REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEINEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE FERHAT ABBAS - SETIF

THESE

Présentée à la Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Pour l'Obtention du Diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Option : Mathématiques Appliquées

Présentée Par

Meflah Mabrouk

THEME

Sur Une Equation Hyperbolique Non Linéaire Intervenant En Mécanique Quantique Relativiste Dans Un Domaine Non Borné

Soutenu le : 13/05 /2009

Devant le jury

Mr A. AYADI	**Prof. U.L.BM. O.E. BOUAGUI**	**Président**
Mr B. MEROUANI	**Prof. U.F.A. SETIF**	**Encadreur**
Mr N. BENHAMIDOUCHE	**Prof. U.M.B. M'SILA**	**Examinateur**
Mr M. BOUZIT	**M.C. U.L.BM. O.E. BOUAGUI**	**Examinateur**
Mr B. MERIKHI	**M.C. U.F.A. SETIF**	**Examinateur**
Mr A. YOUKANA	**M.C. U.H.L. BATNA**	**Examinateur**

Table des matières

Introduction **3**

1 Rappels d'analyse fonctionnelle **7**

1.1 Introduction 7

1.2 Généralités et quelques notions de base 7

1.2.1 Topologie faible 7

1.2.2 Topologie $*$–faible 9

1.2.3 Espaces réflexifs, espaces séparables 11

1.3 Opérateurs compacts 12

1.4 Espaces de Sobolev 12

1.4.1 Espaces de Sobolev d'ordre entier 13

1.4.2 Espaces de Sobolev d'ordre non entier 15

1.4.3 Formule de Green 16

1.5 Résultats de compacité et application trace 17

1.5.1 Théorème de compacité 18

1.5.2 Application trace sur $H^m(\Omega)$ 23

2 Etude d'un problème d'élasticité non linéaire gouverné par le système de Lamé **26**

2.1 Position du Problème 26

2.2 Existence et unicité de la solution 27

2.2.1 Existence de la solution 27
2.2.2 Unicité de la solution 35

3 Thermoélasticité non linéaire **39**
3.1 Position du Problème 39
3.1.1 Problème 1 39
3.1.2 Formulation Variationnelle 40
3.1.3 Problème 2 40
3.2 Existence et unicité de la solution 41
3.2.1 Existence de la solution
3.2.2 Unicité de la solution 50

4 Le Système de Lamé Perturbé et généralisé **54**
4.1 Notations et position du problème 54
4.2 Formulation variationnelle 58
4.2.1 Existence de la solution 70
4.2.2 Unicité de la solution 75

Bibliographie **76**

Introduction

Dans ce travail, on étudie quelques problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles non-linéaires, qui modélisent les petites vibrations, par exemple, d'une corde, d'une membrane élastique et de manière générale la propagation d'une onde (acoustique, électromagnétique, ... etc.), dans un milieu élastique homogène $\Omega \subseteq R^n$. Ce genre de problèmes interviennent dans plusieurs applications, comme la théorie de la chaleur, la diffusion des gaz, ... etc. Ces phénomènes sont modélisés mathématiquement par un système ou une équation aux dérivées partielles, linéaires ou non-linéaires suivant le cas, avec des conditions aux limites et initiales. En pratique, la partie non-linéaire définie les changements des perturbations du phénomène.

Le premier problème, est du type hyperbolique non linéaire gouverné par le système de Lamé dynamique perturbé.

Le second problème, est un problème couplé intervenant en thermoélasticité non linéaire.

Le troisième problème, est un problème non linéaire gouverné par un opérateur généralisant et perturbant celui de Lamé.

Pour chaque problème, on s'intéresse à l'existence et à l'unicité de la solution. Les techniques qu'on utilisera ici sont celles de la méthode de compacité.

Cette thèse est structurée en quatre chapitres :

Dans le chapitre 1, on donne des résultats fondamentaux en analyse fonctionnelle qui concerne les espaces de Sobolev d'ordre m, la topologie faible, les opérateurs compacts ainsi que les résultats de compacité et applications traces. Ces rappels seront d'utilité importante dans notre travail.

Dans le chapitre 2, on traite un problème aux limites gouverné par une équation aux dérivées partielles, analogue à celle intervenant en mécanique quantique relativiste. On désigne par Ω un ouvert de R^n, soit Γ la frontière de Ω qui est assez régulière. Soit Q le cylindre de $R_x^n \times R_t$: $Q = \Omega \times]0,T[$; T fini, de frontière Σ; L désigne le système de Lamé défini par $\mu\Delta + (\lambda+\mu)\nabla div$; λ et μ sont les constantes de Lamé. u_0, u_1, f des fonctions données, $\rho > 0$ (on pourrait supposer seulement $\rho > -1$).

On s'intéresse à l'existence et à l'unicité d'une fonction $u = u(x,t)$, $x \in \Omega$, $t \in]0,T[$ solution du problème (P_1)

$$(P_1)\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - Lu + |u|^\rho u = f, \quad \text{dans} \quad \Omega\times]0,T[\\ u = 0, \quad \text{sur} \quad \Sigma \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega \end{cases}$$

Dans le chapitre 3, on étudie par la méthode de compacité, un problème couplé intervenant en thermoélasticité non linéaire.

Soit Ω un ouvert borné de R^n, de frontière régulière Γ. On désigne par $u = \{u_1, u_2, u_3, ..., u_n\}$ un vecteur et ξ une fonction scalaire sur $Q_\tau = \Omega\times]0,\tau[$ où τ est un réel fini.

λ, μ, γ sont les coefficients de Lamé avec $\lambda + \mu \geq 0$ et $\gamma > 0, k > 0$ le coefficient de la conductibilité thermique, $\delta > 0$ la capacité calorifique avec $q = \frac{q}{\delta}$, $\alpha = \frac{k}{\delta}$, $\eta = \frac{\gamma}{k}$.

On s'intéresse à l'existence et l'unicité de u et ξ du problème (P_2) tels que

$$u\epsilon L^{\infty}(0,\tau;(H_0^1(\Omega)\cap L^{\rho+2}(\Omega))^n),$$

$$\xi\epsilon L^2(0,\tau;H_0^1(\Omega))\cap L^{\infty}(0,\tau;L^2(\Omega)),$$

$$(P_2)\begin{cases}\mu\Delta u+(\lambda+\mu)grad(divu)-|u|^{\rho}u-\gamma grad\xi+P=0,\\ \Delta\xi-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\xi}{\partial t}-\eta\frac{\partial}{\partial t}divu=-\frac{1}{\alpha}q,\\ u(0)=u_0 \text{ et } \xi(0)=\xi_0.\end{cases}$$

Dans le chapitre 4, on étudie un problème gouverné par un opérateur généralisant et perturbant le système de Lamé.

Ω désigne un ouvert borné et connexe de $\mathbb{R}^n(n=2,3)$ de frontière Γ variété lipchitzienne de dimension $n-1$. On considère un opérateur généralisant théoriquement le système de lamé, soit

$$-M_pu+F(u),$$

Tel que

$$M_pu=\mu\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+(\lambda+\mu)\nabla(divu),$$

et $F(u)$ est une perturbation avec p, q deux réels tels que : $p\in[2,\infty[$ et $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, λ et μ sont les coefficients de Lamé vérifiant : $\lambda+\mu\geq 0$, $\mu>0$, et η désigne le vecteur unitaire normal extérieur à Γ_2. Pour $p=2$, on retrouve le système de Lamé classique.

Etant donné f et $\varphi=(\varphi_{ij})_{1<i,j<n}$ tel que

$$\varphi_{ij}=\varphi_{ji}\in C^{0,1}(\overline{\Omega}),\varphi_{ij}(x)>0,\forall x\in\Gamma_2.$$

On étudiera l'existence et l'unicité de la solution $u=u(x),\ x\in\Omega$

du problème

$$(P_3)\begin{cases} -L_p u + F(u) = f, \text{ dans } \Omega \\ u = 0, \text{ sur } \Gamma_1 \\ \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\eta_i + \varphi(x)\, u = 0, \text{ sur } \Gamma_2 \end{cases}$$

On considère les cas où :

$$F(u) = 0,\ F(u) = |u|^{\rho} u, \text{ avec } \rho = p-2 > 0,\ F(u) = u^3,\ F(u) = a(x,t).$$

Et on distingue plusieurs cas :

- Lorsque $\Gamma_2 = \phi$ sur Γ_2, le problème (P_3) devient un problème de Dirichlet.
- Lorsque $\Gamma_1 = \phi$, et $\varphi = 0$ sur Γ_2, le problème (P_3) devient un problème de Neumann.
- Lorsque $\Gamma_1,\ \Gamma_2 \neq \phi$, et $\varphi = 0$ sur Γ_2, le problème (P_3) devient un problème mêlé Dirichlet-Neumann.
- Lorsque $\Gamma_1,\ \Gamma_2 \neq \phi$, et $\varphi \neq 0$ sur Γ_2, le problème (P_3) devient un problème mêlé Dirichlet.

Dans ce qui suit, on développera le cas où $F(u) = |u|^{p-2} u$.

Chapitre 1

Rappels d'analyse fonctionnelle

1.1 Introduction

L'étude des équations aux dérivées partielles nécessite l'utilisation des espaces de Sobolev. Ce sont donc, ces espaces et leurs propriétés que l'on va rappeler dans ce premier chapitre, ainsi que d'autres résultats d'analyse fonctionnelle qui seront d'une grande utilité dans notre travail.

1.2 Généralités et quelques notions de base

1.2.1 Topologie faible

Définition 2.1

Soit E un espace normé et E' son dual topologique. On appelle topologie faible sur E et que l'on note $\sigma(E, E')$, la topologie la moins fine rendant continues toutes les formes linéaires $f \in E'$. On peut recenser les ouverts qui doivent appartenir à la topologie faible de la manière suivante :

Si $f \in E'$ et $U \subset \mathbb{R}$ un ouvert de $\mathbb{R}$; il faut que $f^{-1}(U)$ soit un ouvert de $\sigma(E, E')$. Mais, comme les intervalles ouverts forment une base de la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$, on voit que ceci revient à dire que pour tout intervalle I et tout $f \in E'$, $f^{-1}(I)$ est dans $\sigma(E, E')$. On vient de montrer la proposition suivante :

Proposition 2.2

La topologie $\sigma(E, E')$ est la moins fine contenant touts les ensembles $f^{-1}(I)$ pour tout $f \in E'$ et tout intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

Donnons une base de voisinages commode pour $\sigma(E, E')$.

Corollaire 2.3

Les ouverts de la forme $\overset{k}{\underset{i=1}{\cap}} f_i^{-1}(I_i)$,où $k \in \mathbb{N}$, $f_i \in E'$et $I_i, i = 1,..., k$, sont des intervalles ouverts quelconques de $\mathbb{R}$ forment une base de voisinages de $\sigma(E, E')$. Alors, les ouverts de la forme :

$$U = \overset{k}{\underset{i=1}{\cap}} f_i^{-1}(]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[), k \in \mathbb{N}, \ f_i \in E', \ \varepsilon > 0,$$

Forment une base de voisinages de $x \in E$.

Définition 2.4

Si $x_n \to x$ dans $\sigma(E, E')$, On dit que x_n converge faiblement vers x dans E.

Proposition 2.5

Soit E un espace de Banach et (x_n) une suite d'éléments de E.

Alors :

$$x_n \to x \text{ dans } \sigma(E, E') \text{ si et seulement si } f(x_n) \to f(x), \forall f \in E'.$$

Preuve

La topologie $\sigma(E, E')$ ayant été construite pour que les éléments de E' soient continus, l'implication directe $(\Rightarrow)$ est claire, puisque la continuité des f dans E' entraine leur continuité séquentielle. La réciproque, découle de la forme des voisinages dans la topologie faible. On doit montrer que si

$f(x_n) \to f(x)$ pour tout f, alors pour tout U voisinage de x pour $\sigma(E, E')$, il existe n_0 tel que :

$n \geq n_0$ implique $x_n \in E$. Or on a vu (**corollaire 2.3**) qu'on peut choisir des voisinages U de x de la forme

$$U = \bigcap_{i=1}^{k} f_i^{-1}(]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[).$$

On choisit n_0 assez grand pour que $n \geq n_0 \Rightarrow |f_i(x_n) - f_i(x)| < \varepsilon, i = 1, ..., k$.

Alors $x_n \in E$. On a donc bien $x_n \to x$ pour $\sigma(E, E')$.

1.2.2 Topologie $*-$faible

Soit E un espace de Banach, E' son dual, E'' son bidual topologique muni de la norme :

$$\|\xi\|_{E''} = \sup_{f \in E', \|f\|_{E'} \leq 1} |\xi(f)|.$$

On a une injection canonique $J : E \to E'$. En effet, tout élément $x \in E$ définit un élément $J_x \in E''$ par :

$$J_x(f) = f(x).$$

J_x est bien une forme linéaire continue sur E' puisque :

$$|J_x(f)| = |f(x)| \leq \|x\|_E \|f\|_{E'}.$$

En fait $\|J_x\|_{E''} = \|x\|_E$ car :

$$\|J_x\|_{E''} = \sup_{\|f\|\leq 1} |J_x(f)| = \sup_{\|f\|\leq 1} |f(x)| = \|x\|_E.$$

On a donc $J(E) \subset E''$. Cela va nous permettre de définir une nouvelle topologie sur E'.

Définition 2.6

La topologie $*$–faible, notée $*-\sigma(E', E)$, est la topologie la moins fine rendant continues les formes linéaires $f \mapsto f(x)$, pour tout $x \in E$. On a la base de voisinages en $f_0 \in E'$ pour la topologie $*$–faible.

$$U = \{f \in E', |(f - f_0)| < \varepsilon, i = 1...n,\ x_i \in E, n \in \mathbb{N}\}.$$

Proposition 2.7

Soit E un espace de Banach ; si (f_n) est une suite de E', alors f_n converge vers f dans $*$–faible si et seulement si $f_n(x) \longrightarrow f(x)$, pour tout $x \in E$.

Preuve

La même démarche que celle de la proposition 2.5.

1.2.3 Espaces réflexifs, espaces séparables

Soit E un espace de Banach et $J : E \to E''$ l'injection canonique de E dans E'', définie par $J_x(f) = f(x)$ pour tout $x \in E,\ f \in E'$.

Définition 2.8

L'espace E est dit réflexif, si $J(E) = E''$. On a le résultat :

Théorème 2.9

Soit E un espace de Banach réflexif. Alors, toute suite bornée dans E admet au moins une sous-suite faiblement convergente.

Preuve

Une démonstration détaillée de ce théorème se trouve dans le livre de H. Brezis [4], analyse fonctionnelle théorie et applications (Théorème III.27, page 50).

Définition 2.10

Un espace métrique séparable est un espace métrique qui contient un sous ensemble D dense et dénombrable. On donne le résultat :

Théorème 2.11

Soit E un espace de Banach séparable. Alors toute suite bornée $(f_n)_n$ dans E' admet au moins une sous-suite $*$–faiblement convergente.

Preuve

La démonstration de ce théorème est détaillée dans le livre de H. Brezis [4], analyse fonctionnelle théorie et applications (corollaire III.26, page 50)

1.3 Opérateurs compacts

Définition 3.1

Soit H un espace de Hilbert, un opérateur linéaire continu T de H dans H est dit compact s'il transforme tout ensemble borné B en un ensemble relativement compact (i.e., : $\overline{B}$ compact).

