1 \leq i \leq n} : \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et le champ des contraintes $\sigma = (\sigma_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} : \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbb{S}_n$ tels que

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \text{Div}(\sigma) + \mathbf{f} \quad \text{sur } \mathbf{Q}, \quad (\text{II.1.1})$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\sigma} &= 2\mu\varepsilon(\mathbf{u}) + \mathbf{g} \frac{\varepsilon(\mathbf{u})}{|\varepsilon(\mathbf{u})|} \quad \text{si } |\varepsilon(\mathbf{u})| \neq 0, \\ |\tilde{\sigma}| &\leq \mathbf{g} \quad \text{si } |\varepsilon(\mathbf{u})| = 0, \end{aligned} \right\} \quad \text{sur } \mathbf{Q}, \quad (\text{II.1.2})$$

$$\text{div}(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{sur } \mathbf{Q}, \quad (\text{II.1.3})$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \times [0, T], \quad (\text{II.1.4})$$

$$\mathbf{u}_\nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times [0, T], \quad (\text{II.1.5})$$

$$\varphi(\mathbf{v}) - \varphi(\mathbf{u}(t)) \geq -\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{U} \text{ sur } \Gamma_1 \times [0, T], \quad (\text{II.1.6})$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \text{ sur } \Omega. \quad (\text{II.1.7})$$

Rappelons ici que $\frac{D}{Dt}$ est la dérivée particulaire. L'équation (II.1.1) représente l'équation du mouvement durant la période $[0, T]$ telle que $\mathbf{Div}(\boldsymbol{\sigma}) = (\sigma_{ij,j})$ et $\mathbf{f}$ est la densité des forces volumiques agissant sur le fluide. La relation (II.1.2) représente la loi de comportement du fluide viscoplastique de Bingham. L'équation (II.1.3) est la condition d'incompressibilité du fluide dans laquelle $\mathbf{div}(\mathbf{u}) = u_{i,i}$. (II.1.4) est une condition sur la vitesse sur la partie $\Gamma_0 \times [0, T]$ de la frontière et (II.1.5) est une condition de glissement sur la partie $\Gamma_1 \times [0, T]$ de la frontière. $\mathbf{U}$ est l'ensemble des fonctions admissibles de test et tel que $\mathbf{U} = \{\mathbf{v} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n \mid \mathbf{v}_\nu = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$, la relation (II.1.6) représente la condition aux limites du type sous-différentiel sur la partie $\Gamma_1 \times [0, T]$ de la frontière où $\varphi : (\Gamma_1 \times [0, T]) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction mesurable et convexe. Finalement, (II.1.7) est une condition initiale.

II.2. Formulation variationnelle du problème et hypothèses

Nous allons dériver dans cette section une formulation variationnelle du problème mécanique (P.II.1). Nous introduisons dans un premier temps quelques notations et hypothèses et nous établissons des lemmes qui permettent d'obtenir la formulation variationnelle. On désigne par $\mathcal{V}_s$, ($s \geq 0$) l'espace

$$\mathcal{V}_s = \{\mathbf{v} \in (\mathbf{H}^s(\Omega))^n : \mathbf{div}(\mathbf{v}) = 0 \text{ sur } \Omega, \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \text{ et } \mathbf{v}_\nu = 0 \text{ sur } \Gamma_1\},$$

$\mathcal{V}_s$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire et la norme induite, respectivement,

$$((\mathbf{v}, \mathbf{w}))_s = \sum_{i=1}^n (\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i)_{\mathbf{H}^s(\Omega)}, \quad \|\mathbf{v}\|_s = ((\mathbf{v}, \mathbf{v}))_s^{\frac{1}{2}}.$$

On note

$$\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}, \quad \|\mathbf{v}\|_1 = \|\mathbf{v}\|.$$

$$\mathcal{V}_0 = \mathcal{H}, \quad \|\mathbf{v}\|_0 = |\mathbf{v}| \quad \text{et} \quad ((\mathbf{v}, \mathbf{w}))_0 = (\mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

On introduit les fonctionnelles suivantes:

$$\mathbf{a} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2\mu \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x}. \quad (\text{II.2.1})$$

$$\mathbf{B} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j \, d\mathbf{x}. \quad (\text{II.2.2})$$

$$\mathbf{c} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{c}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_0, \mathbf{v}) + \mathbf{B}(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}, \mathbf{v}). \quad (\text{II.2.3})$$

$$\mathbf{d} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \quad \mathbf{d}(\mathbf{v}) = \begin{cases} \int_{\Gamma_1} \varphi(\mathbf{v}) \, d\gamma & \text{si } \varphi(\mathbf{v}) \in L^1(\Gamma_1), \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{II.2.4})$$

$$\mathbf{J} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{J}(\mathbf{v}) = g \int_{\Omega} |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})| \, d\mathbf{x}. \quad (\text{II.2.5})$$

Ici $d\gamma$ représente l'élément de surface. Dans toute la suite on désignera par c des constantes diverses. Le lemme suivant donne quelques propriétés des fonctionnelles $\mathbf{a}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{J}$.

Lemme II.2.1.

1. $\mathbf{a}$ est bilinéaire, symétrique, continue et coercive sur $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$.
2. $\mathbf{B}$ est trilinéaire sur $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V}$.
3. $\mathbf{J}$ est continue sur $\mathcal{V}$.

Preuve du Lemme II.2.1.

1. La bilinéarité et la symétrie sont triviales, il suffit de montrer les autres propriétés. En effet, on a d'après l'inégalité de Hölder

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq 2\mu \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)_s^{n \times n}} \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)_s^{n \times n}} \leq 2\mu \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|,$$

ce qui montre la continuité de $\mathbf{a}$.

Par ailleurs, on sait d'après l'inégalité de Korn qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 2\mu \int_{\Omega} |\varepsilon(\mathbf{u})|^2 \, d\mathbf{x} \geq 2\mu\alpha \|\mathbf{u}\|^2,$$

d'où la coercivité de $\mathbf{a}$.

2. La trilinearité de $\mathbf{B}$ sur $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ est triviale.

3. Pour montrer la continuité de $\mathbf{J}$ il suffit de considérer une suite $\mathbf{v}_n \in \mathcal{V}$ qui converge vers $\mathbf{v}$ dans $\mathcal{V}$, et utiliser l'inégalité de Hölder pour obtenir

$$\begin{aligned} |\mathbf{J}(\mathbf{v}_n) - \mathbf{J}(\mathbf{v})| &\leq \text{mes}(\Omega)^{\frac{1}{2}} \int_{\Omega} |\varepsilon(\mathbf{v}_n - \mathbf{v})|^2 \, d\mathbf{x} \\ &\leq c \|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}\|^2. \end{aligned}$$

On décrit maintenant la fonctionnelle $\mathbf{d}$. On suppose que $\mathbf{d}$ est propre, convexe et semi-continue inférieurement pour la topologie faible de $\mathcal{V}$. En outre, on assume l'existence d'une famille de fonctionnelles $(\mathbf{d}_{\varepsilon})_{\varepsilon > 0}$ qui vérifient l'hypothèse de régularisation suivante:

Hypothèse de régularisation (H).

- 1.** Pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbf{d}_{\varepsilon}$ est convexe et différentiable sur $\mathcal{V}$.
- 2.** Pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V})$ on a

$$\int_0^T \mathbf{d}_{\varepsilon}(\mathbf{v}(t)) \, dt \longrightarrow \int_0^T \mathbf{d}(\mathbf{v}(t)) \, dt \quad \text{quand } \varepsilon \longrightarrow 0. \quad (\text{II.2.6})$$

3. Si $\mathbf{v}_{\varepsilon} \longrightarrow \mathbf{v}$ dans $\mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V})$ faiblement et $\mathbf{v}'_{\varepsilon} \longrightarrow \mathbf{v}'$ dans $\mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}'_s)$ faiblement, alors

$$\liminf \int_0^T \mathbf{d}_{\varepsilon}(\mathbf{v}_{\varepsilon}(t)) \, dt \geq \int_0^T \mathbf{d}(\mathbf{v}(t)) \, dt. \quad (\text{II.2.7})$$

4. Il existe une constante $c > 0$ telle que: pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V})$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\|\mathbf{D}\mathbf{d}_{\varepsilon}(\mathbf{v})\|_{\mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V})} \leq c \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V})}, \quad (\text{II.2.8})$$

où $\mathbf{D}\mathbf{d}_{\varepsilon}(\mathbf{v})$ représente la différentielle au sens de Gâteaux de $\mathbf{d}_{\varepsilon}(\mathbf{v})$.

Choisissons dans toute la suite de ce chapitre $s = \frac{n}{2}$. Le lemme suivant donne quelques propriétés supplémentaires des fonctionnelles $\mathbf{B}$ et $\mathbf{c}$.

Lemme II.2.2. $\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}_s \times \mathcal{V}$, on a

1. $|\mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})| \leq c \|\mathbf{u}\|^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}\|^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{w}\|^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{w}\|^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{v}\|_s$.
2. $\mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) = 0$.
3. Supposons que $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{V}$, alors $\mathbf{c}$ est continue sur $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$.

Preuve du Lemme II.2.2.

1. Soit $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}_s \times \mathcal{V}$. On obtient, en utilisant l'inégalité de Hölder

$$\left\{ \begin{array}{l} |\mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})| \leq c \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)^n} \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)^n} \sum_{i,j=1}^n \left\| \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\|_{\mathbf{L}^n(\Omega)}, \\ \frac{2}{p} + \frac{1}{n} = 1. \end{array} \right.$$

On sait que si $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_s$ alors $\mathbf{v}_j \in \mathbf{H}^s(\Omega)$. Donc d'après les inclusions de Sobolev

$$\frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial x_i} \in \mathbf{H}^{s-1}(\Omega) \subset \mathbf{L}^n(\Omega).$$

Par conséquent

$$|\mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})| \leq c \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)^n} \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)^n} \|\mathbf{v}\|_s.$$

Utilisons l'inégalité de convexité suivante (voir Lions [29]):

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} \leq c \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \\ \frac{2}{p} + \frac{1}{n} = 1. \end{array} \right. \quad (\text{II.2.9})$$

L'assertion résulte immédiatement.

2. Faisons une intégration par parties et utilisons (II.1.4) et (II.1.5), on aura

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left[v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_i} w_j + u_i \frac{\partial w_j}{\partial x_i} v_j \right] \mathbf{d}\mathbf{x},$$

ce qui prouve, en utilisant (II.1.3), que

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) = 0.$$

Cette propriété montre que $\mathbf{B}$ est antisymétrique par rapport aux deux dernières variables. En particulier, elle permet d'obtenir la relation

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}. \quad (\text{II.2.10})$$

3. Soit $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ et supposons que $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{V}$. Notons que

$$\mathbf{c}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}_0) - \mathbf{B}(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}, \mathbf{u}).$$

Donc l'utilisation de l'inégalité de Hölder donne

$$\mathbf{c}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq c \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)^n} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)^n} \sum_{i,j=1}^n \left\| \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.$$

L'inclusion de Sobolev $\mathbf{H}^1(\Omega) \subset \mathbf{L}^4(\Omega)$ permet de conclure le résultat.

Le résultat conduisant à la formulation variationnelle du problème (P.II.1) est le suivant.

Lemme II.2.3. *Supposons que*

$$\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}') \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_0 \in \mathcal{V}. \quad (\text{II.2.11})$$

Si $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}\}$ sont des fonctions régulières satisfaisant (II.1.1)-(II.1.7), alors

$$(\mathbf{u}', \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \phi(\mathbf{v}) - \phi(\mathbf{u}) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad (\text{II.2.12})$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \quad \text{sur} \quad \Omega, \quad (\text{II.2.13})$$

avec

$$\mathbf{u}' = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \phi(\mathbf{v}) = \mathbf{d}(\mathbf{v}) + \mathbf{J}(\mathbf{v}).$$

Preuve du Lemme II.2.3. On sait d'après la formule de Green que pour tout $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$

$$(\mathbf{Div}(\boldsymbol{\sigma}), \mathbf{v} - \mathbf{u}) + (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{u})) = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, d\gamma.$$

Donc

$$\left(\frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u} \right) + (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{u})) = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, d\gamma.$$

Par ailleurs, on aura, en utilisant la définition de $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ et la condition (II.1.3)

$$(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{u})) = \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\mathbf{tr}\boldsymbol{\sigma}}{n} \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \right) = (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{u})).$$

Alors

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{u})) \leq \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \mathbf{J}(\mathbf{v}) - \mathbf{J}(\mathbf{u}).$$

Par conséquent

$$\left(\frac{D\mathbf{u}}{Dt}, \mathbf{v} - \mathbf{u} \right) + \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \mathbf{J}(\mathbf{v}) - \mathbf{J}(\mathbf{u}) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, d\gamma.$$

D'autre part, la condition aux limites (II.1.6) entraîne

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, d\gamma \geq \int_{\Gamma_1} \varphi(\mathbf{u}) \, d\gamma - \int_{\Gamma_1} \varphi(\mathbf{v}) \, d\gamma.$$

Or on sait que la dérivée particulière s'écrit

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}.$$

D'où l'inéquation variationnelle (II.2.12).

Posons maintenant $\mathbf{U} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0$ et remplaçons dans l'inéquation variationnelle (II.2.12), on obtient l'inéquation

$$\begin{aligned} & (\mathbf{U}', \mathbf{v} - \mathbf{U}) + \mathbf{B}(\mathbf{U}, \mathbf{U}, \mathbf{v} - \mathbf{U}) + \mathbf{a}(\mathbf{U}, \mathbf{v} - \mathbf{U}) + \mathbf{c}(\mathbf{U}, \mathbf{v} - \mathbf{U}) + \\ & \phi(\mathbf{v} + \mathbf{u}_0) - \phi(\mathbf{U} + \mathbf{u}_0) \geq (\mathbf{f}_0, \mathbf{v} - \mathbf{U}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \end{aligned}$$

avec

$$\mathbf{U}(0) = 0,$$

et

$$(\mathbf{f}_0, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) - \mathbf{B}(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{v}) - \mathbf{a}(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}). \quad (\text{II.2.14})$$

Remarquons que la condition $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}')$ est vérifiée si et seulement si $\mathbf{f}_0 \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}')$.

Ce qui nous conduit finalement à considérer le problème variationnel suivant.

Problème (P.II.2). Supposons que l'hypothèse (II.2.11) est satisfaite. Trouver le champ des vitesses

$$\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}) \cap \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathcal{H}),$$

solution de l'inéquation variationnelle

$$\begin{aligned} & (\mathbf{u}', \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \mathbf{c}(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \\ & \phi(\mathbf{v} + \mathbf{u}_0) - \phi(\mathbf{u} + \mathbf{u}_0) \geq (\mathbf{f}_0, \mathbf{v} - \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \end{aligned} \quad (\text{II.2.15})$$

avec la condition initiale

$$\mathbf{u}(0) = 0. \quad (\text{II.2.16})$$

Pour pouvoir résoudre ce problème, il est plus pratique de chercher des solutions plus faibles, pour cela on va introduire l'espace fonctionnel

$$\mathcal{W} = \{ \mathbf{v} : \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}_s), \quad \mathbf{v}' \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{H}) \text{ et } \mathbf{v}(0) = 0 \}, \quad (\text{II.2.17})$$

et on considère le problème faible.

Problème (P.II.3). Supposons que l'hypothèse (II.2.11) est satisfaite. Trouver le champ des vitesses

$$\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}) \cap \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathcal{H}),$$

solution du problème variationnel faible

$$\int_0^T \{(\mathbf{v}', \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \mathbf{c}(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \phi(\mathbf{v} + \mathbf{u}_0) - \phi(\mathbf{u} + \mathbf{u}_0) - (\mathbf{f}_0, \mathbf{v} - \mathbf{u})\} dt \geq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{W}. \quad (\text{II.2.18})$$

Lemme II.2.4. *Si le problème (P.II.2) possède une solution $\mathbf{u}$ alors $\mathbf{u}$ est solution du problème (P.II.3).*

Preuve du Lemme II.2.4. Remarquons que

$$(\mathbf{v}', \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \mathbf{c}(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \phi(\mathbf{v} + \mathbf{u}_0) - \phi(\mathbf{u} + \mathbf{u}_0) - (\mathbf{f}_0, \mathbf{v} - \mathbf{u}) \geq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\mathbf{v} - \mathbf{u}|^2.$$

Après intégration de cette inéquation sur l'intervalle $[0, T]$, on obtient

$$\int_0^T \{(\mathbf{v}', \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \mathbf{c}(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \phi(\mathbf{v} + \mathbf{u}_0) - \phi(\mathbf{u} + \mathbf{u}_0) - (\mathbf{f}_0, \mathbf{v} - \mathbf{u})\} dt \geq \frac{1}{2} |\mathbf{v}(T) - \mathbf{u}(T)|^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{W}.$$

Alors le résultat se déduit immédiatement

II.3. Résultats d'existence et d'unicité

On établit ici un théorème d'existence de solutions faibles pour le problème (P.II.3) ainsi que deux théorèmes d'existence et d'unicité d'une solution forte pour le problème (P.II.2). Le théorème d'existence de solutions faibles est le suivant.

Théorème II.3.1.

1. *Le problème (P.II.3) admet une solution $\mathbf{u}$ ayant la régularité:*

$$\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}) \cap \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathcal{H}). \quad (\text{II.3.1})$$

$$\mathbf{u}' \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}'_s). \quad (\text{II.3.2})$$

2. $\mathbf{u}$ est faiblement continue de $[0, T]$ dans $\mathcal{H}$.

La preuve du théorème est basée sur la méthode de régularisation ceci en transformant l'inéquation variationnelle en une équation variationnelle parabolique non linéaire dont on utilise des arguments de compacité et de monotonie pour la résoudre.

Preuve du Théorème II.3.1.

1. La preuve du premier résultat se fait en trois étapes.

Etape I. Régularisation. On régularise la fonctionnelle $\phi = \mathbf{d} + \mathbf{J}$, en utilisant une famille de fonctionnelles $\phi_\varepsilon = \mathbf{d}_\varepsilon + \mathbf{J}_\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), telle que $\mathbf{d}_\varepsilon$ est la fonctionnelle introduite dans l'hypothèse (H) et $\mathbf{J}_\varepsilon$ est la fonctionnelle différentiable suivante:

$$\mathbf{J}_\varepsilon(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{g}}{1 + \varepsilon} \int_{\Omega} |\varepsilon(\mathbf{v})|^{1+\varepsilon} \mathbf{d}\mathbf{x}. \quad (\text{II.3.3})$$

Le résultat suivant est nécessaire pour la régularisation du problème variationnel.

Lemme II.3.1. *Il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\|\mathbf{D}\mathbf{J}_\varepsilon(\mathbf{v})\|_{\mathcal{V}'} \leq c \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{V}} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \quad (\text{II.3.4})$$

Preuve du Lemme II.3.1. On a

$$\mathbf{J}_\varepsilon(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{g}}{1 + \varepsilon} \int_{\Omega} |\varepsilon(\mathbf{v})|^{1+\varepsilon} \mathbf{d}\mathbf{x}.$$

Alors

$$\langle \mathbf{D}\mathbf{J}_\varepsilon(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} \leq \mathbf{g} \left(\int_{\Omega} |\varepsilon(\mathbf{v})|^{2\varepsilon} \mathbf{d}\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |\varepsilon(\mathbf{w})|^2 \mathbf{d}\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}.$$

On peut toujours prendre ε assez petit, de plus il existe une constante strictement positive δ de sorte que

$$\delta |\varepsilon(\mathbf{v})| > 1 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \setminus \{0\}.$$

Cela entraîne l'existence d'une constante $C(\varepsilon, \delta)$ vérifiant l'inégalité

$$\|\mathbf{D}\mathbf{J}_\varepsilon(\mathbf{v})\|_{\mathcal{V}'} \leq C(\varepsilon, \delta) \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{V}} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}.$$

D'où la preuve. Ce lemme nous permet d'obtenir, en utilisant l'hypothèse de régularisation (H), l'inégalité

$$\|\mathbf{D}\phi_\varepsilon(\mathbf{v})\|_{\mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}')} \leq c \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V})} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}). \quad (\text{II.3.5})$$

Passons maintenant à la régularisons du problème (P.II.2). En effet, remplaçons dans (II.2.15) $\mathbf{v}$ par $\mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}$ où $\lambda > 0$, divisons l'inéquation obtenue par λ puis faisons tendre λ vers 0, nous obtiendrons l'inéquation

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}', \mathbf{v}) + \mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{c}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\phi(\mathbf{u} + \mathbf{u}_0 + \lambda \mathbf{v}) - \phi(\mathbf{u} + \mathbf{u}_0)}{\lambda} \\ \geq (\mathbf{f}_0, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \end{aligned}$$

On sait par ailleurs que la fonctionnelle ϕ n'est pas généralement différentiable, pour traiter ce problème, on va approcher ϕ par la famille régularisante $(\phi_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ et on cherche $\mathbf{u}_\varepsilon$ solution de l'inéquation régularisée obtenue suivante

$$(\mathbf{u}'_\varepsilon, \mathbf{v}) + \mathbf{B}(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v}) + \mathbf{a}(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v}) + \mathbf{c}(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v}) + (\mathbf{D}\phi_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{u}_0), \mathbf{v}) \geq (\mathbf{f}_0, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}.$$

Remplaçons $\mathbf{v}$ par $-\mathbf{v}$ dans l'inéquation précédente, on aura l'équation variationnelle

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}'_\varepsilon, \mathbf{v}) + \mathbf{B}(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v}) + \mathbf{a}(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v}) + \mathbf{c}(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v}) + (\mathbf{D}\phi_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{u}_0), \mathbf{v}) = (\mathbf{f}_0, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \\ \mathbf{u}_\varepsilon(0) = 0. \end{aligned}$$

Il y a toujours une difficulté technique dans la résolution d'un tel problème, pour cela on va introduire une deuxième régularisation par un terme de viscosité $\eta((\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v}))_s$, de sorte que

l'équation variationnelle birégularisée ci-dessous soit satisfaite

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{u}'_{\varepsilon\eta}, \mathbf{v}) + \mathbf{B}(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \mathbf{v}) + \mathbf{a}(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \mathbf{v}) + \mathbf{c}(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \mathbf{v}) + (\mathbf{D}\phi_\varepsilon(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta} + \mathbf{u}_0), \mathbf{v}) + \\
& \eta((\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \mathbf{v}))_s = (\mathbf{f}_0, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_s, \\
& \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}(0) = 0.
\end{aligned} \tag{II.3.6}$$

Etape II. Résolution du problème birégularisé. On désigne par $(\boldsymbol{\omega}_j)_{j \geq 1}$ les vecteurs propres de l'isomorphisme canonique $\mathbf{A}_s$ de $\mathcal{V}_s$ dans $\mathcal{V}'_s$, associés aux valeurs propres $(\lambda_j)_{j \geq 1}$, autrement dit

$$((\boldsymbol{\omega}_j, \mathbf{v}))_s = \lambda_j (\boldsymbol{\omega}_j, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_s \text{ et } |\boldsymbol{\omega}_j| = 1 \quad \forall j \geq 1.$$

On utilise les vecteurs $(\boldsymbol{\omega}_j)_{j \geq 1}$ comme base spéciale dans la méthode de Faedo-Galerkin, il existe donc une suite de fonctions $(\mathbf{g}_{\varepsilon\eta j})_j$ telle que

$$\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}(t) = \sum_{j \geq 1} \mathbf{g}_{\varepsilon\eta j}(t) \boldsymbol{\omega}_j.$$

On va approcher les vecteurs $\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}$ par la suite de vecteurs $\mathbf{u}_m = (\mathbf{u}_{\varepsilon\eta m})$, définie par

$$\mathbf{u}_m(t) = \sum_{j=1}^m \mathbf{g}_{\varepsilon\eta j}(t) \boldsymbol{\omega}_j \quad \text{pour tout } m = 1, 2, \dots$$

et vérifiant en outre l'équation variationnelle approchée suivante:

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{u}'_m, \boldsymbol{\omega}_j) + \mathbf{B}(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m, \boldsymbol{\omega}_j) + \mathbf{a}(\mathbf{u}_m, \boldsymbol{\omega}_j) + \mathbf{c}(\mathbf{u}_m, \boldsymbol{\omega}_j) + (\mathbf{D}\phi_\varepsilon(\mathbf{u}_m + \mathbf{u}_0), \boldsymbol{\omega}_j) + \\
& \eta((\mathbf{u}_m, \boldsymbol{\omega}_j))_s = (\mathbf{f}_0, \boldsymbol{\omega}_j) \quad \forall j = 1, \dots, m, \\
& \mathbf{u}_m(0) = 0.
\end{aligned} \tag{II.3.7}$$

(En réalité, dans l'équation (II.3.7) les termes $\mathbf{u}_0, \mathbf{f}_0$ représentent la projection de $\mathbf{u}_0$ et $\mathbf{f}_0$ sur l'espace vectoriel engendré par la partie $[\boldsymbol{\omega}_1, \dots, \boldsymbol{\omega}_m]$). Les équations (II.3.7) pour $j = 1, \dots, m$ forment un système d'équations différentielles ordinaires qui admet, d'après les théories classiques des EDO une solution locale sur $[0, t_m]$, où $0 < t_m \leq T$.

