الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Ministry of Higher Education and Scientific Research

جامعة سطيف -1 -

University of Setif 1

كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير

Faculty of Economic Commerce and Management

قسم: علوم التسيير

محاظرات في الإحصاء 4

موجهة إلى طلبة السنة الثانية ليسانس L.M.D جذع مشترك

إعداد الدكتورة: لعلام لامية

الخبراء المقيمون للمطبوعة:

-الدكتورة: جناد مباركة؛

-الدكتورة: دريدي أحلام.

السنة الجامعية: 2023-2024

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Ministry of Higher Education and Scientific Research

جامعة سطيف -1 -

University of Setif 1

كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير

Faculty of Economic Commerce and Management

قسم: علوم التسيير

محاظرات في الإحصاء 4

موجهة إلى طلبة السنة الثانية ليسانس L.M.D جذع مشترك

إعداد الدكتورة: لعلام لامية

الخبراء المقيمون للمطبوعة:

-الدكتورة: جناد مباركة؛

-الدكتورة: دريدي أحلام.

السنة الجامعية: 2023-2024

السداسي الرابع:

وحدة التعليم : **منهجية**

المادة :**إحصاء 4**

الرصيد:**05**

المعامل:**03**

دليل المادة التعليمية Syllabus					
اسم المادة: إحصاء 4					
الميدان:	علوم اقتصادية والتسيير وعلوم تجارية		**الفرعالشعبة:**	علوم التسيير	
التخصص:	/////		**المستوى:**	الثانية ليسانس	
السداسي:	الرابع		**السنة الجامعية:**	.....	
التعرف على المادة التعليمية					
اسم المادة	إحصاء 4		**وحدة التعليم**	المنهجية	
عدد الأرصدة	5		**المعامل**	3	
الحجم الساعي الأسبوعي	4.5 ساعة		**المحاضرة (عدد الساعات في الأسبوع)**	3 ساعة	
أعمال م/نط(عدد الساعات في الأسبوع)	/		**أعمال م/ت (عدد الساعات في الأسبوع)**	1.5 ساعة	
مسؤول المادة التعليمية					
الاسم، اللقب	.....		**الرتبة**	.....	
تحديد موقع المكتب	.....		**البريد الالكتروني**	.....	
رقم الهاتف	.....		**توقيت الدرس ومكانه**	.....	
وصف المادة التعليمية					
المكتسبات	الرياضيات، الإحصاء الوصفي والاحتمالات				
الهدف العام للمادة التعليمية	- التعرف على مختلف المفاهيم الأساسية للمقياس، القدرة على توظيف الأساليب الإحصائية المناسبة لاستدلال الإحصائي. - تمكين الطالب من فهم آلية الانتقال من العينة إلى المجتمع انطلاقا من التقدير النقطي ثم التقدير بالمجال وصولا إلى اختبار الفرضيات، وهذا المقياس جد مهم نظرا لارتباطه بالدراسات الاستطلاعية والمسحية.				
أهداف التعلم (المهارات المراد الوصول إليها)	- استيعابالمفاهيمالرياضية والإحصائية المتعلقة بالعينة والمجتمع وأهم الخصائص - فهم أهم النظريات الاحتمالية والرياضية للمعاينة ومتتاليات المتغيرات العشوائية التي تعتبر بمثابة ركيزة وقاعدة يعتمد عليها الطلبة في فهم محتوى إحصاء 04 - فهم التقديرات المستخرجة من العينة وخصائصها المختلفة - إكساب الطالب القدرة على تطبيق الاختبارات الإحصائية واتخاذ القرار لمختلف الظواهر. - تنمية القدرة على استخدام بعض البرامج الإحصائية المستخدمة في هذا المجال.				
محتوى المادة التعليمية					
المحور الأول	نظرية المعاينة وتوزيعاتها				
المحور الثاني	نظرية التقدير				
المحور الثالث	اختبار الفرضيات الإحصائية				
طريقة التقييم					
التقييم بالنسبة المئوية	**العلامة**		**الوزن النسبي للتقييم**		
امتحان	**20/20**		**وزن المحاضرة**	**% 60**	**% 60**
امتحان جزئي	**7**	**20**		**% 40**	**%14**
أعمال موجهة (البحث : إعداد/إلقاء/تطبيقات)	**5**				**%10**

أعمال تطبيقية	-		وزن الأعمال الموجهة		-
المشروع الفردي	-				-
الأعمال الجماعية (ضمن فريق)	-				-
خرجات ميدانية	-				-
المواظبة (الحضور / الغياب)	6				% 12
عناصر أخرى (المشاركة)	2				% 04

تدرس المادة في شكل محاضرات وأعمال موجهة/تطبيقية و طبيعة تقييمها امتحان و مراقبة مستمرة يقاس معدل المادة بالوزن الترجيحي للمحاضرة والأعمال الموجهة:

معدل المادة	نقطة المحاضرة * 0.6 + نقطة الأعمال الموجهة/التطبيقية* 0.4=
Moy.M	***= (Note Ex * 0.6) + (Note Td * 0.4)***

المصادر والمراجع

المرجع الأساسي الموصى به :

عنوان المرجع	المؤلف	دار النشر و السنة
نظرية التقدير، الاستدلال الاحصائي	عبد الحفيظ محمد فوزي مصطفى	الناشر مجموعة النيل العربية، القاهرة، سنة 2000.
IntroductoryStatistics	Neil A Weiss	Pearson Education, 2017
سلسلة ملخصات شوم، نظريات و مسائل في الإحصاء و الاقتصاد القياسي	دومينيك سلفاتور (Dominick Salvatore)	ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 1982.
, Statistiques etProbabilités en économiegestion	Hurlin Christophe	Dunod, 2015

مراجع الدعم الإضافية (إن وجدت):

56. بوعبداللهصالح مدخلإلىالاحتمالاتوالإحصاءالرياضيدروسوتمارين، 2006.

57.شيلدون م. روس "المدخل إلى النماذج الاحتمالية" ترجمة الدكتور فاضل محسن الربيعي، الطبعة الثالثة الجامعة المستنصرية، 1991.

58.محمد كبيه وماهر بدوي " الإحصاء التطبيقي" منشورات جامعةحلب، كليةالاقتصاد، 2003.

مقدمـــــة

تمهـيد

يُعتبر علم الإحصاء من العلوم الغنية سواء من حيث تشعب روافده وتخصصاته، أو من حيث مجالات إستخدامه، إذ يُستخدم بشكل مباشر أو غير مباشر في أغلب العلوم تقريبا. ويُعتبر مجال العلوم الإنسانية والاجتماعية عموما والعلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير خصوصا من أكثر المستفيدين والمستخدمين لعلم الإحصاء، إذ لا يمكن الحديث عن دراسات في مجال الاقتصاد أو الإدارة أو التجارة دون أن تكون الأدوات الإحصائية أهم وسائلها.

حيث يلعب التحليل الإحصائي دورا هاما في الوصول إلى الإستنتاجات والإستدلالات من البيانات الخام بعد معالجتها بالشكل الذي يفيد في التخطيط المنطقي والمساعدة في إتخاذ القرارات وهذا من خلال ما يعرف بعملية الإستدلال الإحصائي، والذي يشكل واحد من أهم فروع علم الإحصاء والمتمثل في الإحصاء الإستدلالي أو الإستنتاجي أو التطبيقي.

فحسب مقرر التدريس المحدد من قبل وزارة التعليم العالي والبحث العلمي في الجزائر يتم التدرج في تدريس علم الإحصاء على أربع مراحل أساسية كما يلي: يتم تدريس علم الإحصاء الوصفي (الإحصاء 1) خلال السداسي الأول للسنة الأولى جذع مشترك ويختص بتلخيص وتوصيف مجموعة من البيانات، ثم يدرس الإحصاء الرياضي (الإحصاء 2 والإحصاء 3) خلال السداسيين الثاني و الثالث على التوالي والذي يُعنى بنظرية الإحتمالات التي تُعتبر عنصرا أساسيا في الاستدلال الإحصائي، وأخيرا الإحصاء الإستدلالي (الإحصاء 4) وهو موجه لطلبة السنة الثانية علوم اقتصادية وعلوم تجارية و علوم التسيير خلال السداسي الرابع.

تضم هذه المطبوعة دروسا لمقياس الإحصاء 4 مدعمة بأمثلة محلولة بهدف مساعدة الطلبة على الإلمام بمبادئ الإحصاء التطبيقي، وقد تم الحرص في تقديمها على بساطة العرض بأسلوب سهل ومختصر دون اللجوء إلى البراهين والعمليات الرياضية المعقدة. وقد قسمت هذه المطبوعة إلى أربع محاور رئيسة وفق ما جاء في المقرر الوزاري كما يلي:

- **المحور الأول: مدخل للتعريف بالإحصاء الإستدلالي؛**
- **المحور الثاني: توزيعات المعاينة؛**
- **المحور الثالث: نظرية التقدير؛**
- **المحور الرابع: إختبار الفرضيات الإحصائية.**

وفي الأخير نأمل أن نكون قد وفقنا في تقديم هذا العمل، وأن يساهم في إثراء مكتباتنا الجامعية، وأن يكون مفيدا للطلبة، و الله من وراء القصد و هو يهدي السبيل.

الدكتورة: لعلام لامية

كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير

جامعة سطيف -1-

المحور الأول:

مدخل للتعريف بالإحصاء الإستدلالي

تمهـــيد:

يُشكل الإحصاء الإستدلالي مع الإحصاء الوصفي علم الإحصاء الحديث وهما ضروريان لإتخاذ القرارات، ويضم الإحصاء الإستدلالي وسيلتين هما: التقدير العيني، كتقدير الوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي من بيانات العينة مثلا، وإختبار الفرضيات الإحصائية مثل: القبول أو الرفض عند مستوى دلالة إحصائية معينة.

فالإحصاء الإستدلالي يشتمل على مجموعة من الطرائق والأساليب التي تساعد في الحصول على الإستنتاجات والإستدلالات حول سمة وخاصية معينة للمجتمع الإحصائي من خلال إستخدام خاصية أو سمة لأفراد العينة، أي أن أسلوب الإحصاء الإستدلالي يعتمد على الأسلوب العيني المتمثل في أخذ عينة ودراسة خصائصها بهدف إصدار تعميم حول خصائص المجتمع الإحصائي، كتقدير معلمة إحصائية معينة لمجتمع ما بناء على إحصائية مأخوذة من العينة.

وللتوضيح أكثر حول هذا الفرع من الإحصاء نتطرق إلى:

- **أولا: مفهوم الإحصاء والإحصاء الإستدلالي؛**
- **ثانيا: ماهية البيانات الإحصائية؛**
- **ثالثا: المعاينة الإحصائية.**

أولا: مفهوم الإحصاء والإحصاء الإستدلالي

1- تعريف علم الإحصاء

يُعرف علم الإحصاء بأنه " الطريقة العلمية التي تحكم عملية جمع البيانات والحقائق عن ظاهرة أو فرضية معينة، وتنظيم وتبويب هذه البيانات والحقائق بالشكل الذي يسهل عملية تحليلها وتفسيرها، ومن ثم إستخلاص النتائج وإتخاذ القرارات في ضوء ذلك والتنبؤ بما ستؤول إليه الظاهرة في المستقبل".[1]

كما يُعرف علم الإحصاء بأنه مجال دراسة يهتم بجمع Collection وتنظيم Organization وتقديم Presentation وتحليل Analysis وتفسير Interpretation البيانات Data. حسب هذا التعريف فإن الإحصاء يتلخص بالمراحل الخمس التالية[2]:

- الجمع Collection: يشكل الخطوة الأولى، وتُعطى هذه الخطوة عناية خاصة لأنها تمثل الأساس للتحليل الإحصائي، فإذا كانت البيانات غير صحيحة فإن الإستنتاجات والقرارات المبنية عليها تكون غير دقيقة، ويمكن الحصول على البيانات من مصادر منشورة أو غير منشورة أو يقوم الباحث بجمعها من الميدان.

- التنظيم Organization: إن البيانات التي نحصل عليها من مصادر منشورة أو غير منشورة غالبا ما تكون منظمة، أما البيانات التي يحصل عليها الباحث من الميدان بإستخدام المسوح الإحصائية فإنها بحاجة إلى تنظيم. والخطوة الأولى في عملية التنظيم هي المراجعة Editing لمعالجة مشاكل الحذف والتباين في المعلومات وعدم علاقتها بموضوع الدراسة أو عدم علاقتها ببعضها البعض، أما الخطوة الثانية فهي عملية التصنيف Classification حسب بعض خصائص وحدات الدراسة، والخطوة الأخيرة في التنظيم هي التبويب Tabulation وذلك بتلخيص البيانات في جداول تكرارية Frequency.

- التقديم Presentation: ويعني عرض البيانات بأشكال هندسية أو رسوم بيانية.

- التحليل Analysis: ويعتبر أهم مرحلة في البحث الإحصائي، والتحليل الإحصائي غالبا ما ينصب على البيانات المبوبة في جداول تكرارية، وأساليب التحليل كثيرة ومتعددة تمتد من المشاهدة البسيطة إلى الأساليب الرياضية المعقدة.

---

[1]- حسن ياسين طعمة وإيمان حسين حنوش، **طرق الإحصاء الوصفي**، دار صفاء للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، الطبعة الأولى، 2009، ص 25.

[2]- شفيق أحمد العتوم، **طرق الإحصاء بإستخدامSPS**، دار المناهج للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، الطبعة الثالثة، 2008، ص ص 19-20.

- التفسير Interpretation: ويعني إستخلاص النتائج من البيانات التي تم جمعها وتحليلها، وتعتبر هذه المرحلة من أصعب وأهم وأدق مراحل البحث الإحصائي وتحتاج إلى درجة عالية من المهارة و الخبرة.

2- فروع علم الإحصاء

ينقسم علم الإحصاء إلى فرعين أساسيين هما الإحصاء الوصفي والإحصاء الإستدلالي.

أ- الإحصاء الوصفي Descriptive Statistics:

يشمل هذا النوع على الطرق الإحصائية التي تهتم في جمع البيانات عن ظاهرة معينة، وأسلوب تنظيمها وتصنيفها (تلخيصها) وإمكانية عرضها جدوليا أو بيانيا.[1]

ب- الإحصاء الإستدلالي Inferential Statistic:

يتناول هذا النوع الطرق الإحصائية التي تُستخدم في تحليل البيانات (حساب المؤشرات الإحصائية لها) وتفسير النتائج، بهدف التوصل إلى إستدلال (إستنتاج) حول المصدر الذي جمعت منه البيانات، وإتخاذ القرارات والتنبؤ بما ستؤول الظاهرة المدروسة في المستقبل[2].

هو عبارة عن إستنتاج عن مجتمع أو ظاهرة من عينة عشوائية مختارة من هذا المجتمع[3]. يُعبر عن تلك الطرق العلمية التي تعمل للاستدلال عن معالم المجتمع بناء على المعلومات التي تم الحصول عليها من العينة المأخوذة منه، وذلك وفق طرق إحصائية محددة.[4]

بمعنى أنه يتم تقدير مؤشرات المجتمع المجهولة من خلال المؤشرات التي تم الحصول عليها من العينة، حيث يجب مراعاة شروط معينة حتى يكون هذا الإستدلال سليما، وبما أن الاستدلال لا يمكن أن يكون مؤكدا تأكيدا تاما فإن عرض النتائج المحصلة من هذه العملية تعتمد دائما على ما يسمى بلغة الاحتمال. [5]

ويهتم هذا النوع من الإحصاء عادة بموضوعين أساسيين هما:التقدير و إختبار الفرضيات.

---

[1]- حسن ياسين طعمة وإيمان حسين حنوش، **طرق الإحصاء الوصفي**، مرجع سابق، ص 26.

[2]- المرجع نفسه.

[3]- شفيق أحمد العتوم، مرجع سابق، ص 21.

[4]- أماني موسى محمد، **التحليل الإحصائي للبيانات**، مركز تطوير الدراسات العليا والبحوث كلية الهندسة لجامعة القاهرة، مصر، الطبعة الأولى، 2007 ، ص6 .

[5]- جمال محمد شاكر محمد، **المرشد في التحليل الاحصائي للبيانات باستخدامSPS** ، الدار الجامعية للنشر، الاسكندرية، مصر، الطبعة الأولى، 2007 ، ص81 .

3- مفاهيم حول المجتمع الإحصائي، العينة الإحصائية، الوحدة الإحصائية، معالم المجتمع وإحصائيات العينة

أ- المجتمع (Population):

يُعرف المجتمع بأنه مجموعة من العناصر (Elements) أو المفردات (Observations) التي تخص ظاهرة معينة. ويطلق أحيانا على مصطلح المجتمع بالمجتمع الإحصائي (Statistical Population)، إن الهدف الرئيس من تحديد المجتمع الإحصائي هو تعيين الحدود الصريحة لعملية جمع البيانات من جهة، وكذلك لعملية الإستقراء أو الإستنتاجات التي يمكن الحصول عليها من خلال إجراء الدراسة من جهة ثانية. يمكن أن تكون عناصر المجتمع الإحصائي أفرادا أو عائلات أو موظفين...، ويتمثل المجتمع الإحصائي بعدد العناصر أو المفردات التي يتضمنها والتي يطلق عليها بحجم المجتمع و يرمز له بالرمز (N).[1] ويُقسم المجتمع الإحصائي إلى قسمين هما[2]:

- **مجتمع محدود Finite Population** : يمثل المجتمع الإحصائي الذي يكون عدد عناصره ثابتا، أي بالإمكان عد عناصر هذا المجتمع كاملة، مع العلم أن هذا المجتمع قد يتراوح بين عدد صغير جدا أو عدد كبير جدا من العناصر.

- **مجتمع غير محدود Infinite Population**: هو المجتمع الذي يتألف من عدد كبير من العناصر لا يمكن عدها.

ب- العينة (The sample):

تُعرف العينة الإحصائية على أنها " مجموعة جزئية من الوحدات أو العناصر أو المفردات التي يتم أخذها بأسلوب أو طريقة ما من المجتمع الإحصائي بهدف دراسة خصائصها، ولتقدير خصائص المجتمع الكلي من خلالها"[3]. يُطلق على مفردات العينة التي تم إختيارها من المجتمع عادة بحجم العينة ويرمز له بالرمز (n) حيث أن (n<N).

لكي تكون العينة مقبولة من الناحية الإحصائية ينبغي أن تكون ممثلة للمجتمع (Representative Sample)، أي أنها تحتوي على جميع الخصائص بنفس نسبة تواجدها في المجتمع الإحصائي الذي أختيرت منه، وأن تكون هذه العينة ذات دقة (Precision) يمكن قياسها[4].

---

[1]- حسن ياسين طعمة وإيمان حسين حنوش، **الإحصاء الإستدلالي**، دار صفاء للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، الطبعة الثانية، 2015، ص 181.

[2]- سالم عيسى بدر وعماد غصاب عبابنة، **مبادئ الإحصاء الوصفي و الإستدلالي**، دار المسيرة للنشر والتوزيع، عمان، الاردن، الطبعة الأولى، 2007، ص 16.

[3]- إبراهيم أبو عقيل، **مبادئ في الإحصاء**، دار أسامة للنشر و التوزيع، عمان، الأردن، الطبعة الأولى، 2012، ص 16.

[4]- حسن ياسين طعمة وإيمان حسين حنوش، **الإحصاء الإستدلالي**، مرجع سابق، ص 182.

يمكن تقسيم العينات من حيث الحجم إلى:

– عينات صغيرة n<30: وهي العينات التي يكون حجمها أو عدد مفرداتها أقل من 30 مفردة وهذا النوع له أساليب تحليل إحصائي خاصة به.

– عينات كبيرة n≥30: وهي العينات التي يساوي أو يزيد عدد مفرداتها عن 30 مفردة.

يمكن إختيار أكثر من عينة من المجتمع الإحصائي بطرق مختلفة لكل منها خصائص معينة وتوجد حالات يفضل فيها إستخدام نوع معين دون الآخر، وللحصول على تقديرات وإستدلالات دقيقة عن المجتمع محل الدراسة لابد من الإهتمام بطرق إختيار العينة حتى نحصل على نتائج دقيقة وقريبة من الواقع يمكن إستخدامها.

ج– وحدة المجتمع (Population Unit or element):

أو الوحدة الإحصائية وتشير إلى مفردة المجتمع التي نجمع منها أو عنها البيانات المطلوبة أو نجري عليها التجربة في حالة إجراء دراسة عن طريق التجارب العلمية. ووحدة المجتمع مثلا السوق التجاري أو الشركة أو الوحدة المنتجة ...[1]

د– معالم المجتمع (Population Parameters):

نقصد بمعالم المجتمع خصائصه مثل المتوسط (μ)، التباين (σ^2)، الإنحراف المعياري (σ)، النسبة (P)، ويتم حساب هذه المعالم عند دراسة كل أفراد المجتمع الإحصائي أي الدراسة الشاملة.

هـ– إحصائيات العينة (Sample Statistic):

غالبا ما تكون معالم المجتمع مجهولة، حيث نقوم بتقديرها من بيانات العينة، بصفة عامة نسمي كل مقياس إحصائي تُحسب قيمته إنطلاقا من بيانات العينة من أجل تقدير معالم المجتمع بإحصائية العينة ويعد الوسط الحسابي للعينة ($\bar{X}$)، و تباين العينة (S^2) والإنحراف المعياري للعينة (S) والنسبة في العينة (f) من أهم إحصائيات العينة.

بما أننا نستطيع أن نتحصل على أكثر من عينة من نفس المجتمع، فإننا سنجد أن قيمة الإحصائية عبارة عن متغير ومادام السحب يتم عشوائيا فإن الإحصائية هي متغير عشوائي أيضا. وهذا هو الفرق بين المعلمة والإحصائية، فالمعلمة عبارة عن قيمة ثابتة بينما الإحصائية عبارة عن متغير عشوائي قيمته تعتمد على العينة.

[1]– شفيق أحمد العتوم، مرجع سابق، ص 22.

ثانيا :البيانات الإحصائية

تعتمد الدراسات الإحصائية والتي قد تكون بحوثا في مجال الأعمال أو القضايا الطبية أو التعليمية أو البيئية أوقطاع المواصلات أو في القضايا السياسية أو في قضايا أخرى على جمع البيانات المتعلقة بمشكلة أو ظاهرة ما، فالبيانات تمثل المادة الأساسية في أي دراسة إحصائية، وعلى هذا الأساس تُعتبر مرحلة جمعها من أهم مراحل البحث العلمي بالأسلوب الإحصائي وترتبط دقة ومصداقية البيانات المستخدمة بدقة وفعالية هذه المرحلة والتي تعتمد عليها كل مراحل التحليل الإحصائي اللاحقة مما يؤثر على أهمية النتائج المستخرجة وجودة القرارات المتخذة عل أساس هذه النتائج، أخذا بعين الاعتبار الظروف المحيطة بالبحث، فكلما كان جمع البيانات دقيقا إزدادت ثقة الباحث في الاعتماد عليها وفي النتائج المتحصل عليها وتعتمد جودة البيانات على منهجية وطريقة جمعها ويتم ذلك باستخدام أسلوبين إحصائيين إما الحصر الشامل أو المعاينة.

