

**RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ DE SÉTIF**

**THÈSE**

**Présentée à la Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques  
pour l'obtention du diplôme de**

**DOCTORAT EN SCIENCES  
Option : Mathématiques Appliquées**

**Par**

**Rebiha ZEGHDANE**

**THÈME**

**Dynamique de structures soumises à des sollicitations  
aléatoires : analyse mathématique et résolution numérique  
des équations différentielles stochastiques.**

**Soutenu le : 12 /04/2014**

**Devant le jury**

- Prof. A. ZIADI, Université de Sétif 1, Président
- Prof. L. ABBAOUI, Université de Sétif 1, Rapporteur
- Prof. B. MEZERDI, Université de Biskra, Examineur
- Prof. Z. MOHDEB, Université de Constantine 1, Examineur
- Prof. H. FELLAG, Université de Tizi Ouzou, Examineur
- Prof. Y. BENCHEIKH-KHEMMAL, Université de Sétif 1, Examineur

## Remerciements

Je tiens tout particulièrement à remercier L.Abbaoui, professeur à l'université de Sétif 1, qui a accepté d'encadrer ma thèse. Je lui suis reconnaissant de l'aide qu'il m'a apporté sur de multiples aspects théoriques à travers de nombreuses discussions, qui m'ont permises d'avancer sur le plan méthodologique. De plus, la grande disponibilité et la patience qu'il m'a accordé tout au long de ce travail ont conduit à un encadrement idéal. J'ai également très apprécié son aide à la rédaction de ce manuscrit et à la préparation de la soutenance. Je lui adresse encore une fois mes remerciements les plus sincères.

Ma profonde gratitude et mon grand respect s'adresse également au Professeur A.Ziadi, Professeur à l'université de Sétif 1 pour m'avoir l'honneur de présider le jury de cette thèse. Je lui exprime ici toute ma gratitude.

Je tiens aussi à remercier vivement, les professeurs, Prof B. Mezerdi de l'université de Biskra, Prof Z. Mohdeb de l'université de Constantine, Prof. H. Fellag de l'université de Tizi Ouzou et Prof. Y. Bencheikh-Khemmal de l'université de Sétif 1, qui ont accepté de faire partie du jury et d'avoir consacré de leur temps pour examiner mon travail, et pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail, qu'ils trouvent aussi l'expression de ma profonde reconnaissance.

Je tiens également à exprimer ma reconnaissance au Prof A.Tocino de l'université de Salamanca, Espagne, qui a accepté de faire partie de mes travaux, ce qui m'honore d'autant plus qu'une grande partie de ma thèse est basée sur ses travaux. Il m'a guidé pendant la réalisation de cette thèse, et m'a ouvert une nouvelle voie de recherche en analyse stochastique et a toute mon admiration pour ses idées toujours impressionnantes d'originalité et de technicité. Je continuerai sans aucun doute à travailler avec lui et j'espère vivement avoir un jour l'occasion de collaborer directement avec lui.

Je tiens enfin à remercier les professeurs T.Tian, K.Burrage et P.Burrage de l'université Queensland, Australie de leurs aides. Même si nous n'avons pas eu l'occasion de travailler ensemble, leurs travaux et leurs idées sont reliées à certaines parties de ma thèse, ce qui a pour effet de me flatter encore plus qu'ils aient acceptés de m'écouter et me répondre à tous mes questions.

Je souhaite remercier vivement S.Addoune, maître de conférence à l'université de Bordj BouArréridj. Le fait de travailler dans le même département m'a permis de profiter de son expérience et de ses conseils et ne jamais choisir la solution de facilité. Je suis également admiratif de sa rigueur mathématique. Je l'en remercie vivement. Mes remerciements vont également à tous mes collègues du département de mathématiques et informatique de université de Bordj BouArréridj.

Un grand merci à mes parents pour leurs soutien et encouragements et toute ma famille pour le soutien qu'il m'ont toujours apporté. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde affection.

# Table des matières

|                                                                                                |           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Introduction</b>                                                                            | <b>9</b>  |
| <b>1 Equations différentielles et approximations stochastiques</b>                             | <b>12</b> |
| 1.1 Equations différentielles stochastiques . . . . .                                          | 12        |
| 1.1.1 Introduction . . . . .                                                                   | 12        |
| 1.1.2 Existence et unicité des solutions . . . . .                                             | 14        |
| 1.1.3 Quelques solutions explicites des EDS . . . . .                                          | 16        |
| 1.2 Approximations stochastiques . . . . .                                                     | 22        |
| 1.2.1 Développement stochastique de Taylor . . . . .                                           | 22        |
| 1.2.2 Méthodes explicites de Taylor au sens de la convergence forte                            | 25        |
| 1.2.3 Méthodes semi-implicites de Taylor au sens de la convergence forte . . . . .             | 38        |
| <b>2 Méthodes semi-implicites de Taylor Itô d'ordre supérieur</b>                              | <b>53</b> |
| 2.1 Introduction . . . . .                                                                     | 53        |
| 2.2 Approximations faibles . . . . .                                                           | 54        |
| 2.3 Approximations faibles de Taylor . . . . .                                                 | 55        |
| 2.4 Méthodes semi-implicites de Taylor . . . . .                                               | 58        |
| 2.4.1 Méthode semi-implicite de Taylor d'ordre 3.0 . . . . .                                   | 59        |
| 2.4.2 Méthodes semi-implicites de Taylor d'ordre 4.0 au sens faible .                          | 64        |
| 2.5 Analyse de la MS-stabilité des méthodes semi-implicites d'ordre 3.0 .                      | 68        |
| 2.6 Implémentation numérique . . . . .                                                         | 74        |
| 2.6.1 Expérimentations numériques confirmant l'ordre faible . . . .                            | 74        |
| 2.6.2 Implémentation numérique et stabilité des méthodes semi-implicites d'ordre 3.0 . . . . . | 76        |
| 2.7 Conclusion . . . . .                                                                       | 78        |

|          |                                                                                                               |            |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>3</b> | <b>Analyse de la stabilité en moyenne quadratique de la méthode semi-implicite d'ordre 2.0 au sens faible</b> | <b>80</b>  |
| 3.1      | Préliminaire . . . . .                                                                                        | 81         |
| 3.1.1    | Notions de stabilité . . . . .                                                                                | 81         |
| 3.1.2    | MS-stabilité linéaire des schémas numériques pour la solution d'une EDS . . . . .                             | 82         |
| 3.1.3    | Méthodes semi-implicites de Taylor d'ordre 2.0 . . . . .                                                      | 84         |
| 3.2      | MS-stabilité des méthodes semi-implicites de Taylor d'ordre 2.0 . . .                                         | 84         |
| 3.3      | Expérimentations numériques . . . . .                                                                         | 93         |
| 3.4      | Conclusions . . . . .                                                                                         | 94         |
|          | <b>Conclusion générale</b>                                                                                    | <b>99</b>  |
|          | <b>Bibliographie</b>                                                                                          | <b>102</b> |

# Liste des tableaux

|     |                                                                                                                                                                                                |    |
|-----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1 | Erreur obtenue par la méthode d'Euler explicite. . . . .                                                                                                                                       | 27 |
| 1.2 | Première comparaison entre les méthodes d'Euler et de Milstein . . .                                                                                                                           | 30 |
| 1.3 | Deuxième comparaison . . . . .                                                                                                                                                                 | 30 |
| 1.4 | Troisième comparaison . . . . .                                                                                                                                                                | 30 |
| 1.5 | Quatrième comparaison . . . . .                                                                                                                                                                | 30 |
| 1.6 | Cinquième comparaison . . . . .                                                                                                                                                                | 32 |
| 1.7 | Sixième comparaison . . . . .                                                                                                                                                                  | 32 |
| 1.8 | Septième comparaison . . . . .                                                                                                                                                                 | 32 |
| 1.9 | Huitième comparaison . . . . .                                                                                                                                                                 | 32 |
| 2.1 | Les valeurs de $E X_t ^2$ en utilisant les méthodes d'ordre 3.0, $M_{(0,0,0)}$ ,<br>$M_{(1,\frac{3}{4},1)}$ , $M_{(1,1,\frac{1}{2})}$ et $M_{(1,1,1)}$ pour l' exemple test (i). . . . .       | 78 |
| 2.2 | Les valeurs de $E X_t ^2$ en utilisant les méthodes d'ordre 3.0, $M_{(0,0,0)}$ ,<br>$M_{(1,\frac{3}{4},1)}$ , $M_{(1,1,\frac{1}{2})}$ et $M_{(1,1,1)}$ pour l' exemple test (ii). . . . .      | 78 |
| 2.3 | Les valeurs $E \tilde{X}_t ^2$ en utilisant les méthodes d'ordre 3.0, $M_{(0,0,0)}$ , $M_{(1,\frac{3}{4},1)}$ ,<br>$M_{(1,1,\frac{1}{2})}$ et $M_{(1,1,1)}$ pour l'exemple test (iii). . . . . | 79 |

# Table des figures

|     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |    |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1 | Convergence forte : Exacte, Euler et Milstein : $\lambda = -5, \mu = 1, \Delta = 2^{-4}$ .                                                                                                                                                                                                                                    | 29 |
| 1.2 | Convergence forte : Exacte, Euler et Milstein : $\lambda = 2, \mu = 1, \Delta = 2^{-4}$                                                                                                                                                                                                                                       | 31 |
| 2.1 | Comparaison entre la région $\mathcal{R}$ de la MS-stabilité ( l'aire quadrillée ) et les régions de la MS stabilité des méthodes semi-implicites de Taylor (l'aire ombrée ) avec $\theta = \beta = \gamma = 0$ ( à gauche ) et $\theta = \beta = \gamma = 1$ (à droite ) .                                                   | 74 |
| 2.2 | Les régions de la MS stabilité des méthodes semi implicites (l'aire ombrée ) pour $\theta = \beta = 1$ et $\gamma = 0, 1/5, 2/5, 1/2, 3/5, 4/5$ comparées avec la région de l'équation teste (l'aire quadrillée) .                                                                                                            | 75 |
| 2.3 | Les régions de la MS-stabilité des méthodes semi implicites (l'aire ombrée ) pour $\theta = 1, \gamma = 1$ et $\beta = 0, 1/5, 2/5, 1/2, 3/4, 4/5$ comparées avec la région de l'équation test (l'aire quadrillée) .                                                                                                          | 76 |
| 2.4 | Comparaison entre les ordre faibles de convergence des méthodes : Euler ( $\blacklozenge$ ), Taylor 2.0 ( $\blacktriangle$ ), $M_{(0,0,0)}$ ( $\blacktriangledown$ ), $M_{(1,1,1)}$ ( $\bullet$ ) et $M_{(0,0,0,0)}$ ( $\blacksquare$ ) en utilisant le problème (a) (partie à gauche) et le problème (b) (partie à droite) . | 77 |
| 3.1 | Les sous ensembles $A^*, B^*, C^*$ (à gauche) et $A, B, C$ (à droite) dans le plan $(\theta, \beta)$ .                                                                                                                                                                                                                        | 89 |
| 3.2 | Comparaison entre la région de stabilité des méthodes $(0, \beta)$ (l'aire ombrée) pour $\beta = \frac{1}{2}, 0, 1$ et la région de stabilité du problème (l'aire quadrillée) .                                                                                                                                               | 91 |
| 3.3 | Comparaison entre $S_{(\frac{1}{2}, \beta)}$ , $\beta \in [0, 1]$ (l'aire ombrée ) et $S_{SDE}$ (triangle quadrillé) .                                                                                                                                                                                                        | 93 |
| 3.4 | Comparaison entre $S_{(\frac{11}{20}, \beta)}$ , pour $\beta = 0, \frac{1}{2}, 1$ (les régions ombrées ) et $S_{SDE}$ (triangle quadrillé) .                                                                                                                                                                                  | 94 |

|     |                                                                                                                                                                                                                            |    |
|-----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.5 | Comparaison entre $S_{(\frac{3}{4},\beta)}$ , pour $\beta = 0, \frac{1}{2}, 1$ (les régions ombrées ) et $S_{SDE}$ (triangle quadrillé) . . . . .                                                                          | 95 |
| 3.6 | Comparaison entre $S_{(1,\beta)}$ , pour $\beta = 0, \frac{1}{2}, 1$ (les régions ombrées ) et $S_{SDE}$ (triangle quadrillé) . . . . .                                                                                    | 96 |
| 3.7 | Valeurs de $\log E X_t ^2$ (à gauche ) et MS-erreur (à droite) en fonction de $t$ en utilisant différentes méthodes $(\theta, \beta)$ avec $\Delta = \frac{1}{100}$ pour résoudre $dX_t = -100X_tdt + 10X_tdW_t$ . . . . . | 96 |
| 3.8 | Valeurs de $\log E X_t ^2$ (à gauche ) et MS-erreur (à droite) en fonction de $t$ en utilisant différentes méthodes $(\theta, \beta)$ avec $\Delta = 1$ pour résoudre $dX_t = -4X_tdt + 2X_tdW_t$ . . . . .                | 97 |
| 3.9 | Valeurs de $\log E X_t ^2$ obtenues en utilisant la méthode semi-implicite $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ de Taylor d'ordre 2.0 avec différent pas $\Delta$ de discrétisation . . .                                          | 98 |

# Introduction

Depuis les observations de Robert Brown sur le déplacement des grains de pollen en solution et les travaux d'Einstein et de Smoluchowski qui ont proposé une description de ce phénomène, on s'est rendu compte que de nombreuses situations pouvaient être décrites en faisant intervenir des “forces aléatoires” : la dynamique des particules colloïdales en solution est bien décrite par une dynamique Brownienne, la cinétique d'une réaction chimique peut être décrite de manière plus réaliste en incorporant des fluctuations liées à l'environnement par l'addition d'un bruit aléatoire. Les évolutions des marchés financiers ont été depuis ces trente dernières années l'objet d'une intense recherche par des modélisations faisant intervenir des forces aléatoires. Les équations différentielles stochastiques [4, 34, 27, 30, 28] servent de modèle mathématique à des systèmes faisant intervenir deux types de forces, l'une déterministe et l'autre aléatoire. Par exemple, le mouvement d'une particule microscopique dans un fluide ou un gaz peut être décrit par une équation de la forme  $mx'' = F_{ext} + F_{stoch}$ , ici  $F_{ext}$  décrit une force extérieure déterministe, par exemple la gravité ou une force électromagnétique.  $F_{stoch}$  décrit l'effet des collisions erratiques des molécules du fluide avec la particule microscopique. Le mouvement des molécules n'étant pas connu en détail, nous voulons modéliser le second terme par une force aléatoire ou un bruit. La manière de modéliser le bruit dépend évidemment de la nature du fluide et des échelles de temps et le temps de décorrélation des molécules est négligeable par rapport à l'échelle de temps caractéristique de la particule. On parle alors de bruit blanc. Celui-ci est modélisé mathématiquement par le mouvement Brownien ou processus de Wiener, qui peut lui-même être vu comme la limite du continu d'une marche aléatoire. L'existence d'un modèle mathématique permettra de pouvoir quantifier numériquement certains phénomènes et de pouvoir prédire certains comportements : par exemple montrer qu'une certaine population va s'éteindre et calculer l'espérance du temps d'extinction. Évidemment, on peut toujours (et il le faut !) se poser la question de la justification du modèle. Une étape ultérieure, dans le cas où l'on peut obtenir des données observées pour le phénomène qui nous intéresse est de construire des tests statistiques qui permettront, ou non, de valider le modèle. Les équations

différentielles servent à décrire des phénomènes physiques très variés. Cependant dans de nombreuses situations les phénomènes observés ne suivent que grossièrement les trajectoires des équations qui semblent devoir leur correspondre. Les causes possibles d'un tel comportement peuvent être variées : erreur de modélisation, fluctuation au cours du temps des paramètres de l'équation, présence de bruit d'observation. Dans ces situations, les approches probabilistes trouvent naturellement leur place et il peut alors être intéressant d'incorporer des termes aléatoires dans les équations différentielles afin de prendre en compte les incertitudes précédentes. Cependant, l'introduction de ces termes aléatoires conduit à une intégration des équations qui ne correspond pas, en général, à une adaptation immédiate de la théorie classique des équations différentielles.

Le concept d'équation différentielle stochastique généralise celui d'équation différentielle ordinaire aux processus stochastiques. La formalisation théorique de ce problème a posé problème aux mathématiciens et il a fallu attendre les années 1940 et les travaux du mathématicien japonais Itô Kiyoshi pour la définition de l'intégrale stochastique. Il s'agit d'étendre la notion d'intégrale de Lebesgue aux processus stochastiques relativement un mouvement brownien. On construira cette intégrale et on donnera sens à l'expression  $\int_s^t f(s, \omega) dB_s$ , où  $f(t, \omega)$  est un processus stochastique muni de propriétés de régularité suffisantes. A partir de la théorie de l'intégration, on construit la théorie des EDS. Les EDS sont utilisées dans différentes branches des sciences pour modéliser des processus familiers, perturbés. Une équation typique est la suivante :  $dX_t = \alpha X_t dt + \beta X_t dB_t(\omega)$  ce qui n'est qu'une notation pour exprimer  $X_t = X_0 + \alpha \int_0^t X_s ds + \beta \int_0^t X_s dB_s$ . C'est l'équation de la croissance exponentielle d'une population à un taux  $\alpha$  dont le bruit (l'incertitude) est proportionnelle à la taille de la population. C'est également l'équation du modèle de Black-Scholes pour l'évaluation du prix  $X_t$  d'une option sous-jacente à une action de volatilité  $\beta$ , lorsque le taux d'intérêt est  $\alpha$ .

La théorie des équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR en abrégé) a connu un formidable développement à partir des années 1990. Ces équations sont apparues en 1973, dans un article de J.M. Bismut [6] qui concernait le contrôle stochastique optimal et la version probabiliste du principe du maximum de Pontryagin. Pourtant le premier résultat général concernant les EDSR ne date que de 1990 et est dû à E. Pardoux et S. Peng [36] pour avoir obtenu le premier résultat d'existence et d'unicité dans le cas où le terme déterministe de l'équation n'est pas linéaire. Depuis de nombreux travaux ont été effectués. La théorie n'a cessé de se développer en raison de ses relations étroites avec les mathématiques financières et les équations aux dérivées partielles. Nous pourrions aborder les équations rétrogrades à travers des problèmes de modélisation : le contrôle stochastique ou encore le problème du «

pricing » et des stratégies de couverture en finance. Le passage à l'étude numérique de ce type d'équations est indiscutable.

Cette étude s'inscrit dans le cadre d'un travail de recherche nécessaire dans le domaine des équations différentielles stochastiques (EDS) et plus particulièrement l'étude numérique des équations différentielles stochastiques.

L'objet de ce travail est d'utiliser des outils probabilistes pour évaluer des caractéristiques pertinentes du comportement dynamique des structures. Plus précisément, on s'intéresse à la classe des structures modélisées par des oscillateurs linéaires ou non à un degré de liberté excités par des bruits blancs gaussiens solutions des EDS. Puisque les expressions exactes des solutions analytiques ne sont pas connues en général, la présente étude a pour objectif essentiel d'analyser et de construire des approximations numériques, en étudiant leurs propriétés de convergence et de stabilité. La thèse est structurée en trois chapitres. Le premier chapitre est consacré à une étude introductive sur les équations et les approximations stochastiques. Ces approximations dites de Taylor-Itô sont considérées comme une généralisation de la formule de Taylor déterministe et à partir de cette formule on donne quelques schémas numériques explicites et semi-implicites au sens de la convergence forte et faible largement développés dans [28, 34]. Pour le cas implicite, c'est à dire le cas où les deux termes déterministe et stochastique sont implicites, des méthodes ont été obtenues par K.Burrage et T.Tian [45] jusqu'à l'ordre 1.5. D'autres techniques pour construire des méthodes stochastiques sont données dans les travaux [43, 37, 35, 18, 12, 16]. Pour le cas faible, il manque bien entendu des résultats concernant les méthodes totalement implicites. Des tests numériques de quelques approximations stochastiques sont abordés dans ce chapitre. La mise en oeuvre a permis de comparer les différentes approximations. Dans le deuxième chapitre, en se basant sur la formule de Taylor, on a développé une famille de méthodes semi-implicites d'ordre 3 dans le cas général et une famille de méthodes d'ordre 4 pour des équations avec un bruit additif dans le cas scalaire. Cette famille de méthodes comprend les méthodes obtenues par P.E.Kloeden et E.Platten [28]. Des simulations numériques ont été réalisées pour confirmer les résultats théoriques de convergence et de stabilité.

Une étude complète de la stabilité en moyenne quadratique, d'une famille dépendant de deux paramètres des méthodes semi-implicites d'ordre 2.0 pour la résolution des équations différentielles stochastiques fait l'objet du dernier chapitre. Des tests numériques ont été obtenus confirmant les résultats théoriques.

# Chapitre 1

## Equations différentielles et approximations stochastiques

### 1.1 Equations différentielles stochastiques

#### 1.1.1 Introduction

Les équations différentielles jouent un rôle très important dans les applications des mathématiques à la physique aux sciences de l'ingénieur. Cependant, les équations différentielles qui gouvernent les processus réels contiennent souvent certains éléments tels que les coefficients ou la partie non homogène qui caractérisent le futur du phénomène étudié et qui sont déterminés expérimentalement. A cause des erreurs dans les mesures et le hasard propre aux phénomènes, ces éléments ne peuvent être dans la plupart des cas, exprimés par une fonction bien déterminée  $f(t)$  qui doit être remplacée par une fonction aléatoire  $f(t, \omega)$ , où  $\omega$  est interprété comme un événement élémentaire lié au hasard. Les équations obtenues dans ce cas sont appelées des équations différentielles stochastiques (EDS). Il est donc évident que toute solution d'une EDS dépend du hasard et par conséquent, dans la plupart des cas, on ne peut espérer qu'obtenir des informations sur le comportement probabiliste des solutions.

En 1908, Langevin étudie le mouvement brownien d'une particule dans un fluide. Ce mouvement fût observé pour la première fois par le botaniste Ecossais Brown en 1827.

Langevin décrit le mouvement d'une telle particule par l'équation :

$$X'_t = -\alpha X_t + \sigma \zeta_t \quad (1.1)$$

où  $\alpha > 0$  et  $\sigma$  sont des constantes,  $X'_t$  représente la composante de la vitesse de la

particule suivant l'axe des  $x$ ,  $-\alpha X_t$  représente la force due à la friction dynamique avec le fluide, la constante  $\alpha$  est donnée par la loi de Stokes:  $\alpha = \frac{6\pi a\eta}{m}$  où  $a$  est le rayon de la particule,  $m$  sa masse et  $\eta$  la viscosité du fluide. La quantité  $\sigma\zeta_t$  représente la force exercée sur la particule par les chocs avec les molécules du fluide,  $\sigma\zeta_t$  varie donc très rapidement et peut être modélisé par le bruit blanc  $\zeta_t$  qui est tel que  $W_t = \int_0^t \zeta_s ds$ . Langevin fût donc le premier à considérer des équations du type :

$$\begin{cases} X'_t = a(t, X_t) + b(t, X_t)\zeta_t \\ X_{t_0} = C \end{cases}$$

Au début des années quarante, Itô développe la notion de l'intégrale stochastique et donne des conditions suffisantes pour l'existence de solutions pour l'équation (1.1). En posant dans l'équation (1.1.1),  $dW_t = \zeta_t dt$ , on obtient :

$$\begin{cases} X'_t = a(t, X_t) + b(t, X_t)dW_t \\ X_{t_0} = C \end{cases}$$

ou bien

$$X_t = C + \int_{t_0}^t a(s, X_s)ds + \int_{t_0}^t b(s, X_s)dW_s \quad (1.2)$$

La deuxième intégrale ne peut être interprétée comme une intégrale de Riemann Stieltjes car les réalisations du processus de Wiener ne sont pas à variations bornées. Pour résoudre ce problème, on définit l'intégrale stochastique de Itô et on entend par EDS au sens de Itô une équation de la forme (1.1). Il existe d'autres types d'intégrales qui sont l'intégrale de Stratonovich et l'intégrale backward (en avant). Une solution de cette équation est une fonction aléatoire vérifiant (1.2). Dans l'étude des EDS, on s'intéresse plus particulièrement aux questions suivantes

- Le dimensionnement d'une structure soumise à des actions dynamiques nécessite de connaître les sollicitations excitatrices et le comportement dynamique de la structure sous ces sollicitations.
- Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence et l'unicité de solutions pour l'équation (1.1).
- Pour quel type d'équations, les formes explicites de solutions sont obtenues.
- Sous quelles conditions, chaque solution est définie pour  $t > 0$  c'est à dire n'échappe pas à l'infini pour  $t$  fini ( n'explose pas ).
- Quelles sont les classes d'approximations discrètes numériques pour les EDS.
- L'étude numérique est basée sur le remplacement du problème continu par un problème discret. Deux grandes classes d'approximations sont proposées dans la littérature ( voir par exemple [28] et [34]). La première est celle des

approximations fortes basées sur la simulation directe des trajectoires de la solution. La seconde s'intéresse à l'approximation de certaines fonctionnelles de la solution, en particulier, l'espérance et l'espérance quadratique ( de second ordre).

Parfois, on peut déterminer explicitement la solution en fonction du processus de Wiener  $W_t$  ou bien calculer certaines caractéristiques probabilistes de la solution telles que l'espérance mathématique ou la densité des probabilités de transition.

### 1.1.2 Existence et unicité des solutions

**Théorème 1.1** *On considère l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}_t, P)$ . Soit l'équation différentielle stochastique*

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t \quad (1.3)$$

*avec la condition initiale  $X_{t_0} = c = x_0$ , où  $W_t$  est un processus de Wiener  $m$ -dimensionnel et  $c$  une variable aléatoire indépendante de  $W_t - W_{t_0}$ , pour  $t \geq t_0$ . Supposons que la fonction  $a(t, X_t)$  définie sur  $[t_0, T] \times \mathbb{R}^d$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  et la fonction  $b(t, x)$  définie sur  $[t_0, T] \times \mathbb{R}^d$  à valeurs dans l'ensemble des matrices  $d \times m$ , sont mesurables et vérifient les propriétés :*

1.  $\exists K_1 > 0$  tel que  $\forall t \in [t_0, T], \forall x \in \mathbb{R}^d, \forall y \in \mathbb{R}^d :$

$$|a(t, x) - a(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| \leq K_1 |x - y| \text{ (condition de Lipschitz)} \quad (1.4)$$

2.  $\exists K_2 > 0$  tel que  $\forall t \in [t_0, T], \forall x \in \mathbb{R}^d :$

$$|a(t, x)|^2 + |b(t, x)|^2 \leq K_2 (1 + |x|^2) \text{ (condition de restriction sur la croissance)}, \quad (1.5)$$

*alors l'équation différentielle stochastique (1.3) admet une solution unique  $X_t$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , continue presque sûrement et satisfaisant la condition initiale  $X_{t_0} = x_0$ .*

L'unicité est dans le sens que si  $X_t$  et  $Y_t$  sont deux solutions continues presque sûrement telles que  $X_{t_0} = Y_{t_0} = x_0$ , alors

$$P \left[ \sup_{t_0 \leq t \leq T} |X_t - Y_t| > 0 \right] = 0. \quad (1.6)$$

**Remarque 1.1** 1. La condition de Lipschitz garantit que  $a(t, x)$  et  $b(t, x)$  ne varient pas beaucoup relativement à un changement de  $x$  lui même. Ceci implique en particulier la continuité de  $a(t, \cdot)$  et  $b(t, \cdot)$   $\forall t \in [t_0, T]$ .

2. On peut remplacer la condition de Lipschitz globale par une condition locale :  $\forall N > 0, \exists K_N > 0$  tel que  $\forall t \in [t_0, T], \forall x, y \in \mathbb{R}^d, |x| < N, |y| < N$  :

$$|a(t, x) - a(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| \leq K_N |x - y|. \quad (1.7)$$

3. Pour que la condition de Lipschitz soit satisfaite, il suffit que  $a(t, x)$  et  $b(t, x)$  admettent des dérivées partielles  $a_{x_i}$  et  $b_{x_i}$  continues et bornées pour tout  $t \in [t_0, T]$ .

4. Dans le cas d'une équation différentielle stochastique autonome c'est à dire  $a(t, x) = a(x)$  et  $b(t, x) = b(x)$ , la condition de restriction sur la croissance est une conséquence de la condition de Lipschitz.

5. Sous les hypothèses du théorème d'existence et d'unicité, et si de plus les fonctions  $t \rightarrow a(t, x)$  et  $t \rightarrow b(t, x)$  sont continues en  $t$  alors la solution est un processus de diffusion de vecteur dérive  $a(t, x)$  et matrice de diffusion  $B(t, x) = b(t, x)^T b(t, x)$ .

6. Dans de nombreux cas, le processus solution d'une équation différentielle stochastique non linéaire est un processus de diffusion. Il est donc complètement défini par sa famille de probabilités de transition qui peut être construite explicitement en résolvant une équation linéaire dite de Fokker-Planck (EFP) associée à l'équation différentielle stochastique non linéaire.

7. Un problème important dans la pratique est la connaissance de la réponse stationnaire d'oscillateurs stochastiques soumis à des excitations externes aléatoires et éventuellement à des excitations paramétriques. Lorsque l'oscillateur est non linéaire, il n'existe pas à l'heure actuelle de méthodes générales qui soient effectivement constructives pour calculer la densité de probabilité de cette réponse stationnaire, mais il serait intéressant d'utiliser des méthodes numériques pour chercher une approximation de la solution de L'EFP.

**Théorème 1.2** Sous les conditions d'existence et d'unicité des solutions et si de plus la condition initiale  $X(t_0) = X_{t_0}$  vérifie :  $X_{t_0}$  est  $\mathcal{A}_{t_0}$  mesurable avec

$$E(|X_{t_0}|^2) < \infty, \quad (1.8)$$

alors l'équation différentielle stochastique (1.3) admet une solution  $X_t$  unique au sens fort dans l'intervalle  $[t_0, T]$  et telle que

$$\sup_{t_0 \leq t \leq T} E(|X_t|^2) < \infty. \quad (1.9)$$

### 1.1.3 Quelques solutions explicites des EDS

Dans cette partie, on donne une liste de certaines équations différentielles stochastiques dont les solutions générales explicites sont obtenues [28]. Ces équations sont très utilisées car elles peuvent être utilisées pour confirmer l'efficacité des méthodes numériques.

#### 1. Equations différentielles stochastiques linéaires : bruit additif

Une équation différentielle stochastique de type (1.3) est dite avec bruit additif si le coefficient de diffusion s'écrit sous la forme :  $b(t, x) \equiv b(t)$ .

##### – Equation homogène avec coefficient constant

Elle s'écrit sous la forme :

$$dX_t = -\alpha X_t dt + \sigma dW_t \quad (1.10)$$

La solution générale de l'équation (1.10) s'écrit sous la forme :

$$X_t = e^{-\alpha t} \left( X_0 + \sigma \int_0^t e^{\alpha s} dW_s \right) \quad (1.11)$$

##### – Equation non homogène avec coefficient constant

$$dX_t = (aX_t + b) dt + c dW_t \quad (1.12)$$

La solution générale s'écrit sous la forme :

$$X_t = e^{at} \left( X_0 + \frac{b}{a} (1 - e^{-at}) + c \int_0^t e^{-as} dW_s \right) \quad (1.13)$$

##### – Equation à coefficients variables

$$dX_t = (a(t)X_t + b(t)) dt + c(t) dW_t \quad (1.14)$$

La solution générale est donnée par :

$$X(t) = \Phi_{t,t_0} \left( X_{t_0} + \int_{t_0}^t \Phi_{s,t_0}^{-1} b(s) ds + \int_{t_0}^t \Phi_{s,t_0}^{-1} c(s) dW_s \right) \quad (1.15)$$

avec la solution fondamentale

$$\Phi_{t,t_0} = \exp \left( \int_{t_0}^t a(s) ds \right) \quad (1.16)$$

par exemple,

$$dX_t = \left( \frac{2}{1+t} X_t + b(1+t)^2 \right) dt + b(1+t)^2 dW_t \quad (1.17)$$

qui admet une solution fondamentale

$$\Phi_{t,t_0} = \left( \frac{1+t}{1+t_0} \right)^2 \quad (1.18)$$

et une solution générale

$$X_t = \left( \frac{1+t}{1+t_0} \right)^2 X_0 + b(1+t)^2 (W_t - W_{t_0} + t - t_0) \quad (1.19)$$

## 2. Équations différentielles stochastiques linéaires : bruit multiplicatif

### – Équation homogène avec coefficient constant

$$dX_t = aX_t dt + bX_t dW_t \quad (1.20)$$

dont la solution générale est donnée par :

$$X_t = X_0 \exp\left(\left(a - \frac{1}{2}b^2\right)t + bW_t\right). \quad (1.21)$$

Le premier exemple est donné par :

$$dX_t = \frac{1}{2}X_t dt + X_t dW_t \quad (1.22)$$

$$X_t = X_0 \exp(W_t) \quad (1.23)$$

Pour le deuxième exemple, on a :

$$dX_t = X_t dW_t \quad (1.24)$$

$$X_t = X_0 \exp\left(W_t - \frac{1}{2}t\right). \quad (1.25)$$

### – Equation non homogène avec coefficient constant

Cette équation s'écrit sous la forme :

$$dX_t = (aX_t + c) dt + (bX_t + d) dW_t \quad (1.26)$$

alors

$$X(t) = \Phi_t(X_0 + (c - bd) \int_0^t \Phi_s^{-1} ds + d \int_0^t \Phi_s^{-1} dW_s) \quad (1.27)$$

avec la solution fondamentale

$$\Phi_t = \exp((a - \frac{1}{2}b^2)t + bW_t). \quad (1.28)$$

– **Équation homogène à coefficients variables**

$$dX_t = a(t)X_t dt + b(t)X_t dW_t \quad (1.29)$$

La solution de cette équation est :

$$X_t = X_0 \exp\left(\int_0^t \left(a(s) - \frac{1}{2}b^2(s)\right) ds + \int_0^t b(s) dW_s\right) \quad (1.30)$$

– **Équation non homogène à coefficients variables**

$$dX_t = (a(t)X_t + c(t)) dt + (b(t)X_t + d(t)) dW_t \quad (1.31)$$

$$X(t) = \Phi_{t,t_0} \left( X_{t_0} + \int_{t_0}^t \Phi_{s,t_0}^{-1} (c(s) - b(s)d(s)) ds + \int_{t_0}^t \Phi_{s,t_0}^{-1} d(s) dW_s \right) \quad (1.32)$$

La solution fondamentale  $\Phi_{t,t_0}$  est donnée par :

$$\Phi_{t,t_0} = \exp\left(\int_{t_0}^t \left(a(s) - \frac{1}{2}b^2(s)\right) ds + \int_{t_0}^t b(s) dW_s\right) \quad (1.33)$$

### 3. **Équation différentielle stochastique réductible**

Par une substitution  $X_t = u(t, Y_t)$ , certaines équations différentielles stochastiques

$$dY_t = a(t, Y_t)dt + b(t, Y_t)dW_t \quad (1.34)$$

peuvent être réduit à une équation différentielle stochastique linéaire en  $X_t$

$$dX_t = (a_1(t)X_t + a_2(t)) dt + (b_1(t)X_t + b_2(t)) dW_t \quad (1.35)$$

### EDS réductible : Cas 1

– L'équation différentielle stochastique au sens de Itô suivante

$$dX_t = \frac{1}{2}b(X_t)b'(X_t)dt + b(X_t)dW_t \quad (1.36)$$

est équivalente à l'équation stochastique au sens de Stratonovich

$$dX_t = b(X_t) \circ dW_t \quad (1.37)$$

la solution générale est :

$$X_t = h^{-1}(W_t + h(X_0)) \quad (1.38)$$

où

$$y = h(x) = \int_0^x \frac{ds}{b(s)} \quad (1.39)$$

–

$$dX_t = \frac{1}{2}a(a-1)X_t^{1-2/a}dt + aX_t^{1-1/a}dW_t \quad (1.40)$$

$$X_t = (W_t + X_0^{1/a})^a \quad (1.41)$$

–

$$dX_t = \frac{1}{2}(\ln a)^2 X_t dt + (\ln a) X_t dW_t \quad (1.42)$$

$$X_t = X_0 \exp(W_t \ln a) \quad (1.43)$$

–

$$dX_t = -\frac{1}{2}(a)^2 X_t dt \pm a\sqrt{1-X_t^2}dW_t \quad (1.44)$$

$$X_t = \sin(aW_t + \arcsin X_0), \quad X_t = \cos(aW_t + \arccos X_0) \quad (1.45)$$

–

$$dX_t = -a^2 X_t(1-X_t^2)dt + a(1-X_t^2)dW_t \quad (1.46)$$

$$X_t = \tanh(aW_t + \arctan h X_0) \quad (1.47)$$

–

$$dX_t = \frac{1}{3}X_t^{1/3}dt + X_t^{2/3}dW_t \quad (1.48)$$

$$X_t = (X_0^{1/3} + \frac{1}{3}W_t)^3 \quad (1.49)$$

### EDS réductible : Cas 2

– Soit l'équation stochastique au sens de Itô

$$dX_t = \left( \alpha b(X_t) + \frac{1}{2} b(X_t) b'(X_t) \right) dt + b(X_t) dW_t \quad (1.50)$$

Cette équation est équivalente à l'équation au sens de Stratonovich

$$dX_t = \alpha b(X_t) dt + b(X_t) \circ dW_t \quad (1.51)$$

elle se réduit à l'équation linéaire

$$dY_t = \alpha dt + dW_t \quad (1.52)$$

Pour  $Y_t = h(X_t)$ , où  $y = h(x) = \int_0^x \frac{ds}{b(s)}$ , la solution générale est :

$$X_t = h^{-1}(\alpha t + W_t + h(X_0)) \quad (1.53)$$

–

$$dX_t = (1 + X_t)(1 + X_t^2)dt + (1 + X_t^2)dW_t \quad (1.54)$$

$$X_t = \tan(t + W_t + \arctan X_0) \quad (1.55)$$

–

$$dX_t = \left( \frac{1}{2} X_t + \sqrt{1 + X_t^2} \right) dt + \sqrt{1 + X_t^2} dW_t \quad (1.56)$$

$$X_t = \sinh(t + W_t + \operatorname{arcsinh} X_0) \quad (1.57)$$

–

$$dX_t = -(\alpha + \beta^2 X_t)(1 - X_t^2)dt + \beta (1 - X_t^2) dW_t \quad (1.58)$$

$$X_t = \frac{(1 + X_0) \exp(-2\alpha t + 2\beta W(t)) + X_0 - 1}{(1 + X_0) \exp(-2\alpha t + 2\beta W(t)) + 1 - X_0} \quad (1.59)$$

### EDS réductible : Cas 3

Soit l'équation stochastique au sens de Itô

$$dX_t = \left( \alpha b(X_t) h(X_t) + \frac{1}{2} b(X_t) b'(X_t) \right) dt + b(X_t) dW_t \quad (1.60)$$

où  $y = h(x) = \int_0^x \frac{ds}{b(s)}$ , l'équation (1.60) se réduit à l'équation de Langevin avec  $\sigma = 1$ . La solution générale est sous la forme :

$$X_t = h^{-1}(e^{\alpha t} h(X_0) + e^{\alpha t} \int_0^t e^{-\alpha s} dW_s) \quad (1.61)$$

Si

$$dX_t = -(\sin 2X_t + \frac{1}{4} \sin 4X_t)dt + \sqrt{2} \cos^2(X_t) dW_t \quad (1.62)$$

alors

$$X_t = \arctan \left( \exp(-t) \tan(X_0) + \sqrt{2} \exp(-t) \int_0^t e^s dW_s \right) \quad (1.63)$$

#### 4. Equation différentielle stochastique linéaire à deux dimensions

Soient  $W$  un processus de Wiener unidimensionnel et  $A$  et  $B$  deux matrices carrées telles que :

$$A = \begin{pmatrix} -a & a \\ a & -a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad (1.64)$$

où  $a$  et  $b$  sont des réelles. Soit l'équation

$$dX_t = AX_t dt + BX_t dW_t \quad (1.65)$$

Si  $A$  et  $B$  commutent, alors l'équation (1.65) admet la solution suivante :

$$X_t = \exp \left( \left( A - \frac{1}{2} B^2 \right) t + BW_t \right) X_0 \quad (1.66)$$

On note que la matrice  $\exp \left( \left( A - \frac{1}{2} B^2 \right) t + BW_t \right)$  peut être évaluée en diagonalisant la matrice  $\left( A - \frac{1}{2} B^2 \right) t + BW_t$  à chaque instant  $t \geq 0$ , dans ce cas, on obtient

$$X_t = P \begin{bmatrix} \exp(\rho^+(t)) & 0 \\ 0 & \exp(\rho^-(t)) \end{bmatrix} P^{-1} X_0 \quad (1.67)$$

où

$$\exp(\rho^\pm(t)) = \left( -a - \frac{1}{2} b^2 \pm a \right) t + bW_t \quad (1.68)$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = P^{-1} \quad (1.69)$$

## 5. Equation différentielle linéaire avec deux bruits

Soit l'équation

$$dX_t = aX_t dt + b^1 X_t dW_t^1 + b^2 X_t dW_t^2 \quad (1.70)$$

Cette équation admet comme solution

$$X_t = X_0 \exp \left( \left( a - \frac{1}{2} \left( (b^1)^2 + (b^2)^2 \right) \right) t + b^1 W_t^1 + b^2 W_t^2 \right) \quad (1.71)$$

## 1.2 Approximations stochastiques

### 1.2.1 Développement stochastique de Taylor

Dans cette partie, on s'intéresse au développement stochastique de Taylor, ce dernier est une généralisation de la formule déterministe de Taylor. Cette expression stochastique est appelée formule de Taylor-Itô puisque elle est basée essentiellement sur la formule de Itô. A partir de ce développement, plusieurs approximations d'ordre supérieur peuvent être obtenues.