Multiplions l'équation (II.3.7) par $\mathbf{g}_{\varepsilon\eta j}(t)$ et sommons sur j ($j = 1, \dots, m$), il vient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\mathbf{u}_m|^2 + \mathbf{a}(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m) + \mathbf{c}(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m) + (\mathbf{D}\phi_\varepsilon(\mathbf{u}_m + \mathbf{u}_0), \mathbf{u}_m) + \eta \|\mathbf{u}_m\|_s^2 = (\mathbf{f}_0, \mathbf{u}_m).$$

Or $\mathbf{a}$ est coercive, il existe donc une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m) \geq \alpha \|\mathbf{u}_m\|^2. \quad (\text{II.3.8})$$

D'autre part, $\mathbf{D}\phi_\varepsilon$ est la dérivée d'une fonctionnelle convexe, elle est donc monotone et par conséquent

$$(\mathbf{D}\phi_\varepsilon(\mathbf{u}_m + \mathbf{u}_0), \mathbf{u}_m) \geq -(\mathbf{D}\phi_\varepsilon(\mathbf{u}_m + \mathbf{u}_0), \mathbf{u}_0).$$

Par ailleurs, on a d'après le lemme II.2.2

$$\mathbf{c}(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m) \leq c \|\mathbf{u}_m\| |\mathbf{u}_m| \|\mathbf{u}_0\| \leq c \|\mathbf{u}_m\| |\mathbf{u}_m|.$$

Récapitulons les inégalités précédentes, on obtient l'inégalité

$$\frac{d}{dt} |\mathbf{u}_m(t)|^2 + 2\alpha \|\mathbf{u}_m\|^2 + 2\eta \|\mathbf{u}_m\|_s^2 \leq c(1 + \|\mathbf{u}_m\|) + c \|\mathbf{u}_m\| |\mathbf{u}_m| + 2\|\mathbf{f}_0\| \|\mathbf{u}_m\|.$$

Après intégration de l'inégalité ci-dessus et utilisation de l'inégalité de Hölder ainsi que celle de Young, nous aurons

$$\begin{aligned} & |\mathbf{u}_m(t)|^2 + 2\alpha \int_0^t \|\mathbf{u}_m(\tau)\|^2 d\tau + 2\eta \int_0^t \|\mathbf{u}_m(\tau)\|_s^2 d\tau \\ & \leq \left(\int_0^t c^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \|\mathbf{u}_m(\tau)\|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + ct_m + \frac{\alpha}{2} \int_0^t \|\mathbf{u}_m(\tau)\|^2 d\tau + \frac{c^2}{2\alpha} \int_0^t |\mathbf{u}_m(\tau)|^2 d\tau + \\ & \quad \frac{\alpha}{2} \int_0^t \|\mathbf{u}_m(\tau)\|^2 d\tau + \frac{2}{\alpha} \int_0^t \|\mathbf{f}_0(\tau)\|^2 d\tau \end{aligned}$$

Il vient alors

$$\begin{aligned}
& |\mathbf{u}_m(t)|^2 + 2\alpha \int_0^t \|\mathbf{u}_m(\tau)\|^2 \, d\tau + 2\eta \int_0^t \|\mathbf{u}_m(\tau)\|_s^2 \, d\tau \\
& \leq \frac{\alpha}{2} \int_0^t \|\mathbf{u}_m(\tau)\|^2 \, d\tau + \frac{c^2}{2\alpha} \int_0^t |\mathbf{u}_m(\tau)|^2 \, d\tau + \frac{\alpha}{2} \int_0^t \|\mathbf{u}_m(\tau)\|^2 \, d\tau + \frac{c^2 t_m}{2\alpha} + c t_m + \\
& \quad \frac{\alpha}{2} \int_0^t \|\mathbf{u}_m(\tau)\|^2 \, d\tau + \frac{2}{\alpha} \int_0^t \|\mathbf{f}_0(\tau)\|^2 \, d\tau.
\end{aligned}$$

D'où l'inégalité

$$|\mathbf{u}_m(t)|^2 + \frac{\alpha}{2} \int_0^t \|\mathbf{u}_m(\tau)\|^2 \, d\tau + 2\eta \int_0^t \|\mathbf{u}_m(\tau)\|_s^2 \, d\tau \leq cT + c \int_0^t |\mathbf{u}_m(\tau)|^2 \, d\tau. \quad (\text{II.3.9})$$

En particulier

$$|\mathbf{u}_m(t)|^2 \leq cT + c \int_0^t |\mathbf{u}_m(\tau)|^2 \, d\tau \quad \forall t \in [0, t_m]. \quad (\text{II.3.10})$$

On en déduit, en utilisant le lemme de Gronwall que $|\mathbf{u}_m(t)| \leq c$, de plus la solution $\mathbf{u}_m(t)$ est prolongeable sur l'intervalle $[0, T]$ tout entier. Par conséquent, on a les estimations a priori suivantes

$$\mathbf{u}_m \text{ demeure dans un borné de } \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathcal{H}), \quad (\text{II.3.11})$$

$$\mathbf{u}_m \text{ demeure dans un borné de } \mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}), \quad (\text{II.3.12})$$

$$\eta^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}_m \text{ demeure dans un borné de } \mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}_s). \quad (\text{II.3.13})$$

Pour pouvoir passer à la limite en m on doit appliquer le théorème de compacité d'Aubin, il nous faut donc une estimation sur la dérivée $\mathbf{u}'_m$. En effet, on note tout d'abord, en utilisant le lemme II.2.2 et l'estimation (II.3.11), que pour tout $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_s$ on a

$$|\mathbf{B}(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{v}, \mathbf{u}_m(t))| \leq c \|\mathbf{u}_m(t)\| \|\mathbf{v}\|_s.$$

Alors

$$\begin{cases} \mathbf{B}(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t), \mathbf{v}) = (\mathbf{h}_m(t), \mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_s, \\ \mathbf{h}_m \text{ demeure dans un borné de } \mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}'_s). \end{cases} \quad (\text{II.3.14})$$

On sait de plus que $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{c}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{V}$, il existe donc un opérateur $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}; \mathcal{V}')$ tel que $(\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{c}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}$.

Désignons par $\mathbf{P}_m$ l'opérateur de projection de $\mathcal{H}$ sur l'espace engendré par la partie $[\boldsymbol{\omega}_1, \dots, \boldsymbol{\omega}_m]$. L'équation (II.3.7) s'écrit, en utilisant l'isomorphisme $\boldsymbol{\Lambda}_s$ et les opérateurs $\mathbf{A}$, $\mathbf{h}_m$ et $\mathbf{P}_m$

$$\mathbf{u}'_m = \mathbf{P}_m(\mathbf{f}_0 - \mathbf{A}\mathbf{u}_m - \mathbf{h}_m - \eta\boldsymbol{\Lambda}_s\mathbf{u}_m - \mathbf{D}\phi_\varepsilon(\mathbf{u}_m + \mathbf{u}_0)). \quad (\text{II.3.15})$$

Par ailleurs, on a

$$\int_0^T (\mathbf{A}\mathbf{u}_m, \mathbf{v}) \, dt \leq c \left(\int_0^T \|\mathbf{u}_m\|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \|\mathbf{v}\|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}).$$

Il vient que $\mathbf{A}\mathbf{u}_m$ demeure dans un bornée de $\mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}')$, et le fait que $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}'_s$ entraîne

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_m \text{ demeure dans un borné de } \mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}'_s). \quad (\text{II.3.16})$$

D'autre part, l'inégalité (II.3.5) implique que

$$\|\mathbf{D}\phi_\varepsilon(\mathbf{u}_m + \mathbf{u}_0)\|_{\mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}')} \leq c \|\mathbf{u}_m + \mathbf{u}_0\|_{\mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V})}.$$

Donc

$$\mathbf{D}\phi_\varepsilon(\mathbf{u}_m + \mathbf{u}_0) \text{ demeure dans un borné de } \mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}'_s). \quad (\text{II.3.17})$$

De (II.3.14), (II.3.15), (II.3.16) et (II.3.17) on obtient

$$\begin{cases} \mathbf{u}'_m = \mathbf{P}_m(\mathbf{k}_m), \\ \mathbf{k}_m \text{ demeure dans un borné de } \mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}'_s). \end{cases} \quad (\text{II.3.18})$$

De plus, on sait d'après la définition de la base $(\omega_j)_{j \geq 1}$ que les fonctions $\left(\lambda_j^{\frac{1}{2}} \omega_j\right)_{j \geq 1}$ forment un système complet de $\mathcal{V}'_s$ pour la norme $\|\varphi\|_{\mathcal{V}'_s} = \|\Lambda_s^{-1} \varphi\|_{\mathcal{V}_s}$, de sorte que

$$\|\varphi\|_{\mathcal{V}'_s}^2 = \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\varphi, \lambda_j^{\frac{1}{2}} \omega_j \right) \quad \text{et} \quad \|\mathbf{P}_m \varphi\|_{\mathcal{V}'_s}^2 = \sum_{j=1}^m \left(\varphi, \lambda_j^{\frac{1}{2}} \omega_j \right).$$

C'est à dire $\|\mathbf{P}_m \varphi\|_{\mathcal{V}'_s} \leq \|\varphi\|_{\mathcal{V}'_s}$. Alors (II.3.18) entraîne

$$\mathbf{u}'_m \text{ demeure dans un borné de } \mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}'_s). \quad (\text{II.3.19})$$

On en déduit, en utilisant les estimations (II.3.11), (II.3.12), (II.3.13) et (II.3.19), qu'on peut extraire de $(\mathbf{u}_m)_m$ une sous-suite notée $(\mathbf{u}_\mu)_\mu$, vérifiant:

$$\mathbf{u}_\mu \longrightarrow \mathbf{u}_{\varepsilon\eta} \text{ dans } \mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}) \text{ faible}, \quad (\text{II.3.20})$$

$$\mathbf{u}_\mu \longrightarrow \mathbf{u}_{\varepsilon\eta} \text{ dans } \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathcal{H}) \text{ faible}^*, \quad (\text{II.3.21})$$

$$\eta^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}_\mu \longrightarrow \eta^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}_{\varepsilon\eta} \text{ dans } \mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}_s) \text{ faible}, \quad (\text{II.3.22})$$

$$\mathbf{u}'_\mu \longrightarrow \mathbf{u}'_{\varepsilon\eta} \text{ dans } \mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}'_s) \text{ faible}, \quad (\text{II.3.23})$$

et via le théorème de compacité d'Aubin I.2.16, on aboutit après une nouvelle extraction, encore notée $\mathbf{u}_\mu$, à

$$\mathbf{u}_\mu \longrightarrow \mathbf{u}_{\varepsilon\eta} \text{ dans } \mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{H}) \text{ fort}, \quad (\text{II.3.24})$$

$$(\mathbf{u}_\mu)_i \longrightarrow (\mathbf{u}_{\varepsilon\eta})_i \text{ (la i}^{\text{ème}} \text{ composante) presque par tout dans } \Omega \times]0, T[. \quad (\text{II.3.25})$$

En outre, on sait que $\mathbf{D}\phi_\varepsilon(\mathbf{u}_m + \mathbf{u}_0)$ demeure dans un bornée de $\mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}')$. De plus, l'inégalité de convexité (II.2.9) donne

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}^2 \leq c \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega),$$

et d'après l'inégalité de Hölder on a

$$\|\mathbf{u}_{i\mu}\mathbf{u}_{j\mu}\|_{\mathbf{L}^{\frac{p}{2}}(\Omega)} \leq c \|\mathbf{u}_{i\mu}\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} \|\mathbf{u}_{j\mu}\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}.$$

Par conséquent

$$\|\mathbf{u}_{i\mu}\mathbf{u}_{j\mu}\|_{\mathbf{L}^{\frac{p}{2}}(\Omega)}^2 \leq c \|\mathbf{u}_{i\mu}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\mathbf{u}_{j\mu}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}.$$

On arrive à l'estimation

$$\mathbf{u}_{i\mu}\mathbf{u}_{j\mu} \text{ demeure dans un borné de } \mathbf{L}^2\left(0, T; \mathbf{L}^{\frac{p}{2}}(\Omega)\right).$$

Ce qui nous permet de supposer que

$$\mathbf{D}\phi_\varepsilon(\mathbf{u}_\mu + \mathbf{u}_0) \longrightarrow \chi \text{ dans } \mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}') \text{ faible,} \quad (\text{II.3.26})$$

$$\mathbf{u}_{i\mu}\mathbf{u}_{j\mu} \longrightarrow \theta_{ij} \text{ dans } \mathbf{L}^2\left(0, T; \mathbf{L}^{\frac{p}{2}}(\Omega)\right) \text{ faible.} \quad (\text{II.3.27})$$

Mais (II.3.25) nous assure que $\mathbf{u}_{i\mu}\mathbf{u}_{j\mu} \longrightarrow \mathbf{u}_{i\varepsilon\eta}\mathbf{u}_{j\varepsilon\eta}$ (au sens des distributions), d'où

$$\theta_{ij} = \mathbf{u}_{i\varepsilon\eta}\mathbf{u}_{j\varepsilon\eta}. \quad (\text{II.3.28})$$

Par ailleurs, d'après le lemme II.2.2

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}_\mu, \mathbf{u}_\mu, \omega_j) = -\mathbf{B}(\mathbf{u}_\mu, \omega_j, \mathbf{u}_\mu) \quad \forall j = 1, \dots, m,$$

et de (II.3.28) on a

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}_\mu, \omega_j, \mathbf{u}_\mu) \longrightarrow \mathbf{B}(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \omega_j, \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}) \text{ dans } \mathbf{L}^2(0, T) \text{ faible} \quad \forall j = 1, \dots, m.$$

Par suite

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}_\mu, \mathbf{u}_\mu, \omega_j) \longrightarrow \mathbf{B}(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \omega_j) \text{ dans } \mathbf{L}^2(0, T) \text{ faible} \quad \forall j = 1, \dots, m. \quad (\text{II.3.29})$$

Cela permet aussi de justifier le résultat de convergence suivant:

$$\mathbf{c}(\mathbf{u}_\mu, \boldsymbol{\omega}_j) \longrightarrow \mathbf{c}(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \boldsymbol{\omega}_j) \text{ dans } \mathbf{L}^2(0, T) \text{ faible} \quad \forall j = 1, \dots, m. \quad (\text{II.3.30})$$

De (II.3.7), (II.3.20), (II.3.21), (II.3.22), (II.3.23), (II.3.26), (II.3.29) et (II.3.30), on déduit que

$$\begin{aligned} & (\mathbf{u}'_{\varepsilon\eta}, \boldsymbol{\omega}_j) + \mathbf{B}(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \boldsymbol{\omega}_j) + \mathbf{a}(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \boldsymbol{\omega}_j) + \mathbf{c}(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \boldsymbol{\omega}_j) + (\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\omega}_j) + \\ & \eta((\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \boldsymbol{\omega}_j))_s = (\mathbf{f}_0, \boldsymbol{\omega}_j) \quad \forall j \geq 1. \end{aligned}$$

Le fait que le système $(\boldsymbol{\omega}_j)_{j \geq 1}$ est complet dans $\mathcal{V}_s$ nous conduit à

$$\begin{aligned} & (\mathbf{u}'_{\varepsilon\eta}, \mathbf{v}) + \mathbf{B}(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \mathbf{v}) + \mathbf{a}(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \mathbf{v}) + \mathbf{c}(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \mathbf{v}) + (\boldsymbol{\chi}, \mathbf{v}) + \\ & \eta((\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \mathbf{v}))_s = (\mathbf{f}_0, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_s. \end{aligned} \quad (\text{II.3.31})$$

Pour achever cette étape, il faut montrer que

$$\boldsymbol{\chi} = \mathbf{D}\phi_\varepsilon(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta} + \mathbf{u}_0).$$

Pour cela on introduit la fonction

$$\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}_s), \quad \boldsymbol{\varphi}' \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}'_s) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\varphi}(0) = 0.$$

Notons par $\mathbf{X}_\mu$ l'expression

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_\mu = & \int_0^T (\mathbf{D}\phi_\varepsilon(\mathbf{u}_\mu + \mathbf{u}_0) - \mathbf{D}\phi_\varepsilon(\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{u}_0), \mathbf{u}_\mu - \boldsymbol{\varphi}) \, dt + \int_0^T \mathbf{a}(\mathbf{u}_\mu - \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u}_\mu - \boldsymbol{\varphi}) \, dt + \\ & \eta \int_0^T \|\mathbf{u}_\mu - \boldsymbol{\varphi}\|_s^2 \, dt + \int_0^T \mathbf{c}(\mathbf{u}_\mu - \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u}_\mu - \boldsymbol{\varphi}) \, dt + \int_0^T (\mathbf{u}'_\mu - \boldsymbol{\varphi}', \mathbf{u}_\mu - \boldsymbol{\varphi}) \, dt. \end{aligned} \quad (\text{II.3.32})$$

Remplaçons dans l'équation (II.3.6) la fonction test par $\mathbf{u}_\mu$ et substituons le résultat obtenu

dans (II.3.32), on aura

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_\mu = & \int_0^T (\mathbf{f}_0, \mathbf{u}_\mu) \, dt - \int_0^T \{(\mathbf{D}\phi_\varepsilon(\mathbf{u}_\mu + \mathbf{u}_0), \varphi) - (\mathbf{D}\phi_\varepsilon(\varphi + \mathbf{u}_0), \mathbf{u}_\mu - \varphi)\} \, dt - \\ & \int_0^T \{\mathbf{a}(\mathbf{u}_\mu, \varphi) - \mathbf{a}(\varphi, \mathbf{u}_\mu - \varphi)\} \, dt - \eta \int_0^T \{((\mathbf{u}_\mu, \varphi))_s - ((\varphi, \mathbf{u}_\mu - \varphi))_s\} \, dt - \\ & \int_0^T \{\mathbf{c}(\mathbf{u}_\mu, \varphi) - \mathbf{c}(\varphi, \mathbf{u}_\mu - \varphi)\} \, dt - \int_0^T \{(\mathbf{u}'_\mu, \varphi) - (\varphi', \mathbf{u}_\mu - \varphi)\} \, dt. \end{aligned}$$

D'où $\mathbf{X}_\mu \longrightarrow \mathbf{X}$ avec

$$\begin{aligned} \mathbf{X} = & \int_0^T (\mathbf{f}_0, \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}) \, dt - \int_0^T (\chi, \varphi) \, dt - \int_0^T \{(\mathbf{D}\phi_\varepsilon(\varphi + \mathbf{u}_0), \mathbf{u}_{\varepsilon\eta} - \varphi)\} \, dt - \\ & \int_0^T \{\mathbf{a}(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \varphi) - \mathbf{a}(\varphi, \mathbf{u}_{\varepsilon\eta} - \varphi)\} \, dt - \eta \int_0^T \{((\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \varphi))_s - ((\varphi, \mathbf{u}_{\varepsilon\eta} - \varphi))_s\} \, dt - \\ & \int_0^T \{\mathbf{c}(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \varphi) - \mathbf{c}(\varphi, \mathbf{u}_{\varepsilon\eta} - \varphi)\} \, dt - \int_0^T \{(\mathbf{u}'_{\varepsilon\eta}, \varphi) - (\varphi', \mathbf{u}_{\varepsilon\eta} - \varphi)\} \, dt. \quad (\text{II.3.33}) \end{aligned}$$

Choisissons dans (II.3.31) $\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}$ comme fonction test, remplaçons l'expression obtenue dans (II.3.33), $\mathbf{X}$ devient

$$\begin{aligned} \mathbf{X} = & \int_0^T \left\{ (\mathbf{u}'_{\varepsilon\eta}, \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}) + \mathbf{a}(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}) + \mathbf{c}(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}) + \eta \|\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}\|_s^2 + (\chi, \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}) \right\} \, dt - \\ & \int_0^T (\chi, \varphi) \, dt - \int_0^T \{(\mathbf{D}\phi_\varepsilon(\varphi + \mathbf{u}_0), \mathbf{u}_{\varepsilon\eta} - \varphi)\} \, dt - \\ & \int_0^T \{\mathbf{a}(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \varphi) - \mathbf{a}(\varphi, \mathbf{u}_{\varepsilon\eta} - \varphi)\} \, dt - \eta \int_0^T \{((\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \varphi))_s - ((\varphi, \mathbf{u}_{\varepsilon\eta} - \varphi))_s\} \, dt - \\ & \int_0^T \{\mathbf{c}(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \varphi) - \mathbf{c}(\varphi, \mathbf{u}_{\varepsilon\eta} - \varphi)\} \, dt - \int_0^T \{(\mathbf{u}'_{\varepsilon\eta}, \varphi) - (\varphi', \mathbf{u}_{\varepsilon\eta} - \varphi)\} \, dt. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathbf{X} = & \int_0^T (\chi - \mathbf{D}\phi_\varepsilon(\varphi + \mathbf{u}_0), \mathbf{u}_{\varepsilon\eta} - \varphi) \, dt + \int_0^T \mathbf{a}(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta} - \varphi, \mathbf{u}_{\varepsilon\eta} - \varphi) \, dt + \\ & \eta \int_0^T \|\mathbf{u}_{\varepsilon\eta} - \varphi\|_s^2 \, dt + \int_0^T \mathbf{c}(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta} - \varphi, \mathbf{u}_{\varepsilon\eta} - \varphi) \, dt + \int_0^T (\mathbf{u}'_{\varepsilon\eta} - \varphi', \mathbf{u}_{\varepsilon\eta} - \varphi) \, dt. \end{aligned}$$