Proposition 3.2

Un opérateur linéaire et compact si et seulement s'il transforme toute suite faiblement convergente en une suite admettant au moins une sous suite fortement convergente.

Remarque 3.3

Le résultat de la proposition 3.2 peut remplacer la définition précédente.

1.4 Espaces de Sobolev

Soit $(X, \|.\|_X)$ un espace de Banach, $1 < p < \infty$ et $T > 0$. On définit l'espace $L^p(0,T,X)$ comme suit :

$$L^p(0,T,X) = \left\{ f :]0,T[\longrightarrow X. \text{ telle que } f \text{ mesurable et } \int_0^T \|f(t)\|_X^p \, dt < \infty \right\},$$

Cet espace est muni de la norme :

$$\|f\|_{L^p(0,T,X)} = \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

et pour $p=\infty$, on pose :

$$\|f\|_{L^\infty(0,T,X)} = \sup_{t\in]0,T[} ess\, \|f(t)\|_X .$$

Propriétés

(i) Pour $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(0,T,X)$ est un espace de Banach et en particulier, $L^2(0,T,X)$ est un espace de Hilbert, lorsque X est un espace de Hilbert.

(ii) Pour $1 < p < \infty$ et si X est réflexif, alors $L^p(0,T,X)$ est un espace réflexif.

(iii) Pour $1 \leq p < \infty$ et si X est séparable, alors $L^p(0,T,X)$ est aussi séparable.

1.4.1 Espaces de Sobolev d'ordre entier

Définition 4.1

Soit p un réel, $1 \leq p \leq \infty$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et m un entier naturel. On appelle espace de Sobolev d'ordre m sur Ω et on note $H^m(\Omega)$, l'ensemble :

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \,\text{mesurable, telque}\, D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m \right\},$$

où

$$D^\alpha u = \frac{\partial^\alpha u}{\partial x_1^{\alpha_1} .....\partial x_n^{\alpha_n}} \quad , \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n) \in \mathbb{N}^n, |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots\cdots + \alpha_n,$$

et sont au sens des distributions.

Quelques propriétés des espaces $H^m(\Omega)$

(i) On munit l'espace $H^m(\Omega)$ du produit scalaire :

$$(u,v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \left(D^\alpha u, D^\alpha v\right)_{L^2(\Omega)} \ , \forall u, v \in H^m(\Omega).$$

La norme associée étant donnée par :

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}} \ , \forall u \in H^m(\Omega),$$

et il est bien connu que cet espace est un espace de Hilbert.

(ii) Pour $m = 0$ on a $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ et pour tout $m_1 > m_2$, on a : $H^{m_1}(\Omega) \subset H^{m_2}(\Omega)$ avec injection continue.

(iii) Pour tout $m \geq 0$, $H^m(\Omega)$ est un espace séparable.

(iv) Pour tout $m \geq 0$, nous désignons par $H_0^m(\Omega)$ la fermeture de $D(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$:

$$H_0^m(\Omega) = \overline{D(\Omega)} \text{ dans } H^m(\Omega),$$

et par $H^{-m}(\Omega)$ le dual topologique de $H_0^m(\Omega)$.

(v) Grâce aux applications traces, que nous allons voir après, les espaces $H_0^m(\Omega)$ peuvent être définis comme suit :

$$H_0^m(\Omega) = \left\{u \in H^m(\Omega) \text{ telle que : } \frac{\partial^j u}{\partial n^j} = 0 \ , \forall j = 0, ..., m-1.\right\},$$

où : $\frac{\partial}{\partial n}$ est la dérivée normale de u suivant la normale extérieure à $\Gamma = \partial\Omega$:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\, n_i, \forall x \in \Gamma$$

1.4.2 Espaces de Sobolev d'ordre non entier

Définition 4.2

Soit s un réel, $0 < s < 1$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on désigne par $H^s(\Omega)$ l'espace :

$$H^s(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega), \text{ tel que } \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dxdy < \infty \right\},$$

munit de la norme :

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dxdy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si s désigne un réel positif de partie entière $[s] = m$, l'espace $H^s(\Omega)$ peut être défini de la manière suivante :

$$H^s(\Omega) = \left\{ u \in H^m(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| = m, \ D^\alpha u \in H^{s-m}(\Omega) \right\}.$$

L'orsque $\Omega = \mathbb{R}^n$, nous pouvons définir l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ au moyen de la transformée de Fourier. En effet, si $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$, sa transformée de Fourier est donnée par :

$$\hat{v}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-ix\xi) v(x) dx \ , \xi \in \mathbb{R}^n,$$

et nous avons :

$$H^s(\mathbb{R}) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n), \text{tel que } \left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}} \ \hat{v}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\},$$

et de la norme :

$$\|v\|_{H^s(\mathbb{R})} = \left\| \left(1 + |\xi|^2\right)^{s/2} \hat{v}(\xi) \right\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

est équivalente à la norme de $H^s(\mathbb{R}^n)$, (voir Raviart & Thomas [20], page 28-33)

Théorème 4.3 "Inégalité de Poincaré"

On suppose que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, alors il existe une constante c (dépendant seulement de Ω), telle que :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \ , \ \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

La semi-norme $u \mapsto |u|_{H^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ est donc une norme sur $H_0^1(\Omega)$, équivalente à la norme

$$u \mapsto \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Preuve

La démonstration de ce théorème est détaillée dans le livre de P. A.Raviart et J. M. Thomas [20] : Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles (Théorème 1.2.5, page 18).

1.4.3 Formule de Green

Rappelons qu'un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$ et de frontière Γ est dit de classe C^k si Γ est une variété de dimension $n-1$ est de classe C^k.

Théorème 4.4

Soit Ω un ouvert régulier de R^n(par exemple Ω de classe C^1avec Γ borné). Alors pour tout $u, v \in H^1(\Omega)$, on a la formule de Green :

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_\Gamma u.v.n_i d\Gamma,$$

où n_i est le $i^{ème}$ cosinus directeur de la normale n sortante.

Preuve

On pourra consulter le livre de Raviart et Thomas [20] (Théorème 1.4.2, page 27).

Cette formule est une $''$ Intégration par partie généralisée $''$, dont l'importance est extrême par la suite comme conséquence de ce théorème, on a :

Corollaire 4.5

Si $u, v \in H^1(\Omega)$ et si $\Delta u \in L^2(\Omega)$, alors :

$$\int_\Omega (\Delta u) v dx = -\int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v d\Gamma.$$

On arrive maintenant à la partie principale de ce rappel, qui sont les résultats de compacités, clefs de la démonstration de l'existence de la solution de notre problème.

1.5 Résultats de compacité et application trace

Les résultats qui vont suivre seront utilisées de façon fonda-

mentale dans les chapitres qui vont suivre.

1.5.1 Théorème de compacité

Commençons par donner le théorème classique de Rellich - kondrachov.

Théorème 5.1

On suppose Ω ouvert borné de R^n de frontière Γ assez régulière. Alors l'injection :

$$Id : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega),$$

est compacte. On dit que $H^1(\Omega)$ s'injecte de façon compacte dans $L^2(\Omega)$.

Preuve

Voir Hain-Brezis [4] (Théorème IX.16,page 169)

Théorème 5.2

Soit s un réel quelconque et Ω un ouvert borné de R^n de frontière Γ assez régulière. Alors nous avons le résultat suivant :

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ l'injection} : H^s(\Omega) \to H^{s-\varepsilon}(\Omega) \text{ est compacte.}$$

Preuve

Voir le livre de J. L. lions, Magenes [11] , problèmes aux limites non homogènes et applications, Volume1.

Dans la suite on se donne trois espaces de Banach : B_0, B et B_1, tels que :

1) $B_0 \subset B \subset B_1$ avec injections continues,

2) B_i est réflexifs pour $i = 0, 1,$

Alors nous avons le résultat suivant :

Lemme 5.3

L'espace de fonctions :

$$W = \left\{ v \in L^{p_0}(0, T, B_0), \text{ tel que } v' = \frac{dv}{dt} \in L^{p_0}(0, T, B_1) \right\}, \tag{1.1}$$

où T est fini et $1 < p_i < \infty,\ i = 0, 1,$ muni de la norme :

$$\|v\|_W = \|v\|_{L^{p_0}(0,T,B_0)} + \|v'\|_{L^{p_1}(0,T,B_1)}.$$

est un espace de Banach réflexif.

Preuve

Ce lemme est classique, pour sa démonstration le lecteur peut consulter le livre de Lions, Magenes, [11] Volume1

Lemme 5.4

Nous supposons de plus l'injection $B_0 \to B_1$ est compacte, alors pour tout $\eta > 0,$ il existe une constante $c_\eta > 0$ dépendant seulement de $\eta,$ telle que :

$$\forall v \in B_0, \|v\|_B \leq \eta \|v\|_{B_0} + c_\eta \|v\|_{B_1}, \tag{1.2}$$

et comme conséquence, il existe une constante D_η telle que :

$$\forall v \in B_0, \|v\|_{L^{p_0}(0,T,B)} \leq \eta \|v\|_{L^{p_0}(0,T,B_0)} + D_\eta \|v\|_{L^{p_0}(0,T,B_1)} \tag{1.3}$$

Preuve

Nous faisons la démonstration par l'absurde. Alors nous pouvons construire une suite $(v_n) \in B_0$, telle que $\|v_n\|_B \to \infty$, avec :

$$\|v_n\|_B > \eta \|v_n\|_{B_0} + n \|v_n\|_{B_1} . \tag{1.4}$$

posons:

$$w_n = \frac{v_n}{\|v_n\|_{B_0}}.$$

On a donc : $\|w_n\|_B > \eta + n \|w_n\|_{B_1}$, et comme l'injection $B_0 \to B$ est continue, on écrit :

$$\|w_n\| \leq c \|w_n\|_{B_0} = c < \infty.$$

Donc (1.4) entraine :

$$\|w_n\|_{B_1} \to 0 \|w_n\|_{B_1} \to 0 \tag{1.5}$$

Mais $\|w_n\|_{B_0} = 1$ et comme l'injection : $B_0 \to B_1$ et compacte, on peut extraire de (w_n) une sous-suite (w_μ) fortement convergente dans B et nécessairement d'après (1.5) tendant vers 0 dans B_1, car l'injection de B dans B_1 est continue. Donc $\|w_n\|_B \to 0$ ce qui contredit (1.4), d'ou nous avons bien montré (1.2).

On a alors le résultat :

Théorème 5.5

Sous les hypothèses du lemme 5.4 et si $1 < p_0 < \infty$, alors l'injection de W dans $L^{p_0}(0, T, B)$ est compacte.

Preuve

Soit $(v_n)_n$ une suite bornée dans W :

$$\|v_n\|_W \leq c < \infty, \forall n.$$

Nous voulons montrer que $(v_n)_n$ possède une sous-suite qui converge fortement dans $L^{p_0}(0,T,B)$. Comme W est réflexif (lemme 5.3), il existe une sous-suite $(v_\mu)_\mu$ qui converge faiblement dans W. Sans perdre de généralité, nous supposons que :

$$v_\mu \to 0 \text{ dans } W \text{ faiblement.}$$

D'autre part, le lemme 5.4, pour tout $\eta > 0$, il existe $D_\eta > 0$, telle que :

$$\begin{aligned} \|v_n\|_{L^{p_0}(0,T,B)} &\leq \eta \|v_n\|_{L^{p_0}(0,T,B_0)} + D_\eta \|v_n\|_{L^{p_1}(0,T,B_1)}. \\ &\leq \eta c + D_\eta \|v_n\|_{L^{p_1}(0,T,B_1)} \end{aligned}$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$ donné et choisissons η, telle que $\eta c \leq \frac{\varepsilon}{2}$, alors on aura :

$$\|v_n\|_{L^{p_0}(0,T,B)} \leq \frac{\varepsilon}{2} + d_n \|v_n\|_{L^{p_1}(0,T,B_1)},$$

Tout revient donc à montrer que :

$$v_n \to 0 \text{ dans } L^{p_1}(0,T,B_1) \text{ fortement} \tag{1.6}$$

Comme W s'injecte continument dans $C^0([0,T],B_1)$, la sous-suite (u_μ) est donc bornée dans $C^0([0,T],B_1)$, ce qui permet d'écrire :

$$\|v_\mu(t)\|_{B_1} \leq c < \infty,$$

de sorte que, d'après le théorème de Lebesgue on aura (1.6) si l'on montre que :

$$v_n(s) \to 0 \text{ dans } B_1 \text{ fortement}, \ \forall s \in [0,T],$$

mais comme s ne joue aucun rôle spécial tout revient finalement à montrer que :

$$v_n(0) \to 0 \text{ dans } B_1 \text{ fortement} \tag{1.7}$$

Si l'on introduit w_n :

$$w_n(t) = v_n(\lambda t), \lambda > 0 \text{ fixé.} \tag{1.8}$$

On a

$$\begin{cases} v_n(0) = w_n(0), \\ \|w_n\|_{L^{p_0}(0,T,B_0)} \leq c_1 \lambda^{-1/p_0}, \\ \|w_n'\|_{L^{p_1}(0,T,B_1)} \leq c_2 \lambda^{1-(1/p_1)} \end{cases} \tag{1.9}$$

Si $\varphi \in C^1([0,T]), \varphi(0) = -1, \varphi(T) = 0,$ on a :

$$w_n(0) = \int_0^T (\varphi w_n)' \, dt = \beta_n + \delta_n,$$

Où

$$\beta_n = \int_0^T \varphi w_n' dt, \delta_n = \int_0^T \varphi' w_n dt.$$

D'après (1.9), on en déduit :

$$\|v_n(0)\| \leq \|\beta_n\|_{B_1} + \|\delta_n\|_{B_1} \leq c_3 \lambda^{1-(1/p_1)} + \|\delta_n\|_{B_1} \tag{1.10}$$

Si $\varepsilon > 0$, on choisit λ de façon que $c_3\lambda^{1-(1/p_1)} \leq \frac{\epsilon}{2}$ et on aura (1.7)
Si l'on montre que :

$$\delta_n \to 0 \text{ dans } B_1 \text{ fortement}, \tag{1.11}$$

Or $w_n \to 0$ dans $L^{p_0}(0,T,B_0)$ faible (λ fixé et on peut toujours le supposer ≤ 1), donc $\delta_n \to 0$ dans B_0 faiblement. Comme l'injection $B_0 \to B_1$ est supposée compacte, on en déduit (1.7) et par conséquent le théorème 1.7 est prouvé.

1.5.2 Application trace sur $H^m(\Omega)$

Désignons par $D(\overline{\Omega})$ l'espace des distributions des fonctions de $D(\mathbb{R}^n)$ à $\overline{\Omega}$. Nous pouvons alors parler de la trace d'une fonction de $D(\overline{\Omega})$ et nous définissons l'application :

$$\begin{aligned} \gamma &: D(\overline{\Omega}) \to L^2(\Gamma), \\ \varphi &\mapsto \gamma(\varphi) = \varphi/\Gamma \end{aligned}$$

L'application γ est dite application trace. Et il est bien connu qu'elle est linéaire est continue au sens de la norme de $H^1(\Omega)$, il est aussi connu que si Ω est régulier, alors $D(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$. (Voir par exemple Raviart & Thomas [20]). Ceci nous permet d'énnoncer le résultat suivant :

Théorème 5.6

On suppose que Ω est un ouvert borné de frontière Γ assez régulière. Alors l'application γ de :

$$D(\overline{\Omega}) \to L^2(\Gamma),$$

se prolonge par continuité en une application linéaire continue de :

$$\begin{aligned} H^s(\Omega) &\rightarrow L^2(\Gamma) \\ u &\mapsto \gamma(u) \end{aligned}$$

Preuve

Voir Lions -Magenes [11], problèmes aux limites non homogènes et applications, Volume1.