1- تعريف البيانات الإحصائية

البيانات هي المادة الخام التي يُبنى عليها الإحصاء وكذلك هي المادة الخام التي تُحسب منها الإحصائيات الفردية نفسها وأن هذه البيانات عادة ماتكون أرقاما ومع ذلك فإن البيانات في الواقع أكثر من مجرد أرقام.[1]

2- المتغيرات وعلاقتها بالبيانات الإحصائية

إن الصفة التي تتغير من شخص إلى آخر أو من مفردة إلى أخرى تسمى بالمشاهدة Observation أو بالمتغير Variable ويرمز لكل مفردة من مفردات المتغير بالرمز xi ، أي أن المتغير يمثل صفة أو سمة متغيرة للبيانات قيد الدراسة ومثال ذلك طول الجسم وزن الجسم عدد كريات الدم الحمراء أو لون العين وغيرها. بينما تُعبر البيانات عن قيم لمتغير أو أكثر من المتغيرات الإحصائية، ويرتبط نوع البيانات بنوع المتغير المدروس وعليه فإن أنواع المتغيرات الإحصائية تمثل بدورها أنواع البيانات التي يمثلها هذا المتغير[2].

---

[1]- جناد مباركة، **محاضرات في مقياس الإحصاء 3 موجهة إلى طلبة السنة الثانية علوم المالية و المحاسبة**، كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير، جامعة سطيف 1، الجزائر، 2020-2021، ص 6.

[2]- المرجع نفسه.

3- طبيعة البيانات الإحصائية

تُقسم البيانات Data إلى نوعين هما[1]:

أ- البيانات الوصفية أو النوعية Qualitative Data:

هي المشاهدات أو الصفات التي لا يمكن قياسها مباشرة بوسائل القياس المألوفة كالعد والتقييس، ومثال ذلك صفة لون العين (أسود، أزرق، أخضر،...)، المؤهل العلمي (ليسانس، ماجستير، دكتوراه وغيرها)، صفة الجنس (ذكر، أنثى)، صفة الحالة الاجتماعية (أعزب، متزوج، مطلق، أرمل). وتنقسم إلى بيانات قابلة للترتيب مثل: صغير، متوسط، كبير، وأخرى غير قابلة للترتيب مثل البيانات الخاصة بصفة الجنس: ذكر، أنثى.

ب - البيانات الكمية أو العددية Quantitative Data:

هي المشاهدات أو الصفات التي يمكن قياسها مباشرة بوسائل القياس المألوفة، مثال ذلك علامات الطلبة في إمتحان ما، عدد أفراد الأسرة، شدة الزلزال، الزمن الذي تنتظره سيارة عند إشارة ضوئية، درجة حرارة مريض. وتكون البيانات الكمية على نوعين هما:

- **البيانات المتقطعة Discrete Data**: وهي البيانات الخاصة بالمتغيرات المنفصلة وتعبر عن تلك المشاهدات أو الصفات التي تأخذ قيما متميزة عن بعضها كعدد الطلبة في الصف الدراسي، عدد أفراد الأسرة، عدد الوحدات المنتجة من دواء معين في شركة ما، أو عدد الحالات التي تظهر في تجربة عشوائية عند رمي زهرة النرد وغيرها. ويمكن تسميتها أيضا بالبيانات القابلة للعد. **كمثال عن البيانات المتقطعة** عدد المرضى الذين تم ادخالهم للمستشفى في يوم واحد ممكن أن يكون 0 أو 1 أو 2 أو 3 أو غير ذلك وهي أعداد صحيحة لا يوجد بها كسور عشرية.

- **البيانات المتصلة Data Continuous**: تمثل البيانات الخاصة بالمتغيرات المتصلة وتشمل المشاهدات أو الصفات التي تأخذ قيما غير منتهية يمكن حصرها في مجال معين، ومثال ذلك: أوزان طلبة جامعة معينة، أو أطوال عينة من الطلبة بكلية ما، ويمكن تسميتها بالبيانات القابلة للتجزئة. **كمثال عن البيانات المتصلة** حجم الماء الموجود في الخزان في لحظة معينة قد يكون 0 لتر أو 100 لتر أو 105.5 لتر أو 300.3 لتر أو غير ذلك وهي أعداد بها كسور عشرية.

---

[1]- راجع: - حسن ياسين طعمة و إيمان حسين حنوش، **الإحصاء الإستدلالي**، مرجع سابق، ص ص 180-181.
- محمد صبحي أبو صالح، **الطرق الإحصائية**، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، الطبعة العربية 2009، ص ص23-31.
- إبراهيم أبو عقيل، مرجع سابق، ص ص 27-30.

4- أساليب جمع البيانات الإحصائية

يتم جمع البيانات الإحصائية بأسلوبين هما[1]:

أ- أسلوب الحصر الشامل Census Method:

هو أسلوب يتم بموجبه جمع البيانات الإحصائية عن كافة مفردات المجتمع الأصلي للظاهرة قيد الدراسة، ومن شروط استخدامه يجب أن يكون المجتمع الإحصائي المدروس محدودا. ويستخدم هذا الأسلوب في الأبحاث الإحصائية الكبيرة، التي تجرى وفق فترات زمنية متباعدة. ومثال ذلك التعداد السكاني الذي يجرى عادة كل عشر سنوات أو تعداد المساكن لدولة ما، فهي تكلف مبالغ طائلة، تتطلب وقت طويل، جهد كبير، وتزداد هذه المتطلبات وتتضاعف كلما ازداد حجم المجتمع، لذلك تتكفل به عادة الأجهزة الحكومية. لذلك يتم اللجوء إلى الطريقة الثانية.

ب- أسلوب العينات Sample Method:

هو الأسلوب الذي يتم بموجبه جمع البيانات الإحصائية من خلال إختيار جزء من مفردات المجتمع الأصلي للظاهرة المدروسة، ويُسمى هذا الجزء من المفردات بالعينة (Sample)، ويتم إختيار المفردات في هذه الحالة وفق طريقة علمية تسمى المعاينة (Sampling Method)، وتُعرف المعاينة على أنها " طريقة إحصائية تُستخدم في إختيار مفردات العينة من مجتمع الدراسة وفق أسس علمية بما يضمن أن تكون العينة المختارة تمثل مجتمع الدراسة أفضل تمثيل".

يتم تفضيل أسلوب العينات للأسباب التالية:

- يتطلب تكلفة أقل، وقت أقل، جهد أقل مقارنة بالدراسة الشاملة أو الحصر الشامل؛
- عدم إمكانية تطبيق الدراسة الشاملة في بعض الحالات عندما تكون مفردات المجتمع قابلة للتلف مثلا لا يمكن إجراء إختبار الجودة على الإنتاج الإجمالي لمصنع المصابيح الكهربائية لذلك نضطر لإجراء الإختبار على عدد محدود من تلك المصابيح و هي تمثل العينة.

---

[1]- راجع: Hamdani Hocine, **statistique descriptive**, office des publications universitaires, Alger, 2001, p 9.

-إبراهيم علي إبراهيم عبد ربه، **مبادئ علم الإحصاء**، الدار الجامعية، الإسكندرية، مصر، الطبعة الثانية، 2008، ص ص 14-15.

- حسن ياسين طعمة وإيمان حسين حنوش، **طرق الاحصاء الوصفي**، مرجع سابق، ص ص 38-39.

من عيوب هذا الأسلوب أن محاولة التعرف على خواص المجتمع عن طريق دراسة جزء منه ينطوي عليه التضحية في دقة النتائج التي يوفرها أسلوب المعاينة.

5- طرق جمع البيانات الإحصائية

يتم جمع البيانات عموما بإحدى الطرق التالية[1]:

أ- المقابلة الشخصية:

حيث يقوم الباحث بجمع البيانات من خلال مقابلة أفراد العينة وطرح الأسئلة عليهم وتدوين الإجابات. وتعتبر هذه الطريقة مناسبة في حالة انتشار الأمية بين المبحوثين كما تُمكن الباحث من التأكد من صحة البيانات وتدوينها.

ب- المراسلة:

يقوم الباحث وفق هذه الطريقة بإرسال استمارات البحث إلى المبحوثين عن طريق البريد مرفقا معها إرشادات تعبئة الاستمارة وأهداف البحث وأهميته، ويرفق معها ظروف بريدية مسبقة الدفع. وتعتبر هذه الطريقة مناسبة في حال عدم انتشار الأمية بين الأفراد محل البحث. وتتميز بانخفاض تكلفتها، وحاليا يمكن المراسلة عبر شبكة الانترنت والبريد الالكتروني إلى شريحة كبيرة من الأفراد وبذلك أصبحت هذه الطريقة تتميز بالسرعة وإنعدام التكاليف.

6- مصادر جمع البيانات الإحصائية

إن للبيانات الإحصائية مصدرين من حيث طبيعتها و هما[2]:

أ- المصادر التاريخية Historical Sources

تشمل هذه المصادر جميع المعلومات المدونة والموثقة من الجهات صاحبة العلاقة، مثل معلومات الجهاز المركزي للإحصاء، الوزارات والمؤسسات ... هذه البيانات تُعتبر من البيانات الموثقة ومصادرها تعتبر من المصادر التاريخية، وتنقسم إلى قسمين هما: المصادر الأولية للبيانات (Primary Sources) وتشمل جميع المؤسسات التي تعمل على جمع البيانات بصورة مباشرة من الأفراد أو من الوحدات المتعلقة بها وتقوم بتبويبها وتوثيقها وتهيئتها للإستفادة منها في الأوقات

---

[1]- جناد مباركة، مرجع سابق، ص 8.

[2]- راجع: - سليم ذياب السعدي، **مبادئ علم الإحصاء**، دار الكتاب الجديدة المتحدة، بيروت، لبنان، الطبعة الأولى، 2004، ص ص 20- 29.

-إبراهيم علي إبراهيم عبد ربه، مرجع سابق، ص ص 11-12.

المناسبة؛ والمصادر الثانوية (Secondry Sources) وهي البيانات الموثقة في البحوث والكتب والدراسات والدوريات والتي تكون مأخوذة من مصادرها الأولية. إن الإعتماد على المصادر الثانوية لا يخلو من المحاذير والأفضل للباحثين الرجوع إلى المصادر الأولية تجنبا لأخطاء الناشرين والتي تغير من واقع هذه البيانات.

ب- المصادر الميدانية Field Sources

عندما لا تتوافر المعلومات من المصادر التاريخية يلجأ الباحث إلى المصدر الأصلي لجمع البيانات. لا توجد طرق صحيحة وطرق خاطئة وإنما هناك طرق مناسبة للبحث و طرق غير مناسبة، وبصورة عامة لكل بحث خصوصيته في جمع البيانات تعتمد على طبيعة البحث والضرورة الموضوعية ومن هذه الطرق : المقابلة الشخصية (Interview)، المراسلة، إستخدام الصحف والمجلات، إستخدام الهاتف، المشاهدة الشخصية، طريقة التجارب، السجلات الرسمية.

ثالثا: المعاينة الإحصائية

1- تعريف المعاينة الإحصائية

هي عملية إختيار جزء من المجتمع الإحصائي (العينة) للإستدلال على خواص المجتمع بأكمله عن طريق تعميم نتائج العينة.

2- خطوات تصميم عينة

للقيام بعملية المعاينة ينبغي الالتزام بعدة خطوات أساسية يمكن حصرها فيما يلي[1]:

أ- تحديد المشكلة وهدف الدراسة: أول خطوة يجب تحديد هدف المعاينة أو المشكلة المراد دراستها تحديدا واضحا، ويستلزم الأمر تعريف المشكلة المدروسة والهدف من دراستها. وذلك بغرض تمييز المشكلة الإحصائية المطلوبة ليتم بعد ذلك البحث عن التصميمات الممكنة أو عن الأسئلة المطلوبة، وتحديد مصادر الحصول عليها بما يخدم أهداف الدراسة.

ب- تعريف وتحديد المجتمع المراد معاينته: ينبغي تعريف المجتمع المراد معاينته تعريفا دقيقا مع تحديد عناصره بحيث يمكن الحكم على انتماء كل عنصر إلى المجتمع من عدمه بكل سهولة، كما يجب تحديد الفترة الزمنية المراد فيها إجراء هذه الدراسة.

[1] - Tille Yves, **théorie des sondages, Echantillionnage et estimation en populations finies**, Dunod, Paris, 2001, p 2
- Ansion Guy, **Sondages et statistique**, labor éditions, Bruxelles, 1997, P 15

ج- تحديد البيانات المطلوب جمعها: وذلك على ضوء أهداف البحث وفرضياته، وطرق التحليل التي سيتم إتباعها وطبيعة الوحدات والمجتمع، من خلال استشارة كل من مستخدم البيانات والباحث الذي يحللها واعتماد على جميع المصادر التي تتضمن هذه البيانات.

د- تحديد الإطار: يتعين تكوين إطار بوحدات المعاينة حتى يمكن اختيار العينة، والمتمثل في قائمة تضم كل وحدات المجتمع المدروس.

هـ- تحديد درجة الدقة المطلوبة وحجم العينة: تخضع نتائج المعاينة إلى أخطاء المعاينة وهي الأخطاء الناتجة عن جزئية المعلومات أو أخطاء القياس لذا فإن الدراسات التي تستخدم أسلوب المعاينة تتطلب تحديد حجم العينة بما يتناسب مع درجة الدقة المطلوبة والميزانية المتاحة وعلى تباين المجتمع الذي يحدد بالرجوع إلى الدراسات السابقة أو إجراء اختبار مسبق على ذلك المجتمع، وهذا لتحديد نسبة الخطأ المسموح به في قبول النتائج وتعميمها على المجتمع الكلي ويعتمد ذلك على خبرة الباحث أو الإحصائي وعلى الدراسات السابقة وكذلك على تطبيق بعض القواعد الإحصائية الخاصة بنظرية المعاينة.

و- تحديد طريقة جمع وقياس البيانات: يجب على الباحث أن يحدد الطريقة الأنجع التي تستخدم لجمع المعلومات ومن أهمها:

- **القياس المباشر:** وذلك بإجراء القياسات اللازمة لتحديد الخاصة المراد دراستها في وحدات العينة؛
- **الإتصال المباشر:** كالمقابلة الشخصية وتوجيه أسئلة مباشرة للوحدات المختارة في العينة؛
- **الإتصال غير المباشر:** وذلك عن طريق توجيه الأسئلة عن الهاتف الفاكس البريد الإلكتروني وغيرها.

ويمكن استخدام هذه الطرق مقترنة مع بعض إلا أن طريقتي القياس والإتصال المباشر هما أضمن الطرق من حيث الحصول على معلومات مقبولة، مع العلم أنها أكثر تكلفة من طريقة الإتصال غير المباشر.

ز- إجراء اختبار مسبق: قبل البدء في توزيع استمارة البحث على كل وحدات العينة المطلوبة وحتى قبل طباعة العدد اللازم منها، يتم اختبار الاستمارة بتوزيعها على مجموعة من الأفراد كعينة اختبارية من وحدات المجتمع موضوع الدراسة، وبناء عليه يمكن تعديل الاستمارة إذا لزم الأمر. تلخيص وتبويب المعطيات المتحصل عليها وتحليلها للحصول على تقديرات معالم المجتمع وقياس دقتها.

ح- العمل الميداني (جمع البيانات من وحدات العينة): يتم في بداية هذه المرحلة تدريب وتكوين القائمين بالعمل الميداني لتجنب الكثير من أخطاء القياس، حيث ترتبط دقة النتائج كثيرا بجودة هذه المرحلة. لذلك يجب الاهتمام بإعداد وتكوين القائمين بالعمل الميداني ووضع الخطط الملائمة لمعالجة حالات عدم الاستجابة أو عدم الحصول على البيانات من بعض وحدات العينة، ثم يتم بعد ذلك التنفيذ الفعلي لخطة المعاينة بجمع البيانات من مفردات العينة المختارة وهي مرحلة هامة لأنها عرضة لكثير من أخطاء القياس.

ط- تحليل البيانات وتقدير معالم المجتمع : بعد الحصول على نتائج المعاينة والمتمثلة في إحصاءات العينة يتم دراستها وتحليلها بهدف الاستدلال على خصائص المجتمع، وهو أحد أهم فروع نظرية المعاينة والذي يشمل فرعين التقدير واختبار الفرضيات، بهدف الوصول إلى نتائج تمكن من تفسير الظاهرة المدروسة بدرجة معينة من الدقة.

3- أنواع العينات وطرق إختيارها

تقسم العينات بشكل عام إلى: عينات إحتمالية (عشوائية) Probability Samples وعينات غير إحتمالية (غير عشوائية) Nonprobability Samples.

أ- العينات الاحتمالية (العشوائية):

في هذا النوع من المعاينة يكون لكل مفردة فرصة أو احتمال معلوم للظهور في العينة وكلمة "عشوائية" هنا لا تعني أنها عينة سحبت بطريقة اعتباطية بل تعني إتاحة فرصة الاختيار لجميع الوحدات أو عناصر الظاهرة المدروسة وتتطلب المعاينة العشوائية أيضا توفر إطار للمعاينة، وعلى العكس من المعاينة غير الاحتمالية فإنها تسمح بتقييم مدى دقة النتائج، حيث أنها لا تسمح فقط بتقدير معالم المجتمع وإنما بقياس الخطأ المحتمل في النتائج أيضا أو لذي ينتج عادة عن الدراسة الجزئية كبديل لأسلوب الحصر الشامل. وتعتمد هذه المعاينة على نظرية الاحتمالات سواء في اختيار مفردات العينة أو في تعميم النتائج المحصل عليها من هذه العينات على المجتمعات التي أخذت منها أو في تحديد درجة الثقة بالنتائج وحساب الأخطاء.[1] وتكون المعاينة العشوائية على أنواع عدة أهمها:

[1]- بوعروري فاطمة، **محاضرات في مقياس الإحصاء 3** ،كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير، جامعة سطيف 1، الجزائر، 2022-2023، ص 8.

- العينة العشوائية البسيطة Simple Random Sample:

يُقصد بالعينة العشوائية البسيطة بأنها عملية إختيار عينة عشوائية من المفردات بحيث يكون كل مفردة من مفردات المجتمع نفس فرصة الإختيار أي (بإحتمال متساوي)، و هذا يعني أن تشكيلة (Combination) من المفردات سيكون لها نفس إحتمال الظهور أو الإختيار[1].

لوصف طريقة العينة العشوائية البسيطة، نفترض لدينا مجتمع إحصائي محدود و متجانس حجمه (N) مفردة، ويُراد إختيار عينة عشوائية حجمها (n) من المفردات من بين مفردات هذا المجتمع، فإن إحتمال ظهور أي مفردة ضمن مجتمع الدراسة يساوي $(\frac{1}{N})$، وإن عدد العينات الممكن إختيارها من المجتمع هو:

$$C_N^n = \frac{N!}{n!\,(N-n)!}$$

تُعد العينة العشوائية البسيطة من أبسط العينات الإحتمالية، إلا أنها تعد طريقة غير عملية في حالة المجتمعات الكبيرة وفي حالة وجود قيم شاذة (متطرفة) جدا. ويُشترط إستخدام هذا النوع من العينات بأن يكون مجتمع الدراسة متجانسا من حيث الخصائص ذات الصلة بموضوع البحث.

يستند هذا النوع من العينات على الأسلوب العشوائي في إختيار مفردات العينة، حيث تتلخص الطريقة العشوائية للإختيار بكتابة أسماء مفردات المجتمع أو أرقامها على بطاقات متشابهة تماما ثم خلطها جيدا بحيث يستحيل تمييز أي منها ثم إختيار عددا من البطاقات مساو إلى عدد مفردات العينة المطلوبة. إلا أن هذه العملية تعد مطولة ومملة عندما يكون حجم المجتمع كبير جدا لذلك نلجأ إلى طريقة بديلة تضمن لنا الأسلوب العشوائي في عملية إختيار مفردات العينة، و هي طريقة جداول الأرقام العشوائية (Tables of Random Numbers).

يكون سحب العناصر على أحد الشكلين التالية:

- **السحب بالإرجاع:** تُسمى في هذه الحالة بالعينة العشوائية البسيطة مع الإعادة (ESAR): يمكن في هذه الحالة لأي فرد من المجتمع أن يختار أكثر من مرة ضمن أفراد العينة، وبذلك تكون العينة مستقلة.
- **السحب دون إرجاع:** تسمى في هذه الحالة بالعينة العشوائية البسيطة دون الإعادة (ESSR): لا يمكن في هذه الحالة لأي فرد من المجتمع أن يختار أكثر من مرة ضمن أفراد العينة، وبذلك تكون العينة غير مستقلة.

[1]- حسين ياسين طعمة وإيمان حسين حنوش، **الإحصاء الإستدلالي**، مرجع سابق، ص ص 184-185.

- العينة العشوائية الطبقية Stratified Random Sample

في كثير من الأحيان يكون المجتمع الإحصائي غير متجانس من حيث الخصائص ذات الصلة بموضوع البحث كالتباين الحاصل المستوى العلمي أو الراتب الشهري ... مما يؤثر على تمثيل العينة للمجتمع وبالتالي على دقة النتائج، وفي هذه الحالة يكون استخدام العينة الطبقية هو المناسب والتي تعد من أفضل أنواع المعاينة الاحتمالية وأكثرها دقة في تمثيل مجتمع الدراسة في هذه الحالة لأنه يهدف إلى تصميم عينة ممثلة لكافة الطبقات التي يتكون منها المجتمع المدروس، مما يؤدي إلى تقليل أخطاء المعاينة دون زيادة حجم العينة[1].