D'après (II.3.32) on a $\mathbf{X}_\mu \geq \int_0^T \mathbf{c}(\mathbf{u}_\mu - \varphi, \mathbf{u}_\mu - \varphi) \, dt$ pour tout $\mu \geq 0$. On aura par passage à la limite

$$\mathbf{X} \geq \int_0^T \mathbf{c}(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta} - \varphi, \mathbf{u}_{\varepsilon\eta} - \varphi) \, dt.$$

Prenons $\varphi = \mathbf{u}_{\varepsilon\eta} - \lambda\psi$, avec ψ une fonction vérifiant l'hypothèse suivante:

$$\psi \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}_s), \quad \psi' \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}'_s), \quad \psi(0) = 0 \quad \text{et} \quad \lambda > 0. \quad (\text{II.3.34})$$

Substitution dans l'expression de $\mathbf{X}$. Divisons l'inégalité obtenue par λ et faisons tendre λ vers 0, on obtient pour toute fonction ψ vérifiant (II.3.34)

$$\int_0^T (\chi - \mathbf{D}\phi_\varepsilon(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta} + \mathbf{u}_0), \psi) \, dt \geq 0.$$

Remplaçons ψ par $-\psi$, il vient donc

$$\chi = \mathbf{D}\phi_\varepsilon(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta} + \mathbf{u}_0). \quad (\text{II.3.35})$$

On conclut de (II.3.31) et (II.3.35) que

$$\begin{aligned} & (\mathbf{u}'_{\varepsilon\eta}, \mathbf{v}) + \mathbf{B}(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \mathbf{v}) + \mathbf{a}(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \mathbf{v}) + \mathbf{c}(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \mathbf{v}) + (\mathbf{D}\phi_\varepsilon(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta} + \mathbf{u}_0), \mathbf{v}) + \\ & \eta((\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \mathbf{v}))_s = (\mathbf{f}_0, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_s, \end{aligned}$$

avec

$$\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}(0) = 0.$$

Cela signifie qu'on a montré l'existence d'une solution $\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}$ du problème birégularisé (II.3.6) ayant la régularité:

$$\mathbf{u}_{\varepsilon\eta} \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}) \cap \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathcal{H}), \quad (\text{II.3.36})$$

$$\mathbf{u}'_{\varepsilon\eta} \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}'_s). \quad (\text{II.3.37})$$

Etape III. Passage à la limite. D'après (II.3.36) et (II.3.37), on peut extraire de $(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta})$ une sous-suite, encore notée $(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta})$, telle que

$$\mathbf{u}_{\varepsilon\eta} \longrightarrow \mathbf{u} \text{ dans } \mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}) \text{ faible},$$

$$\mathbf{u}_{\varepsilon\eta} \longrightarrow \mathbf{u} \text{ dans } \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathcal{H}) \text{ faible}^*,$$

$$\mathbf{u}'_{\varepsilon\eta} \longrightarrow \mathbf{u}' \text{ dans } \mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}'_s) \text{ faible}.$$

Soit maintenant $\mathbf{v}$ une fonction de l'espace $\mathcal{W}$ et considérons l'expression

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{\varepsilon\eta} = & \int_0^T \{ (\mathbf{v}', \mathbf{v} - \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}) - \mathbf{B}(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \mathbf{v}, \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}) + \mathbf{a}(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \mathbf{v} - \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}) + \mathbf{c}(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \mathbf{v} - \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}) \} dt + \\ & \int_0^T \{ \eta ((\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \mathbf{v} - \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}))_s + \phi_\varepsilon(\mathbf{v} + \mathbf{u}_0) - \phi_\varepsilon(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta} + \mathbf{u}_0) - (\mathbf{f}_0, \mathbf{v} - \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}) \} dt. \end{aligned} \quad (\text{II.3.38})$$

Utilisons (II.3.6), on déduit que

$$\mathbf{Y}_{\varepsilon\eta} = \frac{1}{2} |\mathbf{v}(T) - \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}(T)|^2 +$$

$$\int_0^T \{ \phi_\varepsilon(\mathbf{v} + \mathbf{u}_0) - \phi_\varepsilon(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta} + \mathbf{u}_0) - (\mathbf{D}\phi_\varepsilon(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta} + \mathbf{u}_0), \mathbf{v} - \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}) \} dt.$$

Alors $\mathbf{Y}_{\varepsilon\eta} \geq 0$, ou bien encore

$$\begin{aligned} & \int_0^T \{ (\mathbf{v}', \mathbf{v} - \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}) - \mathbf{B}(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \mathbf{v}, \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}) + \mathbf{a}(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \mathbf{v}) + \mathbf{c}(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \mathbf{v} - \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}) \} \, dt \\ & + \int_0^T \{ \phi_\varepsilon(\mathbf{v} + \mathbf{u}_0) + \eta ((\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \mathbf{v}))_s - (\mathbf{f}_0, \mathbf{v} - \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}) \} \, dt \geq \\ & \int_0^T \mathbf{a}(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}) \, dt + \eta \int_0^T \|\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}\|_s^2 \, dt + \int_0^T \phi_\varepsilon(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta} + \mathbf{u}_0) \, dt. \end{aligned}$$

Par passage à la limite lorsque $\varepsilon, \eta \longrightarrow 0$, on ait

$$\begin{aligned} & \int_0^T \{ (\mathbf{v}', \mathbf{v} - \mathbf{u}) - \mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}) + \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{c}(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \phi(\mathbf{v} + \mathbf{u}_0) - (\mathbf{f}_0, \mathbf{v} - \mathbf{u}) \} \, dt \\ & \geq \liminf \int_0^T \mathbf{a}(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}) \, dt + \liminf \int_0^T \phi_\varepsilon(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta} + \mathbf{u}_0) \, dt. \end{aligned} \quad (\text{II.3.39})$$

Par ailleurs $\mathbf{v} \mapsto \int_0^T \mathbf{a}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \, dt$ est semi-continue inférieurement pour la topologie faible de $\mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V})$ (voir Duvaut-Lions [20]), donc

$$\liminf \int_0^T \mathbf{a}(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}) \, dt \geq \int_0^T \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \, dt. \quad (\text{II.3.40})$$

Montrons maintenant l'inégalité suivante:

$$\liminf \int_0^T \phi_\varepsilon(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta} + \mathbf{u}_0) \, dt \geq \int_0^T \phi(\mathbf{u} + \mathbf{u}_0) \, dt. \quad (\text{II.3.41})$$

En effet, on a

$$\phi_\varepsilon(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta} + \mathbf{u}_0) = \mathbf{d}_\varepsilon(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta} + \mathbf{u}_0) + \mathbf{J}_\varepsilon(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta} + \mathbf{u}_0).$$

D'une part, pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}) \cap \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathcal{H})$, l'inégalité de Hölder donne

$$\begin{aligned} \int_0^T \mathbf{J}(\mathbf{v}) \, dt &= \mathbf{g} \int_{\mathbf{Q}} |\varepsilon(\mathbf{v})| \, d\mathbf{x} dt \\ &\leq \mathbf{g} \left(\int_{\mathbf{Q}} |\varepsilon(\mathbf{v})|^{1+\varepsilon} \, d\mathbf{x} dt \right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \left(\int_{\mathbf{Q}} d\mathbf{x} dt \right)^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} \\ &\leq (\mathbf{g}_{\text{mes}}(\mathbf{Q}))^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} (1 + \varepsilon)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \left(\int_0^T \mathbf{J}_\varepsilon(\mathbf{v}) \, dt \right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Ce qui nous conduit à

$$\liminf \int_0^T \mathbf{J}(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta} + \mathbf{u}_0) \, dt \leq \liminf \int_0^T \mathbf{J}_\varepsilon(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta} + \mathbf{u}_0) \, dt.$$

D'autre part, l'application $\mathbf{v} \mapsto \int_0^T \mathbf{J}(\mathbf{v}) \, dt$ est continue et convexe, elle est donc semi-continue inférieurement pour la topologie faible de $\mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V})$. Par conséquent

$$\liminf \int_0^T \mathbf{J}_\varepsilon(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta} + \mathbf{u}_0) \, dt \geq \int_0^T \mathbf{J}(\mathbf{u} + \mathbf{u}_0) \, dt.$$

Par ailleurs, l'hypothèse de régularisation (H) garantit que

$$\liminf \int_0^T \mathbf{d}_\varepsilon(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta} + \mathbf{u}_0) \, dt \geq \int_0^T \mathbf{d}(\mathbf{u} + \mathbf{u}_0) \, dt.$$

Ce qui permet de justifier l'inégalité (II.3.41). D'où, via l'inéquation (II.3.39) et les inégalités (II.3.40), (II.3.41)

$$\int_0^T \{(\mathbf{v}', \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \mathbf{c}(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \phi(\mathbf{v} + \mathbf{u}_0) - \phi(\mathbf{u} + \mathbf{u}_0) - (\mathbf{f}_0, \mathbf{v} - \mathbf{u})\} dt \geq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{W}.$$

Finalement, $\mathbf{u}$ résout le problème (P.II.3).

2. Nous avons prouvé l'existence d'une solution $\mathbf{u}$ du problème (P.II.3) ayant la régularité (II.3.1), (II.3.2). En particulier

$$\begin{cases} \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}), \\ \mathbf{u}' \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}'_s). \end{cases}$$

Alors d'après le lemme I.2.8, la fonction $\mathbf{u}$ est après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle, continue de $[0, T]$ sur $[\mathcal{V}, \mathcal{V}'_s]_{\frac{1}{2}} = \mathcal{V}'_{\frac{s-1}{2}}$, elle est donc faiblement continue de $[0, T]$ sur $\mathcal{H}$.

Remarque II.3.1. Dans le cas $n = 2$, on peut également résoudre le problème sans introduire la deuxième régularisation car $s = 1$ et dans ce cas $\mathcal{V} = \mathcal{V}_s$ et le terme de régularisation $((\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \mathbf{v}))_s$ sera équivalent à $\mathbf{a}(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \mathbf{v})$.

On établit maintenant deux résultats d'existence et d'unicité de la solution forte qui concernent, respectivement, le cas $n = 2$ et le cas $n = 3$.

Théorème II.3.2. *Supposons que $n = 2$ et soit $\mathbf{u}$ la solution du problème (P.II.3) obtenue par le théorème II.3.1. Alors*

- 1.** $\mathbf{u}$ est continue de $[0, T]$ dans $\mathcal{H}$.
- 2.** $\mathbf{u}$ est solution du problème (P.II.2)
- 3.** $\mathbf{u}$ est l'unique solution du problème (P.II.2) dans l'espace $\mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}) \cap \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathcal{H})$.

Preuve du Théorème II.3.2.

1. Remarquons que si $n = 2$ alors $[\mathcal{V}, \mathcal{V}'_s]_{\frac{1}{2}} = \mathcal{H}$. Cela prouve, en utilisant le lemme I.2.8 que $\mathbf{u}$ est après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle, continue de $[0, T]$ sur $\mathcal{H}$.

2. Pour $\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V})$, on introduit (comparer à (II.3.38)) l'expression:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{\varepsilon\eta} = & \int_0^T \left\{ (\mathbf{u}'_{\varepsilon\eta}, \mathbf{v} - \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}) - \mathbf{B}(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \mathbf{v}, \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}) + \mathbf{a}(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \mathbf{v} - \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}) + \mathbf{c}(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \mathbf{v} - \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}) \right\} dt + \\ & \int_0^T \left\{ \eta ((\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \mathbf{v} - \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}))_s + \phi_\varepsilon(\mathbf{v} + \mathbf{u}_0) - \phi_\varepsilon(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta} + \mathbf{u}_0) - (\mathbf{f}_0, \mathbf{v} - \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}) \right\} dt. \end{aligned} \quad (\text{II.3.42})$$

Utilisons (II.3.6) et la monotonie de la différentielle $\mathbf{D}\phi_\varepsilon$, on déduit que $\mathbf{Z}_{\varepsilon\eta} \geq 0$. Cela signifie que

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left\{ (\mathbf{u}'_{\varepsilon\eta}, \mathbf{v}) - \mathbf{B}(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \mathbf{v}, \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}) + \mathbf{a}(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \mathbf{v}) + \mathbf{c}(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \mathbf{v} - \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}) \right\} dt \\ & + \int_0^T \left\{ \phi_\varepsilon(\mathbf{v} + \mathbf{u}_0) + \eta ((\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \mathbf{v}))_s - (\mathbf{f}_0, \mathbf{v} - \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}) \right\} dt \geq \\ & \frac{1}{2} |\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}(T)|^2 + \int_0^T \mathbf{a}(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}) dt + \int_0^T \phi_\varepsilon(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta} + \mathbf{u}_0) dt. \end{aligned} \quad (\text{II.3.43})$$

On peut supposer d'après (II.3.36) et (II.3.37) qu'on peut ré-extraire une sous-suite, encore notée $\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}$, telle que

$$\mathbf{u}_{\varepsilon\eta} \longrightarrow \mathbf{u} \text{ dans } \mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}) \text{ faible.} \quad (\text{II.3.44})$$

$$\mathbf{u}'_{\varepsilon\eta} \longrightarrow \mathbf{u}' \text{ dans } \mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}') \text{ faible.} \quad (\text{II.3.45})$$

Il en résulte de (II.3.44), (II.3.45) que

$$\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}(T) \longrightarrow \mathbf{u}(T) \text{ dans } \mathcal{H} \text{ faible.} \quad (\text{II.3.46})$$

Alors le premier terme du deuxième membre de (II.3.43) est semi-continu inférieurement pour la topologie faible de $\mathcal{H}$ et d'après la preuve du théorème II.3.1 les deux derniers termes sont semi-continus inférieurement pour la topologie faible de $\mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V})$. Par passage à la limite dans l'inéquation (II.3.43) lorsque $\varepsilon, \eta \longrightarrow 0$, on ait

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \{(\mathbf{u}', \mathbf{v}) - \mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}) + \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{c}(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \phi(\mathbf{v} + \mathbf{u}_0) - (\mathbf{f}_0, \mathbf{v} - \mathbf{u})\} \, dt \\
& \geq \liminf \frac{1}{2} |\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}(T)|^2 + \liminf \int_0^T \mathbf{a}(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}) \, dt + \liminf \int_0^T \phi_\varepsilon(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta} + \mathbf{u}_0) \, dt.
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \{(\mathbf{u}', \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \mathbf{c}(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \\
& \quad \phi(\mathbf{v} + \mathbf{u}_0) - \phi(\mathbf{u} + \mathbf{u}_0) - (\mathbf{f}_0, \mathbf{v} - \mathbf{u})\} \, dt \geq 0.
\end{aligned} \tag{II.3.47}$$

Soit maintenant $t_0 \in]0, T[$. Introduisons les ouverts $\theta_j =]t_0 - \frac{1}{j}, t_0 + \frac{1}{j}[\subset]0, T[$ et définissons la fonction test $\mathbf{v}$ par:

$$\mathbf{v}(t) = \begin{cases} \mathbf{w} & \text{si } t \in \theta_j \\ \mathbf{u}(t) & \text{si } t \notin \theta_j \end{cases} \quad \text{pour } t \in [0, T] \text{ et } \mathbf{w} \in \mathcal{V}.$$

Pour un tel choix de $\mathbf{v}$, l'inéquation (II.3.47) devient

$$\begin{aligned}
& \int_{\theta_j} \{(\mathbf{u}', \mathbf{w} - \mathbf{u}) + \mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{w} - \mathbf{u}) + \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{w} - \mathbf{u}) + \mathbf{c}(\mathbf{u}, \mathbf{w} - \mathbf{u}) + \\
& \quad \phi(\mathbf{w} + \mathbf{u}_0) - \phi(\mathbf{u} + \mathbf{u}_0) - (\mathbf{f}_0, \mathbf{w} - \mathbf{u})\} \, dt \geq 0.
\end{aligned}$$

Mais $\mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = (\mathbf{h}, \mathbf{w})$, avec $\mathbf{h} \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}')$. En divisant par $\text{mes}(\theta_j)$, il vient

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\text{mes}(\theta_j)} \int_{\theta_j} (\mathbf{u}' + \mathbf{h} + \mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{f}_0, \mathbf{w}) \, dt + \frac{1}{\text{mes}(\theta_j)} \int_{\theta_j} \phi(\mathbf{w} + \mathbf{u}_0) \, dt - \\
& \frac{1}{\text{mes}(\theta_j)} \int_{\theta_j} \{(\mathbf{u}', \mathbf{u}) + \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_0, \mathbf{u}) + \phi(\mathbf{u} + \mathbf{u}_0) - (\mathbf{f}_0, \mathbf{u})\} \, dt \geq 0.
\end{aligned}$$

D'après le théorème de Lebesgue pour la différentiation des fonctions d'ensemble, on a

$$\frac{1}{\text{mes}(\theta_j)} \int_{\theta_j} (\mathbf{u}' + \mathbf{h} + \mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{f}_0) \, dt \longrightarrow \mathbf{u}'(t_0) + \mathbf{h}(t_0) + \mathbf{A}\mathbf{u}(t_0) - \mathbf{f}_0(t_0),$$

dans $\mathcal{V}'$ pour $t_0 \notin \mathbf{E}_1$ avec $\text{mes}(\mathbf{E}_1) = 0$. On aura de même

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{mes}(\theta_j)} \int_{\theta_j} \{ (\mathbf{u}', \mathbf{u}) + \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_0, \mathbf{u}) + \phi(\mathbf{u} + \mathbf{u}_0) - (\mathbf{f}_0, \mathbf{u}) \} \, dt &\longrightarrow (\mathbf{u}'(t_0), \mathbf{u}(t_0)) \\ &+ \mathbf{a}(\mathbf{u}(t_0), \mathbf{u}(t_0)) + \mathbf{B}(\mathbf{u}(t_0), \mathbf{u}_0, \mathbf{u}(t_0)) + \phi(\mathbf{u}(t_0) + \mathbf{u}_0) - (\mathbf{f}_0(t_0), \mathbf{u}(t_0)), \end{aligned}$$

pour $t_0 \notin \mathbf{E}_2$ avec $\text{mes}(\mathbf{E}_2) = 0$. Alors pour $t_0 \notin \mathbf{E}_1 \cup \mathbf{E}_2$ on a

$$\begin{aligned} &(\mathbf{u}'(t_0) + \mathbf{h}(t_0) + \mathbf{A}\mathbf{u}(t_0) - \mathbf{f}_0(t_0), \mathbf{w}) + \phi(\mathbf{w} + \mathbf{u}_0) - (\mathbf{u}'(t_0), \mathbf{u}(t_0)) - \\ &\mathbf{a}(\mathbf{u}(t_0), \mathbf{u}(t_0)) - \mathbf{B}(\mathbf{u}(t_0), \mathbf{u}_0, \mathbf{u}(t_0)) - \phi(\mathbf{u}(t_0) + \mathbf{u}_0) + (\mathbf{f}_0(t_0), \mathbf{u}(t_0)) \geq 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour presque tout $t_0 \in]0, T[$

$$\begin{aligned} &(\mathbf{u}'(t_0), \mathbf{w} - \mathbf{u}(t_0)) + \mathbf{B}(\mathbf{u}(t_0), \mathbf{u}(t_0), \mathbf{w} - \mathbf{u}(t_0)) + \mathbf{a}(\mathbf{u}(t_0), \mathbf{w} - \mathbf{u}(t_0)) + \\ &\mathbf{c}(\mathbf{u}(t_0), \mathbf{w} - \mathbf{u}(t_0)) + \phi(\mathbf{w} + \mathbf{u}_0) - \phi(\mathbf{u}(t_0) + \mathbf{u}_0) \geq (\mathbf{f}_0(t_0), \mathbf{w} - \mathbf{u}(t_0)). \end{aligned}$$

Cela prouve que $\mathbf{u}$ est solution du problème (P.II.2).

3. Pour achever la preuve de ce théorème, il reste à vérifier l'unicité de la solution dans l'espace $\mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}) \cap \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathcal{H})$. Pour cela, on supposera que le problème (P.II.2) possède deux solutions notées $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$.

Nous obtenons dans ce cas le système

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{u}'_1, \mathbf{v} - \mathbf{u}_1) + \mathbf{B}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{v} - \mathbf{u}_1) + \mathbf{a}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v} - \mathbf{u}_1) + \mathbf{c}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v} - \mathbf{u}_1) + \\ \quad \phi(\mathbf{v} + \mathbf{u}_0) - \phi(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_0) \geq (\mathbf{f}_0, \mathbf{v} - \mathbf{u}_1) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \\ \\ (\mathbf{u}'_2, \mathbf{v} - \mathbf{u}_2) + \mathbf{B}(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{v} - \mathbf{u}_2) + \mathbf{a}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v} - \mathbf{u}_2) + \mathbf{c}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v} - \mathbf{u}_2) + \\ \quad \phi(\mathbf{v} + \mathbf{u}_0) - \phi(\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_0) \geq (\mathbf{f}_0, \mathbf{v} - \mathbf{u}_2) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(II.3.48)} \\ \text{(II.3.49)} \end{array}$$

Faisons la substitution $\mathbf{v} = \mathbf{u}_2$ dans (II.3.48) et $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1$ dans (II.3.49), il vient

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) + \mathbf{B}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) + \mathbf{a}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) + \mathbf{c}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) + \\ \phi(\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_0) - \phi(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_0) \geq (\mathbf{f}_0, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1), \end{array} \right. \quad (\text{II.3.50})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{u}'_2, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) + \mathbf{B}(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) + \mathbf{a}(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) + \mathbf{c}(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) + \\ \phi(\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_0) - \phi(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_0) \leq (\mathbf{f}_0, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1). \end{array} \right. \quad (\text{II.3.51})$$

On déduit de (II.3.50) et (II.3.51) que

$$\begin{aligned} & (\mathbf{u}'_2 - \mathbf{u}'_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) + [\mathbf{B}(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) - \mathbf{B}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)] + \\ & \mathbf{a}(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) + \mathbf{c}(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \leq 0. \end{aligned} \quad (\text{II.3.52})$$

Posons maintenant $\mathbf{w} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1$, on obtient, en utilisant le lemme II.2.2

$$\frac{d}{2dt} |\mathbf{w}|^2 + \mathbf{a}(\mathbf{w}, \mathbf{w}) + \mathbf{B}(\mathbf{w}, \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_0, \mathbf{w}) \leq 0.$$

Par le même lemme, on aura après intégration

$$\frac{1}{2} |\mathbf{w}(t)|^2 + \alpha \int_0^t \|\mathbf{w}(\tau)\|^2 d\tau \leq c \int_0^t \|\mathbf{w}(\tau)\| |\mathbf{w}(\tau)| \|\mathbf{u}_2(\tau) + \mathbf{u}_0\| d\tau. \quad (\text{II.3.53})$$

L'utilisation des inégalités de Hölder et de Young, conduit à

$$|\mathbf{w}(t)|^2 \leq c \int_0^t |\mathbf{w}(\tau)|^2 \|\mathbf{u}_2(\tau) + \mathbf{u}_0\|^2 d\tau \quad \forall t \in [0, T]. \quad (\text{II.3.54})$$

Compte-tenu du fait que $\|\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_0\|^2 \in \mathbf{L}^1(0, T)$, on conclut, via le lemme de Gronwall que $\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{u}_2(t)$ p.p. $t \in [0, T]$, d'où l'unicité de la solution dans le cas $n = 2$.