On donne, enfin le dernier résultat qui est le lemme de Gronwall, utilisé souvent dans la démonstration de l'existence et de l'unicité de la solution.

Lemme 5.7 (**Gronwall**)

Soit $T \in R^+, K \in R^+, \varphi : [0,T] \rightarrow R^+$ et $\Psi : [0,T] \rightarrow R$, alors :

$$\forall t \in [0,T], \varphi(t) \leq K + \int_0^T \varphi(s)\,\Psi(s)\,ds < \infty \text{ et } \int_0^T \Psi(s)\,ds < \infty$$

Lemme 5.8

Soit O un ouvert borné de $R_x^n \times R_t$, g_μ et g des fonctions de $L^q(O), 1 < q < \infty$,telles que :

$$\|g_\mu\|_{\mathbf{L}^q(O)} \leq c, g_\mu \rightarrow g \text{ p.p dans } O.$$

Alors $g_\mu \rightarrow g$ dans L^q faible.

Démonstration

Voir le livre de J. L. Lions [12] (page13).

Théorème 5.9 (**de convergence dominée de Lebesgue**)

Soit (f_n) une suite de fonction de $L^1(\Omega)$, on suppose que
a) $f_n(x) \to f(x)$ p.p.sur Ω
b) il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ tel que pour chaque n.

$$|f_n(x)| \leq g(x) \text{ p.p. sur } \Omega.$$

Alors

$$f \in L^1 \text{ et } \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \to 0.$$

Théorème 5.10

Soit F un espace de Banach réflexif strictement convexe ainsi que son dual. Soit J l'application de dualité de $F \to F'$ relative à Φ, pour f donné dans F', il existe u unique dans F tel que :

$$J(u) = f.$$

Chapitre 2

Etude d'un problème d'élasticité non linéaire gouverné par le système de Lamé

2.1 Position du Problème

Notre problème consiste à étudier un exemple analogue a l'équation aux dérivées partielles, qui intervient en mécanique quantique relativiste. On désigne par Ω un ouvert de R^n, soit Γ la frontière de Ω qui est assez régulière. Soit Q le cylindre de $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t$: $Q = \Omega \times (0,T)$; T fini, de frontière Σ; L désigne le système de Lamé défini par $\mu\Delta + (\lambda+\mu)\nabla div$; λ et μ sont des constantes de Lamé avec $\lambda + \mu \geq 0$. $\left(u_0, u_1, f\right)$ des fonctions données, $\rho > 0$.

On s'interesse à l'existence et à l'unicité d'une fonction $u = u(x,t)$, $x \in \Omega$, $t \in (0,T)$ solution du problème (2.1; 2.2; 2.3; 2.4).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - Lu + |u|^\rho u = f \ , \ x \in \Omega, \ t \in (0,T) \tag{2.1}$$

$$u = 0 \text{ sur } \Sigma \tag{2.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \ x \in \Omega \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x),\ x \in \Omega \tag{2.4}$$

Notons que pour $\lambda = -\ \mu$, on retrouve le problème intervenant en mécanique quantique relativiste traité dans [12]

2.2 Existence et unicité de la solution

2.2.1 Existence de la solution

Les techniques qu'on utilisera seront celles de la méthode de compacité.

Théorème 1

On suppose que Ω est un ouvert borné. On donne $f,\ u_0,\ u_1$ avec :

$$f \in L^2(Q), \tag{2.5}$$

$$u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega),\ p = \rho + 2. \tag{2.6}$$

$$u_1 \in L^2(\Omega). \tag{2.7}$$

Alors il existe une fonction u vérifiant

$$u \in L^\infty\left(0,T; H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)\right), \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) \in L^\infty\left(0,T; L^2(\Omega)\right), \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - Lu + |u|^\rho u = f \text{ dans } Q \tag{2.10}$$

$$u(0) = u_0(x),\ x \in \Omega \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0) = u_1(x),\ x \in \Omega \tag{2.12}$$

Démonstration :

Première étape : on cherche des solutions approchées

On introduit une suite $w_1, ..., w_m, ...$ de fonctions ayant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} w_i \in H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega) \quad \forall i; \\ \forall m,\ w_1, ...,\ w_m \quad \text{sont linéairement indépendants} \\ \text{les combinaisons linéaires finies des } w_i \text{ sont denses dans} \\ H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega). \end{cases} \tag{2.13}$$

On cherche alors $u_m = u_m(t)$ (solution approchée) du problème sous la forme :

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^{i=m} g_{im}(t) w_i\ . \tag{2.14}$$

On détermine les fonctions g_{im} par les conditions

$$\left(u_m''(t), w_j\right) + a(u_m, w_j) + \left(|u_m(t)|^\rho u_m(t), w_j\right) = \left(f(t), w_j\right),\ 1 \le j \le m, \tag{2.15}$$

Telle que a est une forme bilinéaire définit comme suit :

$$a(u, v) = \lambda \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + (\lambda + \mu) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}\ . \tag{2.16}$$

Le système (2.15) d'équations différentielles ordinaires non li-

néaires est à compléter par les conditions initiales :

$$u_m(0) = u_{0m}, \quad u_{0m} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{im} w_i \underset{m\to\infty}{\to} u_0 \ \text{ dans } \ H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega), \tag{2.17}$$

$$u_m'(0) = u_{1m}, \quad u_{1m} = \sum_{i=1}^{m} \beta_{im} w_i \underset{m\to\infty}{\to} u_1 \ \text{ dans } \ L^2(\Omega). \tag{2.18}$$

Grâce à l'ìndépendance linéaire de $w_1, ..., w_m$, on a $\det(w_i, w_j) \neq 0$ c'est à dire que le système composé de (2.15), (2.17) et (2.18) admet une solution définie sur $[0, t_m]$. Les estimations à priori qui suivent montreront que $t_m = T$.

Deuxième étape : les estimations a priori.

On multiplie l'équation (2.15) d'indice j par $g_{jm}'(t)$ on a :

$$\left(u_m''(t), u_m'(t)\right) + a\left(u_m(t), u_m'(t)\right) + \left(|u_m(t)|^\rho u_m(t), u_m'(t)\right) = \left(f(t), u_m'(t)\right) \tag{2.19}$$

Mais, $|u_m(t)|^\rho u_m(t) \in L^{p'}(\Omega)$ et $p = \rho + 2$, alors d'après l'inégalité de Cauchy Shwartz on a :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left|u_m'(t)\right|^2 + \|u_m(t)\|^2\right) + \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega |u_m(x,t)|^p \, dx\right) \leq |f(t)| \left|u_m'(t)\right| \tag{2.20}$$

Donc on intègre entre 0, t, on en déduit :

$$\frac{1}{2}\left(\left|u_m'(t)\right|^2 + \|u_m(t)\|^2\right) + \frac{1}{p}\|u_m(x,t)\|_{L^p(\Omega)}^p \leq \frac{1}{2}|u_{1m}|^2 + \frac{1}{2}\|u_{0m}\|^2$$

$$+\frac{1}{p}\|u_m(0)\|_{L^p(\Omega)}^p + \int_0^t |f(\sigma)| \left|u_m'(\sigma)\right| d\sigma \tag{2.21}$$

D'après (2.17) , (2.18) et l'inégalité :

$$ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2.$$

On a :

$$|f(\sigma)| \left|u_m'(\sigma)\right| \leq \frac{1}{2}|f(\sigma)|^2 + \frac{1}{2}\left|u_m'(\sigma)\right|^2.$$

Alors :

$$\frac{1}{2}\left(\left|u_m'(t)\right|^2 + \|u_m(t)\|^2\right) + \frac{1}{p}\|u_m(x,t)\|_{L^p(\Omega)}^p \leq c + \frac{1}{2}\int_0^t |f(\sigma)|^2 d\sigma + \frac{1}{2}\int_0^t \left|u_m'(\sigma)\right|^2 d\sigma. \tag{2.22}$$

Mais :

$$f \in L^2(Q) \Rightarrow \int_0^t |f(\sigma)|^2 d\sigma \leq \text{constant}.$$

On déduit donc, en particulier de (2.22) que :

$$\left|u_m'(t)\right|^2 \leq c' + \int_0^t \left|u_m'(\sigma)\right|^2 d\sigma, \tag{2.23}$$

Et d'après l'inégalité de Gronwall on a :

$$\left|u_m'(t)\right| \leq \text{constant}. \tag{2.24}$$

Alors :

$$\|u_m(t)\| + \|u_m(x)\|_{L^p(\Omega)} \leq \text{constant}. \tag{2.25}$$

D'après (2.24) , (2.25) et lorsque $m \to \infty$ on a : u_m dans un ensemble borné de $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega))$ et u_m' dans un ensemble borné de $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$.

Troisième étape : passage à la limite

En deuxième étape on a u_m borné dans $L^{\infty}(0,T;H_0^1(\Omega)\cap L^p(\Omega))$, alors elle est bornée dans $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Comme $L^{\infty}(0,T;H_0^1(\Omega)\cap L^p(\Omega))$ {resp. $L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega))$} est le dual de $L^1(0,T;H^{-1}(\Omega)+L^{p'}(\Omega))$ {resp.de $L^1(0,T;L^2(\Omega))$}, il existe une sous suite de u_m, u_μ telle que :

$$\forall g\in L^1\left(0,T;H^{-1}(\Omega)+L^{p'}(\Omega)\right):\int_0^T(u_\mu(t),g(t))\,dt\underset{\mu\to\infty}{\to}\int_0^T(u(t),g(t))\,dt.$$

Qui implique :

$$u_\mu\to u\ \text{ faible dans } L^{\infty}\left(0,T;H_0^1(\Omega)\cap L^p(\Omega)\right)\ \text{ et dans } L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right). \tag{2.26}$$

Donc :

$$\exists u_\mu'\to u'\text{dans } D'\left(0,T;H_0^1(\Omega)\cap L^p(\Omega)\right)\Rightarrow u_\mu'\to u'\text{dans } L^{\infty}\left(0,T;L^2(\Omega)\right)\ \text{ et dans } L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right). \tag{2.27}$$

Alors en particulier u_m borné dans $H^1(Q)$, mais on sait que l'injection suivante est compacte :

$$H^1(Q)\hookrightarrow L^2(Q) \tag{2.28}$$

Et d'après la définition de l'injection compacte, on peut supposer que la suite u_μ extraite de u_m vérifie (2.26) et (2.27), donc u, u' existe et dans $L^2(Q)$ alors :

$$\begin{cases} u_\mu\to u\text{ dans } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)\cap L^p(\Omega))\ \text{ fort (p.p)},\\ u_\mu'\to u'\ \text{ dans }\ L^2(0,T;L^2(\Omega))\ \text{ faible (p.p)}. \end{cases} \tag{2.29}$$

Etudiant la convergence de $|u_m|^\rho u_m$:
$|u_m|^\rho u_m$ étant dans un borné de $L^\infty\left(0,T;L^{p'}(\Omega)\right)$, donc
On pose :

$$|u_\mu|^\rho u_\mu \to w \text{ dans } L^\infty\left(0,T;L^{p'}(\Omega)\right), \tag{2.30}$$

Montrant que :

$$w = |u|^\rho u. \tag{2.31}$$

Pour cela on donne le lemme suivant :

Lemme :

Soit O un ouvert borné de $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t$, g_μ et g des fonctions de $L^q(O)$, $1 < q < \infty$, telles que

$$\|g_\mu\|_{L^q(O)} \leq c, \;\; g_\mu \to g \;\; \text{p.p. dans } O$$

Alors

$$g_\mu \to g \;\; \text{dans } L^q \text{ faible .}$$

Quand on pose : $O = Q$ et $g_\mu = |u_\mu|^\rho u_\mu$, d'après (1.29) :

$$u_\mu \to u \text{ dans } L^2(Q) \;\; \text{(p.p)}$$

Donc :

$$g_\mu = |u_\mu|^\rho u_\mu \rightharpoonup |u|^\rho u = g \text{ (p.p) dans } L^{p'}(\Omega)$$

Telle que : $p' = \frac{\rho+2}{\rho+1} = q$ $\left(\text{car } p = \rho + 2\right)$, et d'après (2.30) :

$$|u_\mu|^\rho u_\mu \rightharpoonup w \;\; \text{dans } L^{p'}(\Omega). \tag{2.32}$$

Puisque la limite est unique donc :

$$g = |u|^{\rho} u = w.$$

On montre que cette solution vérifie l'équation (2.15), donc quand on pose $m = \mu$ et on fixe j tel que $\mu > j$; alors :

$$\left(u_{\mu}^{''}(t), w_j\right) + a\left(u_{\mu}, w_j\right) + \left(|u_{\mu}(t)|^{\rho} u_{\mu}(t), w_j\right) = \left(f(t), w_j\right). \tag{2.33}$$

D'après (2.30) et (2.31)

$$\left(u_{\mu}^{'}, w_j\right) \rightharpoonup \left(u^{'}, w_j\right) \text{ dans } L^{\infty}(0,T) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(u_{\mu}^{'}, w_j\right) = \left(u_{\mu}^{''}, w_j\right) \rightarrow \left(u^{''}, w_j\right) \text{ dans } D^{'}(0,T), \tag{2.34}$$

D'où :

$$a\left(u_{\mu}, w_j\right) \rightharpoonup a\left(u, w_j\right) \text{ dans } L^{\infty}(0,T).$$

Et d'après (2.30) et (2.31)

$$\left(|u_{\mu}|^{\rho} u_{\mu}, w_j\right) \rightharpoonup \left(|u|^{\rho} u, w_j\right) \text{ dans } L^{\infty}(0,T)$$

On déduit donc de (2.32) que :

$$\frac{d^2}{dt^2}(u, w_j) + a\left(u, w_j\right) + \left(|u|^{\rho} u, w_j\right) = \left(f, w_j\right).$$

D'après la densité de la base $\{w_j\}$ dans l'espace séparable $H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, on a :

$$\frac{d^2}{dt^2}(u, v) + a\left(u, v\right) + \left(|u|^{\rho} u, v\right) = \left(f, v\right), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega). \tag{2.35}$$

Alors la solution u satisfait (2.4), (2.5) et (2.6) .

Reste à montrer que la solution u vérifie les conditions initiales

(2.7), (2.8) : $u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1$.

D'après (2.26) et (2.27) on a :

$$u_\mu \to u \text{ dans } L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\cap L^p(\Omega)\right), \tag{2.36}$$

$$\frac{du_\mu}{dt} = u'_\mu \rightharpoonup u' \text{ dans } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right). \tag{2.37}$$

Donc u_μ est continue sur $[0,T]$ alors continue en 0 et on a :

$$u_{0\mu} = u_\mu(0) \to u(0) = u_0 \text{ dans } H_0^1(\Omega)\cap L^p(\Omega),$$

d'où (2.7) .