تقوم المعاينة العشوائية الطبقية على تقسيم المجتمع إلى طبقات حسب خصائص معينة لها علاقة بموضوع البحث، ليتم الحصول على طبقات متجانسة وغير متقاطعة مع بعضها البعض، ويُشترط هنا أن يكون عدد الطبقات صغير لتفادي الحسابات الطويلة من جهة والتوصل إلى درجة دقة معقولة من جهة أخرى، ومن ثم اختيار عينة عشوائية بسيطة من كل طبقة لتشكل في مجموعها حجم العينة المطلوبة، وهذا بمراعاة أن تكون نسبة تواجد كل طبقة في العينة بنفس نسبة وجودها في المجتمع. يمكن تلخيص هذه الخطوات بما يلي[2]:

- يُقسم المجتمع الغير متجانس N إلى طبقات متجانسة: N_1 ; N_2; N_3 ... N_K بحيث لا يحدث تداخل بين وحداتها أي لا تتكرر الوحدة ذاتها في أكثر من طبقة واحدة بشرط أن يكون $N_1 + N_2 + N_3 + \cdots N_K = N$

- نسحب عينة عشوائية بسيطة من كل طبقة بحيث يتناسب عدد مفردات كل عينة مع حجم كل طبقة المطلوب، ويمكن الحصول على حجم هذه العينات وفقا للصيغة n لتكون في مجموعها حجم العينة الآتية:

$$n_i = N_i \times \frac{n}{N}$$

حيث أن:

- n_i: حجم العينة رقم i؛
- N_i: حجم الطبقة رقم i؛
- N: حجم المجتمع الإحصائي؛

---

[1]- راجع: - حسين ياسين طعمة و أيمان حسين حنوش، **الإحصاء الإستدلالي**، مرجع سابق، ص ص 185-186.
- جمال رشيد الكحلوت، **مبادئ نظرية العينات**، مكتبة الفريد الالكترونية، 2003 ، ص ص 3-4.

[2]- المرجع نفسه.

- n: حجم العينة المطلوب بحيث أن $n = \sum_i^K n_i$؛

قد تكون الطبقات المكونة معبرا عنها بالنسب المئوية لكل منها، في هذه الحالة يتم حساب عدد مفردات كل طبقة بالاعتماد على تلك النسب.

مثال: إذا كان لدينا مجتمع مكون من 1000 عامل حسب سنوات الخبرة موضح كما هو في الجدول الموالي:

الطبقة	سنوات الخبرة أقل من خمس سنوات	سنوات الخبرة ما بين خمس سنوات و أقل من عشر سنوات	سنوات الخبرة ما بين عشر سنوات و عشرين سنة	المجموع
عدد عناصر كل طبقة	500	300	200	1000

المطلوب: عين عدد العمال الواجب سحبهم من كل طبقة إذا أردنا سحب عينة عشوائية طبقية حجمها n=300.

الحل: لدينا

$$n_i = N_i \times \frac{n}{N}$$

- عدد العمال الواجب سحبهم من الطبقة الأولى هو:

$$n_1 = 300 \times \frac{500}{1000} = 150$$

- عدد العمال الواجب سحبهم من الطبقة الثانية هو:

$$n_2 = 300 \times \frac{300}{1000} = 90$$

- عدد العمال الواجب سحبهم من الطبقة الثالثة هو:

$$n_3 = 300 \times \frac{200}{1000} = 60$$

أي أن تشكيل عينة طبقية حجمها 300 عامل من هذا المجتمع يتطلب سحب 150 عامل خبرته أقل من 5 سنوات و 90 عامل خبرته ما بين خمس سنوات و أقل من عشر سنوات و 60 عامل خبرته ما بين عشر سنوات وعشرين سنة.

- العينة العشوائية المنتظمة Systematic Random Sample

أو النظامية و سُميت بهذا الاسم لأن تشكيلها يتبع أسلوبا منتظما لإختيار وحداتها، فهي ليست عشوائية بشكل كلي لأن فيها نوع من الإنتظام راجع إلى تركيب وحدات العينة في إطار تصنيف أو نظام معين. تعتبر المعاينة المنتظمة أكثر أنواع المعاينة الاحتمالية إستخداما في الأجهزة الإحصائية وبالأخص في حال تجانس مجتمع الدراسة. تتميز بالسهولة والبساطة وقلة الأخطاء التي ترتكب في اختيار مفرداتها. يتم تشكيل العينة المنتظمة بإتباع الخطوات التالية[1]:

- ترقيم وترتيب مفردات المجتمع الإحصائي على نحو تصاعدي أو تنازلي أو وفق أي معيار آخر للترتيب وليكن من المفردة 1 إلى المفردة N ، وبذلك فإن العينة المنتظمة تتطلب وجود إطار لمفردات المجتمع؛

- إيجاد ما يسمى بفترة المعاينة Sample Interval $\boldsymbol{r}$ حيث:

$$r = \frac{N}{n}$$

ليُقسم بعدها المجتمع إلى مجموعات متساوية حجم كل منها $\boldsymbol{r}$ عنصر و عددها هو n؛

- يتم اختيار العنصر الأول للعينة بطريقة عشوائية من المجموعة الأولى وليكن b أي أن b يكون محصورا بين 1 و r، وبذلك فإن العنصر الأول للعينة المنتظمة هو العنصر الذي يحمل الرقم b؛

- يتم الحصول على باقي عناصر العينة المنتظمة بمراعاة أن تحمل هذه العناصر أرقاما تشكل فيما بينها حدود متتالية حسابية حدها الأول b، أساسها r وعدد حدودها n، وهذه الأرقام هي:

$$\{(\boldsymbol{b}),(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{r}),(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{2r}),(\ \boldsymbol{b}+\boldsymbol{3r}),\ldots\ldots\ldots(\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{1})\boldsymbol{r})\}$$

على هذا الأساس نجد في النهاية أن جميع المجموعات تساهم بمفردة واحدة في تكوين حجم العينة n.

مثال: نريد تشكيل **عينة منتظمة** من طلاب جامعة سطيف الذين يستعملون النقل الجامعي وذلك من أجل التعرف على أسباب إستعمال هذا النوع من النقل ومدى رضا الطلبة عن وسائل النقل الممنوحة لهم، فإذا كان العدد الإجمالي للطلبة بجامعة سطيف هو 40000 طالب، ونرغب في إختيار عينة منتظمة حجمها 100 طالب، كيف يتم ذلك؟

---

[1]- راجع: - حسين ياسين طعمة و إيمان حسين حنوش، **الإحصاء الإستدلالي**، مرجع سابق، ص ص 188-189.
- جمال رشيد الكحلوت، **مرجع سابق**، ص 3.

الحل:

1- نحسب أولا r حيث أن:

$$r = \frac{N}{n} = \frac{40000}{100} = 400$$

2- نقسم المجتمع **N** إلى مجموعات متساوية عددها 100 مجموعة وحجم كل مجموعة هو 400 طالب. حيث تُرقم المجموعة الأولى من 1 إلى غاية 400 وتُرقم المجموعة الثانية من 401 إلى غاية 800 وهكذا إلى غاية المجموعة الأخيرة وهي المجموعة رقم 100 وتُرقم من 39601 إلى غاية 40000.

3- نفترض أن الطالب الذي وقع عليه الإختيار بطريقة عشوائية من المجموعة الأولى يحمل الرقم 50 أي أن **(b=50)**.

يتم إختيار باقي العناصر كما يلي:

الطالب الأول	b=50
الطالب الثاني	b+r=50+400=450
الطالب الثالث	b+2r=50+800=850
الطالب الرابع	b+3r=50+1200=1250
.....	
و هكذا إلى غاية الطالب الأخير	
الطالب الأخير (الطالب رقم 100):	b+(n-1)r=50+99(400)=39650

وبالتالي تكون وحدات العينة المنتظمة كما يلي:

$$\{50; 450; 850; 1250; 1650 \dots \dots \dots 39650\}$$

- العينة العشوائية العنقودية Cluster Random Sample

يُستخدم هذا النوع من العينات عندما يكون حجم المجتمع الإحصائي كبير جدا أو غير محدد أو في حالة وجود صعوبات فنية أو إدارية تحول دون إختيار أفراد العينة على المستوى الفردي أو متباعدة جغرافيا، تقوم على تجزئة المجتمع إلى مجموعات (عناقيد) والتي تكون هي وحدة المعاينة وفقا لخاصية معينة كما هو الحال في العينة الطبقية ونختار من هذه المجموعات عينة عشوائية بسيطة ثم نأخذ جميع الأفراد في المجموعات المختارة فتسمى عينة عشوائية عنقودية من مرحلة

واحدة أما إذا إخترنا عينة عشوائية بسيطة من الأفراد من كل مجموعة مختارة فتسمى عينة عشوائية عنقودية ذات مرحلتين، ويمكن أن تكون العينة العنقودية مكونة من عدة مراحل وتسمى في هذه الحالة عينة عنقودية متعددة المراحل، وتوجد عدة عوامل يجب مراعاتها عند استخدام العينة العنقودية من بينها ما يلي[1]:

- يجب أن تكون العناقيد معرفة بدقة وكل مفردة من مجتمع الدراسة يجب أن تنتمي لمجموعة أو عنقود واحد فقط؛
- يجب أن يكون عدد المفردات في العنقود معروفا؛
- يجب اختيار العناقيد عشوائيا لتقليل خطأ العينة؛
- يجب مراعاة التوازن في حجم العناقيد لتقليل خطأ العينة .العيب الوحيد لهذا النوع أن درجة دقة النتائج عادة ما تكون منخفضة.

- العينة العشوائية متعددة المراحل Multistage Random Sample

تُستخدم في حالة كون المجتمع الإحصائي متشبعا وواسعا على نحو يجعل عملية الإحاطة بجميع عناصره أمرا صعبا، أو بسبب وجود بعض العوائق مثل: زيادة التكلفة وضيق الوقت، وفي هذه الحالة يتم تقسيم المجتمع الإحصائي إلى وحدات ثم إختيار إحداها عشوائيا، ثم تقسيم هذه الوحدة إلى وحدات أصغر ثم إختيار إحداها عشوائيا، ثم تقسيم هذه الوحدة إلى وحدات أصغر و ... و هكذا حتى الحصول على العينة المطلوبة[2].

فلو أراد باحث إختيار عينة من مديري المدارس الحكومية في دولة ما، يتم تقسيم المجتمع الإحصائي ضمن مناطق ومن ثم إختيار منطقة على نحو عشوائي، ويتم تقسيم المنطقة إلى مديريات ومن ثم إختيار مديرية على نحو عشوائي، ومن ثم إختيار المدارس الموجودة في هذه المديرية على نحو عشوائي لتشكيل عينة الدراسة.

ب- العينات غير الإحتمالية (غير العشوائية):

تُعرف العينات غير الإحتمالية بأنها الطريقة التي يتم بموجبها إختيار مفردات العينة من بين مفردات المجتمع الإحصائي بشكل لا يخضع إلى مبدأ تكافؤ الفرص في ظهور أي مفردة (لا تخضع إلى مبدأ الإحتمالات)، بمعنى آخر أن

---

[1]- راجع: - إبراهيم أبو عقيل، مرجع سابق، ص 24.

- محمد عبد الفتاح الصيرفي ، **الدليل التطبيقي للباحثين**، دار وائل، عمان، الأردن، 2002 ، ص 204.

[2]- إبراهيم أبو عقيل، مرجع سابق، ص 24.

إختيار مفردات العينة لا يخضع إلى مبدأ الطريقة العشوائية وإنما يخضع إلى التحكم (التدخل) الشخصي في عملية إختيار المفردات وذلك لأغراض وإعتبارات تتعلق بطبيعة المشكلة المدروسة. نتائج هذا النوع من العينات تقريبية وقد تقل دقتها مقارنة بنتائج العينات الإحتمالية، وتكون على عدة أنواع نذكر منها: العينة القصدية، العينة الملائمة، العينة الحصصية، العينة العرضية (الصدفة) وعينة كرة الثلج. تعتبر الأنواع الثلاثة الأولى الأكثر شيوعا وإستخداما في العينات الإحتمالية[1].

- **العينة العمدية أو القصدية Purposive Sample :** هي طريقة يتم بموجبها إختيار عينة من مفردات مجتمع إحصائي متجانس بشكل قصدي متعمد، حيث يعتقد الباحث مسبقا بأن مفردات هذه العينة تمثل مجتمع الدراسة أفضل تمثيل، وتسمى أحيانا بالعينة الهادفة أو الحكمية.

- **العينة الملائمة (المناسبة) Convenient Sample:** يلجأ الباحث إلى هذا الأسلوب من العينات عندما يكون هناك ظروف معينة: مثل قربها من مكان عمل الباحث أو سكنه، أو سهولة الوصول أو الحصول عليها، ومن سلبيات هذه الطريقة عدم كون العينة ممثلة للمجتمع بصورة واضحة.[2]

- **العينة الحصصية Quota Sample** : تُعرف العينة الحصصية بأنها عملية تقسيم مجتمع الدراسة إلى عدد من الطبقات المتجانسة، ومن ثم إختيار عينة من كل طبقة بشكل قصدي، بحيث تشكل في مجموعها حجم العينة المطلوبة. بمعنى أنها الطريقة التي تتيح للباحث إمكانية إختيار حصة معينة من نوع معين من المفردات بحيث يتم إختيار مفردات الحصة بشكل شخصي، تستخدم في حالة المجتمعات الإحصائية غير المتجانسة.

4- تحديد حجم العينة

بعد تحديد طريقة إختيار العينة تأتي مرحلة تحديد حجم العينة المناسب لتعميم النتائج على المجتمع المدروس، وفي هذا السياق يوجد إتجاهان هما[3]:

أ- الإتجاه الأول:

يعتمد على الخبرة السابقة للباحث أو خبرات الآخرين، هذا الأسلوب في اختيار العينة يفيد الباحثين الذين لا يميلون إلى استخدام الأسلوب الرياضي في اختيار العينة، ففي الدراسات المسحية يكون من المناسب اختيار 20 % من

---

[1]- حسين ياسين طعمة و أيمان حسين حنوش، **الإحصاء الإستدلالي**، مرجع سابق، ص ص 192-193.

[2]- إبراهيم أبو عقيل، مرجع سابق، ص 25.

[3]- سعيد التل وآخرون، **مناهج البحث العلمي، تصميم البحث والتحليل الإحصائي**، دار المسيرة، عمان، الأردن، 2007 ، ص ص 105-106.

أفراد المجتمع الكلي إذا كان عدد أفراد هذا المجتمع معتدلا (ما بين 200 إلى 1000) وتقل هذه النسبة كلما كبر حجم المجتمع الأصلي لتصل إلى حوالي 5%. في الدراسات التجريبية ذات المعالجة الواحدة (متغير مستقل واحد) يكون حجم العينة الواحدة مناسبا إذا زاد عدد أفرادها عن 30 فردا (لكل مستوى من مستويات هذه المعالجة) أما في الدراسات التجريبية ذات المعالجتين أو أكثر، فمن المستحسن أن لا يقل عدد أفراد الخلية الواحدة في التصميم الإحصائي عن خمسة أفراد.

ب- الإتجاه الثاني:

يأخذ بعين الاعتبار بعض القواعد الاحتمالية لتحديد حجم العينة، كاحتمال الوقوع في الخطأ من النوع الأول واحتمال حدوث الخطأ من النوع الثاني، بالإضافة إلى بعض الأمور الأخرى المرتبطة بالتكلفة وبعض المقاييس الإحصائية. ومن أهم المبادئ التي يجب مراعاتها ما يلي:

- تحديد الهدف من اختيار العينة وبناء عليه تُعطى حدود الخطأ المسموح به، ونوع القرار المتوقع اتخاذه بناء على البيانات التي ستوفرها العينة؛
- إعطاء علاقة تربط بين حجم العينة المطلوب ومدى الدقة المطلوبة من العينة (حدود الخطأ المسموح)؛
- في بعض الحالات، مثل العينة الطبقية، تحتاج إلى تقدير حجم العينة في كل طبقة، وبالتالي يكون حجم العينة الكلي هو مجموع الأحجام الجزئية.
- يجب ربط حجم العينة مع التكلفة المتاحة للدراسة والزمن، وما شابه ذلك من عوامل قد تؤثر في حجم المجتمع.
- معرفة حجم المجتمع الأصلي مسبقا، وإن لم يكن هذا الحجم معروفا، فيمكن تقديره بإجراءات إحصائية معينة.

يُعد التباين بين أفراد المجتمع العامل الحاسم في تحديد حجم العينة، فكلما كبر التباين بين مفردات المجتمع كلما استوجب ذلك أن يكون حجم العينة كبيرا بغض النظر عن حجم ذلك المجتمع، إذ كلما زاد حجم العينة قل الخطأ المعياري للمعاينة وكلما نقص حجمها زاد الخطأ المعياري للمعاينة، أما في المجتمع المتجانس الصفات والخصائص تكفي عينة صغيرة لدراسته.

5- مصادر الأخطاء في الدراسات عن طريق العينات

إن النتائج التي نحصل عليها في الدراسات عن طريق العينات لا تكون مطابقة تماما للنتائج في حالة المسح الشامل لأن استخدام أسلوب المعاينة كأسلوب لجمع البيانات قد يوقع الباحث في العديد من الأخطاء تُدرج تحت مُسمى **أخطاء المعاينة الكلية**، والتي يمكن تقسيمها إلى أخطاء المعاينة العشوائية وأخطاء التحيز حيث[1]:

أ- أخطاء المعاينة العشوائية Random sampling errors:

وهي الأخطاء التي تنتج عن الاختلاف أو التشتت بين قيم الوحدات التي تتكون منها العينة، بالإضافة إلى تلك الوحدات التي لم تشأ الصدفة أن ندخلها في العينة حيث يسمى هذا الخطأ بخطأ المعاينة العشوائي. ويعتمد الحجم المتوسط لأخطاء المعاينة العشوائية على كل من: حجم العينة، مدى تشتت مفرداتها وطريقة اختيار الوحدات.

ب- أخطاء التحيز Bais errors :

تتمثل أخطاء التحيز فيما يلي:

- **خطأ التحيز في الاختيار:** ينتج هذا النوع من الأخطاء عن الاختيار غير العشوائي لوحدات العينة، اعتماد بعض طرق الاختيار على خاصية معينة كالاعتماد على دليل الهاتف، التحيز المقصود أو غير المقصود في اختيار بعض وحدات العينة كاستبدال وحدة بوحدة أخرى غير مدرجة ضمن الإطار، عدم التمكن من استكمال وصول جميع الاستمارات؛

- **خطأ التحيز في التقدير:** وهو انحراف متوسط جميع التقديرات الممكنة لمعلمة المجتمع عن قيمتها الحقيقية والذي ينتج عموما من عدم استخدام طرق التقدير أو التحليل المناسبة. ومن الصعب اكتشاف هذا الخطأ والتخلص منه إلا بإجراء تعديلات جذرية على تصميم الدراسة أو طريقة جمع البيانات أو تعديل النتائج.

- **خطأ التحيز الناتج عن التعريف الخاطىء لوحدة المعاينة.**

- **أخطاء أخرى شائعة في العينات:** ومنها أخطاء عدم الاستجابة الناتجة عن عدم تحديد الإطار، أخطاء التبويب ومعالجة البيانات، أخطاء الطباعة وأخطاء تفسير النتائج.

---

[1]- راجع: - جميل أحمد. **أساليب المعاينة، القياس وتحليل البيانات** .المركز الجامعي بويرة، ص ص 200-202.

- مركز الإحصاء أبو ضبي. **دليل المعاينة الإحصائية: أدلة المنهجية والجودة**، دليل رقم (4)، ص 6. متوفر على الموقع www.scad.ae

المحور الثاني:

توزيعات المعاينة

تمهـــيد:

غالبا ما تكون معالم المجتمع مجهولة حيث يتم تقديرها من بيانات العينة، وبما أنه يمكن سحب أكثر من عينة من نفس المجتمع فإن قيمة المقدر المحسوبة من بيانات العينة تكون عبارة عن متغير، ومادام السحب يتم عشوائيا فإن هذا المقدر هو متغير عشوائي أيضا والذي يمكن أن يكون له توزيع إحتمالي يسمى توزيع المعاينة **(Sampling distribution)**. وهو التوزيع الاحتمالي لأي مقدر نحسب قيمته من كل العينات العشوائية ذات الحجم المتساوي والممكن سحبها من هذا المجتمع.

سنحاول من خلال هذا الفصل التطرق إلى:

- **أولا: توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $(\bar{x})$ ؛**
- **ثانيا: توزيع المعاينة للنسبة في العينة (f) ؛**
- **ثالثا: توزيع المعاينة لتباين العينة S^2؛**
- **رابعا: توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي عينتين $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$؛**
- **خامسا: توزيع المعاينة للفرق بين نسبتي عينتين $(f_1 - f_2)$؛**
- **سادسا: توزيع المعاينة للنسبة بين تباين عينتين $(\frac{{S_1}^2}{{S_2}^2})$؛**
- **سابعا: سلسلة تمارين محلولة.**

أولا: توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $(\bar{x})$

كما هو معلوم فإن الوسط الحسابي للمجتمع هو مقدار ثابت أما الوسط الحسابي للعينة فتختلف قيمته من عينة إلى أخرى مسحوبة من نفس المجتمع، وعليه فالوسط الحسابي متغير عشوائي، وبما أنه كذلك فإن له توزيع إحتمالي يسمى **توزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينة $\bar{x}$**، ونحصل على توزيع المعاينة بأخذ جميع العينات الممكنة التي لها نفس الحجم والتي يمكن الحصول عليها من هذا المجتمع.

1- متوسط وتباين توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $(\bar{x})$

يعتمد شكل ومعالم توزيع المعاينة على طبيعة المجتمع وحجمه (محدود أو غير محدود) وعلى طريقة سحب العينات (سحب دون إرجاع أو سحب مع الإرجاع)، و تجدر الإشارة إلى أنه لتوزيع المعاينة للمتوسطات وسط يرمز له بالرمز $E(\bar{x})$ وتباين يمز له بالرمز $V(\bar{x})$، حيث[1]:

أ- الوسط الحسابي لتوزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $(\bar{x})$ $E(\bar{x})$

إذا كان μ متوسط مجتمع ما و $\bar{x}$ يمثل متوسط عينة مسحوبة من ذلك المجتمع، فإن القيمة المتوقعة لمتوسط العينة $E(\bar{x})$ وتسمى التوقع الرياضي لـ $\bar{x}$ تُحسب بالعلاقة التالية:

$$E(\bar{x}) = E\left(\frac{\sum X_i}{n}\right) = E\left(\frac{X_1 + X_2 + X_3 \dots X_n}{n}\right)$$

$$E(\bar{x}) = \frac{E(X_1 + X_2 + X_3 \dots X_n)}{n}$$

$$E(\bar{x}) = \frac{E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + \cdots E(X_n)}{n}$$

$$E(\bar{x}) = \frac{\mu + \mu + \mu + \cdots \mu}{n}$$

$$\boldsymbol{E(\bar{x}) = \mu}$$

أي أن متوسط مختلف المتوسطات للعينات التي يمكن سحبها يساوي تماما المتوسط الحسابي للمجتمع.

[1]- جبار عبد مضحي، **مقدمة في نظرية الاحتمالات**، دار المسيرة للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، الطبعة الأولى، 2011 ص 722.