Théorème II.3.3. *Supposons que $n = 3$ et soit $\mathbf{u}$ la solution du problème (P.II.3) obtenue par le théorème II.3.1, vérifiant en outre l'hypothèse supplémentaire suivante:*

$$\mathbf{u} \in \mathbf{L}^s(0, T; (\mathbf{L}^r(\Omega))^3) \quad \text{où} \quad \frac{2}{s} + \frac{3}{r} = 1 \quad \text{et} \quad r > 3. \quad (\text{II.3.55})$$

Alors

1. $\mathbf{u}$ est continue de $[0, T]$ sur $\mathcal{H}$.
2. $\mathbf{u}$ est solution du problème (P.II.2).
3. $\mathbf{u}$ est l'unique solution du problème (P.II.2) dans la classe:

$$\mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}) \cap \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathcal{H}) \cap \mathbf{L}^s\left(0, T; (\mathbf{L}^r(\Omega))^3\right). \quad (\text{II.3.56})$$

Preuve du Théorème II.3.3.

1. Soit ρ un réel positif vérifiant $\frac{1}{r} + \frac{1}{\rho} = \frac{1}{2}$. L'utilisation de l'inégalité Hölder pour le triplet $(r, 2, \rho)$ donne

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \leq c \|\mathbf{u}\|_{(\mathbf{L}^r(\Omega))^3} \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|_{(\mathbf{L}^\rho(\Omega))^3}.$$

Soit $\mathbf{u}$ un champ de scalaires. Observons que $\frac{1}{\rho} = \frac{2}{s} + \frac{3}{6}$ et appliquons l'inégalité de convexité généralisée (voir par exemple [20] et [32]), on ait

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^\rho(\Omega)} \leq c \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^{\frac{2}{s}} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^6(\Omega)}^{\frac{3}{r}}.$$

Cette dernière inégalité s'écrit, en utilisant l'injection de Sobolev $\mathbf{H}^1(\Omega) \subset \mathbf{L}^6(\Omega)$

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^\rho(\Omega)} \leq c \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^{\frac{2}{s}} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^{\frac{3}{r}}.$$

Il résulte d'après ce qui précède

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \leq c \|\mathbf{u}\|_{(\mathbf{L}^r(\Omega))^3} \|\mathbf{v}\| |\mathbf{w}|^{\frac{2}{s}} \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^{\frac{3}{r}} \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}. \quad (\text{II.3.57})$$

D'autre part, on sait que $\mathbf{u}$ demeure dans un borné de $\mathbf{L}^\infty(0, T; \mathcal{H})$, alors on aura via le lemme II.2.2

$$\begin{aligned} |\mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v})| &\leq c \|\mathbf{u}\|_{(\mathbf{L}^r(\Omega))^3} \|\mathbf{v}\| |\mathbf{u}|^{\frac{2}{s}} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^{\frac{3}{r}} \\ &\leq c \|\mathbf{u}\|_{(\mathbf{L}^r(\Omega))^3} \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^{\frac{3}{r}} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \end{aligned}$$

L'inégalité de Hölder nous permet d'obtenir, en utilisant la régularité (II.3.1) et l'hypothèse (II.3.55), l'estimation

$$\int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|_{(\mathbf{L}^r(\Omega))^3}^2 \|\mathbf{u}(t)\|^{\frac{6}{r}} dt \leq \left(\int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|_{(\mathbf{L}^r(\Omega))^3}^s dt \right)^{\frac{2}{s}} \left(\int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|^2 dt \right)^{\frac{3}{r}} \leq c.$$

Ce qui entraîne que $\|\mathbf{u}\|_{(\mathbf{L}^r(\Omega))^3} \|\mathbf{u}\|^{\frac{3}{r}} \in \mathbf{L}^2(0, T)$. Par conséquent

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{h}, \mathbf{v}) \quad \text{avec} \quad \mathbf{h} \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}'). \quad (\text{II.3.58})$$

D'où $\mathbf{u}' \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}')$. Alors d'après le lemme I.2.8, $\mathbf{u}$ est après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle, continue de $[0, T]$ sur $\mathcal{H}$.

2. La preuve est similaire à celle du deuxième résultat du théorème II.3.2.

3. Pour montrer l'unicité, nous considérons deux solutions $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ du problème (P.II.2), vérifiant:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}) \cap \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathcal{H}) \cap \mathbf{L}^s(0, T; (\mathbf{L}^r(\Omega))^3), \\ \mathbf{u}_1(0) = \mathbf{u}_2(0) = 0, \end{cases}$$

et posons $\mathbf{w} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1$, on procède comme dans la preuve du théorème II.3.2, on obtient

$$\frac{d}{2dt} |\mathbf{w}|^2 + \mathbf{a}(\mathbf{w}, \mathbf{w}) + \mathbf{B}(\mathbf{w}, \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_0, \mathbf{w}) \leq 0.$$

Utilisons une variante de l'inégalité (II.3.57), il vient après simplification

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\mathbf{w}(t)|^2 + \alpha \|\mathbf{w}(t)\|^2 \leq c \mathbf{M}^{\frac{1}{s}}(t) |\mathbf{w}(t)|^{\frac{2}{s}} \|\mathbf{w}(t)\|^{1+\frac{3}{r}},$$

avec

$$\mathbf{M}(t) = \|\mathbf{u}_2(t) + \mathbf{u}_0\|_{(\mathbf{L}^r(\Omega))^3}^s. \quad (\text{II.3.59})$$

On sait d'après l'hypothèse (II.3.55) que $\frac{1}{s} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{r}\right) = 1$, donc l'utilisation de l'inégalité

de Young nous conduit à

$$c\mathbf{M}^{\frac{1}{s}}(t) |\mathbf{w}(t)|^{\frac{2}{s}} \|\mathbf{w}(t)\|^{1+\frac{3}{r}} \leq \alpha \|\mathbf{w}(t)\|^2 + c\mathbf{M}(t) |\mathbf{w}(t)|^2. \quad (\text{II.3.60})$$

Par conséquent

$$|\mathbf{w}(t)|^2 \leq c \int_0^t \mathbf{M}(\tau) |\mathbf{w}(\tau)|^2 d\tau. \quad (\text{II.3.61})$$

Compte-tenu du fait que $\mathbf{M} \in \mathbf{L}^1(0, T)$, on en déduit, via le lemme de Gronwall que $\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{u}_2(t)$ p.p. $t \in [0, T]$, d'où l'unicité de la solution dans le cas $n = 3$.

II.4. Dépendance continue de la solution par rapport à la fonction de contact

On montre dans cette partie la dépendance continue de la solution forte par rapport à la fonction de contact φ qui apparait dans la condition (II.1.6). Pour cela, on considère pour tout $k > 0$ les fonctions mesurables et convexe $\varphi_k : (\Gamma_1 \times [0, T]) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et les fonctionnelles $\mathbf{d}_k : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telles que:

$$\mathbf{d}_k(\mathbf{v}) = \begin{cases} \int_{\Gamma_1} \varphi_k(\mathbf{v}) d\gamma & \text{si } \varphi_k(\mathbf{v}) \in \mathbf{L}^1(\Gamma_1), \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{II.4.1})$$

On suppose que pour tout $k > 0$, $\mathbf{d}_k$ est propre, convexe et semi-continue inférieurement pour la topologie faible de $\mathcal{V}$ et vérifie en outre l'hypothèse de régularisation (H), et cependant, il existe $m \in [1, 2]$ et une famille de fonctions $\xi_k > 0$ tels que

$$\begin{cases} |\varphi_k(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})| \leq \xi_k(t) |\mathbf{y}|^m & \text{p.p. } t \in [0, T], \mathbf{x} \in \Gamma_1 \text{ et } \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \\ \xi_k \in \mathbf{L}^\infty(0, T) \text{ et } \lim_{k \rightarrow 0} \xi_k(t) = 0 & \text{p.p. sur } [0, T]. \end{cases} \quad (\text{II.4.2})$$

Pout tout $k > 0$ on considère le problème suivant:

Problème ($\mathbf{P}_k$). Supposons que l'hypothèse (II.2.11) est satisfaite. Trouver le champ des vitesses $\mathbf{u}_k$ solution de l'inéquation variationnelle

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{u}'_k, \mathbf{v} - \mathbf{u}_k) + \mathbf{B}(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{v} - \mathbf{u}_k) + \mathbf{a}(\mathbf{u}_k, \mathbf{v} - \mathbf{u}_k) + \mathbf{c}(\mathbf{u}_k, \mathbf{v} - \mathbf{u}_k) + \\
& \phi_k(\mathbf{v} + \mathbf{u}_0) - \phi_k(\mathbf{u}_k + \mathbf{u}_0) \geq (\mathbf{f}_0, \mathbf{v} - \mathbf{u}_k) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V},
\end{aligned} \tag{II.4.3}$$

avec la condition initiale

$$\mathbf{u}_k(0) = 0, \tag{II.4.4}$$

et tel que

$$\phi_k(\mathbf{v}) = \mathbf{d}_k(\mathbf{v}) + \mathbf{J}(\mathbf{v}). \tag{II.4.5}$$

En utilisant les théorèmes II.3.1, II.3.2 et le théorème II.3.3 sous l'hypothèse supplémentaire (II.3.55), on conclut que si $n = 2$ le problème (P_k) possède une unique solution forte dans l'espace $\mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}) \cap \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathcal{H})$ et si $n = 3$ le problème possède une unique solution forte dans l'espace $\mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}) \cap \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathcal{H}) \cap \mathbf{L}^s\left(0, T; (\mathbf{L}^r(\Omega))^3\right)$.

Nous pouvons maintenant énoncer notre résultat de convergence.

Théorème II.4.1. *La solution $\mathbf{u}_k$ du problème (P_k) converge vers la solution forte $\mathbf{u}$ du problème (P.II.2) dans l'espace $\mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}) \cap \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathcal{H})$.*

Preuve du Théorème II.4.1. Commençons tout d'abord par le cas $n = 3$. Soit $\mathbf{u}$ la solution forte du problème (P.II.2) et $\mathbf{u}_k$ la solution du problème (P_k) , on a

$$\left\{ \begin{aligned} & (\mathbf{u}', \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \mathbf{c}(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \\ & \phi(\mathbf{v} + \mathbf{u}_0) - \phi(\mathbf{u} + \mathbf{u}_0) \geq (\mathbf{f}_0, \mathbf{v} - \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \end{aligned} \right. \tag{II.4.6}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & (\mathbf{u}'_k, \mathbf{v} - \mathbf{u}_k) + \mathbf{B}(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{v} - \mathbf{u}_k) + \mathbf{a}(\mathbf{u}_k, \mathbf{v} - \mathbf{u}_k) + \mathbf{c}(\mathbf{u}_k, \mathbf{v} - \mathbf{u}_k) + \\ & \phi_k(\mathbf{v} + \mathbf{u}_0) - \phi_k(\mathbf{u}_k + \mathbf{u}_0) \geq (\mathbf{f}_0, \mathbf{v} - \mathbf{u}_k) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \end{aligned} \right. \tag{II.4.7}$$

Faisons la substitution $\mathbf{v} = \mathbf{u}_k$ dans (II.4.6) et $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ dans (II.4.7), on obtient le système

$$\left\{ \begin{aligned} & (\mathbf{u}', \mathbf{u}_k - \mathbf{u}) + \mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}_k - \mathbf{u}) + \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_k - \mathbf{u}) + \mathbf{c}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_k - \mathbf{u}) + \\ & \phi(\mathbf{u}_k + \mathbf{u}_0) - \phi(\mathbf{u} + \mathbf{u}_0) \geq (\mathbf{f}_0, \mathbf{u}_k - \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \end{aligned} \right. \tag{II.4.8}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & (\mathbf{u}'_k, \mathbf{u}_k - \mathbf{u}) + \mathbf{B}(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k - \mathbf{u}) + \mathbf{a}(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k - \mathbf{u}) + \mathbf{c}(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k - \mathbf{u}) + \\ & \phi_k(\mathbf{u}_k + \mathbf{u}_0) - \phi_k(\mathbf{u} + \mathbf{u}_0) \leq (\mathbf{f}_0, \mathbf{u}_k - \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \end{aligned} \right. \tag{II.4.9}$$

Après soustraction des inégalités (II.4.8), (II.4.9) et utilisation du lemme II.2.2, il vient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |\mathbf{u}_k - \mathbf{u}|^2 + 2\alpha \|\mathbf{u}_k - \mathbf{u}\|^2 &\leq 2 |\mathbf{B}(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}, \mathbf{u} + \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_k - \mathbf{u})| + \\ &2 |(\mathbf{d}_k(\mathbf{u}_k + \mathbf{u}_0) - \mathbf{d}(\mathbf{u}_k + \mathbf{u}_0)) - (\mathbf{d}_k(\mathbf{u} + \mathbf{u}_0) - \mathbf{d}(\mathbf{u} + \mathbf{u}_0))|. \end{aligned}$$

D'une part, l'utilisation de la condition (II.4.2) permet d'avoir

$$\begin{aligned} &\int_0^t [(\mathbf{d}_k(\mathbf{u}_k(\tau) + \mathbf{u}_0) - \mathbf{d}(\mathbf{u}_k(\tau) + \mathbf{u}_0)) - (\mathbf{d}_k(\mathbf{u}(\tau) + \mathbf{u}_0) - \mathbf{d}(\mathbf{u}(\tau) + \mathbf{u}_0))] d\tau \\ &\leq \int_0^t \int_{\Gamma_1} \xi_k(\tau) |\mathbf{u}_k(\tau) + \mathbf{u}_0|^m d\gamma d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_1} \xi_k(\tau) |\mathbf{u}(\tau) + \mathbf{u}_0|^m d\gamma d\tau. \end{aligned}$$

D'autre part, l'inégalité (II.3.60) donne

$$|\mathbf{B}(\mathbf{u}_k(\tau) - \mathbf{u}(\tau), \mathbf{u}(\tau) + \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_k(\tau) - \mathbf{u}(\tau))| \leq \alpha \|\mathbf{u}_k(\tau) - \mathbf{u}(\tau)\|^2 +$$

$$c\mathbf{M}(\tau) |\mathbf{u}_k(\tau) - \mathbf{u}(\tau)|^2 \quad \forall \tau \in [0, t],$$

avec

$$\mathbf{M}(\tau) = \|\mathbf{u}(\tau) + \mathbf{u}_0\|_{(\mathbf{L}^r(\Omega))^3}^s.$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}_k(t) - \mathbf{u}(t)|^2 + \alpha \int_0^t \|\mathbf{u}_k(\tau) - \mathbf{u}(\tau)\|^2 d\tau &\leq \int_0^t c\mathbf{M}(\tau) |\mathbf{u}_k(\tau) - \mathbf{u}(\tau)|^2 d\tau + \\ &2 \int_0^t \xi_k(\tau) \int_{\Gamma_1} |\mathbf{u}(\tau) + \mathbf{u}_0|^m d\gamma d\tau + 2 \int_0^t \xi_k(\tau) \int_{\Gamma_1} |\mathbf{u}_k(\tau) + \mathbf{u}_0|^m d\gamma d\tau. \end{aligned}$$

Utilisons la convexité de la fonction $t \mapsto t^m$ ($t \geq 0$), on aura

$$\begin{aligned}
& |\mathbf{u}_k(t) - \mathbf{u}(t)|^2 + \alpha \int_0^t \|\mathbf{u}_k(\tau) - \mathbf{u}(\tau)\|^2 d\tau \\
& \leq 2(1 + 2^{m-1}) \int_0^t \xi_k(\tau) \int_{\Gamma_1} |\mathbf{u}(\tau) + \mathbf{u}_0|^m d\gamma d\tau + 2^m \int_0^t \xi_k(\tau) \int_{\Gamma_1} |\mathbf{u}_k(\tau) - \mathbf{u}(\tau)|^m d\gamma d\tau + \\
& \quad c \int_0^t \mathbf{M}(\tau) |\mathbf{u}_k(\tau) - \mathbf{u}(\tau)|^2 d\tau \quad \forall t \in [0, T].
\end{aligned}$$

Alors par l'inégalité de Hölder et le théorème de trace de Sobolev, il vient

$$\begin{aligned}
& |\mathbf{u}_k(t) - \mathbf{u}(t)|^2 + \alpha \int_0^t \|\mathbf{u}_k(\tau) - \mathbf{u}(\tau)\|^2 d\tau \\
& \leq 2(1 + 2^{m-1}) (\text{mes}(\Gamma_1))^{\frac{2-m}{2}} \int_0^T \xi_k(t) \|\mathbf{u}(t) + \mathbf{u}_0\|^m dt + \\
& \quad 2^m (\text{mes}(\Gamma_1))^{\frac{2-m}{2}} \int_0^T \xi_k(t) \|\mathbf{u}_k(t) - \mathbf{u}(t)\|^m dt + c \int_0^t \mathbf{M}(\tau) |\mathbf{u}_k(\tau) - \mathbf{u}(\tau)|^2 d\tau
\end{aligned}$$

On aura, en utilisant toujours l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}
& |\mathbf{u}_k(t) - \mathbf{u}(t)|^2 + \alpha \int_0^t \|\mathbf{u}_k(\tau) - \mathbf{u}(\tau)\|^2 d\tau \\
& \leq c \sup_{[0, T]} \text{ess}(\xi_k(t)) \cdot \left[\int_0^T \|\mathbf{u}(t) + \mathbf{u}_0\|^m dt + \left(\int_0^T \|\mathbf{u}_k(t) - \mathbf{u}(t)\|^2 dt \right)^{\frac{m}{2}} \right] + \\
& \quad c \int_0^t \mathbf{M}(\tau) |\mathbf{u}_k(\tau) - \mathbf{u}(\tau)|^2 d\tau \quad \forall t \in [0, T]. \tag{II.4.10}
\end{aligned}$$

Supposons maintenant que $n = 2$, utilisons (II.3.54), la méthode précédente permet d'avoir l'inégalité

$$\begin{aligned}
& |\mathbf{u}_k(t) - \mathbf{u}(t)|^2 + \alpha \int_0^t \|\mathbf{u}_k(\tau) - \mathbf{u}(\tau)\|^2 d\tau \\
& \leq c \sup \text{ess} (\xi_k(t)) \cdot \left[\int_0^T \|\mathbf{u}(t) + \mathbf{u}_0\|^m dt + \left(\int_0^T \|\mathbf{u}_k(t) - \mathbf{u}(t)\|^2 dt \right)^{\frac{m}{2}} \right] + \\
& \quad c \int_0^t \|\mathbf{u}_k(\tau) + \mathbf{u}_0\|^2 |\mathbf{u}_k(\tau) - \mathbf{u}(\tau)|^2 d\tau. \tag{II.4.11}
\end{aligned}$$

Remarquons, par ailleurs que

$$\begin{cases} \mathbf{u}_k - \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}), \\ \mathbf{M}, \quad \|\mathbf{u} + \mathbf{u}_0\|^m \text{ et } \|\mathbf{u}_k + \mathbf{u}_0\|^2 \in \mathbf{L}^1(0, T), \end{cases}$$

et appliquons le lemme de Gronwall aux inégalités (II.4.10), (II.4.11), on déduit, en utilisant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue que

$$\lim_{k \rightarrow 0} \left[|\mathbf{u}_k(t) - \mathbf{u}(t)|^2 + \alpha \int_0^t \|\mathbf{u}_k(\tau) - \mathbf{u}(\tau)\|^2 d\tau \right] = 0 \text{ p.p. } t \in [0, T].$$

Ce qui achève la démonstration.

Interprétation. Le résultat montre que la solution forte du problème (P.II.2) dépend continuellement des conditions de contact et de frottement.

II.5. Exemples de loi de frottement du type sous-différentiel

La condition (II.1.6) sur la partie $\Gamma_1 \times [0, T]$ de la frontière est une condition générale de contact avec frottement sous l'apparition d'une condition de glissement. Les conditions qu'on va considérer dans la suite sont des cas conduisant à l'inégalité (II.1.6). Cependant, les résultats établis concernant, respectivement, l'existence de solutions faibles pour le problème (P.II.3), l'existence et l'unicité de la solution forte pour le problème (P.II.2) seront satisfaits et aussi le résultat de convergence dans le cas de la solution forte reste applicable dans ces deux cas particuliers.

II.5.1. Glissement avec loi de frottement Tresca

Le contact entre le corps et l'obstacle se fait avec glissement, la loi de frottement est celle de Tresca avec un seuil de frottement fixe, ceci se traduit mathématiquement par les conditions:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_\nu = 0, & |\boldsymbol{\sigma}_\tau| \leq \mathbf{h} \\ |\boldsymbol{\sigma}_\tau| < \mathbf{h} \implies \mathbf{u}_\tau = 0 \\ |\boldsymbol{\sigma}_\tau| = \mathbf{h} \implies \mathbf{u}_\tau = -\lambda \boldsymbol{\sigma}_\tau, \quad \lambda \geq 0 \end{cases} \quad \text{sur } \boldsymbol{\Gamma}_1 \times [0, T]. \quad (\text{II.5.1})$$

Ici $\mathbf{h}$ représente le seuil de frottement, autrement dit la limite à partir de laquelle commence le glissement. On suppose de plus que le contact est bilatéral cela veut dire qu'il est maintenu pendant tout le processus.