#### Formule stochastique de Itô Taylor

Les formules de Taylor sont largement connues dans le cas déterministe. On utilise une terminologie facile pour présenter le cas stochastique. Au début, on considère l'équation différentielle ordinaire unidimensionnelle suivante :

$$\frac{d}{dt} X_t = a(X_t) \quad (1.72)$$

avec la condition initiale  $X(t_0) = X_{t_0}$ , pour  $t \in [t_0, T]$ ,  $t_0 \geq 0$ . On écrit l'équation (1.72) sous la forme

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(X_s) ds \quad (1.73)$$

Pour justifier la construction suivante, on suppose que la fonction  $a$  satisfait certaines propriétés de régularité. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continûment différentiable, alors on a

$$\frac{d}{dt} f(X_t) = a(X_t) \frac{\partial}{\partial x} f(X_t) \quad (1.74)$$

en utilisant l'opérateur  $L = a \frac{\partial}{\partial x}$ , on peut écrire l'équation (1.74) sous la forme intégrale

$$f(X_t) = f(X_{t_0}) + \int_{t_0}^t Lf(X_s) ds, \quad t \in [t_0, T] \quad (1.75)$$

Pour le cas particulier  $f(x) = x$ , on obtient  $Lf = a$ ,  $L^2f = La, \dots$ , et l'équation (1.75) devient

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(X_s) ds \quad (1.76)$$

on applique la relation (1.75) à la fonction  $f = a$ , on obtient

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t \left( a(X_{t_0}) + \int_{t_0}^s La(X_z) dz \right) ds = X_{t_0} + a(X_{t_0}) \int_{t_0}^t ds + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s La(X_z) dz ds \quad (1.77)$$

L'équation (1.77) représente la formule simple de Taylor de  $X_t$ . On peut appliquer successivement la relation (1.75) aux fonctions  $f = La$ ,  $f = L^2a, \dots, L^{r+1}a$ , on obtient la formule classique de Taylor

$$f(X_t) = f(X_{t_0}) + \sum_{l=1}^r \frac{(t-t_0)^l}{l!} L^l f(X_{t_0}) + \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^{s_2} L^{r+1} f(X_{s_1}) ds_1 \dots ds_{r+1}, \quad (1.78)$$

pour  $t \in [t_0, T]$ ,  $r = 1, 2, 3, \dots$ . Pour l'instant pour la construction des méthodes numériques, le but est d'obtenir une formule stochastique ayant les mêmes propriétés que dans le cas déterministe. Pour ce faire, il ya plusieurs possibilités l'une d'elles est basée sur l'application successive de la formule de Itô à l'équation différentielle stochastique. En effet, soit  $X_t$  la solution de l'équation autonome

$$X_t = X_0 + \int_{t_0}^t a(X_s) ds + \int_{t_0}^t b(X_s) dW_s \quad (1.79)$$

On suppose que  $a(X_s)$  et  $b(X_s)$  sont deux fonctions suffisamment régulières à valeurs réelles satisfaisant la condition de croissance bornée, alors pour toute fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fois continûment différentiable, la formule de Itô donne

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_{t_0}) + \int_{t_0}^t \left( a(X_s) \frac{\partial}{\partial x} f(X_s) + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2}{\partial^2 x} f(X_s) \right) ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t b(X_s) \frac{\partial}{\partial x} f(X_s) dW_s \\ &= f(X_{t_0}) + \int_{t_0}^t L^0 f(X_s) ds + \int_{t_0}^t L^1 f(X_s) dW_s \end{aligned} \quad (1.80)$$

pour tout  $t \in [t_0, T]$ , avec

$$L^0 = a \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2}{\partial^2 x}, \quad L^1 = b \frac{\partial}{\partial x}. \quad (1.81)$$

Pour  $f(x) = x$ , on a  $L^0 f = a$ ,  $L^1 f = b$ , dans ce cas, l'équation (1.80) se réduit à l'équation

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(X_s) ds + \int_{t_0}^t b(X_s) dW_s \quad (1.82)$$

On peut procéder de la même manière, en appliquant la formule de Itô respectivement aux fonctions  $f = a$  et  $f = b$ , on obtient

$$\begin{aligned} X_t &= X_{t_0} + \int_{t_0}^t \left( a(X_{t_0}) + \int_{t_0}^s L^0 a(X_z) dz + \int_{t_0}^s L^1 a(X_z) dW_z \right) ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t \left( b(X_{t_0}) + \int_{t_0}^s L^0 b(X_z) dz + \int_{t_0}^s L^1 b(X_z) dW_z \right) dW_s \\ &= X_{t_0} + a(X_{t_0}) \int_{t_0}^t ds + b(X_{t_0}) \int_{t_0}^t dW_s + R \end{aligned}$$

avec le reste

$$\begin{aligned} R &= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^0 a(X_z) dz ds + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^1 a(X_z) dW_z ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^0 b(X_z) dz dW_s + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^1 b(X_z) dW_z dW_s. \end{aligned}$$

De la même manière, on applique la formule de Itô à la fonction  $f = L^1 b$ , on obtient

$$X_t = X_{t_0} + a(X_{t_0}) \int_{t_0}^t ds + b(X_{t_0}) \int_{t_0}^t dW_s + L^1 b(X_{t_0}) \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s dW_z dW_s + \bar{R} \quad (1.83)$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^0 a(X_z) dz ds + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^1 a(X_z) dW_z ds + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^0 b(X_z) dz dW_s \\ &\quad + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \int_{t_0}^z L^0 L^1 b(X_u) du dW_z dW_s + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \int_{t_0}^z L^1 L^1 b(X_u) dW_u dW_z dW_s \end{aligned} \quad (1.84)$$

On remarque que cette formule simple de Itô Taylor dépend des intégrales

$$\int_{t_0}^t ds, \quad \int_{t_0}^t dW_s, \quad \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s dW_z dW_s \quad (1.85)$$

et le reste de développement dépend aussi des intégrales multiples de Itô.

### 1.2.2 Méthodes explicites de Taylor au sens de la convergence forte

Dans cette partie, on va utiliser la formule stochastique de Taylor pour établir des méthodes numériques itératives stochastiques au sens fort, dites approximations fortes de Taylor. On détermine ensuite l'ordre fort de convergence pour ces méthodes. Pour simplifier les notations, on utilise les opérateurs

$$L^0 = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^d a^k \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^d \sum_{j=1}^m b^{k,j} b^{l,j} \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l}, \quad (1.86)$$

$$\underline{L}^0 = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^d \underline{a}^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad (1.87)$$

$$L^j = \underline{L}^j = \sum_{k=1}^d b^{k,j} \frac{\partial}{\partial x^k} \quad (1.88)$$

pour  $j = 1, \dots, m$ ,  $k = 1, \dots, d$ , où

$$\underline{a}^k = a^k - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \underline{L}^j b^{k,j} \quad (1.89)$$

De plus, on écrit les intégrales multiples de Itô sous la forme

$$I_{(j_1, \dots, j_l)} = \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \dots \int_{\tau_n}^{s_2} dW_{s_1}^{j_1} \dots dW_{s_l}^{j_l}, \quad (1.90)$$

avec la convention

$$W_t^0 = t \quad (1.91)$$

Pour tout  $t \geq 0$ . On utilise aussi la notation  $f = f(\tau_n, Y_n)$  dans toutes les méthodes et pour chaque fonction donnée  $f$  définie de  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ . En général, on suppose que le processus de Itô considéré satisfait l'équation différentielle stochastique non-autonome au sens de Itô

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s) ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t b^j(s, X_s) dW_s^j \quad (1.92)$$

## Méthode d'Euler

Cette méthode est considérée comme la méthode la plus simple des approximations fortes de Taylor, elle est appelée méthode explicite d'Euler ou Euler Maruyama, elle est d'ordre fort  $\gamma = 0.5$ . Pour le cas unidimensionnel  $d = m = 1$ , elle est sous la forme

$$Y_{n+1} = Y_n + a\Delta + b\Delta W \quad (1.93)$$

où

$$\Delta = \tau_{n+1} - \tau_n = I_{(0)} \quad (1.94)$$

est le pas de discrétisation et

$$\Delta W = W_{\tau_{n+1}} - W_{\tau_n} \sim \mathcal{N}(0, \Delta) \quad (1.95)$$

sont les accroissements du processus de Wiener dans l'intervalle  $[\tau_n, \tau_{n+1}]$ . Dans le cas multidimensionnel  $d = 1, 2, \dots$ , avec un bruit scalaire  $m = 1$ , la  $k^{ieme}$  composante de la méthode d'Euler s'écrit

$$Y_{n+1}^k = Y_n^k + a^k \Delta + b^k \Delta W, \quad (1.96)$$

pour  $k = 1, 2, \dots, d$ , où le vecteur dérive et le coefficient de diffusion sont des vecteurs  $d$ -dimensionnel  $a = (a^1, a^2, \dots, a^d)$  et  $b = (b^1, b^2, \dots, b^d)$ . Pour le cas multidimensionnel avec  $d, m = 1, 2, \dots$ , la  $k^{ieme}$  composante de la méthode d'Euler est sous la forme

$$Y_{n+1}^k = Y_n^k + a^k \Delta + \sum_{j=1}^m b^{k,j} \Delta W^j, \quad (1.97)$$

où

$$\Delta W^j = W_{\tau_{n+1}}^j - W_{\tau_n}^j = I_{(j)} = J_{(j)} \quad (1.98)$$

sont les accroissements de la  $j^{ieme}$  composante du processus de Wiener standard dans l'intervalle  $[\tau_n, \tau_{n+1}]$ .  $\Delta W^{j_1}$  et  $\Delta W^{j_2}$  sont indépendants pour  $j_1 \neq j_2$  et le coefficient de diffusion  $b = [b^{k,j}]$  est une matrice d'ordre  $d \times m$ .

**Exemple 1.1** Soit l'équation au sens de Itô

$$dX_t = \frac{-1}{2} X_t dt + X_t dW_t^1 + X_t dW_t^2 \quad (1.99)$$

définie dans l'intervalle  $[0, 1]$ , pour la valeur initiale  $X_0 = 1$ , où  $W^1$  et  $W^2$  sont deux processus de Wiener indépendants,

| $h = \Delta$ | $Erreur = \text{mean}[abs(Y_N - X_{true})]$ |
|--------------|---------------------------------------------|
| $2^{-8}$     | 0.04334                                     |
| $2^{-7}$     | 0.06182                                     |
| $2^{-6}$     | 0.09172                                     |
| $2^{-5}$     | 0.13371                                     |
| $2^{-4}$     | 0.19835                                     |
| $2^{-3}$     | 0.31076                                     |

TAB. 1.1 – Erreur obtenue par la méthode d'Euler explicite.

La solution exacte est donnée par :

$$X_t = X_0 \exp \left( \left( \frac{-3}{2} \right) t + W_t^1 + W_t^2 \right) \quad (1.100)$$

On utilise  $M = 20000$  trajectoires pour le processus de Itô et la méthode itérative d'Euler correspondante. En utilisant les mêmes trajectoires du processus de Wiener pour différents pas :  $\Delta = 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}, 2^{-6}, 2^{-7}$  et  $\Delta = 2^{-8}$ . Les résultats sont présentés dans le tableau (1.1). D'habitude, la méthode d'Euler donne numériquement de bons résultats si le vecteur dérive et le coefficient de diffusion sont presque constants, mais en général, elle n'est pas satisfaisante. L'utilisation de méthodes d'ordres supérieurs est nécessaire.

**Théorème 1.3** *On suppose que*

$$E(|X_0|^2) < \infty \quad (1.101)$$

$$E\left(|X_0 - Y_0^\delta|^2\right)^{1/2} \leq K_1 \delta^{1/2} \quad (1.102)$$

$$|a(t, x) - a(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| \leq K_2 |x - y|, \quad (1.103)$$

$$|a(t, x)| + |b(t, x)| \leq K_3 (1 + |x|) \quad (1.104)$$

$$|a(s, x) - a(t, x)| + |b(s, x) - b(t, x)| \leq K_4 (1 + |x|) |s - t|^{1/2}, \quad (1.105)$$

pour tout  $s, t \in [0, T]$  et  $x, y \in \mathbb{R}^d$ , où  $K_1, K_2, K_3$  et  $K_4$  sont des constantes ne dépendant pas de  $\delta$ . Alors l'approximation d'Euler vérifie

$$E|X_T - Y^\delta(T)| \leq K_5 \delta^{1/2} \quad (1.106)$$

où  $K_5$  est une constante ne dépendant pas de  $\delta$ .

## Méthode de Milstein

Dans le cas unidimensionnel  $d = m = 1$ , on ajoute aux termes de la méthode d'Euler, le terme

$$bb' I_{(1,1)} = \frac{1}{2} bb' (\Delta W^2 - \Delta), \quad b' = \frac{\partial b}{\partial x} \quad (1.107)$$

obtenu par la formule de Itô Taylor, on obtient une méthode dite méthode de Milstein d'ordre 1.0 au sens fort,

$$Y_{n+1} = Y_n + a\Delta + b\Delta W + \frac{1}{2} bb' (\Delta W^2 - \Delta). \quad (1.108)$$

On obtient la même méthode à partir de la formule de Stratonovich-Taylor (une formule analogue à celle au sens de Itô) avec le choix de l'ensemble hiérarchique  $\mathcal{A} = \{v, (0), (1), (1, 1)\}$ , alors

$$Y_{n+1} = Y_n + \underline{a}\Delta + b\Delta W + \frac{1}{2} bb' (\Delta W)^2 \quad (1.109)$$

où

$$\underline{a} = a - \frac{1}{2} bb' \quad (1.110)$$

**Proposition 1.1** *On peut facilement montrer que la méthode de Milstein est fortement consistante si le terme  $bb'$  est borné.*

La consistance forte signifie que :

**Définition 1.1** *On dit qu'une approximation discrète  $Y^\delta$  qui correspond à une discrétisation de temps  $(\tau)_\delta = \{\tau_n : n = 0, 1, \dots\}$  avec un pas maximum  $\delta$  est fortement consistante, si il existe une fonction  $c = c(\delta)$  non négative avec*

$$E \left( \left| E \left( \frac{Y_{n+1}^\delta - Y_n^\delta}{\Delta_n} / \mathcal{F}_{\tau_n} \right) - a(\tau_n, Y_n^\delta) \right|^2 \right) \leq c(\delta) \quad (1.111)$$

et

$$E \left( \frac{1}{\Delta_n} |Y_{n+1}^\delta - Y_n^\delta - E(Y_{n+1}^\delta - Y_n^\delta / \mathcal{F}_{\tau_n}) - b(\tau_n, Y_n^\delta) \Delta W_n|^2 \right) \leq c(\delta) \quad (1.112)$$

pour chaque valeur fixée  $Y_n^\delta = y$  et  $n = 0, 1, \dots$

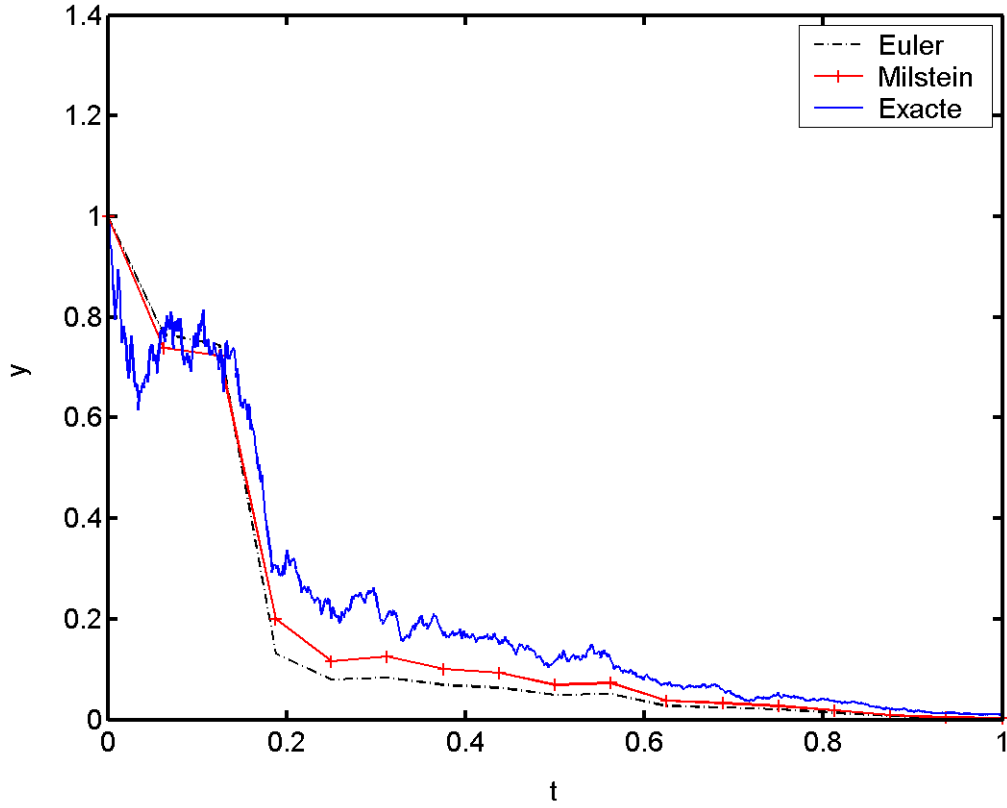


FIG. 1.1 – Convergence forte : Exacte, Euler et Milstein :  $\lambda = -5, \mu = 1, \Delta = 2^{-4}$ .

**Exemple 1.2** *On considère le problème*

$$\begin{cases} dX(t) = \lambda X_t dt + \mu X_t dW(t) \\ X(t_0) = X_0, \quad t \in [0, T] \end{cases} \quad (1.113)$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont deux paramètres,  $X_0$  est un paramètre réel. Pour  $\lambda = 2, \mu = 1, X_0 = 1$ . On obtient une erreur donnée par :  $\text{Eulererr} = \text{abs}(Y_{em}(\text{end}) - X_{true}(\text{end})) = 2.4777036$ ,  $\text{Milsteinerr} = \text{abs}(Y_{em}(\text{end}) - X_{true}(\text{end})) = 0.23345692$ .

**Exemple 1.3** *On considère l'EDS non linéaire au sens de Itô*

$$dy = a^2 y(1 + y^2)dt + a(1 + y^2)dW(t), \quad y(0) = y_0 = 1, \quad t \in [0, 2] \quad (1.114)$$

| h         | Euler : Erreur pour $\lambda = 2, \mu = 1$ | Milstein : Erreur pour $\lambda = 2, \mu = 1$ |
|-----------|--------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| $2^{-10}$ | 0.12046                                    | 0.014950                                      |
| $2^{-9}$  | 0.17351                                    | 0.030175                                      |
| $2^{-8}$  | 0.24576                                    | 0.060320                                      |
| $2^{-7}$  | 0.36283                                    | 0.120199                                      |
| $2^{-6}$  | 0.52436                                    | 0.23703                                       |

TAB. 1.2 – Première comparaison entre les méthodes d'Euler et de Milstein

| $h$       | Euler : Erreur pour $\lambda = 2, \mu = 0$ | Milstein : Erreur pour $\lambda = 2, \mu = 0$ |
|-----------|--------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| $2^{-10}$ | 0.014398                                   | 0.014398                                      |
| $2^{-9}$  | 0.028732                                   | 0.028732                                      |
| $2^{-8}$  | 0.057205                                   | 0.057205                                      |
| $2^{-7}$  | 0.113386                                   | 0.113386                                      |
| $2^{-6}$  | 0.22277                                    | 0.22277                                       |

TAB. 1.3 – Deuxième comparaison

| $h$       | Euler : Erreur pour $\lambda = -5, \mu = 1$ | Milstein : Erreur pour $\lambda = -5, \mu = 1$ |
|-----------|---------------------------------------------|------------------------------------------------|
| $2^{-10}$ | 1.308684E-4                                 | 8.2900E-5                                      |
| $2^{-9}$  | 2.13475E-4                                  | 1.65609E-4                                     |
| $2^{-8}$  | 3.68513E-4                                  | 3.29776E-4                                     |
| $2^{-7}$  | 6.85346E-4                                  | 6.51813E-4                                     |
| $2^{-6}$  | 0.001278                                    | 0.001269                                       |

TAB. 1.4 – Troisième comparaison

| $h$      | Euler : Erreur pour $\lambda = 5, \mu = 1$ | Milstein : Erreur pour $\lambda = 5, \mu = 1$ |
|----------|--------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| $2^{-5}$ | 0.00127                                    | 0.00125                                       |
| $2^{-4}$ | 0.00243                                    | 0.00240                                       |
| $2^{-3}$ | 0.00424                                    | 0.00426                                       |
| $2^{-2}$ | 0.00641                                    | 0.00631                                       |
| $2^{-1}$ | 0.04501                                    | 0.06394                                       |

TAB. 1.5 – Quatrième comparaison

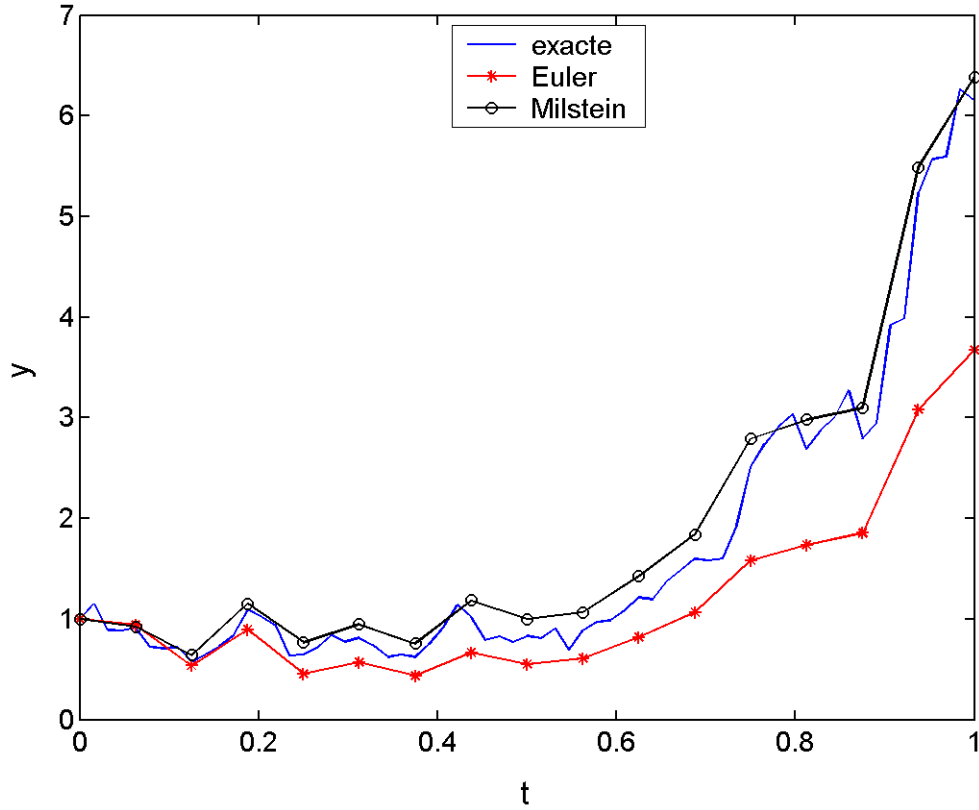


FIG. 1.2 – Convergence forte : Exacte, Euler et Milstein :  $\lambda = 2, \mu = 1, \Delta = 2^{-4}$

La solution exacte est donnée par :

$$y = \tan(aW(t) + \arctan y_0) \quad (1.115)$$

On prend  $a = 0.01, M = 500$  simulations. On applique les deux schémas d'Euler et de Milstein.

- Remarque 1.2**
1. Si le bruit est additif  $b(t, x) = b(t)$ , alors la méthode de Milstein devient une méthode de type Euler.
  2. Dans un certain sens, on peut considérer la méthode de Milstein comme une généralisation propre de la méthode d'Euler déterministe, elles ont le même ordre fort de convergence.

| $h$       | Euler : Erreur pour $\lambda = -5, \mu = 5$ | Milstein : Erreur pour $\lambda = -5, \mu = 5$ |
|-----------|---------------------------------------------|------------------------------------------------|
| $2^{-10}$ | 1.04632e-004                                | 4.76782e-006                                   |
| $2^{-9}$  | 1.26842e-004                                | 1.30548e-005                                   |
| $2^{-8}$  | 1.60032e-004                                | 2.68568e-005                                   |
| $2^{-7}$  | 2.30801e-004                                | 3.64854e-005                                   |
| $2^{-6}$  | 2.40527e-004                                | 1.76794e-004                                   |
| $2^{-5}$  | 7.93239e-004                                | 2.15234e-004                                   |

TAB. 1.6 – Cinquième comparaison

| $h$       | Euler : Erreur pour $\lambda = 5, \mu = 5$ | Milstein : Erreur pour $\lambda = 5, \mu = 5$ |
|-----------|--------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| $2^{-10}$ | 2.2527                                     | 0.2076                                        |
| $2^{-9}$  | 2.5472                                     | 0.3233                                        |
| $2^{-8}$  | 3.1434                                     | 0.6122                                        |
| $2^{-7}$  | 5.6903                                     | 2.0516                                        |
| $2^{-6}$  | 8.0663                                     | 1.8619                                        |
| $2^{-5}$  | 27.2691                                    | 4.0035                                        |

TAB. 1.7 – Sixième comparaison

| $h$      | Euler : Erreur pour $a = 0.01$ | Milstein : Erreur pour $a = 0.01$ |
|----------|--------------------------------|-----------------------------------|
| $2^{-8}$ | 3.169081352982772e-008         | 5.406755887449322e-011            |
| $2^{-7}$ | 4.831188808757592e-005         | 4.831188808694220e-005            |
| $2^{-6}$ | 4.831188808756148e-005         | 4.831188808628895e-005            |
| $2^{-5}$ | 4.831188808589837e-005         | 4.831188808540499e-005            |
| $2^{-4}$ | 4.831188808535170e-005         | 4.831188808505637e-005            |
| $2^{-3}$ | 4.831188808472353e-005         | 4.831188808404252e-005            |

TAB. 1.8 – Septième comparaison

| $h$      | Euler : Erreur pour $a = 0.2$ | Milstein : Erreur pour $a = 0.2$ |
|----------|-------------------------------|----------------------------------|
| $2^{-8}$ | 5.470868193596057e-005        | 1.206378117223572e-006           |
| $2^{-7}$ | 0.00128587420747              | 0.00128587334598                 |
| $2^{-6}$ | 0.00128587452174              | 0.00128587334597                 |
| $2^{-5}$ | 0.00128587497806              | 0.00128587334596                 |
| $2^{-4}$ | 0.00128587570133              | 0.00128587334591                 |
| $2^{-3}$ | 0.00128587659320              | 0.00128587334583                 |

TAB. 1.9 – Huitième comparaison

Dans le cas multidimensionnel, avec  $m = 1, d = 1, 2, \dots$  la  $k^{ieme}$  composante de la méthode de Milstein est donnée par

$$Y_{n+1}^k = Y_n^k + a^k \Delta + b^k \Delta W + \frac{1}{2} \left( \sum_{l=1}^d b^l \frac{\partial b^k}{\partial x^l} \right) (\Delta W^2 - \Delta) \quad (1.116)$$

Dans le cas multidimensionnel, avec  $m, d = 1, 2, \dots$  la  $kième$  composante de la méthode de Milstein est donnée par

$$Y_{n+1}^k = Y_n^k + a^k \Delta + \sum_{j=1}^m b^{k,j} \Delta W^j + \sum_{j_1, j_2=1}^m L^{j_1} b^{k, j_2} I_{(j_1, j_2)} \quad (1.117)$$

en terme de l'intégrale au sens de Stratonovich, elle s'écrit

$$Y_{n+1}^k = Y_n^k + \underline{a}^k \Delta + \sum_{j=1}^m b^{k,j} \Delta W^j + \sum_{j_1, j_2=1}^m \underline{L}^{j_1} b^{k, j_2} J_{(j_1, j_2)} \quad (1.118)$$

On remarque que pour  $j_1 \neq j_2$ , l'intégrale multiple est donnée par

$$I_{(j_1, j_2)} = J_{(j_1, j_2)} = \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \int_{\tau_n}^{s_2} dW_{s_1}^{j_1} dW_{s_2}^{j_2} \quad (1.119)$$

on ne peut pas donner une formule simple de cette intégrale en fonction de  $\Delta W^{j_1}$  et  $\Delta W^{j_2}$ . Pour le cas  $j_1 = j_2$  on a

$$I_{(j_1, j_2)} = \frac{1}{2} \left( (\Delta W^{j_1})^2 - \Delta \right), \quad J_{(j_1, j_2)} = \frac{1}{2} \left( (\Delta W^{j_1})^2 \right). \quad (1.120)$$

Pour le cas multidimensionnel, la méthode de Milstein devient pratique, si on donne des approximations aux intégrales multiples. Dans plusieurs cas pratiques, le coefficient de diffusion possède des propriétés spéciales qui permettent de simplifier la méthode de Milstein en évitant le calcul des intégrales stochastiques multiples pour certaines composantes qui dépendent du processus de Wiener. Pour l'instant, on présente les cas suivants

1. Le cas des équations avec bruit additif dont le coefficient de diffusion dépend seulement de  $t$ , la méthode de Milstein se réduit à la méthode d'Euler qui ne demande pas le calcul des intégrales multiples.
2. Le cas d'un bruit diagonal, c'est à dire  $b^{k,j}(t, x) \equiv 0$  et  $\frac{\partial b^{j,j}}{\partial x^k}(t, x) \equiv 0$ , pour chaque  $j, k = 1, \dots, m$  avec  $j \neq k$ . Il est facile de voir que la méthode de Milstein avec un bruit diagonal s'écrit

$$Y_{n+1}^k = Y_n^k + a^k \Delta + b^{k,k} \Delta W^k + \frac{1}{2} \left( b^{k,k} \frac{\partial b^{k,k}}{\partial x^k} \right) \left( (\Delta W^k)^2 - \Delta \right) \quad (1.121)$$

3. Un cas spécial important est celui d'un bruit commutatif dont le coefficient de diffusion satisfait la condition de commutativité

$$\underline{L}^{j_1} b^{k,j_2} = \underline{L}^{j_2} b^{k,j_1} \quad (1.122)$$

pour chaque  $j_1, j_2 = 1, \dots, m$ ,  $k = 1, \dots, d$ . Pour l'instant, on prend un bruit additif, diagonal ou linéaire (ce dernier est vérifié si  $b^{k,j}(t, x) = b^{k,j}(t)x^k$  pour  $x = (x^1, \dots, x^d) \in R^d$  et  $j = 1, \dots, m$ ,  $k = 1, \dots, d$ ) satisfaisant la condition de commutativité. On a

$$I_{(j_1, j_2)} + I_{(j_2, j_1)} = \Delta W^{j_1} \Delta W^{j_2}, \quad (1.123)$$

$j_1, j_2 = 1, \dots, m$ , avec  $j_1 \neq j_2$ , donc la méthode de Milstein avec un bruit commutatif s'écrit sous la forme

$$Y_{n+1}^k = Y_n^k + \underline{a}^k \Delta + \sum_{j=1}^m b^{k,j} \Delta W^j + \sum_{j_1, j_2=1}^m \underline{L}^{j_1} b^{k,j_2} \Delta W^{j_1} \Delta W^{j_2}. \quad (1.124)$$

L'exemple suivant dû à Clark et Cameron, montre que dans le cas non commutatif, on a le besoin du calcul des intégrales multiples  $I_{(j_1, j_2)}$ ,  $J_{(j_1, j_2)}$  avec  $j_1 \neq j_2$  pour obtenir un ordre de convergence forte  $\gamma = 1.0$ .

**Exemple 1.4** On considère en dimension deux  $d = m = 2$ , le processus de Itô  $X = (X^1, X^2)$  avec

$$X_t^1 = \int_0^t dW_s^1, \quad X_t^2 = \int_0^t X_s^1 dW_s^2 \quad (1.125)$$

puisque

$$\underline{L}^{j_1} b^{2,2} = 1 \neq 0 = \underline{L}^{j_2} b^{2,1}, \quad (1.126)$$

la condition de commutativité n'est pas vérifiée, mais, on peut quand même appliquer la méthode itérative (1.124) avec un pas constant  $\Delta$ . On obtient

$$\begin{cases} Y_{n+1}^1 = Y_n^1 + \Delta W^1 \\ Y_{n+1}^2 = Y_n^2 + Y_n^1 \Delta W^2 + \frac{1}{2} \Delta W^1 \Delta W^2 \end{cases} \quad (1.127)$$

pour  $n = 0, 1, \dots$ , avec  $Y_0^1 = Y_0^2 = 0$ , Clark et Cameron ont montré que l'erreur en moyenne quadratique de la deuxième composante est de la forme

$$\left( E \left( |Y^2(T) - X_T^2|^2 \right) \right)^{1/2} = \frac{1}{2} T^{1/2} \Delta^{1/2}. \quad (1.128)$$

A partir de la dernière relation et pour cette exemple particulier, la méthode de Milstein (1.124) atteint seulement un ordre fort  $\gamma = 0.5$ , mais si on remplace le terme  $\frac{1}{2} \Delta W^1 \Delta W^2$  par l'intégrale double  $I_{(1,2)}$ , alors on a en général la méthode de Milstein avec un ordre fort  $\gamma = 1$ .