ب- التباين لتوزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $(\bar{x})$ $V(\bar{x})$

إذا كان $V(x)$ يمثل تباين مجتمع ما و $\bar{x}$ يمثل متوسط عينة مسحوبة من ذلك المجتمع، فإن تباين توزيع المعاينة للمتوسط $V(\bar{x})$ يُحسب بالعلاقة التالية:

$$V(\bar{x}) = V\left(\frac{\sum X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2}.n.V(x)$$

$$V(x) = \sigma^2$$

$$V(\bar{x}) = \frac{1}{n^2}.n.\sigma^2$$

$$\boldsymbol{V(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}}$$

أما إذا كانت **عملية السحب دون إرجاع من مجتمع محدود حجمه N** فإن تباين توزيع المعاينة للمتوسط $V(\bar{x})$ يُحسب بالعلاقة التالية:

$$\boldsymbol{V(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n} \times \frac{N-n}{N-1}}$$

حيث أن: $\frac{N-n}{N-1}$ يمثل معامل الشمولية أو معامل الإرجاع أو معامل التصحيح ويظهر دائما في علاقة التباين لتوزيع المعاينة لأي إحصائية إذا تم السحب دون إرجاع من مجتمع محدود، وعمليا يُهمل هذا المعامل إذا كان حجم المجتمع كبير جدا مقارنة مع حجم العينة، وأغلب الإحصائيون يعتبرون حجم المجتمع كبير جدا مقارنة مع حجم العينة إذا كانت النسبة $\frac{n}{N}$ والتي تسمى كسر المعاينة أقل من 0.05 وهناك من يهمل هذا المعامل إذا كان $\frac{n}{N} \leq 0.1$.

ملاحظات:

- إذا كان المجتمع غير محدود N مجهول فإن المعاينة دون إرجاع تصبح مثل المعاينة مع الإرجاع أي أن: $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$؛
- المتوسط الحسابي لتوزيع المعاينة يساوي المتوسط الحسابي للمجتمع μ أي أن $E(\bar{x}) = \mu_{\bar{X}} = \mu$ بغض النظر عن حجم المجتمع وطريقة السحب (السحب مع الإرجاع أو دون إرجاع)؛
- عمليا نسحب عينة واحدة من المجتمع.

مثال:

في أحد مكاتب المحاسبة يوجد ثلاث 3 موظفين وفيما يلي عدد سنوات الخبرة لهؤلاء الموظفين (5، 6، 10).

المطلوب:

1- أحسب الوسط الحسابي وتباين المجتمع؟

2- أحسب الوسط الحسابي لوسط العينة $\mu_{\bar{x}}$ وقارن بين μ و $\mu_{\bar{x}}$.

3- أحسب التباين لوسط العينة $\sigma_{\bar{x}}^2$ وقارن بين σ^2 و $\sigma_{\bar{x}}^2$.

وهذا في حالتي السحب مع الإرجاع والسحب دون إرجاع.

الحل:

$$N = 3 = \{5,6,10\}$$

1- حساب الوسط الحسابي وتباين المجتمع

أ- الوسط الحسابي للمجتمع:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N} = \frac{5+6+10}{3} = 7$$

ب- تباين المجتمع:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i - \mu)^2}{N} = \frac{(5-7)^2 + (6-7)^2 + (10-7)^2}{3} = 4.67$$

$$\sigma^2 = 4.67$$

الحالة الأولى: السحب مع الإرجاع: ESAR

2- حساب الوسط الحسابي لوسط العينة $\mu_{\bar{x}}$ أو $E(\bar{x})$

في حالة السحب مع الإرجاع فإن عدد العينات التي يمكن تشكيلها من عنصرين ضمن 3 عناصر هي: ترتيبة بالتكرار أي:

$$N^n = 3^2 = 9 \text{ عينات}$$

رقم العينة	العينة	الوسط الحسابي للعينة $\bar{x}$
1	(5.5)	5
2	(6.5)	5,5
3	(10.5)	7,5
4	(5.6)	5,5
5	(6.6)	6
6	(10.6)	8
7	(5.10)	7,5
8	(6.10)	8
9	(10.10)	10
المجموع	/	63

$$\mu_{\bar{X}} = \frac{\sum_{i=1}^{9} \bar{X}}{\text{عدد العينات}} = \frac{5 + 5.5 + 7.5 + 5.5 + 6 + 8 + 7.5 + 8 + 10}{9} = \frac{63}{9} = 7$$

نلاحظ أن المتوسط الحسابي لجميع متوسطات العينات يساوي المتوسط الحسابي للمجتمع وبالتالي:

$$\boldsymbol{\mu_{\bar{X}} = \mu = 7}$$

3- حساب تباين وسط العينات $\sigma_{\bar{x}}^2$

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{9}(\bar{X}_i - \mu_{\bar{X}})^2}{\text{عدد العينات}}$$

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{(5-7)^2 + (5.5-7)^2 + (7.5-7)^2 + (5.5-7)^2 + (6-7)^2 + (8-7)^2 + (7.5-7)^2 + (8-7)^2 + (10-7)^2}{9}$$

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{21}{9} = 2.33$$

نلاحظ أن:

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{4.67}{2} = 2.33$$

ومنه نستنتج أن:

$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

الحالة الثانية: السحب دون إرجاع : ESSR

2- حساب الوسط الحسابي لوسط العينة $\mu_{\bar{x}}$ أو $E(\bar{x})$

في حالة السحب دون الإرجاع فإن عدد العينات التي يمكن تشكيلها من عنصرين ضمن 3 عناصر هي: توفيقة أي:

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!1!} = 3 \text{ عينات}$$

رقم العينة	العينة	الوسط الحسابي للعينة $\bar{x}$
1	(6.5)	5,5
2	(10.5)	7,5
3	(10.6)	8
المجموع	/	21

$$\mu_{\bar{X}} = \frac{\sum_{i=1}^{3} \bar{X}}{\text{عدد العينات}} = \frac{21}{3} = 7$$

نلاحظ أن المتوسط الحسابي لجميع متوسطات العينات يساوي المتوسط الحسابي للمجتمع وبالتالي:

$$\mu_{\bar{X}} = \mu = 7$$

3- حساب تباين وسط العينات $\sigma_{\bar{x}}^2$

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{3}(\bar{X}_i - \mu_{\bar{X}})^2}{\text{عدد العينات}} = \frac{(5.5-7)^2 + (7.5-7)^2 + (8-7)^2}{3} = \frac{3.5}{3} = 1.16$$

نلاحظ أن:

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \times \left(\frac{N-n}{N-1}\right) \qquad \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{4.67}{2} \times \left(\frac{3-2}{3-1}\right) = 1.16$$

ومنه نستنتج أن:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$$

2- طبيعة التوزيع الإحتمالي للوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$:

سيتم تناول طبيعة توزيع المعاينة عندما تكون العينة كبيرة أو صغيرة كما يلي:

أ- إذا كان حجم العينة كبير أي $n \geq 30$:

في هذه الحالة فإنه بغض النظر عن توزيع المجتمع فإن $\bar{X}$ يتبع تقريبا التوزيع الطبيعي بمتوسط قدره $E(\bar{x})$ أو $\mu_{\bar{X}}$ و تباين قدره $V(\bar{x})$ أو $\sigma_{\bar{X}}^2$ و هو ما تشير إليه نظرية النهاية المركزية، أي:

$$\bar{x} \rightarrow N(E(\bar{x}); V(\bar{x}))$$

وعليه يكون:

$$Z = \frac{\bar{x} - E(\bar{x})}{\sqrt{V(\bar{x})}} \rightarrow N(0.1)$$

حيث أن:

- إذا كان السحب مع الإرجاع أو دون إرجاع من مجتمع غير محدود فإن:

- إذا كان تباين المجتمع σ^2 معلوم فإن:

$$E(\bar{X}) = \mu$$
$$V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

- إذا كان تباين المجتمع σ^2 مجهول فإن:

$$E(\bar{X}) = \mu$$
$$V(\bar{X}) = \frac{S^2}{n-1}$$

علما أن S^2 تباين العينة ويُحسب بالعلاقة التالية:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$$

- إذا كان السحب دون إرجاع من مجتمع محدود و $\frac{n}{N} \leq 0.05$ فإن $V(\bar{X})$ لا يضرب في معامل الشمولية $\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$.

- إذا كان السحب دون إرجاع من مجتمع محدود و $\frac{n}{N} > 0.05$ فإن $V(\bar{X})$ يضرب في معامل الشمولية $\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$.

مثال:

بغرض الرقابة على الإنتاج الحقيقي للعسل في إحدى المستثمرات لتربية النحل بمنطقة سطيف تكلفت وزارة التجارة بدراسة الموضوع من كل جوانبه، حيث في إحدى الخطوات تم أخذ عينة من الصناديق حجمها 621 صندوق من هذه المستثمرة، فتبين أن متوسط وزن العسل الذي ينتجه الصندوق الواحد في هذه العينة هو 25 كلغ بانحراف معياري قدره 5 كلغ.

المطلوب:

1- ما هو القانون الإحتمالي لـ $\bar{x}$ ؟

2- بفرض أن متوسط المجتمع $\boldsymbol{\mu}$**=35** أحسب احتمال أن لا يتجاوز متوسط وزن العسل الذي ينتجه الصندوق الواحد في هذه العينة 31 كلغ.

الحل:

1- القانون الإحتمالي لـ $\bar{x}$:

لدينا: $n = 126 ; \bar{x} = 25 ; S = 5$

بما أن:

$n = 126 \geq 30$ فإن $\bar{x}$ يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط $E(\bar{X})$ و تباين قدره $\sigma^2_{\bar{X}}$ أي:

$$\bar{x} \rightarrow N(E(\bar{x}); V(\bar{x}))$$

$$E(\bar{X}) = \mu = 35$$

بما أن تباين المجتمع σ^2 مجهول فإن:

$$V(\bar{X}) = \frac{S^2}{n-1} = \frac{5^2}{126-1} = 0.2$$

وعليه فإن:

$$\bar{x} \to N(35; 0.2)$$

2- حساب احتمال أن لا يتجاوز متوسط وزن العسل الذي ينتجه الصندوق الواحد في هذه العينة 31 كغ أي:

$$P(\bar{x} \leq 36) = P\left(\frac{\bar{x} - E(\bar{X})}{\sqrt{V(\bar{X})}} \leq \frac{36-35}{\sqrt{0.2}}\right) = P\left(Z \leq \frac{1}{0.45}\right) = P(Z \leq 2.22) = \Phi(2.22)$$
$$= 0.9866$$

ومنه:

$$P(\bar{x} \leq 36) = 0.9866$$

ب- إذا كان حجم العينة صغير أي $n< 30$:

في هذه الحالة **يجب أن يكون المجتمع الإحصائي الذي سحبت منه العينة العشوائية يتوزع توزيعا طبيعيا** ونميز حالتين هما:

- الحالة الأولى: إذا كان لدينا مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وتباين σ^2 وسحبنا منه عينات عشوائية حجم كل منها n وكانت n صغيرة أي $(n< 30)$ **فإن الوسط الحسابي لهذه العينات يتبع أيضا التوزيع الطبيعي** بمتوسط قدره $E(\bar{X})$ وتباين قدره $\sigma_{\bar{X}}^2$ حيث:

- إذا كان السحب مع الإرجاع أو دون إرجاع من مجتمع غير محدود فإن:

$$\boldsymbol{E(\bar{X}) = \mu}$$
$$\boldsymbol{V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}}$$

-إذا كان السحب دون إرجاع من مجتمع محدود فإن:

$$\boldsymbol{E(\bar{X}) = \mu}$$
$$\boldsymbol{V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \times \frac{N-n}{N-1}}$$

- الحالة الثانية: إذا كان المجتمع الذي سحبت منه **العينات العشوائية ذات الحجم n وكانت n صغيرة أي (n<30) يتبع التوزيع الطبيعي** بمتوسط μ **وتباين مجهول** وكان السحب مع الارجاع أو دون إرجاع من مجتمع غير محدود في هذه الحالة يصبح لدينا المتغير T حيث:

$$T = \frac{\bar{x} - E(\bar{x})}{\sqrt{\frac{S^2}{n-1}}} \rightarrow t_{n-1}$$

بمعنى أن المتغير T في هذه الحالة يتبع توزيع ستيودنت بدرجة حرية قدرها $n-1$.

ملاحظة:

نعلم أنه إذا كان حجم العينة كبير فإن توزيع ستيودنت يقترب من التوزيع الطبيعي لذلك فإن **استخدام توزيع ستيودنت يقتصر في الغالب على حالة العينات الصغيرة إذا كان تباين المجتمع $\sigma 2$ مجهول فقط.**

مثال:

وزن قطعة الصابون المعطر المنتج من بأحد المصانع يمثل متغيرا عشوائيا طبيعيا (x_i) بمتوسط $\mu_x = 80g$ وإنحراف معياري σ_x. سحبت عينة من إنتاج المصنع حجمها n=25، فكان الإنحراف المعياري للعينة هو S=60.

المطلوب:

1- ما هو توزيع المعاينة لمتوسط وزن قطع الصابون في العينة المسحوبة؟

2- أحسب إحتمال أن يكون متوسط وزن قطع الصابون في العينة 105.23 g على الأكثر.

الحل:

1- توزيع المعاينة لمتوسط وزن قطع الصابون في العينة المسحوبة:

بما أن n=25<30 ومأخوذة من مجتمع طبيعي والإنحراف المعياري للمجتمع σ مجهول فإن متوسط وزن قطع الصابون في العينة $\bar{x}$ يخضع إلى قانون ستيودنت ونكتب:

$$T = \frac{\bar{x} - E(\bar{x})}{\sqrt{\frac{S^2}{n-1}}} \rightarrow t_{n-1}$$

حيث:

$$E(\bar{x}) = \mu = 80g$$

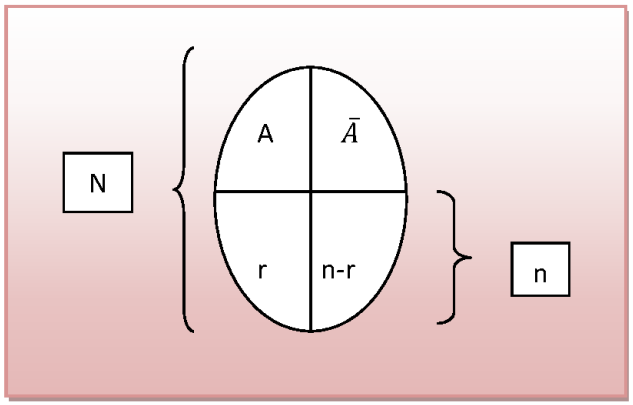
$$V(\bar{x}) = \frac{S^2}{n-1} = \frac{60^2}{25-1} = 150$$

2- حساب إحتمال أن يكون متوسط وزن قطع الصابون في العينة 105.23 g على الأكثر أي:

$$P(\bar{x} \leq 105.23) = P\left(\frac{\bar{x} - E(\bar{X})}{\sqrt{\frac{S^2}{n-1}}} \leq \frac{105.23 - 80}{\sqrt{\frac{60^2}{25-1}}}\right) = P(t \leq 2.06) = 0.975$$

ثانيا: توزيع المعاينة للنسبة في العينة (f)

في كثير من الحالات نحتاج إلى دراسة النسبة P للأفراد الذين تتوفر فيهم خاصية معينة تهمنا على مستوى المجتمع، كتقدير نسبة الأفراد العاطلين عن العمل في منطقة ما أو ذوي الدخل المنخفض أو نسبة الناجحين في مادة الإحصاء 4؛ لدراسة مثل هذه الحالات نقوم بتقسيم المجتمع إلى قسمين متنافيين تماما، حيث يتكون القسم الأول من العناصر التي تتصف بالخاصية المدروسة ونرمز له بالرمز A، أما القسم الثاني فيتكون من العناصر التي لا تتصف بالخاصية المدروسة ونرمز له بالرمز $\bar{A}$، وذلك كما يوضحه الشكل التالي:



وبالتالي نسبة عناصر المجتمع الذين يتصفون بالخاصية المدروسة معرفة كما يلي:

$$P = \frac{\text{عدد المفردات الذين تتوفر فيهم الخاصية المدروسة في المجتمع}}{\text{العدد الإجمالي للمجتمع}} = \frac{A}{N}$$

أما نسبة العناصر الذين يتصفون بالخاصية المدروسة على مستوى العينة فتعطى بالعلاقة التالية:

$$f = \frac{\text{عدد المفردات الذين تتوفر فيهم الخاصية المدروسة في العينة}}{\text{العدد الإجمالي للعينة}} = \frac{r}{n}$$

فإذا تم سحب عينات عشوائية حجمها n من هذا المجتمع وقمنا بحساب نسبة الخاصية المدروسة f في كل عينة، سنجد أن f تتغير من عينة إلى أخرى وبالتالي فهي متغير عشوائي له توزيع إحتمالي يُطلق عليه **توزيع المعاينة للنسبة في العينة f**.

من أجل القيم الكبيرة لـ n فإن f تتبع تقريبا التوزيع الطبيعي بمتوسط وتباين $N(\mu_f, \sigma_f^2)$ يحددان كما يلي:

$$\mu_f = P$$

أي أن **متوسط توزيع المعاينة للنسبة في العينة f يساوي نسبة النجاح في المجتمع**.

أما **تباين توزيع المعاينة للنسبة في العينة σ_f^2** يحدد كما يلي:

– إذا كان السحب مع الإرجاع فإن:

- تباين النسبة في العينة: $\sigma_f^2 = \frac{Pq}{n} = \frac{P(1-P)}{n}$
- الإنحراف المعياري للنسبة في العينة: $\sigma_f = \sqrt{\frac{Pq}{n}} = \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$

– إذا كان السحب دون الإرجاع فإن:

- تباين النسبة في العينة: $\sigma_f^2 = \frac{Pq}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = \frac{P(1-P)}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$
- الإنحراف المعياري للنسبة في العينة: $\sigma_f = \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$

ونكتب:

$$f \to N(\mu_f; \sigma_f^2)$$

حيث:

$$Z = \frac{f - \mu_f}{\sigma_f} \rightarrow N(0;1)$$

مثال:

إذا كان إحتمال نجاح الطالب دون ديون في كلية العلوم الاقتصادية هو 0.9، أخذت عينة عشوائية حجمها 49 طالب من أولئك الذين يدرسون في الكلية.

المطلوب:

1- أوجد المتوسط الحسابي والإنحراف المعياري لنسبة الطلبة الناجحين دون ديون في العينة.

2- ما إحتمال أن تزيد نسبة هؤلاء الطلبة الناجحين دون ديون على 80%.

الحل:

لدينا: $P= 0.9 \quad ; \quad n= 49$

X: عدد الطلبة الناجحين دون ديون في الكلية.

1- إيجاد المتوسط الحسابي والإنحراف المعياري للنسبة في العينة f :

$$\mu_f = P = 0$$

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{Pq}{n}} = \sqrt{\frac{0.9(1-0.9)}{49}} = 0.042$$

2- إحتمال أن تزيد النسبة في العينة على 80%:

$$P(f > 0.8) = ?$$

بما أن حجم العينة n=49> 30 وبالإعتماد على النظرية السابقة يكون لدينا:

$$f \rightarrow N(\mu_f; \sigma_f^2)$$

$$f \rightarrow N(0{,}9;\ 0{,}0017)$$

$$P(f > 0.8) = 1 - P(f \leq 0.8) = 1 - P\left(Z \leq \frac{0.8-0.9}{0.042}\right) = 1 - P(Z \leq -2.38)$$

$= 1-(1-\Phi(2.38) = \Phi(2.38) = 0.9913$

ملاحظة: عندما نكون بصدد تقدير النسبة لابد أن يكون حجم العينة كبير، وإذا كان المجتمع لا يتوزع طبيعيا هنا لابد من أخذ عينة كبيرة.

ثالثا: توزيع المعاينة لتباين العينة S^2

نعلم أنه عند سحب عينة مكونة من n عنصر من مجتمع ما فإن تباين العينة يعطى بالعلاقة التالية:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n}$$

ولدينا النظرية التالية: إذا تم سحب عينات عشوائية حجمها n من مجتمع غير محدود تباينه σ^2 فإن متوسط تباين العينة $E(S^2)$ يُعطى بالعلاقة التالية:

$$\boldsymbol{E(S^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2}$$

وبما أن $E(S^2) \neq \sigma^2$ فإن S^2 مقدر متحيز لتباين المجتمع σ^2، لهذا السبب فإن الكثير من الإحصائيين يستخدمون بدلا من تباين العينة S^2 إحصائية أخرى هي **تباين العينة المعدل** $\acute{S}^2$ و الذي يعطى بالعلاقة التالية:

$$\acute{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

وعليه يكون:

$$\acute{S}^2 = \frac{n}{n-1}S^2$$

وهو غير متحيز لـ σ^2 لأن: $E(\acute{S}^2) = \sigma^2$

في هذا السياق لدينا النظرية التالية:

إذا تم سحب عينات عشوائية حجمها n من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وانحراف معياري σ فإن المتغير العشوائي المعطى بالعلاقة التالية:

$$\frac{n.S^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)\acute{S}^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2}$$

يتبع توزيع كاي تربيع بدرجة حرية $(n-1)$ أي:

$$\frac{n.S^2}{\sigma^2} \rightarrow {X^2}_{n-1}$$

مثال:

سحبنا عينة مكونة من العناصر التالية:$(x_1; x_2; x_3 \dots x_{15})$ من مجتمع طبيعي تباينه معلوم $N(\mu_x; 49)$.

المطلوب: أحسب إحتمال أن يقل التباين المعدل للعينة عن 82.9.

الحل:

لدينا: $n = 15$; $\sigma^2 = 49$ ، المجتمع طبيعي.

$$P(\acute{S}^2 < 82.9) = ?$$

نعلم أن:

$$\frac{(n-1)\acute{S}^2}{\sigma^2} \rightarrow {X^2}_{n-1}$$

ومنه فإن:

$$P(\acute{S}^2 < 82.9) = P\left(\frac{(n-1)\acute{S}^2}{\sigma^2} < \frac{(15-1)\times 82.9}{49}\right) = P({X^2}_{14} < 23.7) = 0.95$$

رابعا: توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي عينتين $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$

يكون من المهم في بعض الأحيان معرفة التوزيع الإحتمالي لمقدار الإختلاف أو الفرق بين متوسطي عينتين مسحوبتين من مجتمعين مستقلين، في هذه الحالة نلجأ إلى ما يعرف **بتوزيع المعاينة لفرق الأوساط**.