Et encore :

$$\begin{aligned}\left(u''_\mu, w_j\right) &\rightharpoonup \left(u'', w_j\right) \text{ dans } L^\infty(0,T),\\ \left(u'_\mu, w_j\right) &\rightharpoonup \left(u', w_j\right) \text{ dans } L^\infty(0,T).\end{aligned}$$

Alors

$$\left(u'_\mu(0), w_j\right) \rightharpoonup \left(u', w_j\right)|_{t=0} = \left(u'(0), w_j\right),$$

et d'après (2.14) :

$$\left(u'_\mu(0), w_j\right) \rightharpoonup (u_1, w_j).$$

On a :

$$\left(u'(0), w_j\right) = (u_1, w_j),\ \forall j.$$

Alors :

$$u'(0) = u_1,$$

d'ou (2.8).

2.2.2 Unicité de la solution

Théorème 2 :

On se place dans les hypothèses du théorème 1 avec :

$$\rho \leq \frac{2}{n-2} \tag{2.38}$$

(ρ fini quelconque si $n = 2$) .
Alors la solution u obtenue au théorème1 est unique.

Démonstration :

Soit u, v deux solutions, au sens du théorème 2, alors $w = u - v$ vérifie :

$$\begin{cases} w'' - Lw = |v|^{\rho} v - |u|^{\rho} u, \\ w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \\ w \in L^{\infty}(0,T; H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)), \\ w' \in L^{\infty}(0,T; L^2(\Omega)). \end{cases}$$

Donc (2.28) implique :

$$(w'', v) + a(w, v) = (|v|^{\rho} v - |u|^{\rho} u\ , v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Pour remplacer v par w' il faut que $w' \in H_0^1(\Omega)$ car $v \in H_0^1(\Omega)$ mais on a $w' \in L^2(\Omega)$ donc il faut introduire une fonction auxiliaire :

$$\begin{aligned} \forall s &\in]0,T[\\ \Psi &:]0,T[\to \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$t \mapsto \Psi(t) = \begin{cases} -\int_t^s w(\sigma)\, d\sigma, & t \leq s; \\ 0, & t > s \end{cases}$$

$$\Psi'(t) = w(t); \quad w_1(t) = \int_0^t w(\sigma)\, d\sigma \text{ si } \forall t \leq s.$$

Donc

$$\Psi(t) = -\int_t^s w(\sigma)\, d\sigma = w_1(t) - w_1(s) \Rightarrow \Psi(0) = -w_1(s)$$

Alors (2.28) donne :

$$\begin{aligned}
(w'', \Psi(t)) + a(w, \Psi(t)) &= (|v|^\rho v - |u|^\rho u\ , \Psi(t)) \Rightarrow \\
-\int_0^s (w', \Psi'(t))\, dt + \int_0^s a(w, \Psi(t))\, dt &= \int_0^s (|v|^\rho v - |u|^\rho u\ , \Psi(t))\, dt \Rightarrow \\
-\int_0^s (w', w)\, dt + \int_0^s \frac{d}{dt} a(w_1(t), w_1(t) - w_1(s))\, dt &= \int_0^s (|v|^\rho v - |u|^\rho u\ , \Psi(t))\, dt \Rightarrow \\
-\frac{1}{2}|w(s)|^2 + \frac{1}{2}\|w_1(s)\|^2 - a(w_1(s), w_1(s)) &= \int_0^s (|v|^\rho v - |u|^\rho u\ , \Psi(t))\, dt \Rightarrow \\
-\frac{1}{2}|w(s)|^2 + \frac{1}{2}\|w_1(s)\|^2 - a(w_1(s), w_1(s)) &= \int_0^s (|v|^\rho v - |u|^\rho u\ , \Psi(t))\, dt \Rightarrow \\
-\frac{1}{2}|w(s)|^2 - \frac{1}{2}\|w_1(s)\|^2 &= \int_0^s (|v|^\rho v - |u|^\rho u\ , \Psi(t))\, dt \Rightarrow \\
\frac{1}{2}|w(s)|^2 + \frac{1}{2}\|w_1(s)\|^2 &= -\int_0^s (|v|^\rho v - |u|^\rho u\ , \Psi(t))\, dt
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}|-\left(|v|^{\rho}v-|u|^{\rho}u\ ,\Psi\left(t\right)\right)| &\leq c\int\limits_{\Omega}\sup\left(|u|^{\rho},|v|^{\rho}\right)|u-v|\,|\Psi\left(t\right)|\,dx= \\ & c\int\limits_{\Omega}\sup\left(|u|^{\rho},|v|^{\rho}\right)|w\left(t\right)|\,|\Psi\left(t\right)|\,dx\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Hôlder on a :

$$\begin{aligned}c\int\limits_{\Omega}\sup\left(|u|^{\rho},|v|^{\rho}\right)|w\left(t\right)|\,|\Psi\left(t\right)|\,dx &= c\int\limits_{\Omega}\sup\left(|u|^{\rho},|v|^{\rho}\right)|w\left(t\right)|\,|w_{1}\left(t\right)-w_{1}\left(s\right)|\,dx\leq \\ & c\left[\left(\int\limits_{\Omega}\left(|u|^{\rho}\right)^{n}\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\int\limits_{\Omega}\left(|v|^{\rho}\right)^{n}\right)^{\frac{1}{n}}\right]\times \\ & \left[\left(\int\limits_{\Omega}|w_{1}\left(t\right)|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int\limits_{\Omega}|w_{1}\left(s\right)|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\right]\times \\ \left[\int\limits_{\Omega}|w\left(t\right)|^{2}\right]^{\frac{1}{2}} &\leq c\left[\left\||u|^{\rho}\right\|_{L^{n}(\Omega)}+\left\||v|^{\rho}\right\|_{L^{n}(\Omega)}\right]\left[\left\|w_{1}\left(t\right)\right\|_{L^{q}(\Omega)}+\left\|w_{1}\left(s\right)\right\|_{L^{q}(\Omega)}\right] \\ & \left\|w\left(t\right)\right\|_{L^{2}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Tel que :

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{q}+\frac{1}{2}=1,$$

alors

$$\frac{1}{q}=\frac{n-2}{2n}\Rightarrow\ q=\frac{2n}{n-2}.$$

Mais en théorème 2

$$\rho\leq\frac{2}{n-2}\Rightarrow\rho n\leq\frac{2n}{n-2}=q\Rightarrow\rho n\leq q.$$

On a

$$H_0^1(\Omega) \subset L^q(\Omega),\ \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n},\ n \geq 3$$

Alors :

$$\left| \int_\Omega \left(|u|^\rho u - |v|^\rho v \right) \Psi(t)\, dx \right| \leq c \left(\|u(t)\|^\rho + \|v(t)\|^\rho \right) \left(\|w_1(t)\|_{L^q(\Omega)} + \|w_1(s)\|_{L^q(\Omega)} \right) \|w(t)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Et comme $u, v \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega))$ (car $H_0^1(\Omega) \subset L^q(\Omega)$), on a :

$$\left| \int_\Omega \left(|u|^\rho u - |v|^\rho v \right) \Psi(t)\, dx \right| \leq c\, |w(t)| \left(\|w_1(t)\| + \|w_1(s)\| \right).$$

Donc :

$$|w(s)|^2 + \|w_1(s)\|^2 \leq c \int_0^s \left(|w(t)|^2 + \|w_1(t)\|^2 \right) dt.$$

D'après l'inégalité de Gronwall on a :

$$\begin{array}{rcl} |w(s)|^2 + \|w_1(s)\|^2 & = & 0 \Rightarrow \\ \left\{ \begin{array}{l} w(s) = 0 \\ w_1(s) = 0 \end{array} \right. & \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} u = v \\ u' = v' \end{array} \right. . \end{array}$$

Alors on a l'unicité.

Chapitre 3

Thermoélasticité non linéaire

Notations

Soit Ω un ouvert borné de R^n, de frontière régulière Γ. On désigne par $u = \{u_1, u_2, u_3, ..., u_n\}$ un vecteur et ξ une fonction scalaire sur $Q_\tau = \Omega \times]0, \tau[$ où τ est un réel fini.

λ, μ, γ sont les coefficients de Lamé avec $\lambda + \mu \geq 0$ et $\gamma > 0, k > 0$ le coefficient de la conductibilité thermique, $\delta > 0$ la capacité calorifique avec $q = \frac{q}{\delta}$, $\alpha = \frac{k}{\delta}$, $\eta = \frac{\gamma}{k}$

3.1 Position du Problème

3.1.1 Problème 1

Soit $\rho \ \epsilon \ ]0, +\infty[$, on donne

$$P \epsilon L^2\left(0, \tau; \left(H^{-1}(\Omega)\right)^n\right) et \ q \epsilon L^2\left(0, \tau; H^{-1}(\Omega)\right), \tag{3.1}$$

$$u_0 \ \epsilon (H_0^1(\Omega) \cap L^{\rho+2}(\Omega))^n \text{ et } \xi_0 \ \epsilon H_0^1(\Omega). \tag{3.2}$$

On cherche u, ξtels que

$$u \epsilon L^{\infty}(0,\tau;(H_0^1(\Omega) \cap L^{\rho+2}(\Omega))^n), \tag{3.3}$$

$$\xi \epsilon L^2(0,\tau;H_0^1(\Omega)) \cap L^{\infty}(0,\tau;L^2(\Omega)), \tag{3.4}$$

$$(P_2) \begin{cases} \mu \Delta u + (\lambda+\mu) grad(divu) - |u|^{\rho} u - \gamma grad\xi + P = 0, \ (a) \\ \Delta \xi - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \xi}{\partial t} - \eta \frac{\partial}{\partial t} divu = -\frac{1}{\alpha} q \ , \ (b) \\ u(0) = u_0 \text{ et } \xi(0) = \xi_0, \ (c) \end{cases} \tag{3.5}$$

3.1.2 Formulation Variationnelle

Multiplions l'équation (3.5.a) par une fonction $v \in (H_0^1(\Omega) \cap L^{\rho+2}(\Omega))^n$ et l'équation (3.5.b) par une fonction $y \in H_0^1(\Omega)$ et intégrons sur Ω, on déduit, en utilisant la formule de Green que

$$\begin{aligned} A(u,v) + (|u|^{\rho} u, v) + \gamma(grad\xi, v) &= (p,v) \quad \forall v \in (H_0^1(\Omega) \cap L^{\rho+2}(\Omega))^n, \\ (\xi', y) + \alpha\eta(divu', y) + B(\xi, y) &= (q,y), \quad \forall y \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

On peut alors poser le problème de la façon suivante :

3.1.3 Problème 2

On donne $p, q, \ u_0, \xi_0$ tels que :

$$p \epsilon L^2\left(0,\tau;\left(H^{-1}(\Omega)\right)^n\right) \text{ et } q \epsilon L^2\left(0,\tau;H^{-1}(\Omega)\right), \tag{3.6}$$

$$u_0 \, \epsilon (H_0^1(\Omega) \cap L^{\rho+2}(\Omega))^n \text{ et } \xi_0 \, \epsilon H_0^1(\Omega), \tag{3.7}$$

On cherche u, ξ tels que

$$u \epsilon L^{\infty}(0,\tau;(H_0^1(\Omega) \cap L^{\rho+2}(\Omega))^n) \ , \tag{3.8}$$

$$\xi \epsilon L^2(0,\tau;H_0^1(\Omega)\,) \cap L^{\infty}(0,\tau;L^2(\Omega)), \tag{3.9}$$

et $\forall v \in (H_0^1(\Omega) \cap L^{\rho+2}(\Omega))^n, \ \forall y \in H_0^1(\Omega)$

$$(P_v) \begin{cases} A(u,v) + (|u|^{\rho} u, v) + \gamma(grad\xi, v) = (p,v), \\ (\xi', y) + \alpha\eta(divu', y) + B(\xi, y) = (q,y), \\ u(0) = u_0 \text{ and } \ \xi(0) = \xi_0. \end{cases} \tag{3.10}$$

Remarque : Les problèmes (1) et (2) sont équivalents

3.2 Existence et unicité de la solution

3.2.1 Existence de la solution

Théorème

Le problème (2) admet une solution.

Soit Θ un ouvert borné de $R_x^n \times R_t$ et g_μ, g des fonctions de $L^q(\Theta)$; $1 \leq q \leq \infty$ telles que

$\|g_\mu\|_{L^q(\Theta)} \leq c$ et $g_\mu \longrightarrow g$ p.p. dans Θ Alors $g_\mu \longrightarrow g$ dans L^q faible.

Lemme : L'espace $H_0^1(\Omega) \cap L^{\rho+2}(\Omega)$ est séparable voir [11]

Corollaire :

Il existe une suite $e_1, e_2, e_3, ...e_n, ...$, ayant les propriétés suivantes : $e_i \epsilon (H_0^1(\Omega) \cap L^{\rho+2}(\Omega))$ $\forall m \geq 0$, $e_1, e_2, e_3, ...e_n$ sont linéairement indépendantes, les combinaisons linéaires finies des e_i sont denses dans $H_0^1(\Omega) \cap L^{\rho+2}(\Omega)$.

Démonstration du théorème

La Preuve se fait en trois étapes.

Etape1 : Approximation

On utilise les bases introduites dans le lemme 4 et le corollaire6
On définit une solution approchée $(u_m(t), \xi_m(t))$ par :

$$u_m(t) \epsilon [e_1, e_2, e_3, ...e_m] \text{ et } u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) e_j$$

$$\xi_m(t) \epsilon [f_1, f_2, f_3, ...f_m] \text{ et } \xi_m(t) = \sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t) f_j,$$

Telle que, pour $j = 1, 2...m$,

$$A(u_m(t), e_j) + (|u_m(t)|^\rho u_m(t), e_j) + \gamma(grad\xi_m(t), e_j) = (p, e_j), \tag{3.11}$$

$$(\xi'_m(t), f_j) + \alpha\eta(divu'_m(t), f_j) + B(\xi_m(t), f_j) = (q, f_j), \tag{3.12}$$

Avec

$$u_m(0) = u_{0m} \to u_0 \; in \; (H_0^1(\Omega) \cap L^{p+2}(\Omega))^n, \tag{3.13}$$

$$\xi_m(0) = \xi_{0m} \to \xi_0 \ in \ H_0^1(\Omega). \tag{3.14}$$

C'est un système différentiel ordinaire. Si on prend en considération les conditions (3.13) et (3.14), le système va admettre une solution sur $[o, t_m]$, où $t_m \leq \tau$.