Le théorème suivant donne les conditions qui assure que la méthode de Milstein est d'ordre  $\gamma = 1$ .

**Théorème 1.4** *On suppose que*

$$E(|X_0|^2) < \infty \quad (1.129)$$

$$E\left(|X_0 - Y_0^\delta|^2\right)^{1/2} \leq K_1 \delta^{1/2} \quad (1.130)$$

$$\begin{aligned} |\underline{a}(t, x) - \underline{a}(t, y)| &\leq K_2 |x - y|, \\ |b^{j_1}(t, x) - b^{j_1}(t, y)| &\leq K_2 |x - y| \\ |\underline{L}^{j_1} b^{j_2}(t, x) - \underline{L}^{j_1} b^{j_2}(t, y)| &\leq K_2 |x - y| \end{aligned} \quad (1.131)$$

et

$$\begin{aligned} |\underline{a}(s, x) - \underline{a}(t, x)| &\leq K_4 (1 + |x|) |s - t|^{1/2}, \\ |b^{j_1}(s, x) - b^{j_1}(t, x)| &\leq K_4 (1 + |x|) |s - t|^{1/2} \\ |\underline{L}^{j_1} b^{j_2}(s, x) - \underline{L}^{j_1} b^{j_2}(t, x)| &\leq K_4 (1 + |x|) |s - t|^{1/2} \end{aligned} \quad (1.132)$$

pour tout  $s, t \in [0, T]$ ,  $x, y \in R^d$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$  et  $j_1, j_2 = 1, \dots, m$ , où  $K_1, K_2, K_3$  et  $K_4$  sont des constantes ne dépendant pas de  $\delta$ . Alors l'approximation de Milstein vérifie

$$E|X_T - Y^\delta(T)| \leq K_5 \delta \quad (1.133)$$

où la constante  $K_5$  ne dépend pas de  $\delta$ .

### Méthode de Taylor d'ordre 1.5

On peut construire, une méthode plus efficace, en ajoutant plus de termes à la formule de Taylor-Itô à la méthode de Milstein. Dans le cas autonome unidimensionnel  $d = m = 1$ , Platen et Wagner ont obtenu une méthode d'ordre fort 1.5, dite méthode de Taylor d'ordre fort  $\gamma = 1.5$ .

$$\begin{aligned} Y_{n+1} = & Y_n + a\Delta + b\Delta W + \frac{1}{2}bb'((\Delta W)^2 - \Delta) \\ & + a'b\Delta Z + \frac{1}{2}\left(aa' + \frac{1}{2}b^2a''\right)\Delta^2 \\ & + \left(ab' + \frac{1}{2}b^2b''\right)(\Delta W \Delta - \Delta Z) \\ & + \frac{1}{2}b(bb'' + (b')^2)\left(\frac{1}{3}(\Delta W)^2 - \Delta\right)\Delta W \end{aligned} \quad (1.134)$$

où

$$\Delta Z = I_{(1,0)} = \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \int_{\tau_n}^{s_2} dW_{s_1} ds_2, \quad (1.135)$$

$\Delta Z$  est une variable aléatoire qui suit la loi normale avec

$$E(\Delta Z) = 0, E((\Delta Z)^2) = \frac{1}{3}\Delta^3 \quad \text{et} \quad E(\Delta Z \Delta W) = \frac{1}{2}\Delta^2 \quad (1.136)$$

Pour générer le couple  $(\Delta W, \Delta Z)$  de variables aléatoires qui suivent la loi normale, on peut utiliser les variables aléatoires gaussiennes indépendantes  $U_1$  et  $U_2$  définies par la transformation

$$\Delta W = U_1 \sqrt{\Delta}, \quad \Delta Z = \frac{1}{2}\Delta^{3/2} \left( U_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}U_2 \right) \quad (1.137)$$

**Proposition 1.2** *La méthode de Taylor d'ordre 1.5 est fortement consistante si  $a, b$  et leurs dérivées du premier et deuxième ordre sont bornées.*

**Remarque 1.3** *Dans le cas déterministe où  $b \equiv 0$ , la méthode de Taylor d'ordre 1.5 se réduit à la méthode déterministe de Taylor d'ordre 2.0. Il n'existe aucune projection de cette méthode sur le cas déterministe. Mais, la méthode de Taylor d'ordre 2.0 au sens de Stratonovich est la bonne généralisation de la méthode déterministe de Taylor d'ordre 2.0.*

Dans le cas multidimensionnel avec  $d = 1, 2, \dots$  et avec un bruit scalaire  $m = 1$ , la  $k$ ième composante de la méthode de Taylor d'ordre 1.5 est donnée par

$$\begin{aligned} Y_{n+1}^k &= Y_n^k + a^k \Delta + b^k \Delta W + \frac{1}{2} L^1 b^k ((\Delta W)^2 - \Delta) \\ &\quad + L^1 a^k \Delta Z + \frac{1}{2} L^0 a^k \Delta^2 + L^0 b^k (\Delta W \Delta - \Delta Z) \\ &\quad + \frac{1}{2} L^1 L^1 b^k \left( \frac{1}{3} (\Delta W)^2 - \Delta \right) \Delta W. \end{aligned} \quad (1.138)$$

Dans le cas, général multidimensionnel  $d, m = 1, 2, \dots$  la  $k$ ième composante de la méthode de Taylor d'ordre 1.5 est donnée par

$$\begin{aligned} Y_{n+1}^k &= Y_n^k + a^k \Delta + \frac{1}{2} L^0 a^k \Delta^2 \\ &\quad + \sum_{j=1}^m (b^{k,j} \Delta W^j + L^0 b^{k,j} I_{(0,j)} + L^j a^k I_{(j,0)}) \\ &\quad + \sum_{j_1, j_2=1}^m (L^{j_1} b^{k,j_2} I_{(j_1, j_2)} + \sum_{j_1, j_2, j_3=1}^m (L^{j_1} L^{j_2} b^{k,j_3} I_{(j_1, j_2, j_3)}). \end{aligned} \quad (1.139)$$

Pour implémenter ce schéma, il faut l'écrire au sens de Stratonovich puis déterminer des approximations aux intégrales multiples. On peut largement réduire la méthode (1.139) dans certains cas pratiques importants tels que les cas des bruits additif, diagonal ou commutatif.

### Méthode de Taylor d'ordre 2.0

Dans le cas unidimensionnel  $d = m = 1$ , la méthode de Taylor d'ordre 2.0 au sens de Stratonovich est donnée par

$$\begin{aligned}
Y_{n+1} = & Y_n + \underline{a}\Delta + b\Delta W + \frac{1}{2}bb'(\Delta W)^2 \\
& + \underline{a}'b\Delta Z + \frac{1}{2}\underline{a}\underline{a}'\Delta^2 + \underline{a}b'(\Delta W \Delta - \Delta Z) \\
& + \frac{1}{3!}b(bb')'(\Delta W)^3 + \frac{1}{4!}b(b(bb')')(\Delta W)^4 \\
& + \underline{a}(bb')'J_{(0,1,1)} + b(\underline{a}b')'J_{(1,0,1)} + b(b\underline{a}')'J_{(1,1,0)}
\end{aligned} \tag{1.140}$$

Pour le cas multidimensionnel,  $d = 1, 2, \dots$ , avec un bruit scalaire  $m = 1$ , la  $k$ ème composante de la méthode de Taylor d'ordre 2.0 est sous la forme :

$$\begin{aligned}
Y_{n+1}^k = & Y_n^k + \underline{a}^k\Delta + b^k\Delta W + \frac{1}{2}\underline{L}^1b^k(\Delta W)^2 \\
& + \underline{L}^1\underline{a}^k\Delta Z + \frac{1}{2}\underline{L}^0\underline{a}^k\Delta^2 + \underline{L}^0b^k(\Delta W \Delta - \Delta Z) \\
& + \frac{1}{3!}\underline{L}^1\underline{L}^1b^k(\Delta W)^3 + \frac{1}{4!}\underline{L}^1\underline{L}^1\underline{L}^1b^k(\Delta W)^4 \\
& + \underline{L}^0\underline{L}^1b^kJ_{(0,1,1)} + \underline{L}^1\underline{L}^0b^kJ_{(1,0,1)} + \underline{L}^1\underline{L}^1\underline{a}^kJ_{(1,1,0)}
\end{aligned} \tag{1.141}$$

Dans le cas général multidimensionnel  $d, m = 1, 2, \dots$  la  $k$ ème composante de la méthode de Taylor d'ordre 2.0 est donnée par

$$\begin{aligned}
Y_{n+1}^k = & Y_n^k + \underline{a}^k\Delta + \frac{1}{2}\underline{L}^0\underline{a}^k\Delta^2 \\
& + \sum_{j=1}^m (b^{k,j}\Delta W^j + \underline{L}^0b^{k,j}J_{(0,j)} + \underline{L}^j\underline{a}^kJ_{(j,0)}) \\
& + \sum_{j_1, j_2=1}^m (\underline{L}^{j_1}b^{k,j_2}J_{(j_1,j_2)} + \underline{L}^0\underline{L}^{j_1}b^{k,j_2}J_{(0,j_1,j_2)})
\end{aligned} \tag{1.142}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j_1, j_2=1}^m (\underline{L}^{j_1} \underline{L}^0 b^{k, j_2} J_{(j_1, 0, j_2)} + \underline{L}^{j_1} \underline{L}^{j_2} \underline{a}^k J_{(j_1, j_2, 0)}) \\
& \sum_{j_1, j_2, j_3=1}^m \underline{L}^{j_1} \underline{L}^{j_2} b^{k, j_3} J_{(j_1, j_2, j_3)} + \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4=1}^m \underline{L}^{j_1} \underline{L}^{j_2} \underline{L}^{j_3} b^{k, j_4} J_{(j_1, j_2, j_3, j_4)}
\end{aligned}$$

Pour implémenter ce schéma, il faut déterminer des approximations aux intégrales multiples. On peut largement réduire la méthode (1.142) dans certains cas pratiques importants, par exemple si le bruit est additif, diagonal ou commutatif. On peut aussi, obtenir une méthode de Taylor d'ordre 2.0 au sens de Itô. La méthode au sens de Stratonovich est la plus utilisée car elle est la plus simple.

### 1.2.3 Méthodes semi-implicites de Taylor au sens de la convergence forte

Dans cette partie, on s'intéresse aux méthodes semi-implicites de Taylor obtenues en adaptant les méthodes correspondantes de Taylor. Soit l'équation différentielle stochastique au sens de Itô

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t, \quad t \in [t_0, T] \quad (1.143)$$

#### La méthode semi-implicite d'Euler

Cette méthode est la méthode la plus simple des méthodes de Taylor, elle est d'ordre  $\gamma = 0.5$ . Dans le cas unidimensionnel  $d = m = 1$ , elle s'écrit sous la forme

$$Y_{n+1} = Y_n + a(\tau_{n+1}, Y_{n+1})\Delta + b\Delta W, \quad (1.144)$$

où par convention, on écrit  $b = b(\tau_n, Y_n)$ . A partir de cette méthode et la méthode explicite d'Euler, on peut toujours construire une famille de méthodes semi-implicites d'Euler donnée par

$$Y_{n+1} = Y_n + (\alpha a(\tau_{n+1}, Y_{n+1}) + (1 - \alpha)a) \Delta + b\Delta W, \quad (1.145)$$

où le paramètre  $\alpha \in [0, 1]$  caractérise le degré d'implicité (implicitness). On note que si  $\alpha = 0$ , on obtient la méthode explicite d'Euler et pour  $\alpha = 1$ , on obtient la méthode (1.144). Par contre pour  $\alpha = 1/2$ , on obtient à partir de (1.145) une généralisation de la méthode déterministe du trapèze. Une généralisation de la méthode pour le cas multidimensionnel  $d, m = 1, 2, \dots$  est donnée par :

$$Y_{n+1}^k = Y_n^k + (\alpha_k a^k(\tau_{n+1}, Y_{n+1}) + (1 - \alpha_k)a^k) \Delta + \sum_{j=1}^m b^{k,j} \Delta W^j, \quad (1.146)$$

avec  $\alpha_k \in [0, 1]$  pour  $k = 1, 2, \dots, d$ . Pour tester les méthodes précédentes, on peut utiliser le système au sens de Itô à deux dimension suivant :

$$dX_t = AX_t dt + BX_t dW_t \quad (1.147)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} -a & a \\ a & -a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}. \quad (1.148)$$

Puisque les matrices  $A$  et  $B$  commutent, alors la solution explicite de ce système s'écrit

$$X_t = \exp \left( \left( A - \frac{1}{2} B^2 \right) t + BW_t \right) X_0. \quad (1.149)$$

Les exposants de Lyapounov de l'équation différentielle (1.147) sont

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}b^2, \quad \lambda_2 = -2a - \frac{1}{2}b^2. \quad (1.150)$$

Si on pose  $a = 25$  et  $b = 2$ , on a  $\lambda_1 = -2 \gg \lambda_2 = -52$ , l'équation différentielle stochastique peut être considérée dans ce cas raide. On note que l'exponentiel dans (1.149) est obtenu en diagonalisant la matrice  $(A - \frac{1}{2}B^2)t + BW_t$  pour chaque  $t \geq 0$ . Dans ce cas, on obtient :

$$X_t = P \begin{bmatrix} \exp(\rho^+(t)) & 0 \\ 0 & \exp(\rho^-(t)) \end{bmatrix} P^{-1} X_0 \quad (1.151)$$

où

$$\rho^\pm(t) = (-a - \frac{1}{2}b^2 \pm a)t + bW_t \quad (1.152)$$

et

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = P^{-1} \quad (1.153)$$

### La méthode semi-implicite de Milstein

Dans le cas unidimensionnel  $d = m = 1$ , cette méthode s'écrit au sens de Itô sous la forme

$$Y_{n+1} = Y_n + a(\tau_{n+1}, Y_{n+1})\Delta + b\Delta W + \frac{1}{2}bb'((\Delta W)^2 - \Delta). \quad (1.154)$$

Sa version équivalente au sens de Stratonovich est

$$Y_{n+1} = Y_n + \underline{a}(\tau_{n+1}, Y_{n+1})\Delta + b\Delta W + \frac{1}{2}bb'(\Delta W)^2 \quad (1.155)$$

avec

$$\underline{a} = a - \frac{1}{2}bb' \quad (1.156)$$

Dans le cas général multidimensionnel, avec un bruit commutatif, on obtient une famille des méthodes semi-implicites de Milstein dont la composante d'ordre  $k$  s'écrit

$$\begin{aligned} Y_{n+1}^k &= Y_n^k + (\alpha_k a^k(\tau_{n+1}, Y_{n+1}) + (1 - \alpha_k) a^k) \Delta + \sum_{j=1}^m b^{k,j} \Delta W^j \quad (1.157) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j_1, j_2=1}^m L^{j_1} b^{k, j_2} (\Delta W^{j_1} \Delta W^{j_2} - \delta_{j_1, j_2} \Delta) \end{aligned}$$

où  $\delta_{j_1, j_2}$  est le symbole de Kronecker. Une version de Stratonovich est aussi donnée par

$$\begin{aligned} Y_{n+1}^k &= Y_n^k + (\alpha_k \underline{a}^k(\tau_{n+1}, Y_{n+1}) + (1 - \alpha_k) \underline{a}^k) \Delta + \sum_{j=1}^m b^{k,j} \Delta W^j \quad (1.158) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j_1, j_2=1}^m L^{j_1} b^{k, j_2} \Delta W^{j_1} \Delta W^{j_2} \end{aligned}$$

où  $\alpha_k \in [0, 1]$  pour  $k = 1, 2, \dots, d$ . On note que si  $\alpha_k = 0$ , on obtient la méthode explicite de Milstein, et pour  $\alpha_k = 1$ , on obtient la méthode (1.154). Par contre pour  $\alpha_k = 1/2$ , on obtient une généralisation de la méthode déterministe du trapèze. Dans le cas général, la  $k$ ème composante au sens de Itô des méthodes semi-implicites de Milstien s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} Y_{n+1}^k &= Y_n^k + (\alpha_k a^k(\tau_{n+1}, Y_{n+1}) + (1 - \alpha_k) a^k) \Delta + \sum_{j=1}^m b^{k,j} \Delta W^j \quad (1.159) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j_1, j_2=1}^m L^{j_1} b^{k, j_2} I_{(j_1, j_2)} \end{aligned}$$

Une version analogue au sens de Stratonovich est donnée par

$$\begin{aligned} Y_{n+1}^k &= Y_n^k + (\alpha_k a^k(\tau_{n+1}, Y_{n+1}) + (1 - \alpha_k) a^k) \Delta + \sum_{j=1}^m b^{k,j} \Delta W^j \quad (1.160) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j_1, j_2=1}^m L^{j_1} b^{k, j_2} J_{(j_1, j_2)} \end{aligned}$$

Les intégrales multiples  $I_{(j_1, j_2)}$  et  $J_{(j_1, j_2)}$  peuvent être approchées par les techniques précédentes [28].

## La méthode semi-implicite de Taylor d'ordre 1.5

Dans le cas unidimensionnel, la méthode semi-implicite de Taylor d'ordre 1.5 s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned}
Y_{n+1} = & Y_n + \frac{1}{2} (a(Y_{n+1}) + a) \Delta \\
& + \left( ab' + \frac{1}{2} b^2 b'' \right) (\Delta W \Delta - \Delta Z) \\
& + a'b \left( \Delta Z - \frac{1}{2} \Delta W \Delta \right) + \frac{1}{2} bb' ((\Delta W)^2 - \Delta) \\
& + \frac{1}{2} b (bb')' \left( \frac{1}{3} (\Delta W)^2 - \Delta \right) \Delta W
\end{aligned} \tag{1.161}$$

où  $\Delta W$  et  $\Delta Z$  sont deux variables aléatoires gaussiennes de moyennes nulles et

$$E((\Delta W)^2) = \Delta, E((\Delta Z)^2) = \frac{1}{3} \Delta^3 \text{ et } E(\Delta W \Delta Z) = \frac{1}{2} \Delta^2. \tag{1.162}$$

Pour générer le couple  $(\Delta W, \Delta Z)$  de variables aléatoires qui suivent la loi normale, on peut utiliser les variables aléatoires gaussiennes indépendantes  $U_1$  et  $U_2$  définies par la transformation

$$\Delta W = U_1 \sqrt{\Delta}, \quad \Delta Z = \frac{1}{2} \Delta^{3/2} \left( U_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} U_2 \right). \tag{1.163}$$

Pour le cas multidimensionnel, on obtient une famille de méthodes semi implicites de Taylor d'ordre 1.5 dont la  $k$ ème composante s'écrit

$$\begin{aligned}
Y_{n+1}^k = & Y_n^k + (\alpha_k a^k(\tau_{n+1}, Y_{n+1}) + (1 - \alpha_k) a^k) \Delta \\
& + \left( \frac{1}{2} - \alpha_k \right) (\beta_k L^0 a^k(\tau_{n+1}, Y_{n+1}) + (1 - \beta_k) L^0 a^k) \Delta^2 \\
& + \sum_{j=1}^m (b^{k,j} \Delta W^j + L^0 b^{k,j} I_{(0,j)} + L^j a^k (I_{(j,0)} - \alpha_k \Delta W^j \Delta)) \\
& + \sum_{j_1, j_2=1}^m L^{j_1} b^{k,j_2} I_{(j_1, j_2)} + \sum_{j_1, j_2, j_3=1}^m L^{j_1} L^{j_2} b^{k,j_3} I_{(j_1, j_2, j_3)}
\end{aligned} \tag{1.164}$$

où  $\alpha_k, \beta_k \in [0, 1]$  pour  $k = 1, 2, \dots, d$ . Les intégrales multiples peuvent être approchées en utilisant des approximations citées dans [28]. On peut aussi obtenir des méthodes qui possèdent des structures simples dans certains cas pratiques, c'est le cas par exemple pour les des bruits additifs ou commutatifs.

## Méthode semi-implicite de Taylor d'ordre 2.0

On peut dériver une méthode semi-implicite d'ordre 2.0 à partir de la formule de Taylor Stratonovich. Pour le cas unidimensionnel, on a la version au sens de Stratonovich donnée par

$$\begin{aligned}
Y_{n+1} = & Y_n + \frac{1}{2} (\underline{a}(Y_{n+1}) + \underline{a}) \Delta \\
& + \underline{a}b' (\Delta W \Delta - \Delta Z) + \underline{a}'b \left( \Delta Z - \frac{1}{2} \Delta W \Delta \right) \\
& + \frac{1}{2} bb' (\Delta W)^2 + \frac{1}{3!} b (bb')' (\Delta W)^3 \\
& + \frac{1}{4!} b (b (bb')')' (\Delta W)^4 + \underline{a} (bb')' J_{(0,1,1)} \\
& + b(\underline{a}b')' J_{(1,0,1)} + b(\underline{a}'b)' \left( J_{(1,1,0)} - \frac{1}{4} (\Delta W)^2 \Delta \right).
\end{aligned} \tag{1.165}$$

Pour le cas multidimensionnel, on obtient une famille de méthodes semi-implicites de Taylor d'ordre 2.0 dont la  $k$ ème composante s'écrit

$$\begin{aligned}
Y_{n+1}^k = & Y_n^k + (\alpha_k \underline{a}^k(\tau_{n+1}, Y_{n+1}) + (1 - \alpha_k) \underline{a}^k) \Delta \\
& + \left( \frac{1}{2} - \alpha_k \right) (\beta_k \underline{L}^0 \underline{a}^k(\tau_{n+1}, Y_{n+1}) + (1 - \beta_k) \underline{L}^0 \underline{a}^k) \Delta^2 \\
& + \sum_{j=1}^m (b^{k,j} \Delta W^j + \underline{L}^0 b^{k,j} J_{(0,j)} + \underline{L}^j \underline{a}^k (J_{(j,0)} - \alpha_k \Delta W^j \Delta)) \\
& + \sum_{j_1, j_2=1}^m [ \underline{L}^{j_1} b^{k,j_2} J_{(j_1, j_2)} + \underline{L}^0 \underline{L}^{j_1} b^{k,j_2} J_{(0, j_1, j_2)} \\
& + \underline{L}^{j_1} \underline{L}^0 b^{k,j_2} J_{(j_1, 0, j_2)} + \underline{L}^{j_1} \underline{L}^{j_2} \underline{a}^k (J_{(j_1, j_2, 0)} - \alpha_k \Delta J_{(j_1, j_2)}) ] \\
& + \sum_{j_1, j_2, j_3=1}^m L^{j_1} L^{j_2} b^{k, j_3} I_{(j_1, j_2, j_3)} + \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4=1}^m L^{j_1} L^{j_2} L^{j_3} b^{k, j_4} I_{(j_1, j_2, j_3, j_4)}
\end{aligned} \tag{1.166}$$

où  $\alpha_k, \beta_k \in [0, 1]$  pour  $k = 1, 2, \dots, d$ . Pour une méthode plus simplifiée, il suffit de prendre le cas autonome avec un bruit additif. Il existe aussi une version au sens de Itô mais celle de Stratonovich est la plus utilisée.

## Méthodes implicites de Taylor au sens de la convergence forte

Comme dans le cas déterministe, les méthodes itératives implicites sont nécessaires pour intégrer les systèmes raides. Dans les travaux de Talay [43], Milstein [34] Saito et Mitsui [39, 40] et Kloeden et Platen[28] et autres, l'introduction de terme implicite concerne seulement le terme déterministe. Ces méthodes sont dites méthodes semi-implicites. Elles sont largement adaptées aux systèmes raides avec une petite intensité d'un bruit stochastique ou un bruit additif. Mais dans les cas où la partie stochastique joue le rôle essentiel dans la dynamique par exemple comme le cas d'un grand bruit multiplicatif, l'application des méthodes entièrement implicites dont le terme stochastique est implicite devient inévitable. Jusqu'à présent, des techniques importantes proposées pour améliorer les méthodes semi-implicites sont introduits d'une part par G.N. Milstein et E.Platten et ainsi que H.Schurz [35]. Ils ont proposés des méthodes dites méthodes implicites équilibrées (balanced methods). Ces méthodes peuvent être interprétées comme une famille de méthodes spécifiques qui fournit un équilibre entre les termes stochastiques dans la méthode numérique. D'autre part, K.Burrage et T.Tian ont obtenu des méthodes implicites de Taylor basées sur la relation entre l'intégrale au sens de Itô et au sens backward.

### Méthode implicite équilibrée ( balanced method )

Pour formuler la méthode équilibrée pour des systèmes plus généraux on considère le processus stochastique unidimensionnel  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  avec  $E(X_0)^2 < \infty$  qui satisfait l'équation différentielle stochastique en dimension  $d$

$$dX_t = a(t, X_t)dt + \sum_{j=1}^m b^j(t, X_t)dW_t^j \quad (1.167)$$

où  $a, b^1, \dots, b^m$  sont des fonctions continues  $d$  dimensionnelles satisfaisant les conditions du théorème d'existence et unicité des solutions, le processus  $W^j = \{W_t^j : t \geq 0\}$ ,  $j = 1, \dots, m$ , représente un processus de Wiener multidimensionnel de composantes indépendantes défini dans l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}, P)$ . Dans [35], G.N. Milstein et Coll, ont considéré une famille de méthodes équilibrées. Ces méthodes appliquées à l'équation (1.167) peuvent être s'écrire sous la forme générale

$$Y_{n+1} = Y_n + a(\tau_n, Y_n)\Delta + \sum_{j=1}^m b^j(\tau_n, Y_n)\Delta W_n^j + C_n(Y_n - Y_{n+1}) \quad (1.168)$$

où

$$C_n = c^0(\tau_n, Y_n)\Delta + \sum_{j=1}^m c^j(\tau_n, Y_n) |\Delta W_n^j| \quad (1.169)$$

$\Delta W_n^j = W_{\tau_{n+1}}^j - W_{\tau_n}^j$ ,  $\Delta = \tau_{n+1} - \tau_n$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$  et  $c^0, c^1, \dots, c^m$  représentent des matrices d'ordre  $d$ . En plus, Ils ont supposé que pour chaque suite des nombres réels  $(\alpha_i)$  avec  $\alpha_0 \in [0, \bar{\alpha}]$ ,  $\alpha_1 \geq 0$ ,  $\alpha_2 \geq 0, \dots, \alpha_m \geq 0$ , où  $\bar{\alpha} \geq \Delta$  pour tout pas de discrétisation  $\Delta$  et  $(t, x) \in [0, \infty] \times \mathbb{R}^d$ , la matrice

$$M(t, x) = I + \alpha_0 c^0(t, x) + \sum_{j=1}^m \alpha_j c^j(t, x) \quad (1.170)$$

admet une matrice inverse qui satisfait la condition

$$|(M(t, x))^{-1}| \leq K < \infty, \quad (1.171)$$

En général, cette dernière condition est vérifiée si les matrices  $c^0, c^1, \dots, c^m$  sont définies positives. Généralement, on peut supposer que les composantes de ces matrices sont uniformément bornées. Cette méthode converge fortement avec un ordre  $\gamma = 0.5$ . Pour la preuve, on peut utiliser un résultat essentiel dû à Milstein [34].

**Théorème 1.5 (de Milstein)** *Supposons que pour une approximation discrète  $Y$  a un pas de discrétisation dans l'intervalle  $[t_0, T]$ , et que si l'erreur locale et l'erreur en moyenne quadratique pour tout  $N = 1, 2, \dots$ , et  $n = 0, 1, \dots, N-1$  vérifient les estimations*

$$|E[(Y_{n+1} - Y(x_{n+1})) \setminus Y_n = Y(x_n)]| \leq K (1 + |Y_n|^2)^{1/2} \Delta^{p_1} \quad (1.172)$$

et

$$(E[(Y_{n+1} - Y(x_{n+1}))^2 \setminus Y_n = Y(x_n)])^{1/2} \leq K (1 + |Y_n|^2)^{1/2} \Delta^{p_2} \quad (1.173)$$

avec  $p_2 \geq 1/2$  et  $p_1 \geq p_2 + 1/2$ .

Alors

$$(E[(Y_k - Y(x_k))^2 \setminus Y_0 = Y(x_0)])^{1/2} \leq K (1 + |Y_0|^2)^{1/2} \Delta^{p_2-1/2} \quad (1.174)$$

pour chaque  $k = 0, 1, 2, \dots, N$ . Notons que la constante  $K$  est indépendante de  $\Delta$  mais dépend de la longueur de l'intervalle  $[t_0, T]$ .

## Méthodes implicites de K.Burrage et T.Tian

Dans [45], Burrage et Tian ont introduit trois méthodes implicites de Taylor alors que la méthode connue jusqu'à l'apparition de ces méthodes est la méthode implicite d'Euler dont les deux composantes déterministes et stochastiques sont implicites. Cette approche est un peu pratique à cause de sa propriété de stabilité et de convergence puisque la solution numérique de cette technique converge vers la solution exacte de l'équation backward avec un ordre  $\gamma = 0.5$ . Elle s'écrit sous la forme

$$Y_{n+1} = Y_n + a(\tau_{n+1}, Y_{n+1})\Delta + b(\tau_{n+1}, Y_{n+1})\Delta W. \quad (1.175)$$

Contrairement à la solution numérique des méthodes explicites et semi-implicites d'Euler converge vers la solution exacte de l'équation différentielle stochastique au sens de Itô. La convergence de la méthode d'Euler implicite peut être déduite à partir de la méthode de prédiction correction dont le correcteur est la méthode implicite d'Euler et la prédiction, la méthode explicite :

$$\begin{cases} \bar{Y}_{n+1} = Y_n + \Delta a(Y_n) + \Delta W_n b(Y_n), \\ Y_{n+1} = Y_n + \Delta a(\bar{Y}_{n+1}) + \Delta W_n b(\bar{Y}_{n+1}) \end{cases} \quad (1.176)$$

L'idée de départ introduite par T.Tian et K.Burrage, pour construire une méthode de Taylor d'ordre  $\gamma = 0.5$  pour résoudre l'équation différentielle (1.143) consiste à utiliser la méthode implicite avec le terme dérive modifié

$$Y_{n+1} = Y_n + \Delta [a - bb'] (Y_{n+1}) + b(Y_{n+1})\Delta W_n, \quad (1.177)$$

cette méthode est obtenue en tenant compte des relations entre l'équation (1.143) au sens de Itô et l'équation au sens backward

$$dX_t = a_2(t, X_t)dt + b(t, X_t) \bullet dW_t \quad (1.178)$$

où

$$a_2(t, X_t) = a(t, X_t) - b(t, X_t)b'(t, X_t) \quad (1.179)$$

Soit l'équation linéaire test donnée par

$$dX_t = \lambda X_t dt + \mu X_t dW_t, \quad X(t_0) = X_0 \quad (1.180)$$

en appliquant la méthode itérative (1.177) à l'équation test (1.180), on obtient

$$Y_{n+1} = \frac{1}{1 - (p - q^2) - q\widehat{N}} Y_n \quad (1.181)$$

où

$$p = \lambda\Delta, q = \mu\sqrt{\Delta}, \Delta W_n = \sqrt{\Delta}\hat{N} \text{ et } \hat{N} \sim N(0, 1).$$

La solution numérique peut être non bornée si le générateur de nombres aléatoires est tel que  $\hat{N} \approx \frac{1-(p-q^2)}{q}$ .

Pour résoudre ce problème, T.Tian et K.Burrage ont considéré le coefficient de diffusion modifié  $b(Y_{n+1})b'(Y_{n+1})(\Delta W_n^2)$  au lieu du terme  $b(Y_{n+1})b'(Y_{n+1})\Delta$  dans la méthode implicite (1.177). Cette considération donne la méthode implicite dite de Euler-Taylor suivante :

$$Y_{n+1} = Y_n + \Delta a(Y_{n+1}) + b(Y_{n+1})\Delta W_n - b(Y_{n+1})b'(Y_{n+1})(\Delta W_n^2) \quad (1.182)$$

De la même façon, on obtient la méthode implicite de Milstein Taylor pour l'EDS (1.143)

$$Y_{n+1} = Y_n + \Delta a(Y_{n+1}) + b(Y_{n+1})\Delta W_n - \frac{1}{2}b(Y_{n+1})b'(Y_{n+1})((\Delta W_n^2) + \Delta). \quad (1.183)$$

Ils ont aussi utilisés des techniques de Platen données par

$$b(x)b'(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \left( b(x + \sqrt{\Delta}b(x)) - b(x) \right) + O(\sqrt{\Delta}) \quad (1.184)$$

$$b(x)b'(x) = \frac{1}{\Delta} (b(x + \Delta b(x)) - b(x)) + O(\Delta) \quad (1.185)$$

Ces techniques sont utilisées pour éviter le calcul des dérivées dans les méthodes de Runge-Kutta. L'utilisation des techniques (1.184) et (1.185) donnent les deux méthodes implicites de Milstein Taylor modifiées

$$Y_{n+1} = Y_n + \Delta a(Y_{n+1}) + b(Y_{n+1})\Delta W_n - \frac{1}{2\sqrt{\Delta}} \left( b(Y_{n+1} + \sqrt{\Delta}b(Y_{n+1})) - b(Y_{n+1}) \right) ((\Delta W_n^2) + \Delta) \quad (1.186)$$

$$Y_{n+1} = Y_n + \Delta a(Y_{n+1}) + b(Y_{n+1})\Delta W_n - \frac{1}{2\Delta} (b(Y_{n+1} + \Delta b(Y_{n+1})) - b(Y_{n+1})) ((\Delta W_n^2) + \Delta) \quad (1.187)$$

La première méthode est dite méthode implicite de Milstein modifiée de type 1 et la deuxième est appelée méthode implicite de Milstein modifiée de type 2. Une autre

méthode implicite de Taylor d'ordre 1.5 qui correspond aux méthodes explicites et semi-implicites de Taylor d'ordre 1.5 est donnée par

$$\begin{aligned}
Y_{n+1} = & Y_n + \Delta a(Y_{n+1}) + b(Y_{n+1})\Delta W_n - \frac{1}{2}b(Y_{n+1})b'(Y_{n+1})((\Delta W_n)^2 + \Delta) \quad (1.188) \\
& - \frac{1}{2}\Delta^2 \left( aa' + \frac{1}{2}a''b^2 \right) (Y_{n+1}) + \frac{1}{2} \left( \Delta W_n + \frac{\Delta W_{n1}}{\sqrt{3}} \right) \Delta (ba') (Y_n) \\
& + \frac{1}{2} \left( \Delta W_n - \frac{\Delta W_{n1}}{\sqrt{3}} \right) \left( ab' + \frac{1}{2}b''b^2 \right) (Y_n) \\
& + \frac{1}{6} ((\Delta W_n)^3 - 3\Delta\Delta W_n) (b'^2b + b''b^2) (Y_n) \\
& - \Delta\Delta W_n \left[ ba' + ab' - \frac{1}{2}b''b^2 - b'^2b \right] (Y_n) \\
& + \frac{1}{2}\Delta ((\Delta W_n)^2 + \Delta) \left[ b' \left( ab' + \frac{1}{2}b''b^2 \right) + b \left( ab'' + \frac{1}{2}b'''b^2 \right) \right] (Y_n) \\
& + \frac{1}{4} ((\Delta W_n)^4 - \Delta^2) [b' (b''b^2 + b'^2b) + b^2 (b''b' + b'''b)] (Y_n) \\
& - \frac{1}{2}\Delta (\Delta W_n)^2 \left[ a (b''b + b'^2) + \frac{1}{2}b^2 (3b''b' + b'''b) \right] (Y_n) \\
& - \frac{1}{2}\Delta (\Delta W_n)^2 \left[ b \left( a'b' + ab'' + bb''b' + \frac{1}{2}b'''b^2 \right) \right] (Y_n) \\
& + \frac{1}{2} (\Delta W_n)^2 ((\Delta W_n)^2 + \Delta) [b^2b''b'] (Y_n)
\end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Milstein, ils ont montré, que la solution numérique de la méthode implicite de Milstein Taylor et celle de la méthode implicite de Milstein modifiée de type 2 converge vers la solution exacte de l'EDS (1.143) au sens de Itô avec un ordre  $\gamma = 1.0$ . La méthode implicite de Milstein Taylor modifiée de type 1 n'est pas performante comme les méthodes implicites de Milstein puisqu'elle converge seulement avec un ordre  $\gamma = 0.5$  au sens de la convergence forte. Le théorème de Milstein indique également que la méthode implicite de Taylor est d'ordre  $\gamma = 1.5$ .