إذا كان لدينا المتغير x_1 يتبع التوزيع الطبيعي $N(\mu_1; {\sigma_1}^2)$ وتم سحب عينة حجمها n_1 من مجتمعه، والمتغير x_2 يتبع التوزيع الطبيعي أيضا $N(\mu_2; {\sigma_2}^2)$ وتم سحب عينة حجمها n_2 من مجتمعه، وكان المجتمعين مستقلين، فإن المتغير المعبر عنه بـ $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ يمثل متغيرا عشوائيا للفرق بين متوسطي العينتين يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط قدره $E(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ وتباين قدره $\sigma^2(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ واللذان يحددان كما يلي:

$$\mu(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \mu(\bar{X}_1) - \mu(\bar{X}_2)$$

$$\sigma^2(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \sigma^2(\bar{X}_1) + \sigma^2(\bar{X}_2)$$

ونفرق بين ثلاث حالات هي:

- **الحالة الأولى: إذا كان** ${\sigma_1}^2$ و ${\sigma_2}^2$ معلومين فإن:

$$\mu(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \mu(\bar{X}_1) - \mu(\bar{X}_2) = \mu_1 - \mu_2$$

$$\sigma^2(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \sigma^2(\bar{X}_1) + \sigma^2(\bar{X}_2) = \frac{{\sigma_1}^2}{n_1} + \frac{{\sigma_2}^2}{n_2}$$

ونكتب:

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \to N\left(\mu_1 - \mu_2; \frac{{\sigma_1}^2}{n_1} + \frac{{\sigma_2}^2}{n_2}\right)$$

وعليه يكون المتغير المعياري Z معرف كما يلي:

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{{\sigma_1}^2}{n_1} + \frac{{\sigma_2}^2}{n_2}}} \to N(0.1)$$

ملاحظة:

في حالة السحب دون إرجاع يتم تصحيح $\frac{{\sigma_1}^2}{n_1}$ و $\frac{{\sigma_2}^2}{n_2}$ بمعاملي التصحيح K_1 و K_2 على الترتيب بحيث:

$$K_1 = \frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1} \quad ; \quad K_2 = \frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1}$$

ويصبح المتغير المعياري Z في هذه الحالة معرف كما يلي:

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{{\sigma_1}^2}{n_1} x \frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1} + \frac{{\sigma_2}^2}{n_2} x \frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1}}} \to N(0.1)$$

مثال:

إذا كانت الأجور اليومية في إحدى الشركات تخضع للتوزيع الطبيعي: $N_1(\mu_1 = 5; {\sigma_1}^2 = 0.5)$ ، والأجور اليومية في شركة أخرى تخضع هي الأخرى للتوزيع الطبيعي $N_2(\mu_2 = 4; {\sigma_2}^2 = 0.25)$. سحبنا من عمال الشركتين عينتين $n_1 = 20$ و $n_2 = 10$ على الترتيب.

المطلوب:

1- أوجد توزيع المعاينة للفرق بين متوسط أجور العمال بين العينتين.

2- أحسب إحتمال أن يقل فرق متوسط أجور العمال بين العينتين عن 0.75 وحدة نقدية.

الحل:

لدينا المعطيات التالية:

الشركة 1	الشركة 2
توزيع المجتمع طبيعي	**توزيع المجتمع طبيعي**
$\mathbf{\mu_1 = 5}$	$\mu_2 = 4$
$\mathbf{{\sigma_1}^2 = 0.5}$	${\sigma_2}^2 = 0.25$
$\mathbf{n_1 = 20}$	$n_2 = 10$

- نرمز بـ:

$\mathbf{\bar{X}_1}$ و $\mathbf{\bar{X}_2}$ **متوسطي العينتين** n_1 و n_2 على الترتيب؛

$(\mathbf{\bar{X}_1 - \bar{X}_2})$**متغير عشوائي يمثل الفرق بين متوسطي الأجور في العينتين.**

1- أوجد توزيع المعاينة للفرق بين متوسط أجور العمال بين العينتين.

بما أن:

المجتمعين طبيعيين و ${\sigma_1}^2$ و ${\sigma_2}^2$ معلومين و $n_1 < 30; n_2 < 30$ فإن:

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \to N\left(\mu(\bar{X}_1 - \bar{X}_2); \sigma^2(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)\right)$$

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \to N\left(\mu_1 - \mu_2; \frac{{\sigma_1}^2}{n_1} + \frac{{\sigma_2}^2}{n_2}\right)$$

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \to N\left(5 - 4; \frac{0.5}{20} + \frac{0.25}{10}\right)$$

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \to N(1; 0.05)$$

ومنه توزيع المعاينة للفرق بين متوسط أجور العمال بين العينتين هو التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي قدره 1 وحدة نقدية و تباين قدره 0.05 وحدة نقدية.

2- حساب إحتمال أن يقل فرق أوساط أجور العمال بين العينتين عن 0.75 وحدة نقدية

$$P[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) < 0.75]$$

بما أن:

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \rightarrow N(1; 0.05)$$

فإن:

$$P[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) < 0.75] = P\left[\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \mu(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{\sigma(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)} < \frac{0.75 - 1}{\sqrt{0.05}}\right]$$

$$= P[Z < -1.14]$$

$$= \Phi(-1.14)$$

$$= 1 - \Phi(1.14)$$

$$= 1 - 0.8729$$

$$P[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) < 0.75] = 0.1271$$

- **الحالة الثانية: إذا كان** ${\sigma_1}^2$ و ${\sigma_2}^2$ مجهولين وحجم العينتين كبير $n_1; n_2 \geq 30$ فإن:

في هذه الحالة فإن الفرق بين متوسطي العينتين $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط قدره $(\mu_1 - \mu_2)$ وتباين قدره $(\frac{{S_1}^2}{n_1 - 1} + \frac{{S_2}^2}{n_2 - 1})$ ونكتب:

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \rightarrow N\left(\mu_1 - \mu_2; \frac{{S_1}^2}{n_1 - 1} + \frac{{S_2}^2}{n_2 - 1}\right)$$

مثال:

إليك المعطيات التالية المتعلقة بعملية معاينة من مجتمعين طبيعيين، تبايناتهما مجهولة ومتوسطاتهما $\mu_1 = 700$ و $\mu_2 = 500$.

	العينة الأولى	العينة الثانية
حجم العينة	40	35
الإنحراف المعياري للعينة	40	20

المطلوب:

1- ما هو التوزيع الإحتمالي للفرق بين متوسطي العينتين؟

2- أحسب إحتمال أن يكون الفرق بين متوسطي العينتين يتراوح ما بين 180 و 210.

الحل:

بما أن: ${\sigma_1}^2$ و ${\sigma_2}^2$ مجهولين وحجم العينتين $n_1 = 40$ ؛ $n_2 = 35$ كلاهما أكبر من 30 وبذلك يكون توزيع الفرق بين متوسطي العينتين هو:

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \to N\left(\mu_1 - \mu_2; \frac{{S_1}^2}{n_1 - 1} + \frac{{S_2}^2}{n_2 - 1}\right)$$

لدينا: ${S_1}^2 = 1600$ ؛ ${S_2}^2 = 400$ ؛

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \to N\left(700 - 500; \frac{1600}{39} + \frac{400}{34}\right)$$

أي:

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \to N(200; 52.78)$$

2- حساب الإحتمال التالي:

$$P(180 \le (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \le 210) = P\left(\frac{180 - 200}{\sqrt{52.78}} \le \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - 200}{\sqrt{52.78}} \le \frac{210 - 200}{\sqrt{52.78}}\right)$$

$$= P(-2.75 \le Z \le 1.37) = F(1.37) - F(-2.75) = F(1.37) - [1 - F(2.75)] = 0.9147 - 1 + 0.9970 = \mathbf{0.9117}$$

ملاحظة:

التوزيع أعلاه صالح أيضا عند السحب من مجتمعين غير طبيعيين أو مجهولي التوزيع بشرط كبر حجم العينة، وذلك استناد لنظرية النهاية المركزية.

- الحالة الثالثة: إذا كان ${\sigma_1}^2$ و ${\sigma_2}^2$ مجهولين و حجم أحد العينتين على الأقل صغير $n_1; n_2 \ge 30$ فإن:

إذا سحبنا من مجتمع طبيعي وسطه μ_1 و تباينه ${\sigma_1}^2$ عينة صغيرة حجمها n_1، وسحبنا من مجتمع طبيعي ثان وسطه μ_2 و تباينه ${\sigma_2}^2$ عينة صغيرة حجمها n_2، فإن المتغير العشوائي المعبر عنه بـ $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ يتبع توزيع ستيودنت بدرجة حرية قدرها $(n_1 + n_2 - 2)$ حيث:

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{n_1 {S_1}^2 + n_2 {S_2}^2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \rightarrow t_{n_1+n_2-2}$$

خامسا: توزيع المعاينة للفرق بين نسبتي عينتين $(f_1 - f_2)$

إذا تم سحب عينتان عشوائيتان n_1 و n_2 كبيرتان أي$(n_1; n_2 \geq 30)$ من مجتمعين مستقلين يخضعان للتوزيع الطبيعي، و كانت f_1 و f_2 **نسبة تحقق خاصية معينة في العينتين** n_1 و n_2 على الترتيب، فإن المقدار $(f_1 - f_2)$ **الذي يمثل الفرق بين نسبتي هاتين العينتين هو متغير عشوائي يتبع توزيع يقترب من التوزيع الطبيعي بمتوسط قدره** $E(f_1 - f_2)$ **و تباين** قدره $\sigma^2(f_1 - f_2)$ حيث:

$$E(f_1 - f_2) = \mu(f_1 - f_2) = (P_1 - P_2)$$
$$\sigma^2(f_1 - f_2) = \left(\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}\right)$$

ونكتب:

$$(f_1 - f_2) \rightarrow N\left(P_1 - P_2; \frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}\right)$$

وعليه يكون المتغير المعياري Z كما يلي:

$$Z = \frac{(f_1 - f_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}} \rightarrow N(0.1)$$

ملاحظة:

إذا كان السحب دون إرجاع يتم تصحيح $\sigma^2(f_1 - f_2)$ **بمعاملات التصحيح**.

مثال:

إذا كان لدينا مصنع، يستخدم آلتين للإنتاج هما X و Y، وكانت نسبة الإنتاج التالف من الآلة X هو 05%، ومن الآلة Y هو 10%، سحبنا من إنتاج الآلتين عينتين أحجامهما $n_1 = 100$ و $n_2 = 55$على التوالي.

المطلوب:

1- أوجد توزيع المعاينة للفرق بين نسبتي الإنتاج الصالح في العينتين.

2- أحسب إحتمال أن تزيد نسبة الإنتاج الصالح في العينة المسحوبة من X عن نسبة الإنتاج الصالح في العينة المسحوبة من Y بـ 10% على الأكثر.

الحل:

لدينا:

الآلة X: $p_x = 0.95 \; ; \; q_x = 0.05 \; ; \; n_1 = 100$

الآلة Y: $p_y = 0.9 \; ; \; q_y = 0.10 \; ; \; n_2 = 55$

1- إيجاد توزيع المعاينة للفرق بين نسبتي الإنتاج الصالح في العينتين

نرمز للفرق بين نسبتي الإنتاج الصالح في العينتين بـ $(f_1 - f_2)$ وهو متغير عشوائي. وبما أن العينتان كبيرتان مأخوذتان من مجتمعين مستقلين فإن:

$$(f_1 - f_2) \rightarrow N\left(P_1 - P_2; \frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}\right)$$

متوسط توزيع المعاينة للفرق بين نسبتي الإنتاج الصالح في العينتين:

$$\mu(f_1 - f_2) = (P_1 - P_2) = 0.95 - 0.9 = 0.05$$

تباين توزيع المعاينة للفرق بين نسبتي الإنتاج الصالح في العينتين:

$$\sigma^2(f_1 - f_2) = \left(\frac{0.95 \times 0.05}{100} + \frac{0.9 \times 0.1}{55}\right) = 0.002$$

ومنه توزيع المعاينة هو: $(f_1 - f_2) \rightarrow N(0.05; 0.002)$

2- حساب إحتمال أن تزيد نسبة الإنتاج الصالح في العينة المسحوبة من X عن نسبة الإنتاج الصالح في العينة المسحوبة من Y بـ 10% على الأكثر أي:

$$P[(f_1 - f_2) \leq 0.1]$$

بماأن:

$$(f_1 - f_2) \rightarrow N(0.05; 0.002)$$

فإن:

$$P[(f_1 - f_2) \leq 0.1] = P\left[\frac{(f_1 - f_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}} \leq \frac{0.1 - 0.05}{\sqrt{0.002}}\right] = P(Z \leq 1.19)$$

$$= \Phi(1.19) = 0.8830$$

$$P[((f_1 - f_2)) \leq 0.1] = 0.8830$$

هناك إحتمال قدره 88.30% أن تزيد نسبة الإنتاج الصالح في العينة المسحوبة من X عن نسبة الإنتاج الصالح في العينة المسحوبة من Y بـ 10% على الأكثر.

سادسا: توزيع المعاينة للنسبة بين تباين عينتين $\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\right)$

يُعتبر هذا التوزيع من التوزيعات الهامة التي تبحث في تجانس المجتمعات حيث نلجأ إلى حساب النسب بين التباينات وليس الفرق بينها وذلك لسهولة دراسة النسب وتفسيرها. فإذا سحبت عينة حجمه n_1 و تباينها S_1^2 من مجتمع طبيعي $N(\mu_1; \sigma_1^2)$، وعينة أخرى حجمها n_2 و تباينها S_2^2 من مجتمع طبيعي $N(\mu_2; \sigma_2^2)$ مستقل عن المجتمع الأول فإن المتغير المعطى بالعلاقة التالية:

$$F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}$$

يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية $(n_1 - 1)$ و$(n_2 - 1)$ ونكتب:

$$F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \rightarrow F(n_1 - 1; n_2 - 1)$$

وإذا تساوى تبايني المجتمعين فإن:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \rightarrow F(n_1 - 1; n_2 - 1)$$

مثال:

أخذت عينة عشوائية حجمها 11 من مجتمع طبيعي تباينه 9 ، وأخذت عينة عشوائية أخرى حجمها 27 من مجتمع طبيعي أيضا تباينه 25 مستقل عن المجتمع الأول.

المطلوب:

- أوجد إحتمال أن تكون النسبة بين تبايني العينتين أقل من 0.8.

الحل:

لدينا:

$$F = \frac{{S_1}^2/9}{{S_2}^2/25} \to F(10;26)$$

$$P\left(\frac{{S_1}^2}{{S_2}^2} < 0.8\right) = P\left(\frac{{S_1}^2/9}{{S_2}^2/25} < (0.8)\left(\frac{25}{9}\right)\right) = P(F_{10;26} < 2.22) = 0.95$$

سابعا: سلسلة تمارين محلولة

التمرين الأول:

بفرض أن أحد المجتمعات يتكون من 4 أفراد حسب العمر (16، 18، 32، 54).

المطلوب:

1- أوجد وسط وتباين هذا المجتمع؟

2- عند سحب عنصرين من هذا المجتمع أحسب:

أ- الوسط الحسابي لوسط العينة العشوائية البسيطة وكذا تباين وسط هذه العينة العشوائية البسيطة، إذا علمت أن السحب كان مع الإعادة؟ ماذا تستنتج؟

ب- الوسط الحسابي لوسط العينة العشوائية البسيطة وكذا تباين وسط هذه العينة العشوائية البسيطة، إذا علمت أن السحب دون إعادة؟ ماذا تستنتج؟

ج- الوسط الحسابي لوسط العينة الطبقية وكذا تباين وسط هذه العينة الطبقية؟ ماذا تلاحظ؟

التمرين الثاني:

إن أطوال 2000 طالب في إحدى الكليات تتميز بمتوسط قدره 165 سم وإنحراف معياري قدره 04 سم، تم سحب عينة عشوائية بسيطة حجمها 190 طالب.

المطلوب:

1- إيجاد الوسط الحسابي لوسط هذه العينة وكذا تباين وسط هذه العينة، والإنحراف المعياري لوسط هذه العينة ، وذلك إذا كان:

أ- السحب دون إرجاع؛

ب- السحب مع الإرجاع.

التمرين الثالث:

عرفت الجامعة الجزائرية في السنوات الأخيرة تطورا سريعا من حيث عدد المؤسسات و قدرتها الإستيعابية و عدد التخصصات العلمية المفتوحة، لكن يخشى أن الكم الهائل لهذه الهياكل أتى على حساب المستوى العلمي والبحث العلمي وجودة الخدمات المرافقة الأخرى. لمعرفة الأسباب الجوهرية تمت الدراسة على مستوى جامعات الشرق من خلال المعاينة المنتظمة.

المطلوب:

حدد جميع العينات المنتظمة التي حجم كل منها 6 وحدات و التي يمكن إختيارها من مجتمع يتكون من 24 جامعة.

التمرين الرابع:

إذا كانت أوزان العلب من إنتاج معين تخضع للتوزيع الطبيعي بوسط قدره 200 غرام وإنحراف معياري يساوي 18 غرام، سحبنا عينة بسيطة حجمها 25 علبة من الإنتاج الإجمالي .

المطلوب:

1- أحسب الوسط الحسابي لوسط هذه العينة؟

2- أحسب الإنحراف المعياري لوسط هذه العينة؟

3- ما إحتمال أن يكون الوسط الحسابي لأوزان هذه العينة أكبر من 190 غرام؟

التمرين الخامس:

إذا كان عدد الطلبة في إحدى الكليات الجزائرية هو 1000 طالب، حيث أعطى قياس أطوال الطلبة في هذه الكلية النتائج التالية: متوسط قدره 170 سم وإنحراف معياري 15 سم. سحبنا عينة عشوائية بسيطة حجمها 60 طالب.

المطلوب:

1- أحسب المتوسط الحسابي لوسط هذه العينة؟

2- أحسب الإنحراف المعياري لوسط هذه العينة؟

3- ما إحتمال أن يكون متوسط أطوال الطلبة في هذه العينة يتراوح ما بين 168 سم و 172 سم؟

التمرين السادس:

إذا كان إحتمال رسوب الطالب في مقياس الإحصاء هو 0.5. سحبنا عينة عشوائية بسيطة حجمها 81 طالب.

المطلوب:

1- أوجد الوسط الحسابي للنسبة في العينة f ؟

2- أوجد الإنحراف المعياري للنسبة في العينة f ؟

3- ما إحتمال أن تكون نسبة الراسبين في هذه العينة تساوي 0.6 على الأقل ؟

حل التمرين الأول:

1- حساب المتوسط الحسابي للمجتمع:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N} = \frac{16+18+32+54}{4} = 30$$

$$\mu = 30$$

- تباين المجتمع:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2}{N} = \frac{(16-30)^2 + (18-30)^2 + (32-30)^2 + (54-30)^2}{4} = 230$$

$$\sigma^2 = 230$$

- الحالة الأولى: حالة السحب مع الإرجاع

2- حساب الوسط الحسابي لوسط العينة العشوائية البسيطة مع الإعادة (ESAR):

عدد العينات الممكن تشكيلها هو: 16 عينة.

$$N^2 = 4^2 = 16$$

رقم العينة	العينة	وسط العينة $(\bar{X})$
1	(16،16)	16
2	(16،18)	17
3	(16،32)	24
4	(16،54)	35
5	(18،16)	17
6	(18،18)	18
7	(18،32)	25
8	(18،54)	36
9	(32،16)	24
10	(32،18)	25
11	(32،32)	32
12	(32،54)	43
13	(54،16)	35
14	(54،18)	36
15	(54،32)	43
16	(54،54)	54
المجموع	-	480

$$E(\bar{X}) = \mu_{\bar{X}} = \frac{\sum \bar{X}}{\text{عدد العينات}} = \frac{\sum \bar{X}}{16} = \frac{480}{16} = 30$$

$$\boldsymbol{E(\bar{X}) = \mu_{\bar{X}} = 30}$$

- تباين الوسط الحسابي لوسط العينة العشوائية البسيطة مع الإعادة (ESAR):

$$\boldsymbol{\sigma^2_{(\bar{X})} = \frac{\sum(\bar{X}_i - \mu_{\bar{X}})^2}{\text{عدد العينات}} = \frac{\sum(\bar{X}_i - 30)^2}{16} = \frac{1840}{16} = 115}$$

$$\sigma^2_{(\bar{X})} = 115$$

- نستنتج أنه في حالة السحب مع الإرجاع فإن:

$$\mu_{\bar{X}} = \mu = 30$$

$$\sigma^2_{(\bar{X})} = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{230}{2} = 115$$

الحالة الثانية: حالة السحب دون إرجاع

- حساب الوسط الحسابي لوسط العينة العشوائية البسيطة دون الإعادة (ESSR):

عدد العينات الممكن تشكيلها في هذه الحالة هو: 6 عينات.

$$C_4^2 = 6$$

رقم العينة	العينة	وسط العينة $(\bar{X})$
1	(16،18)	17
2	(16،32)	24
3	(16،54)	35
4	(18،32)	25
5	(18،54)	36
6	(18،54)	43
المجموع	-	180

$$E(\bar{X}) = \mu_{\bar{X}} = \frac{\sum \bar{X}}{\text{عدد العينات}} = \frac{\sum \bar{X}}{6} = \frac{180}{6} = 30$$

$$E(\bar{X}) = \mu_{\bar{X}} = 30$$

- تباين الوسط الحسابي لوسط العينة العشوائية البسيطة دون إعادة (ESSR):

$$\sigma^2_{(\bar{X})} = \frac{\sum(\bar{X}_i - \mu_{\bar{X}})^2}{\text{عدد العينات}} = \frac{\sum(\bar{X}_i - 30)^2}{6} = \frac{460}{6} = 76.67$$

$$\sigma^2_{(\bar{X})} = 76.67$$

- نستنتج أنه في حالة السحب دون الإرجاع فإن:

$$\mu_{\bar{X}} = \mu = 30$$

$$\sigma^2_{(\bar{X})} = \frac{\sigma^2}{n} \times \frac{N-n}{N-1} = \frac{230}{2} \times \frac{4-2}{4-1} = 76.67$$

ج- حساب الوسط الحسابي وتباين وسط العينة الطبقية

لإيجاد العينة الطبقية لا بد من تقسيم المجتمع إلى طبقتين:

الطبقة الأولى: N_1 $\{18; 16\}$

الطبقة الثانية: N_2 $\{54; 32\}$

ومنه العينات الممكن تشكيلها بحيث كل عينة تحتوي على عنصرين (عنصر من كل طبقة) هي:

$$\Omega = \{(16; 32); (16; 54); (18; 32); (18; 54)\}$$
$$\bar{X} = \{24; 35; 25; 36\}$$

- الوسط الحسابي لوسط العينة الطبقية:

$$E(\bar{X}) = \mu_{\bar{X}} = \frac{\sum \bar{X}}{\text{عدد العينات}} = \frac{\sum \bar{X}}{4} = \frac{24 + 35 + 25 + 36}{4} = 30$$

$$E(\bar{X}) = \mu_{\bar{X}} = 30$$

- تباين وسط العينة الطبقية:

$$\sigma^2_{(\bar{X})} = \frac{\sum(\bar{X}_i - \mu_{\bar{X}})^2}{\text{عدد العينات}} = \frac{\sum(\bar{X}_i - 30)^2}{4} = \frac{36+25+25+36}{4} = 30.5$$

$$\sigma^2_{(\bar{X})} = 30.5$$

الملاحظات:

1- عدد العينات التي يمكن تشكيلها في العينة الطبقية صغير جدا هو 4 عينات؛

2- في كل الحالات:

$$E(\bar{X}) = \mu_{\bar{X}} = \mu = 30$$

3- تباين العينة الطبقية هو الأصغر حيث أن:

$$\sigma^2_{(\bar{X})}\text{(العينة الطبقية)} = 30.5 < \sigma^2_{(\bar{X})}\text{(ESSR)} = 76.67 < \sigma^2_{(\bar{X})}\text{(ASAR)} = 115$$

حل التمرين الثاني:

لدينا:

$$N = 2000\ (\text{طالب});\ \mu = 165\ cm\ ;\ \sigma = 4 \Rightarrow \sigma^2 = 16\ ;n = 190\text{(طالب)}$$

أ- حالة السحب دون إرجاع: نوع العينة (ESSR)

- الوسط الحسابي لوسط العينة:

$$\mu_{\bar{X}} = \mu = 165$$

- تباين وسط العينة:

$$\sigma^2_{(\bar{X})} = \frac{\sigma^2}{n} \times \frac{N-n}{N-1} = \frac{16}{190} \times \frac{2000-190}{2000-1} = 0.076$$

- الإنحراف المعياري لوسط العينة:

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\sigma^2_{(\bar{X})}} = \sqrt{0.076} = 0.276$$

ب- حالة السحب مع الإرجاع: نوع العينة (ESAR)

- الوسط الحسابي لوسط العينة:

$$\mu_{\bar{X}} = \mu = 165$$

- تباين وسط العينة:

$$\sigma^2_{(\bar{X})}=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{16}{190}=0.084$$

- الإنحراف المعياري لوسط العينة:

$$\sigma_{\bar{x}}=\sqrt{\sigma^2_{(\bar{X})}}=\sqrt{0.084}=0.29$$

حل التمرين الثالث:

تحديد جميع العينات المنتظمة:

- أولا نحسب r حيث:

$$r=\frac{N}{n}=\frac{24}{6}=4$$

- نقسم المجتمع N إلى مجموعات متساوية عددها 6 مجموعات و حجم كل منها 4 حيث ترقم كالتالي:

المجموعة الأولى: من 1 إلى غاية 4؛

المجموعة الثانية: من 5 إلى غاية 8؛

المجموعة الثالثة: من 9 إلى غاية 12؛

....