Etape 2 : Estimation a priori I

Multiplions (3.11) par $g'_{jm}(t)$ et (3.12) par $h_{jm}(t)$ et sommons sur j. On aura

$$A(u_m(t), u'_m(t)) + (|u_m(t)|^\rho u_m(t), u'_m(t)) + \gamma(grad\xi_m(t), u'_m(t)) = (p(t), u'_m(t)),$$
$$(\xi'_m(t), \xi_m(t)) + \alpha\eta(divu'_m(t), \xi_m(t)) + B(\xi_m(t), \xi_m(t)) = (q(t), \xi_m(t)).$$

Alors

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 + \gamma(grad\xi_m(t), u'_m(t)) + \frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_m(x,t)|^{\rho+2}\,dx$$

$$= \frac{d}{dt}(p(t), u_m(t)) - (p'(t), u_m(t)) \tag{3.15}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\xi_m(t)|^2 + \|\xi_m(t)\|^2 + \alpha\eta(divu'_m(t), \xi_m(t)) = (q(t), \xi_m(t)). \tag{3.16}$$

Remarquons que (3.15) donne

$$\begin{aligned}(grad\xi_m(t), u'_m(t)) &= -\frac{1}{2\gamma}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 - \frac{1}{\gamma(\rho+2)}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_m(x,t)|^{\rho+2}\,dx + \frac{1}{\gamma}\frac{d}{dt}(p(t), u_m(t)) \\ &\quad -\frac{1}{\gamma}(p'(t), u_m(t)).\end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}(divu'_m(t),\xi_m(t)) &= \frac{1}{2\gamma}\frac{d}{dt}\left\|u_m(t)\right\|^2-\frac{1}{\gamma}\frac{d}{dt}(p(t),u_m(t))+\frac{1}{\gamma(\rho+2)}\frac{d}{dt}\int_\Omega\left|u_m(x,t)\right|^{\rho+2}dx\\ &\quad+\frac{1}{\gamma}(p'(t),u_m(t)).\end{aligned}$$

Remplaçons dans l'équation (3.16), on aura

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\xi_m(t)\right|^2+\left\|\xi_m(t)\right\|^2+\frac{\alpha\eta}{2\gamma}\frac{d}{dt}\left\|u_m(t)\right\|^2+\frac{\alpha\eta}{\gamma(\rho+2)}\frac{d}{dt}\int_\Omega\left|u_m(x,t)\right|^{\rho+2}dx$$

$$=\frac{\alpha\eta}{\gamma}\frac{d}{dt}(p(t),u_m(t))-\frac{\alpha\eta}{\gamma}(p'(t),u_m(t))+(q(t),\xi_m(t)).$$

Alors

$$\begin{aligned}&\int_0^t\left\|\xi_m(\sigma)\right\|^2d\sigma+\frac{\alpha\eta}{\gamma(\rho+2)}\int_\Omega\left|u_m(x,t)\right|^{\rho+2}dx-\frac{\alpha\eta}{\gamma(\rho+2)}\int_\Omega\left|u_{0m}(x,t)\right|^{\varrho+2}dx+\\ &\frac{1}{2}\left|\xi_m(t)\right|^2-\frac{1}{2}\left|\xi_{0m}(t)\right|^2+\frac{\alpha\eta}{2\gamma}\left\|u_m(t)\right\|^2-\frac{\alpha\eta}{2\gamma}\left\|u_{0m}(t)\right\|^2\\ =\;&\frac{\alpha\eta}{\gamma}(p(t),u_m(t))-\frac{\alpha\eta}{\gamma}(p(0),u_{0m})-\frac{\alpha\eta}{\gamma}\int_0^t(p',u_m(\sigma))d\sigma+\int_0^t(q(\sigma),\xi_m(\sigma))d\sigma.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}&\left|\xi_m(t)\right|^2+2\int_0^t\left\|\xi_m(\sigma)\right\|^2d\sigma+\frac{\alpha\eta}{\gamma}\left\|u_m(t)\right\|^2+\frac{2\alpha\eta}{\gamma(\rho+2)}\int_\Omega\left|u_m(x,t)\right|^{\rho+2}dx\\ \leq\;&c+2\frac{\alpha\eta}{\gamma}\left[\left\|p(t)\right\|^2+\frac{\left\|u_m(t)\right\|^2}{4}\right]+\int_0^t\left\|q(\sigma)\right\|^2d\sigma+\int_0^t\left\|\xi_m(\sigma)\right\|^2d\sigma+\\ &\frac{\alpha\eta}{\gamma}\int_0^t\left\|p'(\sigma)\right\|^2d\sigma+\frac{\alpha\eta}{\gamma}\int_0^t\left\|u_m(\sigma)\right\|^2d\sigma.\end{aligned}$$

Alors

$$\left\|u_m(t)\right\|^2\leq c+\frac{\alpha\eta}{\gamma}\int_0^t\left\|u_m(\sigma)\right\|^2d\sigma.$$

Utilisant le lemme de Gronwall's, on a :

$$\|u_m(t)\|^2 \leq c, \forall t \in [0, t_m] \subset [0, \tau]$$

Par conséquent nous obtiendrons l'estimation

$$|\xi_m(t)|^2 + \int_0^t \|T_m(\sigma)\|^2 d\sigma + \frac{\alpha\eta}{2\gamma} \|u_m(t)\|^2 + \frac{\alpha\eta}{\gamma(\rho+2)} \int_\Omega |u_m(x,t)|^{\rho+2} dx \leq c.$$

On déduit que $t_m = \tau$; de plus on a les estimations

$$u_m \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0,\tau;(H_0^1(\Omega) \cap L^{\rho+2}(\Omega))^n), \tag{3.17}$$

$$\xi_m \text{ demeure dans un borné de } L^2(0,\tau;(H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,\tau;L^2(\Omega)). \tag{3.18}$$

Pour pouvoir appliquer la méthode de compacité, il nous faut une estimation sur $u_m'(t)$.

Etape 3 : Estimation a priori II

Nous avons d'autre part :

$$\begin{cases} A(u_m'(t), u_m'(t)) + \gamma(grad\xi_m'(t), u_m'(t)) + (\frac{d}{dt}|u_m(t)|^\rho u_m(t), u_m'(t)) = 0, \\ (\xi_m'(t), \xi_m'(t)) + \alpha\eta(div u_m'(t), \xi_m'(t)) + B(\xi_m(t), \xi_m'(t)) = (q(t), \xi_m'(t)). \end{cases}$$

Mais

$$\frac{d}{dt}(|u_m(t)|^\rho u_m(t)) = \rho |u_m(t)|^{\rho-1} \frac{d}{dt} |u_m(t)| (u_m(t)) + |u_m(t)|^\rho u_m'(t).$$

Alors

$$\begin{gathered} \|u_m'(t)\|^2 + \gamma(grad\xi_m'(t), u_m'(t)) + \\ \left(|u_m(t)|^{\rho-1} \left[\rho u_m(t) \frac{d}{dt} |u_m(t)| + |u_m(t)| u_m'(t)\right], u_m'(t)\right) = 0 \end{gathered} \tag{3.19}$$

et

$$|\xi'_m(t)|^2 + \alpha\eta(divu'_m(t), \xi'_m(t)) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\xi_m(t)\|^2 = (q, \xi'_m(t)), \tag{3.20}$$

De plus, on sait que u_m et ξ_m sont nulles sur le bord $\forall t \in [o, \tau]$, alors u'_m et ξ'_m,le seront aussi pour $u'_m(t)$ et $\xi'_m(t)$.

On en déduit, après utilisation de la formule de Green, que :

$$(grad\xi'_m(t), u'_m(t)) = -(divu'_m(t), \xi'_m(t)).$$

d'autre part (3.19) donne :

$$(grad\xi'_m(t), u'_m(t)) = -\frac{1}{\gamma}\left(|u_m(t)|^{\rho-1}\left[\rho u_m(t)\frac{d}{dt}|u_m(t)| + |u_m(t)|\,u'_m(t)\right], u'_m(t)\right) - \frac{1}{\gamma}\|u'_m(t)\|^2$$

Remplaçons dans (3.20), il vient :

$$|\xi'_m(t)|^2 + \tfrac{\alpha\eta}{\gamma}\|u'_m(t)\|^2 + \tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\|\xi_m(t)\|^2 +$$
$$\tfrac{\alpha\eta}{\gamma}(|u_m(t)|^{\rho-1}\left[\rho u_m(t)\tfrac{d}{dt}|u_m(t)| + |u_m(t)|\,u'_m(t)\right], u'_m(t)) = (q, \xi'_m(t)).$$

Par conséquent

$$\int_0^t |\xi'_m(\sigma)|^2 d\sigma + \frac{\alpha\eta}{\gamma}\int_0^t \|u'_m(\sigma)\|^2 d\sigma + \int_0^t k(\sigma)\,d\sigma + \frac{1}{2}\|\xi_m(t)\|^2 - \frac{1}{2}|\xi_{0m}(t)|^2$$
$$\leq \int_0^t |q(\sigma)|\,.\,|\xi'_m(\sigma)|\,d\sigma.$$

Où

$$k(t) = \frac{\alpha\eta}{\gamma}(|u_m(t)|^{\rho-1}\left[\rho u_m(t)\frac{d}{dt}|u_m(t)| + |u_m(t)|\,u'_m(t)\right], u'_m(t)).$$

Alors

$$\begin{aligned} & \int_0^t |\xi_m'(\sigma)|^2 \, d\sigma + \frac{\alpha\eta}{\gamma} \int_0^t \|u_m'(\sigma)\|^2 \, d\sigma + \int_0^t k(\sigma) \, d\sigma + \frac{1}{2} \|\xi_m(t)\|^2 \\ \leq \; & \frac{1}{2} \|\xi_{0m}(t)\|^2 + \frac{1}{2} \int_0^t |q(\sigma)|^2 \, d\sigma + \frac{1}{2} \int_0^t |\xi_m'(\sigma)| \, d\sigma. \end{aligned}$$

Donc on obtient l'estimation

$$\int_0^t |\xi_m'(\sigma)|^2 \, d\sigma + \frac{\alpha\eta}{\gamma} \int_0^t \|u_m'(\sigma)\|^2 \, d\sigma + \int_0^t k(\sigma) \, d\sigma + \frac{1}{2} \|\xi_m(t)\|^2 \leq C$$

Montrons maintenant que $k(\sigma) \geq 0$;

$$\begin{aligned} k(\xi) \; = \; & \frac{\alpha\eta}{\gamma} \int_\Omega (|u_m(t)|^{-1} \left[\rho u_m(t) \frac{d}{dt} |u_m(t)| \, u_m'(t) + |u_m(t)| \, (u_m'(t))^2 \right] dx = \\ & \frac{\rho\alpha\eta}{2\gamma} \int_\Omega (|u_m(t)|^{\rho-1} \, \frac{d}{dt} |u_m(t)| \, \frac{d}{dt} (u_m(t))^2 dx + \frac{\alpha\eta}{\gamma} \int_\Omega |u_m(t)|^\rho \, (u_m'(t))^2 dx. \end{aligned}$$

Remarquons que

$$\int_\Omega |u_m(t)|^\rho \, (u_m'(t))^2 dx \geq 0$$

Soit maintenant $t, s \in [0, \tau]$, tels que $t > s$, alors

$$u_m^2(t) - u_m^2(s) = [|u_m(t)| - |u_m(s)|] \, [|u_m(t)| + |u_m(s)|]$$

donc

$$\int_\Omega (\, |u_m(t)|^{\rho-1} \, \frac{d}{dt} |u_m(t)| \, \frac{d}{dt} (u_m(t))^2 dx \geq 0$$

alors l'estimation se réduit à :

$$\frac{1}{2} \int_0^t |\xi_m'(\sigma)|^2 \, d\sigma + \frac{\alpha\eta}{\gamma} \int_0^t \|u_m'(\sigma)\|^2 \, d\sigma + \frac{1}{2} \|\xi_m(t)\|^2 \leq C$$

Par conséquent on déduit que :

$$\int_0^t \|u'_m(\sigma)\|^2 d\sigma \leq C$$

On en déduit l'estimation :
u'_m demeure dans un borné de $L^2\left(0,\tau;\left(H_0^{-1}(\Omega)\right)^n\right)$.
En particulier,

$$u'_m \text{ demeure dans un borné de } \left(L^2(Q_\tau)\right)^n. \tag{3.21}$$

Etape4 : Passage à la limite

D'après (3.17) et (3.18), on peut extraire une suite $(u_\mu(t), \xi_\mu(t))$ telle que :

$$u_\mu \to u \text{ dans } L^\infty(0,\tau;(H_0^1(\Omega)\cap L^{\rho+2}(\Omega))^n) \text{ faible étoile,} \tag{3.22}$$

$$\xi_\mu \to \xi \text{ dans } L^2(0,\tau;H_0^1(\Omega)) \text{ faible,} \tag{3.23}$$

$$\xi_\mu \to \xi \text{ dans } L^\infty(0,\tau;L^2(\Omega)) \text{ faible étoile.} \tag{3.24}$$

On sait d'après (3.17) que u_m demeure dans un borné de $L^\infty(0,\tau;(H_0^1(\Omega)\cap L^{\rho+2}(\Omega))^n)$, mais

$$L^\infty(0,\tau;(H_0^1(\Omega)\cap L^{\rho+2}(\Omega))^n) \subset L^\infty(0,\tau;H_0^1(\Omega)) \subset L^2(0,\tau;H_0^1(\Omega)). \tag{3.25}$$

Alors (3.21) et (3.25) montrent que u_m demeure dans un borné de $(L^2(Q_\tau))^n$

Or d'après le théorème de compacité, de Rellich voir [11], l'injection de $H^1(Q_\tau)$ dans $L^2(Q_\tau)$ est compacte.

On peut alors supposer que la suite ainsi extraite u_μ vérifie en

outre :

$$u_\mu \to u \text{ dans } \left(L^2\left(Q_\tau\right)\right)^n \text{ fort et presque partout,} \tag{3.26}$$

et comme l'application $f \to |f|^\rho f$, applique $L^{\rho+2}(\Omega)$ sur $L^p(\Omega)$, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{\rho+2} = 1$,

Alors

$|u_\mu|^\rho u_\mu$ demeure dans un borné de $L^\infty(0,\tau;(L^p(\Omega))^n)$, il existe donc $w \in L^\infty(0,\tau;(L^p(\Omega))^n)$ telle que

$$|u_\mu|^\rho u_\mu \to w \text{ dans } L^\infty(0,\tau;(L^p(\Omega))^n) \text{ faible étoile.} \tag{3.27}$$

Pour cela, on applique le lemme (2) avec $\Theta = Q_\tau$, $g_\mu = |u_\mu|^\rho u_\mu$ et $p = q = \frac{\rho+2}{\rho+1}$,

d'après (3.26) $u_\mu \to u$ presque partout dans Θ. Par suite $g_\mu \to g = |u|^\rho u$ presque partout dans Θ,

de plus (3.27) donne $g_\mu \to w$ dans $L^\infty(0,\tau;(L^q(\Omega))^n)$ faible étoile,

or $L^\infty(0,\tau\ ;\ (L^p(\Omega))^n) \subset L^q(\Theta)$, alors $g_\mu \to w$ dans $L^q(\Theta)$ faible.

Par conséquent

$$w = g = |u|^\rho u.$$

C'est à dire qu'on a l'estimation suivante :

$$|u_\mu|^\rho u_\mu \to |u|^\rho u \text{ dans } L^\infty(0,\tau;(L^p(\Omega))^n) \text{ faible étoile,} \tag{3.28}$$

On déduit de (3.21), (3.22), (3.23), (3.24) que :

$$\begin{cases} A(u_\mu, e_j) \to A(u, e_j) \text{ dans } L^\infty(0,\tau), \\ (grad\xi_\mu, e_j) \to (grad\xi, e_j) \text{ dans } L^2(0,\tau), \\ B(\xi_\mu, f_j) \to B(\xi, f_j) \text{ dans } L^2(0,\tau),. \\ (\frac{\partial}{\partial t}\xi_\mu, f_j) \to (\frac{\partial}{\partial t}\xi_\mu, f_j) \text{ dans } D'(0,\tau), \\ (\frac{\partial}{\partial t} divu_\mu, f_j) \to (\frac{\partial}{\partial t} divu, f_j) \text{ dans } D'(0,\tau), \\ (|u_m(t)|^\rho u_m(t), e_j) \to (|u(t)|^\rho u(t), e_j) \text{ dans } L^\infty(0,\tau). \end{cases}$$

Par passage à la limite pour les termes des équations (3.11), (3.12) dans $D'(0,\tau)$ on aura

$$\begin{cases} A(u(t), e_j) + (|u(t)|^\varrho u(t), e_j) + \gamma(grad\xi(t), e_j) \ = (p, e_j), \quad j = 1, 2.....m, \\ (\xi'(t), f_j) + \alpha\eta(divu'(t), f_j) + B(\xi(t), f_j) = (q, f_j), \quad j = 1, 2.....m, \end{cases}$$

Par conséquent

$$\begin{cases} A(u, v) + (|u|^\varrho u, e_j) + \gamma(grad\xi, v) \ = (p, v), \forall v \in (H_0^1(\Omega) \cap L^{\rho+2}(\Omega))^n, \\ (\xi', \ y) + \alpha\eta(divu'(t), y) + B(\xi, y) = (q, y), \forall y \in H_0^1(\Omega) \ . \end{cases}$$

D'où l'existence de la solution.