Il est facile de voir que si les fonctions $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ satisfaisant (II.5.1), alors

$$\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) \geq \mathbf{h} |\mathbf{u}_\tau(t)| - \mathbf{h} |\mathbf{v}_\tau| \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad \text{p.p. sur } \boldsymbol{\Gamma}_1 \times [0, T].$$

Donc la condition (II.1.6) est vérifiée avec la fonction

$$\varphi(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) |\mathbf{y}_\tau(\mathbf{x})| \quad \forall \mathbf{x} \in \boldsymbol{\Gamma}_1, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t \in [0, T].$$

Si $\mathbf{h} \in \mathbf{L}^{+\infty}(\boldsymbol{\Gamma}_1 \times [0, T])$ on obtient de (II.2.4)

$$\mathbf{d}(\mathbf{v}) = \int_{\boldsymbol{\Gamma}_1} \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) |\mathbf{v}_\tau| \, d\gamma \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \quad (\text{II.5.2})$$

Il résulte que $\mathbf{d}$ est propre, convexe et semi-continue inférieurement pour la topologie faible de $\mathcal{V}$. En outre, on considère pour chaque $k > 0$ la fonction $\mathbf{h}_k \in \mathbf{L}^{+\infty}(\boldsymbol{\Gamma}_1 \times [0, T])$ telle que

$$\mathbf{h}_k \longrightarrow \mathbf{h} \quad \text{dans } \mathbf{L}^{+\infty}(\boldsymbol{\Gamma}_1 \times [0, T]) \quad \text{lorsque } k \longrightarrow 0.$$

Alors pour chaque $k > 0$ les fonctions

$$\varphi_k(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}, t) |\mathbf{y}_\tau(\mathbf{x})| \quad \forall \mathbf{x} \in \boldsymbol{\Gamma}_1, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t \in [0, T],$$

vérifient (II.4.2) avec

$$\xi_k = \|\mathbf{h}_k - \mathbf{h}\|_{\mathbf{L}^{+\infty}(\boldsymbol{\Gamma}_1)}, \quad m = 1 \quad \text{et} \quad \mathbf{d}_k(\mathbf{v}) = \int_{\boldsymbol{\Gamma}_1} \mathbf{h}_k(\mathbf{x}, t) |\mathbf{v}_\tau| \, d\gamma.$$

Par conséquent, d'après le théorème II.4.1, la solution $\mathbf{u}_k$ du problème (P_k) converge vers la solution forte $\mathbf{u}$ du problème (P.II.2) dans l'espace $\mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}) \cap \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathcal{H})$.

Vérification de l'hypothèse de régularisation (H). Ici, on montre que les fonctionnelles $\mathbf{d}$ et $\mathbf{d}_k$ vérifient l'hypothèse de régularisation (H). Pour cela, on régularise la fonctionnelle $\mathbf{d}$ (respectivement, $\mathbf{d}_k$) par la fonctionnelle $(\mathbf{d}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ (respectivement, $(\mathbf{d}_{k\varepsilon})_{\varepsilon>0}$), telle que

$$\begin{cases} \mathbf{d}_\varepsilon(\mathbf{v}) = \frac{1}{1+\varepsilon} \int_{\Gamma_1} \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) |\mathbf{v}_\tau|^{1+\varepsilon} \mathbf{d}\gamma, \\ \mathbf{d}_{k\varepsilon}(\mathbf{v}) = \frac{1}{1+\varepsilon} \int_{\Gamma_1} \mathbf{h}_k(\mathbf{x}, t) |\mathbf{v}_\tau|^{1+\varepsilon} \mathbf{d}\gamma. \end{cases} \quad (\text{II.5.3})$$

La propriété 1 est triviale, il suffit de vérifier les autres propriétés.

2. On a

$$\int_0^T \mathbf{d}_\varepsilon(\mathbf{v}) \mathbf{d}t = \frac{1}{1+\varepsilon} \int_0^T \int_{\Gamma_1} \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) |\mathbf{v}_\tau|^{1+\varepsilon} \mathbf{d}\gamma \mathbf{d}t.$$

Or $\mathbf{h} \in \mathbf{L}^{+\infty}(\Gamma_1 \times [0, T])$, donc la propriété résulte de l'application du théorème de la convergence dominée de Lebesgue.

3. On a pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V})$

$$\begin{aligned} \int_0^T \mathbf{d}(\mathbf{v}) \mathbf{d}t &\leq \int_{\Gamma_1 \times [0, T]} |\mathbf{h}(\mathbf{x}, t)| |\mathbf{v}_\tau| \mathbf{d}\gamma \mathbf{d}t \\ &\leq \left(\int_{\Gamma_1 \times [0, T]} |\mathbf{h}(\mathbf{x}, t)|^{1+\varepsilon} |\mathbf{v}_\tau|^{1+\varepsilon} \mathbf{d}\gamma \mathbf{d}t \right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \left(\int_{\Gamma_1 \times [0, T]} \mathbf{d}\gamma \mathbf{d}t \right)^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Remplaçons dans cette inégalité $\mathbf{v}$ par $\mathbf{u}_\varepsilon$ et faisons tendre ε vers 0, il vient

$$\liminf \int_0^T \mathbf{d}(\mathbf{u}_\varepsilon) \mathbf{d}t \leq \liminf \left[(1+\varepsilon)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \left(\int_0^T \frac{1}{1+\varepsilon} \int_{\Gamma_1} |\mathbf{h}(\mathbf{x}, t)|^{1+\varepsilon} |\mathbf{u}_\varepsilon|^{1+\varepsilon} \mathbf{d}t \right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \right].$$

Le fait que $\mathbf{h} \in \mathbf{L}^{+\infty}(\Gamma_1 \times [0, T])$ entraîne

$$\liminf \int_0^T \mathbf{d}(\mathbf{u}_\varepsilon) \, dt \leq \liminf \int_0^T \mathbf{d}_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon) \, dt.$$

D'autre part, on sait que $\mathbf{v} \mapsto \int_0^T \mathbf{d}(\mathbf{v}) \, dt$ est continue et convexe, elle est donc semi-continue inférieurement pour la topologie faible de $\mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V})$, d'où

$$\int_0^T \mathbf{d}(\mathbf{u}) \, dt \leq \liminf \int_0^T \mathbf{d}_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon) \, dt.$$

4. Pour tout $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V})$, on a

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{Dd}_\varepsilon(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} &= \int_{\Gamma_1} \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) |\mathbf{v}_\tau|^{\varepsilon-1} \mathbf{v}_\tau \cdot \mathbf{w}_\tau \, d\gamma \\ &\leq \int_{\Gamma_1} |\mathbf{h}(\mathbf{x}, t)| |\mathbf{v}|^\varepsilon |\mathbf{w}| \, d\gamma. \end{aligned}$$

Donc

$$\langle \mathbf{Dd}_\varepsilon(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} \leq c \left(\int_{\Gamma_1} |\mathbf{v}|^{2\varepsilon} \, d\gamma \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Gamma_1} |\mathbf{w}|^2 \, d\gamma \right)^{\frac{1}{2}}.$$

En procédant comme dans la preuve du lemme II.3.1, il en résulte

$$\|\mathbf{Dd}_\varepsilon(\mathbf{v})\|_{\mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}')} \leq c \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V})} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}).$$

D'où la propriété 4. On peut de même montrer que la fonctionnelle $\mathbf{d}_k$ vérifie l'hypothèse de régularisation (H).

II.5.2. Glissement avec loi de frottement viscoélastique (loi de puissance)

On considère le problème avec les conditions aux limites:

$$\mathbf{u}_\nu = 0, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = -\mu |\mathbf{u}_\tau|^{p-1} \mathbf{u}_\tau \quad \text{sur } \Gamma_1 \times [0, T], \quad (\text{II.5.4})$$

où $0 < p \leq 1$ et $\mu \geq 0$ est le coefficient de frottement. Dans ce cas la contrainte tangentielle est proportionnelle à une puissance p de la vitesse tangentielle. Il facile de voir que si $\mathbf{u}$ est un vecteur satisfaisant (II.5.4), alors (II.1.6) est satisfaite avec la fonction

$$\varphi(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = \frac{1}{p+1} \mu(\mathbf{x}, t) |\mathbf{y}_\tau(\mathbf{x})|^{p+1} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad \forall t \in [0, T].$$

Si $\mu \in \mathbf{L}^{+\infty}(\Gamma_1 \times [0, T])$ il vient de (II.2.4)

$$\mathbf{d}(\mathbf{v}) = \frac{1}{p+1} \int_{\Gamma_1} \mu(\mathbf{x}, t) |\mathbf{v}_\tau|^{p+1} \mathbf{d}\gamma \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \quad (\text{II.5.5})$$

Alors $\mathbf{d}$ est propre, convexe et semi-continue inférieurement pour la topologie faible de $\mathcal{V}$. En outre, pour chaque $k > 0$ on considère la fonction $\mu_k \in \mathbf{L}^{+\infty}(\Gamma_1 \times [0, T])$, telle que

$$\mu_k \longrightarrow \mu \quad \text{dans} \quad \mathbf{L}^{+\infty}(\Gamma_1 \times [0, T]) \quad \text{lorsque} \quad k \longrightarrow 0.$$

Donc pour chaque $k > 0$ les fonctions

$$\varphi_k(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = \frac{1}{p+1} \mu_k(\mathbf{x}, t) |\mathbf{y}_\tau(\mathbf{x})|^{p+1} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad \forall t \in [0, T],$$

vérifient (II.4.2) avec

$$\xi_k = \frac{1}{p+1} \|\mu_k - \mu\|_{\mathbf{L}^{+\infty}(\Gamma_1)}, \quad m = p+1 \quad \text{et} \quad \mathbf{d}_k(\mathbf{v}) = \frac{1}{p+1} \int_{\Gamma_1} \mu_k(\mathbf{x}, t) |\mathbf{v}_\tau|^{p+1} \mathbf{d}\gamma.$$

Par conséquent, d'après le théorème II.4.1, la solution $\mathbf{u}_k$ du problème (P_k) converge vers la solution forte $\mathbf{u}$ du problème (P.II.2) dans l'espace $\mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}) \cap \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathcal{H})$.

Nous pouvons aisément montrer que $\mathbf{d}$ et $\mathbf{d}_k$ vérifient l'hypothèse de régularisation (H). Pour cela, il suffit de régulariser $\mathbf{d}$ (respectivement, $\mathbf{d}_k$) par $(\mathbf{d}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ (respectivement, $(\mathbf{d}_{k\varepsilon})_{\varepsilon>0}$), telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{d}_\varepsilon(\mathbf{v}) = \frac{1}{1+p+\varepsilon} \int_{\Gamma_1} \mu(\mathbf{x}, t) |\mathbf{v}_\tau|^{1+p+\varepsilon} \mathbf{d}\gamma, \\ \mathbf{d}_{k\varepsilon}(\mathbf{v}) = \frac{1}{1+p+\varepsilon} \int_{\Gamma_1} \mu_k(\mathbf{x}, t) |\mathbf{v}_\tau|^{1+p+\varepsilon} \mathbf{d}\gamma. \end{array} \right. \quad (\text{II.5.6})$$

Remarque II.5.1. Pour ce type de conditions aux limites la fonctionnelle $\mathbf{d}$ est bien différentiable, alors la régularisation peut être inutile et pour pouvoir appliquer les résultats des théorèmes II.3.1, II.3.2 et II.3.3 il suffit de montrer que $\mathbf{d}$ vérifie l'inégalité (II.2.8). En effet, on a

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{Dd}(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} &= \int_{\Gamma_1} \mu(\mathbf{x}, t) |\mathbf{u}_\tau|^{p-1} \mathbf{u}_\tau \cdot \mathbf{v}_\tau d\gamma \\ &\leq c \left(\int_{\Gamma_1} |\mathbf{u}|^{2p} d\gamma \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Gamma_1} |\mathbf{v}|^2 d\gamma \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Or on sait que $0 < p \leq 1$, alors, d'après la preuve du lemme II.3.1

$$\|\mathbf{Dd}(\mathbf{v})\|_{\mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}')} \leq c \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V})} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathcal{V}).$$

De même, on peut facilement montrer que $\mathbf{d}_k$ vérifie l'inégalité ci-dessus.

CHAPITRE III

ÉCOULEMENT THERMIQUE STATIONNAIRE DU FLUIDE DE BINGHAM AVEC CONTACT DU TYPE SOUS-DIFFÉRENTIEL

Nous étudions dans ce chapitre l'écoulement thermique stationnaire dans un domaine partiellement limité par un obstacle du fluide incompressible et viscoplastique de Bingham dont la viscosité et seuil de plasticité dépendent de la température. Le problème mécanique conduit à un modèle mathématique couplé, formé de l'équation du mouvement et l'équation de la conservation de l'énergie. Les conditions aux limites sont modélisées par des conditions de contact du type sous-différentiel dépendant de la température pour l'équation du mouvement ainsi qu'une condition de Fourier et une condition homogène de Neumann pour l'équation de la conservation de l'énergie. On établit un théorème d'existence de solutions faibles ainsi qu'un résultat de dépendance continue des solutions par rapport à la fonction de contact pour ce problème dans le cadre général et qui restent valables pour les différents problèmes de contact conduisant aux inégalités du type sous-différentiel. Les preuves sont basées sur le théorème de point fixe de Kakutani-Glicksberg, la théorie des données $\mathbf{L}^1(\mathbf{L}^1\text{--Data theory})$, ainsi que quelques arguments de compacité et de monotonie. Enfin, on présente deux exemples de loi de contact conduisant à une inégalité du type sous-différentiel, voir [35].

III.1. Formulation du problème mécanique

On considère un problème mécanique qui décrit l'écoulement stationnaire du fluide incompressible et viscoplastique de Bingham dans un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$), de frontière régulière $\partial\Omega = \Gamma$ constituée de deux parties mesurables et disjointes Γ_0 et Γ_1 , telles que $\text{mes}(\Gamma_0) > 0$. On suppose que la viscosité et le seuil de plasticité dépendent de la température. Les forces volumiques de densité $\mathbf{f}$ agissent dans Ω . De plus, on admet l'existence d'une source de chaleur $\mathbf{h}$ qui agit dans Ω . La vitesse est supposée connue est nulle sur Γ_0 et la température est donnée par une condition aux limites homogène de Neumann. On impose sur Γ_1 des conditions de contact avec frottement du type sous-différentiel qui dépendent de la température ainsi qu'une condition aux limites de Fourier.

On désigne par $\tilde{\sigma}$ le déviateur du tenseur des contraintes σ , donné par

$$\tilde{\sigma} = (\tilde{\sigma}_{ij}), \quad \tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\text{tr}\sigma}{n} \delta_{ij},$$

où $\delta = (\delta_{ij})$ est le tenseur identique. Le problème mécanique peut se formuler de la manière suivante.

Problème (P.III.1). Trouver le champ des vitesses $\mathbf{u} = (u_i)_{1 \leq i \leq n} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, le champ des contraintes $\sigma = (\sigma_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} : \Omega \longrightarrow \mathbb{S}_n$ et la température $\theta : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = \mathbf{Div}(\sigma) + \mathbf{f} \quad \text{sur } \Omega, \quad (\text{III.1.1})$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\sigma} &= 2\mu(\theta) \varepsilon(\mathbf{u}) + \mathbf{g}(\theta) \frac{\varepsilon(\mathbf{u})}{|\varepsilon(\mathbf{u})|} \quad \text{si } |\varepsilon(\mathbf{u})| \neq 0, \\ |\tilde{\sigma}| &\leq \mathbf{g}(\theta) \quad \text{si } |\varepsilon(\mathbf{u})| = 0, \end{aligned} \right\} \quad \text{sur } \Omega, \quad (\text{III.1.2})$$

$$\mathbf{div}(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{sur } \Omega, \quad (\text{III.1.3})$$

$$-k\Delta\theta + \mathbf{u} \cdot \nabla\theta = \sigma \cdot \varepsilon(\mathbf{u}) + \mathbf{h} \quad \text{sur } \Omega, \quad (\text{III.1.4})$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0, \quad (\text{III.1.5})$$

$$\mathbf{u}_\nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1, \quad (\text{III.1.6})$$

$$\varphi(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{v}) - \varphi(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}) \geq -\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{U} \quad \text{sur } \Gamma_1, \quad (\text{III.1.7})$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0, \quad (\text{III.1.8})$$

$$k \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \boldsymbol{\nu}} + \beta \boldsymbol{\theta} = \omega \varphi(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}) \quad \text{sur } \Gamma_1. \quad (\text{III.1.9})$$

Rappelons ici que (III.1.1) représente l'équation du mouvement telle que $\mathbf{Div}(\boldsymbol{\sigma}) = (\sigma_{ij,j})$ et $\mathbf{f}$ est la densité des forces volumiques agissant sur le fluide. La relation (III.1.2) représente la loi de comportement du fluide viscoplastique de Bingham dont le coefficient de viscosité $\boldsymbol{\mu}$ et le seuil de plasticité $\mathbf{g}$ dépendent de la température. L'équation (III.1.3) est la condition d'incompressibilité du fluide dans laquelle $\mathbf{div}(\mathbf{u}) = u_{i,i}$. (III.1.4) est l'équation de la conservation de l'énergie, où $k > 0$ représente la conductivité thermique du fluide et $\mathbf{h}$ est une source de chaleur agissant dans Ω . (III.1.5) est une condition sur la vitesse sur la partie Γ_0 de la frontière et (III.1.6) est une condition de glissement sur la partie Γ_1 de la frontière. $\mathbf{U} = \{\mathbf{v} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n \mid \mathbf{v}_\nu = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$ est l'ensemble des fonctions admissibles de test et la relation (III.1.7) représente la condition aux limites du type sous-différentiel sur la partie Γ_1 de la frontière où $\varphi : \mathbb{R} \times \Gamma_1 \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe qui dépend de la température. (III.1.8) est une condition aux limites homogène de Neumann sur la partie Γ_0 de la frontière. Finalement, (III.1.9) représente une condition aux limites de Fourier sur la partie Γ_1 de la frontière, où $\beta \geq 0$ est le coefficient de Robin et $\omega \in [1, 2]$ est une constante qui dépend seulement de la condition aux limites (III.1.7).

III.2. Formulation variationnelle du problème et hypothèses

Nous allons dériver dans cette section une formulation variationnelle du problème mécanique

(P.III.1). Nous commençons par donner quelques notations et hypothèses et nous établissons des lemmes qui permettent d'obtenir la formulation variationnelle. On désigne par $\mathcal{V}$ l'espace

$$\mathcal{V} = \left\{ \mathbf{v} \in \left(\mathbf{H}^1(\Omega) \right)^n : \mathbf{div}(\mathbf{v}) = 0 \text{ sur } \Omega, \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \text{ et } \mathbf{v}_\nu = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \right\},$$

$\mathcal{V}$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire et la norme induite, respectivement,

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i)_{\mathbf{H}^1(\Omega)}, \quad \|\mathbf{v}\| = (\mathbf{v}, \mathbf{v})^{\frac{1}{2}}.$$

Dans toute la suite on désignera par c des constantes diverses. Notons par p une constante vérifiant $1 < p < \frac{n}{n-1}$ et par p' le conjugué p , c'est à dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ et soit s une constante telle que $s \geq n$.

Introduisons les fonctionnelles suivantes:

$$\mathbf{a} : \mathbf{W}^{1,1}(\Omega) \times \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2 \int_{\Omega} \mu(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, \mathbf{d}\mathbf{x}. \quad (\text{III.2.1})$$

$$\mathbf{B} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \, \mathbf{d}\mathbf{x}. \quad (\text{III.2.2})$$

$$\mathbf{c} : \mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \times \mathbf{W}^{1,p'}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{c}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}) = k \int_{\Omega} \nabla \boldsymbol{\theta} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau} \, \mathbf{d}\mathbf{x}. \quad (\text{III.2.3})$$

$$\mathbf{E} : \mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \times \mathbf{W}^{1,p'}(\Omega) \times \mathbf{L}^s(\Omega)^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\theta} \nabla \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v} \, \mathbf{d}\mathbf{x}. \quad (\text{III.2.4})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{d} : \mathbf{W}^{1,1}(\Omega) \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \\ \mathbf{d}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{v}) = \begin{cases} \int_{\Gamma_1} \varphi(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{v}) \, \mathbf{d}\boldsymbol{\gamma} & \text{si } \varphi(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{v}) \in \mathbf{L}^1(\Gamma_1), \\ +\infty & \text{ailleurs.} \end{cases} \end{array} \right. \quad (\text{III.2.5})$$

$$\mathbf{J} : \mathbf{W}^{1,1}(\Omega) \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{J}(\theta, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{g}(\theta) |\varepsilon(\mathbf{v})| \, d\mathbf{x}. \quad (\text{III.2.6})$$

Ici $d\gamma$ représente l'élément de surface. De plus, on suppose que le coefficient de viscosité μ et le seuil de plasticité $\mathbf{g}$ vérifient les hypothèses suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \mu(., \mathbf{x}) \in C^0(\mathbb{R}) : \exists \mu_1, \mu_2 > 0, \quad \mu_1 \leq \mu(y, \mathbf{x}) \leq \mu_2, \\ \forall y \in \mathbb{R}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \end{array} \right. \quad (\text{III.2.7})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \mathbf{g}(., \mathbf{x}) \in C^0(\mathbb{R}) : \exists g_0 > 0, \quad 0 \leq \mathbf{g}(y, \mathbf{x}) \leq g_0, \\ \forall y \in \mathbb{R}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \end{array} \right. \quad (\text{III.2.8})$$

La fonction de contact φ est définie de la manière suivante: $\varphi(\theta, \mathbf{v}) = \mathbf{v}(\theta) \psi(\mathbf{v})$, où la fonction $\mathbf{v}$ est telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad \mathbf{v}(., \mathbf{x}) \in C^0(\mathbb{R}) : \exists v_0 > 0, \quad 0 \leq \mathbf{v}(y, \mathbf{x}) \leq v_0, \\ \forall y \in \mathbb{R}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_1, \end{array} \right. \quad (\text{III.2.9})$$

et $\psi : \Gamma_1 \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive, convexe et continue sur $\mathcal{V}$ et telle que $\psi(0) = 0$.

Cela garantit que la fonctionnelle $\mathbf{d}(\theta, .)$ est convexe et semi-continue inférieurement pour la topologie faible de $\mathcal{V}$. Le lemme suivant donne quelques propriétés des fonctionnelles $\mathbf{a}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{E}$ et $\mathbf{J}$.

Lemme III.2.1.

1. $\mathbf{a}(\theta, ., .)$ est bilinéaire, symétrique, continue et coercive sur $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$.
2. $\mathbf{B}$ est trilinéaire et continue sur $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V}$. De plus

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) \quad \forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V}.$$

3. $\mathbf{c}$ est bilinéaire et continue sur $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \times \mathbf{W}^{1,p'}(\Omega)$ et elle est bilinéaire, symétrique, continue et coercive sur $\mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega)$.

4. $\mathbf{E}$ est trilinéaire et continue sur $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \times \mathbf{W}^{1,p'}(\Omega) \times \mathbf{L}^s(\Omega)^n$ et sur $\mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathcal{V}$.

De plus

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) &= -\mathbf{E}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{v}) \quad \forall (\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \times \mathbf{W}^{1,p'}(\Omega) \times \mathbf{L}^s(\Omega)^n \\ \text{et} \quad \forall (\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) &\in \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathcal{V}. \end{aligned}$$

5. $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}, \cdot)$ est continue sur $\mathcal{V}$.