### La méthode composite d'Euler

Dans [18], les auteurs ont introduit une méthode pour les solutions fortes des EDS. En particulier pour les EDS raides, cette méthode est dite méthode composite d'Euler qui est une combinaison entre la méthode semi-implicite et la méthode implicite d'Euler. A chaque itération, l'une des méthodes semi-implicite ou implicite est utilisée pour obtenir une meilleure stabilité. Les critères pour choisir l'une des méthodes

sont basés sur la propriété de stabilité. La convergence de cette méthode dépend de ces critères. Les résultats numériques obtenues montrent que cette technique est largement meilleure que les méthodes d'Euler. Lorsqu'on considère une équation différentielle stochastique de type (1.143), il ya deux directions pour développer les méthodes numériques stochastiques, soit construire des nouvelles méthodes en partant de zéro, soit à appliquer les méthodes existantes. Par exemple pour résoudre l'équation différentielle ordinaire

$$dX(t) = a(t, X(t))dt, \quad X(t_0) = X_0, t \in [t_0, T] \quad (1.189)$$

on applique la méthode explicite de Euler

$$Y_{n+1} = Y_n + a(\tau_n, Y_n)\Delta \quad (1.190)$$

ou la méthode semi-implicite d'Euler

$$Y_{n+1} = Y_n + a(\tau_{n+1}, Y_{n+1})\Delta \quad (1.191)$$

avec  $\tau_n = t_0 + n\Delta$  ( $n = 0, 1, \dots, N$ ) et  $\Delta = (T - t_0)/N$ . En plus de ces méthodes, il existe trois méthodes d'Euler pour l'EDS (1.143). Il s'agit de :

1. La méthode explicite d'Euler

$$Y_{n+1} = Y_n + \Delta a(\tau_n, Y_n) + b(\tau_n, Y_n)\Delta W_n, \quad (1.192)$$

2. La méthode semi-implicite d'Euler

$$Y_{n+1} = Y_n + \Delta a(\tau_{n+1}, Y_{n+1}) + b(\tau_n, Y_n)\Delta W_n, \quad (1.193)$$

3. La méthode implicite d'Euler

$$Y_{n+1} = Y_n + \Delta a(\tau_{n+1}, Y_{n+1}) + b(\tau_{n+1}, Y_{n+1})\Delta W_n, \quad (1.194)$$

où

$$\Delta W_n = W(\tau_{n+1}) - W(\tau_n). \quad (1.195)$$

A cause de la nature spécifique du processus de Wiener, plusieurs difficultés se posent pour généraliser les méthodes pour les EDO au cas des EDS. Malgré la simplicité de ces méthodes, l'une des difficultés rencontrées est lorsqu'on est en présence de problèmes raides. En appliquant la méthode explicite d'Euler à l'équation linéaire test

$$X' = \lambda X, \quad \Re(\lambda) < 0 \quad (1.196)$$

on obtient

$$Y_{n+1} = (1 + \lambda\Delta)Y_n \quad (1.197)$$

et la méthode explicite d'Euler est stable si

$$|1 + \lambda\Delta| < 1 \quad (1.198)$$

ou si  $\lambda\Delta$  appartient au disque unité de centre  $(-1,0)$ . En appliquant la méthode implicite à l'équation linéaire test, on obtient

$$Y_{n+1} = \frac{1}{1 - \lambda\Delta} Y_n, \quad (1.199)$$

la méthode implicite d'Euler est stable si

$$\left| \frac{1}{1 - \lambda\Delta} \right| < 1 \quad (1.200)$$

et donc stable quelque soit  $\Delta > 0$ . Ceci indique que la méthode implicite d'Euler peut être largement utilisée pour les problèmes raides ( dont les valeurs propres de l'EDO ont des parties réelles négatives largement différentes ). Maintenant, on va voir ce qui se passe pour le cas stochastique. En appliquant la méthode implicite stochastique d'Euler à l'équation linéaire (1.180) ( interprétée au sens de Itô ), on obtient

$$Y_{n+1} = R(\lambda, \mu, \Delta, \Delta W_n) Y_n \quad (1.201)$$

où

$$R(\lambda, \mu, \Delta, \Delta W_n) = \frac{1}{1 - \lambda\Delta - \mu\Delta W_n} \quad (1.202)$$

puisque  $\Delta W_n$  peut prendre n'importe quelle valeur dans  $\mathbb{R}$  alors  $|R|$  peut être non bornée pour certaines valeurs de  $\lambda, \mu$  et  $\Delta$ . En ce qui concerne les problèmes raides pour les deux composantes déterministes et stochastiques, la méthode d'Euler n'est pas pertinente. En effet, la solution de cette méthode numérique converge vers la solution exacte de l'équation différentielle stochastique backward. Pour remédier à cette situation une méthode modifiée a été construite par T.Tian et K.Burrage ce qui a permis d'améliorer la propriété de stabilité des méthodes d'Euler. La difficulté connue concernant la méthode implicite d'Euler est que  $R(\lambda, \mu, \Delta, \Delta W_n)$  peut tendre vers l'infini si le générateur du nombre aléatoire  $\Delta W_n$  est au voisinage de  $(1 - \lambda\Delta)/\mu$ . Dans ce cas, une autre méthode peut être utilisée comme la méthode semi-implicite d'Euler. Ceci revient à construire la méthode composite suivante :

$$Y_{n+1} = \begin{cases} \frac{1+\mu\Delta W_n}{1-\lambda\Delta} Y_n & \text{sous certaines conditions} \\ \frac{1}{1-\lambda\Delta-\mu\Delta W_n} Y_n & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.203)$$

Cette méthode est dite méthode composite d'Euler, elle est donnée par

$$Y_{n+1} = Y_n + \Delta a(\tau_{n+1}, Y_{n+1}) + (\lambda_n b(\tau_n, Y_n) + (1 - \lambda_n) b(\tau_{n+1}, Y_{n+1})) \Delta W_n \quad (1.204)$$

où  $\lambda_n \in [0, 1]$  est déterminé à chaque itération. Pour  $\lambda_n = 0$  et  $\lambda_n = 1$ , on obtient respectivement les méthodes implicite et semi-implicite d'Euler. On peut obtenir une famille de méthodes composites d'Euler si plusieurs critères concernant  $\lambda_n$  sont utilisés.

## Méthodes de Runge-Kutta

Cette partie est consacrée à la théorie du développement des conditions de l'ordre des méthodes de Runge-Kutta stochastiques pour résoudre les EDS. En général les solutions analytiques sont rarement connues. Il est nécessaire donc d'établir des méthodes numériques pour générer des approximations aux solutions exactes. Etant donnée une méthode numérique, il est important de savoir calculer l'ordre de précision. Dans le domaine des EDS, il existe deux directions pour mesurer cette précision : convergence forte et convergence faible. Pour la convergence forte, des échantillons des trajectoires peuvent être calculés. Par contre pour la convergence faible, plusieurs moments de la solution peuvent être déterminés. Dans la thèse de Pamela Burrage [12] différentes méthodes de Runge Kutta avec différents ordres ont été obtenues. L'étude est basée sur le calcul au sens de Stratonovich. La représentation peut être convertie vers le calcul de Itô et vice versa. Dernièrement, certaines travaux se sont basées sur le calcul de Itô et le calcul de Stratonovich pour la construction des méthodes de Runge-Kutta [16, 14, 49, 15, 11, 46, 44]. Dans le cas des méthodes de Runge-Kutta pour les problèmes déterministes, l'ordre de convergence est obtenu en comparant les développements de Taylor de la méthode numérique ( solution numérique ) avec la solution exacte dans une itération en supposant des valeurs initiales exactes. Dans le cas déterministe, cette théorie a été introduite par Butcher [19]. Après, elle a été développée dans le cas stochastique. Pour arriver aux conditions permettant d'obtenir l'ordre de convergence, il faut comparer directement la méthode de Runge-Kutta avec la formule stochastique de Taylor ( au sens de Itô ou Stratonovich). Les conditions pour déduire des méthodes de Runge-kutta peuvent être obtenues en développant la solution exacte et la solution numérique en série de Taylor. On considère l'équation différentielle ordinaire autonome suivante :

$$dX(t) = a(X(t))dt, \quad X(t_0) = X_0, \quad X \in R^m, \quad t \in [t_0, T] \quad (1.205)$$

Les méthodes de Runge-Kutta de s-étape pour résoudre l'EDO précédente sont données par

$$\begin{aligned} Y_i &= y_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} a(Y_j), \quad i = 1, \dots, s \\ y_{n+1} &= y_n + h \sum_{j=1}^s b_j a(Y_j) \end{aligned} \quad (1.206)$$

où  $h = \Delta$  est le pas de discrétisation de l'intervalle  $[t_0, T]$ . Ces méthodes sont représentées dans le tableau suivant dit tableau de Butcher

$$\begin{array}{|c|c|} \hline c & A \\ \hline & b^T \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_s \end{array} \left[ \begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & & & & a_{2s} \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ a_{s1} & a_{s2} & & & & a_{ss} \\ b_1 & b_2 & & & & b_s \end{array} \right] \quad (1.207)$$

avec  $c = Ae$ ,  $e = (1, \dots, 1)^T$ . Dans le tableau de Butcher, si  $a_{ij} = 0$  pour  $j \geq i$ , alors

la méthode de Runge-Kutta est dite explicite, et si  $a_{ij} = 0$  pour  $j > i$ , la méthode est dite semi-implicite, par contre si les  $a_{ij}$  pour  $j \geq i$  ne sont pas tous nuls, alors la méthode associée est dite implicite. La version stochastique de l'équation (1.205) au sens de Stratonovich est donnée par

$$dX(t) = a(X(t))dt + \sum_{j=1}^m b_j(X(t)) \circ dW_j(t), \quad X(t_0) = X_0, X \in R^m, \quad t \in [t_0, T] \quad (1.208)$$

où  $W_j(t)$  est le processus de Wiener dont l'accroissement  $\Delta W_j(t) = W_j(t + \Delta t) - W_j(t)$  est une variable aléatoire  $\mathbb{N}(0, \Delta t)$ . Pour résoudre l'équation (1.208), une généralisation de la classe (1.206) est établie par Burrage et Burrage [11, 14, 15, 12]. Elle est donnée par :

$$\begin{aligned} Y_i &= y_n + \sum_{k=0}^d \sum_{j=1}^s Z_{ij}^{(k)} b_k(Y_j), \quad j = 1, \dots, s \\ y_{n+1} &= y_n + \sum_{k=0}^d \sum_{j=1}^s z_j^{(k)} b_k(Y_j), \quad j = 1, \dots, s \end{aligned}$$

avec  $b_0 = a$ ,  $Z_{ij}^{(k)}$  et  $z_j^{(k)}$  sont des variables aléatoires qui dépendent de  $\Delta$ . Dans le cas unidimensionnel  $d = 1$ , on écrit

$$\begin{aligned} Y_i &= y_n + \sum_{j=1}^s Z_{ij}^{(0)} a(Y_j) + \sum_{j=1}^s Z_{ij}^{(1)} b_1(Y_j), \quad j = 1, \dots, s \\ y_{n+1} &= y_n + \sum_{j=1}^s z_j^{(0)} a(Y_j) + \sum_{j=1}^s z_j^{(1)} b_1(Y_j), \quad j = 1, \dots, s \end{aligned} \quad (1.209)$$

# Chapitre 2

## Méthodes semi-implicites de Taylor Itô d'ordre supérieur

### 2.1 Introduction

Les solutions explicites des équations différentielles stochastiques (EDS) sont rarement connues en général. Il est donc nécessaire d'utiliser des méthodes numériques pour obtenir des solutions approchées. Il existe deux techniques pour mesurer l'exactitude de cette approximation, l'une utilise la convergence en moyenne quadratique (convergence forte) qui consiste en l'approximation des trajectoires des solutions, tandis que la deuxième approche concerne l'approximation de quelques moments de la solution. Cette convergence est appelée la convergence au sens faible. Plusieurs méthodes ont été proposées dans les deux cas [28]. Plusieurs problèmes sont raides comme dans le cas déterministe. Ils sont caractérisés par le fait que les valeurs propres du système linéaire correspondant vérifient  $\lambda_d \leq \lambda_{d-1} \leq \dots \leq \lambda_1 < 0$  et que  $\lambda_d \ll \lambda_1$ . L'intégration des problèmes raides nécessitent l'utilisation des méthodes ayant de bonnes propriétés de stabilité comme les méthodes implicites et de prédiction-correction [28, 45]. La première idée pour améliorer un schéma numérique est dû à Platen [28, 37]. Une approche générale pour construire des méthodes semi-implicites de Taylor a été développée dans cette thèse. Ce chapitre se divise comme suit :

1. Dans la première sous-section, on définit le type de la convergence faible avec quelques résultats de base.
2. Dans la sous section 3, on expose certaines méthodes explicites.
3. La formule de Taylor est utilisée pour établir une famille de méthodes semi-

implicites d'ordre 3 dans le cas général et une famille de méthodes d'ordre 4 pour des équations avec un bruit additif. De plus dans le cas scalaire, une famille plus simplifiée a été obtenue.

4. Dans la dernière sous-section, on étudie d'une part, la propriété de stabilité de cette famille de méthodes qui dépendent de certain degré d'implicité (implicitness). D'autre part, on effectue des simulations numériques pour confirmer les propriétés de convergence et de stabilité.

## 2.2 Approximations faibles

On considère l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}_t, P)$ ,  $\{W_t\}$  un processus de Wiener  $m$ -dimensionnel et le processus de Itô solution de l'EDS suivante :

$$dX_t = a(t, X_t)dt + \sum_{j=1}^m b^j(t, X_t)dW_t^j \quad (2.1)$$

avec  $a = (a^1, \dots, a^d)$  est le vecteur dérive, et  $b^j = (b^{1j}, \dots, b^{dj})$   $j = 1, \dots, m$  le coefficients de diffusion. Les fonctions  $a = a(t, x)$  et  $b^j = b^j(t, x)$  sont supposées définies, mesurables dans  $[t_0, T] \times \mathbb{R}^d$  et vérifient la condition de Lipschitz et la condition de la croissance bornée par rapport à  $x$ . Ces conditions assurent l'existence et l'unicité de la solution de l'équation 2.1 avec la condition initiale  $X_{t_0} = X_0$ , si  $X_0$  est  $\mathcal{A}_{t_0}$  mesurable. De plus, on suppose aussi que les moments  $E|X_0|^r < \infty$ ,  $r = 1, 2, \dots$  existent, donc les moments de chaque  $X_t$  existent. Soit  $X_{t,x}$  la solution de l'équation 2.1 qui prend la valeur  $x \in \mathbb{R}^d$  au point  $t \in [t_0, T]$ . On note  $\mathcal{C}_p$  l'espace des fonctions  $f(t, x)$  définies sur  $[t_0, T] \times \mathbb{R}^d$  qui vérifient la condition de croissance polynomiale ( par rapport à  $x$ ) et  $\mathcal{C}_p^N$ ,  $N = 1, 2, \dots$  le sous espace des fonctions  $f \in \mathcal{C}_p$  dont les dérivées partielles jusqu'à l'ordre  $N$  sont dans  $\mathcal{C}_p$ . On associe à l'équation (2.1) l'approximation à un pas

$$\bar{X}_{t,x}(t+h) = x + A(t, x, h, \xi) \quad (2.2)$$

où  $A$  est une fonction à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  et  $\xi$  un vecteur aléatoire. On dit que l'approximation à un pas  $\bar{X} = \bar{X}_{t,x}$  converge faiblement vers  $X = X_{t,x}$  avec un ordre local  $N+1$ , s'il existe une fonction  $K(x) \in \mathcal{C}_p$  telle que

$$|E[\prod_{j=1}^l (\bar{X}^{i_j} - x^{i_j}) - \prod_{j=1}^l (X^{i_j} - x^{i_j})]| \leq K(x)h^{N+1}, i_j = 1, \dots, d, l = 1, \dots, 2N+2, \quad (2.3)$$

où  $z^i$  désigne la composante d'ordre  $i$  du vecteur  $z$ . A partir de l'inégalité (2.3), on voit que les différences entre les moments d'ordre un jusqu'à l'ordre  $(2N+2)$  du vecteur  $X$  et de l'approximation  $\bar{X}$  est d'ordre  $h^{N+1}$ . Etant donnée une discrétisation  $\{t_0, t_1, \dots, t_M\}$  de l'intervalle  $[t_0, T]$  avec un pas constant  $\Delta = (T - t_0/M)$ . L'approximation (2.1) donne l'approximation :  $Y_0 = X_0, Y_{n+1} = Y_n + A(t_n, Y_n, \Delta, \xi), n = 0, \dots, M-1$ . On dit que le schéma  $Y = \{Y_0, Y_1, \dots, Y_M\}$  converge faiblement vers  $X$  avec un ordre  $N$  si pour toute fonction  $g \in \mathcal{C}_p^{2N+2}$ , il existe une constante  $K_g$  et  $\Delta_0 > 0$  telles que

$$E[g(Y_M) - g(X_T)] \leq K_g \Delta^N$$

pour tout  $\Delta \in (0, \Delta_0)$ . Le nombre  $N$  dans la définition précédente est l'ordre du schéma dans un intervalle. En se basant sur un théorème de Milstein [34] qui affirme que pour obtenir des schémas d'ordre  $N$ , il faut que l'approximation à un pas est d'ordre local  $N+1$ . On dit que deux approximations à un pas  $\bar{X}_{t,x}$  et  $\bar{\bar{X}}_{t,x}$  de la solution  $X_{t,x}$  sont  $\mathbf{N}$ -équivalentes s'il existe une fonction  $k(x) \in \mathcal{C}_p$  telle que

$$|E[\prod_{j=1}^l (\bar{X}^{i_j} - x^{i_j}) - \prod_{j=1}^l (\bar{\bar{X}}^{i_j} - x^{i_j})]| \leq k(x) h^{N+1}, \quad i_j = 1, \dots, d, l = 1, \dots, 2N+2.$$

On note  $\bar{X}_{t,x} \stackrel{(N)}{\simeq} \bar{\bar{X}}_{t,x}$  ou  $\bar{Y}_{n+1} \stackrel{(N)}{\simeq} \bar{\bar{Y}}_{n+1}$  si  $\bar{Y}$  et  $\bar{\bar{Y}}$  sont les schémas correspondants. Avec la notation précédente,  $\bar{X}_{t,x} \stackrel{(N)}{\simeq} X_{t,x}$  pour chaque ordre local  $N+1$  de l'approximation à un pas  $\bar{X}_{t,x}$  de la solution  $X_{t,x}$ .

## 2.3 Approximations faibles de Taylor

Dans [28], les auteurs présente une technique pour construire des schémas de Taylor au sens faible d'ordre quelconque. A partir de l'équation (2.1), on définit les opérateurs différentiels.

$$L^{(k)} = \sum_{i=1}^d b^{ik} \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad L^{(0)} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^d a^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \sum_{k=1}^m b^{ik} b^{jk} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}, \quad k = 1, \dots, m. \quad (2.4)$$

Pour chaque multi-indice  $\alpha = (j_1, \dots, j_l)$  de longueur  $l(\alpha) = l > 1$  et de composantes  $j_1, \dots, j_l \in \{0, \dots, m\}$ , on définit l'opérateur  $L^\alpha = L^{j_1} L^{j_2} \dots L^{j_l}$ . Dans [28], le théorème (5.11.1) montre que pour une équation différentielle stochastique au sens de Itô avec un vecteur dérive  $a^k$  et un coefficient de diffusion  $b^{kj}$  dans  $\mathcal{C}_p^{2N+1}$  vérifiant les conditions de Lipschitz et de croissance bornée, la formule de Taylor d'ordre  $N \in \mathbb{N}$  de

$f(t, x) = x$  (obtenue en tenant compte dans la formule de Taylor de tous les termes d'ordre inférieur ou égal à  $N$ ) donne le schéma à un pas de  $X_t$  d'ordre local  $N + 1$

$$f(t, X_t) \stackrel{(N)}{\simeq} f(t_0, X_{t_0}) + \sum_{1 \leq l(\alpha) \leq N} (L^\alpha f)(t_0, X_{t_0}) I_{\alpha, t_0, t}, \quad (2.5)$$

où  $I_{\alpha, t_0, t} = \int_{t_0}^t (\int_{t_0}^{s_l} \dots \int_{t_0}^{s_3} (\int_{t_0}^{s_2} dW_{s_1}^{j_1}) dW_{s_2}^{j_2} \dots) dW_{s_l}^{j_l}$  avec  $dW_t^0 = dt$ . Le schéma correspondant est d'ordre faible  $N$ ,

$$Y_{n+1} = Y_n + \sum_{l(\alpha)=1}^N L^\alpha f \cdot I_\alpha. \quad (2.6)$$

On remplace  $I_{\alpha, t_n, t_{n+1}}$  par  $I_\alpha$  et  $(L^\alpha f)(t_n, Y_n)$  par  $L^\alpha f$ . Ce schéma est appelé le schéma de Taylor d'ordre faible  $N$ . Pour simplifier, on note  $g$  ou  $g_n$  au lieu de  $g(t_n, Y_n)$ . Le schéma (2.6) est d'ordre faible  $N$  si les intégrales multiples  $I_\alpha$  sont remplacées par les variables aléatoires  $\hat{I}_\alpha$  avec les mêmes premiers moments jusqu'à l'ordre  $2N + 1$ , c'est à dire satisfaisant la condition d'existence d'une constante  $k > 0$  tel que

$$\left| E \left[ \prod_{k=1}^l I_{\alpha_k} - \prod_{k=1}^l \hat{I}_{\alpha_k} \right] \right| \leq k \Delta^{N+1} \quad (2.7)$$

pour tout choix de multi-indice  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$ ,  $l = 1, \dots, 2N + 1$ , avec  $1 \leq l(\alpha_k) \leq N$ . Dans ce cas, on obtient les schémas de Taylor simplifiés correspondant d'ordre faible  $N$  donnés :

$$Y_{n+1} = Y_n + \sum_{l(\alpha)=1}^N L^\alpha f \cdot \hat{I}_\alpha \quad (2.8)$$

Par exemple, si on prend  $N = 1$  dans l'équation (2.6), on obtient la méthode d'Euler

$$Y_{n+1} = Y_n + a\Delta + \sum_{j=1}^m b^j \Delta W_n^j \quad (2.9)$$

où  $\Delta W_n^j = I_j$ ,  $j = 1, \dots, m$  sont les accroissements gaussiens des composantes du processus de Wiener dans  $[t_n, t_{n+1}]$ . Le schéma 2.9 est d'ordre faible  $N = 1.0$  et les variables  $\Delta W_n^j = I_j$ ,  $j = 1, \dots, m$  sont remplacées par les variables  $\hat{\Delta W}_n^j = \hat{I}_j$  satisfaisant la condition (2.7) avec  $N = 1$ . On obtient

$$|E(\Delta \hat{W}_j)| + |E((\Delta \hat{W}_j)^3)| + |E((\Delta \hat{W}_j)^2) - \Delta| \leq K \Delta^2 \quad (2.10)$$

La méthode d'Euler est la méthode la plus simple des méthodes de Taylor. La méthode d'ordre 2 est proposée pour la première fois dans [31]. Elle est aussi obtenue à partir de la procédure précédente avec  $N = 2$  ( voir [28]). Pour obtenir un schéma d'ordre faible 3.0, on prend  $N = 3.0$  dans (2.6). Dans [28], un schéma d'ordre 3.0 simplifié a été proposé par Platen pour le cas scalaire avec un bruit additif ( $d = m = 1$ ) :

$$\begin{aligned}
Y_{n+1} = & Y_n + a\Delta + b\Delta\widehat{W}_n + \frac{1}{2}L^1b(\Delta\widehat{W}_n^2 - \Delta) + L^1a\Delta\widehat{Z}_n + \frac{1}{2}L^0a\Delta^2 \\
& + L^0b \left[ \Delta\widehat{W}_n\Delta - \Delta\widehat{Z}_n \right] + \frac{1}{6}(L^0L^0b + L^0L^1a + L^1L^0a)\Delta\widehat{W}_n\Delta^2 \\
& + \frac{1}{6}(L^1L^1a + L^0L^1b + L^1L^0b)((\Delta\widehat{W}_n)^2 - \Delta)\Delta + \frac{1}{6}L^0L^0a\Delta^3 + \frac{1}{6}L^1L^1b \left[ (\Delta\widehat{W}_n)^2 - 3\Delta \right] \Delta\widehat{W}_n
\end{aligned} \tag{2.11}$$

où  $\Delta\widehat{W}_n$  et  $\Delta\widehat{Z}_n$  sont des variables aléatoires telles que

$$\Delta\widehat{W}_n \sim N(0, \Delta), \quad \Delta\widehat{Z}_n \sim N(0, \frac{1}{3}\Delta^3) \text{ et } E(\Delta\widehat{W}_n\Delta\widehat{Z}_n) = \frac{1}{2}\Delta^2. \tag{2.12}$$

Pour des implémentations numériques plus efficaces, N.Bruti [7] a proposé la même méthode en utilisant la variable  $\Delta\widehat{W}$  comme une variable aléatoire à cinq points distribués avec

$$P(\Delta\widehat{W} = \pm\sqrt{6\Delta}) = \frac{1}{30}, \quad P(\Delta\widehat{W} = \pm\sqrt{\Delta}) = \frac{3}{10}, \quad P(\Delta\widehat{W} = 0) = \frac{1}{3},$$

$$\Delta\widehat{Z} = \frac{1}{2} \left( \Delta\widehat{W} + \frac{1}{\sqrt{3}}\Delta\tilde{W} \right) \Delta$$

où  $\Delta\tilde{W}$  est une variable à deux points qui vérifie

$$p(\Delta\tilde{W} = \pm\sqrt{\Delta}) = \frac{1}{2}.$$

Pour obtenir une méthode d'ordre faible 4.0, il faut inclure toutes les intégrales multiples d'ordre 4.0 dans la formule de Itô-Taylor. Pour le cas unidimensionnel et avec un bruit additif ( $m = 1$ ,  $b(t, x) = b(t)$ , pour tout  $(t, x)$ ), la méthode de Taylor

explicite d'ordre 4.0 est donnée par

$$\begin{aligned}
Y_{n+1} = & Y_n + a\Delta + bI_{(1)} + L^{(1)}aI_{(1,0)} + \frac{1}{2}L^{(0)}a\Delta^2 + L^{(0)}bI_{(0,1)} + L^{(0,0)}a\frac{\Delta^3}{3!} \\
& + L^{(1,0)}aI_{(1,0,0)} + L^{(0,1)}aI_{(0,1,0)} + L^{(0,0)}aI_{(0,0,1)} + L^{(1,1)}aI_{(1,1,0)} \\
& + L^{(0,0,0)}a\frac{\Delta^4}{4!} + L^{(1,0,0)}aI_{(1,0,0,0)} + L^{(0,1,0)}aI_{(0,1,0,0)} \\
& + L^{(0,0,1)}aI_{(0,0,1,0)} + L^{(0,0,0)}bI_{(0,0,0,1)} + L^{(1,1,0)}aI_{(1,1,0,0)} \\
& + L^{(1,0,1)}aI_{(1,0,1,0)} + L^{(0,1,1)}aI_{(0,1,1,0)} + L^{(1,1,1)}aI_{(1,1,1,0)}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Dans [47], une méthode d'ordre 4.0 simplifiée est obtenue en remplaçant les intégrales  $I_\alpha$  dans (2.13) par les intégrales  $\hat{I}_\alpha$  satisfaisant la condition (2.7) avec  $N = 4$  :

$$\begin{aligned}
\hat{I}_{(1)} &= \Delta\hat{W}; \quad \hat{I}_{(1,0)} = \Delta\hat{Z}; \quad \hat{I}_{(0,1)} = \Delta\hat{W}\Delta - \Delta\hat{Z}; \quad \hat{I}_{(0,1,0)} = \frac{1}{6}\Delta\hat{W}\Delta^2 \\
\hat{I}_{(1,1,0)} &= \frac{1-\sqrt{2}}{2}\Delta\hat{W}\Delta\hat{Z} + \frac{3\sqrt{2}-2}{24}\Delta\hat{W}^2\Delta - \frac{4+\sqrt{2}}{24}\Delta^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\Delta\hat{Z}^2/\Delta \\
\hat{I}_{(1,0,0)} &= \frac{1}{2}\Delta\Delta\hat{Z} - \frac{1}{12}\Delta\hat{W}\Delta^2, \quad \hat{I}_{(0,0,1)} = -\frac{1}{2}\Delta\Delta\hat{Z} + \frac{5}{12}\Delta\hat{W}\Delta^2 \\
\hat{I}_{(1,1,1,0)} &= \frac{1}{24}(\Delta\hat{W}^2 - 3\Delta)\Delta\hat{W}\Delta; \quad \hat{I}_{(1,1,0,0)} = \hat{I}_{(0,1,1,0)} = \hat{I}_{(1,0,1,0)} = \frac{1}{24}(\Delta\hat{W}^2 - \Delta)\Delta^2; \\
\hat{I}_{(1,0,0,0)} &= \hat{I}_{(0,1,0,0)} = \hat{I}_{(0,0,1,0)} = \hat{I}_{(0,0,0,1)} = \frac{1}{24}\Delta\hat{W}\Delta^3
\end{aligned} \tag{2.14}$$

où  $\Delta\hat{W}$  et  $\Delta\hat{Z}$  sont deux variables aléatoires comme dans [31].

## 2.4 Méthodes semi-implicites de Taylor

L'introduction de termes implicites dans les méthodes stochastiques est une technique qui permet d'améliorer les problèmes de stabilité. La méthode la plus simple parmi ce type de méthodes est la méthode d'Euler implicite

$$Y_{n+1} = Y_n + a(t_{n+1}, Y_{n+1})\Delta + \sum_{j=1}^m b^j \Delta\hat{W}^j \tag{2.15}$$

où  $\Delta\hat{W}^j$  sont des variables aléatoires indépendantes vérifiant la condition (2.10). A partir de la méthode explicite (2.9) et la méthode implicite (2.15), une famille de

méthodes semi-implicites d'Euler peut être obtenue par

$$Y_{n+1} = Y_n + ((1 - \theta)a + \theta a(t_{n+1}, Y_{n+1}))\Delta + \sum_{j=1}^m b^j \Delta \hat{W}^j \quad (2.16)$$

où  $\theta \in [0, 1]$  peut être interprété comme le degré d'implicité (implicitness). Ces schémas sont appelés aussi les  $\theta$ -méthodes. Elles sont d'ordre 1.0 au sens faible et leurs propriétés de stabilité ont été étudiées dans [25, 41, 40, 39, 42]. Dans [32] et aussi dans [34], Milstein a proposé une famille de méthodes semi-implicites d'ordre 2.0 avec deux paramètres qui appartiennent à l'intervalle  $[0, 1]$ . La propriété de stabilité de cette famille de méthodes a été étudiée dans [48]. Dans [28, 37], Platen a proposé une technique pour obtenir ces deux familles de méthodes semi-implicites d'ordre 1.0 et 2.0 en utilisant la formule de Itô-Taylor. En utilisant ces techniques, nous construisons dans cette section une famille de méthodes semi-implicites d'ordre 3.0 et d'ordre 4.0 contenant comme cas particulier les méthodes explicites (2.11) et (2.13) comme des méthodes d'ordre d'implicité (implicitness) nul.

### 2.4.1 Méthode semi-implicite de Taylor d'ordre 3.0

En utilisant (2.5), avec  $N = 3$ , on obtient pour chaque fonction  $f(t, x)$  suffisamment régulière :

$$f_{n+1} \stackrel{(3)}{\simeq} f_n + \sum_{j=0}^m f_{(j),n} I_{(j)} + \sum_{j_1, j_2=0}^m f_{(j_1, j_2),n} I_{(j_1, j_2)} + \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^m f_{(j_1, j_2, j_3),n} I_{(j_1, j_2, j_3)}, \quad (2.17)$$

où  $f_{\alpha,n}$  signifie  $(L^\alpha f)(t_n, X_n)$  pour chaque multi-indice  $\alpha$ . En particulier, si  $f(t, x) = x$ , on a

$$X_{n+1} - X_n \stackrel{(3)}{\simeq} \sum_{j=0}^m f_{(j),n} I_{(j)} + \sum_{j_1, j_2=0}^m f_{(j_1, j_2),n} I_{(j_1, j_2)} + \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^m f_{(j_1, j_2, j_3),n} I_{(j_1, j_2, j_3)}, \quad (2.18)$$

où  $f_{(0)} = a$ ,  $f_{(j)} = b^j$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $f_{(0,0)} = L^{(0)}a$ , etc. En appliquant la formule (2.17) au coefficient  $f_{(0)}$ , on obtient

$$f_{(0),n+1} \stackrel{(3)}{\simeq} f_{(0),n} + \sum_{j=0}^m f_{(j,0),n} I_{(j)} + \sum_{j_1, j_2=0}^m f_{(j_1, j_2, 0),n} I_{(j_1, j_2)} + \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^m f_{(j_1, j_2, j_3, 0),n} I_{(j_1, j_2, j_3)}. \quad (2.19)$$

Puisque chaque produit  $I_{(j_1, j_2, j_3), n} I_{(0)}$  est une combinaison linéaire des intégrales multiples de longueur 4, on a  $I_{(j_1, j_2, j_3), n} I_{(0)} \stackrel{(3)}{\simeq} 0$  for  $j_1, j_2, j_3 = 0, \dots, m$ . Alors à partir de (2.19) on obtient

$$f_{(0), n} \Delta \stackrel{(3)}{\simeq} f_{(0), n+1} \Delta - \sum_{j=0}^m f_{(j, 0), n} I_{(j)} \Delta - \sum_{j_1, j_2=0}^m f_{(j_1, j_2, 0), n} I_{(j_1, j_2)} \Delta. \quad (2.20)$$

Si  $\theta \in [0, 1]$ , en utilisant (2.18) et (2.20), on obtient

$$\begin{aligned} X_{n+1} - X_n &\stackrel{(3)}{\simeq} \theta f_{(0), n} \Delta + (1 - \theta) f_{(0), n} \Delta \\ &\quad + \sum_{j=1}^m f_{(j), n} I_{(j)} + \sum_{j_1, j_2=0}^m f_{(j_1, j_2), n} I_{(j_1, j_2)} + \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^m f_{(j_1, j_2, j_3), n} I_{(j_1, j_2, j_3)} \\ &\stackrel{(3)}{\simeq} \theta \left( f_{(0), n+1} \Delta - \sum_{j=0}^m f_{(j, 0), n} I_{(j)} \Delta - \sum_{j_1, j_2=0}^m f_{(j_1, j_2, 0), n} I_{(j_1, j_2)} \Delta \right) + (1 - \theta) f_{(0), n} \Delta \\ &\quad + \sum_{j=1}^m f_{(j), n} I_{(j)} + \sum_{j_1, j_2=0}^m f_{(j_1, j_2), n} I_{(j_1, j_2)} + \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^m f_{(j_1, j_2, j_3), n} I_{(j_1, j_2, j_3)} \\ &= (\theta f_{(0), n+1} + (1 - \theta) f_{(0), n}) \Delta + f_{(0, 0), n} (1 - 2\theta) \frac{\Delta^2}{2} \\ &\quad + \sum_{j=1}^m f_{(j), n} I_{(j)} - \theta \sum_{j=1}^m f_{(j, 0), n} I_{(j)} \Delta - \theta \sum_{j_1, j_2=0}^m f_{(j_1, j_2, 0), n} I_{(j_1, j_2)} \Delta \\ &\quad + \sum_{\substack{j_1, j_2=0 \\ j_1 + j_2 \neq 0}}^m f_{(j_1, j_2), n} I_{(j_1, j_2)} + \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^m f_{(j_1, j_2, j_3), n} I_{(j_1, j_2, j_3)}. \end{aligned}$$

Maintenant, on peut utiliser l'expression (2.17) avec la fonction  $f_{(0, 0)}$  en la multipliant par  $\Delta^2$ .