3.2.2 Unicité de la solution

Théorème

Sous les hypothèses du théorème1, on a la propriété suivante : Si le problème1 admet deux solutions $(\ u_1, \xi_1)$ et (u, ξ_2) telles que :

$$\frac{\partial(u_1(x,t), u_2(x,t))}{\partial t} = 0$$

(c'est à dire $u_1(x,t) - u_2(x,t)$ est indépendant de t), alors $u_1 = u_2$ et $\xi_1 = \xi_2$

Démonstration

Supposons que le problème (1) admet deux solutions $u_1(x,t), u_2(x,t)$

.

Posons $U = u_1 - u_2$, $\xi = \xi_1 - \xi_2$.

$$A(U,v) + (|u_1|^\rho u_1 - |u_2|^\rho u_2, v) + \gamma(grad\xi, v) = 0,$$

$$(\xi',\ y) + B(\xi, y) = 0,$$

Pour $v = U$ et $u = \xi$, on a :

$$A(U,U) + (|u_1|^\rho u_1 - |u_2|^\rho u_2, U) + \gamma(grad\xi, U) = 0,$$

$$(\xi',\ \xi) + B(\xi, \xi) = 0,$$

On obtient le système :

$$\|U\|^2 + (|u_1|^\rho u_1 - |u_2|^\rho u_2, U) + \gamma(grad\xi, U) = 0, \tag{3.29}$$

$$\|\xi\|^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}|\xi|^2 = 0. \tag{3.30}$$

Après intégration, l'équation (3.30) donne $\xi = 0$, par suite (3.29) devient :

$$\|U\|^2 + (|u_1|^\rho u_1 - |u_2|^\rho u_2, U) = 0. \tag{3.31}$$

Remarquons que :

$$\begin{aligned}(|u_1|^\rho u_1 - |u_2|^\rho u_2, U) &= (|u_1|^\rho u_1, u_1) + (|u_2|^\rho u_2, u_2) \\ &\quad -(|u_1|^\rho u_1, u_2) - (|u_2|^\rho u_2, u_1) \\ &= \int_\Omega \left[|u_1|^{\rho+2} + |u_2|^{\rho+2} - (|u_1|^\rho + |u_2|^\rho) u_1.u_2\right] dx.\end{aligned}$$

Or

$$u_1.u_2 \leq |u_1.u_2| \leq |u_1| \,.\, |u_2|\,,$$

Alors

$$\begin{aligned}|u_1|^{\rho+2} + |u_2|^{\rho+2} - (|u_1|^\rho + |u_2|^\rho) u_1.u_2 &\geq |u_1|^{\rho+2} + |u_2|^{\rho+2} \\ &\quad -(|u_1|^\rho + |u_2|^\rho) \,|u_1| \,.\, |u_2|\,.\end{aligned}$$

Mais le second terme de cette inégalité satisfait

$$|u_1|^{\rho+2} + |u_2|^{\rho+2} - (|u_1|^\rho + |u_2|^\rho) \,|u_1| \,.\, |u_2| = (|u_1|^{\rho+1} - |u_2|^{\rho+1})(|u_1| - |u_2|).$$

En effet, on sait que la fonction $x \in R_+ \longmapsto x^{\rho+1}$, est croissante, donc

$\forall x, y \in R_+ \qquad (x^{\rho+1} - y^{\rho+1})(x - y) \geq 0,$

$$\begin{aligned}&(|u_1|^{\rho+1} - |u_2|^{\rho+1})(|u_1| - |u_2|) \geq 0, \\ &|u_1|^{\rho+2} + |u_2|^{\rho+2} - (|u_1|^\rho + |u_2|^\rho) u_1.u_2 \geq 0.\end{aligned}$$

On en déduit l'inégalité

$$\int_\Omega \left[|u_1|^{\rho+2} + |u_2|^{\rho+2} - (|u_1|^\rho + |u_2|^\rho) u_1.u_2\right] \geq 0.$$

C'est à dire

$$(|u_1|^\rho u_1 - |u_2|^\rho u_2, U) \geq 0.$$

Donc $U = 0,$ (ceci en utilisant l'équation (3.31)). Par conséquent,

$U = u_1 - u_2$ et $\xi = \xi_1 - \xi_2$

Chapitre 4

Le Système de Lamé Perturbé et généralisé

Introduction : Dans cette partie, on étudie l'existence, l'unicité de la solution d'un problème aux limites gouverné par le système de Lamé généralisé et perturbé.

4.1 Notations et position du problème

Ω désigne un ouvert borné et connexe de $\mathbb{R}^n (n = 2, 3)$ de frontière Γ variété lipchitzienne de dimension $n - 1$. On considère un opérateur généralisant théoriquement le système de Lamé, introduit par B. MEROUANI dans [15] , soit

$$-M_p u + F(u),$$

Tel que

$$M_p u = \mu \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + (\lambda + \mu) \nabla (div u),$$

et $F(u)$ est une perturbation avec p, q deux réels tels que : $p \in [2, \infty[$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, λ et μ sont les coefficients de Lamé vérifiant : $\lambda + \mu \geq 0$, $\mu > 0$, et η désigne le vecteur unitaire normal extérieur à Γ_2. Pour

$p = 2$, on retrouve le système de Lamé classique.

Etant donné f et $\varphi = (\varphi_{ij})_{1<i,j<n}$, tels que :

$$\varphi_{ij} = \varphi_{ji} \in C^{0,1}\left(\overline{\Omega}\right), \varphi_{ij}(x) > 0, \forall x \in \Gamma_2.$$

on étudiera l'existence, l'unicité et de la solution $u = u(x),\ x \in \Omega$ du problème

$$(P_3) \begin{cases} -L_p u + F(u) = f, \text{ dans } \Omega & (a) \\ u = 0, \text{ sur } \Gamma_1 & (b) \\ \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\eta_i + \varphi(x)\, u = 0, \text{ sur } \Gamma_2 & (c) \end{cases} \tag{4.1}$$

On considère les cas où :

$$F(u) = 0,\ F(u) = |u|^{\rho} u, \text{ avec } \rho = p - 2 > 0,\ F(u) = u^3,\ F(u) = a(x,t).$$

Et on distingue plusieurs cas :

- Lorsque $\Gamma_2 = \phi$ sur Γ_2, le problème (P_3) devient un problème de Dirichlet.
- Lorsque $\Gamma_1 = \phi$, et $\varphi = 0$ sur Γ_2, le problème (P_3) devient un problème de Neumann.
- Lorsque $\Gamma_1,\ \Gamma_2 \neq \phi$, et $\varphi = 0$ sur Γ_2, le problème (P_3) devient un problème mêlé Dirichlet-Neumann.
- Lorsque $\Gamma_1,\ \Gamma_2 \neq \phi$, et $\varphi \neq 0$ sur Γ_2, le problème (P_3) devient un problème mêlé Dirichlet $(4.1a)$.

Dans ce qui suit, on développera le cas où $F(u) = |u|^{p-2} u$.

Le résultat principal que l'on démontre est le théorème suivant :

Théorème

On suppose que :

$$f \in \left(W^{-1,q}(\Omega)\right)^n.$$

Alors il existe une unique solution $u = u(x)$ du problème (P_3) telle que :

$$u \in \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n.$$

Démonstration

Première étape : Formulation variationnelle

On suppose

$$V = \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n, \text{ munit de la norme}$$

$$\|u\|_V = \left(\sum_{i,j=1}^{n} \left\| \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

En multipliant l'équation $(4.1.a)$ par une fonction teste $v \in \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n$ et on intègre sur Ω, on obtient :

$$-\mu \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) v \, dx - (\lambda + \mu) \int_\Omega \nabla (div u) \, v \, dx + \int_\Omega |u|^{p-2} uv \, dx = \int_\Omega fv \, dx \tag{4.2}$$

D'après la formule de Green :

$$
\begin{aligned}
(4.2) \quad \Leftrightarrow \quad & \mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx - \mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Gamma_1} \gamma_0 \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \gamma_0 (v) \ \eta_i \, d\sigma \\
& - \mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Gamma_2} \gamma_0 \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \gamma_0 (v) \ \eta_i \, d\sigma \\
& + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} (divu) \nabla v \, dx - (\lambda + \mu) \int_{\Gamma_1} \gamma_0 (divu) \gamma_0 (v) \ \eta_i \, d\sigma \\
& - (\lambda + \mu) \int_{\Gamma_2} \gamma_0 (divu) \gamma_0 (v) \ \eta_i \, d\sigma + \int_{\Omega} |u|^{p-2} uv \, dx \\
= \quad & \int_{\Omega} fv \, dx
\end{aligned}
$$

Avec l'utilisation de $(4.1.b)$, $(4.1.c)$ on trouve :

$$
\begin{aligned}
& \mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} (divu) (divv) \, dx \\
& + \int_{\Omega} |u|^{p-2} uv dx + \mu \int_{\Gamma_2} \varphi (x) u \gamma_0 (v) \ \eta_i d\sigma - (\lambda + \mu) \int_{\Gamma_2} \gamma_0 (divu) \gamma_0 (v) \ \eta_i d\sigma \\
= \quad & \int_{\Omega} fv dx
\end{aligned}
$$

On pose :

$$
a_p (u, v) = \mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} (divu) (divv) \ dx
$$

a_p est une forme bilinéaire continue de $\left(W_0^{1,p} (\Omega)\right)^n \times \left(W_0^{1,p} (\Omega)\right)^n \to \mathbb{R}$, et comme pour tout $u \in \left(W_0^{1,p} (\Omega)\right)^n$ l'application $:\left(W_0^{1,p} (\Omega)\right)^n \to \mathbb{R}$, $v \to a_p (u, v)$ est une forme linéaire continue, d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique élément A_P de

$(W^{-1,q}(\Omega))^n$ telle que :

$$a_p(u,v) = (A_P(u), v),\ \forall v \in \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n.$$

Vérifiant :

$$A_P = -\mu \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial .}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial .}{\partial x_i}\right) - (\lambda+\mu)\nabla(div.)$$

$$\begin{aligned}
a_p(u,v) &= \mu \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx + (\lambda+\mu)\int_\Omega (divu)(divv)\, dx \\
&= \mu \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx + (\lambda+\mu)\int_\Omega (divu)\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\, dx \\
&= \mu \sum_{i=1}^{n} \left\langle \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right\rangle + (\lambda+\mu)\sum_{j=1}^{n}\left\langle (divu), \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right\rangle \\
&= \left\langle -\mu \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right), v\right\rangle - (\lambda+\mu)\sum_{j=1}^{n}\left\langle \frac{\partial}{\partial x_j}(divu), v_j\right\rangle \\
&= \left\langle -\mu \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right), v\right\rangle - (\lambda+\mu)\left\langle \nabla(divu), v\right\rangle \\
\Rightarrow\ A_P(u) &= -\mu \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - (\lambda+\mu)\nabla(divu),
\end{aligned}$$

et que l'on note $-L_p u$.

4.2 Formulation variationnelle

Proposition 1 *Le problème* (P_3) *et équivalent au problème variation-*

nelle (P_v) *suivant :*

$$(P_v)\begin{cases} \text{trouver } u \in \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n \text{ telle que :} \\ \mu\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx + (\lambda+\mu)\int_\Omega (divu)(divv)\,dx + \int_\Omega |u|^{p-2}uv\,dx \\ = \int_\Omega fv\,dx - \mu\int_{\Gamma_2}\varphi(x)\,u\gamma_0(v)\,\eta_i\,d\sigma + (\lambda+\mu)\int_{\Gamma_2}\gamma_0(divu)\,\gamma_0(v)\,\eta_i\,d\sigma \quad (a) \\ u = 0, \text{ sur } \Gamma_1 \quad (b) \\ \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\eta_i + \varphi(x)\,u = 0, \text{ sur } \Gamma_2 \quad (c) \end{cases} \tag{4.3}$$

Démonstration

On a $u = 0$, sur $\Gamma_1 \Leftrightarrow u \in \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n$.

D'après la formule de Green :

$$\begin{aligned} & \mu\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx + (\lambda+\mu)\int_\Omega (divu)(divv)\,dx + \int_\Omega |u|^{p-2}uv\,dx \\ = & -\mu\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)v\,dx + \mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_1}\gamma_0\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\gamma_0(v)\,\eta_i\,d\sigma \\ & +\mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_2}\gamma_0\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\gamma_0(v)\,\eta_i\,d\sigma \\ & -(\lambda+\mu)\int_\Omega \nabla(divu)\,v\,dx + (\lambda+\mu)\int_{\Gamma_1}\gamma_0(divu)\,\gamma_0(v)\,\eta_i\,d\sigma \\ & +(\lambda+\mu)\int_{\Gamma_2}\gamma_0(divu)\,\gamma_0(v)\,\eta_i\,d\sigma + \int_\Omega |u|^{p-2}uv\,dx \\ = & \int_\Omega fv\,dx - \mu\int_{\Gamma_2}\varphi(x)\,u\gamma_0(v)\,\eta_i\,d\sigma + (\lambda+\mu)\int_{\Gamma_2}\gamma_0(divu)\,\gamma_0(v)\,\eta_i\,d\sigma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &\in \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n \Leftrightarrow -\mu\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)vdx-(\lambda+\mu)\int_\Omega \nabla(divu)\,vdx \\ &\quad +\int_\Omega |u|^{p-2}uvdx+\mu\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_2}\gamma_0\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\gamma_0(v)\ \eta_i d\sigma \\ &= \int_\Omega fvdx-\mu\int_{\Gamma_2}\varphi(x)\,utr(v)\,\eta_i d\sigma. \end{aligned}$$

Et comme $(D(\Omega))^n$ et dense dans $\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n$, on obtient :

$$\begin{cases} -\mu\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)-(\lambda+\mu)\nabla(divu)+|u|^{p-2}u=f \text{ sur } \Omega \\ \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\eta_i+\varphi(x)\,u=0 \text{ sur } \Gamma_2 \end{cases}$$

L'application définie sur $(L^p(\Omega))^n$ par : $u\to|u|^{p-2}u$ est à valeurs dans $(L^q(\Omega))^n$. De plus elle est continue car :

Si $u\in(L^p(\Omega))^n : |u|^{p-2}u$ est mesurable et :

$$\int_\Omega \left||u|^{p-2}u\right|^q dx=\int_\Omega |u|^p dx<\infty\Rightarrow|u|^{p-2}u\in(L^q(\Omega))^n,$$

et on déduit que

$$\begin{aligned} \forall u &\in \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n,\ \forall i,\ 1\le i\le n \\ \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i} &\in (L^q(\Omega))^n. \end{aligned}$$

On pose :

$$a_1(u,v)=\int_\Omega |u|^{p-2}uvdx$$

qui est une forme bilinéaire continue de $(L^p(\Omega))^n\times(L^p(\Omega))^n\to$

$\mathbb{R}$, l'application $v \to a_1(u,v)$ est une forme linéaire continue de $(L^p(\Omega))^n \to \mathbb{R}$.