المجموعة السادسة: من 21 إلى غاية 24؛

- نختار العنصر الأول من المجموعة الأولى (1- 4) عشوائيا و ليكن b=1 وبالتالي سوف تتحدد جميع مفردات العينة المنتظمة الأولى كما يلي:

العنصر الأول: b=1

العنصر الثاني: b+r=1+4=5

العنصر الثالث: b+2r=1+2(4)=9

العنصر الرابع: b+3r=1+3(4)=13

العنصر الخامس: $b+4r=1+4(4)=17$

العنصر السادس: $b+5r=1+5(4)=21$

و الجدول الموالي يوضح جميع العينات المنتظمة التي يمكن إختيارها:

مفردات العينة	العينة الأولى	العينة الثانية	العينة الثالثة	العينة الرابعة
العنصر الأول	1	2	3	4
العنصر الثاني	5	6	7	8
العنصر الثالث	9	10	11	12
العنصر الرابع	13	14	15	16
العنصر الخامس	17	18	19	20
العنصر السادس	21	22	23	24

حل التمرين الرابع:

لدينا:

$$\mu = 200 \text{ غ} \ ; \ \sigma = 18 \text{ غ} \ ; n = 25 (\text{علبة})$$

1-الوسط الحسابي لوسط العينة

$$\mu_{\bar{X}} = \mu = 200$$

2-الإنحراف المعياري لوسط العينة

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{18}{\sqrt{25}} = 3.6$$

3- بما أن المجتمع طبيعي فإن:

$$\bar{\mathbf{x}} \rightarrow \boldsymbol{N}(\mu_{\bar{X}}; \sigma^2_{(\bar{X})})$$

$$\bar{\mathbf{x}} \rightarrow \boldsymbol{N}(200; 3.6)$$

$$P(\bar{x} > 190) = 1 - P(\bar{x} \leq 190) = 1 - P\left(Z \leq \frac{190 - 200}{3.6}\right) = 1 - P(Z \leq -2.78)$$

$$= 1 - 1 + \Phi(2.78) = 0.9973$$

حل التمرين الخامس:

لدينا:

$$N = 1000;\ \mu = 170\ ;\ \sigma = 15\ ;n = 60$$

1-الوسط الحسابي لوسط العينة

$$\mu_{\bar{X}} = \mu = 170$$

2-الإنحراف المعياري لوسط العينة

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{15}{\sqrt{60}} \times \sqrt{\frac{1000-60}{1000-1}} = 1.87$$

3- بما أن n=60>30 فإن:

$$\bar{\mathbf{x}} \rightarrow \boldsymbol{N}(\mu_{\bar{X}}; \sigma^2{}_{(\bar{X})})$$

$$\bar{\mathbf{x}} \rightarrow \boldsymbol{N}(170; 1.87)$$

$$\begin{aligned} P(168 \leq \bar{x} \leq 172) &= P(\bar{x} \leq 172) - P(\bar{x} < 168) \\ &= P\left(Z \leq \frac{172-170}{1.87}\right) - P\left(Z < \frac{168-170}{1.87}\right) \\ &= P(Z \leq 1.07) - P(Z < -1.07) = \Phi(1.07) - 1 + \Phi(1.07) \\ &= 2\Phi(1.07) - 1 = 2(0.8577) - 1 = 0.7154 \end{aligned}$$

حل التمرين السادس:

لدينا:

$$P = 0.5;\ n = 81$$

1- الوسط الحسابي للنسبة في العينة f:

$$\mu_f = P = 0.5$$

2- تباين النسبة في العينة f:

$$\sigma^2{}_{(\bar{X})} = \frac{P \times q}{n} = \frac{0.5 \times 0.5}{81} = 0.003$$

3- بما أن n=81>30 فإن:

$$f \to N(\mu_f; \sigma^2{}_f)$$

$$f \to N(0.5; 0.003)$$

$$P(f \geq 0.6) = 1 - P(f < 0.6) = 1 - P\left(Z \leq \frac{0.6 - 0.5}{0.055}\right) = 1 - P(Z \leq 1.82)$$
$$= 1 - \Phi(1.82) = 1 - 0.9656 = 0.0344$$

المحور الثالث:

نظرية التقدير

تمهـــيد:

واحدة من الأهداف الأساسية للإحصاء الإستدلالي هي الحصول على معلومات عن المجتمع إنطلاقا من معلومات عينة مأخوذة من هذا المجتمع، أي تقدير معالم المجتمع التي غالبا ما تكون مجهولة بإستخدام إحصائيات العينة، وذلك راجع لإستحالة إجراء الدراسة على المجتمع ككل بسبب حجمه الكبير، التكلفة، ضعف الإمكانيات المادية، ضيق الوقت...، فقد يكون المطلوب مثلا تقدير متوسط دخل الدولة، متوسط عمر منتوج معين...

إن دراسة العينات وتوزيعاتها عن طريق إحصاءاتها المحددة يهدف إلى الإستدلال على المعالم المناظرة لها في المجتمع، إلا أن تلك القيم التي يتم الحصول عليها عن طريق المعاينة لا تعكس بالضرورة القيم الحقيقية المناظرة لها فيه، مما يدفع الباحث إلى تقدير تلك المعالم أو المجالات التي تقع ضمنها بدرجة ثقة معينة، ولهذا سنحاول من خلال هذا الفصل شروط التقدير الجيد وأنواع التقدير وبعض نظرياته من خلال التطرق إلى:

- **أولا: مفاهيم ومصطلحات؛**
- **ثانيا: مجال الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع μ؛**
- **ثالثا: مجال الثقة للنسبة في المجتمع P؛**
- **رابعا: مجال الثقة لتباين المجتمع σ^2؛**
- **خامسا: خطأ المعاينة في التقدير وتحديد حجم العينة اللازم لعدم تجاوز خطأ معين؛**
- **سادسا: سلسلة تمارين محلولة؛**

أولا: مفاهيم ومصطلحات

1- التقدير: هو عملية إستنتاج معلمة المجتمع من الإحصائية المناظرة لها في العينة[1]، أي أننا نقوم بـ:

- تقدير المتوسط الحسابي للمجتمع μ إنطلاقا من المتوسط الحسابي للعينة $\overline{X}$ ؛
- تقدير الإنحراف المعياري للمجتمع σ إنطلاقا من الإنحراف المعياري للعينة S ؛
- تقدير النسبة P في المجتمع إنطلاقا من النسبة في العينة f.
- **المُقَدر**: هي إحصائية العينة المستخدمة في تقدير معلمة المجتمع؛
- **التقدير الجيد:** هو ذلك التقدير الأقرب من غيره إلى معلمة المجتمع؛
- **التقدير المنحاز**:إذا إبتعدت قيمة إحصائية العينة المقدرة على معلمة المجتمع نقول بأن التقدير متحيز.

2- خصائص المُقَدر الجيد:

غالبا ما نجد أكثر من مقدّر يمكن استخدام قيمته كتقدير لمعلمة المجتمع المجهولة، لذلك نحتاج إلى معايير يمكن الاستعانة بها لاختيار المقدر الذي يعتبر أفضل من غيره لتقدير لمعلمة المجتمع. والتي تتلخص في ثلاث معايير أساسية هي[2]:

أ- معيار عدم التحيز Unbiased :

نقول عن **المقدر $\hat{\theta}$ (إحصائية ما)** أنه **مُقدر غير متحيز لمعلمة المجتمع θ** إذا كان التوقع الرياضي للمقدر يساوي القيمة الحقيقية للمعلمة المجهولة التي يتم تقديرها، أي أن المقدر يمثل المعلمة تمثيلا صحيحا؛ ونعبر عنه رياضيا كما يلي:

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

أما إذا كان التوقع الرياضي للمقدر يختلف عن القيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع المجهول فإننا نقول أنه تقدير متحيز أي أنه لا يمثل المقدار θ تمثيلا صحيحا؛ ونعبر عنه رياضيا كما يلي:

$$E(\hat{\theta}) \neq \theta$$

---

[1]- محمد صبحي أبو صلاح، مرجع سابق، ص ص 290-290.

[2]- راجع: - علي أحمد السقاف، **الإحصاء الوصفي و الإستدلالي**، إصدار المركز الديمقراطي العربي، برلين، ألمانيا، الطبعة الأولى، 2020، ص 116.
- محمد صبحي أبو صالح، مرجع سابق، ص ص 294-296.
-سالم عيسى بدر وعماد غصاب عبابنة، مرجع سابق، ص ص 276-280.

حيث يُعبر عن مقدار التحيز b بالصيغة التالية: $E(\hat{\theta}) - \theta = b$ ، أما في حالة المقدر الغير متحيز فإن مقدار التحيز يساوي 0.

بالرجوع إلى نظرية المعاينة (الفصل الثاني) أثبتنا أن: الوسط الحسابي لتوزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينة $\overline{X}$ يساوي الوسط الحسابي للمجتمع μ أي أن: $\mathbf{E(\overline{X}) = \mu}$، **و بالتالي فإن الإحصائية** $\overline{X}$ مقدر غير متحيز للمعلمة μ.

بينما أثبتنا في نظرية المعاينة أن تباين العينة S^2 هو مقدر متحيز لتباين المجتمع σ^2 لأن:

$$E(S^2) \neq \sigma^2$$

$$E(S^2) = \frac{(n-1)}{n}\sigma^2$$

عكس تباين العينة المعدل $\acute{S}^2$ الذي يعتبر مقدر غير متحيز لـ σ^2 لأن:

$$\mathbf{E}(\acute{S}^2) = \sigma^2$$

ب- معيار التقارب أو التماسك Consistency:

لنفرض أنه حصلنا على الشرط الأول وهو عدم التحيز، ونعلم أن التقدير يتأثر بحجم العينة، فكلما كبر حجم العينة كلما حصلنا على تقدير أفضل للمعلمة المجهولة، وبذلك نكون أمام الشرط الثاني المتمثل في التقارب والذي نعرفه كما يلي:

نقول عن التقدير (المقدر) $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ أنه متقارب إذا كانت قيمته تؤول إلى قيمة المعلمة $\boldsymbol{\theta}$ كلما زاد حجم العينة، أي أنّ تباينه يؤول إلى الصفر عندما تؤول n إلى مالا نهاية أو إلى حجم المجتمع N ، أي:

$$V(\hat{\theta}) \xrightarrow[n\to\infty(N)]{} 0$$

مثال:

نفرض أن x متغير عشوائي حيث:

$$E(x)=\mu \ ; \ V(x) = \sigma^2$$

يكون $\bar{x}$ مقدر مقارب لـ μ أو متماسك إذا كان:

$$\bar{x} \xrightarrow[n\to\infty(N)]{} \mu$$

أي:

$$V(\bar{x}) \xrightarrow[n\to\infty(N)]{} 0$$

لدينا:

$$V(\bar{x}) = V(\frac{\sum X_i}{n}) = \frac{1}{n^2} . n.V(x)$$

ونعلم أن:

$$V(x)=\sigma^2$$

وعليه تصبح العلاقة (2) كما يلي:

$$V(\bar{x})= \frac{1}{n^2} . n. \sigma^2 = \frac{\sigma 2}{n}$$

ومن جهة أخرى نلاحظ أن المقدار $\frac{\sigma 2}{n}$ يؤول فعلا إلى الصفر عندما يؤول n إلى ∞ (N) ومنه يمكن القول أن متوسط العينة هو مقدر مقارب لـ وسط المجتمع μ أي أنه متماسك.

ج- معيار الفعالية أو الكفاءة Efficiency:

لا بد من معيار ثالث لإختيار أفضل تقدير إذا توفرت عدة مقدرات غير متحيزة، فيجب إختيار المقدر ذو التباين الأصغر (الأقل تشتت)، وهذا ما يسمى بالفعالية. ونعبر عن المقدر الفعال رياضيا كما يلي:

فإذا كان لدينا $\hat{\theta}_1$ و $\hat{\theta}_2$ مقدرين غير متحيزين للمعلمة المجهولة θ أي أن: $E(\hat{\theta}_1) = \theta$، و $E(\hat{\theta}_2) = \theta$، وكان تباين $\hat{\theta}_1$ أقل من تباين $\hat{\theta}_2$ أي أن: $V(\hat{\theta}_1) < V(\hat{\theta}_2$ فإن : $\hat{\theta}_1$ هو مقدر أكثر كفاءة من المقدر $\hat{\theta}_2$.

مثال:

عند تقدير وسط المجتمع μ بدلالة وسط العينة $\overline{X}$ أو الوسيط M_e ، كلا التقديرات غير متحيزان ومتماسكان، ولكن تباينهما كما يلي: $V(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n} < V(M_e) = \frac{\pi\sigma^2}{2n}$

وبالتالي فإن وسط العينة $\overline{X}$ مقدر أكثر فعالية لمتوسط المجتمع μ من الوسيط M_e.

وبالتالي فمن بين كل المقدرات غير المتحيزة فإن المقدر غير المتحيز الذي له أقل تباين ممكن يسمى أفضل المقدرات غير المتحيزة.

3- أنواع التقدير:

يتم التقدير بطريقتين هما: **التقدير النقطي والتقدير بمجال.**

أ- التقدير النقطي (Point Estimation):

هو عبارة عن تقدير المعلمة المجهولة للمجتمع بقيمة واحدة تحسب من بيانات العينة، نسمي هذه القيمة بالتقدير النقطي لهذه المعلمة، ويتم حساب هذا التقدير إعتماد على الإحصائية المقابلة لمعلمة المجتمع في العينة، والتي تسمى مقدرا نقطيا لهذه المعلمة[1]. و ذلك كما يلي:

- **التقدير النقطي للمتوسط الحسابي للمجتمع μ:** يتم **تقدير المتوسط الحسابي للمجتمع μ بواسطة متوسط العينة $\overline{X}$** ، وهو يعتبر **مقدر غير متحيز**، أي أن المتوسط الحسابي للعينة هو تقدير نقطي للوسط الحسابي للمجتمع.

مثال:

من أجل تقدير متوسط مدة حياة منتجات مؤسسة ما (مقدرة بالساعات)، قمنا بسحب عشوائيا عينة متكونة من 05 وحدات من الإنتاج الإجمالي لهذه المؤسسة، حيث كانت النتائج كالتالي: 852، 1077، 608، 920، 893.

المطلوب:

- أوجد التقدير النقطي لمتوسط حياة منتجات هذه المؤسسة.

الحل:

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} X_i}{5} = \frac{852 + 1077 + 608 + 920 + 893}{5} = 870$$

$$\hat{\mu} = \bar{x} = 870$$

القيمة 870: تمثل تقدير نقطي لمتوسط حياة منتجات هذه المؤسسة؛ μ معلمة المجتمع المجهولة؛ $\overline{X}$ مقدر نقطي.

- **التقدير النقطي للإنحراف المعياري للمجتمع σ:**

يتم تقدير الإنحراف المعياري للمجتمع σ بواسطة الإنحراف المعياري للعينة S، إلا أن هذا الأخير وثبت أنه مقدر منحاز أي أن متوسط الإنحرافات المعيارية لكل العينات الممكنة لا يعطينا الإنحراف المعياري للمجتمع أي: $E(S) \neq \sigma$

[1]- راجع: - عدنان عوض، **الإحصاء التطبيقي**، الشركة العربية المتحدة للتسويق و التوريدات، القاهرة، جمهورية مصر العربية، الطبعة 2008/10، ص 6 و ما بعدها.
- عزام عبد الرحمن صبري، **الإحصاء التطبيقي بنظام SPSS**، الدار المنهجية للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى، 2016، ص 217 و ما بعدها.

(أنظر العنصر الخاص بعدم التحيز). وعليه ثبت رياضيا أن هناك مقياس أحسن منه وهو غير منحاز ويسمى بالإنحراف المعياري للعينة المعدل Ś والذي صيغته كما يلي:

$$\acute{S} = \sqrt{\frac{\sum(X_i - \overline{X})^2}{(n-1)}}$$

وبالتالي **من أجل تقدير الإنحراف المعياري للمجتمع نستخدم الإنحراف المعياري للعينة المعدل Ś** ونكتب:

$$\hat{\sigma} = \acute{S} = \sqrt{\frac{\sum(X_i - \overline{X})^2}{(n-1)}}$$

مثال:

- أوجد التقدير النقطي للإنحراف المعياري لمنتجات المؤسسة السابقة.

الحل:

$$\hat{\sigma} = \acute{S} = \sqrt{\frac{\sum(X_i - \overline{X})^2}{(n-1)}}$$

$$\acute{S} = \sqrt{\frac{(852-870)^2+(1077-870)^2+(608-870)^2+(920-870)^2+(893-870)^2}{4}}$$

$$\hat{\sigma} = \acute{S} = 169.44$$

- التقدير النقطي للنسبة في المجتمعP:

يتم **تقدير النسبة P في المجتمع على أساس النسبة في العينة f** كما يلي:

$$\hat{P} = f = \frac{r}{n}$$

حيث أن: r هو عدد الوحدات التي تتوفر فيهم الخاصية المدروسة في العينة.

مثال:

مسؤولو الأمن في مصنع لإنتاج الطلاء يرغبون في معرفة نسبة العاملين المدخنين في المصنع. لهذه الغاية تم سحب عينة عشوائية حجمها 20 عامل ووجد فيها 13 مدخن.

المطلوب:

- أوجد التقدير النقطي لنسبة العاملين المدخنين في هذا المصنع؟

الحل:

لدينا: عامل n = 20 ، r = 13 عامل مدخن وبالتالي فإن:

$$\hat{P} = f = \frac{13}{20} = 0.65$$

إذن: نسبة العاملين المدخنين في هذا المصنع هي 65% مدخن.

ملاحظة:

إن عملية التقدير يشوبها دائما هامش من الخطأ مهما كانت العينة ممثلة للمجتمع، كما أن التقدير النقطي ذو مخاطر كبيرة عند إتخاذ القرار لأنها قيمة واحدة لا تترك المجال كبير للتعرف على هامش الخطأ المحتمل إرتكابه، وعليه نلجأ إلى التقدير عن طريق مجال والذي يعتبر أكثر واقعية، كما أن هذا المجال يعطينا مقدار كبير من الثقة بأن القيمة الحقيقية لـ μ أو σ أو P موجودة داخل هذا المجال.

ب- التقدير بمجال: Interval Estimation (IC)

وفق هذه الطريقة يتم بناء مجال عشوائي $[LI, LS]$ الذي يضم معلمة المجتمع المجهولة (θ) بإحتمال معين، هذا الإحتمال نرمز له بالرمز ($1-\alpha$) ويسمى بمستوى الثقة أو درجة الثقة. الإحتمال المعاكس α يقيس خطأ المجال بمعنى إحتمال أن المجال العشوائي لا يضم القيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع المجهولة (θ)، ويسمى α بدرجة أو هامش المخاطرة (ويسمى أيضا مستوى الدلالة أو إحتمال الخطأ). بشكل عام يمكن إعطاء العلاقة لمجال الثقة بالشكل التالي[1]:

$$P(\theta \in [LI, LS]) = P[LI \leq \theta \leq LS] = 1 - \alpha$$

حيث أن:

-θ: معلمة المجتمع المجهول (قد يكون الوسط الحسابي للمجتمع μ، تباين المجتمع σ^2 ، أو النسبة في المجتمع P)؛

-LI: الحد الأدنى أو القيمة الدنيا لمجال الثقة؛

-LS: الحد الأعلى أو القيمة القصوى لمجال الثقة؛

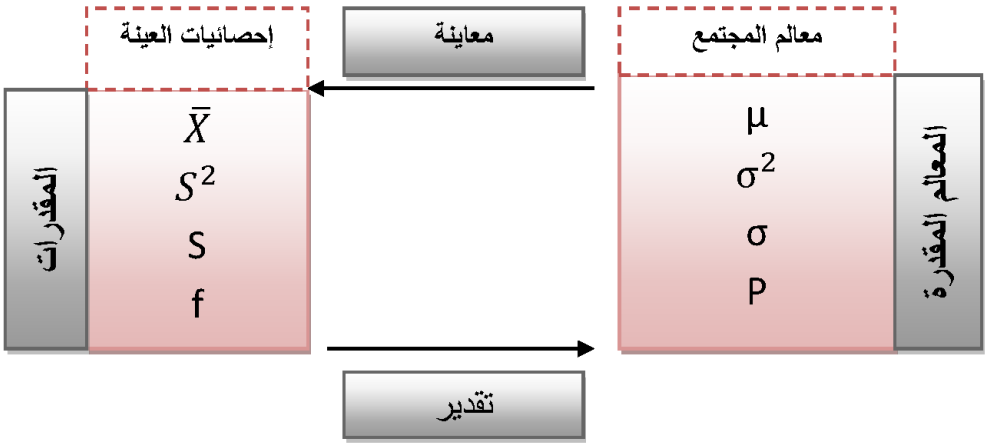
-$(1-\alpha)$: مستوى ثقة المجال (ويسمى درجة الثقة، معامل الثقة)؛

[1]-

-α: احتمال الخطأ أو مستوى المعنوية أو درجة المخاطرة والذي يعبر عن احتمال عدم احتواء مجال الثقة على القيمة الحقيقية لـ θ والتي عادة ما تكون من اختيار الباحث حسب درجة الدقة التي يبحث عنها.