Puisque

$$I_{(j_1, j_2)} \Delta^2 \stackrel{(3)}{\simeq} 0 \text{ et } I_{(j_1, j_2, j_3)} \Delta^2 \stackrel{(3)}{\simeq} 0 \text{ pour } j_1, j_2, j_3 = 0, \dots, m$$

alors

$$f_{(0,0),n+1}\Delta^2 \stackrel{(3)}{\simeq} f_{(0,0),n}\Delta^2 + \sum_{j=0}^m f_{(j,0,0),n} I_{(j)} \Delta^2.$$

Ainsi si  $\beta \in [0, 1]$ , on peut écrire

$$f_{(0,0),n}\Delta^2 = \beta f_{(0,0),n}\Delta^2 + (1 - \beta)f_{(0,0),n}\Delta^2$$

$$\stackrel{(3)}{\simeq} \beta f_{(0,0),n+1}\Delta^2 - \beta \sum_{j=0}^m f_{(j,0,0),n} I_{(j)} \Delta^2 + (1 - \beta)f_{(0,0),n}\Delta^2$$

En remplaçant cette expression dans (2.4.1), on obtient

$$\begin{aligned} X_{n+1} - X_n &\stackrel{(3)}{\simeq} (\theta f_{(0),n+1} + (1 - \theta)f_{(0),n}) \Delta + (1 - 2\theta) (\beta f_{(0,0),n+1} + (1 - \beta)f_{(0,0),n}) \frac{\Delta^2}{2} \\ &\quad + (1 - 3\theta - 3\beta + 6\theta\beta)f_{(0,0,0),n} \frac{\Delta^3}{6} + \sum_{j=1}^m f_{(j),n} I_{(j)} - \theta \sum_{j=1}^m f_{(j,0),n} I_{(j)} \Delta \\ &\quad - \frac{1}{2}(1 - 2\theta)\beta \sum_{j=1}^m f_{(j,0,0),n} I_{(j)} \Delta^2 + \sum_{\substack{j_1, j_2=0 \\ j_1+j_2 \neq 0}}^m f_{(j_1, j_2),n} I_{(j_1, j_2)} \\ &\quad - \theta \sum_{\substack{j_1, j_2=0 \\ j_1+j_2 \neq 0}}^m f_{(j_1, j_2, 0),n} I_{(j_1, j_2)} \Delta + \sum_{\substack{j_1, j_2, j_3=0 \\ j_1+j_2+j_3 \neq 0}}^m f_{(j_1, j_2, j_3),n} I_{(j_1, j_2, j_3)}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Finalement, on peut utiliser l'expression (2.17) avec la fonction  $f_{(0,0,0)}$  en la multipliant par  $\Delta^3$ , et on obtient

$$f_{(0,0,0),n+1}\Delta^3 \stackrel{(3)}{\simeq} f_{(0,0,0),n}\Delta^3.$$

Alors, pour  $\gamma \in [0, 1]$ , on a

$$f_{(0,0,0),n}\Delta^3 = \gamma f_{(0,0,0),n}\Delta^3 + (1 - \gamma)f_{(0,0,0),n}\Delta^3 \stackrel{(3)}{\simeq} \gamma f_{(0,0,0),n+1}\Delta^3 + (1 - \gamma)f_{(0,0,0),n}\Delta^3$$

et en remplaçant cette expression dans (2.21), on obtient

$$\begin{aligned}
X_{n+1} - X_n &\stackrel{(3)}{\cong} (\theta f_{(0),n+1} + (1 - \theta) f_{(0),n}) \Delta \\
&+ (1 - 2\theta) (\beta f_{(0,0),n+1} + (1 - \beta) f_{(0,0),n}) \frac{\Delta^2}{2!} \\
&+ (1 - 3\theta - 3\beta(1 - 2\theta)) (\gamma f_{(0,0,0),n+1} + (1 - \gamma) f_{(0,0,0),n}) \frac{\Delta^3}{3!} \\
&+ \sum_{j=1}^m f_{(j),n} I_{(j)} - \theta \sum_{j=1}^m f_{(j,0),n} I_{(j)} \Delta - \frac{1}{2} (1 - 2\theta) \beta \sum_{j=1}^m f_{(j,0,0),n} I_{(j)} \Delta^2 \\
&+ \sum_{\substack{j_1, j_2=0 \\ j_1+j_2 \neq 0}}^m f_{(j_1, j_2),n} I_{(j_1, j_2)} - \theta \sum_{\substack{j_1, j_2=0 \\ j_1+j_2 \neq 0}}^m f_{(j_1, j_2, 0),n} I_{(j_1, j_2)} \Delta \\
&+ \sum_{\substack{j_1, j_2, j_3=0 \\ j_1+j_2+j_3 \neq 0}}^m f_{(j_1, j_2, j_3),n} I_{(j_1, j_2, j_3)}
\end{aligned} \tag{2.22}$$

où  $f(t, x) = x$ . A partir de (2.22), on a le résultat suivant

**Théorème 2.1** *On suppose que les composantes  $a^k$  de vecteur dérive et les composantes  $b^{kj}$ ,  $k = 1, \dots, d$ ,  $j = 1, \dots, m$  des coefficients de diffusion  $b^j$  de l'équation (2.1) appartiennent à la classe  $\mathcal{C}_p^8$  et satisfaisant les conditions de Lipschitz et de croissance bornée. Alors la méthode définie par (2.22) est d'ordre 3.0 au sens faible.*

Dans le cas multidimensionnel avec un bruit scalaire  $d = 1, 2, \dots, m = 1$ . A partir de (2.22), on obtient la famille des méthodes de Taylor semi-implicites d'ordre 3.0 au sens faible

$$\begin{aligned}
Y_{n+1} &= Y_n + (\theta a_{n+1} + (1 - \theta) a) \Delta \\
&+ (1 - 2\theta) (\beta (L^{(0)} a)_{n+1} + (1 - \beta) L^{(0)} a) \frac{\Delta^2}{2!} \\
&+ (1 - 3\theta - 3\beta(1 - 2\theta)) (\gamma (L^{(0,0)} a)_{n+1} + (1 - \gamma) L^{(0,0)} a) \frac{\Delta^3}{3!} \\
&+ \left( b - \theta L^{(1)} a \Delta - \frac{1}{2} (1 - 2\theta) \beta L^{(1,0)} a \Delta^2 \right) I_{(1)} + (L^{(1)} b - \theta L^{(1,1)} a \Delta) I_{(1,1)}
\end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( L^{(1)}a - \theta L^{(1,0)}a \Delta \right) I_{(1,0)} + \left( L^{(0)}b - \theta L^{(0,1)}a \Delta \right) I_{(0,1)} \\
& + L^{(1,0)}a I_{(1,0,0)} + L^{(0,1)}a I_{(0,1,0)} + L^{(0,0)}b I_{(0,0,1)} \\
& + L^{(1,1)}a I_{(1,1,0)} + L^{(1,0)}b I_{(1,0,1)} + L^{(0,1)}b I_{(0,1,1)} + L^{(1,1)}b I_{(1,1,1)},
\end{aligned} \tag{2.24}$$

où les paramètres  $\theta, \beta, \gamma \in [0, 1]$  déterminent le degré d'implicité (implicitness). En prenant  $\Delta\hat{W}$  et  $\Delta\hat{Z}$  comme dans (2.12), on peut voir que les variables

$$\begin{aligned}
\hat{I}_{(1)} &= \Delta\hat{W}, \quad \hat{I}_{(1,0)} = \Delta\hat{Z}, \quad \hat{I}_{(0,1)} = \Delta\Delta\hat{W} - \Delta\hat{Z}, \\
\hat{I}_{(1,1)} &= \frac{1}{2}(\Delta\hat{W}^2 - \Delta), \quad \hat{I}_{(0,0,1)} = \hat{I}_{(0,1,0)} = \hat{I}_{(1,0,0)} = \frac{1}{6}\Delta^2\Delta\hat{W}, \\
\hat{I}_{(1,1,0)} &= \hat{I}_{(1,0,1)} = \hat{I}_{(0,1,1)} = \frac{1}{6}\Delta(\Delta\hat{W}^2 - \Delta), \quad \hat{I}_{(1,1,1)} = \frac{1}{6}\Delta\hat{W}(\Delta\hat{W}^2 - 3\Delta)
\end{aligned}$$

satisfont (2.7) avec  $N = 3$ . Ainsi les intégrales multiples  $I_\alpha$  dans (2.24) peuvent être remplacées par  $\hat{I}_\alpha$  pour obtenir une famille de méthodes semi-implicites simplifiées d'ordre 3.0 au sens faible dépendant de trois paramètres.

Pour le cas  $m = 1$  :

$$\begin{aligned}
Y_{n+1} &= Y_n + (\theta a_{n+1} + (1 - \theta) a) \Delta \\
& + (1 - 2\theta) \left( \beta (L^{(0)}a)_{n+1} + (1 - \beta) L^{(0)}a \right) \frac{\Delta^2}{2!} \\
& + (1 - 3\theta - 3\beta(1 - 2\theta)) \left( \gamma (L^{(0,0)}a)_{n+1} + (1 - \gamma) L^{(0,0)}a \right) \frac{\Delta^3}{3!} \\
& + \left( b - \theta L^{(1)}a \Delta - \frac{1}{2}(1 - 2\theta)\beta L^{(1,0)}a \Delta^2 \right) \Delta\hat{W} \\
& + \frac{1}{2} \left( L^{(1)}b - \theta L^{(1,1)}a \Delta \right) (\Delta\hat{W}^2 - \Delta) + \left( L^{(1)}a - \theta L^{(1,0)}a \Delta \right) \Delta\hat{Z} \\
& + \left( L^{(0)}b - \theta L^{(0,1)}a \Delta \right) (\Delta\Delta\hat{W} - \Delta\hat{Z}) + \frac{1}{6} \left( L^{(1,0)}a + L^{(0,1)}a + L^{(0,0)}b \right) \Delta^2\Delta\hat{W} \\
& + \frac{1}{6} \left( L^{(1,1)}a + L^{(1,0)}b + L^{(0,1)}b \right) \Delta(\Delta\hat{W}^2 - \Delta) + \frac{1}{6} L^{(1,1)}b \Delta\hat{W}(\Delta\hat{W}^2 - 3\Delta),
\end{aligned} \tag{2.25}$$

avec  $\Delta\hat{W}$ ,  $\Delta\hat{Z}$  définis comme dans (2.12) et les paramètres  $\theta, \beta, \gamma \in [0, 1]$ . Notons que les valeurs  $\theta = \beta = \gamma = 0$  dans (2.25) correspondent à la méthode de Taylor simplifiée explicite d'ordre 3.0 (2.11).

### 2.4.2 Méthodes semi-implicites de Taylor d'ordre 4.0 au sens faible

La procédure précédente peut être répétée pour  $N = 4$  afin d'obtenir une famille de méthodes semi-implicites d'ordre 4.0. Dans ce cas, on néglige tous les termes qui ne sont pas en relation avec l'approximation d'ordre 4.0. Pour une fonction suffisamment régulière  $f(t, x)$ , on obtient à partir de (2.5),

$$\begin{aligned}
 f_{n+1} &\stackrel{(4)}{\simeq} f_n + \sum_{j=0}^m f_{(j),n} I_{(j)} + \sum_{j_1, j_2=0}^m f_{(j_1, j_2),n} I_{(j_1, j_2)} \\
 &+ \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^m f_{(j_1, j_2, j_3),n} I_{(j_1, j_2, j_3)} + \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4=0}^m f_{(j_1, j_2, j_3, j_4),n} I_{(j_1, j_2, j_3, j_4)}.
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

En particulier, si  $f(t, x) = x$  on a

$$\begin{aligned}
 X_{n+1} - X_n &\stackrel{(4)}{\simeq} \sum_{j=0}^m f_{(j),n} I_{(j)} + \sum_{j_1, j_2=0}^m f_{(j_1, j_2),n} I_{(j_1, j_2)} \\
 &+ \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^m f_{(j_1, j_2, j_3),n} I_{(j_1, j_2, j_3)} + \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4=0}^m f_{(j_1, j_2, j_3, j_4),n} I_{(j_1, j_2, j_3, j_4)}
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

où  $f_{(0)} = a$ ,  $f_{(j)} = b^j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , et ainsi de suite. En appliquant la formule (2.26) aux coefficients  $f_{(0)}$ ,  $f_{(0,0)}$ ,  $f_{(0,0,0)}$ ,  $f_{(0,0,0,0)}$  et en multipliant par  $\Delta$ ,  $\Delta^2$ ,  $\Delta^3$  et  $\Delta^4$  respectivement, on obtient

$$\begin{aligned}
 f_{(0),n} \Delta &\stackrel{(4)}{\simeq} f_{(0),n+1} \Delta - \sum_{j=0}^m f_{(j,0),n} I_{(j)} \Delta - \sum_{j_1, j_2=0}^m f_{(j_1, j_2, 0),n} I_{(j_1, j_2)} \Delta - \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^m f_{(j_1, j_2, j_3, 0),n} I_{(j_1, j_2, j_3)} \Delta \\
 f_{(0,0),n} \Delta^2 &\stackrel{(4)}{\simeq} f_{(0,0),n+1} \Delta^2 - \sum_{j=0}^m f_{(j,0,0),n} I_{(j)} \Delta^2 - \sum_{j_1, j_2=0}^m f_{(j_1, j_2, 0, 0),n} I_{(j_1, j_2)} \Delta^2 \\
 f_{(0,0,0),n} \Delta^3 &\stackrel{(4)}{\simeq} f_{(0,0,0),n+1} \Delta^3 - \sum_{j=0}^m f_{(j,0,0,0),n} I_{(j)} \Delta^3 \\
 f_{(0,0,0,0),n} \Delta^4 &\stackrel{(4)}{\simeq} f_{(0,0,0,0),n+1} \Delta^4.
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Comme dans le cas de l'ordre 3.0, on peut contrôler le degré d'implicité (implicitness) en remplaçant dans (2.27) les équivalences (2.28) avec les paramètres  $\theta, \beta, \gamma, \alpha \in [0, 1]$ . De cette manière, on obtient :

**Théorème 2.2** *On suppose que les composantes  $a^k$  de vecteur dérive et les composantes  $b^{kj}$ ,  $k = 1, \dots, d$ ,  $j = 1, \dots, m$  des coefficients de diffusion  $b^j$  de l'équation (2.1) appartiennent à la classe  $\mathcal{C}_p^{10}$  et satisfont les conditions de Lipschitz et de la croissance bornée. Pour chaque choix des paramètres  $\theta, \beta, \gamma, \alpha \in [0, 1]$ , le schéma*

$$\begin{aligned}
Y_{n+1} = & Y_n + (\theta f_{(0),n+1} + (1 - \theta) f_{(0),n}) \Delta \\
& + (1 - 2\theta) (\beta f_{(0,0),n+1} + (1 - \beta) f_{(0,0),n}) \frac{\Delta^2}{2!} \\
& + (1 - 3\theta - 3\beta(1 - 2\theta)) (\gamma f_{(0,0,0),n+1} + (1 - \gamma) f_{(0,0,0),n}) \frac{\Delta^3}{3!} \\
& + (1 - 4\theta - 6\beta(1 - 2\theta) - 4\gamma(1 - 3\theta - 3\beta(1 - 2\theta))) (\alpha f_{(0,0,0,0),n+1} + (1 - \alpha) f_{(0,0,0,0),n}) \frac{\Delta^4}{4!} \\
& + \sum_{j=1}^m \left( f_{(j),n} - \theta f_{(j,0),n} \Delta - \frac{\beta}{2} (1 - 2\theta) f_{(j,0,0),n} \Delta^2 - \frac{\gamma}{6} (1 - 3\theta - 3\beta(1 - 2\theta)) f_{(j,0,0,0),n} \Delta^3 \right) I_{(j)} \\
& + \sum_{\substack{j_1, j_2=0 \\ j_1+j_2 \neq 0}}^m \left( f_{(j_1, j_2),n} - \theta f_{(j_1, j_2, 0),n} \Delta - \frac{1}{2} (1 - 2\theta) \beta f_{(j_1, j_2, 0, 0),n} \Delta^2 \right) I_{(j_1, j_2)} \\
& + \sum_{\substack{j_1, j_2, j_3=0 \\ j_1+j_2+j_3 \neq 0}}^m \left( f_{(j_1, j_2, j_3),n} - \theta f_{(j_1, j_2, j_3, 0),n} \Delta \right) I_{(j_1, j_2, j_3)} \\
& + \sum_{\substack{j_1, j_2, j_3, j_4=0 \\ j_1+j_2+j_3+j_4 \neq 0}}^m f_{(j_1, j_2, j_3, j_4),n} I_{(j_1, j_2, j_3, j_4)}.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

admet un ordre 4.0 au sens faible.

Pour les EDS unidimensionnelles avec un bruit additif, si  $f(t, x) = x$ , on a  $f_{(1,1)} = L^{(1,1)} f = L^{(1)} b = 0$ . Alors le terme  $f_\alpha$  avec  $\alpha$  qui se termine par  $(1, 1)$  n'intervient pas dans (2.29).

De la même manière, le terme avec les indices qui se terminent par  $(1, 0, 1)$  et  $(1, 0, 0, 1)$  n'interviennent pas dans les schémas. Si de plus, on prend  $\theta = 0$  dans (2.29), on obtient la famille de méthodes semi-implicites dépendantes de trois paramètres suivante :

$$\begin{aligned}
Y_{n+1} = & Y_n + a \Delta + \left( \beta(L^{(0)}a)_{n+1} + (1 - \beta)L^{(0)}a \right) \frac{\Delta^2}{2} \\
& + (1 - 3\beta) \left( \gamma(L^{(0,0)}a)_{n+1} + (1 - \gamma)L^{(0,0)}a \right) \frac{\Delta^3}{3!} \\
& + (1 - 6\beta - 4\gamma(1 - 3\beta)) \left( \alpha(L^{(0,0,0)}a)_{n+1} + (1 - \alpha)L^{(0,0,0)}a \right) \frac{\Delta^4}{4!} \\
& + \left( b - \frac{1}{2}\beta L^{(1,0)}a\Delta^2 - \frac{1}{6}\gamma(1 - 3\beta)L^{(1,0,0)}a\Delta^3 \right) I_{(1)} - \frac{1}{2}\beta L^{(1,1,0)}a\Delta^2 I_{(1,1)} \\
& + \left( L^{(1)}a - \frac{1}{2}\beta L^{(1,0,0)}a\Delta^2 \right) I_{(1,0)} + \left( L^{(0)}b - \frac{1}{2}\beta L^{(0,1,0)}a\Delta^2 \right) I_{(0,1)} \\
& + L^{(1,0)}a I_{(1,0,0)} + L^{(0,1)}a I_{(0,1,0)} + L^{(0,0)}b I_{(0,0,1)} + L^{(1,1)}a I_{(1,1,0)} \\
& + L^{(1,0,0)}a I_{(1,0,0,0)} + L^{(0,1,0)}a I_{(0,1,0,0)} + L^{(0,0,1)}a I_{(0,0,1,0)} + L^{(0,0,0)}b I_{(0,0,0,1)} \\
& + L^{(1,1,0)}a I_{(1,1,0,0)} + L^{(1,0,1)}a I_{(1,0,1,0)} + L^{(0,1,1)}a I_{(0,1,1,0)} + L^{(1,1,1)}a I_{(1,1,1,0)}.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Notons que si  $\beta = \gamma = \alpha = 0$  dans (2.30), on obtient le schéma explicite de Taylor d'ordre 4.0 (2.13).

Le schéma semi-implicite (2.30) contient 16 intégrales  $I_\alpha$  ( Les 15 qui apparaissent dans le schéma explicite (2.13) plus  $I_{(1,1)}$ ). Pour obtenir des méthodes semi-implicites simplifiées à partir de (2.30), il faut remplacer les 15 intégrales précédentes par les intégrales correspondantes  $\hat{I}_\alpha$  dans (2.14) et  $I_{(1,1)}$  par  $\hat{I}_{(1,1)} = \frac{1}{2} (\Delta \hat{W}^2 - \Delta)$ . Il est facile de voir que les 16 sous-ensembles des intégrales multiples satisfont à (2.5) avec  $N = 4$ , ces conditions sont prouvées dans [47].

On peut voir que chaque produit  $\hat{I}_{\alpha_1} \cdots \hat{I}_{\alpha_l}$  admet une espérance en moyenne quadratique jus qu'à l'ordre 4.5 inclu pour lesquelles  $\hat{I}_{\alpha_l}$  possèdent les mêmes espérances que les produits correspondants  $I_{\alpha_1} \cdots I_{\alpha_l}$ , c-à-d :

$$\textbf{Ordre 1.0} : E[\hat{I}_{(1,1)}] = 0$$

$$\textbf{Ordre 2.0} : E[\hat{I}_{(1,1)} \hat{I}_{(1)}^2] = \Delta^2; \quad E[\hat{I}_{(1,1)}^2] = \frac{1}{2} \Delta^2;$$

$$\textbf{Ordre 3.0} : E[\hat{I}_{(1,1)} \hat{I}_{(1)}^4] = 6 \Delta^3; \quad E[\hat{I}_{(1,1)} \hat{I}_{(1)} \hat{I}_{(1,0)}] = \frac{1}{2} \Delta^3;$$

$$\mathbb{E}[\hat{I}_{(1,1)} \hat{I}_{(1)} \hat{I}_{(0,1)}] = \frac{1}{2} \Delta^3; \quad \mathbb{E}[\hat{I}_{(1,1)} \hat{I}_{(1,1,0)}] = \frac{1}{6} \Delta^3;$$

$$\mathbb{E}[\hat{I}_{(1,1)}^2 \hat{I}_{(1)}] = \frac{5}{2} \Delta^3; \quad \mathbb{E}[\hat{I}_{(1,1,1)}^3] = \Delta^3;$$

$$\textbf{Ordre 4.0} : \mathbb{E}[\hat{I}_{(1,1)} \hat{I}_{(1,1,0,0)}] = \frac{1}{24} \Delta^4; \quad \mathbb{E}[\hat{I}_{(1,1)} \hat{I}_{(0,1,1,0)}] = \frac{1}{24} \Delta^4;$$

$$\mathbb{E}[\hat{I}_{(1,1)} \hat{I}_{(1,0,1,0)}] = \frac{1}{24} \Delta^4; \quad \mathbb{E}[\hat{I}_{(1,1)} \hat{I}_{(1,1,1,0)} \hat{I}_{(1)}] = \frac{1}{8} \Delta^4;$$

$$\mathbb{E}[\hat{I}_{(1,1)} \hat{I}_{(1,0,0)} \hat{I}_{(1)}] = \frac{1}{6} \Delta^4; \quad \mathbb{E}[\hat{I}_{(1,1)} \hat{I}_{(0,1,0)} \hat{I}_{(1)}] = \frac{1}{6} \Delta^4;$$

$$\mathbb{E}[\hat{I}_{(1,1)} \hat{I}_{(0,0,1)} \hat{I}_{(1)}] = \frac{1}{6} \Delta^4; \quad \mathbb{E}[\hat{I}_{(1,1)} \hat{I}_{(1,1,0)} \hat{I}_{(1)}^2] = \frac{5}{6} \Delta^4;$$

$$\mathbb{E}[\hat{I}_{(1,1)} \hat{I}_{(1,0)}^2] = \frac{1}{4} \Delta^4; \quad \mathbb{E}[\hat{I}_{(1,1)} \hat{I}_{(1,0)} \hat{I}_{(0,1)}] = \frac{1}{4} \Delta^4;$$

$$\mathbb{E}[\hat{I}_{(1,1)} \hat{I}_{(0,1)}^2] = \frac{1}{4} \Delta^4; \quad \mathbb{E}[\hat{I}_{(1,1)} \hat{I}_{(1,0)} \hat{I}_{(1)}^3] = 3 \Delta^4;$$

$$\mathbb{E}[\hat{I}_{(1,1)} \hat{I}_{(0,1)} \hat{I}_{(1)}^3] = 3 \Delta^4; \quad \mathbb{E}[\hat{I}_{(1,1)} \hat{I}_{(1)}^6] = 45 \Delta^4;$$

$$\mathbb{E}[\hat{I}_{(1,1)}^2 \hat{I}_{(1)}^4] = \frac{39}{2} \Delta^4; \quad \mathbb{E}[\hat{I}_{(1,1)}^2 \hat{I}_{(1,0)} \hat{I}_{(1)}] = \frac{5}{4} \Delta^4;$$

$$\mathbb{E}[\hat{I}_{(1,1)}^2 \hat{I}_{(0,1)} \hat{I}_{(1)}] = \frac{5}{4} \Delta^4; \quad \mathbb{E}[\hat{I}_{(1,1)}^2 \hat{I}_{(1,1,0)}] = \frac{1}{3} \Delta^4;$$

$$\mathbb{E}[\hat{I}_{(1,1)}^3 \hat{I}_{(1)}^2] = \frac{17}{2} \Delta^4; \quad \mathbb{E}[\hat{I}_{(1,1)}^4] = \frac{15}{4} \Delta^4;$$

$\mathbb{E}[\hat{I}_{\alpha_1} \cdots \hat{I}_{\alpha_l}] = 0$  pour chaque produit d'ordre quadratique 1.5, 2.5, 3.5 et 4.5.  
Ainsi la famille de méthodes d'ordre 4.0 au sens faible proposée pour les EDS avec

un bruit additif est donnée par :

$$\begin{aligned}
Y_{n+1} = & Y_n + a \Delta + (\beta(L^{(0)}a)_{n+1} + (1 - \beta)L^{(0)}a) \frac{\Delta^2}{2} \\
& + (1 - 3\beta) (\gamma(L^{(0,0)}a)_{n+1} + (1 - \gamma)L^{(0,0)}a) \frac{\Delta^3}{3!} \\
& + (1 - 6\beta - 4\gamma(1 - 3\beta)) (\alpha(L^{(0,0,0)}a)_{n+1} + (1 - \alpha)L^{(0,0,0)}a) \frac{\Delta^4}{4!} \\
& + \left( b - \frac{1}{2}\beta L^{(1,0)}a\Delta^2 - \frac{1}{6}\gamma(1 - 3\beta)L^{(1,0,0)}a\Delta^3 \right) \Delta\hat{W} - \frac{1}{4}\beta L^{(1,1,0)}a\Delta^2 (\Delta\hat{W}^2 - \Delta) \\
& + \left( L^{(1)}a - \frac{1}{2}\beta L^{(1,0,0)}a\Delta^2 \right) \Delta\hat{Z} + \left( L^{(0)}b - \frac{1}{2}\beta L^{(0,1,0)}a\Delta^2 \right) (\Delta\hat{W}\Delta - \Delta\hat{Z}) \\
& + \frac{1}{2} (L^{(1,0)}a - L^{(0,0)}b) \Delta\hat{Z}\Delta + \frac{1}{6} \left( L^{(0,1)}a - \frac{1}{2}L^{(1,0)}a + \frac{5}{2}L^{(0,0)}b \right) \Delta\hat{W}\Delta^2 \\
& + L^{(1,1)}a \left( \frac{1 - \sqrt{2}}{2} \Delta\hat{W}\Delta\hat{Z} + \frac{3\sqrt{2} - 2}{24} \Delta\hat{W}^2\Delta - \frac{4 + \sqrt{2}}{24} \Delta^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \Delta\hat{Z}^2/\Delta \right) \\
& + \frac{1}{24} (L^{(1,0,0)}a + L^{(0,1,0)}a + L^{(0,0,1)}a + L^{(0,0,0)}b) \Delta\hat{W}\Delta^3 \\
& + \frac{1}{24} (L^{(1,1,0)}a + L^{(1,0,1)}a + L^{(0,1,1)}a) (\Delta\hat{W}^2 - \Delta) \Delta^2 \\
& + \frac{1}{24} L^{(1,1,1)}a (\Delta\hat{W}^2 - 3\Delta) \Delta\hat{W}\Delta
\end{aligned} \tag{2.31}$$

où  $\beta, \gamma, \alpha \in [0, 1]$  et  $\Delta\hat{W}$  et  $\Delta\hat{Z}$  sont définies comme dans (2.12).

## 2.5 Analyse de la MS-stabilité des méthodes semi-implicites d'ordre 3.0

Dans cette section, on étudie la propriété de stabilité des méthodes d'ordre 3.0 proposées. Comme dans le cas déterministe, on peut voir que l'introduction de termes implicites dans les méthodes de Taylor améliorent le comportement de stabilité des méthodes numériques. Dans le cas déterministe, les propriétés de stabilité d'une méthode sont obtenues en appliquant le schéma à l'équation linéaire test :

$$dX_t = \lambda X_t dt \tag{2.32}$$

avec  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $\Re(\lambda) < 0$  et en étudiant la stabilité asymptotique de l'équation de récurrence obtenue. Alors, pour analyser la stabilité linéaire du schéma numérique

pour le cas stochastique, l'équation test (2.32) doit être généralisée et le concept de la stabilité asymptotique et sa caractérisation en terme de paramètres de l'équation doivent être établis. Pour les EDS avec un bruit multiplicatif, l'équation linéaire test est donnée dans [3, 5, 22, 23, 39, 46]. Elle s'écrit sous la forme :

$$dX_t = \lambda X_t dt + \mu X_t dW_t \quad (2.33)$$

avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  and  $X_0 = x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 \neq 0$ . La solution exacte de (2.33) est donnée par  $X_t = x_0 \exp \left\{ (\lambda - \frac{1}{2}\mu^2)t + \mu W_t \right\}$ . Pour cette solution

$$\mathbb{E}[|X_t|^2] = |x_0|^2 \exp \left\{ (2\Re(\lambda) + |\mu|^2) t \right\},$$

alors la propriété suivante est satisfaite :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|X_t|^2] = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad \Re(\lambda) + \frac{1}{2}|\mu|^2 < 0. \quad (2.34)$$

La condition à gauche définit la stabilité en moyenne quadratique (MS-stabilité) [23, 39, 42]. L'ensemble

$$\mathcal{D} = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : \Re(\lambda) + \frac{1}{2}|\mu|^2 < 0\} \quad (2.35)$$

est appelé le domaine de la MS-stabilité de l'équation stochastique (2.33). On note que si  $\mu = 0$ , la condition à droite dans (2.34) se réduit à la condition déterministe de A-stabilité  $\Re(\lambda) < 0$  [29]. Comme dans le cas déterministe, pour analyser la stabilité du schéma stochastique  $S$ , on l'applique à l'équation test (2.33), nous obtenons la forme de récurrence suivante :

$$Y_{n+1} = r_S(\lambda, \mu, \Delta, \Delta W) Y_n. \quad (2.36)$$

pour étudier le comportement de la solution numérique  $\{Y_n\}$ , on cherche les conditions impliquant

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|Y_n|^2] = 0. \quad (2.37)$$

En prenant la norme en moyenne quadratique dans (2.36), on obtient l'équation

$$\mathbb{E}[|Y_{n+1}|^2] = R_S(\lambda, \mu, \Delta) \mathbb{E}[|Y_n|^2]$$

où  $R_S(\lambda, \mu, \Delta) = \mathbb{E}[|r_S(\lambda, \mu, \Delta, \Delta W)|^2]$  est appelée la fonction de stabilité de la méthode. Alors, l'analyse de la condition (2.37) se réduit à trouver pour quelles

valeurs des paramètres  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  et le pas  $\Delta > 0$  l'inégalité  $|R_S(\lambda, \mu, \Delta)| < 1$  est satisfaite.  $R_S(\lambda, \mu, \Delta)$  est dite fonction de stabilité du schéma et l'ensemble

$$\mathcal{D}_S(\Delta) = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : |R_S(\lambda, \mu, \Delta)| < 1\} \quad (2.38)$$

est appelé le domaine de la MS-stabilité de la méthode stochastique  $S$  (utilisée avec le pas  $\Delta$ ). Dans [39] les auteurs présentent les fonctions de stabilité d'un nombre de schémas.

Dans notre cas, nous appliquons le schéma (2.25) à l'équation test (2.33) et nous obtenons l'itération suivante  $Y_{n+1} = (A/B) Y_n$  avec

$$\begin{aligned} A &= 1 + (1 - \theta)\lambda\Delta + \frac{1}{2}(1 - \beta)(1 - 2\theta)\lambda^2\Delta^2 + \frac{1}{6}(1 - \gamma)(1 - 3\theta - 3\beta(1 - 2\theta))\lambda^3\Delta^3 \\ &\quad + \mu \left( 1 + (1 - \theta)\lambda\Delta + \frac{1}{2}(1 - \beta)(1 - 2\theta)\lambda^2\Delta^2 \right) \Delta \hat{W} \\ &\quad + \frac{1}{2}\mu^2(1 + (1 - \theta)\lambda\Delta)(\Delta \hat{W}^2 - \Delta) + \frac{1}{6}\mu^3(\Delta \hat{W}^3 - 3\Delta \Delta \hat{W}) \\ B &= 1 - \theta\lambda\Delta - \frac{1}{2}\beta(1 - 2\theta)\lambda^2\Delta^2 - \frac{1}{6}\gamma(1 - 3\theta - 3\beta(1 - 2\theta))\lambda^3\Delta^3. \end{aligned}$$

Alors

$$\mathbb{E}[|Y_{n+1}|^2] = R_{(\theta, \beta, \gamma)}(\lambda, \mu, \Delta) \mathbb{E}[|Y_n|^2] \quad (2.39)$$

avec  $R_{(\theta, \beta, \gamma)}(\lambda, \mu, \Delta) = U/V$ ,

$$\begin{aligned} U &= \left| 1 + (1 - \theta)\lambda\Delta + \frac{1}{2}(1 - \beta)(1 - 2\theta)\lambda^2\Delta^2 + \frac{1}{6}(1 - \gamma)(1 - 3\theta - 3\beta(1 - 2\theta))\lambda^3\Delta^3 \right|^2 \\ &\quad + \left| 1 + (1 - \theta)\lambda\Delta + \frac{1}{2}(1 - \beta)(1 - 2\theta)\lambda^2\Delta^2 \right|^2 |\mu|^2 \Delta + \frac{1}{2} |1 + (1 - \theta)\lambda\Delta|^2 |\mu|^4 \Delta^2 + \frac{1}{6} |\mu|^6 \Delta^3 \\ V &= \left| 1 - \theta\lambda\Delta - \frac{1}{2}\beta(1 - 2\theta)\lambda^2\Delta^2 - \frac{1}{6}\gamma(1 - 3\theta - 3\beta(1 - 2\theta))\lambda^3\Delta^3 \right|^2. \end{aligned} \quad (2.40)$$

En particulier, le schéma de Taylor simplifié d'ordre 3.0 ( $\theta = \beta = \gamma = 0$ ) dans (2.11) admet la fonction de stabilité suivante

$$\begin{aligned} R_{(0,0,0)}(\lambda, \mu, \Delta) &= \\ &= \left| 1 + \lambda\Delta + \frac{1}{2}\lambda^2\Delta^2 + \frac{1}{6}\lambda^3\Delta^3 \right|^2 + \left| 1 + \lambda\Delta + \frac{1}{2}\lambda^2\Delta^2 \right|^2 |\mu|^2 \Delta + \frac{1}{2} |1 + \lambda\Delta|^2 |\mu|^4 \Delta^2 + \frac{1}{6} |\mu|^6 \Delta^3 \end{aligned}$$

et le schéma de Taylor simplifié d'ordre 3.0 ( $\theta = \beta = \gamma = 1$ ) admet la fonction de stabilité suivante

$$R_{(1,1,1)}(\lambda, \mu, \Delta) = \frac{1 + |\mu|^2 \Delta + \frac{1}{2} |\mu|^4 \Delta^2 + \frac{1}{6} |\mu|^6 \Delta^3}{|1 - \lambda \Delta + \frac{1}{2} \lambda^2 \Delta^2 - \frac{1}{6} \lambda^3 \Delta^3|^2}.$$

Comme dans le cas déterministe, Higham [23, 25] affirme que l'intérêt de l'analyse de la stabilité d'une méthode numérique ne permet pas seulement de trouver les valeurs des paramètres dans le schéma numérique mais aussi de faire une comparaison entre son domaine de la stabilité  $\mathcal{D}_S(\Delta)$  et le domaine de la MS-stabilité de l'équation linéaire test  $\mathcal{D}$ . En particulier l'inclusion  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}_S(\Delta)$  pour un schéma donné  $S$  et un  $\Delta > 0$  signifie que quand l'équation différentielle stochastique est stable, alors le schéma est aussi stable et dans ce cas, on peut dire que le schéma  $S$  est MS-stable. La MS-stabilité peut être interprétée comme une généralisation de la A-stabilité déterministe [29]. L'inclusion  $\mathcal{D}_S(\Delta) \subseteq \mathcal{D}$  signifie que si l'EDS est instable alors il en sera de même pour la méthode numérique appliquée avec un pas  $\Delta$ . Puisque les paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  appartiennent à  $\mathbb{C}$ , les domaines de stabilité sont difficile à déterminer. Si  $\lambda$  et  $\mu$  sont des nombres réels, les ensembles  $\mathcal{D}_S(\Delta)$  et  $\mathcal{D}$  sont appelées régions de stabilité au lieu de domaines et sont notés par  $\mathcal{R}_S(\Delta)$  et  $\mathcal{R}$  et sont situés dans le plan réel [23]. Quand  $\lambda$  et  $\mu \in \mathbb{R}$ , les régions de stabilité sont dessinées dans le plan  $(x, y)$  avec  $x = \lambda \Delta$  et  $y = \mu^2 \Delta$ . Par exemple, la région de stabilité  $\mathcal{R}$  de l'équation test dans le plan  $(x, y)$  est la région  $0 < y < -2x$ , représentée par l'aire quadrillé dans les figures (2.1 – 2.3) et les régions de stabilité  $\mathcal{R}_{(0,0,0)}$  et  $\mathcal{R}_{(1,1,1)}$  correspondant aux fonctions de stabilité  $R_{0,0,0}$  et  $R_{(1,1,1)}$  sont les régions ombrées dans la figure 2.1 à gauche et à droite. Plusieurs représentations des régions de stabilité sont obtenues dans [39] en prenant  $\hat{h} = \Delta \lambda$  et  $k = -\mu^2/\lambda$ . Les résultats suivants donnent quelques exemples de schémas semi-implicites stables d'ordre 3.0.