Donc d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe une unique représentation notée A_1 de $(L^q(\Omega))^n$ telle que :

$$a_1(u,v) = (A_1(u), v), \ \forall v \in (L^p(\Omega))^n .$$

Proposition

L'opérateur $-L_p : (W_0^{1,p}(\Omega))^n \to (W^{-1,q}(\Omega))^n$ est borné, hémicontinu, monotone et coercive.

- $-L_p$ est borné :

$$\|-L_p(u)\|_{V'} = \sup_{v \in V,\ \|v\| \leq 1} |a_p(u,v)|$$

$$\begin{aligned} |a_p(u,v)| &\leq \mu \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-1} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right| dx + (\lambda+\mu) \int_\Omega |(divu)|\,|(divv)|\,dx \\ &\leq \mu \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-1} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right| dx + (\lambda+\mu) \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right| \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right| dx \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy Schwarz on a :

$$\begin{aligned}
|a_p(u,v)| &\leq \mu\left(\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q(p-1)}dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad +(\lambda+\mu)\left(\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right|^{q}dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \mu\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^{p-1}_{(L^q(\Omega))^n}\left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_{(L^p(\Omega))^n}+ \\
&\quad +(\lambda+\mu)\left(\sum_{j=1}^{n}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^{q}_{(L^q(\Omega))^n}\right)^{\frac{1}{q}}\times\left(\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial v}{\partial x_j}\right\|^{p}_{(L^p(\Omega))^n}\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

et comme Ω est de mesure finie alors $1\leq p<q\Rightarrow L^q(\Omega)\subset L^p(\Omega)$ avec injection continue, et

$\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n\subset\left(W^{1,p}(\Omega)\right)^n\subset\left(L^p(\Omega)\right)^n$, alors :

$$\begin{aligned}
|a_p(u,v)| &\leq \mu C_1\|u\|^{p-1}_{\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n}\|v\|_{\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n}+C_2(\lambda+\mu)n^{\frac{1}{q}+\frac{1}{p}}\|u\|_{\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n}\|v\|_{\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n} \\
&\leq \left(\mu C_1\|u\|^{p-1}_{\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n}+C_2(\lambda+\mu)n\|u\|_{\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n}\right)\|v\|_{\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n} \\
&\leq \max\left(\mu C_1\|u\|^{p-1}_{\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n},C_2(\lambda+\mu)n\|u\|_{\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n}\right)\|v\|_{\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n}
\end{aligned}$$

En effet $(\lambda+\mu)\geq 0,\ \mu>0$ et $p>2$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\sup_{v\in V,\ \|v\|\leq 1}|a_p(u,v)| &\leq C_2(\lambda+\mu)n\|u\|_{\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n}\sup_{v\in V,\ \|v\|\leq 1}\|v\|_{\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n} \\
&\leq C_3\|u\|_{\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n}
\end{aligned}$$

où :

$$C_3=(\lambda+\mu)n$$

Ce qui montre que $-L_p$ est borné.

- **$-L_p$ est monotone :**

  $-L_p$ est monotone si : $\forall u, v \in V,\ (-L_p u + L_p v, u - v) \geq 0$

$$\begin{aligned}(-L_p u + L_p v, u - v) &= \mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} - \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx \\ &\quad + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} (divu - divv)\, div\,(u - v)\, dx \\ &= \mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} - \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx \\ &\quad + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} (div\,(u - v))^2\, dx\end{aligned}$$

Car div est un opérateur linéaire continu.

L'application $x \to |x|^p$ de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, étant convexe, c'est-à-dire : la dérivée est une fonction croissante, alors :

$$\left(|x|^{p-2} x - |y|^{p-2} y \right) (x - y) \geq 0,$$

et par suite :

$$\left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} - \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \geq 0$$

Donc :

$$\mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} - \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} (div\,(u - v))^2\, dx \geq 0$$

Ce qui montre que $-L_p$ est monotone.

- $-L_p$ **est hémicontinu :**

$-L_p$ est hémicontinu si : $\forall u, v, w \in V$, la fonction : $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ \beta \to (-L_p(u+\beta v), w)$ est continue.

Soit β_n une suite convergente de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

On pose :

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \mu \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + \beta_n \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \right|^{p-2} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + \beta_n \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \right) \frac{\partial w(x)}{\partial x_i} \\ &\quad + (\lambda+\mu) \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u_i(x)}{\partial x_i} + \beta_n \frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i} \right) \frac{\partial w_j(x)}{\partial x_j} \end{aligned}$$

qui converge vers une fonction $f(x)$ telle que :

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \mu \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + \beta_n \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \right|^{p-2} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + \beta_n \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \right) \frac{\partial w(x)}{\partial x_i} \\ &\quad + (\lambda+\mu) \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u_i(x)}{\partial x_i} + \beta_n \frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i} \right) \frac{\partial w_j(x)}{\partial x_j} \end{aligned}$$

$$|f_n(x)| \leq \mu \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + \beta_n \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \right|^{p-1} \left| \frac{\partial w(x)}{\partial x_i} \right| + (\lambda+\mu) \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_i} + \beta_n \frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i} \right| \left| \frac{\partial w_j(x)}{\partial x_j} \right|$$

D'après l'inégalité :

$$ab \leq \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right),\ \forall a, b \geq 0$$

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &\leq \frac{\mu}{2} \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + \beta_n \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \right|^{2(p-1)} + \frac{\mu}{2} \left| \frac{\partial w(x)}{\partial x_i} \right|^2 + \\ &\quad \frac{(\lambda+\mu)}{2} \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_i} + \beta_n \frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i} \right|^2 + \frac{(\lambda+\mu)}{2} \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial w_j(x)}{\partial x_j} \right|^2 \end{aligned}$$

Et d'après l'inégalité :

$$\forall f,g\in L^{p}(\Omega):\left\|f+g\right\|_{L^{p}(\Omega)}^{p}\leq 2^{p}\left(\left\|f\right\|_{L^{p}(\Omega)}^{p}+\left\|g\right\|_{L^{p}(\Omega)}^{p}\right)$$

$$\begin{aligned}\left|f_{n}(x)\right| &\leq \mu 2^{2p-3}\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_{i}}\right|^{2(p-1)}+\mu 2^{2p-3}\left|\beta_{n}\right|^{2(p-1)}\left|\frac{\partial v(x)}{\partial x_{i}}\right|^{2(p-1)}+\frac{\mu}{2}\left|\frac{\partial w(x)}{\partial x_{i}}\right|^{2}\\ &+2(\lambda+\mu)\sum_{j=1}^{n}\left[\left|\frac{\partial u_{i}(x)}{\partial x_{i}}\right|^{2}+\left|\beta_{n}\right|^{2}\left|\frac{\partial v_{i}(x)}{\partial x_{i}}\right|^{2}\right]+\frac{(\lambda+\mu)}{2}\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial w_{j}(x)}{\partial x_{j}}\right|^{2}\end{aligned}$$

Mais β_{n} est convergente dans $\mathbb{R}\Rightarrow\exists m\in\mathbb{R}:\left|\beta_{n}\right|\leq m.$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\ \left|f_{n}(x)\right| &\leq \mu 2^{2p-3}\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_{i}}\right|^{2(p-1)}+\mu 2^{2p-3}m_{1}\left|\frac{\partial v(x)}{\partial x_{i}}\right|^{2(p-1)}+\frac{\mu}{2}\left|\frac{\partial w(x)}{\partial x_{i}}\right|^{2}\\ &+2(\lambda+\mu)\sum_{j=1}^{n}\left[\left|\frac{\partial u_{i}(x)}{\partial x_{i}}\right|^{2}+m_{2}\left|\frac{\partial v_{i}(x)}{\partial x_{i}}\right|^{2}\right]+\frac{(\lambda+\mu)}{2}\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial w_{j}(x)}{\partial x_{j}}\right|^{2}\end{aligned}$$

On définit la fonction $g(x)$ telle que :

$$\begin{aligned}g(x) &= \mu 2^{2p-3}\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_{i}}\right|^{2(p-1)}+\mu 2^{2p-3}m_{1}\left|\frac{\partial v(x)}{\partial x_{i}}\right|^{2(p-1)}+\frac{\mu}{2}\left|\frac{\partial w(x)}{\partial x_{i}}\right|^{2}\\ &+\sum_{j=1}^{n}\left[2(\lambda+\mu)\left|\frac{\partial u_{i}(x)}{\partial x_{i}}\right|^{2}+2(\lambda+\mu)m_{2}\left|\frac{\partial v_{i}(x)}{\partial x_{i}}\right|^{2}+\frac{(\lambda+\mu)}{2}\left|\frac{\partial w_{j}(x)}{\partial x_{j}}\right|^{2}\right]\end{aligned}$$

est dans $L^{1}(\Omega)$.

Alors on a : $f_{n}(x)\rightarrow f(x)$ p.p sur Ω, et $\left|f_{n}(x)\right|\leq g(x)$ p.p sur Ω.

D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on en déduit que :

$$f\in L^{1}(\Omega)\ \text{ et }\ \left\|f_{n}-f\right\|_{L^{1}(\Omega)}\rightarrow 0,\ \text{ et par conséquent :}$$

$$\left(-L_{p}(u+\beta_{n}v),w\right)\rightarrow\left(-L_{p}(u+\beta v),w\right)$$

Ce qui montre que $-L_{p}$ est hémicontinu.

Proposition

L'opérateur A_1 est borné, hémicontinu, monotone.

- A_1 **est borné :**

En effet

$$\|A_1(u)\|_{(L^q(\Omega))^n} = \sup_{v\in(L^p(\Omega))^n,\ \|v\|\leq 1} |a_1(u,v)|$$

$$\begin{aligned}
|a_1(u,v)| &\leq \int_\Omega \left||u|^{p-1}v\right| dx \leq \left(\int_\Omega |u|^{(p-1)q}\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega |v|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|u\|^{p-1}_{(L^q(\Omega))^n} \|v\|_{(L^p(\Omega))^n} \\
&\leq C\|u\|^{p-1}_{(L^P(\Omega))^n} \|v\|_{(L^p(\Omega))^n} \\
&\Rightarrow \sup_{v\in(L^p(\Omega))^n,\ \|v\|\leq 1} |a_1(u,v)| \leq C\|u\|^{p-1}_{(L^P(\Omega))^n} \sup_{v\in(L^p(\Omega))^n,\ \|v\|\leq 1} \|v\|_{(L^p(\Omega))^n} \\
&\Rightarrow \|A_1(u)\|_{(L^q(\Omega))^n} \leq C\|u\|^{p-1}_{(L^P(\Omega))^n}
\end{aligned}$$

Ce qui montre que A_1 est borné.

- A_1 **est monotone :**

De la même manière $(A_1(u) - A_1(v), u-v) = \int_\Omega \left(|u|^{p-1}u - |u|^{p-1}v\right)(u-v)\,dx \geq 0$, et par conséquent A_1 est monotone.

- A_1 **est hémicontinu :**

De la même façons :
Soit γ_n une suite convergente de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose :

$$f_n(x) = |u(x) + \gamma_n v(x)|^{p-2}(u(x) + \gamma_n v(x))\,w(x)$$

qui converge vers une fonction $f(x)$ telle que :

$$f(x) = |u(x) + \gamma v(x)|^{p-2} (u(x) + \gamma v(x)) w(x)$$

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= |u(x) + \gamma_n v(x)|^{p-1} |w(x)| \\ &\leq \frac{1}{2} |u(x) + \gamma_n v(x)|^{2(p-1)} + \frac{1}{2} |w(x)|^2 \\ &\leq 2^{2p-3} |u(x)|^{2(p-1)} + 2^{2p-3} |\gamma_n|^{2(p-1)} |v(x)|^{2(p-1)} + \frac{1}{2} |w(x)|^2 \end{aligned}$$

γ_n converge dans $\mathbb{R} \Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{R} : |\gamma_n| \leq n_1$.
Donc

$$|f_n(x)| \leq 2^{2p-3} |u(x)|^{2(p-1)} + 2^{2p-3} n_2 |v(x)|^{2(p-1)} + \frac{1}{2} |w(x)|^2$$

On définit la fonction $h(x)$ par :

$$h(x) = 2^{2p-3} |u(x)|^{2(p-1)} + 2^{2p-3} n_2 |v(x)|^{2(p-1)} + \frac{1}{2} |w(x)|^2$$

qui est dans $L^1(\Omega)$.
Alors on a : $f_n(x) \to f(x)$ p.p sur Ω, et $|f_n(x)| \leq h(x)$ p.p sur Ω.
D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on en déduit que :

$$f \in L^1(\Omega) \text{ et } \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \to 0,$$

et par conséquent :

$$(-L_p(u + \gamma_n v), w) \to (-L_p(u + \gamma v), w)$$

Ce qui montre que A_1 est hémicontinu.On peut simplifier de

la manière suivante :

$$a(u,v) = a_p(u,v) + a_1(u,v) \Rightarrow A(u) = -L_p(u) + A_1(u)$$

Proposition

A est coercive c'est à dire il existe $\alpha > 0$ telle que :

$$(A(u), u) \geq \alpha \|u\|^p_{\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n}.$$

Proof

Tout d'abord on a :

$$(A_1(u), u) \geq \alpha_1 \|u\|^p_{(L^P(\Omega))^n}.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} |(-L_p(u), u)| &= \left| \mu \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx + (\lambda + \mu) \int_\Omega (divu)^2 dx \right| \\ &\leq \mu \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^p_{L^p(\Omega)} + (\lambda + \mu) \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right| \right)^2 dx \end{aligned}$$

Et comme

$$\int_\Omega u^p dx \leq \left(\int_\Omega u dx \right)^p$$

$$\begin{aligned}|(-L_p(u),u)| &\leq \mu\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^p_{(L^p(\Omega))^n}+(\lambda+\mu)\left(\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right|dx\right)^2\\ &\leq \mu\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^p_{(L^p(\Omega))^n}+(\lambda+\mu)\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^2_{(L^1(\Omega))^n}\end{aligned}$$

Et puisque Ω est de mesure finie, et $p>2>1\Rightarrow (L^p(\Omega))^n\subset (L^1(\Omega))^n$avec injection continue. D'où :

$$\begin{aligned}|(-L_p(u),u)| &\leq \mu C_1\|u\|^p_{\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n}+C_2(\lambda+\mu)\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^2_{(L^p(\Omega))^n}\\ &\leq \max\left(\mu C_1\|u\|^p_{\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n},C_3(\lambda+\mu)\|u\|^2_{\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n}\right)\\ &\leq C_3(\lambda+\mu)\|u\|^p_{\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n}\end{aligned}$$

Car $(\lambda+\mu)\geq 0,\ \lambda>0,\ p>2$.Donc

$$-C_3(\lambda+\mu)\|u\|^p_{\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n}\leq(-L_p(u),u)\leq C_3(\lambda+\mu)\|u\|^p_{\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n}$$

par conséquent

$$\begin{aligned}(-L_p(u),u)+(A_1(u),u) &\geq \alpha_1\|u\|^p_{(L^P(\Omega))^n}-C_3(\lambda+\mu)\|u\|^p_{\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n}\\ &\geq (\alpha_1-C_3(\lambda+\mu))\|u\|^p_{\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n}\\ &\geq \alpha\|u\|^p_{\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n}\end{aligned}$$

où

$$\alpha=\alpha_1-C_3(\lambda+\mu)$$

Pour $\alpha>0$ il suffit de prendre $\alpha_1>C_3(\lambda+\mu)$. Ce qui montre que A est coercive.