ملاحظة:

إن مستويات الثقة الأكثر إستعمالا في بناء مجال الثقة هي: 90%، 95%، 99%. تقابلها قيم α على التوالي: 10%، 5%، 1%.



ثانيا: مجال الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع μ

توصلنا من خلال نظرية المعاينة أن : $E(\bar{x}) = \mu_{\bar{x}} = \mu$ ، وهذا يعني أن $\bar{X}$ مقدر غير متحيز للمقدار μ، وبالتالي من أجل تقدير متوسط المجتمع μ نستخدم متوسط العينة $\bar{X}$ ، فإذا فرضنا مجتمع وسطه μ وإنحرافه المعياري σ ونرغب في معرفة القيمة المجهولة لوسط المجتمع μ نسحب من هذا المجتمع عينة حجمها n وفي هذه الحالة في تقدير وسط المجتمع μ نميز بين حالتين:

1-حالة العينات الكبيرة $n \geq 30$

في هذه الحالة فإن متوسط العينة $\bar{X}$ يتبع القانون الطبيعي سواء كان المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي أو المجتمع يتوزع غير التوزيع الطبيعي ونكتب:

$$\bar{x} \rightarrow N(\mu_{\bar{X}}, \sigma^2_{\bar{X}})$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} \rightarrow N(0.1)$$

على أن تكون $\sigma_{\bar{X}}$ (كما رأينا سابقا) حسب حالة السحب مع الإرجاع أو دون إرجاع كما يلي:

-حالة السحب مع الإرجاع:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}(\sqrt{n})}{\sigma}$$

-حالة السحب دون الإرجاع:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \quad \Rightarrow Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}$$

لإيجاد مجال الثقة لـ μ الذي يحقق:

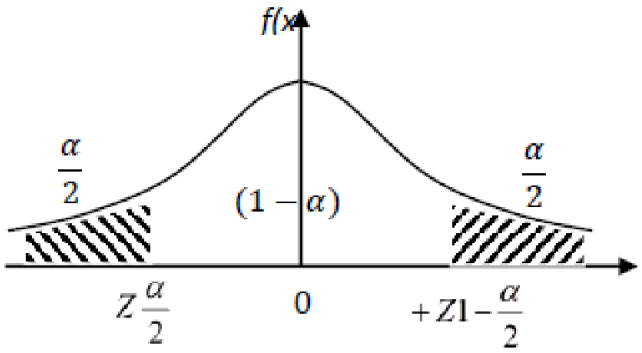
$$P(LI \leq \mu \leq LS) = 1 - \alpha$$

ينبغي تحديد حدود المجال إنطلاقا من حصر Z بين قيمتين حيث:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}}$$

لأن $\mu_{\bar{X}} = \mu$ في كل الحالات. و يمكن توضيح ذلك بيانيا كما يلي:

الشكل رقم (1): تمثيل بياني لكيفية حصر Z بين قيمتين



المصدر: من إعداد الباحثة

من الشكل أعلاه نجد أن:

$$P(Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

وبما أن التوزيع الطبيعي متناظر حول القيمة المتوسطة 0 فإن : $Z_{\frac{\alpha}{2}} = -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

ومنه يصبح مجال الثقة كما يلي:

$$P(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

$$P(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}} \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

بضرب الأطراف الثلاثة في $\sigma_{\bar{X}}$ نجد:

$$P(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\,\sigma_{\bar{X}} \leq \bar{X} - \mu \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\,\sigma_{\bar{X}}) = 1 - \alpha$$

بطرح $\bar{X}$ من الأطراف الثلاثة نجد:

$$P(-\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\bar{X}} \leq -\mu \leq -\bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\bar{X}}) = 1 - \alpha$$

نضرب الأطراف الثلاثة في (-1) نجد:

$$P(\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\bar{X}} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\bar{X}}) = 1 - \alpha$$

ومنه مجال الثقة لـ μ يُكتب كما يلي:

$$\mu \in \left[\bar{X} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\bar{X}}\right] = 1-\alpha$$

وبما أن $\sigma_{\bar{X}}$ تتحدد حسب السحب بالإرجاع أو السحب دون إرجاع يصبح مجال الثقة كما يلي:

- حالة السحب بالإرجاع:

$$\mu \in \left[\bar{X} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$$

- حالة السحب دون إرجاع:

$$\mu \in \left[\bar{X} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right] = 1-\alpha$$

ملاحظة:

إذا كان الإنحراف المعياري للمجتمع σ مجهول فإننا نستبدل في المجال السابق الإنحراف المعياري للمجتمع σ بالإنحراف المعياري للعينة S حيث:

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{S}{\sqrt{n-1}}$$

ومنه فإن مجال الثقة للوسط الحسابي للمجتمع μ في حالة الإنحراف المعياري للمجتمع σ مجهول يصبح كما يلي:

- حالة السحب بالإرجاع:

$$\mu \in \left[\bar{X} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n-1}}\right] = 1-\alpha$$

- حالة السحب دون إرجاع:

$$\mu \in \left[\bar{X} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n-1}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right] = 1-\alpha$$

مثال:

في دراسة حول أطوال الطلبة في كلية العلوم الاقتصادية وعلوم التسيير، أخذنا عينة عشوائية حجمها 49 طالب من هذه الكلية، ووجد أن متوسط القامات بهذه العينة يساوي 172 سم.

المطلوب:

1- أوجد التقدير النقطي لمتوسط أطوال الطلبة لهذه الكلية؟

2- أوجد تقدير بمجال لمتوسط أطوال قامة الطلبة لهذه الكلية عند مستوى ثقة يساوي 95% وذلك في الحالتين:

- إذا علمنا أن الإنحراف المعياري للمجتمع يساوي 14 سم؛
- إذا علمنا أن الإنحراف المعياري للعينة يساوي 7 سم.

الحل:

n=49 ; $\bar{X} = 172\ cm$; (1-α)% = 95% ⇒ α = 5% ; μ= ?

1-التقدير النقطي لمتوسط أطوال قامة الطلبة في الكلية:

$\hat{\mu} = \bar{X} = 172$ سم

2-التقدير بمجال لمتوسط المجتمع μ عند مستوى ثقة يساوي 95%

أ- الإنحراف المعياري للمجتمع σ = 14 سم

بما أن n=49> 30 فإن $\bar{X}$ يخضع للقانون الطبيعي ومنه مجال الثقة لمتوسط أطوال قامة الطلبة للكلية يُكتب كما يلي:

$$\mu \in \left[\bar{X} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$$

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{14}{\sqrt{49}} = \frac{14}{7} = 2$$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0.05}{2}} = Z_{0.975} = 1.96$$

$$\mu \in [172 - 1.96\times 2; 172 + 1.96\times 2\ ] = 0.95$$

$$\mu \in [168.08; 175.92\ ] = 0.95$$

نحن متأكدون بنسبة 95% أن متوسط أطوال قامة الطلبة في الكلية يتراوح ما بين 168.08 و 175.92 سم.

ب- الإنحراف المعياري للعينة S=7 cm

بما أن الإنحراف المعياري للمجتمع σ مجهولا فإن : $\sigma_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{n-1}}$ و بالتالي فإن مجال الثقة لـ μ في هذه الحالة يكتب كما يلي:

$$\mu \in \left[\bar{X} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n-1}}\right] = 1-\alpha$$

$$\frac{S}{\sqrt{n-1}} = \frac{7}{\sqrt{48}} = 1.01$$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0.05}{2}} = Z_{0.975} = 1.96$$

$$P(172 - 1.96\times 1.01 \leq \mu \leq 172 + 1.96\times 1.01) = 0.95$$

$$P(170.02 \leq \mu \leq 173.97) = 0.95$$

2- حالة العينات الصغيرة $n < 30$

في هذه الحالة إذا كان المجتمع الأصلي يخضع للقانون الطبيعي بمتوسط μ مجهول وإنحراف معياري σ مجهول، ونرغب في تقدير متوسط المجتمع μ بدلالة وسط العينة $\bar{X}$ فإننا في هذه الحالة لا نستطيع إستخدام المتغير المعياري Z بل نستخدم بدلا منه المتغير t أي قانون ستيودنت حيث أن:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} \rightarrow T_{n-1}$$

حيث أن: T_{n-1} يمثل قانون ستيودنت بدرجة حرية n-1.

لا يوجود إختلاف في تقدير متوسط المجتمع μ في حالة العينة الصغيرة عنه في حالة العينة الكبيرة إلا في إستبدال المتغير Z بالمتغير t_{n-1} ومنه فإن مجال الثقة في هذه الحالة يكون كما يلي:

$$P(-t_{(n-1);1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X}-\mu_{\bar{X}}}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} \leq t_{(n-1);1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

بإتباع نفس الخطوات السابقة نحصل على مجال الثقة لـ μ عن مستوى الثقة $1-\alpha$ و ذلك كما يلي:

$$P(\bar{X} - t_{(n-1);1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n-1}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{(n-1);1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n-1}}) = 1 - \alpha$$

يمكن كتابة هذا المجال على الشكل التالي:

$$\mu \in \left[\bar{X} \pm t_{(n-1);1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n-1}}\right]$$

أي أن **الحد الأدنى للمجال** هو:

$$LI = \bar{X} - t_{(n-1);1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n-1}}$$

الحد **الأعلى للمجال** هو:

$$LS = \bar{X} + t_{(n-1);1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n-1}}$$

حيث أن:

$t_{(n-1);1-\frac{\alpha}{2}}$: هي القيمة الجدولية لقانون ستيودنت أي يتم إستخراجها من جدول ستيودنت عند درجة حرية n-1؛

S : الإنحراف المعياري للعينة ويُعطى بالعلاقة التالية:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n}}$$

ملاحظة: مجال الثقة السابق في حالة $n< 30$ يُطبق عندما يكون المجتمع طبيعي وعندما لا يكون طبيعي نقول مباشرة لا يمكن حسابه.

مثال:

أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي مكون من 10 سلع معبأة ينتجها أحد الخواص وكانت أوزانها بالكيلوغرام كما يلي:

8، 12، 10، 13، 8، 7، 11، 12، 9، 10

المطلوب:

1- أوجد التقدير النقطي لمتوسط وزن السلعة من إنتاج المصنع؟

2- أوجد تقدير بمجال ثقة لمتوسط وزن السلعة من إنتاج المصنع عن مستوى الدلالة $\alpha = 5\%$؟

الحل:

1- التقدير النقطي لمتوسط وزن السلعة من إنتاج المصنع

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{8+12+10+13+8+7+11+12+9+10}{10}$$

$$= \frac{100}{10} = 10 \text{كغ}$$

$$\hat{\mu} = \bar{X} = 10 \text{كغ}$$

2- التقدير بمجال لمتوسط وزن السلعة من إنتاج المصنع عند مستوى الدلالة 5 %:

بما أن $n = 10 < 30$ والمجتمع طبيعي والإنحراف المعياري للمجتمع σ مجهول فإنه في هذه الحالة نستخدم قانون ستيودنت عند درجة حرية n-1 أي درجة الحرية 9 وبالتالي فإن مجال الثقة يكون كما يلي:

$$\mu \in \left[\bar{X} \pm t_{(n-1);1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n-1}}\right]$$

حساب الإنحراف المعياري للعينة S:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n}} = \sqrt{\frac{(8-10)^2+(12-10)^2+(10-10)^2....+(10-10)^2}{10}}$$

$$S = \sqrt{\frac{36}{10}} = 1.8973$$

$$\frac{S}{\sqrt{n-1}} = \frac{1.8973}{\sqrt{9}} = 0.6324$$

$$t_{(n-1);1-\frac{\alpha}{2}} = t_{(10-1);1-\frac{0,05}{2}} = t_{9;0,975} = 2,262$$

$$\mu \in [10 - 2,262\times0,6324; 10 + 2,262\times0,6324]$$

$$\mu \in [8.5695; 11.4304]$$

نحن متأكدون بنسبة 95% (1-α) أن متوسط وزن السلعة من إنتاج المصنع يتراوح ما بين 8.5695 و11.4304 كغ، عندنا هامش أن لا يكون متوسط وزن السلعة من إنتاج المصنع يتراوح ما بين 8.5695 و11.4304 كغ هو0.5%.

ثالثا: مجال الثقة للنسبة في المجتمع P

يتم **تقدير النسبة في المجتمع P من خلال الإحصائية f (النسبة في العينة)** ونعلم أنه **في حالة العينة الكبيرة $n \geq 30$ فإن النسبة في العينة f تتبع التوزيع الطبيعي المعياري** أي أن:

$$f \rightarrow N(0.1)$$

ومنهما نصل إلى النظرية التالية:

$$Z = \frac{f-P}{\sigma_f} = \frac{f-P}{\sqrt{\frac{Pq}{n}}} \rightarrow N(0.1)$$

ومنه مجال الثقة للنسبة P في المجتمع يُعطى بالعلاقة التالية:

$$P(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{f-P}{\sqrt{\frac{Pq}{n}}} \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$$

بإتباع نفس الخطوات السابقة نحصل على مجال الثقة كما يلي:

$$P(f - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{Pq}{n}} \leq P \leq f + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{Pq}{n}}) = 1-\alpha$$

بما أن : q = (1-P) يصبح المجال كما يلي:

$$P(f - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} \leq P \leq f + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}) = 1-\alpha$$

نلاحظ في العلاقة السابقة أن σ_f تساوي: $\sigma_f = \sqrt{\frac{Pq}{n}} = \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$

σ_f يرتبط بالنسبة P في المجتمع والذي هو مجهول ولإزالة الإشكال نستخدم f كتقدير لـ P وبالتالي نحصل على $\hat{\sigma}_f$ كما يلي:

$$\hat{\sigma}_f = \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}$$

بالتالي يصبح مجال الثقة لـ P كما يلي:

$$P(f - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \leq P \leq f + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}) = 1-\alpha$$

كما يمكن كتابته على الشكل التالي:

$$P\epsilon(f \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}) = 1-\alpha$$

مثال:

بغرض تقدير نسبة الأفراد الذين يفضلون مطالعة جريدة ما في بلد ما، أجريت دراسة إحصائية على عينة حجمها 1000 فرد، من خلال هذه الدراسة تبين أن 300 فرد من أفراد هذه العينة يفضلون مطالعة هذه الجريدة.

المطلوب:

1- أوجد التقدير النقطي لنسبة الأفراد الذي يفضلون مطالعة هذه الجريدة في هذا البلد؟

2- أوجد تقدير بمجال ثقة لنسبة الأفراد الذي يفضلون مطالعة هذه الجريدة في هذا البلد عن مستوى الدلالة α = 1%؟ وإشرح النتيجة.

الحل:

لدينا: $n= 1000 \quad ; r = 300$

1-التقدير النقطي لنسبة الأفراد الذي يفضلون مطالعة هذه الجريدة في هذا البلد:

$$\hat{P} = f = \frac{r}{n} = \frac{\text{عدد الأفراد الذين يفضلون مطالعة الجريدة في العينة}}{\text{العدد الإجمالي للعينة}} = \frac{300}{1000} = 0.3 = 30\%$$

$$\hat{P} = f = 0.3 = 30\%$$

2-التقدير بمجال ثقة لنسبة الأفراد الذي يفضلون مطالعة هذه الجريدة في هذا البلد:

بما أن $n = 1000 > 30$ فإن مجال الثقة لـ P يكتب كما يلي:

$$P(f - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \leq P \leq f + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}) = 1 - \alpha$$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0.01}{2}} = Z_{0.995} = 2.5758$$

$$P(0.3 - 2.5758\sqrt{\frac{0.3(1-0.3)}{1000}} \leq P \leq 0.3 + 2.5758\sqrt{\frac{0.3(1-0.3)}{1000}}) = 0.99$$

$$P(0.2626 \leq P \leq 0.3373) = 0.99$$

نحن متأكدون بنسبة 99% أن نسبة الأفراد الذين يفضلون مطالعة الجريدة في هذا البلد تتراوح ما بين 26.26% و73.33%.

رابعا: مجال الثقة لتباين المجتمع σ^2

كما هو معلوم فإن للتباين أهمية كبيرة، حيث أنه يحدد لنا مجال انتشار البيانات حول وسطها الحسابي. ولا يخفى أن هذه المعلومة الإحصائية تحدد لنا طبيعة التوزيع الإحصائي. أما في الحياة العملية، فإنه يحدد لنا خصوصا مدى جودة المخرجات من حيث تشابهها ودرجة الاختلافات الموجودة بينها؛

لتحديد فترة ثقة لتباين مجتمع أو الإنحراف المعياري للمجتمع، رأينا سابقا في توزيعات المعاينة للتباينات أنه إذا كان لدينا عينات عشوائية حجمها n عنصر من مجتمع طبيعي($N(\mu_x;{\sigma_x}^2$ تباينه ${\sigma_x}^2$ معلوم، تحصلنا على توزيع المعاينة لتباين العينة S^2 وتباين العينة المعدل $\acute{S}^2$ على الشكل التالي:

$$X^2 = \frac{nS^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)\acute{S}^2}{\sigma^2} \rightarrow X^2_{(n-1)}$$

فالمقدار $\frac{nS^2}{\sigma^2}$ هو متغير عشوائي يتبع توزيع كاي مربع بدرجة حرية (n-1)، وعليه فإن مجال الثقة لتباين المجتمع ${\sigma_x}^2$ عند مستوى ثقة (1-α) يُعطى بالعلاقة التالية:

$$P\left(\frac{nS^2}{X^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}} \leq \sigma^2 \leq \frac{nS^2}{X^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}}\right) = 1-\alpha$$

$$IC(\sigma^2)_{(1-\alpha)\%} = \left[\frac{nS^2}{X^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}}; \frac{nS^2}{X^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}}\right]$$

أو يُكتب بالعلاقة التالية:

$$P\left(\frac{(n-1)\acute{S}^2}{X^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)\acute{S}^2}{X^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}}\right) = 1-\alpha$$

$$IC(\sigma^2)_{(1-\alpha)\%} = \left[\frac{(n-1)\acute{S}^2}{X^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}}; \frac{(n-1)\acute{S}^2}{X^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}}\right]$$

حيث أن:

- S^2: تباين العينة ويُحسب بالعلاقة التالية: $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}$
- $\acute{S}^2$: تباين العينة المعدل و يُحسب بالعلاقة التالية: $\acute{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$
- $X^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$ و $X^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}$: هي قيم X^2 الموافقة للإحتمالين $(1-\frac{\alpha}{2})$ و $(\frac{\alpha}{2})$ على الترتيب بدرجة حرية n-1

ملاحظة هامة:

- $X^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \neq X^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}$ لأن توزيع كاي مربع غير متناضر؛

- يمكن إستنتاج **مجال الثقة حول الإنحراف المعياري الحقيقي للمجتمع** من خلال جذر طرفي مجال الثقة حول التباين أي أن:

$$IC(\sigma)_{(1-\alpha)\%} = \left[\sqrt{\frac{nS^2}{X^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}}}; \sqrt{\frac{nS^2}{X^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}}}\right]$$

مثال:

سحبنا عينة عشوائية من علب منتج معين فكانت أوزانها كالتالي: 490، 530، 490، 495، 500، 525.

المطلوب:

1- قدر مجاليا التباين الحقيقي لأوزان العلب في المجتمع عند مستوى ثقة 90%.

2- إستنتج مجال الثقة حول الإنحراف المعياري.

الحل:

1- التقدير المجالي لتباين المجتمع:

$$P\left(\frac{nS^2}{X^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}} \leq \sigma^2 \leq \frac{nS^2}{X^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}}\right) = 1-\alpha$$

إيجاد المجاهيل: S^2، $X^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$، $X^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$$

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{490+530+490+495+500+525}{6} = 505$$

$$S^2 = \frac{(490-505)^2 + (530-505)^2 + \cdots (525-505)^2}{6} = 266.67$$

$$(1-\alpha)\% = 90\% \quad \alpha\% = 10\% = 0.1$$

$$X^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} = X^2_{6-1,1-\frac{0.1}{2}} = X^2_{5,0.95} = 11.1$$

$$X^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}} = X^2_{5,0.05} = 1.15$$

$$P(\frac{6\times 266.67}{11.1} \leq \sigma^2 \leq \frac{6\times 266.67}{1.15}) = 0.9$$

$$\boldsymbol{\sigma^2 \epsilon [144.14; 1391.32]}$$

أي أن تباين أوزان العلب في المجتمع عند مستوى ثقة 90% يقع ما بين 144.14 و 1391.32.

- إستنتاج مجال الثقة حول الإنحراف المعياري للمجتمع:

لدينا:

$$\sigma^2 \epsilon [144.14; 1391.32]$$

و منه:

$$\sigma \epsilon [\sqrt{144.14}\ ;\ \sqrt{1391.32}]$$

و منه:

$$\boldsymbol{\sigma \epsilon [12; 37.30]}$$

خامسا: خطأ المعاينة في التقدير وتحديد حجم العينة اللازم لعدم تجاوز خطأ معين

يُعتبر تحديد حجم العينة الأمثل أو المناسب من الأمور الهامة عند الاستدلال الإحصائي لما يترتب عليه من إيجابيات كتوفير الوقت اللازم من جهة والتحكم في التكاليف من جهة أخرى، ضف إلى ذلك الحصول على النتائج الجيدة في وقت قصير بالنسبة للتقديرات الخاصة بمعالم المجتمع لذلك يجب التحكم في مقدار الخطأ المسموح به بين القيمة الحقيقية والتقدير، ورأينا من خلال ما سبق أنه من أجل تقدير معلمة المجتمع المجهولة θ (μ أو σ^2 أو P) بواسطة الإحصائية المقابلة لها في العينة $\hat{\theta}$ ($\overline{X}$ و S^2 و f) يترتب عليه خطأ يدعى خطأ المعاينة وسببه إجراء الدراسة الإحصائية على عينة بدلا من أن تكون شاملة. لكن في بعض الحالات لا تحدد قيمة n ونريد أن نحددها إعتماد على مستوى الدقة المطلوب الحصول عليها، أي الحد الأقصى للخطأ في تقدير هذه المعلمة.