**Proposition 2.1** *Le schéma semi-implicite simplifié d'ordre 3.0 au sens faible (2.25) avec  $\theta = 1$ ,  $\beta = 1$  et  $\frac{1}{2} \leq \gamma \leq \frac{3}{4}$  sont MS-stables, i.e. ces schémas donnent des solutions numériques MS-stables pour chaque pas  $\Delta > 0$  quand ils sont appliqués à l'équation linéaire test avec une solution stable en moyenne quadratique.*

**Preuve.** Il faut prouver que  $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_{(1,1,\gamma)}(\Delta)$  pour chaque  $\Delta > 0$  si  $\frac{1}{2} \leq \gamma \leq \frac{3}{4}$ . A partir de (2.39)-(2.40), la fonction de stabilité des méthodes (2.25) avec  $\theta = 1$  et  $\beta = 1$  est donnée par

$$R_{(1,1,\gamma)}(\lambda, \mu, \Delta) = \frac{|1 + \frac{1-\gamma}{6} \lambda^3 \Delta^3|^2 + |\mu|^2 \Delta + \frac{1}{2} |\mu|^4 \Delta^2 + \frac{1}{6} |\mu|^6 \Delta^3}{|1 - \lambda \Delta + \frac{1}{2} \lambda^2 \Delta^2 - \frac{\gamma}{6} \lambda^3 \Delta^3|^2}.$$

Après quelques manipulations algébriques, la condition  $R_{(1,1,\gamma)}(\lambda, \mu, \Delta) < 1$  peut être écrite

$$2 \left( \Re(\lambda) + \frac{1}{2}|\mu|^2 \right) \left( 1 + \frac{1}{2}|\mu|^2\Delta - \Re(\lambda)\Delta + \frac{2}{3}\Re(\lambda)^2\Delta^2 - \frac{1}{3}\Re(\lambda)|\mu|^2\Delta^2 + \frac{1}{6}|\mu|^4\Delta^2 \right) - \frac{1}{12}|\lambda|^2\Delta \left( (3 - 4\gamma)|\lambda|^2\Delta^2 + 8\gamma\Re(\lambda)^2\Delta^2 \right) + \frac{\gamma}{6}\Re(\lambda)|\lambda|^4\Delta^4 + \frac{1 - 2\gamma}{36}|\lambda|^6\Delta^5 < 0. \quad (2.41)$$

Si  $\Re(\lambda) + \frac{1}{2}|\mu|^2 < 0$ , le produit dans la première expression de (2.41) est négatif. Si de plus  $\frac{1}{2} \leq \gamma \leq \frac{3}{4}$  tous les restes figurant dans (2.41) sont négatifs. Alors, on a prouvé que pour chaque  $\Delta > 0$

$$\Re(\lambda) + \frac{1}{2}|\mu|^2 < 0 \implies R_{(1,1,\gamma)}(\lambda, \mu, \Delta) < 1 \quad \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq \gamma \leq \frac{3}{4},$$

i.e.  $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_{(1,1,\gamma)}(\Delta)$  si  $\frac{1}{2} \leq \gamma \leq \frac{3}{4}$ . ■ On note que si  $\gamma > 3/4$ , il existe des valeurs de  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  tel que  $\Re(\lambda) + \frac{1}{2}|\mu|^2 < 0$  et par conséquent l'expression dans (2.41) est positive. Par exemple, si  $\gamma = 1$ , les valeurs  $\lambda = -\frac{3}{5} + 10i$ ,  $\mu = 1$  et  $\Delta = 10^{-1}$  donnent  $\Re(\lambda) + \frac{1}{2}|\mu|^2 = -\frac{1}{10}$  et

$$R_{(1,1,1)}(-\frac{3}{5} + i, 1, \frac{1}{10}) = \frac{621656250000}{609813683629} \approx 1.01942 > 1. \quad (2.42)$$

Ceci montre qu'il existe des valeurs de  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  telles que l'équation stochastique test (2.33) est stable mais la méthode (2.25) avec  $\theta = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 1$  est instable pour certains  $\Delta > 0$ . Par ailleurs, si  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on obtient le terme

$$-\frac{1}{12}|\lambda|^2\Delta \left( (3 - 4\gamma)|\lambda|^2\Delta^2 + 8\gamma\Re(\lambda)^2\Delta^2 \right) = -\frac{4\gamma + 3}{12}\lambda^4\Delta^3 < 0$$

Alors si  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma \geq 1/2$  et  $\lambda + \frac{1}{2}|\mu|^2 < 0$ , la condition (2.41) est satisfaite. Ainsi on a montré que :

**Corollaire 2.1** *Pour toutes valeurs  $\lambda, \mu \in \mathcal{D}$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$  et pour chaque pas  $\Delta > 0$ , les méthodes simplifiées semi-implicites de Taylor d'ordre 3.0 au sens faible (2.25) avec  $\theta = 1$ ,  $\beta = 1$  et  $\gamma \geq \frac{1}{2}$  donnent des solutions MS-stables.*

En particulier, on obtient que  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}_{(1,1,\gamma)}(\Delta)$  pour chaque  $\Delta > 0$  si  $\gamma \geq \frac{1}{2}$ . la région de la MS-stabilité de chaque méthode semi-implicite de Taylor d'ordre 3.0 avec  $\theta = 1$ ,  $\beta = 1$  et  $\gamma \geq \frac{1}{2}$  contient la région de la MS-stabilité de l'équation linéaire test. Ce résultat est confirmé dans la figure 2.2 en comparant la région  $\mathcal{R}$  (l'aire quadrillée) avec la MS-stabilité des régions  $\mathcal{R}_{(1,1,\gamma)}$  (l'aire ombrée) pour  $\gamma = \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ . Voir aussi la région  $\mathcal{R}_{(1,1,1)}$  dans la partie droite de la figure 2.1. La figure 2.2 montre aussi que  $\mathcal{R} \not\subseteq \mathcal{R}_{(1,1,\gamma)}(\Delta)$  pour  $\gamma = 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}$ .

**Proposition 2.2** *Les méthodes semi-implicites simplifiées d'ordre 3.0 au sens faible (2.25) avec  $\theta = 1$ ,  $\gamma = 1$  et  $\frac{3}{4} \leq \beta \leq \frac{5}{6}$  sont MS-stables, c-à-d ces méthodes donnent des solutions MS-stables pour chaque pas  $\Delta > 0$  quand elles sont appliquées à l'équation linéaire test avec une solution MS-stable.*

**Preuve.** Il faut montrer que  $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_{(1,\beta,1)}(\Delta)$  pour chaque  $\Delta > 0$  si  $\frac{3}{4} \leq \beta \leq \frac{5}{6}$ . A partir de (2.39)-(2.40), la fonction de stabilité des méthodes (2.25) avec  $\theta = 1$  et  $\gamma = 1$  est donnée par

$$R_{(1,\beta,1)}(\lambda, \mu, \Delta) = \frac{|1 - \frac{1-\beta}{2}\lambda^2\Delta^2|^2 + |1 - \frac{1-\beta}{2}\lambda^2\Delta^2|^2|\mu|^2\Delta + \frac{1}{2}|\mu|^4\Delta^2 + \frac{1}{6}|\mu|^6\Delta^3}{|1 - \lambda\Delta + \frac{\beta}{2}\lambda^2\Delta^2 - \frac{3\beta-2}{6}\lambda^3\Delta^3|^2}.$$

Après quelques manipulations algébriques, la condition  $R_{(1,\beta,1)}(\lambda, \mu, \Delta) < 1$  peut être écrite sous la forme

$$\begin{aligned} & 2 \left( \Re(\lambda) + \frac{1}{2}|\mu|^2 \right) \left( 1 - \Re(\lambda)\Delta + \frac{1}{2}|\mu|^2\Delta + (1-\beta)\Im(\lambda)^2\Delta^2 + \frac{3\beta-1}{3}\Re(\lambda)^2\Delta^2 - \frac{1}{3}\Re(\lambda)|\mu|^2\Delta^2 + \frac{1}{6}|\mu|^4\Delta^2 \right) \\ & + \frac{6\beta-5}{12}|\lambda|^4\Delta^3 + 2 \left( \frac{2}{3} - \beta \right) |\lambda|^2\Delta^3\Re(\lambda)^2 + \frac{1}{2}|\lambda|^4\Delta^4 \left( \frac{\beta(3\beta-2)}{3}\Re(\lambda) + \frac{(1-\beta)^2}{2}|\mu|^2 \right) - \frac{(3\beta-2)^2}{36}|\lambda|^6\Delta^5 < 0. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Si  $\Re(\lambda) + \frac{1}{2}|\mu|^2 < 0$  et  $\beta \geq 1/3$ , il est évident que le produit de la première ligne de (2.43) est négatif. Si de plus  $6\beta - 5 \leq 0$ ,  $2/3 - \beta \leq 0$  et  $\beta(3\beta - 2) \geq 3(1 - \beta)^2$ , alors tout le reste des termes dans (2.43) sont négatifs. Ceci prouve que si  $\frac{3}{4} \leq \beta \leq \frac{5}{6}$ , alors  $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_{(1,\beta,1)}(\Delta)$  pour chaque  $\Delta > 0$ . ■

On note que si  $\lambda \in \mathbb{R}$ , l'inégalité (2.43) devient

$$\begin{aligned} & 2 \left( \lambda + \frac{1}{2}|\mu|^2 \right) \left( 1 - \lambda\Delta + \frac{1}{2}|\mu|^2\Delta + \frac{3\beta-1}{3}\lambda^2\Delta^2 - \frac{1}{3}\lambda|\mu|^2\Delta^2 + \frac{1}{6}|\mu|^4\Delta^2 \right) \\ & + \frac{11-18\beta}{12}\lambda^4\Delta^3 + \frac{1}{2}\lambda^4\Delta^4 \left( \frac{\beta(3\beta-2)}{3}\lambda + \frac{(1-\beta)^2}{2}|\mu|^2 \right) - \frac{(3\beta-2)^2}{36}\lambda^6\Delta^5 < 0, \end{aligned}$$

qui est généralement vérifiée si  $\lambda + \frac{1}{2}|\mu|^2 < 0$  et  $\beta \geq 3/4$ . Ainsi, on a montré que

**Corollaire 2.2** *Pour toutes valeurs  $\lambda, \mu \in \mathcal{D}$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$  et chaque pas  $\Delta > 0$ , les méthodes simplifiées semi-implicites d'ordre 3.0 au sens faible (2.25) avec  $\theta = 1$ ,  $\gamma = 1$  et  $\beta \geq \frac{3}{4}$  donnent des solutions numériques MS-stables.*

En particulier, la région de la MS-stabilité de chaque méthode de Taylor semi-implicite d'ordre 3.0 avec  $\theta = 1$ ,  $\gamma = 1$  et  $\beta \geq \frac{3}{4}$  contient la région de la MS-stabilité de l'équation linéaire test :

$$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}_{(1,\beta,1)} \quad \text{si } \beta \geq \frac{3}{4}.$$

Ce résultat est confirmé dans la figure 2.3 en comparant la région  $\mathcal{R}$  (l'aire quadrillée) avec les régions de MS stabilité  $\mathcal{R}_{(1,\beta,1)}$  (l'aire ombrée) pour  $\beta = \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$ . Voir aussi la région  $\mathcal{R}_{(1,1,1)}$  dans la partie droite de la Figure 2.1. Notons aussi que dans la figure 2.3, si  $\beta = 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}$ , alors  $\mathcal{R} \not\subseteq \mathcal{R}_{(1,\beta,1)}(\Delta)$ .

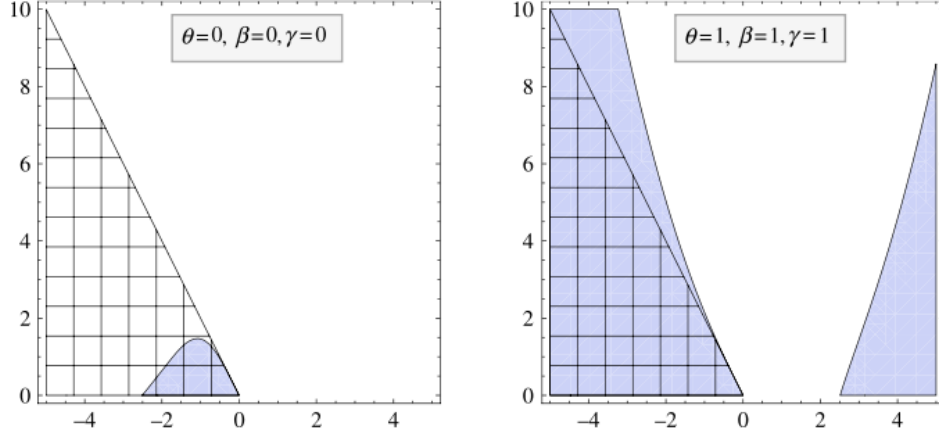


FIG. 2.1 – Comparaison entre la région  $\mathcal{R}$  de la MS-stabilité ( l'aire quadrillée ) et les régions de la MS stabilité des méthodes semi-implicites de Taylor (l'aire ombrée ) avec  $\theta = \beta = \gamma = 0$  ( à gauche ) et  $\theta = \beta = \gamma = 1$  (à droite )

## 2.6 Implémentation numérique

Pour vérifier les ordre de convergence précédents et analyser la propriété de stabilité, quelques tests numériques sont présentés dans cette section. Dans la première sous-section, on compare certaines méthodes proposées avec les méthodes d'Euler et les méthodes simplifiées d'ordre 2.0 tirées de [28] pour vérifier leurs ordres de convergence. Dans la deuxième sous-section, d'autres exemples différents sont proposés pour confirmer le comportement des méthodes d'ordre 3.0 (2.25) notées par  $M_{(\theta,\beta,\gamma)}$ .

### 2.6.1 Expérimentations numériques confirmant l'ordre faible

Pour vérifier la convergence faible des nouvelles méthodes proposées, on a utilisé les problèmes

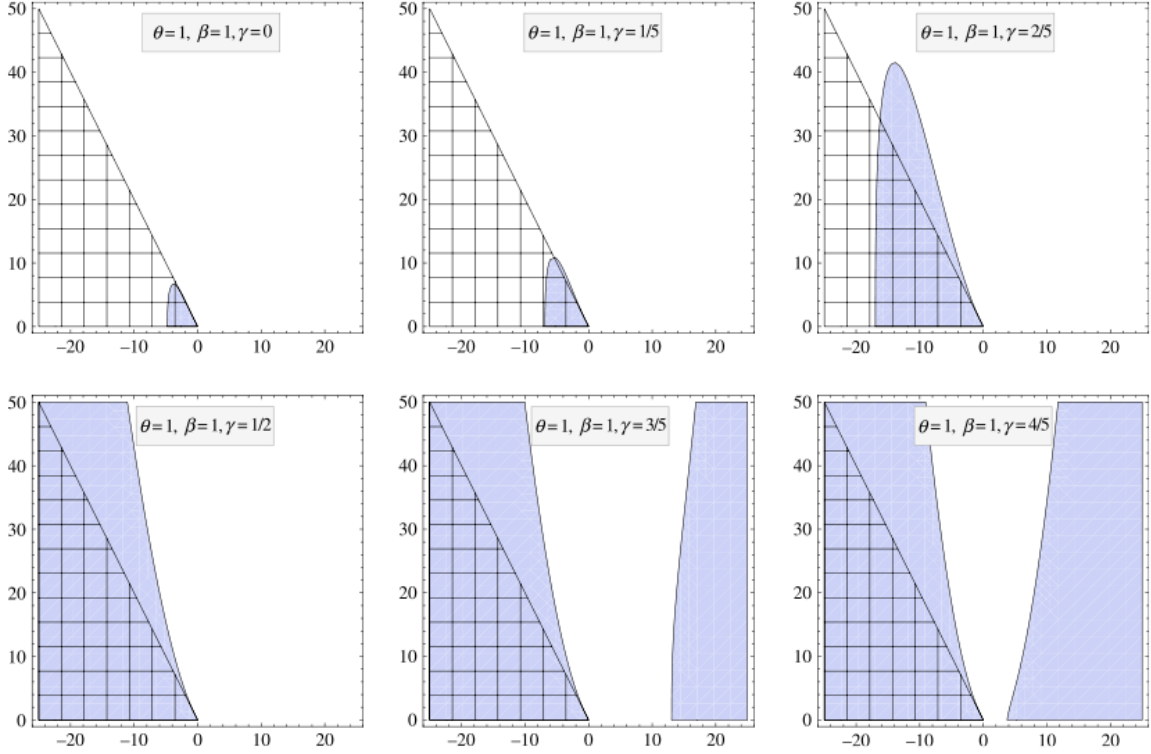


FIG. 2.2 – Les régions de la MS stabilité des méthodes semi implicites (l’aire ombrée) pour  $\theta = \beta = 1$  et  $\gamma = 0, 1/5, 2/5, 1/2, 3/5, 4/5$  comparées avec la région de l’équation teste (l’aire quadrillée)

$$(a) \, dX_t = \left( \frac{1}{3}X_t^{1/3} + 6X_t^{2/3} \right) dt + X_t^{2/3}dW_t; \, X_0 = 1;$$

$$(b) \, \begin{pmatrix} dX_t^1 \\ dX_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t^1 \\ X_t^2 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dW_t; \, X_0^1 = X_0^2 = 0.$$

Pour l’équation (a), on a estimé la valeur exacte  $E[X_1] = 28$  avec les méthodes d’Euler, de Taylor 2.0,  $M_{(0,0,0)}$  et  $M_{(1,1,1)}$  en utilisant 50000 simulations avec des pas  $\Delta = 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}$ . La partie gauche de la figure 2.4 donne  $\log_2 |\mu|$  en fonction de  $\log_2(\Delta)$ , où  $\mu = E[Y_1] - E[X_1]$  est l’erreur en moyenne. Pour l’équation (b), le bruit est additif. On a estimé la valeur exacte  $E[(X_1^1)^2 + (X_1^2)^2] = 1$  en utilisant les méthodes, de Taylor d’ordre 2.0,  $M_{(0,0,0)}$ ,  $M_{(1,1,1)}$  et  $M_{(0,0,0,0)}$  en prenant  $\Delta = 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}$ . La partie droite de la figure 2.4 donne  $\log_2 |\mu|$  en fonction  $\log_2(\Delta)$ , où  $\mu = E[(Y_1^1)^2 + (Y_2^1)^2] - E[(X_1^1)^2 + (X_2^1)^2]$ .

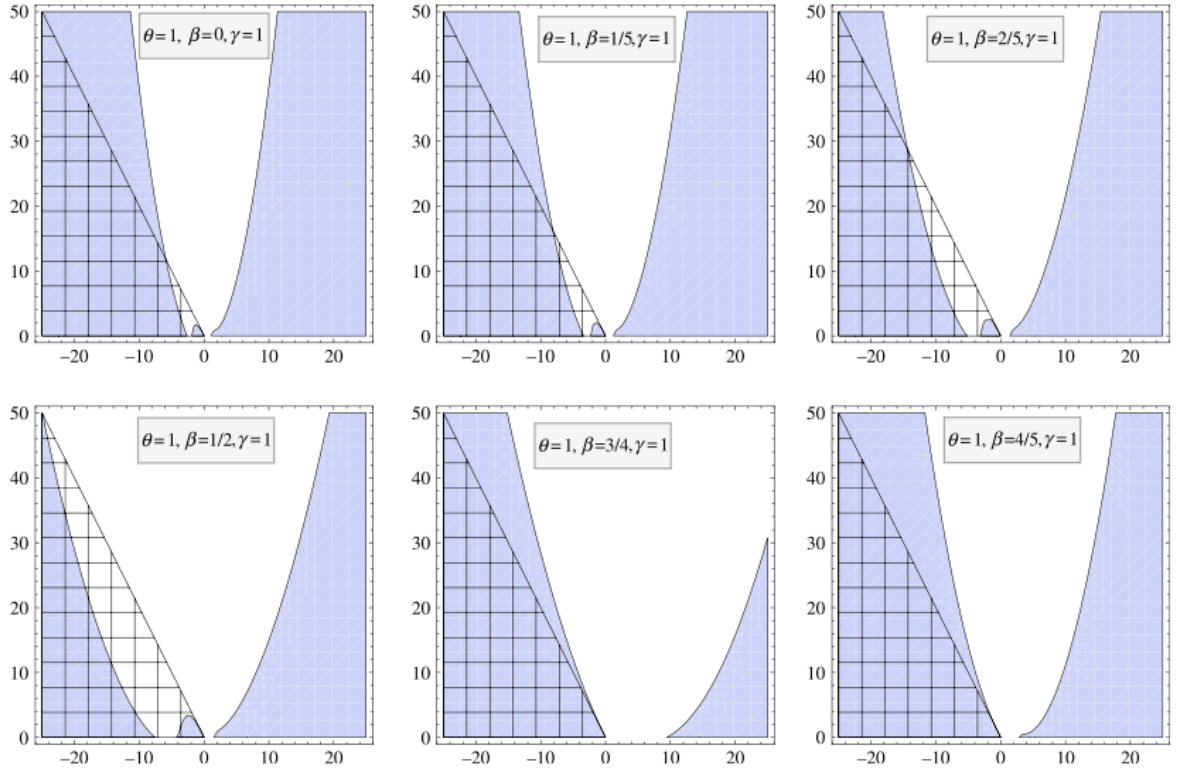


FIG. 2.3 – Les régions de la MS-stabilité des méthodes semi implicites (l’aire ombrée ) pour  $\theta = 1$ ,  $\gamma = 1$  et  $\beta = 0, 1/5, 2/5, 1/2, 3/4, 4/5$  comparées avec la région de l’équation test (l’aire quadrillée)

## 2.6.2 Implémentation numérique et stabilité des méthodes semi-implicites d’ordre 3.0

Pour chaque problème, on a utilisé 5000 simulations et un pas constant  $\Delta$  pour calculer  $E[|X_t|^2]$  ou  $E[X_t]$ . Les calculs sont obtenus avec 16 chiffres significatifs. On a appliqué les méthodes  $M_{(0,0,0)}$ ,  $M_{(1,\frac{3}{4},1)}$ ,  $M_{(1,1,\frac{1}{2})}$  et  $M_{(1,1,1)}$  pour calculer  $\|X_t\|^2 = E[|X_t|^2]$ , où  $X_t$  est la solution de l’équation test (2.33) avec la condition initiale  $X_0 = 1$  pour les cas suivants :

(i)  $\lambda = -10 + 5i$ ,  $\mu = 2$ ,  $\Delta = 0.1$

(ii)  $\lambda = -10 + 5i$ ,  $\mu = 4$ ,  $\Delta = 0.1$ .

(iii)  $\lambda = -\frac{3}{5} + 10i$ ,  $\mu = 1$ ,  $\Delta = 0.1$ .

Les résultats sont présentés dans les tableaux 2.2 et 2.3.

On peut voir que :

(i) Puisque,  $|R_{(0,0,0)}(-10+5i, 2, 0.1)| = 0.250545$ ,  $|R_{(1,\frac{3}{4},1)}(-10+5i, 2, 0.1)| = 0.206235$ ,  $|R_{(1,1,\frac{1}{2})}(-10+5i, 2, 0.1)| = 0.209467$  et  $|R_{(1,1,1)}(-10+5i, 2, 0.1)| = 0.202781$ , alors les quatre méthodes sont MS-stables.

(ii) Les résultats  $|R_{(0,0,0)}(-10+5i, 4, 0.1)| = 1.3913$ ,  $|R_{(1,\frac{3}{4},1)}(-10+5i, 4, 0.1)| = 0.676149$ ,  $|R_{(1,1,\frac{1}{2})}(-10+5i, 4, 0.1)| = 0.649436$  et  $|R_{(1,1,1)}(-10+5i, 4, 0.1)| = 0.620676$  signifient que la méthode explicite  $M_{(0,0,0)}$  est instable et que les trois méthodes semi-implicites sont stables.

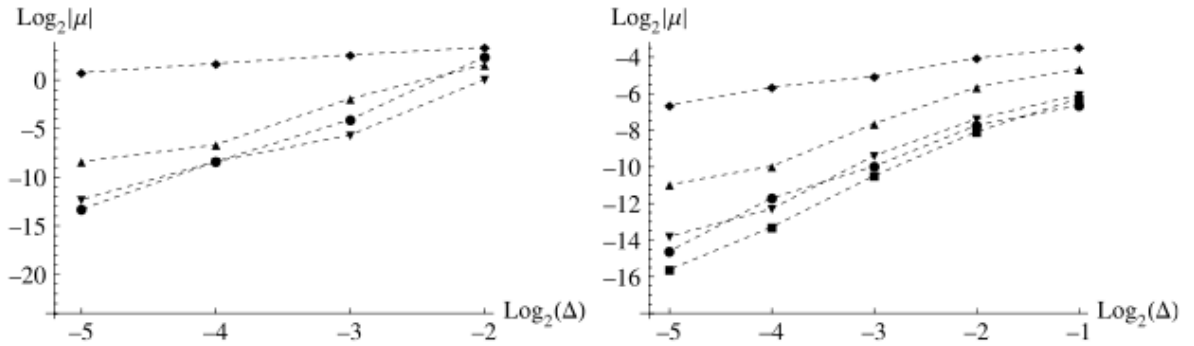


FIG. 2.4 – Comparaison entre les ordres faibles de convergence des méthodes : Euler (◆), Taylor 2.0 (▲),  $M_{(0,0,0)}$  (▼),  $M_{(1,1,1)}$  (●) et  $M_{(0,0,0,0)}$  (■) en utilisant le problème (a) (partie à gauche) et le problème (b) (partie à droite)

(iii) Cet exemple explique les résultats donnés dans (2.42). A partir de (2.42), on conclut que la méthode  $M_{(1,1,1)}$  donne une solution instable et les autres méthodes sont stables puisque  $|R_{(0,0,0)}(-\frac{3}{5}+10i, 1, 0.1)| = 0.940856$ ,  $|R_{(1,\frac{3}{4},1)}(-\frac{3}{5}+10i, 1, 0.1)| = 0.951007$ ,  $|R_{(1,1,\frac{1}{2})}(-\frac{3}{5}+10i, 1, 0.1)| = 0.910336$ . On note que la convergence de ces méthodes est lente puisque les valeurs de leurs fonctions de stabilité sont au voisinage de 1.

| $t$ | $\ X\ ^2 = E X_t ^2$ |                         |                         |               |
|-----|----------------------|-------------------------|-------------------------|---------------|
|     | Problème (i)         |                         |                         |               |
|     | $M_{(0,0,0)}$        | $M_{(1,\frac{3}{4},1)}$ | $M_{(1,1,\frac{1}{2})}$ | $M_{(1,1,1)}$ |
| 0.2 | 0.061472             | 0.038971                | 0.040436                | 0.037943      |
| 0.4 | 0.003817             | 0.001542                | 0.001663                | 0.001465      |
| 0.6 | 0.000917             | 0.000344                | 0.000373                | 0.000317      |
| 0.8 | 1.1006 E-5           | 1.623 E-6               | 1.930 E-6               | 1.510 E-6     |
| 1.0 | 7.3844 E-7           | 8.105 E-8               | 1.01239 E-7             | 7.430 E-8     |

TAB. 2.1 – Les valeurs de  $E|X_t|^2$  en utilisant les méthodes d'ordre 3.0,  $M_{(0,0,0)}$ ,  $M_{(1,\frac{3}{4},1)}$ ,  $M_{(1,1,\frac{1}{2})}$  et  $M_{(1,1,1)}$  pour l'exemple test (i).

| $t$ | $\ X\ ^2 = E X_t ^2$ |                         |                         |               |
|-----|----------------------|-------------------------|-------------------------|---------------|
|     | Problème (ii)        |                         |                         |               |
|     | $M_{(0,0,0)}$        | $M_{(1,\frac{3}{4},1)}$ | $M_{(1,1,\frac{1}{2})}$ | $M_{(1,1,1)}$ |
| 0.2 | 2.466417             | 0.280343                | 0.26601                 | 0.243947      |
| 0.4 | 1.381881             | 0.048333                | 0.045591                | 0.038516      |
| 0.6 | 1.423551             | 0.031015                | 0.030338                | 0.024744      |
| 0.8 | 0.235228             | 3.047 E-5               | 2.218 E-5               | 1.545 E-5     |
| 1.0 | 0.344000             | 7.683 E-7               | 9.808 E-7               | 6.025 E-7     |

TAB. 2.2 – Les valeurs de  $E|X_t|^2$  en utilisant les méthodes d'ordre 3.0,  $M_{(0,0,0)}$ ,  $M_{(1,\frac{3}{4},1)}$ ,  $M_{(1,1,\frac{1}{2})}$  et  $M_{(1,1,1)}$  pour l'exemple test (ii).

## 2.7 Conclusion

L'intégration des équations différentielles raides nécessitent l'utilisation de méthodes ayant de bonnes propriétés de stabilité comme les méthodes implicites. Dans notre travail, en utilisant la formule stochastique de Taylor (comme Platen dans [38, 28]) et les équivalences faibles, on a obtenu des méthodes générales d'ordre faible 3.0 et 4.0 pour les cas multidimensionnels avec un bruit multidimensionnel. Ces méthodes contiennent des intégrales multiples dont l'implémentation est difficile. Alors, pour des applications numériques, ces intégrales doivent être remplacées par des variables aléatoires simples pour obtenir ce qu'on appelle des méthodes simplifiées. Pour le cas multidimensionnel avec un bruit unidimensionnel, on présente une famille infinie de méthodes semi-implicites simplifiées d'ordre 3.0 au sens faible. On note que les méthodes explicites de Taylor d'ordre 3.0 qui sont proposées dans [28] sont contenues dans cette famille. Pour le cas multidimensionnel avec un bruit additif unidimen-

| $t$ | $\ X\ ^2 = E X_t ^2$ |                         |                         |               |
|-----|----------------------|-------------------------|-------------------------|---------------|
|     | Problème (iii)       |                         |                         |               |
|     | $M_{(0,0,0)}$        | $M_{(1,\frac{3}{4},1)}$ | $M_{(1,1,\frac{1}{2})}$ | $M_{(1,1,1)}$ |
| 0.2 | 0.868594             | 0.892386                | 0.817473                | 1.02465       |
| 0.4 | 0.773260             | 0.814360                | 0.683251                | 1.073865      |
| 0.6 | 0.724794             | 0.772012                | 0.620358                | 1.091651      |
| 0.8 | 0.576438             | 0.648247                | 0.456552                | 1.126469      |
| 1.0 | 0.516061             | 0.583764                | 0.376955                | 1.16737       |
| 2.0 | 0.176409             | 0.271111                | 0.114564                | 1.075440      |
| 3.0 | 0.055511             | 0.129726                | 0.035351                | 1.008479      |

TAB. 2.3 – Les valeurs  $E|X_t|^2$  en utilisant les méthodes d'ordre 3.0,  $M_{(0,0,0)}$ ,  $M_{(1,\frac{3}{4},1)}$ ,  $M_{(1,1,\frac{1}{2})}$  et  $M_{(1,1,1)}$  pour l'exemple test (iii).

sionnel, on présente une famille infinie de méthodes semi-implicites d'ordre 4.0 au sens faible contenant la méthode explicite présentée dans [47]. En utilisant l'équation linéaire test avec un bruit multiplicatif, on a analysé la stabilité en moyenne quadratique de la famille de méthodes d'ordre 3.0. On conclut que, comme pour les méthodes de Taylor d'ordre 1.0 [25], la propriété de stabilité pour les méthodes d'ordre supérieur est améliorée quand le degré d'implicité (implicitness) (implicitness) est augmenté. Ces résultats théoriques ont été vérifiés par des implémentations numériques.

## Chapitre 3

# Analyse de la stabilité en moyenne quadratique de la méthode semi-implicite d'ordre 2.0 au sens faible

Dans ce chapitre, on présente une étude complète de la stabilité en moyenne quadratique d'une famille dépendant de deux paramètres de méthodes semi-implicites d'ordre 2.0 pour la résolution des équations différentielles stochastiques. Des tests numériques sont obtenus pour confirmer les résultats théoriques. La stabilité est un critère important quand nous étudions les méthodes numériques pour les EDS en se basant sur le travail de Higham [23]. La question qui se pose est comment les méthodes numériques reproduisent-elles les propriétés de stabilité de l'équation linéaire test. Les motivations de l'analyse de la stabilité des EDO peuvent être considérées comme un guide dans le cas stochastique. Plusieurs types de stabilité sont proposés dans [24, 30, 26]. La stabilité en moyenne quadratique pour la solution exacte et la solution numérique est largement étudiée dans [5, 20, 17, 10, 24, 23, 39, 46] pour le cas scalaire et dans [9, 41, 50] pour le cas multidimensionnel. L'introduction des termes implicites dans les méthodes de Taylor pour améliorer les propriétés de stabilité a été discutée dans [8, 25, 23, 45]. Dans [23], l'auteur généralise la notion de A-stabilité des méthodes  $\theta$  déterministes et donne une étude complète de la MS-stabilité de la méthode stochastique semi-implicite d'ordre 1.0 (appelée aussi la  $\theta$  méthode). En particulier, il a prouvé comme dans le cas déterministe [29] que la valeur  $\theta = 1/2$  est la borne de la MS-stabilité, ceci qui signifie que pour  $\theta \geq 1/2$ , la  $\theta$ -méthode conserve la stabilité de l'EDS. Le même auteur [25] analyse la pro-

priété de la MS-stabilité de la méthode semi-implicite de Milstein d'ordre 1.0 en montrant que dans ce cas, la borne de la MS-stabilité est  $\theta = 3/2$ . Ces résultats pour la  $\theta$  méthode d'Euler et la  $\theta$  méthode de Milstein ont été généralisés dans [8] pour les équations différentielles scalaires excitées par un processus de Wiener  $m$ -dimensionnel. On remarque aussi que la région de stabilité et la borne  $\theta_{Mar} = 1/2$  sont indépendantes du nombre  $m$  des bruits pour la méthode de Maruyama. Ceci n'est pas le cas pour la méthode  $\theta$  de Milstein. Une famille de méthodes semi-implicites d'ordre 2.0 au sens faible a été proposée par Milstein [28, 34]. ces méthodes sont appelées les méthodes  $(\theta, \beta)$  puisque le degré d'implicité (implicitness) dépend de deux paramètres. Elles possèdent un ordre plus grand que la méthode  $\theta$  d'Euler. Pour cette classe de méthodes, nous proposons dans ce chapitre, une étude complète de la MS-stabilité. L'introduction des termes implicites dans la méthode d'ordre 2.0 au sens faible améliore la propriété de la stabilité numérique. En particulier, on a montré que la région de la MS-stabilité de la méthode coïncide avec la région de la stabilité de la solution de l'équation test avec  $\theta = 3/4$  et  $\beta = 1/2$ .

## 3.1 Préliminaire

Soient un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathcal{P})$ , un processus de Wiener  $\{W_t\}$  et l'équation différentielle scalaire au sens de Itô

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t, \quad X_{t_0} = c \quad (3.1)$$

où  $c$  est une constante. les coefficients  $a(t, x)$ ,  $b(t, x)$  sont supposés mesurables et satisfont la condition de Lipschitz et de la croissance bornée par rapport à  $x$  assurant l'existence et l'unicité de la solution [4].

### 3.1.1 Notions de stabilité

on suppose maintenant que  $a(t, 0) = 0$  et  $b(t, 0) = 0$  pour  $t \geq t_0$ . Ainsi le processus  $X_t = 0$  est un point d'équilibre, c'est l'unique solution de (3.1) avec  $c = 0$ .

**Définition 3.1** ([4, 26]). *La position d'équilibre de (3.1) est dite  $p$ -stable en moyenne si pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un  $\delta > 0$  tel que*

$$\sup_{t_0 \leq t < \infty} E|X_t(c)|^p \leq \epsilon, \quad \text{pour } |c| \leq \delta$$

*et il est dit asymptotiquement  $p$ -stable en moyenne s'il est  $p$ -stable en moyenne et pour tout  $c$  au voisinage de  $x = 0$*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E|X_t(c)|^p = 0$$

Dans le cas où  $p = 1$  ou  $p = 2$ , on parle de la stabilité en moyenne et de la stabilité en moyenne quadratique (MS-stabilité) respectivement.

En remplaçant dans la formule précédente  $E|X_t(c)|^p$  par  $E|X_t(c)|$ , on obtient la notion de stabilité asymptotique du premier moment. si on considère  $E|X_t(c)|^2$ , on parle de stabilité asymptotique de second degré. Considérons maintenant un schéma stochastique à un pas appliqué à l'équation (3.1) avec un pas  $\Delta > 0$ . Ceci conduit à l'approximation discrète

$$Y_{n+1} = Y_n + \phi(t_n, Y_n, Y_{n+1}, \Delta, \zeta_{n,1}, \dots, \zeta_{n,r}), Y_0 = c, \quad (3.2)$$

où  $\zeta_{n,1}, \dots, \zeta_{n,r}$  sont des variables stochastiques dépendantes de  $\Delta$  et  $\mathcal{F}_{t_{n+1}}$ -mesurables. On suppose aussi que le processus de discrétisation conserve le point d'équilibre  $Y_n = 0$  pour  $c = 0$ . Les différentes notions de stabilité du point d'équilibre d'une EDS donnée peuvent être appliquées au point d'équilibre de  $\{Y_n\}$ .

**Définition 3.2** Une position d'équilibre de la discrétisation  $\{Y_n\}$  est dite MS-stable si pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un  $\delta > 0$  tel que  $E|Y_n|^2 \leq \epsilon$ ,  $n \in \mathcal{N}$ , pour  $|c| \leq \delta$  et il est dit asymptotiquement MS-stable s'il est MS-stable et  $\lim_{n \rightarrow \infty} E|Y_n|^2 = 0$ .

L'analyse de la stabilité d'une méthode numérique stochastique consiste à étudier dans quelle mesure la solution numérique de cette méthode obtenue à partir de cette méthode, reproduit le comportement de stabilité de la solution exacte. Dans cette étude, on s'intéresse à la MS-stabilité linéaire, c'est-à-dire l'analyse de la stabilité des problèmes gouvernés par l'équation (3.1) avec un vecteur dérive et un coefficient de diffusion linéaires. La MS-stabilité est équivalente à la stabilité du second moment [4]. Par ailleurs, la MS-stabilité implique la stabilité en moyenne qui implique à son tour la stabilité des moments d'ordre un. Ainsi, la stabilité en moyenne quadratique d'une solution d'équilibre entraînant la stabilité des deux moments est pertinente pour l'étude de la convergence faible des méthodes numériques car on s'intéresse à l'approximation des moments de la solution.