Preuve du Lemme III.2.1. La preuve de 1, 2, 3, 5 est identique aux celles des lemmes II.2.1 et II.2.2, sauf pour la continuité de $\mathbf{c}$ sur $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \times \mathbf{W}^{1,p'}(\Omega)$. En effet, on utilisera pour cela l'inégalité de Hölder pour obtenir l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} |\mathbf{c}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})| &\leq k \|\nabla \boldsymbol{\theta}\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)^n} \|\nabla \boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{L}^{p'}(\Omega)^n} \\ &\leq k \|\boldsymbol{\theta}\|_{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)} \|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{W}^{1,p'}(\Omega)} \quad \forall \boldsymbol{\theta} \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega), \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{W}^{1,p'}(\Omega). \end{aligned}$$

Concernant la continuité de $\mathbf{E}$ sur $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \times \mathbf{W}^{1,p'}(\Omega) \times \mathbf{L}^s(\Omega)^n$, on procède comme suit. Soit $\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{W}^{1,p'}(\Omega)$, on sait d'après les injections de Sobolev que l'espace $\mathbf{W}^{1,p'}(\Omega)$ s'injecte continuellement dans $C(\overline{\Omega})$ pour $p' > n$, ce qui est le cas, car on a supposé que $p < \frac{n}{n-1}$. Par conséquent, l'inégalité de Hölder garantit que si $\boldsymbol{\theta} \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ et $\mathbf{v} \in \mathbf{L}^s(\Omega)^n$ alors

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})| &\leq \|\boldsymbol{\theta}\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} \|\boldsymbol{\tau}\|_{C(\overline{\Omega})} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^s(\Omega)^n} \\ &\leq \|\boldsymbol{\theta}\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} \|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{W}^{1,p'}(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^s(\Omega)^n}. \end{aligned}$$

Pour le reste de la preuve il suffit d'adapter celle du lemme II.2.2.

Lemme III.2.2. *Supposons que*

$$\mathbf{f} \in \mathcal{V}' \quad \text{et} \quad \mathbf{h} \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega). \quad (\text{III.2.10})$$

Si $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\theta}\}$ sont des fonctions régulières satisfaisant (III.1.1)-(III.1.9), alors

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \phi(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{v}) - \phi(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}) \\ \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \end{aligned} \quad (\text{III.2.11})$$

$$\begin{aligned}
& -\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}) + \mathbf{c}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}) + \beta \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\tau} d\gamma = \int_{\Omega} \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}) \boldsymbol{\tau} d\mathbf{x} + \\
& \omega \int_{\Gamma_1} \varphi(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}) \boldsymbol{\tau} d\gamma + \int_{\Omega} \mathbf{h} \boldsymbol{\tau} d\mathbf{x} \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{W}^{1,p'}(\Omega),
\end{aligned} \tag{III.2.12}$$

où

$$\phi(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}) = \mathbf{d}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}) + \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}), \tag{III.2.13}$$

et

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}) = 2\mu(\boldsymbol{\theta}) |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|^2 + \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|. \tag{III.2.14}$$

Preuve du Lemme III.2.2. Commençons tout d'abord par la preuve de l'inéquation variationnelle (III.2.11), pour cela on procède comme dans la preuve du lemme II.2.3. En effet, soient $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\theta}\}$ des fonctions régulières satisfaisant (III.1.1)-(III.1.9) et soit $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$. Il vient en appliquant la formule de Green

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{u})) = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) d\gamma + (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u}).$$

Par définition de $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$, on aura, en utilisant la condition d'incompressibilité (III.1.3)

$$(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{u})) = \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\text{tr} \boldsymbol{\sigma}}{n} \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \right) = (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{u})).$$

Alors

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{u})) \leq \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{v}) - \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
& \mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{v}) - \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \\
& \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) d\gamma.
\end{aligned}$$

D'autre part, la condition aux limites (III.1.7) entraîne que

$$\int_{\partial\Omega} \sigma \nu \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, d\gamma \geq \int_{\Gamma_1} \varphi(\theta, \mathbf{u}) \, d\gamma - \int_{\Gamma_1} \varphi(\theta, \mathbf{v}) \, d\gamma.$$

D'où l'inéquation variationnelle (III.2.11). Montrons maintenant l'équation variationnelle (III.2.12). Soit $\tau \in \mathbf{W}^{1,p'}(\Omega)$, on a d'après la formule de Green

$$(\Delta\theta, \tau) = -(\nabla\theta, \nabla\tau) + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial\theta}{\partial\nu} \tau \, d\gamma.$$

On aura, via la condition aux limites de Fourier (III.1.9)

$$k(\Delta\theta, \tau) = -c(\theta, \tau) + \omega \int_{\Gamma_1} \varphi(\theta, \mathbf{u}) \tau \, d\gamma - \beta \int_{\Gamma_1} \theta \tau \, d\gamma.$$

Par conséquent, l'équation (III.1.4) devient

$$c(\theta, \tau) - \omega \int_{\Gamma_1} \varphi(\theta, \mathbf{u}) \tau \, d\gamma + \beta \int_{\Gamma_1} \theta \tau \, d\gamma + (\mathbf{u} \cdot \nabla\theta, \tau) = (\sigma \cdot \varepsilon(\mathbf{u}), \tau) + (\mathbf{h}, \tau).$$

Par ailleurs, par définition de $\tilde{\sigma}$, l'utilisation de (III.1.3) permet d'avoir

$$\begin{aligned} (\sigma \cdot \varepsilon(\mathbf{u}), \tau) &= (\tilde{\sigma} \cdot \varepsilon(\mathbf{u}), \tau) \\ &= \int_{\Omega} \left(2\mu(\theta) |\varepsilon(\mathbf{u})|^2 + \mathbf{g}(\theta) |\varepsilon(\mathbf{u})| \right) \tau \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Ce qui prouve l'équation (III.1.12).

Le lemme III.2.2 nous conduit à considérer le problème variationnel suivant.

Problème (P.III.2). Supposons que l'hypothèse (III.2.10) est satisfaite. Trouver le champ des vitesses $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ et la température $\theta \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$, solutions du système variationnel

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \mathbf{a}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \phi(\theta, \mathbf{v}) - \phi(\theta, \mathbf{u}) \\ \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \end{aligned} \tag{III.2.15}$$

$$\begin{aligned}
& -\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}) + \mathbf{c}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}) + \beta \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\tau} d\gamma = \int_{\Omega} \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}) \boldsymbol{\tau} d\mathbf{x} + \\
& \omega \int_{\Gamma_1} \varphi(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}) \boldsymbol{\tau} d\gamma + \int_{\Omega} \mathbf{h} \boldsymbol{\tau} d\mathbf{x} \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{W}^{1,p'}(\Omega).
\end{aligned} \tag{III.2.16}$$

III.3. Résultats d'existence et de dépendance continue

On établit ici un théorème d'existence de solutions pour le problème (P.III.2) ainsi qu'un résultat de dépendance continue des solutions par rapport à la fonction de contact φ .

III.3.1. Existence

Théorème III.3.1. *Le problème (P.III.2) admet une solution $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta})$ ayant la régularité:*

$$\mathbf{u} \in \mathcal{V}, \tag{III.3.1}$$

$$\boldsymbol{\theta} \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega). \tag{III.3.2}$$

La preuve du théorème est basée sur l'application du théorème de point fixe de Kakutani-Glicksberg pour les applications multivoques et l'utilisation de deux résultats d'existence auxiliaires. Le premier résultat est basé sur les théories classiques des inéquations variationnelles elliptiques. Le deuxième est basé sur les théories des équations elliptiques et la théorie des données $\mathbf{L}^1$ ($\mathbf{L}^1$ -Data theory, pour plus de détails concernant cette méthode voir [17] et [41]). Finalement, on utilise des arguments de compacité pour conclure la preuve. Les résultats d'existence auxiliaires sont donnés par les deux lemmes suivants.

Lemme III.3.1. *Pour tout $\mathbf{w} \in \mathbf{L}^s(\Omega)^n$, $s \geq n$ et $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{W}^{1,1}(\Omega)$, il existe une unique solution $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{w}, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathcal{V}$ du problème variationnel suivant:*

$$\begin{aligned}
& \mathbf{B}(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \mathbf{a}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \phi(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}) - \phi(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}) \\
& \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V},
\end{aligned} \tag{III.3.3}$$

vérifiant l'estimation:

$$\|\mathbf{u}\| \leq C. \quad (\text{III.3.4})$$

Lemme III.3.2. Soit $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{w}, \boldsymbol{\lambda})$ la solution du problème variationnel (III.3.3) obtenue par le lemme III.3.1. Alors il existe $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$, solution du problème variationnel suivant:

$$\begin{aligned} -\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}) + \mathbf{c}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}) + \beta \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\tau} d\gamma &= \int_{\Omega} \mathbf{F}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}) \boldsymbol{\tau} d\mathbf{x} + \\ \omega \int_{\Gamma_1} \varphi(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}) \boldsymbol{\tau} d\gamma + \int_{\Omega} \mathbf{h} \boldsymbol{\tau} d\mathbf{x} &\quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{W}^{1,p'}(\Omega). \end{aligned} \quad (\text{III.3.5})$$

Preuve du Lemme III.3.1. Soit $(\mathbf{w}, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathbf{L}^s(\Omega)^n \times \mathbf{W}^{1,1}(\Omega)$, introduisons pour tout $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$, la forme bilinéaire suivante:

$$\mathbf{A}_{(\mathbf{w}, \boldsymbol{\lambda})}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{B}(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{a}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, \mathbf{v}). \quad (\text{III.3.6})$$

D'après le lemme III.2.1, $\mathbf{A}_{(\mathbf{w}, \boldsymbol{\lambda})}$ est continue et coercive sur $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$, de plus la fonctionnelle $\phi(\boldsymbol{\lambda}, \cdot)$ est propre, convexe et semi-continue inférieurement pour la topologie faible de l'espace $\mathcal{V}$. Alors d'après le théorème I.2.6, le problème variationnel (III.3.3) possède une unique solution dans l'espace $\mathcal{V}$.

Par ailleurs, si on choisit dans l'inéquation (III.3.3) $\mathbf{v} = 0$ comme fonction test, on aura

$$\mathbf{a}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, \mathbf{u}) + \phi(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}) \leq (\mathbf{f}, \mathbf{u}),$$

On en déduit de la relation (III.2.6), les hypothèses (III.2.8), (III.2.9) et la positivité de ψ , que ϕ est toujours positive, donc l'estimation (III.3.4) résulte de la coercivité de $\mathbf{a}$ et de l'hypothèse (III.2.7).

Preuve du Lemme III.3.2. Remarquons dans un premier temps que

$$\int_{\Omega} \mathbf{F}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}) d\mathbf{x} \leq 2\mu_1 \int_{\Omega} |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|^2 d\mathbf{x} + g_0 \text{mes}(\Omega)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|^2 d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Donc le terme $\mathbf{F}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u})$ demeure seulement dans $\mathbf{L}^1(\Omega)$, ce qui nous pose une difficulté pour la résolution de ce type de problèmes. Pour cela on va considérer le problème approché

$$\begin{aligned} -\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}_m, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}) + \mathbf{c}(\boldsymbol{\theta}_m, \boldsymbol{\tau}) + \beta \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{\theta}_m \boldsymbol{\tau} d\gamma &= \int_{\Omega} \mathbf{F}_m \boldsymbol{\tau} d\mathbf{x} + \\ \omega \int_{\Gamma_1} \varphi(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}) \boldsymbol{\tau} d\gamma + \int_{\Omega} \mathbf{h} \boldsymbol{\tau} d\mathbf{x} \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad m \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (\text{III.3.7})$$

avec

$$\mathbf{F}_m = \frac{m \mathbf{F}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u})}{m + |\mathbf{F}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u})|}. \quad (\text{III.3.8})$$

On voit ici que $\forall m \in \mathbb{N}$, $|\mathbf{F}_m| \leq m$, c'est à dire $\mathbf{F}_m \in \mathbf{L}^\infty(\Omega)$. Introduisons maintenant la forme bilinéaire:

$$\mathbf{G}_{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}) = -\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}) + \mathbf{c}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}). \quad (\text{III.3.9})$$

Le lemme III.2.1 affirme que $\mathbf{G}_{\mathbf{u}}$ est continue et coercive sur $\mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega)$.

D'autre part, on a d'après l'inégalité de Hölder

$$\left| \int_{\Gamma_1} \varphi(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}) \boldsymbol{\tau} d\gamma \right| \leq v_0 \|\boldsymbol{\psi}(\mathbf{u})\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma_1)} \|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma_1)},$$

Par conséquent, on aura, en utilisant le théorème de trace de Sobolev, la continuité de $\boldsymbol{\psi}$ sur $\mathcal{V}$ et l'estimation (III.3.4)

$$\left| \int_{\Gamma_1} \varphi(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}) \boldsymbol{\tau} d\gamma \right| \leq c \|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{H}^1(\Omega). \quad (\text{III.3.10})$$

En outre, l'utilisation des injections de Sobolev nous conduit à l'inégalité

$$\left| \int_{\Omega} \mathbf{h} \boldsymbol{\tau} d\mathbf{x} \right| \leq c \|\mathbf{h}\|_{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)} \|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \quad (\text{III.3.11})$$

On en déduit de la continuité et la coercivité de $\mathbf{G}_{\mathbf{u}}$ et des inégalités (III.3.10), (III.3.11), en appliquant le théorème de Lax-Milgram I.2.4 que le problème (III.3.7) possède une unique solution $\boldsymbol{\theta}_m \in \mathbf{H}^1(\Omega)$.

Testons maintenant l'équation (III.3.7) par la fonction

$$\boldsymbol{\tau} = \text{Sign}(\boldsymbol{\theta}_m) \cdot \left(1 - \frac{1}{(1 + |\boldsymbol{\theta}_m|)^\xi}\right) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^\infty(\Omega), \quad \xi > 0. \quad (\text{III.3.12})$$

On obtient l'équation

$$\begin{aligned} & -\mathbf{E}\left(\boldsymbol{\theta}_m, \text{Sign}(\boldsymbol{\theta}_m) \cdot \left(1 - \frac{1}{(1 + |\boldsymbol{\theta}_m|)^\xi}\right), \mathbf{u}\right) + \mathbf{c}\left(\boldsymbol{\theta}_m, \text{Sign}(\boldsymbol{\theta}_m) \cdot \left(1 - \frac{1}{(1 + |\boldsymbol{\theta}_m|)^\xi}\right)\right) + \\ & \beta \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{\theta}_m \text{Sign}(\boldsymbol{\theta}_m) \cdot \left(1 - \frac{1}{(1 + |\boldsymbol{\theta}_m|)^\xi}\right) d\gamma = \int_{\Omega} \mathbf{F}_m \text{Sign}(\boldsymbol{\theta}_m) \cdot \left(1 - \frac{1}{(1 + |\boldsymbol{\theta}_m|)^\xi}\right) d\mathbf{x} + \\ & \omega \int_{\Gamma_1} \varphi(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}) \text{Sign}(\boldsymbol{\theta}_m) \cdot \left(1 - \frac{1}{(1 + |\boldsymbol{\theta}_m|)^\xi}\right) d\gamma + \\ & \int_{\Omega} \mathbf{h} \text{Sign}(\boldsymbol{\theta}_m) \cdot \left(1 - \frac{1}{(1 + |\boldsymbol{\theta}_m|)^\xi}\right) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (\text{III.3.13})$$

Soit ζ une fonction quelconque de $C^0(\mathbb{R})$, l'utilisation de la formule de Green donne

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}_m, \zeta(\boldsymbol{\theta}_m) + \boldsymbol{\theta}_m \zeta'(\boldsymbol{\theta}_m), \mathbf{u}) = 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}, \quad \forall \boldsymbol{\theta}_m \in \mathbf{H}^1(\Omega).$$

On sait d'autre part que l'équation différentielle ordinaire suivante

$$\zeta(t) + t\zeta'(t) = \text{Sign}(t) \cdot \left(1 - \frac{1}{(1 + |t|)^\xi}\right),$$

possède, d'après les théories classiques des EDO, une solution réelle, cela nous permet d'obtenir la relation

$$\mathbf{E} \left(\boldsymbol{\theta}_m, \text{Sign}(\boldsymbol{\theta}_m) \cdot \left(1 - \frac{1}{(1 + |\boldsymbol{\theta}_m|)^\xi} \right), \mathbf{u} \right) = 0. \quad (\text{III.3.14})$$

D'autre part, il vient de la formule de Green

$$\begin{aligned} \mathbf{c} \left(\boldsymbol{\theta}_m, \text{Sign}(\boldsymbol{\theta}_m) \cdot \left(1 - \frac{1}{(1 + |\boldsymbol{\theta}_m|)^\xi} \right) \right) &= k \left(\nabla \boldsymbol{\theta}_m, \nabla \text{Sign}(\boldsymbol{\theta}_m) \cdot \left(1 - \frac{1}{(1 + |\boldsymbol{\theta}_m|)^\xi} \right) \right) \\ &= k\xi \int_{\Omega} \frac{|\nabla \boldsymbol{\theta}_m|^2}{(1 + |\boldsymbol{\theta}_m|)^{\xi+1}} \mathbf{d}\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (\text{III.3.15})$$

De plus, on sait que sur la partie Γ_1 de la frontière, la fonction $\boldsymbol{\theta}_m$ n'est pas nulle, ce qui implique l'existence d'une constante strictement positive $C(\xi)$ de sorte que

$$1 - \frac{1}{(1 + |\boldsymbol{\theta}_m|)^\xi} \geq C(\xi).$$

Il en résulte

$$\int_{\Gamma_1} \boldsymbol{\theta}_m \text{Sign}(\boldsymbol{\theta}_m) \cdot \left(1 - \frac{1}{(1 + |\boldsymbol{\theta}_m|)^\xi} \right) \mathbf{d}\boldsymbol{\gamma} \geq C(\xi) \int_{\Gamma_1} |\boldsymbol{\theta}_m| \mathbf{d}\boldsymbol{\gamma}. \quad (\text{III.3.16})$$

Finalement, nous aurons, en utilisant (III.3.13), (III.3.14), (III.3.15) et (III.3.16), l'inégalité

$$k\xi \int_{\Omega} \frac{|\nabla \boldsymbol{\theta}_m|^2}{(1 + |\boldsymbol{\theta}_m|)^{\xi+1}} \mathbf{d}\mathbf{x} + \beta C(\xi) \int_{\Gamma_1} |\boldsymbol{\theta}_m| \mathbf{d}\boldsymbol{\gamma} \leq M, \quad (\text{III.3.17})$$

où $M = M(v_0, \mu_1, \|\mathbf{f}\|_{V'}, \|\mathbf{F}\|_{L^1(\Omega)}, \|\mathbf{h}\|_{L^2(\Omega)})$ est une fonction positive. En particulier, on obtient l'inégalité

$$\int_{\Omega} \frac{|\nabla \boldsymbol{\theta}_m|^2}{(1 + |\boldsymbol{\theta}_m|)^{\xi+1}} \mathbf{d}\mathbf{x} \leq \frac{M}{k\xi}. \quad (\text{III.3.18})$$

Notons par γ la fonction

$$\gamma(r) = \int_0^r \frac{dt}{(1 + |t|)^{\frac{\xi+1}{2}}}.$$

Un calcul simple donne

$$\nabla \gamma(\theta_m) = \frac{\nabla \theta_m}{(1 + |\theta_m|)^{\frac{\xi+1}{2}}}.$$

On en déduit de l'inégalité (III.3.18) que $\nabla \gamma(\theta_m)$ demeure dans un borné de $\mathbf{L}^2(\Omega)$, donc $\gamma(\theta_m)$ demeure dans un borné de $\mathbf{H}^1(\Omega)$. Par ailleurs, les injections de Sobolev assurent que

$$\mathbf{H}^1(\Omega) \subset \mathbf{L}^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega).$$

Le fait que la fonction $\gamma(r)$ se comporte comme $r^{\frac{1-\xi}{2}}$ au voisinage de $+\infty$, entraîne que $|\theta_m|^{\frac{1-\xi}{2}}$ demeure dans un borné de $\mathbf{L}^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$. Par conséquent, nous aurons l'estimation

$$|\theta_m|^{\frac{n(1-\xi)}{n-2}} \text{ demeure dans un borné de } \mathbf{L}^1(\Omega). \quad (\text{III.3.19})$$

D'autre part, l'inégalité de Hölder entraîne

$$\int_{\Omega} |\nabla \theta_m|^p \, \mathbf{d}\mathbf{x} \leq \left(\int_{\Omega} \frac{|\nabla \theta_m|^2}{(1 + |\theta_m|)^{\xi+1}} \, \mathbf{d}\mathbf{x} \right)^{\frac{p}{2}} \left(\int_{\Omega} (1 + |\theta_m|)^{\frac{(\xi+1)p}{2-p}} \, \mathbf{d}\mathbf{x} \right)^{\frac{2-p}{2}}.$$

D'où, via l'inégalité (III.3.18)

$$\int_{\Omega} |\nabla \theta_m|^p \, \mathbf{d}\mathbf{x} \leq \left(\frac{M}{k\xi} \right)^{\frac{p}{2}} \left(\int_{\Omega} (1 + |\theta_m|)^{\frac{(\xi+1)p}{2-p}} \, \mathbf{d}\mathbf{x} \right)^{\frac{2-p}{2}}. \quad (\text{III.3.20})$$

Choisissons le couple (ξ, p) de sorte que $\frac{n(1-\xi)}{n-2} = \frac{(\xi+1)p}{2-p}$, dans ce cas $p = \frac{n(1-\xi)}{n-\xi-1}$.

Alors pour avoir $1 < p < \frac{n}{n-1}$, il suffit de prendre $0 < \xi < \frac{1}{n-1}$.

Grâce à ce choix, nous obtiendrons, en utilisant (III.3.19) et (III.3.20), l'estimation

$$\theta_m \text{ demeure dans un borné de } \mathbf{W}^{1,p}(\Omega). \quad (\text{III.3.21})$$

On en déduit, en utilisant l'estimation (III.3.21), qu'on peut extraire de $(\theta_m)_m$ une sous-

suite notée $(\theta_\mu)_\mu$, vérifiant

$$\theta_\mu \longrightarrow \theta \text{ dans } \mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \text{ faible,} \quad (\text{III.3.22})$$

On aboutit, via le théorème de Rellich, après une nouvelle extraction encore notée θ_μ , aux estimations suivante

$$\theta_\mu \longrightarrow \theta \text{ dans } \mathbf{L}^1(\Omega) \text{ fort,} \quad (\text{III.3.24})$$

$$\theta_\mu \longrightarrow \theta \text{ dans } \mathbf{L}^1(\Gamma) \text{ fort.} \quad (\text{III.3.25})$$

On conclut finalement que le problème (III.3.5) admet une solution $\theta = \theta(\mathbf{u}, \lambda) \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$.

