Setif1 university-Ferhat ABBAS

People's Democratic Republic of Algeria
Ministry of Higher Education and Scientific Research
Setif 1 university-Ferhat ABBAS
Faculty of Sciences
Departement Mathematics

Faculte of sciences

Master's Thesis

DOMAIN: MI
FIELD: Mathematics
SPECIALTY: Nonlinear analysis and partial differential equations

Theme :

Study of the stationary solution of non-isothermal Bingham flow

Presented by: Dames Oumaima

Before the jury:

Supervision:	Mr. SAADALLAH Abdelkader	Dr. UFA- Setif 1
President:	Mr. CHOUGUI Nadhir	Dr. UFA- Setif 1
Examiner:	Mr. DERGUINE Mostafa	Dr. UFA- Setif 1

Academic year: 2025-2026

CONTENTS

0.1 Introduction 4

1 PRELIMINARIES AND MATHEMATICAL FRAMEWORK 5

1.1 Physical Models and Constitutive Laws 5

1.1.1 Constitutive Law of a Bingham Fluid 5

1.1.2 The Tresca Friction Law 5

1.1.3 The Energy Conservation Equation 6

1.2 Elements of Functional Analysis and Function Spaces 6

1.2.1 Lebesgue spaces$L^p(\Omega)$ 6

1.2.2 Sobolev spaces $W^{k,p}(\Omega)$ 7

1.2.3 Fundamental Functional Inequalities 7

1.2.4 Greens formulas 8

1.3 Vector-Valued Functions and Evolution Spaces 9

1.3.1 Bochner Spaces $L^p(0,T;X)$ 9

1.3.2 Vector-valued function spaces 9

1.4 Convergence Theory and Variational Tools 10

1.4.1 Strong and Weak Convergence 10

1.4.2 The Minty's Lemma 11

2 Study of the stationary solution of non-isothermal Bingham flow with nonlinear boundary conditions in a thin domain 12

2.1 Statement of the problem and variational formulation 12

2.2 Change of the domain and some estimates 16

2.2.1 A priori estimates on the velocity and the pressure 19

2.2.2 A priori estimates on the temperature 21

2.3 Study of the limit problem 24

Conclusion 31

Bibliography 31

ملخص

تم في هذا البحث دراسة السلوك التقاربي لتدفق مائع بينغهام غير متساوي الحرارة والمستقر في مجال رقيق ثلاثي الأبعاد $\mathbb{R}^3$ ضمن المجال Ω_ε مرتبط بشروط احتكاك "تريسكا" غير الخطية. تم استخدام تقنية إعادة التحجيم (Scaling) لتحويل المشكلة من المجال الرقيق الذي يعتمد على البارامتر ε إلى مجال مرجعي ثابت Ω مستقل عن هذا البارامتر (الذي يمثل سمك الطبقة ويؤول إلى الصفر). كما تم وضع تقديرات قبلية موحدة ودراسة تقارب المجاهيل المتمثلة في سرعة المائع وضغطه ودرجة حرارته. وخلصت الدراسة إلى إثبات المشكلة الحدية واستنتاج معادلة رينولدز العامة ثنائية الأبعاد كنموذج مبسط ودقيق للتطبيقات الصناعية.

الكلمات المفتاحية: النهج التقاربي، مائع بينغهام، درجة الحرارة، معادلة رينولدز، المتراجحة التباينية، احتكاك تريسكا.

Abstract

This research investigates the asymptotic behavior of a stationary, non-isothermal Bingham fluid flow in a three-dimensional thin domain Ω_ε associated with nonlinear Tresca friction conditions. By applying a scaling technique, the problem is transformed from the thin domain depending on the parameter ε into a fixed reference domain Ω independent of this parameter (which represents the layer thickness tending to zero). Uniform a priori estimates are established, and the convergence of the unknowns—namely velocity, pressure, and temperature—is analyzed. Finally, the limit problem is proven, and the general two-dimensional Reynolds equation is derived as a simplified and accurate model for industrial applications.

Keywords: Asymptotic approach, Bingham fluid, Temperature, Reynolds equation, variational inequality, Tresca friction.

Résumé

Cette recherche étudie le comportement asymptotique de l'écoulement stationnaire et non isotherme d'un fluide de Bingham dans un domaine mince tridimensionnel Ω_ε associé à des conditions non linéaires de frottement de Tresca. En appliquant une technique de redimensionnement (Scaling), le problème est transformé du domaine mince dépendant du paramètre ε en un domaine de référence fixe Ω indépendant de ce paramètre (qui représente l'épaisseur de la couche tendant vers zéro). Des estimations a priori uniformes sont établies, et la convergence des inconnues — à savoir la vitesse, la pression et la température — est analysée. Enfin, le problème limite est prouvé et l'équation générale de Reynolds bidimensionnelle est dérivée en tant que modèle simplifié et précis pour les applications industrielles.

Mots-clés : Approche asymptotique, fluide de Bingham, température, équation de Reynolds, inégalité variationnelle, frottement de Tresca.