### 3.1.2 MS-stabilité linéaire des schémas numériques pour la solution d'une EDS

En s'inspirant du cas déterministe et afin de clarifier la propriété de stabilité d'une méthode stochastique, il est plus commode généralement d'utiliser une équation linéaire test avec un bruit multiplicatif

$$dX_t = \lambda X_t dt + \mu X_t dW_t \quad (3.3)$$

où  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  et  $X_0 = x_0 \in \mathbb{R}$  [3, 5, 22, 23, 39, 46]. La position d'équilibre de l'équation test (3.3) est asymptotiquement stable en moyenne quadratique si et seulement si  $\mathcal{R}(\lambda) + \frac{1}{2}|\mu|^2 < 0$  [23, 39, 42]. L'ensemble

$$S_{SDE} = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : \mathcal{R}(\lambda) + \frac{1}{2}|\mu|^2 < 0\} \quad (3.4)$$

est appelé le domaine de la MS-stabilité de l'équation stochastique (3.3). On note que si  $\mu = 0$ , la condition de la MS-stabilité se réduit à la condition de la  $A$ -stabilité déterministe ( $\mathcal{R}(\lambda) < 0$ ) de l'équation test ordinaire linéaire [29]. Pour analyser la MS-stabilité d'un schéma stochastique à un pas, nous appliquons ce schéma à l'équation (3.3) et nous obtenons un schéma récurrent de la forme (3.2). En prenant la norme quadratique, on obtient

$$E[|Y_{n+1}|^2] = R(\lambda, \mu, \Delta)E[|Y_n|^2],$$

puisque  $E[|Y_n|^2] \longrightarrow 0$  si et seulement si  $|R(\lambda, \mu, \Delta)| < 1$ .  $R(\lambda, \mu, \Delta)$  est appelée la fonction de la MS-stabilité de la méthode et l'ensemble

$$S_{SM}(\Delta) = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}, |R(\lambda, \mu, \Delta)| < 1\} \quad (3.5)$$

est appelé le domaine de MS-stabilité de la méthode stochastique appliquée à l'équation test avec un pas  $\Delta$ . Dans [39], les auteurs présentent des fonctions et des domaines de la MS-stabilité de certains schémas. Suivant les travaux de Higham [23, 25] et afin de savoir si pour un  $\Delta$  donné, la méthode numérique stochastique conserve la propriété de stabilité du problème, on compare naturellement les domaines  $S_{SM}(\Delta)$  et  $S_{SDE}$  de la MS-stabilité. En particulier, l'inclusion  $S_{SDE} \subset S_{SM}(\Delta)$  pour tout  $\Delta > 0$  signifie que si l'EDS est stable, alors la méthode numérique est stable quelque soit  $\Delta$ . Ceci est une généralisation de la propriété de la  $A$ -stabilité des méthodes numériques pour des équations déterministes. Pour résoudre l'EDS scalaire (3.1), Higham, dans [23] a considéré une famille de méthodes semi-implicites d'Euler-Maruyama appelées aussi les  $\theta$ -méthodes.

$$Y_{n+1} = Y_n + ((1 - \theta)a + \theta a(t_{n+1}, Y_{n+1}))\Delta + b(t_n, Y_n)\Delta\hat{W}_n \quad (3.6)$$

où  $\theta \in [0, 1]$  peut être interprété comme le degré d'implicité (implicitness) et  $\Delta\hat{W}_n$  des variables aléatoires gaussiennes indépendantes suivant la loi  $\mathcal{N}(0, \Delta)$ . Leurs propriétés de stabilité vérifient les relations

- $S_\theta(\Delta) \subset S_{SDE}$ , si  $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$ .
- $S_{1/2}(\Delta) = S_{SDE}$

–  $S_{SDE} \subset S_\theta(\Delta)$ , si  $\theta > 1/2$

pour tout  $\Delta > 0$ . Notons que comme dans le cas de la  $A$ -stabilité déterministe [29], pour  $\theta \geq \frac{1}{2}$ , la  $\theta$ -méthode stochastique conserve la stabilité de l'équation stochastique pour tout  $\Delta > 0$ . Uniquement pour  $\theta = \frac{1}{2}$ , le domaine de la MS-stabilité du schéma coïncide avec le domaine de la MS-stabilité de l'équation test.

### 3.1.3 Méthodes semi-implicites de Taylor d'ordre 2.0

Dans [32], Milstein a introduit une famille de méthodes semi-implicites de Taylor d'ordre 2.0 dépendant de deux paramètres

$$\begin{aligned} Y_{n+1} = & Y_n + ((1 - \theta)a + \theta a(t_{n+1}, Y_{n+1}))\Delta + b\Delta\hat{W}_n + \frac{1}{2}b\frac{\partial b}{\partial x}(\Delta\hat{W}_n^2 - \Delta) \\ & + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial b}{\partial t} + a\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 b}{\partial^2 x} + (1 - 2\theta)b\frac{\partial a}{\partial x}\right)\Delta\Delta\hat{W}_n + (1 - 2\theta)(1 - \beta) \\ & \left(\frac{\partial a}{\partial t} + a\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 a}{\partial^2 x}\right)\frac{\Delta^2}{2} + (1 - 2\theta)\beta\left(\frac{\partial a}{\partial t} + a\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 a}{\partial^2 x}\right)(t_{n+1}, Y_{n+1})\frac{\Delta^2}{2}, \quad (3.7) \end{aligned}$$

Les valeurs des fonctions  $a$  et  $b$  ainsi que leurs dérivées sont prises au point  $(t_n, Y_n)$  sauf pour les cas spécifiés. Les paramètres  $\theta, \beta$  peuvent être pris dans l'intervalle  $[0, 1]$  et  $\Delta\hat{W}_n$  sont des variables indépendantes vérifiant la condition

$$|E(\Delta\hat{W}_n)| + |E(\Delta\hat{W}_n)^3| + |E(\Delta\hat{W}_j)^2 - \Delta| + E|(\Delta\hat{W}_j)^4 - 3\Delta^2| + |E(\Delta\hat{W}_n)^5| \leq K\Delta^3.$$

En prenant  $\theta = \beta = 0$ , on obtient le schéma simplifié explicite d'ordre 2.0. Pour  $\theta = \beta = 1$ , on retrouve le schéma faible d'ordre 2.0 implicite par rapport au vecteur dérive. Notons aussi que pour  $\theta = \frac{1}{2}$ , le schéma (3.7) admet une forme simple qui ne dépend pas de  $\beta$ .

## 3.2 MS-stabilité des méthodes semi-implicites de Taylor d'ordre 2.0

En utilisant les considérations précédentes, on peut étudier la MS-stabilité des méthodes semi-implicites (3.7) pour des grandes valeurs des paramètres. Dans ce cas, le domaine de la MS-stabilité de la méthode contient le domaine de MS-stabilité de l'équation test contrairement au cas aux valeurs petites des deux paramètres. En

appliquant le schéma (3.7) à l'équation test (3.3) avec un pas constant  $\Delta > 0$  et puisque  $a(t, x) = \lambda x$  et  $b(t, x) = \mu x$ , on obtient

$$Y_{n+1} \left( 1 - \theta \lambda \Delta - \frac{1}{2} \beta (1 - 2\theta) \lambda^2 \Delta^2 \right) = Y_n \left( 1 + (1 - \theta) \lambda \Delta + \mu \Delta W \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (1 - \beta) (1 - 2\theta) \lambda^2 \Delta^2 + (1 - \theta) \lambda \mu \Delta \Delta W + \frac{1}{2} \mu^2 (\Delta W^2 - \Delta) \right) \quad (3.8)$$

Quand un schéma est choisi, la valeur  $(1 - \theta \lambda \Delta - \frac{1}{2} \beta (1 - 2\theta) \lambda^2 \Delta^2)$  est nulle pour au plus deux valeurs de pas  $\Delta$ ; en éliminant ces valeurs, on garanti que (3.8) est bien définie. En appliquant la norme de la moyenne quadratique à l'équation (3.8), on obtient l'équation

$$E[|Y_{n+1}|^2] = R_{(\theta, \beta)}(\lambda, \mu, \Delta) [E|Y_n|^2]$$

avec

$$R_{(\theta, \beta)}(\lambda, \mu, \Delta) = \frac{|1 + (1 - \theta) \lambda \Delta + \frac{1}{2} (1 - \beta) (1 - 2\theta) \lambda^2 \Delta^2|^2 + |1 + (1 - \theta) \lambda \Delta|^2 \Delta |\mu|^2 + \frac{1}{2} \Delta^2 |\mu|^4}{\left| 1 - \theta \lambda \Delta - \frac{1}{2} \beta (1 - 2\theta) \lambda^2 \Delta^2 \right|^2} \quad (3.9)$$

On note que pour le cas explicite  $\theta = \beta = 0$ , on a :

$$R(0, 0)(\lambda, \mu, \Delta) = |1 + \lambda \Delta + \frac{1}{2} \lambda^2 \Delta^2|^2 + |1 + \lambda \Delta|^2 \Delta |\mu|^2 + \frac{1}{2} \Delta^2 |\mu|^4$$

Pour le cas implicite  $\theta = \beta = 1$ , on a :

$$R(1, 1)(\lambda, \mu, \Delta) = \frac{1 + \Delta |\mu|^2 + \frac{1}{2} \Delta^2 |\mu|^4}{|1 - \lambda \Delta + \frac{1}{2} \Delta^2 \lambda^2|^2}$$

Pour  $\theta = \frac{1}{2}$ , la fonction  $R_{(1/2, \beta)}$  ne dépend pas de  $\beta$  :

$$R(1/2, \beta)(\lambda, \mu, \Delta) = \frac{|1 + \frac{1}{2} \lambda \Delta|^2 + |1 + \frac{1}{2} \lambda \Delta|^2 \Delta |\mu|^2 + \frac{1}{2} \Delta^2 |\mu|^4}{|1 - \frac{1}{2} \lambda \Delta|^2}$$

A partir de (3.5), le domaine de la MS-stabilité du schéma  $(\theta, \beta)$  semi-implicite (3.7) appliqué avec un pas  $\Delta$  est donné par :

$$S_{(\theta, \beta)}(\Delta) = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : |R_{(\theta, \beta)}(\lambda, \mu, \Delta)| < 1\}$$

Un calcul simple donne

$$|R_{(\theta,\beta)}(\lambda, \mu, \Delta)| < 1 \iff H(\theta, \beta, \lambda, \mu, \Delta) < 0 \quad (3.10)$$

où

$$\begin{aligned} H(\theta, \beta, \lambda, \mu, \Delta) &= 2\Delta\mathcal{R}(\lambda) + (1-2\theta)\Delta^2\mathcal{R}(\lambda^2) + (1-2\theta)\Delta^2|\lambda|^2 \\ &+ (1-\theta-\beta)(1-2\theta)\Delta^3|\lambda|^2\mathcal{R}(\lambda) + \frac{1}{4}(1-2\beta)(1-2\theta)^2\Delta^4|\lambda|^4 \\ &+ \left(1 + 2(1-\theta)\Delta\mathcal{R}(\lambda) + (1-\theta)^2\Delta^2|\lambda|^2 + \frac{1}{2}\Delta|\mu|^2\right)\Delta|\mu|^2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Pour simplifier, on note  $H$  au lieu de  $H(\theta, \beta, \lambda, \mu, \Delta)$  et après quelques manipulations algébriques, on obtient :

$$H = 2\Delta(JA + B + C) \quad (3.12)$$

où

$$\begin{aligned} J &= J(\lambda, \mu) = \mathcal{R}(\lambda) + \frac{1}{2}|\mu|^2. \\ A &= A(\theta, \lambda, \mu, \Delta) = 1 + \frac{1}{2}|\mu|^2\Delta + (1-2\theta)\Delta\mathcal{R}(\lambda). \\ B &= B(\theta, \beta, \lambda, \mu, \Delta) = \frac{\Delta^2|\lambda|^2}{2} \left( (1-2\theta)(1-\theta-\beta)\mathcal{R}(\lambda) + (1-\theta)^2|\mu|^2 \right). \\ C &= C(\theta, \beta, \lambda, \Delta) = \frac{\Delta^3|\lambda|^4}{8}(1-2\beta)(1-2\theta)^2. \end{aligned}$$

A partir de (3.4), on déduit que  $(\lambda, \mu) \in S_{SDE}$  si et seulement si  $J(\lambda, \mu) < 0$  et à partir de (3.10), on déduit  $(\lambda, \mu) \in S_{(\theta,\beta)}(\Delta)$  si et seulement si  $H(\theta, \beta, \lambda, \mu, \Delta) < 0$ . Alors pour connaître la relation entre les ensembles  $S_{SDE}$  et  $S_{(\theta,\beta)}(\Delta)$ , il faut étudier le signe de  $H$  et sa relation avec le signe de  $J$  pour  $\theta, \beta \in [0, 1]$ .

**Proposition 3.1** *Si  $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ ,  $\frac{1}{2} \leq \beta \leq 1$  et  $\theta - 1 - \beta + 2\theta\beta \geq 0$ , alors  $S_{SDE} \subset S_{\theta,\beta}$ , pour tout  $\Delta > 0$ . Comme conséquence, si le problème est stable pour la classe des couples  $(\theta, \beta)$  alors la  $(\theta, \beta)$  méthode est aussi stable pour chaque pas  $\Delta$ .*

**Preuve.** On suppose que  $\theta$  et  $\beta$  vérifient les conditions citées précédemment. Il faut prouver que si  $J < 0$ , alors  $H < 0$  pour chaque  $\Delta > 0$ . Si  $J < 0$  alors  $\mathcal{R}(\lambda) < 0$  et donc  $A > 0$  et  $C \leq 0$ . Puisque la condition  $\theta - 1 - \beta + 2\theta\beta \geq 0$  est équivalente à  $(1-2\theta)(1-\theta-\beta) \geq 2(1-\theta)^2$ , alors à partir de (3.12) on a :

$$\beta \leq \frac{\Delta^2|\lambda|^2}{2} \left( 2(1-\theta)^2\mathcal{R}(\lambda) + (1-\theta)^2|\mu|^2 \right) = \Delta^2|\lambda|^2(1-\theta)^2J \leq 0.$$

Finalement de (3.12), on déduit que  $H < 0$ . ■

**Proposition 3.2** Si  $\theta = \frac{3}{4}$  et  $\beta = \frac{1}{2}$ , alors  $S_{(\theta,\beta)} = S_{SDE}$  pour chaque  $\Delta > 0$ . C'est à dire que le domaine de stabilité de la méthode semi-implicite  $(\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$  coïncide avec le domaine de stabilité de l'équation test.

**Preuve.** Il faut prouver que  $J = J(\lambda, \mu) < 0$  si et seulement si  $H = H(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \lambda, \mu, \Delta) < 0$  pour chaque valeur de  $\Delta > 0$ . Si  $\theta = \frac{3}{4}$  et  $\beta = \frac{1}{2}$ , à partir des formules précédentes de  $A, B, J$  et  $C$ , on a  $A = 1 + \frac{1}{2}|\mu|^2\Delta - \frac{1}{2}\Delta\mathcal{R}(\lambda)$ ,  $B = \frac{\Delta^2|\lambda|^2}{16}\left(\mathcal{R}(\lambda) + \frac{1}{2}|\mu|^2\right)$ ,  $C = 0$ , de plus à partir de (3.12), on obtient

$$\begin{aligned} H &= 2\Delta J \left( 1 + \frac{1}{2}\Delta|\mu|^2 - \frac{1}{2}\Delta\mathcal{R}(\lambda) + \frac{\Delta^2|\lambda|^2}{16} \right) \\ &= \frac{1}{8}\Delta J (16 + \Delta^2|\lambda|^2 - 8\mathcal{R}(\lambda) + 8\Delta|\mu|^2) \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$= \frac{1}{8}\Delta J (|\lambda\Delta - 4|^2 + 8|\mu|^2\Delta). \quad (3.14)$$

D'où le résultat. ■

**Proposition 3.3** Si l'une des conditions suivantes est vérifiée

1.  $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$  et  $0 \leq \beta \leq \frac{1}{2}$ ,
2.  $\beta = \frac{1}{2}$  et  $0 \leq \theta \leq \frac{3}{4}$ ,
3.  $\theta = \frac{1}{2}$

alors  $S_{(\theta,\beta)} \subseteq S_{SDE}$  pour chaque  $\Delta > 0$ . Ceci signifie que si le problème est instable, alors les méthodes  $(\theta, \beta)$  sont instables quelque soit  $\Delta$ .

**Preuve.** Il faut montrer que la condition  $H < 0$  implique que  $J < 0$  pour tout couple  $(\theta, \beta)$  satisfaisant les conditions 1, 2 ou 3. On a

$$JA = J(1 + \Delta J - 2\theta\Delta\mathcal{R}(\lambda)) = \Delta J^2 + JD$$

où

$$D = 1 - 2\theta\Delta\mathcal{R}(\lambda). \quad (3.15)$$

Puisque  $\theta \neq 1$ , on peut écrire à partir de (3.12)

$$\begin{aligned} B &= \Delta^2|\lambda|^2(1 - \theta)^2 \left( \frac{(1 - 2\theta)(1 - \beta - \theta)}{2(1 - \theta)^2} \mathcal{R}(\lambda) + \frac{1}{2}|\mu|^2 \right) \\ &= \Delta^2|\lambda|^2(1 - \theta)^2 \left( J + \left( \frac{(1 - 2\theta)(1 - \beta - \theta)}{2(1 - \theta)^2} - 1 \right) \mathcal{R}(\lambda) \right) \\ &= \Delta^2|\lambda|^2(1 - \theta)^2 J + E \end{aligned}$$

où

$$E = \frac{\Delta^2 |\lambda|^2}{2} (2\beta\theta - \beta + \theta - 1) \mathcal{R}(\lambda). \quad (3.16)$$

De plus, à partir de (3.12), on a

$$H = 2\Delta(\Delta J^2 + JD + \Delta^2 |\lambda|^2 (1 - \theta)^2 J + E + C). \quad (3.17)$$

- On suppose que  $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$ ,  $0 \leq \beta < \frac{1}{2}$  et  $H < 0$ . On a  $\mathcal{R}(\lambda) < 0$  car sinon  $\mathcal{R}(\lambda) \geq 0$  implique dans (3.12) que  $J \geq 0$ ,  $A > 0$ ,  $B \geq 0$  et  $C \geq 0$ , et par conséquent  $H \geq 0$ . Puisque  $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$ ,  $0 \leq \beta < \frac{1}{2}$  et  $\mathcal{R}(\lambda) < 0$ , on a  $C \geq 0$  dans (3.12),  $D \geq 0$  dans (3.15) et  $E \geq 0$  dans (3.16). En utilisant ces résultats dans (3.17), puisque  $H < 0$ , alors  $J < 0$ .
- On suppose maintenant que  $\beta = \frac{1}{2}$  et  $0 \leq \theta < \frac{3}{4}$ , alors de (3.12) on a  $C = 0$ . à partir de (3.16), on a

$$E = \Delta^2 |\lambda|^2 (\theta - \frac{3}{4}) \mathcal{R}(\lambda) \quad (3.18)$$

et à partir de (3.11), on a

$$\begin{aligned} H &= H\left(\theta, \frac{1}{2}, \lambda, \mu, \Delta\right) \\ &= 2\Delta \left( \mathcal{R}(\lambda) + (1 - \theta)\Delta \mathcal{R}(\lambda) |\mu|^2 + \Delta(1 - 2\theta)(\mathcal{R}(\lambda))^2 + \frac{1}{2} |\mu|^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Delta}{4} |\mu|^4 + \frac{1}{4} |\lambda|^2 \Delta^2 (1 - 2\theta)^2 \mathcal{R}(\lambda) + \frac{1}{2} |\lambda|^2 \Delta^2 (1 - \theta)^2 |\mu|^2 \right) \\ &= 2\Delta \left( \frac{\mathcal{R}(\lambda)}{4} (4 - 4\Delta(2\theta - 1)\mathcal{R}(\lambda) + |\lambda|^2 \Delta^2 (2\theta - 1)^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} |\mu|^2 (|\lambda|^2 \Delta^2 (\theta - 1)^2 + 1 - 2(\theta - 1)\Delta \mathcal{R}(\lambda) + \frac{\Delta}{4} |\mu|^4) \right) \\ &= \frac{\Delta}{2} \left( |2\theta - 1| \Delta \lambda - 2|\mathcal{R}(\lambda)| + 2|(\theta - 1)\Delta \lambda - 1|^2 |\mu|^2 + \Delta |\mu|^4 \right). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Puisque  $H < 0$ , (3.19) montre que  $\mathcal{R}(\lambda) < 0$ . Alors, à partir de (3.15), on a  $D \geq 0$  et puisque  $0 \leq \theta < \frac{3}{4}$ , à partir de (3.16), on a  $E \geq 0$ . Donc (3.17) devient

$$H = 2\Delta(\Delta J^2 + JD + \Delta^2 |\lambda|^2 (1 - \theta)^2 J + E$$

et donc  $H < 0$  et par conséquent  $J < 0$ .

– Si  $\theta = 1/2$ , à partir de (3.11) et (3.12), on obtient

$$H = 2\Delta \left( J(1 + \frac{1}{2}\Delta|\mu|^2) + \frac{1}{8}\Delta^2|\lambda|^2|\mu|^2 \right),$$

ce qui termine la preuve. ■

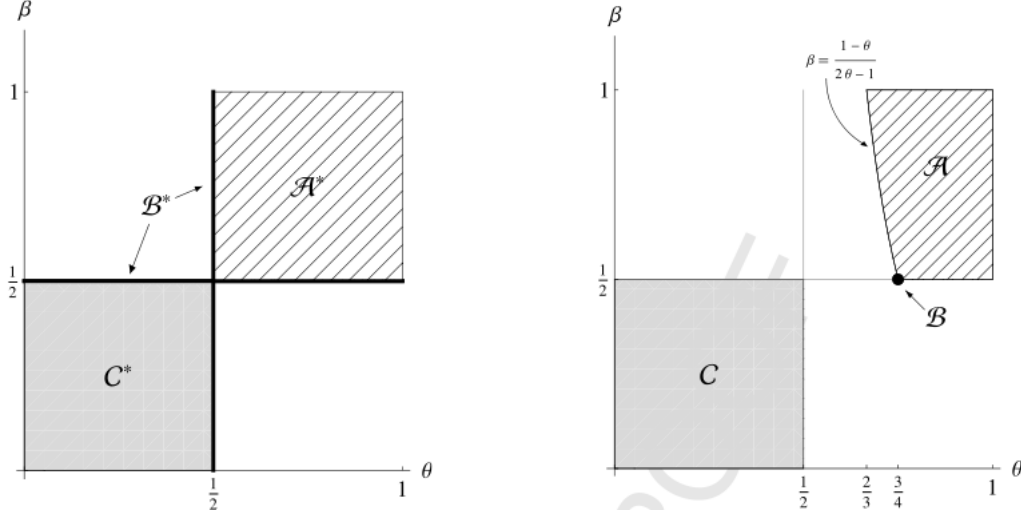


FIG. 3.1 – Les sous ensembles  $A^*$ ,  $B^*$ ,  $C^*$  (à gauche) et  $A, B, C$  (à droite) dans le plan  $(\theta, \beta)$

**Remarque 3.1** En prenant  $b = 0$  dans (3.7), on obtient la méthode semi-implicite d'ordre 2.0 pour résoudre des équations différentielles ordinaires déterministes (ODE). dans ce cas, l'analyse de la stabilité linéaire est basée sur l'équation test  $dX_t = \lambda X_t dt$  avec  $\lambda \in \mathbb{C}$ . où son domaine de stabilité [29], est le demi plan complexe  $S_{ODE} = \mathbb{C}^-$ . En utilisant (3.9) avec  $\mu = 0$  on obtient Le domaine de stabilité  $S_{(\theta, \beta)}^*$  de la méthode semi-implicite  $(\theta, \beta)$  déterministe d'ordre 2.0. On peut prouver que

- Si  $\frac{1}{2} < \theta \leq 1$  et  $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$ , alors  $S_{ODE} \subset S_{(\theta, \beta)}^*(\Delta)$ ,
- Si  $\theta = \frac{1}{2}$  ou  $\beta = \frac{1}{2}$ , alors  $S_{ODE} = S_{(\theta, \beta)}^*(\Delta)$ ,
- Si  $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$  et  $0 \leq \beta < \frac{1}{2}$ , alors  $S_{ODE} \supset S_{(\theta, \beta)}^*(\Delta)$ .

L'image dans la partie à gauche de la figure 3.1 illustre ce résultat. Dans le plan  $(\theta, \beta)$ , les ensembles  $\mathcal{A}^* = (\frac{1}{2}, 1] \times (\frac{1}{2}, 1]$  et  $\mathcal{B}^* = ([0, 1] \times \{\frac{1}{2}\}) \cup (\{\frac{1}{2}\} \times [0, 1])$  donnent l'ensemble de la A-stabilité. On note  $\mathcal{C}^*$  le carré  $[0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}]$ . Si l'équation

test est instable, alors il en est de même pour la solution numérique obtenue pour chaque  $(\theta, \beta)$  appartenant à  $\mathcal{B}^* \cup \mathcal{C}^*$  et  $\Delta > 0$ . Notons que les régions de stabilité  $S_{ODE}$  et  $S_{(\theta, \beta)}^*(\Delta)$  coïncident pour tout  $\Delta$  si  $(\theta, \beta) \in \mathcal{B}^*$ . On peut aussi remarquer que si  $(\theta, \beta) \notin \mathcal{A}^* \cup \mathcal{B}^* \cup \mathcal{C}^*$  alors  $\mathcal{C}^- \not\subseteq S_{(\theta, \beta)}^*(\Delta)$  et  $\mathcal{C}^- \not\supseteq S_{(\theta, \beta)}^*(\Delta)$ . Pour le cas stochastique, dans le plan  $(\theta, \beta)$ , on considère les ensembles  $\mathcal{B} = \left\{ \left( \frac{3}{4}, \frac{1}{2} \right) \right\}$  et

$$\mathcal{A} = \left\{ (\theta, \beta) : \frac{1}{2} < \theta \leq 1, \frac{1}{2} < \beta \leq 1, \theta - 1 - \beta + 2\beta\theta \geq 0 \right\} \setminus \left\{ \left( \frac{3}{4}, \frac{1}{2} \right) \right\} \quad (3.20)$$

Notons que  $\mathcal{A}$  est la région donnée dans la partie à droite de la figure 3.1 (en incluant la frontière sauf le point  $(\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$ ). La proposition 3.1 montre que  $S_{SDE} \subseteq S_{(\theta, \beta)}(\Delta)$  pour chaque  $\Delta > 0$  tel que  $(\theta, \beta) \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ . Ce qui signifie que, les schémas  $(\theta, \beta)$  stochastiques (3.7) conservent la stabilité de la solution du problème test pour chaque  $\Delta$ . Cette propriété peut être interprétée comme une généralisation de la A-stabilité des méthodes  $(\theta, \beta)$  déterministes. Notons qu'avec l'introduction du terme de la diffusion, l'ensemble déterministe  $\mathcal{A}^* \cup \mathcal{B}^*$  de la A-stabilité des méthodes  $(\theta, \beta)$  se réduit à  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ . la proposition 3.2 montre que l'ensemble  $\mathcal{B}^*$  des méthodes  $(\theta, \beta)$  déterministes est tel que le domaine de stabilité du schéma coïncide avec le domaine de stabilité de l'équation test qui se réduit à l'ensemble  $\mathcal{B}$ . Finalement, l'ensemble  $\mathcal{C}$  des couples satisfaisant les conditions citées dans la proposition 1.3 est l'union du carré fermé  $[0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}]$  et les deux segments  $\{\frac{1}{2}\} \times (\frac{1}{2}, 1]$  et  $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \times \{\frac{1}{2}\}$  (voir la figure 3.1).

$$\mathcal{C} = \left\{ (\theta, \beta), 0 \leq \theta, \beta \leq \frac{1}{2} \right\} \cup \left\{ (\theta, \beta), \theta = \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < \beta \leq 1 \right\} \cup \left\{ (\theta, \beta), \frac{1}{2} < \theta < \frac{3}{4}, \beta = \frac{1}{2} \right\}. \quad (3.21)$$

En comparant les deux images dans la figure 3.1, on peut remarquer que l'ensemble  $\mathcal{B}^* \cup \mathcal{C}^*$  des couples des méthodes  $(\theta, \beta)$  déterministes est tel que si l'équation test est instable, alors la solution numérique l'est aussi et se réduit à l'ensemble  $\mathcal{C} \cup \mathcal{B}$  avec l'introduction du terme de la diffusion.

Comme dans le cas déterministe, Higham [23] pose la question suivante “pour quelles valeurs du pas  $\Delta$ , la méthode numérique partage-elle la propriété de stabilité du problème test. plus précisément est-ce que la stabilité de solution exacte de L'EDS implique la stabilité de la solution numérique obtenue avec la méthode  $(\theta, \beta)$  appliquée avec un pas  $\Delta$  suffisamment petit.

**Proposition 3.4** Soient  $\theta, \beta \in [0, 1]$ . Si  $(\lambda, \mu) \in S_{SDE}$ , alors la méthode  $(\theta, \beta)$  est MS-stable pour un pas  $\Delta$  suffisamment petit.

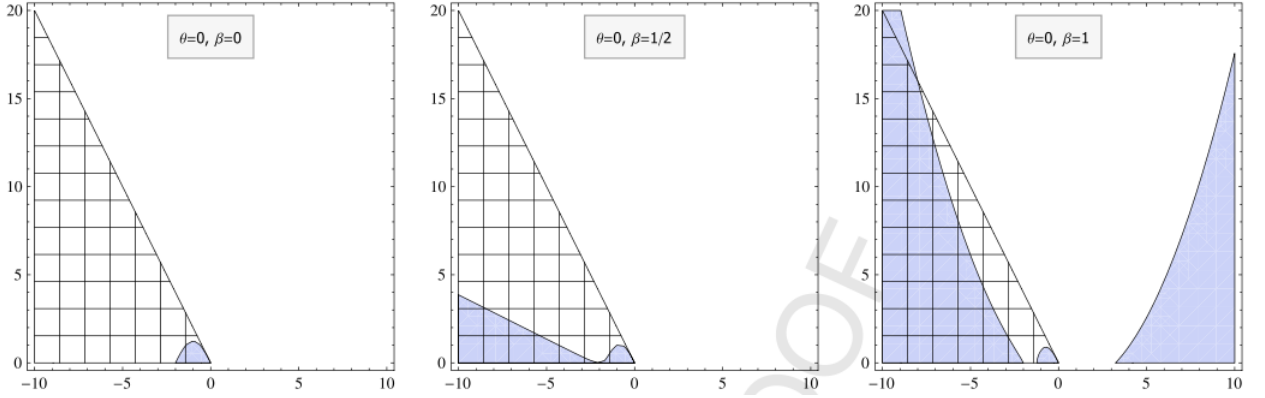


FIG. 3.2 – Comparaison entre la région de stabilité des méthodes  $(0, \beta)$  (l'aire ombrée) pour  $\beta = \frac{1}{2}, 0, 1$  et la région de stabilité du problème (l'aire quadrillée)

**Preuve.** Supposons que  $(\lambda, \mu) \in S_{SDE}$ , alors  $J = J(\lambda, \mu) < 0$ . On veut montrer que  $H = H(\theta, \beta, \lambda, \mu, \Delta) < 0$  pour un pas  $\Delta > 0$ . A partir de (3.12), on peut écrire  $H = 2\Delta(J + \Delta a + \Delta^2 b + \Delta^3 c)$ , où  $a, b$  et  $c$  des constantes dépendantes de  $\theta, \beta, \lambda$  et  $\mu$ . La condition  $H < 0$  se réduit à

$$\Delta a + \Delta^2 b + \Delta^3 c < -J$$

ce qui est vraie pour  $\Delta > 0$  suffisamment petit.

■

Le pas  $\Delta_{(\theta, \beta)} > 0$  est tel que la méthode  $(\theta, \beta)$  est stable si  $0 < \Delta < \Delta_{(\theta, \beta)}$  et il dépend des paramètres  $\theta, \beta \in [0, 1]$ . A titre d'exemple considérant le cas  $\theta = \frac{1}{2}$ . On sait que le schéma ne dépend pas de  $\beta$ . A partir de (3.12), on a

$$H = 2\Delta \left( \frac{|\lambda|^2 |\mu|^2}{8} \Delta^2 + \frac{1}{2} |\mu|^2 J \Delta + J \right). \quad (3.22)$$

Soit  $(\lambda, \mu) \in S_{SDE}$ , puisque  $\lambda \neq 0$  et  $\mu = 0$  alors  $H = 2\Delta J < 0$  pour chaque  $\Delta > 0$ . si  $\mu \neq 0$  et  $\Delta > 0$ , à partir de (3.22)  $H < 0$ , si et seulement si

$$0 < \Delta < 2 \frac{\sqrt{|\mu|^2 J^2 - 2|\lambda|^2 J} - |\mu| J}{|\lambda|^2 |\mu|}. \quad (3.23)$$

Comme conséquence, on a le résultat suivant

**Corollaire 3.1** *Étant donné  $(\lambda, \mu) \in S_{SDE}$  avec  $\mu \neq 0$  la méthode stochastique  $(\frac{1}{2}, \beta)$ ,  $0 \leq \beta \leq 1$ , est MS-stable si et seulement si la condition sur le pas de (3.23)*

est vérifiée. Étant donnée  $(\lambda, 0) \in S_{SDE}$ , le schéma  $(\frac{1}{2}, \beta)$  est MS-stable pour tout  $\Delta$ .

Puisque les paramètres  $\lambda, \mu$  appartiennent à  $\mathbb{C}$ , les domaines de stabilité sont difficiles à déterminer. Si  $(\lambda, \mu)$  sont dans le plan réel, alors l'ensemble  $S_{(\theta, \beta)}$  et  $S_{SDE}$  sont des régions au lieu des domaines. Quand  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , les régions de stabilité sont situées dans le plan  $(x, y)$  avec  $x = \lambda\Delta$  et  $y = \mu^2\Delta$  [23]. La région de stabilité  $S_{SDE}$  dans le plan  $(x, y)$  correspond à la région  $0 < y < -2x$  représentée par le triangle quadrillé. L'aire ombrée représente les régions de stabilité  $S_{(\theta, \beta)}$  de la méthode correspondante (voir Fig 3.2). Cette figure compare les régions de stabilité de  $S_{SDE}$  pour les méthodes  $(0, \beta)$  pour  $\beta = \frac{1}{2}, 0, 1$ . Notons que pour  $\theta = 0$ , la région de stabilité des méthodes  $(0, \beta)$  s'accroît avec  $\beta \in [0, 1]$ . Pour  $\beta = \frac{1}{2}, 0$ , la figure montre que  $S_{(\theta, \beta)} \subset S_{SDE}$ , ce qui est conforme aux résultats de la proposition 3.3. Pour  $\beta = 1$ , on peut voir que  $S_{(0, \beta)}(\Delta) \not\subset S_{SDE}$  et  $S_{SDE} \not\subset S_{(0, \beta)}(\Delta)$  et on peut aussi la généraliser pour chaque  $(0, \beta)$  avec  $\beta \in (\frac{1}{2}, 1]$ . On peut obtenir une figure similaire que la figure 3.2 pour  $\theta \in (0, \frac{1}{2})$  au lieu de  $\theta = 0$ . On a prouvé également que si  $\theta = \frac{1}{2}$ , les méthodes  $(\frac{1}{2}, \beta)$  et les régions  $S_{(\frac{1}{2}, \beta)}$  ne dépendent pas de  $\beta$ . La région ombrée dans la figure 3.3 représente  $S_{(\frac{1}{2}, \beta)}$  pour chaque  $\beta \in [0, 1]$ . Notons que l'inclusion  $S_{(\frac{1}{2}, \beta)} \subset S_{SDE}$  est en conformité avec la troisième condition de la proposition 3.3. Les images dans la figure 3.4 donnent une comparaison de  $S_{SDE}$  avec les régions de stabilité des méthodes  $(\frac{11}{20}, \beta)$  pour  $\beta = \frac{1}{2}, 0$  et  $1$ . L'image centrale montre que l'inclusion  $S_{(\frac{11}{20}, \frac{1}{2})}(\Delta) \subset S_{SDE}$  ce qui est en conformité avec la deuxième condition de la proposition 3.3. La figure (3.4) montre que  $S_{(\frac{11}{20}, \beta)}(\Delta) \not\subset S_{SDE}$  et  $S_{SDE} \not\subset S_{(\frac{11}{20}, \beta)}(\Delta)$  si  $\beta = 0, 1$ . Des résultats analogues sont obtenus pour  $\theta = \frac{11}{20}$  et  $\beta \neq \frac{1}{2}$ . Les images dans la figure 3.5 correspondent aux régions de stabilité des méthodes  $(\frac{3}{4}, \beta)$  pour  $\beta = 0, \frac{1}{2}$  et  $1$ . L'image centrale montre que  $S_{(\frac{3}{4}, \frac{1}{2})}(\Delta) = S_{SDE}$  qui est en conformité avec la proposition 3.2. L'image à droite montre que  $S_{SDE} \subset S_{(\frac{3}{4}, 1)}$  qui est un résultat particulier de la proposition 3.1 alors que l'image à gauche montre que  $S_{(\frac{3}{4}, 0)} \not\subset S_{SDE}$  et  $S_{SDE} \not\subset S_{(\frac{3}{4}, 0)}$ . Des images analogues peuvent être obtenues pour  $\theta = \frac{3}{4}$  et  $\beta \in (0, \frac{1}{2})$ . Les images dans la figure 3.6 correspondent aux régions de stabilité des méthodes  $(1, \beta)$  pour  $\beta = 0, \frac{1}{2}$  et  $1$ . Les images à droite et au centre s'accordent avec la proposition 3.1 avec  $S_{SDE} \subset S_{(1, \frac{1}{2})}(\Delta)$  et  $S_{SDE} \subset S_{(1, 1)}(\Delta)$ . L'image à gauche montre que  $S_{(1, \beta)} \not\subset S_{SDE}$  et  $S_{SDE} \not\subset S_{(1, \beta)}$  si  $\beta = 0$  (les mêmes résultats sont obtenus pour  $\beta \in [0, \frac{1}{2})$ ).