Preuve du Théorème III.3.1. Pour appliquer le théorème de point fixe de Kakutani-Glicksberg, on va considérer la boule fermée et convexe suivante:

$$\mathbf{K} = \left\{ (\mathbf{w}, \lambda) \in \mathcal{V} \times \mathbf{W}^{1,p}(\Omega) : \|\mathbf{w}\| \leq R_1 \text{ et } \|\lambda\|_{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)} \leq R_2 \right\}, \quad (\text{III.3.26})$$

où $R_1 \geq C$ et $R_2 \geq \left(\frac{M}{k\xi}\right)^{\frac{p}{2}}$. La boule $\mathbf{K}$ est compacte lorsque l'espace est muni de la topologie

faible. On définit l'opérateur $\mathcal{L} : \mathbf{K} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{K})$ par:

$$(\mathbf{w}, \lambda) \longmapsto \mathcal{L}(\mathbf{w}, \lambda) = \{(\mathbf{u}, \theta)\} \subset \mathbf{K}.$$

Pour tout $(\mathbf{w}, \lambda) \in \mathbf{K}$, le problème (III.3.5) est linéaire, de plus d'après le lemme III.3.1 la solution $\mathbf{u}$ est unique dans l'espace $\mathcal{V}$. Par conséquent l'ensemble $\mathcal{L}(\mathbf{w}, \lambda)$ est convexe. Pour conclure la preuve il est nécessaire de montrer la fermeture dans $\mathbf{K} \times \mathbf{K}$ du graphe:

$$\mathbf{G}(\mathcal{L}) = \{((\mathbf{w}, \lambda), (\mathbf{u}, \theta)) \in \mathbf{K} \times \mathbf{K} : (\mathbf{u}, \theta) \in \mathcal{L}(\mathbf{w}, \lambda)\}.$$

Pour cela, on considère une suite $(\mathbf{w}_n, \lambda_n) \in \mathbf{K} \times \mathbf{K}$, vérifiant

$$(\mathbf{w}_n, \lambda_n) \longrightarrow (\mathbf{w}, \lambda) \text{ dans } \mathcal{V} \times \mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \text{ faible et } (\mathbf{u}_n, \theta_n) \in \mathcal{L}(\mathbf{w}_n, \lambda_n).$$

Comme $(\mathbf{u}_n, \boldsymbol{\theta}_n)$ est solution du système suivant:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{w}_n, \mathbf{u}_n, \mathbf{v} - \mathbf{u}_n) + \mathbf{a}(\boldsymbol{\lambda}_n, \mathbf{u}_n, \mathbf{v} - \mathbf{u}_n) + \phi(\boldsymbol{\lambda}_n, \mathbf{v}) - \phi(\boldsymbol{\lambda}_n, \mathbf{u}_n) \\ \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u}_n) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \end{aligned} \quad (\text{III.3.27})$$

$$\begin{aligned} -\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}_n, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}_n) + \mathbf{c}(\boldsymbol{\theta}_n, \boldsymbol{\tau}) + \beta \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{\theta}_n \boldsymbol{\tau} d\gamma = \int_{\Omega} \mathbf{F}(\boldsymbol{\lambda}_n, \mathbf{u}_n) \boldsymbol{\tau} d\mathbf{x} + \\ \omega \int_{\Gamma_1} \varphi(\boldsymbol{\lambda}_n, \mathbf{u}_n) \boldsymbol{\tau} d\gamma + \int_{\Omega} \mathbf{h} \boldsymbol{\tau} d\mathbf{x} \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{W}^{1,p'}(\Omega), \end{aligned} \quad (\text{III.3.28})$$

on en déduit, en utilisant les lemmes III.3.1 et III.3.2 ainsi que la définition de $\mathbf{K}$

$$\|\mathbf{w}_n\| \leq R_1, \quad \|\boldsymbol{\lambda}_n\|_{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)} \leq R_2, \quad \|\mathbf{u}_n\| \leq R_1 \quad \text{et} \quad \|\boldsymbol{\theta}_n\|_{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)} \leq R_2.$$

Nous pouvons donc extraire des sous-suites $\mathbf{w}_\mu, \boldsymbol{\lambda}_\mu, \mathbf{u}_\mu$ et $\boldsymbol{\theta}_\mu$ telles que

$$\mathbf{w}_\mu \longrightarrow \mathbf{w} \text{ dans } \mathcal{V} \text{ faible}, \quad (\text{III.3.29})$$

$$\boldsymbol{\lambda}_\mu \longrightarrow \boldsymbol{\lambda} \text{ dans } \mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \text{ faible}, \quad (\text{III.3.30})$$

$$\mathbf{u}_\mu \longrightarrow \mathbf{u} \text{ dans } \mathcal{V} \text{ faible}, \quad (\text{III.3.31})$$

$$\boldsymbol{\theta}_\mu \longrightarrow \boldsymbol{\theta} \text{ dans } \mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \text{ faible}. \quad (\text{III.3.32})$$

Il résulte, en utilisant le théorème de Rellich et les injections de Sobolev qu'on peut extraire de $\mathbf{w}_\mu, \boldsymbol{\lambda}_\mu, \mathbf{u}_\mu$ et $\boldsymbol{\theta}_\mu$ des sous-suites, encore notées $\mathbf{w}_\mu, \boldsymbol{\lambda}_\mu, \mathbf{u}_\mu$ et $\boldsymbol{\theta}_\mu$, telles que

$$\mathbf{w}_\mu \longrightarrow \mathbf{w} \text{ dans } \mathbf{L}^s(\Omega)^n \text{ fort}, \quad (\text{III.3.33})$$

$$\boldsymbol{\lambda}_\mu \longrightarrow \boldsymbol{\lambda} \text{ dans } \mathbf{L}^1(\Omega) \text{ fort}, \quad (\text{III.3.34})$$

$$\mathbf{u}_\mu \longrightarrow \mathbf{u} \text{ dans } \mathbf{L}^s(\Omega)^n \text{ fort}, \quad (\text{III.3.35})$$

$$\boldsymbol{\theta}_\mu \longrightarrow \boldsymbol{\theta} \text{ dans } \mathbf{L}^1(\Omega) \text{ fort,} \quad (\text{III.3.36})$$

$$\mathbf{u}_\mu \longrightarrow \mathbf{u} \text{ dans } \mathbf{L}^r(\Gamma)^n \text{ fort,} \quad (\text{III.3.37})$$

$$\boldsymbol{\theta}_\mu \longrightarrow \boldsymbol{\theta} \text{ dans } \mathbf{L}^1(\Gamma) \text{ fort,} \quad (\text{III.3.38})$$

avec $n \leq s < \frac{2n}{n-2}$ et $2 \leq r < \frac{2(n-1)}{n-2}$.

Notre objectif maintenant est de passer à la limite pour μ . En effet, l'inéquation (III.3.27) implique que

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{w}_\mu, \mathbf{u}_\mu, \mathbf{v}) + \mathbf{a}(\boldsymbol{\lambda}_\mu, \mathbf{u}_\mu, \mathbf{v}) + \phi(\boldsymbol{\lambda}_\mu, \mathbf{v}) - (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u}_\mu) \\ \geq \mathbf{a}(\boldsymbol{\lambda}_\mu, \mathbf{u}_\mu, \mathbf{u}_\mu) + \phi(\boldsymbol{\lambda}_\mu, \mathbf{u}_\mu) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \end{aligned} \quad (\text{III.3.39})$$

Adaptons la méthode utilisée dans la preuve de la limite (II.3.29) pour le passage à la limite dans l'inéquation (III.3.39). En effet, on obtient, en utilisant les estimations (III.3.31), (III.3.33), (III.3.35) et le lemme III.2.1, la limite

$$\mathbf{B}(\mathbf{w}_\mu, \mathbf{u}_\mu, \mathbf{v}) \longrightarrow \mathbf{B}(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad (\text{III.3.40})$$

D'autre part, le fait que $\boldsymbol{\lambda}_\mu \longrightarrow \boldsymbol{\lambda}$ p.p. dans Ω et dans Γ , et que les fonctions $\boldsymbol{\mu}$, $\mathbf{g}$ et $\mathbf{v}$ sont continues, ainsi que la semi-continuité inférieure de la fonctionnelle $\phi(\boldsymbol{\lambda}, \cdot)$ nous permettent d'avoir les limites:

$$\liminf \mathbf{a}(\boldsymbol{\lambda}_\mu, \mathbf{u}_\mu, \mathbf{u}_\mu) \geq \mathbf{a}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, \mathbf{u}), \quad (\text{III.3.41})$$

$$\liminf \phi(\boldsymbol{\lambda}_\mu, \mathbf{u}_\mu) \geq \phi(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}), \quad (\text{III.3.42})$$

$$\phi(\boldsymbol{\lambda}_\mu, \mathbf{v}) \longrightarrow \phi(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}). \quad (\text{III.3.43})$$

$$\mathbf{a}(\boldsymbol{\lambda}_\mu, \mathbf{u}_\mu, \mathbf{v}) \longrightarrow \mathbf{a}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, \mathbf{v}). \quad (\text{III.3.44})$$

Finalement, on conclut de (III.3.39), (III.3.40), (III.3.41), (III.3.42), (III.3.43) et (III.3.44)

que $\mathbf{u}$ est solution du problème:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \mathbf{a}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \phi(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}) - \phi(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}) \\ \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \end{aligned} \quad (\text{III.3.45})$$

Par ailleurs, si on choisit $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{u}_n + \mathbf{u}}{2}$ comme fonction test dans (III.3.27) et (III.3.45), on obtient le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B}(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{u}_n) + \mathbf{a}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, \mathbf{u}_n - \mathbf{u}) + 2\phi\left(\boldsymbol{\lambda}, \frac{\mathbf{u}_n + \mathbf{u}}{2}\right) - 2\phi(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}) \\ \geq (\mathbf{f}, \mathbf{u}_n - \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \end{array} \right. \quad (\text{III.3.46})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B}(\mathbf{w}_n, \mathbf{u}_n, \mathbf{u}) + \mathbf{a}(\boldsymbol{\lambda}_n, \mathbf{u}_n, \mathbf{u} - \mathbf{u}_n) + 2\phi\left(\boldsymbol{\lambda}_n, \frac{\mathbf{u}_n + \mathbf{u}}{2}\right) - 2\phi(\boldsymbol{\lambda}_n, \mathbf{u}_n) \\ \geq (\mathbf{f}, \mathbf{u} - \mathbf{u}_n) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \end{array} \right. \quad (\text{III.3.47})$$

On aura par soustraction et après simplification, l'inégalité

$$\begin{aligned} & \mu_1 \int_{\Omega} |\varepsilon(\mathbf{u}_n - \mathbf{u})|^2 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (g(\boldsymbol{\lambda}_n) - g(\boldsymbol{\lambda})) |\varepsilon(\mathbf{u}_n)| \, d\mathbf{x} + \\ & 2 \int_{\Gamma_1} v(\boldsymbol{\lambda}_n) \psi(\mathbf{u}_n) \, d\boldsymbol{\gamma} + 2 \int_{\Gamma_1} v(\boldsymbol{\lambda}) \psi(\mathbf{u}) \, d\boldsymbol{\gamma} \leq \mathbf{B}(\mathbf{w} - \mathbf{w}_n, \mathbf{u}, \mathbf{u}_n) + \\ & \int_{\Omega} (\mu(\boldsymbol{\lambda}) - \mu(\boldsymbol{\lambda}_n)) \varepsilon(\mathbf{u}) \cdot \varepsilon(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (g(\boldsymbol{\lambda}_n) - g(\boldsymbol{\lambda})) |\varepsilon(\mathbf{u})| \, d\mathbf{x} + \\ & 2 \int_{\Gamma_1} v(\boldsymbol{\lambda}_n) \psi\left(\frac{\mathbf{u}_n + \mathbf{u}}{2}\right) \, d\boldsymbol{\gamma} + 2 \int_{\Gamma_1} v(\boldsymbol{\lambda}) \psi\left(\frac{\mathbf{u}_n + \mathbf{u}}{2}\right) \, d\boldsymbol{\gamma}. \end{aligned}$$

Utilisons la convexité de la fonction ψ , il vient

$$\begin{aligned}
& \mu_1 \int_{\Omega} |\varepsilon(\mathbf{u}_n - \mathbf{u})|^2 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{g}(\lambda_n) - \mathbf{g}(\lambda)) |\varepsilon(\mathbf{u}_n)| \, d\mathbf{x} + \\
& \int_{\Gamma_1} (\mathbf{v}(\lambda_n) - \mathbf{v}(\lambda)) \psi(\mathbf{u}_n) \, d\gamma \leq \mathbf{B}(\mathbf{w} - \mathbf{w}_n, \mathbf{u}, \mathbf{u}_n) + \\
& \int_{\Omega} (\mu(\lambda) - \mu(\lambda_n)) \varepsilon(\mathbf{u}) \cdot \varepsilon(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{g}(\lambda_n) - \mathbf{g}(\lambda)) |\varepsilon(\mathbf{u})| \, d\mathbf{x} + \\
& \int_{\Gamma_1} (\mathbf{v}(\lambda) - \mathbf{v}(\lambda_n)) \psi(\mathbf{u}) \, d\gamma.
\end{aligned}$$

Appliquons le lemme de Fatou au second et troisième terme du membre gauche de l'inéquation ci-dessus et le théorème de la convergence dominée de Lebesgue au membre droit, on obtient

$$\int_{\Omega} |\varepsilon(\mathbf{u}_n - \mathbf{u})|^2 \, d\mathbf{x} \longrightarrow 0.$$

Utilisons maintenant l'inégalité de Korn, on en déduit la limite $\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}\| \longrightarrow 0$. C'est à dire

$$\mathbf{u}_n \longrightarrow \mathbf{u} \text{ dans } \mathcal{V} \text{ fort.} \quad (\text{III.3.48})$$

Par ailleurs, on note que pour le couple (ξ, p) ainsi choisi, on a $\frac{n(1-\xi)}{n-2} > \frac{np}{n-p}$. Par conséquent, l'utilisation des estimations (III.3.19), (III.3.35) et l'inégalité de Hölder entraîne

$$\theta_{\mu}(\mathbf{u}_{\mu})_i \longrightarrow \theta \mathbf{u}_i \text{ (la } i^{\text{ème}} \text{ composante) dans } \mathbf{L}^{spn/(np+s(n-p))}(\Omega) \text{ faible.}$$

D'autre part, on sait que le triplet (s, p, n) vérifie $\frac{spn}{np+s(n-p)} \geq p$. Cela nous permet, en utilisant le fait que $\nabla \tau \in \mathbf{L}^{p'}(\Omega)^n$, d'obtenir la limite

$$\mathbf{E}(\theta_{\mu}, \tau, \mathbf{u}_{\mu}) \longrightarrow \mathbf{E}(\theta, \tau, \mathbf{u}). \quad (\text{III.3.49})$$

En outre, la convergence forte de $\mathbf{u}_\mu$ vers $\mathbf{u}$ dans $\mathcal{V}$ garantit que

$$\begin{cases} |\varepsilon(\mathbf{u}_\mu)| \longrightarrow |\varepsilon(\mathbf{u})|, \\ |\varepsilon(\mathbf{u}_\mu)|^2 \longrightarrow |\varepsilon(\mathbf{u})|^2, \end{cases} \quad (\text{au sens des distributions}).$$

Par conséquent, le fait que $\lambda_\mu \longrightarrow \lambda$ p.p. dans Ω et dans Γ et le fait que les fonctions $\mu, \mathbf{g}$ sont continues, entraînent le résultat de convergence

$$\int_{\Omega} \mathbf{F}(\lambda_\mu, \mathbf{u}_\mu) \tau \mathbf{d}\mathbf{x} \longrightarrow \int_{\Omega} \mathbf{F}(\lambda, \mathbf{u}) \tau \mathbf{d}\mathbf{x}. \quad (\text{III.3.50})$$

Par ailleurs, la continuité de la fonction ψ sur $\mathcal{V}$ combinée avec le fait que $\mathbf{u}_\mu \longrightarrow \mathbf{u}$ dans $\mathcal{V}$ fort, nous assure que

$$\psi(\mathbf{u}_\mu) \longrightarrow \psi(\mathbf{u}). \quad (\text{III.3.51})$$

L'utilisation de (III.3.51), la continuité de $\mathbf{v}$, le fait que $\lambda_\mu \longrightarrow \lambda$ p.p. dans Γ et le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, nous conduit aisément au résultat de convergence

$$\int_{\Gamma_1} \varphi(\lambda_\mu, \mathbf{u}_\mu) \tau \mathbf{d}\gamma \longrightarrow \int_{\Gamma_1} \varphi(\lambda, \mathbf{u}) \tau \mathbf{d}\gamma. \quad (\text{III.3.52})$$

On en déduit de (III.3.49), (III.3.50) et (III.3.52) que θ est solution du problème suivant:

$$\begin{aligned} -\mathbf{E}(\theta, \tau, \mathbf{u}) + \mathbf{c}(\theta, \tau) + \beta \int_{\Gamma_1} \theta \tau \mathbf{d}\gamma &= \int_{\Omega} \mathbf{F}(\lambda, \mathbf{u}) \tau \mathbf{d}\mathbf{x} + \\ \omega \int_{\Gamma_1} \varphi(\lambda, \mathbf{u}) \tau \mathbf{d}\gamma + \int_{\Omega} \mathbf{h} \tau \mathbf{d}\mathbf{x} &\quad \forall \tau \in \mathbf{W}^{1,p'}(\Omega). \end{aligned} \quad (\text{III.3.53})$$

On conclut finalement que $(\mathbf{u}_n, \theta_n) \longrightarrow (\mathbf{u}, \theta) \in \mathcal{L}(\mathbf{w}, \lambda)$ dans $\mathcal{V} \times \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ faible, où $(\mathbf{u}, \theta)$ représente la solution du problème couplé constitué des équations (III.3.45) et (III.3.53). Donc d'après le théorème de point fixe de Kakutani-Glicksberg, l'application $\mathcal{L}$ possède un point fixe $(\mathbf{u}, \theta) \in \mathcal{L}(\mathbf{u}, \theta)$, qui sera solution du problème (P.III.2).

Remarque III.3.1. Cette preuve nous permet aussi de vérifier la dépendance continue de la solution $(\mathbf{u}(\mathbf{w}, \lambda), \theta(\mathbf{u}, \lambda)) \in \mathcal{V} \times \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ du problème couplé (III.3.3) et (III.3.5) par

rapport aux fonctions auxiliaires $\mathbf{w} \in \mathbf{L}^s(\Omega)^n$ et $\lambda \in \mathbf{W}^{1,1}(\Omega)$.

III.3.2. Dépendance continue

On montre dans cette partie la dépendance continue des solutions du problème couplé (III.3.3) et (III.3.5) par rapport à la fonction de contact φ qui apparait dans (III.1.7).

Pour cela, on considère une fonction ψ continue et convexe sur $\mathcal{V}$ et telle que $\psi(0) = 0$. Pour tout $k > 0$ on considère les fonctions continues v_k satisfaisant la propriété (III.2.9) et telles que

$$v_k(y, \mathbf{x}) \longrightarrow v(y, \mathbf{x}) \text{ p.p. dans } \mathbb{R} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad (\text{III.3.54})$$

et on introduit les fonctionnelles $\mathbf{d}_k : \mathbf{W}^{1,1}(\Omega) \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, définies par

$$\mathbf{d}_k(\theta, \mathbf{v}) = \begin{cases} \int_{\Gamma_1} \varphi_k(\theta, \mathbf{v}) \, d\gamma & \text{si } \varphi_k(\theta, \mathbf{v}) \in \mathbf{L}^1(\Gamma_1), \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{III.3.55})$$

où

$$\varphi_k(\theta, \mathbf{v}) = v_k(\theta) \psi(\mathbf{v}). \quad (\text{III.3.56})$$

Alors pour tout $k > 0$, $\mathbf{d}_k(\theta, \cdot)$ est convexe et semi-continue inférieurement pour la topologie faible de $\mathcal{V}$. Considérons pour tout $k > 0$ le problème variationnel couplé suivant:

Problème $(\mathbf{P}_k)$. Supposons que l'hypothèse (III.2.10) est satisfaite. Pour tout $\mathbf{w} \in \mathbf{L}^s(\Omega)^n$, $s \geq n$ et $\lambda \in \mathbf{W}^{1,1}(\Omega)$. Trouver $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ et $\theta \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ solutions du système:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{w}, \mathbf{u}_k, \mathbf{v} - \mathbf{u}_k) + \mathbf{a}(\lambda, \mathbf{u}_k, \mathbf{v} - \mathbf{u}_k) + \phi_k(\lambda, \mathbf{v}) - \phi_k(\lambda, \mathbf{u}_k) \\ \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u}_k) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \end{aligned} \quad (\text{III.3.57})$$

$$\begin{aligned} -\mathbf{E}(\theta_k, \tau, \mathbf{u}_k) + \mathbf{c}(\theta_k, \tau) + \beta \int_{\Gamma_1} \theta_k \tau \, d\gamma = \int_{\Omega} \mathbf{F}(\lambda, \mathbf{u}_k) \tau \, d\mathbf{x} + \\ \omega \int_{\Gamma_1} v_k(\lambda) \psi(\mathbf{u}_k) \tau \, d\gamma + \int_{\Omega} \mathbf{h} \tau \, d\mathbf{x} \quad \forall \tau \in \mathbf{W}^{1,p'}(\Omega), \end{aligned} \quad (\text{III.3.58})$$

où

$$\phi_k(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}) = \mathbf{d}_k(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}) + \mathbf{J}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}). \quad (\text{III.3.59})$$

Utilisons les lemmes III.3.1 et III.3.2, on conclut que le problème (P_k) admet une solution $(\mathbf{u}_k, \boldsymbol{\theta}_k)$ dans l'espace $\mathcal{V} \times \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$.

On peut maintenant énoncer notre résultat de convergence.