4.2.1 Existence de la solution

On va utiliser la méthode de Faedo-Galerkin pour construire une suite des solutions du problème (P) dans un sens fini (des solutions approchées), puis on établit des estimations a priori sur ses solutions et enfin, on passe à la limite pour obtenir une solution globale du problème (P). Ce passage à la limite appelle aux résultats de compacité.

$$V = \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n,$$

muni de la norme :

$$\|u\|_V = \left(\sum_{i,j=1}^{n} \left\|\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\Omega)}^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

qui est un espace de Banach séparable (c'est-à-dire : admet un sous ensemble dense)

Car en effet :

V s'identifier par l'application : $v \to \left\{v, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x_1}}, ..., \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}_n}\right\}$ un sous-espace vectoriel fermé de $(L^p(\Omega))^n \times (L^p(\Omega))^n ... (L^p(\Omega))^n$ qui est séparable.

De sorte que l'on protégera un sous ensemble dense sur le sous espace.

Donc il existe une base $(w_j)_j$ telle que :

$$\begin{cases} (w_j)_j \subset \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n \\ w_1, w_2, ..., w_n \text{ Sont linéairement indépendant et les combinaisons linéaires} \\ \text{finies des } w_j \text{ sont denses dans } \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n \end{cases}$$

On prend pour les w_j les fonctions propres :

$$\langle w_j, v\rangle = \lambda_j \langle w_j, v\rangle$$

On considère maintenant l'espace $W = [w_1, w_2, ..., w_n]$, et on définit les solutions approchées u_m du problème (p_v) par :

$$a_p(u_m, w_j) + a_1(u_m, w_j) = \int_\Omega f w_j dx - \mu \int_{\Gamma_2} \varphi(x)\, u_m \gamma_0(w_j)\ \eta_i d\sigma$$

$$(\lambda + \mu) \int_{\Gamma_2} \gamma_0(div u_m)\, \gamma_0(w_j)\ \eta_i d\sigma \tag{4.4}$$

$$u_m(x) \in W \Rightarrow \exists g_{jm} \in W \text{ telle que : } u_m(x) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm} w_j,\ 1 \le j \le m$$

Alors si l'on injecte cette dernière forme dans (4.4) on obtient pour tout m un système des problèmes en fonction des coefficients g_{jm} qui admettent des solutions d'après les résultats généraux sur les équations différentielles ordinaires, on est assuré alors de l'existence des solutions approchées $u_m(x) \in W$.

Pour aboutir aux estimations a priori, on va passer par quelques étapes de multiplications et d'intégrations.

Multipliant les deux membres de (4.4) par g_{jm} et sommant en $j = 1, m$ on obtient :

$$a_p(u_m, u_m) + a_1(u_m, u_m) = \int_\Omega f u_m dx - \mu \int_{\Gamma_2} \varphi(x)\, u_m \gamma_0(u_m)\ \eta_i d\sigma + (\lambda + \mu) \int_{\Gamma_2} \gamma_0(div u_m)\, \gamma_0(u_m)\ \eta_i d\sigma$$

Estimation a priori :

D'après la coercivité de A on a :

$$a(u_m, u_m) \geq \alpha \|u_m\|^p_{\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n}, \ \forall u_m \in \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n$$

D'autre part :

$$\varphi \in C^{0,1}\left(\overline{\Omega}\right) \Rightarrow \varphi \text{ est borné} \Rightarrow \exists M / \ \|\varphi(x)\| \leq M$$

et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f u_m dx &\leq \left(\int_\Omega |f|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega |u_m|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|f\|_{(L^q(\Omega))^n} \|u_m\|_{(L^p(\Omega))^n} \\
&\leq C \|f\|_{(L^p(\Omega))^n} \|u_m\|_{(L^p(\Omega))^n} \\
&\leq cte \|u_m\|_{\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n}
\end{aligned}$$

$$u \in \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n \subset \left(W^{1,p}(\Omega)\right)^n \Rightarrow \gamma_0(u) \in \left(W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma_2)\right)^n \subset \left(L^p(\Gamma_2)\right)^n$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\mu \int_{\Gamma_2} \varphi(x) u_m \gamma_0(u_m) \eta_i d\sigma &\leq \mu \left(\int_{\Gamma_2} |\varphi(x) u_m|^q d\sigma\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\Gamma_2} |\gamma_0(u_m)|^p d\sigma\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \mu \left(\int_{\Gamma_2} |\varphi(x)|^q d\sigma\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\Gamma_2} |u_m|^{qp} d\sigma\right)^{\frac{1}{qp}} \left(\int_{\Gamma_2} |\gamma_0(u_m)|^p d\sigma\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \mu M \|\gamma_0(u_m)\|_{(L^p(\Gamma_2))^n} \|u_m\|_{(L^p(\Gamma_2))^n} \\
&\leq \mu M_1 \|u_m\|^2_{\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\lambda+\mu)\int_{\Gamma_2}\gamma_0\left(div u_m\right)\gamma_0\left(u_m\right)\eta_i d\sigma &\leq (\lambda+\mu)\left(\int_{\Gamma_2}\left|\gamma_0\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u_{mi}}{\partial x_i}\right)\right|^q d\sigma\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{\Gamma_2}\left|\gamma_0\left(u_m\right)\right|^p d\sigma\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq (\lambda+\mu)\left\|\gamma_0\left(u_m\right)\right\|_{(L^p(\Gamma_2))^n}\left\|\gamma_0\left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right)\right\|_{(L^q(\Gamma_2))^n} \\
&\leq (\lambda+\mu)\, C\left\|u_m\right\|_{\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n}\left\|u_m\right\|_{\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n} \\
&\leq (\lambda+\mu)\, M_2\left\|u_m\right\|^2_{\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n}
\end{aligned}$$

Finalement on obtient :

$$\begin{aligned}
\alpha\left\|u_m\right\|^p_{\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n} &\leq cte\left\|u_m\right\|_{\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n}+\mu M_1\left\|u_m\right\|^2_{\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n}+(\lambda+\mu)\, C\left\|u_m\right\|^2_{\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n} \\
&\leq \max\left(cte\left\|u_m\right\|_{\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n}, \mu M_1\left\|u_m\right\|^2_{\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n}, (\lambda+\mu)\, C\left\|u_m\right\|^2_{\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n}\right) \\
&\leq (\lambda+\mu)\, C\left\|u_m\right\|^2_{\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n} \\
&\Rightarrow \left\|u_m\right\|^p_V \leq \frac{(\lambda+\mu)\, C}{\alpha}\left\|u_m\right\|^2_{\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n} \\
&\Rightarrow \left\|u_m\right\| \leq \left(\frac{(\lambda+\mu)\, C}{\alpha}\right)^{\frac{1}{p-1}} = cte.
\end{aligned}$$

Ce qui montre que u_m demeure dans un borné de $\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n$, et puisque A est borné de $\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n \to \left(W^{-1,q}(\Omega)\right)^n$, alors $A\left(u_m\right)$ demeure dans un borné de $\left(W^{-1,q}(\Omega)\right)^n$.

On peut extraire une sous suite, que l'on note u_μ, telle que :

$$\begin{cases} u_\mu \to u \text{ dans de } \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n \text{ faible} \\ A\left(u_\mu\right) \to \chi \text{ dans } \left(W^{-1,q}(\Omega)\right)^n \text{ faible} \end{cases}$$

Montrons que $\chi = A\left(u\right)$.

D'après la formulation variationnelle :

$$(A(u_\mu), u_\mu) = \int_\Omega f u_\mu dx - \mu \int_{\Gamma_2} \varphi(x)\, u_\mu \gamma_0(u_\mu)\ \eta_i d\sigma + (\lambda+\mu) \int_{\Gamma_2} \gamma_0(divu_\mu)\, \gamma_0(u_\mu)\ \eta_i d\sigma,$$

et de la monotonie de A : $(A(u_\mu) - A(v), u_\mu - v) \geq 0$.

$$\begin{aligned}(A(u_\mu), u_\mu) &= (A(u_\mu) - A(v), u_\mu - v) + (A(v), u_\mu - v) + (A(u_\mu), v) \\ &\Rightarrow (A(u_\mu) - A(v), u_\mu - v) = (A(u_\mu), u_\mu) - (A(v), u_\mu - v) - (A(u_\mu), v)\end{aligned}$$

$u_\mu \to u$ faiblement dans $\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n \Rightarrow \|u(x)\| \leq \liminf \|u_\mu(x)\|$.
On pose :

$$\begin{aligned}\chi_\mu &= (A(u_\mu) - A(v), u_\mu - v) = \int_\Omega f u_\mu dx - \mu \int_{\Gamma_2} \varphi(x)\, u_\mu \gamma_0(u_\mu)\ \eta_i d\sigma + \\ &\quad (\lambda+\mu) \int_{\Gamma_2} \gamma_0(divu_\mu)\, \gamma_0(u_\mu)\ \eta_i d\sigma - (A(v), u_\mu - v) - (A(u_\mu), v)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\limsup \chi_\mu &\leq \int_\Omega f u dx - \mu \int_{\Gamma_2} \varphi(x)\, u \gamma_0(u)\ \eta_i d\sigma + (\lambda+\mu) \int_{\Gamma_2} \gamma_0(divu)\, \gamma_0(u)\ \eta_i d\sigma \\ &\quad - (A(v), u - v) - (\chi, v)\end{aligned}$$

et comme

$$(\chi, u) = \int_\Omega f u dx - \mu \int_{\Gamma_2} \varphi(x)\, u \gamma_0(u)\ \eta_i d\sigma + (\lambda+\mu) \int_{\Gamma_2} \gamma_0(divu)\, \gamma_0(u)\ \eta_i d\sigma$$

$$0 \leq \limsup \chi_\mu \leq (\chi, u) - (A(v), u - v) - (\chi, v) = (\chi - A(v), u - v) \tag{4.5}$$

On utilise l'émicontinuité de A pour montrer que $\chi = A(u)$.

On prend :

$$v = u - \lambda w,\ \forall w \in \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n$$

$$\begin{aligned}(\chi - A(v), u - v) &= (\chi - A(u - \lambda w), u - u + \lambda w) \\ &= \lambda(\chi - A(u - \lambda w), w) \geq 0 \\ &\Rightarrow (\chi - A(u - \lambda w), w) \geq 0\end{aligned}$$

Faisons tendre λ vers $0 \Rightarrow (\chi - A(u), w) \geq 0 \Rightarrow \chi = A(u)$.

4.2.2 Unicité de la solution

Soit u_1, u_2 deux solutions du problème (P), alors :

$$u_1 - u_2 \in \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n$$

Et donc $u_1 - u_2$ vérifie :

$$\begin{cases} A(u_1) - A(u_2) = 0, \text{ dans } \Omega \\ u_1 - u_2 = 0, \text{ sur } \Gamma_1 \\ \sum_{i=1}^{n} \left[\left| \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} - \left| \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \right] \eta_i + \varphi(x)(u_1 - u_2) = 0, \text{ sur } \Gamma_2 \end{cases} \tag{4.6}$$

En multipliant l'équation (4.5) par $u_1 - u_2$ et en intègre sur Ω on retrouve :

$$\begin{aligned} &\mu \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left(\left| \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} - \left| \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_i} - \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \right) dx \\ &+ (\lambda + \mu) \int_\Omega (div(u_1 - u_2))^2 dx + \int_\Omega \left(|u_1|^{p-1} u_1 - |u_2|^{p-1} u_2 \right)(u_1 - u_2) dx \\ = \ &0 \end{aligned}$$

Le faite que $u_1 \neq u_2$ et l'opérateur A est monotone et

$$\mu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left(\left| \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} - \left| \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_i} - \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \right) dx = \|u_1 - u_2\|^p_{\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n}$$

Donc

$$\|u_1 - u_2\|^p_{\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n} = 0$$

$$\begin{cases} \left(\left| \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} - \left| \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_i} - \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \right) \geq 0 \text{ et} \\ \left(div\,(u_1 - u_2) \right)^2 = 0 \text{ et} \\ \left(|u_1|^{p-1} u_1 - |u_2|^{p-1} u_2 \right) (u_1 - u_2) \geq 0. \end{cases}$$

$$\left(div\,(u_1 - u_2) \right)^2 = 0 \Rightarrow div\,(u_1 - u_2) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} (u_1 - u_2) = 0,$$

et puisque l'opérateur $\frac{\partial}{\partial x_i}$ est linéaire continu donc $u_1 - u_2 = 0$. D'où l'unicité de la solution.

Bibliographie

[1] R.A. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, 1976.

[2] H. Brezis, Equations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels
en dualité, Ann, Ins. Fourier, 18, (1968), 115-175.

[3] H. Brezis, Opérateurs maximaux monotone et semi groupes de contractions
dans les espaces de Hilbert, North Holland, Amsterdam (1973).

[4] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, théorie et applications. Masson 1983.

[5] S. D. Chartterji, Cours d'Analyse, vols 3. Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 1998.

[6] M. Dilmi, H. Benseridi and B. Merouani, Nonlinear and Oblique Boundary Value problems for the Lamé Equations, Applied Mathematical Sciences, Vol. 1, (2007), 2517-2528.

[7] P.G. Ciarlet, Elasticité tridimentionnelle. Masson. (1986).

[8] G. Duvaut, J.L. Lions, Les inéquations en mécanique et en physique. Dunod. Paris. (1972).

[9] J. N. Flavin & S. Rionero, Qualitative Estimates for Partial Differential Equations CRC Press 1996

[10] P. Grisvard, Singularities in boundary value problems. Springer-verlag, Masson (Paris), 1992.

[11] J. L. Lions-Magenes, Problèmes aux limites non homogènes et applications, volume1. Dunod Paris,1968.

[12] J.L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod. (1969).

[13] Luc Tartar, Topics in non lineair analysis. Université de Paris-Sud, Publications Mathematiques d'Orsay,novembre 1978.

[14] B. Merouani, Solutions singulières du système de l'élasticité dans un polygone pour différentesconditions aux limites, Maghreb Maths. Rev., Vol. 5, Nos 1 & 2, (1996), pp.95-112.

[15] B. Merouani, M. Meflah, A. Boulaouad, The Generalized and perturbed Lamé system, Applied Mathematical Sciences, Vol. 2, 2008, no. 49,2425-2430.

[16] F. Messelmi, B. Merouani, M. Meflah, Nonlinear thermoelasticity problem, Analele Universitatii Oradea, Fasc. Matematica,Tom XV (2008), 207-217.

[17] V. Mikhailov, Equations aux dérivées partielles. Traduction française Editions Mir, 1980.

[18] J. Necas, les méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques, Masson, Paris.

[19] V. Patron, P. Perline, Méthode de la théorie mathématique de l'élasticité, Editions Mir, Moscou, 1981.

[20] P.A. Raviart & J. M Thomas, Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Masson 1983.

[21] L. Schwartz, Théorie des Distributions, Hermann, Paris 1979.

[22] Roger Temam, Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. Springer 1997

[23] Taylor M.E, Partial differential non linear equations III Springer. (1996).

[24] Marie-Thérèse, Distributions Espaces de Sobolev Applications. Lacroix-Sonrier, ellipses édition marketin S.A, Paris,1998.

[25] K. Yosida, Functional Analysis, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1968.