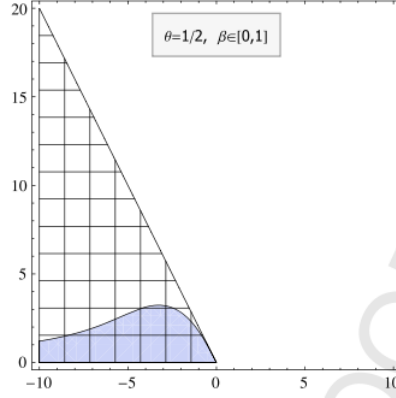


FIG. 3.3 – Comparaison entre  $S_{(\frac{1}{2}, \beta)}$ ,  $\beta \in [0, 1]$  (l'aire ombrée) et  $S_{SDE}$  (triangle quadrillé)

### 3.3 Expérimentations numériques

Dans cette partie, des expérimentations numériques sont réalisées pour confirmer les analyses de la stabilité citées précédemment, et quelques exemples sont présentés. On a appliqué les méthodes  $(\theta, \beta)$  pour  $(\theta, \beta) = (0, 0)$ ,  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ,  $(\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$ ,  $(\frac{2}{3}, 1)$ ,  $(1, 1)$  avec un pas de discrétisation  $\Delta$  constant, pour résoudre l'équation test (3.3) satisfaisant à la condition initiale  $X_0 = 1$  et

1.  $\lambda = -100$ ,  $\mu = 10$ ;
2.  $\lambda = -4$ ,  $\mu = 2$ ;

Pour chaque méthode, on a utilisé 10000 simulations pour approcher  $E[|X_t|^2]$ . Les figures (3.6), (3.7) et (3.8) représentent l'analyse des résultats obtenus en dessinant les courbes  $(t, M_{Serreur})$  et  $(t, \log(E|X_t|^2))$ , de plus pour comparer l'exactitude de chaque approximation numérique, on a calculé l'erreur en moyenne quadratique de la solution approchée [8]. Les calculs sont effectués en utilisant 16 chiffres significatifs. Pour la première expérimentation, on prend le test 1 pour  $t \in [0, \frac{1}{10}]$  en appliquant les cinq méthodes avec  $\Delta = \frac{1}{100}$ . A partir de (3.11), on obtient les résultats suivants

$$H(0, 0, \frac{1}{100}, -100, 10) = -\frac{1}{4}, H(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{100}, -100, 10) = -\frac{5}{4}, H(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{100}, -100, 10) = -\frac{33}{16}$$

$H(\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{100}, -100, 10) = -\frac{71}{36}$ ,  $H(1, 1, \frac{1}{100}, -100, 10) = -\frac{15}{4}$ . On déduit que les cinq méthodes sont MS-stables. Les approximations numériques qui confirment ces résultats sont données dans la partie gauche de la figure (3.7). Pour la seconde expérimentation, on a intégré l'équation test (2) de  $t = 0$  à  $t = 10$  avec  $\Delta = 1$ . Dans ce cas

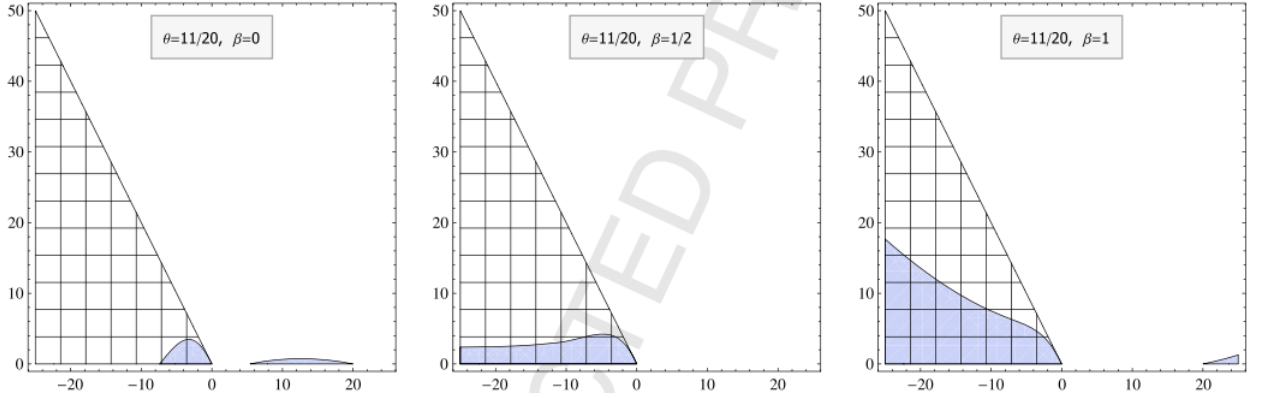


FIG. 3.4 – Comparaison entre  $S_{(\frac{11}{20}, \beta)}$ , pour  $\beta = 0, \frac{1}{2}, 1$  (les régions ombrées) et  $S_{SDE}$  (triangle quadrillé)

$H(0, 0, 1, -4, 2) = 68$ ,  $H(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, -4, 2) = 4$  et donc les schémas  $(0, 0)$  et  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  sont instables. Puisque  $H(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, 1, -4, 2) = -24$ ,  $H(\frac{2}{3}, 1, 1, -4, 2) = -\frac{284}{9}$  et  $H(1, 1, 1, -4, 2) = -156$  alors les autres schémas sont MS-stables. Les résultats des expérimentations sont présentés dans la partie gauche de la figure (3.8) et confirment les résultats théoriques. Le même comportement est observé pour  $t \in [0, 100]$ . La dernière expérimentation résume les bornes obtenues dans le corolaire (3.1). Dans cette expérimentation on a utilisé la méthode  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  pour résoudre le problème test 1, pour  $t \in [0, 1]$ . Puisque  $\lambda = -100$ ,  $\mu = 10$  et  $J = -50$  alors on obtient à partir de (3.23),

$$\Delta_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} = \frac{1 + \sqrt{5}}{100} \approx 0.03236.$$

On déduit que la méthode  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  appliquée avec les pas  $\Delta = 0.01$  et  $0.02$  est stable. par contre pour  $\Delta = 0.04$  ou  $0.05$  elle est instable. Les résultats numériques qui sont illustrés dans la figure (3.9) pour  $t = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$  et  $1$  confirment cette remarque.

### 3.4 Conclusions

L'étude des performances de l'analyse de la stabilité en moyenne quadratique d'une famille de méthodes  $(\theta, \beta)$  semi-implicites de Taylor d'ordre 2.0 a été réalisée dans ce travail. Les relations suivantes caractérisent les domaines de stabilité de  $S_{SDE}$  et des méthodes  $(\theta, \beta)$ . Pour  $\Delta > 0$ , on a

$$- S_{SDE} \supset S_{(\theta, \beta)}(\Delta) \quad \text{si } (\theta, \beta) \in \mathcal{A}.$$

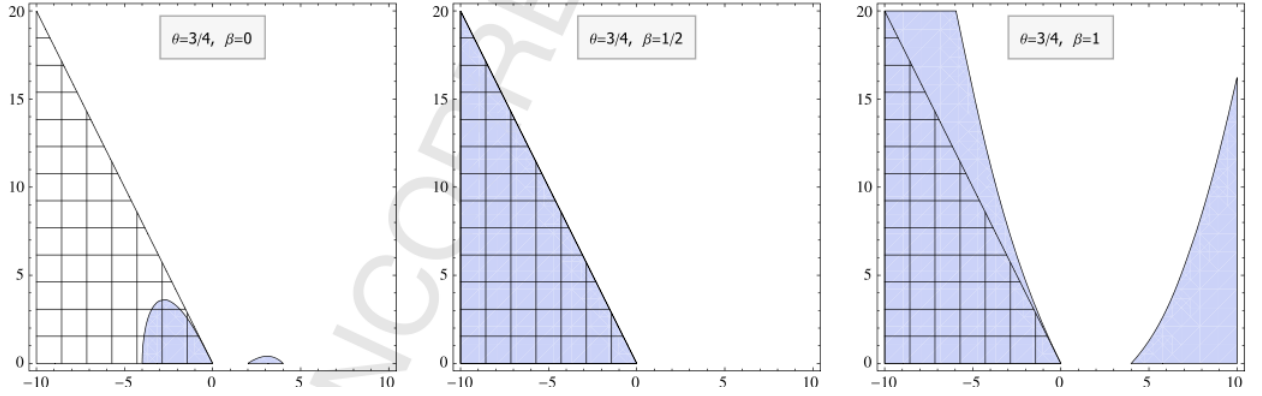


FIG. 3.5 – Comparaison entre  $S_{(\frac{3}{4}, \beta)}$ , pour  $\beta = 0, \frac{1}{2}, 1$  (les régions ombrées) et  $S_{SDE}$  (triangle quadrillé)

- $S_{(\frac{3}{4}, \frac{1}{2})}(\Delta) = S_{SDE}$ .
- $S_{(\theta, \beta)}(\Delta) \subset S_{SDE}$  si  $(\theta, \beta) \in \mathcal{C}$

où les ensembles  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{C}$  sont donnés respectivement dans (3.20) et (3.21). Ce résultat est une extension pour les schémas d'ordre supérieur au sens faible de l'analyse des méthodes  $\theta$  stochastiques proposées dans [23]. Par analogue au rôle de la  $\theta$ -méthode avec  $\theta = \frac{1}{2}$ , on a montré qu'il existe seulement une méthode de second ordre au sens faible dont le domaine de stabilité linéaire coïncide avec le domaine de stabilité de l'équation test. Alors  $(\theta, \beta) = (\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$  fournit le seul schéma qui donne des solutions numériques stables pour des équations tests stables et des solutions instables pour des équations linéaires tests instables. De plus, étant donné un problème test MS-stable pour chaque méthode  $(\theta, \beta)$ , on a obtenu la borne des pas  $\Delta_{(\theta, \beta)} > 0$  telle que le schéma appliqué avec un pas assez petit donne des solutions stables. On a aussi comparé les notions de MS-stabilité avec la  $A$ -stabilité des schémas déterministes de Taylor d'ordre 2.0 pour voir l'effet de l'introduire du terme de bruit blanc sur la stabilité des schémas :

- L'ensemble  $\mathcal{A}^* \cup \mathcal{B}^*$  des méthodes déterministes  $A$ -stables se réduit à  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$  ;
- l'ensemble  $\mathcal{B}^*$  des méthodes déterministes avec le même domaine de stabilité de l'équation test se réduit à l'ensemble  $\mathcal{B}$ .

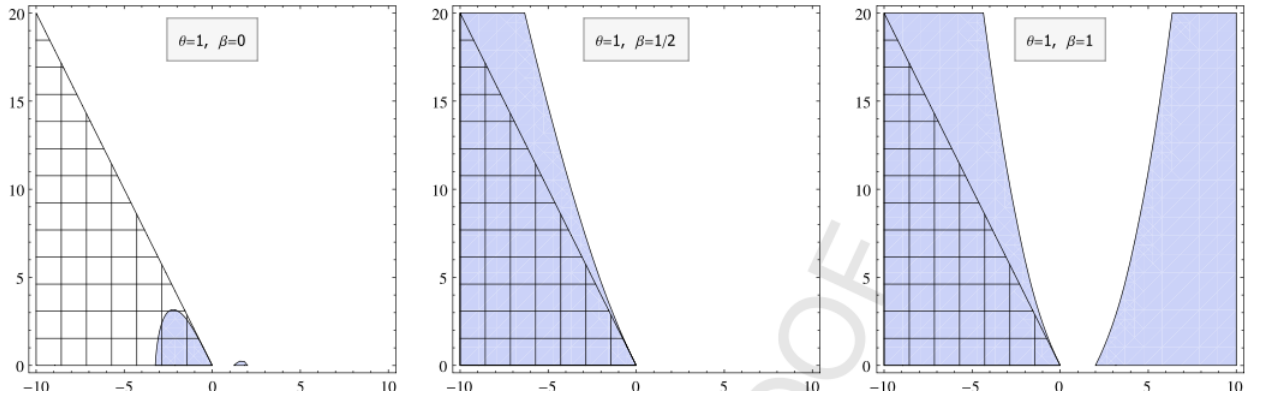


FIG. 3.6 – Comparaison entre  $S_{(1,\beta)}$ , pour  $\beta = 0, \frac{1}{2}, 1$  (les régions ombrées) et  $S_{SDE}$  (triangle quadrillé)

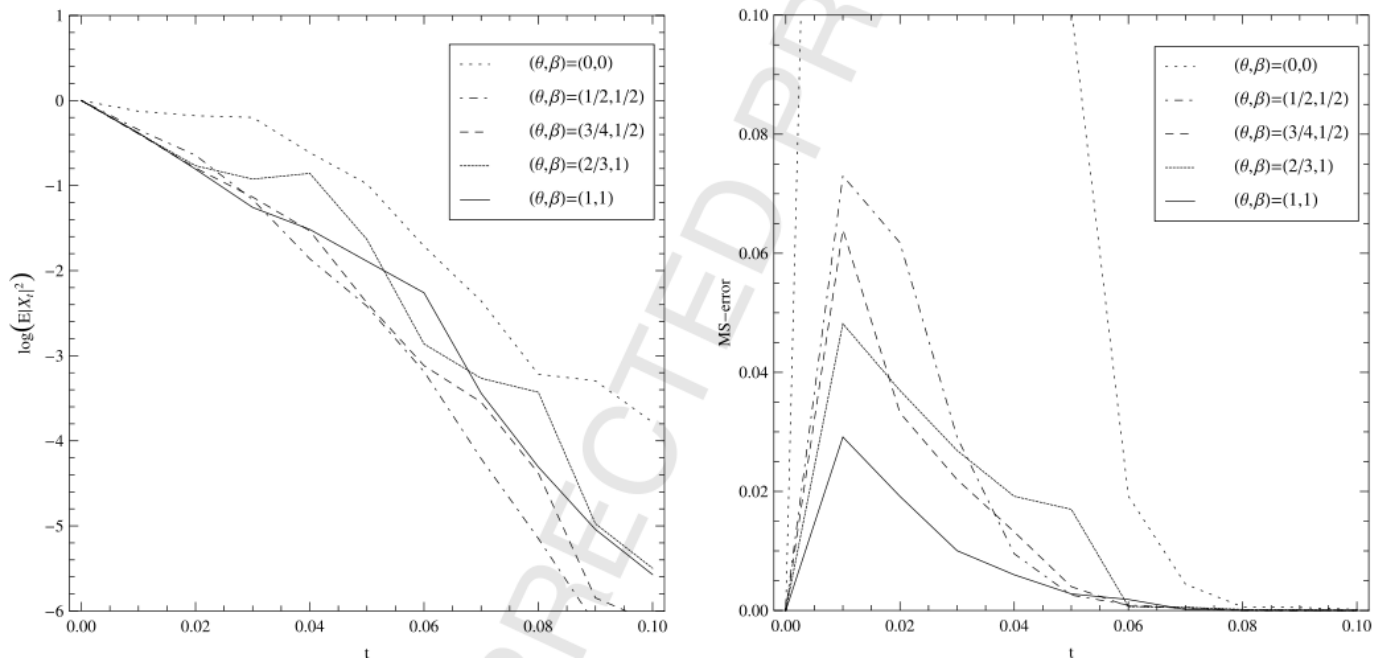


FIG. 3.7 – Valeurs de  $\log E|X_t|^2$  (à gauche) et MS-erreur (à droite) en fonction de  $t$  en utilisant différentes méthodes  $(\theta, \beta)$  avec  $\Delta = \frac{1}{100}$  pour résoudre  $dX_t = -100X_t dt + 10X_t dW_t$

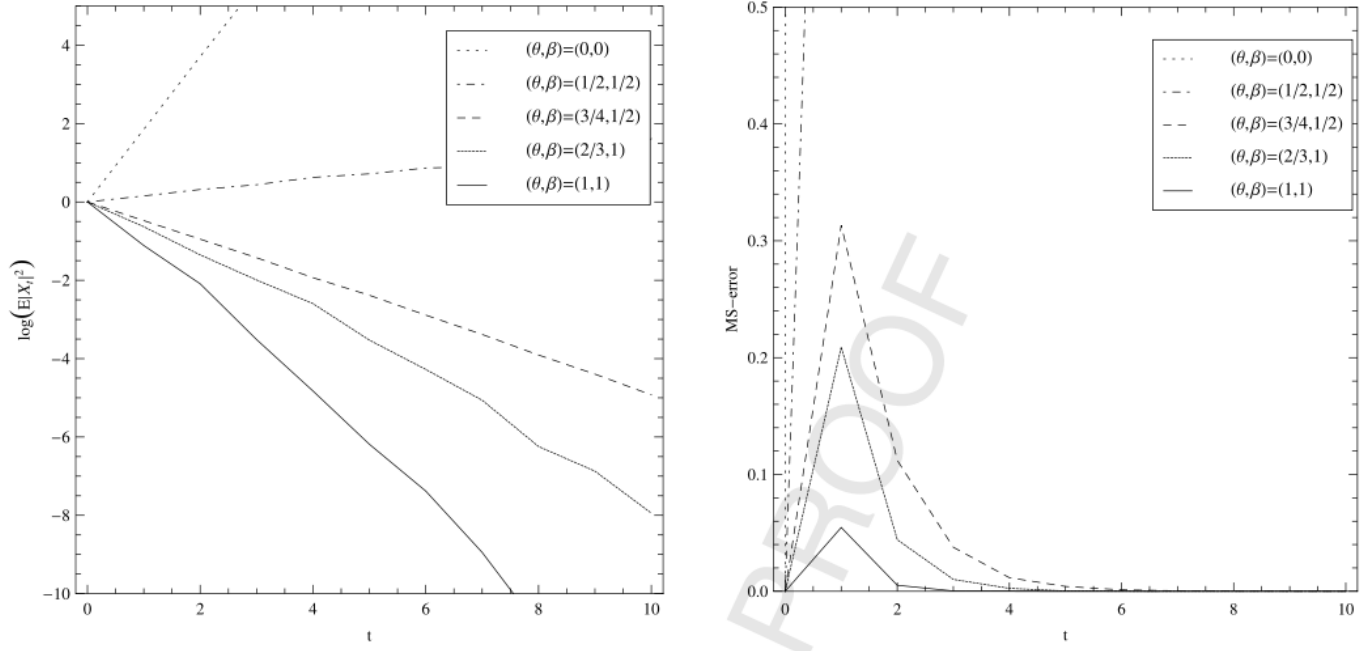


FIG. 3.8 – Valeurs de  $\log E|X_t|^2$  (à gauche) et MS-erreur (à droite) en fonction de  $t$  en utilisant différentes méthodes  $(\theta, \beta)$  avec  $\Delta = 1$  pour résoudre  $dX_t = -4X_t dt + 2X_t dW_t$

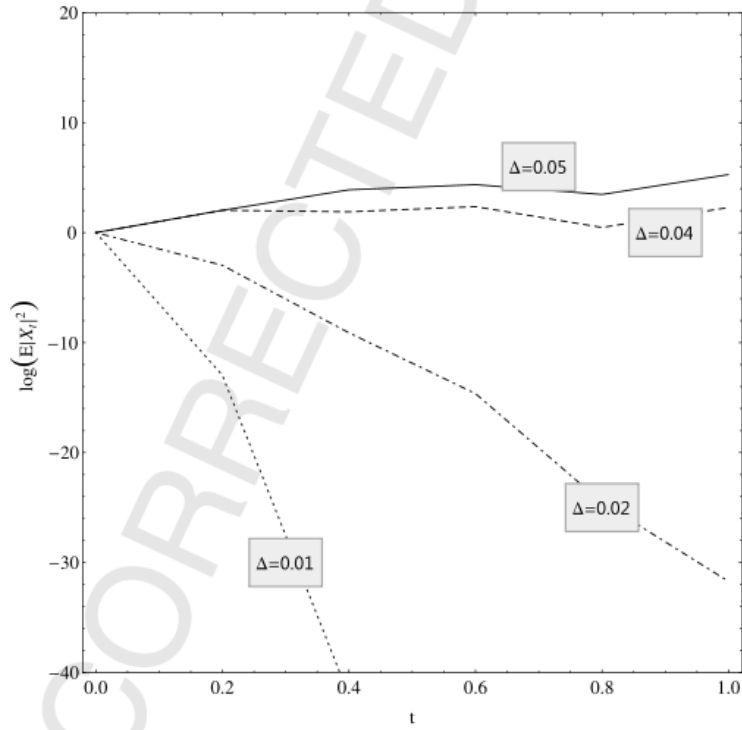


FIG. 3.9 – Valeurs de  $\log E|X_t|^2$  obtenues en utilisant la méthode semi-implicite  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  de Taylor d'ordre 2.0 avec différent pas  $\Delta$  de discrétisation

# Conclusion générale

Deux aspects fondamentaux sous-tendent l'utilisation ou la mise en place de toute méthode numérique : la précision souhaitée (ou disponible) d'une part et d'autre part le temps de calcul. Disposer d'une grande de précision est confortable voire indispensable lorsqu'on étudie certains phénomènes comme les systèmes chaotiques dont les propriétés affichent une forte sensibilité aux conditions initiales et à la précision.

Il n'est pas inutile de garder à l'esprit la relation d'incertitude du numérique, l'utilisation que l'on souhaite classiquement faire des programmes de simulation. La plupart du temps, il s'agit d'une utilisation intensive où l'on balaye l'espace des paramètres d'un modèle. Ceci impose de rechercher toujours les méthodes les plus rapides. Il est de plus en plus fréquent de travailler sur des problèmes complexes dont la résolution nécessite beaucoup de temps. Le choix s'orientera alors vers une méthode numérique rapide. Mais la rapidité se fera forcément au détriment de la précision. Quand les calculs sont intrinsèquement rapides et que le temps de calcul n'est pas un facteur déterminant, on a la possibilité de choisir une méthode plus lente mais plus précise. Ceci peut même constitué un avantage. Pour une méthode numérique donnée, on peut toujours estimer le temps de calcul en comptant le nombre total  $N$  d'opérations qu'effectue la machine. On peut ensuite éventuellement multiplier ce nombre par le temps de calcul relatif à une opération élémentaire, mais cela n'a de valeur qu'à titre comparatif outre les erreurs de programmation. Il existe trois sources d'erreur qu'il convient d'avoir présent à l'esprit : l'erreur de schéma, l'erreur de représentation et l'erreur par perte d'information.

L'objectif de ce travail était d'étudier d'une part des concepts mathématiques de base de certaines méthodes numériques stochastiques de différents types : explicites, semi-implicites et implicites ainsi que les méthodes de type Runge-kutta et de prédiction correction. D'autre part, on s'est intéressé aux techniques de programmation et de mise en œuvre de ces méthodes. En général, la description des méthodes numériques tient compte des principes de traitement des propriétés de convergence et de stabilité. L'idée de base pour construire ces schémas numériques est le développement de Itô-Taylor après subdivision de l'intervalle correspondant au

domaine de définition du problème de Cauchy associé à une équation différentielle ordinaire stochastique. Pour les méthodes de Runge-Kutta, il existe des méthodes explicites et des méthodes implicites. Ces dernières possèdent les meilleures propriétés de stabilité surtout pour les problèmes raides pour lesquels les méthodes usuelles sont moins utilisées car elles sont instables pour des équations linéaires tests. L'avantage des méthodes de Runge-Kutta [49, 46, 44, 15, 14, 12, 21, 22] est dû au fait qu'elles utilisent des méthodes d'intégration plus performantes telles que la méthode de Simpson et d'autres. Des techniques récentes pour améliorer la propriété de stabilité de ces méthodes sont données dans [45]. Elles sont basées sur la relation entre l'intégrale de Itô et l'intégrale backward (en avant). L'un des inconvénients des méthodes implicites est la nécessité de la résolution d'une équation algébrique non linéaire. Elles demandent l'utilisation d'une méthode itérative telle que la méthode de Newton Raphson à chaque itération. On peut éviter cette procédure en introduisant deux méthodes numériques en même temps. l'une est dite de prédiction et l'autre de correction. Il s'agit d'apporter une certaine correction de la valeur prise par la fonction associée à L'EDS. De telles méthodes sont appelées méthodes de prédiction-correction. Par ailleurs, les méthodes composites jouent aussi un grand rôle dans l'analyse numérique des équations différentielles stochastiques. L'idée de base pour l'élaboration de ces méthodes consiste en la combinaison de deux méthodes, l'une explicite ou semi-implicite et l'autre implicite. Ces techniques font intervenir un paramètre arbitraire qui permet de choisir l'une des méthodes couplées sachant que le choix prend en compte la propriété de stabilité de chacune des méthodes.

La recherche des méthodes implicites pour la résolution numérique des équations différentielles stochastiques reste un problème très difficile car il faut toujours préserver la performance des méthodes surtout celles concernant la propriété de stabilité. Jusqu'à présent, il existe peu de méthodes implicites pour le cas de la convergence forte dans la littérature, et par ailleurs, il n'existe pas de méthodes pour le cas faible. L'étape de traitement numérique nécessite de rechercher des concepts probabilistes plus efficaces pour comparer entre les différentes méthodes.

Notre travail s'est limité aux processus de Itô ou de Stratonovich solutions d'une EDS linéaire ou non caractérisant la dynamique d'oscillateurs excités par un bruit blanc gaussien. En revanche, dans le cas non gaussien, peu d'approximations ont été établies. Parmi des idées récentes de développement de la théorie, citons le remplacement du processus de Wiener par un autre processus tel que le processus de Levy, et le remplacement de l'EDS au sens de Itô ou Stratonovich par une EDS en retard.

Enfin, terminons par une série de perspectives de recherche afin d'améliorer les méthodes stochastiques étudiées : Parmi les perspectives de développement des travaux réalisés dans cette thèse, citons :

- Construction de méthodes numériques implicites d'ordre supérieur pour le cas multidimensionnel.
- Considération des processus presque similaires au processus de Wiener.
- Application de techniques analogues pour les équations à retard.
- Amélioration des algorithmes de prédiction-correction.
- Utilisation de méthodes possédant de meilleures propriétés de stabilité pour l'obtention de méthodes composites d'ordre supérieure.
- Construction de méthodes explicites performantes pour les équations différentielles stochastiques [1, 2].

# Bibliographie

- [1] **A. Abdulle, A.A. Medovikov**, Second order Chebyshev methods based on orthogonal polynomials, *Numer. Math.* 90 (2001), pp. 1–18.
- [2] **A. Abdulle**, Fourth order Chebyshev methods with recurrence relation, *SIAM J. Sci. Comput.* 23 (6) (2002), pp. 2041–2054.
- [3] **M.I. Abukhaled, E.J. Allen**, Expectation stability of second-order weak numerical methods for stochastic differential equations, *Stochast. Anal. Appl.* 20 (2002) 693-707.
- [4] **L. Arnold**, *Stochastic Differential Equations*, Wiley, New York, 1974.
- [5] **S.S. Artemiev**, Certain aspects of application of numerical methods for solving SDE systems, *Bull. Nov. Comp. Center, Num. Anal.* 1 (1993) 1-16.
- [6] **Bismut.J. M.** Conjugate Convex Functions in Optimal Stochastic Control, *J. Math. Anal. Appl.*, 1973, 44, 384-404.
- [7] **N. Bruti-Liberati, F. Martini, M. Piccardi, E. Platen**, A hardware generator of multi-point distributed random numbers for Monte Carlo simulation. *Math. Comput. Simulation* 77 (2008), no. 1, 45-56.
- [8] **E. Buckwar, T. Sickenberger**, A comparative linear mean-square stability analysis of Maruyama- and Milstein-type methods, *Math. Comput. Simulation* 81 (2011), no. 6, 1110-1127.
- [9] **E. Buckwar, C. Kelly**, Towards a systematic linear stability analysis of numerical methods for systems of stochastic differential equations, *SIAM J. Numer. Anal.* 48 (1) (2010) 298–321.
- [10] **K.Burrage, P.Burrage, T.Mitsui**, Numerical solutions of stochastic differential equations-implementation and stability issues, *J.comp.APP.Math.*125(2000) 171-182.
- [11] **Burrage.K , E.Platten**, Runge-Kutta methods for stochastic differential equations, *Annals of Numer. Mathematics*, 1(1994), pp.63-78.

- [12] **Burrage, P.M.** Runge-Kutta methods for stochastic differential equations, Ph.D thesis, Dept. Maths., Univ.Queensland, Australia(1999).
- [13] **Burrage.K, P.M. Burrage.** High stong order explicit Runge-Kutta methods for stochastic ordinary differential equations. Appl. Numer. Math. 22, (1996), pp. 81-101.
- [14] **Burrage.K, P.M. Burrage.** General order conditions for stochastic Runge-Kutta methods for both commuting and non-commuting stochastic ordinary differential systems. Appl. Numer. Math (1997).
- [15] **K. Burrage and P. M. Burrage,** Order conditions of stochastic Runge–Kutta methods by B-series, SIAM J. Numer. Anal., 38 (2001), pp. 1626–1646.
- [16] **K. Burrage and S. Piskarev,** Stochastic methods for ill-posed problems, BIT, 40 (2000), pp. 226–240.
- [17] **K. Burrage and T. H. Tian,** A note on the stability properties of the Euler methods for solving stochastic differential equations, New Zealand J. Math., 29 (2000), pp. 115–127.
- [18] **Burrage. K, T.H.Tian,** The composite Euler method for stiff stochastic differential equations, Journal of computational and applied Mathematics. 131 (2001), pp. 407-426.
- [19] **Butcher.J.C.** The numerical analysis of ordinary differential equations. Runge-Kutta and general methods. Wiley. Chichester 1987.
- [20] **K. Debrabant, A. Rößler,** Diagonally drift-implicit Runge-Kutta methods of weak order one and two for Itô SDEs and stability analysis, Appl. Numer. Math. 59 (2009), no. 3-4, 595607.
- [21] **D.B. Hernández, R. Spigler,** A-stability of Runge-Kutta methods for systems with additive noise, BIT 32 (1992) 620-633.
- [22] **D.B. Hernández, R. Spigler,** Convergence and stability of implicit Runge-Kutta methods for systems with multiplicative noise, BIT 33 (1993) 654-669.
- [23] **D.J. Higham,** Mean-Square and Asymptotic Stability of the Stochastic Theta Method, SIAM J. Numer. Anal. 38 (2000) 753-769.
- [24] **D. J. Higham, X. Mao, C.Yuan,** Almost sure and moment exponential stability in the numerical simulation of stochastic differential equations. SIAM J. Numer. Anal. 45(2007) 592-609.
- [25] **D. J. Higham,** A-stability and stochastic mean-square stability, BIT, 40 (2000), pp. 404–409.

- [26] **R.Z. Khasminskii**, Stochastic Stability of Differential Equations, Sijthoff Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1980.
- [27] **J.R. Klauder, W.P. Petersen**, Numerical integration of multiplicative-noise stochastic differential equations, SIAM J. Numer. Anal. 22 (1985) 1153-1166.
- [28] **P.E. Kloeden, E. Platen**, Numerical solution of stochastic differential equations, Springer, Berlin, 1992.
- [29] **J.D. Lambert**, Numerical Methods for Ordinary Differential Systems, Publication, Chister, J. Wiley and Sons, New York, 1991.
- [30] **X. Mao**, Stochastic Differential Equations and Applications, Horwood, 1997.
- [31] **G.N. Milstein**, A method of second order accuracy integration of stochastic differential equations, Theory Probab. Appl. 23 (1978) 396-401.
- [32] **G.N. Milstein**, Weak approximation of solutions of systems of stochastic differential equations. Theory Probab. Appl. 30 (1985) 750-766.
- [33] **G. N. Milstein**, Approximate integration of stochastic differential equations, Theory Probab. Appl., 19 (1974), pp. 557-562.
- [34] **G.N. Milstein**, Numerical Integration of stochastic differential equations, Mathematics and Its application, Kluwer, Dordrecht, 1995.
- [35] **G.N. Milstein, E. Platen, H. Schurz**, Balanced implicit methods for stiff stochastic systems, SIAM J. Numer. Anal. 35(1998) 1010-1019.
- [36] **E. Pardoux and S. Peng**, Adapted solution of a backward stochastic differential equation, Systems Control Lett. 14 (1990), no. 1, 55-61.
- [37] **E. Platen**, On weak implicit and predictor-corrector methods. Math. Comput. Simulation 38 (1995) 69-76.
- [38] **E. Platen, W. Wagner**, On a Taylor formula for a class of Itô processes. Probab. Math. Statist. 3 (1982) 37-51.
- [39] **Y. Saito, T. Mitsui**, Stability analysis of numerical schemes for stochastic differential equations, SIAM J. Numer. Anal. 33 (1996) 2254-2267.
- [40] **Y. Saito, T. Mitsui**, T-stability of numerical scheme for stochastic differential equations, World. Sci Series. App. Anal. 2 (1993) 333-344.
- [41] **Y. Saito, T. Mitsui**, Mean square stability of numerical schemes for stochastic differential equations, Vietnam.J.Math 30 (2002) 551-560.
- [42] **H. Schurz**, Asymptotical mean square stability of an equilibrium point of some linear numerical solutions with multiplicative noise, Stochastic Anal. Appl. 14 (1996) 313-354.

- [43] **D. Talay**, Efficient numerical schemes for the approximations of expectations of functionals of the solution of a SDE and applications, in : H.Korezlioglu, G. Mazziotto, J. Szpirglas(Eds.), Lecture Notes in Control and Inform. Sci., Vol. 61, Springer, Berlin, 1984, pp.294-313.
- [44] **T.H. Tian, K. Burrage**, Two-stage stochastic Runge–Kutta methods for stochastic differential equations, BIT 42 (2002)pp. 625-643.
- [45] **T.H.Tian, K. Burrage**, Implicit Taylor methods for stiff stochastic differential equations, App. Numer. Math. 38 (2001) 167-185.
- [46] **A. Tocino**, Mean-square stability of second-order Runge-Kutta methods for stochastic differential equations, J. Comput. Appl. Math. 175 (2005) 355-367.
- [47] **A. Tocino**, Simplified order 4.0 weak Taylor schemes for additive noise, J. Comput. Appl. Math. 231 (2009) 154-159.
- [48] **A. Tocino, R. Zeghdane, L. Abbaoui**, Linear mean square stability analysis of weak order 2.0 semi-implicit Taylor schemes for scalar stochastic differential equations, Applied Numerical Mathematics (2013), 1-12.
- [49] **Tocino.A, R.Ardanuy**. Runge-Kutta methods for numerical solution of stochastic differential equation, Journal of computational and applied Mathematics,138 (2002) 219-241.
- [50] **A. Tocino, M.J. Senosiain**, Mean-square stability analysis of numerical schemes for stochastic differential systems, J. Comput. Appl. Math. 236 (2012) no. 10, 2660-2672.
- [51] **R.Zeghdane, L.Abbaoui, A.Tocino**, Higher-order-semi-implicit Taylor schemes for Itô stochastic differential equations, Journal of computational and Applied Mathematics 236(2011) 1009-1023.

## RÉSUMÉ

Cette thèse traite des techniques numériques pour la résolution des équations différentielles stochastiques, on a construit une famille des méthodes semi-implicites d'ordre faible  $N = 3.0$  dans le cas général et une famille de méthodes d'ordre faible 4.0 avec un bruit additif dans le cas scalaire. Des expérimentations numériques ont été obtenues confirmant les résultats théoriques de convergence et de stabilité. Nous présentons aussi une étude complète de la stabilité en moyenne quadratique d'une famille d'ordre 2.0 au sens faible dépendant de deux paramètres pour résoudre des équations différentielles stochastiques. Il s'agit d'une extension du travail de D.J.Higham pour les  $\theta$ -méthodes. **Mots-Clés** : Equation différentielle stochastique, méthodes semi-implicites, stabilité en moyenne quadratique, propriétés de convergence et de stabilité, les  $\theta$ -méthodes.

## ABSTRACT

This thesis treats numerical technics for solving stochastic differential equations, we have derived a family of semi-implicit schemes of weak order  $N = 3.0$  (general case) and  $N = 4.0$  (additive noise case). A numerical experiments confirming the theoreticals results are shown. We present a complete study of mean-square stability of a family depending on two parameter of weak order 2.0 for solving SDE, this is a extension of the work of D.J.Higham for the theta-methods.

**Key-Words** : stochastic differential equation, semi-implicit methods, mean square stability, convergence and stability properties, the  $\theta$ -methods.

## ملخص

هذه المذكرة تعالج تقنيات عددية لحل معادلات تفاضلية عشوائية، لقد أنشأنا عائلة من الطرق العددية شبه ضمنية من المرتبة الثالثة في الحالة العامة، وعائلة من الطرق العددية من المرتبة الرابعة مع التشويش الزائدي في الحالة السلمية. نتائج عددية تم الحصول عليها لتأكيد النتائج النظرية للتقارب والاستقرار. نقدم كذلك دراسة كاملة حول الاستقرار المتوسطي التربيعي لعائلة من الدرجة الثانية في الحالة

الضعيفة المرتبطة بوسيطين، وتعتبر تمديد لمقال D.J.Higham الخاص بالطرق  $\theta$

**الكلمات المفتاحية** : معادلات تفاضلية عشوائية، طرق شبه ضمنية، الاستقرار المتوسطي التربيعي، خواص التقارب والاستقرار