Proposition III.3.1. *La solution $(\mathbf{u}_k, \boldsymbol{\theta}_k)$ du problème (P_k) converge dans $\mathcal{V} \times \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ vers la solution $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta})$ du problème couplé (III.3.3), (III.3.5).*

Preuve de la Proposition III.3.1. D'après les lemmes III.3.1 et III.3.2, la solution $(\mathbf{u}_k, \boldsymbol{\theta}_k)$ du problème couplé (III.3.3), (III.3.5) vérifie $\|\mathbf{u}_k\| \leq R_1$ et $\|\boldsymbol{\theta}_k\|_{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)} \leq R_2$. Alors on peut, en utilisant le théorème de compacité de Rellich et le théorème de trace de Sobolev, extraire de $(\mathbf{u}_k, \boldsymbol{\theta}_k)$ une sous-suite notée $(\mathbf{u}_\mu, \boldsymbol{\theta}_\mu)$, telle que

$$\mathbf{u}_\mu \longrightarrow \mathbf{u} \text{ dans } \mathbf{L}^s(\Omega)^n \text{ fort, } n \leq s < \frac{2n}{n-2}, \quad (\text{III.3.60})$$

$$\mathbf{u}_\mu \longrightarrow \mathbf{u} \text{ dans } \mathbf{L}^r(\Gamma)^n \text{ fort, } 2 \leq r < \frac{2(n-1)}{n-2}. \quad (\text{III.3.61})$$

$$\boldsymbol{\theta}_\mu \longrightarrow \boldsymbol{\theta} \text{ dans } \mathbf{L}^1(\Omega) \text{ fort,} \quad (\text{III.3.62})$$

$$\boldsymbol{\theta}_\mu \longrightarrow \boldsymbol{\theta} \text{ dans } \mathbf{L}^1(\Gamma) \text{ fort.} \quad (\text{III.3.63})$$

On sait d'autre part que

$$\begin{aligned} & \mathbf{B}(\mathbf{w}, \mathbf{u}_\mu, \mathbf{v}) + \mathbf{a}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}_\mu, \mathbf{v}) + \mathbf{J}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}) + \int_{\Gamma_1} v_\mu(\boldsymbol{\lambda}) \psi(\mathbf{v}) \, d\gamma - (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u}_\mu) \\ & \geq \mathbf{a}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}_\mu, \mathbf{u}_\mu) + \mathbf{J}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}_\mu) + \int_{\Gamma_1} v_\mu(\boldsymbol{\lambda}) \psi(\mathbf{u}_\mu) \, d\gamma \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \end{aligned} \quad (\text{III.3.64})$$

$$\begin{aligned} & -\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}_\mu, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}_\mu) + \mathbf{c}(\boldsymbol{\theta}_\mu, \boldsymbol{\tau}) + \beta \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{\theta}_\mu \boldsymbol{\tau} \, d\gamma = \int_{\Omega} \mathbf{F}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}_\mu) \boldsymbol{\tau} \, d\mathbf{x} + \\ & \omega \int_{\Gamma_1} v_\mu(\boldsymbol{\lambda}) \psi(\mathbf{u}_\mu) \boldsymbol{\tau} \, d\gamma + \int_{\Omega} \mathbf{h} \boldsymbol{\tau} \, d\mathbf{x} \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{W}^{1,p'}(\Omega). \end{aligned} \quad (\text{III.3.65})$$

La preuve du lemme III.3.1 combinée avec les estimations (III.3.60) et (III.3.61) ainsi que l'utilisation de la condition (III.3.54), permettent d'avoir

$$\begin{aligned} & \mathbf{B}(\mathbf{w}, \mathbf{u}_\mu, \mathbf{v}) + \mathbf{a}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}_\mu, \mathbf{v}) + \mathbf{J}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}) + \int_{\Gamma_1} \mathbf{v}_\mu(\boldsymbol{\lambda}) \psi(\mathbf{v}) \, d\gamma - (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u}_\mu) \\ \longrightarrow & \mathbf{B}(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{a}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{J}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}) + \int_{\Gamma_1} \mathbf{v}(\boldsymbol{\lambda}) \psi(\mathbf{v}) \, d\gamma - (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u}), \end{aligned} \quad (\text{III.3.66})$$

et

$$\liminf \mathbf{a}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}_\mu, \mathbf{u}_\mu) \geq \mathbf{a}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, \mathbf{u}), \quad (\text{III.3.67})$$

$$\liminf \mathbf{J}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}_\mu) \geq \mathbf{J}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}), \quad (\text{III.3.68})$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} \liminf \int_{\Gamma_1} \mathbf{v}_\mu(\boldsymbol{\lambda}) \psi(\mathbf{u}_\mu) \, d\gamma &= \liminf \int_{\Gamma_1} (\mathbf{v}_\mu(\boldsymbol{\lambda}) - \mathbf{v}(\boldsymbol{\lambda})) \psi(\mathbf{u}_\mu) \, d\gamma + \\ &\quad \liminf \int_{\Gamma_1} \mathbf{v}(\boldsymbol{\lambda}) \psi(\mathbf{u}_\mu) \, d\gamma. \end{aligned}$$

Donc la semi-continuité inférieure de la fonctionnelle $\mathbf{d}(\boldsymbol{\lambda}, \cdot)$ nous conduit, en utilisant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue et la condition (III.3.54), à

$$\liminf \int_{\Gamma_1} \mathbf{v}_\mu(\boldsymbol{\lambda}) \psi(\mathbf{u}_\mu) \, d\gamma \geq \int_{\Gamma_1} \mathbf{v}(\boldsymbol{\lambda}) \psi(\mathbf{u}) \, d\gamma.$$

Par conséquent, $\mathbf{u}_k$ converge faiblement dans $\mathcal{V}$ vers la solution $\mathbf{u}$ du problème (III.3.3). D'autre part, si on choisit $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{u}_k + \mathbf{u}}{2}$ comme fonction test dans (III.3.3) et (III.3.57), on obtient le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B}(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{u}_k) + \mathbf{a}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, \mathbf{u}_k - \mathbf{u}) + 2\phi\left(\boldsymbol{\lambda}, \frac{\mathbf{u}_k + \mathbf{u}}{2}\right) - 2\phi(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}) \\ \geq (\mathbf{f}, \mathbf{u}_k - \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \end{array} \right. \quad (\text{III.3.69})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B}(\mathbf{w}, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}) + \mathbf{a}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}_k, \mathbf{u} - \mathbf{u}_k) + 2\phi_k\left(\boldsymbol{\lambda}, \frac{\mathbf{u}_k + \mathbf{u}}{2}\right) - 2\phi_k(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}_k) \\ \geq (\mathbf{f}, \mathbf{u} - \mathbf{u}_k) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \end{array} \right. \quad (\text{III.3.70})$$

Faisons la soustraction des deux inégalités (III.3.69) et (III.3.70), on aura après simplification

$$\mu_1 \int_{\Omega} |\varepsilon(\mathbf{u}_k - \mathbf{u})|^2 \, d\mathbf{x} \leq \int_{\Gamma_1} (v(\lambda) - v_k(\lambda)) (\psi(\mathbf{u}_k) - \psi(\mathbf{u})) \, d\gamma.$$

Le théorème de la convergence dominée de Lebesgue et l'inégalité de Korn, permettent de déduire, en utilisant la condition (III.3.54), la limite

$$\mathbf{u}_k \longrightarrow \mathbf{u} \text{ dans } \mathcal{V} \text{ fort.} \quad (\text{III.3.71})$$

Par ailleurs, l'utilisation de (III.3.54), (III.3.62), (III.3.63), (III.3.71) et le fait que ψ est continue sur $\mathcal{V}$, permet de montrer, en adaptant la preuve du théorème III.3.1, que θ_k converge faiblement dans $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ vers θ solution du problème (III.3.5). On a montré ici la dépendance continue des solutions du problème couplé (III.3.3) et (III.3.5) par rapport à la fonction de contact. En outre, la méthode utilisée dans la démonstration du théorème III.3.1 montre la dépendance continue des solutions du problème couplé (III.3.3) et (III.3.5) par rapport aux fonctions auxiliaires. En combinant les deux résultats, on obtient la dépendance continue des solutions du problème (P.III.2) par rapport à la fonction de contact

Interprétation. Le résultat montre que les solutions du problème (P.III.2) dépendent continuellement des conditions de contact et de frottement.

III.4. Exemples de loi de frottement du type sous-différentiel

La condition (III.1.7) sur la partie Γ_1 de la frontière est une condition générale de contact avec frottement sous l'apparition d'une condition de glissement. Les conditions de contact qu'on va considérer dans la suite sont des cas conduisant à l'inégalité (III.1.7). Cependant, le résultat établi concernant l'existence de solutions pour le problème (P.III.2) sera satisfait et aussi le résultat de convergence reste applicable dans les deux cas particuliers suivants.

III.4.1. Glissement avec loi de frottement Tresca

Le contact entre le fluide et l'obstacle se fait avec glissement, la loi de frottement est celle

de Tresca avec un seuil de frottement dépendant de la température, ceci se traduit mathématiquement par les conditions:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_\nu = 0, & |\boldsymbol{\sigma}_\tau| \leq \mathbf{v}(\boldsymbol{\theta}). \\ |\boldsymbol{\sigma}_\tau| < \mathbf{v}(\boldsymbol{\theta}) \implies \mathbf{u}_\tau = 0 \\ |\boldsymbol{\sigma}_\tau| = \mathbf{v}(\boldsymbol{\theta}) \implies \mathbf{u}_\tau = -\lambda \boldsymbol{\sigma}_\tau, \quad \lambda \geq 0. \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_1. \quad (\text{III.4.1})$$

Ici $\mathbf{v}(\boldsymbol{\theta}) \geq 0$ représente le seuil de frottement, autrement dit la limite à partir de laquelle commence le glissement. On suppose de plus que le contact est bilatéral cela veut dire qu'il est maintenu pendant tout le processus. Il facile de voir que si $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\theta}\}$ satisfaisant (III.4.1) alors

$$\boldsymbol{\sigma}_\nu \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \geq \mathbf{v}(\boldsymbol{\theta}) |\mathbf{u}_\tau| - \mathbf{v}(\boldsymbol{\theta}) |\mathbf{v}_\tau| \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad \forall \boldsymbol{\theta} \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \quad \text{p.p. sur } \Gamma_1.$$

Par conséquent la condition (III.1.7) est satisfaite avec la fonction

$$\varphi(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{v}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad \forall \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n,$$

où

$$\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{y}_\tau(\mathbf{x})|.$$

Si la fonction $\mathbf{v}$ vérifie la condition (III.2.9), on obtient de (III.2.5)

$$\mathbf{d}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_1} \mathbf{v}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \mathbf{d}\gamma \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad \forall \boldsymbol{\theta} \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega), \quad (\text{III.4.2})$$

et on peut facilement vérifier que dans ce cas on a $\omega = 1$.

III.4.2. Glissement avec loi de frottement viscoélastique (loi de puissance)

On considère le problème avec les conditions aux limites:

$$\mathbf{u}_\nu = 0, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = -\mathbf{v}(\boldsymbol{\theta}) |\mathbf{u}_\tau|^{p-1} \mathbf{u}_\tau \quad \text{sur } \Gamma_1. \quad (\text{III.4.3})$$

Ici $0 < p \leq 1$ et $\mathbf{v}(\boldsymbol{\theta}) \geq 0$ est le coefficient de frottement qui dépend de la température. Dans ce cas la contrainte tangentielle est proportionnelle à une puissance p de la vitesse tangentielle. Il est facile de voir que si $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\theta}\}$ satisfaisant (III.4.3), alors (III.1.7) est satisfaite avec la fonction

$$\varphi(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{v}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad \forall \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n,$$

où

$$\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{p+1} |\mathbf{y}_\tau(\mathbf{x})|^{p+1}.$$

Si la fonction $\mathbf{v}$ vérifie (III.2.9), on obtient de (III.2.5)

$$\mathbf{d}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_1} \mathbf{v}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \, \mathbf{d}\gamma \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad \forall \boldsymbol{\theta} \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega),$$

et on peut facilement vérifier que dans ce cas on a $\omega = p + 1$.

CONCLUSION

Nous avons traité dans cette thèse quelques problèmes pour le fluide de Bingham. Pour cela, nous nous sommes intéressés à deux écoulements: écoulement dynamique et écoulement thermique stationnaire. Les conditions aux limites utilisées pour ces deux problèmes sont gouvernées par une condition générale de contact avec frottement du type sous-différentiel.

Concernant l'écoulement dynamique, nous avons mis en évidence un résultat d'existence de solutions faibles ainsi que deux résultats d'existence et d'unicité de la solution forte qui correspondent, respectivement, aux cas $n = 2$ et $n = 3$. Ces résultats nous ont servi pour l'élaboration d'un résultat de dépendance continue de la solution forte par rapport à la fonction de contact.

Pour le problème stationnaire évoquant le modèle thermique de Bingham, nous avons démontré un résultat d'existence de solutions faible ainsi qu'un résultat de dépendance continue des solutions par rapport à la fonction de contact.

On outre, nous avons pu présenter quelques nouveautés. Citons par exemple:

- Les résultats obtenus concernant l'existence et l'unicité de la solution forte pour le problème de l'écoulement dynamique du fluide de Bingham traité dans le deuxième chapitre.
- Dans le troisième chapitre, l'introduction de la température comme variable dans la fonction de contact ainsi que l'utilisation de cette dernière comme deuxième membre dans la condition aux limites de Fourier. Toujours dans le même chapitre, le résultat d'existence obtenu pour le problème de l'écoulement thermique du fluide de Bingham. Notons ici que l'unicité de la solution reste un problème ouvert.

BIBLIORGAPHIE

- [1] **R. S. Adams**, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York (1975).
- [2] **A. Amassad**, **M. Shillor** and **M. Sofonea**, *A Quasistatic Contact Problem for An Elastic Perfectly Plastic Body with Tresca's Friction*, *Nonlin. Anal.*, (35) (1999), 55-109.
- [3] **A. Amassad** and **M. Sofonea**, *Analysis of A Quasistatic Viscoplastic Problem Involving Tresca Friction Law*, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 4 (1998), 55-72.
- [4] **B. Awbi**, **L. Selmani** and **M. Sofonea**, *Variational Analysis of A Frictional Contact Problem for the Bingham Fluid*, *Int. J. Appl. Math and Comp. Sci.* 9, 2 (1999), 371-385.
- [5] **B. Awbi**, **M. Shillor** and **M. Sofonea**, *A Contact Problem for Bingham Fluid with Friction*, *Applicable Analysis*, 72 (3-4), 469-484, (1999).
- [6] **C. Baiocchi** and **A. Capelo**, *Variational and Quasivariational Inequalities: Application to Free Boundary Problems*, Wiley-Interscience, Chichester-New York, (1984).
- [7] **V. Barbu** and **Th Precupanu**, *Convexity and Optimization in Banach Spaces*, Sijthoff and Noordhoff, (1978).
- [8] **E. Bonetti** and **G. Bonfanti**, *Existence and Uniqueness of the Solution to 3D Thermoviscoelastic System*, *E. J of Differential Equations*, Vol. (2003), No. 50, pp. 1-15.
- [9] **H. Brezis**, *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications*. Masson (1983).
- [10] **P. G. Ciarlet**, *Elasticité Tridimensionnelle*. Masson (1986) Paris.
- [11] **L. Consiglieri**, *Stationary Solution for A Bingham Flow with Nonlocal Frictions*, In *Mathematical topics in fluid mechanics*, J. F. Rodrigues and A. Sequeira (eds), Pitman Res. Notes in math. Longman (1992), 237-252.
- [12] **N. Cristescu**, *Drawing Through Canonical Dies, An Analysis Compared with Experiments*, *Int. J. Mech. Sci.* Vol 18. No 1, (1976), 45-49.
- [13] **N. Cristescu**, *On the Optimum Die angle in Fast Wire Drawing*, *J. Mech. Work. Tech.*, Vol 3, No 3-4, (1980), 275-287.
- [14] **N. Cristescu** and **I. Siliciu**, *Viscoplasticity*, Martinus Nirjhoff, Editura Technica, Bucharest, (1982).

- [15] **G. Di Maio, E. Meccariello and S. Naimpally**, *Graph Topologies on Closed Multifunctions*, Applied General Topology, Universidad Politécnica de Valencia, Volume 4, No. 2, (2003), pp. 445- 465.
- [16] **J. Droniou**, *Quelques Résultats sur les Espaces de Sobolev*, Cours de DEA, Département de Mathématiques, Université de Provence, CMI, (2001).
- [17] **J. Droniou et C. Imbert**, *Solutions de Viscosité et Solutions Variationnelle pour EDP Non Linéaires*, Cours de DEA, Département de Mathématiques, Montpellier II, (2002).
- [18] **Dugundji, James and A. Granas**, *Fixed Point Theory*, Springer (2003).
- [19] **G. Duvaut et J. L. Lions**, *Ecoulement d'un Fluide Rigide-Viscoplastique Incompressible*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 270, (1970), 58-61.
- [20] **G. Duvaut et J. L. Lions**, *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunod (1976).
- [21] **G. Duvaut et J. L. Lions**, *Transfert de la Chaleur dans un Fluide de Bingham dont la Viscosité Dépend de la Température*. Journal of Functional Analysis 11 (1972), 85-104.
- [22] **M. Fortin**, *Calcul Numérique des Ecoulements des Fluides de Bingham et des Fluides Newtoniens Incompressibles par la Méthode des Eléments Finis*. PhD. Thesis, University of paris VI, (1976).
- [23] **P. Germain**, *Cours de Mécanique des Milieux Continus*, Masson et Cie, Paris, (1973).
- [24] **R. Glowinski**, *Finite Element Methods for Incompressible Viscous Flow*, Handbook of Numerical Analysis, Vol IX, P. G. Ciarlet and J. L. Lions, esd. North-Holland, Amsterdam (2003).
- [25] **R. Glowinski, J. L. Lions et R. Trémolière**, *Analyse Numérique des Inéquations Variationnelles*, Tome II. Paris Dunod, (1976).
- [26] **Hlavaček, J. Haslinger, J. Ničas and Lovisek**, *Solution of Variationnal Inequalities in Mechancis*, Springer-Verlag, New York (1988).
- [27] **R. Ionescu and M. Sofonea**, *The Blocking Property in The Study of the Bingham Fluid*, Int. J. Engn, Sci, Vol 24, (1986), No.3, 289-297.
- [28] **R. Ionescu and M. Sofonea**, *Functional and Numerical Methods in Viscoplasticity*, Oxford University Press, Oxford (1993).
- [29] **Y. Kato**, *Variational Inequalities of Bingham Type in Three Dimensions*, Nagoya Math, Vol. 129 (1993), 53-95.

- [30] **J. Lemaitre et J. L. Charboche**, *Mécanique des Matériaux Solides*, 2^e édition, Dunod (1984).
- [31] **J. L. Lions**, *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes Aux Limites Non Linéaires*, Dunod (1969).
- [32] **J. L. Lions et E. Magénes**, *Problèmes aux Limites Non Homogènes et Applications*, Volume I, Dunod (1968).
- [33] **B. Merouani, F. Messelmi and S. Drabla**, *Dynamical Flow of a Bingham Fluid with Subdifferential Boundary Condition*, Analele of University Oradea, Fasc. Mathematica, Tome XVI (2009), 5-30.
- [34] **F. Messelmi**, *Etude de Quelques Problèmes Aux Limites Non Linéaire Couplés par la Méthode de Compacité*, Mémoire de Magister, Université de Sétif (2004).
- [35] **F. Messelmi and B. Merouani**, *Stationary Thermal Flow of a Bingham Fluid Whose Viscosity, Yield Limit and Friction Depend on the Temperature*, Analele of University Oradea, Fasc. Mathematica, Tome XVII (2010), Issue No. 2, 59-74.
- [36] **F. Messelmi, B. Merouani and M. Meflah**, *Nonlinear Thermoelasticity Problem*, Analele of University Oradea, Fasc. Mathematica, Tome XV (2008), 207-217.
- [37] **P. D. Panagiotopoulos**, *Inequality Problems in Mechanical and Applications*, Birkhauser, Basel (1985).
- [38] **Papanastasiou**, *Flow of Materials with Yield*, J. of Rheology. 31(5), 385-404 (1987).
- [39] **V. Patron et P. Perline**, *Méthodes de la Théorie Mathématique de l'Elasticité*, Tome 1, (1981), Edition Mir Moscou.
- [40] **P. A. Paviart et J. M. Thomas**, *Introduction à l'Analyse Numérique des Equations aux Dérivées Partielles*. Masson (1983), Paris.
- [41] **Prignet**, *Conditions aux Limites Non Homogènes pour des Problèmes Elliptiques avec Second Membre Mesure*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. 6 (1977), 297-318.
- [42] **M. Rochdi, M. Shillor and M. Sofonea**, *A Quasistatic Contact Problem with Directional Friction and Damped Response*, Applicable Analysis, 68 (1998), 409-422.
- [43] **M. Rochdi, M. Shillor and M. Sofonea**, *Quasistatic Nonlinear Viscoelastic Contact with Normal Compliance and Friction*, Journal of Elasticity, 51 (1998), 105-126.
- [44] **P. Saramito and N. Roquet**, *Stick-Slip Transition Capturing by An Adaptive Finite Element Method*, Mathematical Modelling and Numerical Analysis, Vol 38(2), (2004), 249-260.

- [45] **M. Selmani**, *Etude Mathématiques de Quelques Problèmes aux Limites en Mécanique de Contact*, Thèse de Doctorat Sciences, Université de Sétif.
- [46] **M. Selmani, B. Merouani and L. Selmani**, *Analysis of a Class of Frictional Contact Problems for the Bingham Fluid*, *Mediterr. J. Math* 1-12, (2004).
- [47] **M. Shillor and M. Sofonea**, *A Quasistatic Viscoelastic Contact Problem with Friction*, *Int. J. Engng. Sci*, 38 (2000), 1517-1533.
- [48] **M. Sofonea and M. Shillor**, *Variational Analysis of Quasistatic Viscoplastic Contact Problems with Friction*, *Communication in Applied Analysis*, 5 (2001), 135-151.
- [49] **L. Schwartz**, *Théorie des Distributions*, Herman, Paris, (1979).

ملخص. الهدف من هذه الأطروحة هو دراسة بعض المسائل الحدية المتعلقة بمائع Bingham. من أجل هذا نقترح نوعين من السيلان : سيلان ديناميكي و سيلان حراري ثابت. النتائج المتحصل عليها لأجل هذه المسائل متعلقة بالوجود, الوحدانية و الارتباط المستمر. تتكون هذه الأطروحة من ثلاثة فصول. الفصل الأول يخص وضع المسائل الرياضية المدروسة و ذكر بعض الأدوات الرياضية المستعملة خلال هذه الأطروحة. نعتبر في الفصل الثاني مسألة السيلان الديناميكي لمائع Bingham. نقترح في الفصل الثالث مسألة السيلان الحراري الثابت لمائع Bingham. الشروط المستعملة في هاتين المسألتين هي شروط تلامس بالاحتكاك من نوع تحت التفاضلي.

كلمات المفاتيح. مائع Bingham, سيلان ديناميكي, سيلان حراري ثابت, تقويم, تراص, انتظام, نقطة ثابتة, متراجحة شكلية, حل ضعيف, حل قوي.

Résumé. Le but de cette thèse est de proposer une contribution à l'étude de quelques problèmes aux limites pour le fluide de Bingham. Pour cela on considère deux types d'écoulement: écoulement dynamique et écoulement thermique stationnaire. Pour ces problèmes on établit quelques résultats d'existence, d'unicité ainsi que la dépendance continue. La thèse comporte trois chapitres. Le premier chapitre est destiné à la formulation mathématique des problèmes qui feront l'objet de cette thèse. On rappelle également les outils mathématiques qui ont servi pour établir les résultats présentés ici. On considère au second chapitre un problème modélisant l'écoulement dynamique du fluide de Bingham. Dans le troisième chapitre on considère un problème qui traduit l'écoulement thermique stationnaire du fluide de Bingham. Les conditions aux limites utilisées pour ces deux problèmes sont modélisées par une condition générale de contact avec frottement du type sous-différentiel.

Mots-clés. Fluide de Bingham, écoulement dynamique, écoulement thermique stationnaire, régularisation, compacité, monotonie, point fixe, inéquation variationnelle, solution faible, solution forte.

Abstract. The purpose of this thesis is the study of some boundary value problems for the Bingham fluid. For this aim we consider two flows: dynamical flow and stationary thermal flow. For these problems we establish some existence, uniqueness and continuous dependence results. The thesis is divided in three chapters. The aim of the first chapter is to give the mathematical formulation of problems considered in this thesis and we recall the main mathematical tools used in order to establish the results presented here. We consider in the second chapter a problem modelled the dynamical flow of Bingham fluid. In the third chapter we consider a problem traduce the stationary thermal flow of Bingham fluid. In these two problems subdifferential friction boundary conditions are used.

Key-words. Bingham fluid, dynamical flow, stationary thermal flow, regularization, compactness, monotonicity, fixed point, variational inequality, weak solution, strong solution.