هذا الخطأ الأقصى الذي هو عبارة عن القيمة المطلقة للفرق بين قيمة المقدر $\hat{\theta}$ والقيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع θ ونرمز له بالرمز e ونعبر عنه رياضيا كما يلي:

$$e= |\hat{\theta} - \theta|$$

السؤال المطروح هنا: ما هو حجم العينة n الذي يسمح بإرتكاب خطأ معاينة أقصى e في تقدير θ؟ للإجابة على هذا السؤال نميز بين حالتين:

1- تحديد حجم العينة n اللازم لتقدير المتوسط الحسابي للمجتمع μ:

من خلال من سابق، وجدنا أنه عند مستوى ثقة $(1-\alpha)\%$ فإن مجال الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع μ وفي حالة ما إذا كان تباين المجتمع معلوم والمجتمع غير محدود يُكتب كما يلي:

$$IC(\mu)_{(1-\alpha)\%} = \left[\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

أي أن:

$$\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
$$-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} - \mu \leq +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

وبذلك يكون:

$$|\bar{X} - \mu| \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

أي أن خطأ المعاينة في تقدير μ بإستخدام $\bar{X}$ هو على الأكثر المقدار $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ونسمي هذا المقدار بالحد الأعلى لخطأ المعاينة في تقدير μ و نرمز له بالرمز e حيث:

$$e = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

من خلال العلاقة الرياضية لـ e يمكن حساب حجم العينة n وذلك بتربيع الطرفين كما يلي:

$$e^2 = \left(Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2$$

$$e^2 = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}{}^2\frac{\sigma^2}{n}$$

$$n = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}{}^2 \frac{\sigma^2}{e^2}$$

$$n=\left(Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{e}\right)^2$$

وهو **حجم العينة الذي يضمن لنا عند مستوى الثقة $(1-\alpha)$ أن الخطأ في تقدير μ عن طريق $\bar{X}$ لن يزيد عن e.**

ملاحظة: نلاحظ أن هناك علاقة عكسية بين n حجم العينة والخطأ الأقصى المسموح بإرتكابه e، حيث أنه كلما زاد حجم العينة كان e ضعيف وبالتالي كانت الدراسة الإحصائية أكثر دقة.

مثال:

في دراسة حول مستوى الأجور في الإدارة العمومية بولاية سطيف، تحصلنا على إنحراف معياري يساوي 1000 دج.

المطلوب:

عند مستوى ثقة تساوي 95%، ما هو حجم العينة اللازم سحبه من هذا المجتمع حتى يكون الخطأ الأعلى المسموح بإرتكابه في تقدير متوسط الأجر الشهري يساوي:

1- 100 دج؛

2- 125 دج؛

3- ماذا تلاحظ.

الحل:

$\sigma= 1000$; $(1-\alpha)\% = 95\% \Rightarrow \alpha = 5\% = 0.05$

e=100 -1

$$n=\left(Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{e}\right)^2$$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0.05}{2}} = Z_{0.975} = 1.96$$

$$n = \left(1.96\frac{1000}{100}\right)^2$$

$$n=384.16= 384$$

e=150 -2

$$n = \left(1.96\frac{1000}{150}\right)^2$$

$$n = 245.86 = 246$$

3- نلاحظ أن هناك علاقة عكسية بين n و e.

2- تحديد حجم العينة n اللازم لتقدير النسبة في المجتمع P:

بنفس الخطوات السابقة، عند تقدير النسبة في المجتمع P بواسطة النسبة في العينة f فإن الحد الأعلى لخطأ المعاينة في تقدير P عند مستوى ثقة (1-α)% يُعطى بالعلاقة التالية:

$$e = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}$$

وبالتالي فإن حجم العينة اللازم هو:

$$n = \left(Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \frac{f(1-f)}{e^2}$$

مثال:

في إطار حملة مكافحة ظاهرة التدخين بولاية سطيف و لمعرفة نسبة المدخنين قامت السلطات المختصة بإجراء دراسة من خلال سحب عينة من 1800 شخص فوجد من بينهم 270 مدخن.

المطلوب:

1- قدر بمجال عند مستوى المعنوية 1% نسبة المدخنين في ولاية سطيف.

2- ما هو خطأ المعاينة في هذا التقدير؟

3- إذا أردنا تحسين دقة النتائج بنسبة 50%فما هو حجم العينة اللازم لتحقيق ذلك؟

الحل:

1- مجال الثقة لنسبة المدخنين في ولاية سطيف:

$$P\left(f - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \le P \le f + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right) = 1-\alpha$$

$$P(0.1282 \le P \le 0.1717) = 0.99$$

2- خطأ المعاينة في التقدير:

$$e = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}$$

$$e = 0.0217$$

3- حجم العينة اللازم لتحسين دقة النتائج بنسبة 50%:

تحسين دقة النتائج بنسبة 50% يعني تخفيض مقدار خطأ المعاينة بـ 50% و بذلك يكون خطأ المعاينة هو:

$$é = 0.011085$$

$$n = \left(Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \frac{f(1-f)}{e^2}$$

$$n = 7210$$

سادسا: سلسلة تمارين محلولة

التمرين الأول:

1- لماذا يعتبر المتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ مقدر نقطي غير متحيز للمتوسط الحسابي للمجتمع μ؟

2- أكتب العلاقة الرياضية للإنحراف المعياري للعينة S ؟

3- لماذا يعتبر للإنحراف المعياري للعينة S مقدر نقطي متحيز للإنحراف المعياري للمجتمعσ؟

4- ما هو المقدر النقطي غير المتحيز للإنحراف المعياري للمجتمعσ؟ أكتب العلاقة الرياضية لهذا المقدر؟

التمرين الثاني:

في مؤسسة لإنتاج أحد أنواع المنظفات، سحبنا عينة عشوائية مكونة من 12 علبة من مجتمع طبيعي، وكانت أوزانها بالكيلوغرام كالتالي:

العلبة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
وزن العلبة X_i	**3.3**	**2.7**	**3.0**	**2.7**	**3.2**	**2.8**	**2.9**	**3.3**	**3.1**	**3.0**	**3.1**	**2.9**

المطلوب:

1- إيجاد التقدير النقطي لمتوسط أوزان علب هذه المؤسسة (أي لمتوسط أوزان المجتمع)؟

2- إيجاد التقدير النقطي للإنحراف المعياري لأوزان علب هذه المؤسسة؟

3- إيجاد التقدير بمجال لمتوسط أوزان علب هذه المؤسسة عند مستوى الدلالة 1%؟

التمرين الثالث:

عند دراسة لأوزان عينة مكونة من 101 طالب بالكلية، كانت النتائج كما يلي: $\bar{X} = 67.5$ و$S^2 = 30.25$.

إعتبرنا أن العينة من النوع ESAR أي عينة عشوائية بسيطة مع الإعادة.

المطلوب:

1- إيجاد التقدير النقطي لمتوسط أوزان هذا المجتمع؟

2- إيجاد التقدير بمجال ثقة للوزن المتوسط للمجتمع عند مستوى دلالة 5%؟

3- كيف يكون خطأ العينة في حالة عينة عشوائية بسيطو دون إعادة عند حجم مجتمع N= 1600؟

التمرين الرابع:

في دراسة حول المداخيل الشهرية للعائلات في مدينة سطيف الجزائرية، تم سحب عينة عشوائية حجمها 60 عائلة حيث كان متوسط الدخل لهذه العينة يساوي 18000 دج والإنحراف المعياري لهذه العينة يساوي 2000 دج.

المطلوب:

1- إذا فرضنا أن الإنحراف المعياري للدخل الشهري للعائلات في المدينة يساوي 2200 دج، أوجد مجال الثقة لمتوسط الدخل الشهري لكل العائلات بمدينة سطيف عند مستوى ثقة 95%؟

2- إذا كان الإنحراف المعياري للدخل الشهري للعائلات في المدينة مجهولا، أوجد مجال الثقة لمتوسط الدخل الشهري لكل العائلات بمدينة سطيف عند مستوى ثقة 95%؟

3- أوجد مجال الثقة لمتوسط الدخل الشهري لكل العائلات بمدينة سطيف عند مستوى ثقة 95%، إذا علمت أن الدراسة أجريت على 20 عائلة وأن الدخل الشهري للعائلات في المدينة يتبع التوزيع الطبيعي.

التمرين الخامس:

قام مكتب دراسات إحصائية بإجراء إستطلاع لدى الشباب لمعرفة مدى رضاهم عن الوضع العام للبلاد، فكانت الإجابات كما يلي:

راض	غير راض	لا أدري
137	840	73

المطلوب:

1- أوجد التقدير النقطي لنسبة الشباب الجزائري الغير راض عن الوضع العام للبلاد؟

2- أوجد تقدير بمجال لنسبة الشباب الجزائري الغير راض عن الوضع العام للبلاد وهذا عند مستوى ثقة قدره:

أ- 90%؛

ب- 95%.

التمرين السادس:

إن متغير الأسعار لاقتصاد معين هو ذو وسط μ، و إنحراف معياري يساوي 2دج.

المطلوب:

- ما هو حجم العينة الذي يجب سحبه إذا أردنا أن الحد الأعلى في تقدير μ لا يزيد عن 0.5 وذلك عند مستوى دلالة:

أ- α=5%؛

ب- α=1%.

حلول سلسلة التمرين:

حل التمرين الأول:

1- يُعتبر **المتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ مقدر نقطي غير متحيز للمتوسط الحسابي للمجتمع μ** لأن:

$$E(\bar{X}) = \mu$$

2- العلاقة الرياضية للإنحراف المعياري للعينة S:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n}}$$

3- يُعتبر **للإنحراف المعياري للعينة S مقدر نقطي متحيز للإنحراف المعياري للمجتمعσ** لأن:

$$E(S) \neq \sigma$$

4- **المقدر النقطي غير المتحيز للإنحراف المعياري للمجتمعσ هو Ś الإنحراف المعياري للعينة المعدل** و هو غير متحيز لـ σ لأن:

$$E(\acute{S}) = \sigma$$

العلاقة الرياضية لـ Ś هي:

$$\acute{S} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}}$$

حل التمرين الثاني:

1- التقدير النقطي لمتوسط أوزان علب هذه المؤسسة μ:

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{12} X_i}{n} = \frac{3.3 + 2.7 + \cdots 2.9}{12} = 3$$

$$\hat{\mu} = \bar{x} = 3 \text{كغ}$$

2- التقدير النقطي للإنحراف المعياري لأوزان علب هذه المؤسسة σ:

$$\hat{\sigma} = \acute{S} = \sqrt{\frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{(n-1)}}$$

$$\acute{S} = \sqrt{\frac{(3.3-3)^2 + (2.7-3)^2 + \cdots + (2.9-3)^2}{11}}$$

$$\hat{\sigma} = \acute{S} = 0.21 \text{كغ}$$

3- التقدير بمجال لمتوسط أوزان علب هذه المؤسسة عند مستوى الدلالة 1%:

بما أن $n = 12 < 30$ والمجتمع طبيعي والإنحراف المعياري للمجتمع σ مجهول فإنه في هذه الحالة نستخدم قانون ستيودنت عند درجة حرية n-1 أي درجة الحرية 11 وبالتالي فإن مجال الثقة يكون كما يلي:

$$\mu \in \left[\bar{X} \pm t_{(n-1);1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n-1}}\right]$$

حساب الإنحراف المعياري للعينة S:

$$S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n}}=\sqrt{\frac{(3.3-3)^2+(2.7-3)^2+\cdots+(2.9-3)^2}{12}}$$

$$S=\sqrt{\frac{0.48}{12}}=0.2$$

$$\frac{S}{\sqrt{n-1}}=\frac{0.2}{\sqrt{11}}=0.06$$

$$t_{(n-1);1-\frac{\alpha}{2}}=t_{(12-1);1-\frac{0.01}{2}}=t_{11;0,995}=3.106$$

$$\mu\in[3-3.106\times0.06;3+3.106\times0.06]$$

$$\mu\in[2.814;3.19]$$ كغ

نحن متأكدون بنسبة 99% (1-α) أن متوسط أوزان علب هذه المؤسسة يتراوح ما بين 2.8 و 3.19 كغ.

حل التمرين الثالث:

$$n=101\ (\text{طالب});\bar{x}=67.5\ ;\ S^2=30.25$$

1- التقدير النقطي لمتوسط أوزان هذا المجتمع (لـ μ):

$$\hat{\mu}=\bar{x}=67.5$$

2- التقدير بمجال ثقة للوزن المتوسط للمجتمع عند مستوى دلالة 5%:

بما $n=101>30$ والإنحراف المعياري للمجتمع σ مجهولا فإن فإن مجال الثقة لـ μ في هذه الحالة يكتب كما يلي:

$$\mu\in\left[\bar{X}\pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n-1}}\right]=1-\alpha$$

$$\frac{S}{\sqrt{n-1}}=\frac{\sqrt{30.25}}{\sqrt{101-1}}=0.55$$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}}=Z_{1-\frac{0.05}{2}}=Z_{0.975}=1.96$$

$$P(67.5-1.96\times0.55\le\mu\le67.5+1.96\times0.55)=0.95$$

$$P(66.422\le\mu\le68.578)=0.95$$

3- **خطأ العينة في حالة عينة عشوائية بسيطة دون إعادة عند حجم مجتمع N= 1600:**

الخطأ يتم قياسه عن طريق التباين كما يلي:

$$\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{S^2}{n-1} \times \frac{N-n}{N-1} = \frac{30.25}{100} \times \frac{1600-101}{1600-1} = 0.2836$$

نلاحظ أن **خطأ العينة في هذه الحالة أي السحب دون إعادة هو أقل من خطا العينة في حالة السحب مع الإعادة** والذي يساوي:

$$\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{S^2}{n-1} = \frac{30.25}{100} = 0.3025$$

حل التمرين الرابع:

1- مجال الثقة لمتوسط الدخل الشهري لكل العائلات بمدينة سطيف عند مستوى ثقة 95% إذا كان $\sigma = 2200$ دج:

بما $n = 60 > 30$ والإنحراف المعياري للمجتمع σ معلوم والمجتمع غير محدود فإن مجال الثقة لـ μ في هذه الحالة يكتب كما يلي:

$$\mu \in \left[\bar{X} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$$

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2200}{\sqrt{60}} = 284.02$$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0.05}{2}} = Z_{0.975} = 1.96$$

ومنه الحد الأدنى للمجال هو:

$$18000 - (1.96 \times 284.02) = 17443.32$$

والحد الأعلى للمجال هو:

$$18000 + (1.96 \times 284.02) = 18556.68$$

$$\mu \in [17443.32; 18556.68] = 0.95$$

نحن متأكدون بنسبة 95% أن متوسط الدخل الشهري لكل العائلات بمدينة سطيف يتراوح ما بين 17443.32 و 18556.68 دج.

2- مجال الثقة لمتوسط الدخل الشهري لكل العائلات بمدينة سطيف عند مستوى ثقة 95% إذا كان σ مجهولا:

بما أن $n = 60 > 30$ والإنحراف المعياري للمجتمع σ مجهولا فإن مجال الثقة لـ μ في هذه الحالة يكتب كما يلي:

$$\mu \in \left[\bar{X} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n-1}}\right] = 1-\alpha$$

$$\frac{S}{\sqrt{n-1}} = \frac{2000}{\sqrt{60-1}} = 260.38$$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0.05}{2}} = Z_{0.975} = 1.96$$

$$P(18000 - 1.96 \times 260.38 \leq \mu \leq 18000 + 1.96 \times 260.38) = 0.95$$

$$P(17489.65 \leq \mu \leq 18510.34) = 0.95$$

3- مجال الثقة لمتوسط الدخل الشهري لكل العائلات بمدينة سطيف عند مستوى ثقة 95%، إذا كان $n = 20$

بما أن $n = 20 < 30$ والمجتمع طبيعي والإنحراف المعياري للمجتمع σ مجهول فإنه في هذه الحالة نستخدم قانون ستيودنت عند درجة حرية n-1 وبالتالي فإن مجال الثقة يكون كما يلي:

$$\mu \in \left[\bar{X} \pm t_{(n-1);1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n-1}}\right]$$

$$\frac{S}{\sqrt{n-1}} = \frac{2000}{\sqrt{20-1}} = 458.83$$

$$t_{(n-1);1-\frac{\alpha}{2}} = t_{(20-1);1-\frac{0.05}{2}} = t_{19;0,975} = 2.093$$

$$\mu \in [18000 - 2.093 \times 458.83; 18000 + 2.093 \times 458.83]$$

$$\mu \in [17039.67; 18960.33]$$

حل التمرين الخامس:

لدينا: $n = 1050$; $r = 840$

1-التقدير النقطي لنسبة الشباب الجزائري الغير راض عن الوضع العام في البلاد:

$$\hat{P} = f = \frac{r}{n} = \frac{\text{عدد الشباب الجزائري الغير راض عن الوضع العام في البلاد في العينة}}{\text{العدد الإجمالي للعينة}} = \frac{840}{1050} = 0.80$$

$$= 80\%$$

$$\hat{P} = f = 0.8 = 80\%$$

أي أن نسبة الشباب الجزائري الغير راض عن الوضع العام في البلاد هي 80%.

2-التقدير بمجال ثقة لنسبة الشباب الجزائري الغير راض عن الوضع العام في البلاد:

أ- $\alpha=5\%$

بما أن $n = 1050 > 30$ فإن مجال الثقة لـ P يكتب كما يلي:

$$P(f - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \leq P \leq f + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}) = 1 - \alpha$$

$$\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} = \sqrt{\frac{0.8(1-0.8)}{1050}} = 0.0123$$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0.05}{2}} = Z_{0.975} = 1.96$$

$$P(0.8 - 1.96x0.0123 \leq P \leq 0.8 + 1.96x0.0123) = 0.95$$

$$P(0.7759 \leq P \leq 0.8241) = 0.99$$

$$P \in [77.59\%; 82.41\%]$$

نحن متأكدون بنسبة 95% أن نسبة الشباب الجزائري الغير راض عن الوضع العام في البلاد تتراوح ما بين 77.59% و82.41%.

ب- $\alpha=1\%$

بنفس الطريقة يتم إيجاد المجال المطلوب.

حل التمرين السادس:

أ- حجم العينة عند $\alpha=0.05$

لدينا:

$$\sigma = 2 \; ; e = 0.5$$

و لدينا:

$$n = \left[\frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\,\sigma}{e}\right]^2$$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0.05}{2}} = Z_{0.975} = 1.96$$

إذن:

$$n = \left[\frac{1.96 \times 2}{0.5}\right]^2$$

$$n = [7.84]^2$$

$$n = 62 \text{ (وحدة)}$$

ب-حجم العينة عند α=0.01

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0.01}{2}} = Z_{0.995} = 2.5758$$

إذن:

$$n = \left[\frac{2.5758 \times 2}{0.5}\right]^2$$

$$n = 106 \text{ (وحدة)}$$

المحور الرابع:

إختبار الفرضيات الإحصائية

تمهـــيد:

يُعتبر موضوع اختبار الفرضيات الإحصائية Testing of Statistical Hypothesis الشق الأساسي الثاني للإحصاء الاستدلالي، حيث أن كافة الإجراءات التي تندرج تحت هذا الموضوع يُطلق عليها أحيانا مصطلح اختبار المعنوية Test of Significance، والذي يُعد من المواضيع الأساسية للتطبيقات الإحصائية في مختلف المجالات العملية، ويهتم هذا النوع من الاختبارات باتخاذ القرارات الإحصائية المناسبة.

يهدف موضوع إختبار الفرضيات إلى الوصول لقرار بشأن معلمة المجتمع من خلال قبول أو رفض تقديرها المعتمد على معطيات العينة المسحوبة من ذلك المجتمع، فتقدير معالم المجتمع من العينة المسحوبة يحتاج إلى إختبار الفروق بين النتائج الفعلية للعينة والنتائج الفرضية المتوقعة وهو ما يقودنا إلى إختبار الفرضيات.سنحاول من خلال هذا الفصل التطرق إلى:

- **أولا: مفاهيم ومصطلحات؛**
- **ثانيا: إختبار الفرضيات المتعلقة بمتوسط المجتمع μ؛**
- **ثالثا: إختبار الفرضيات المتعلقة بالنسبة في المجتمع P؛**
- **رابعا: إختبار الفرضيات المتعلقة بتباين المجتمع σ^2؛**
- **خامسا: سلسلة تمارين محلولة؛**

أولا: مفاهيم ومصطلحات

سنتطرق من خلال هذا العنصر إلى أهم المفاهيم والمصطلحات التي يجب على الطالب فهمها والمرتبطة بإختبار الفرضيات الإحصائية.

1- مفهوم الفرضية الإحصائية

هي إدعاء، تصريح أو تخمين معين قد يكون صحيحا أو خاطئا حول معلمة أو أكثر لمجتمع إحصائي أو عدد من المجتمعات الإحصائية، وتنقسم الفرضيات الإحصائية إلى نوعين هما[1]:

أ- الفرضيات المتعلقة بمعلمات المجتمعات وتسمى **الفرضيات المعلمية Parametric Hypothesis**؛

ب- الفرضيات المتعلقة بشكل دوال التوزيعات وتسمى **بالفرضيات اللامعلمية non-parametric hypothesis.**

2- مفهوم إختبار الفرضيات الإحصائية

هو إختبار صحة ومصداقية القيمة (القيم) التي تأخذها المعلمة (المعلمات) التي تم تقديرها، وعادة ما تُجرى الإختبارات حول قيمة محددة، أو حول النطاق (الفترة) التي وقعت ضمنها أو خارجها[2]؛ يُعرف اختبار الفرضية إحصائيا بأنه أسلوب إحصائي يُراد به التأكد من صحة الفرضية أو عدم صحتها. وعندما يعتمد هذا الأسلوب على جميع مفردات المجتمع الإحصائي فإن الاستدلال أو الاستنتاج الذي يتم التوصل إليه بشأن الفرضية يكون إما نعم أو لا. أما إذا كان الاختبار يعتمد على مفردات العينة التي يتم اختيارها من المجتمع الإحصائي فإن القرار الذي يتم التوصل إليه بشأن الفرضية يكون إما القبول أو الرفض باحتمالات معينة، وهذا يعني أن الأسلوب الذي يعتمد على العينة يترك مجالا لاحتمال الوقوع بالخطأ في اتخاذ القرارات.[3]

3- عناصر الإختبار الإحصائي

يشمل إختبار أي فرضية إحصائية على مجموعة من العناصر تتمثل فيما يلي:

---

[1]- جناد مباركة، مرجع سابق، ص 64.

[2]- عبد الرزاق بني هاني، **الاقتصاد القياسي: المبادئ الرياضية والاحصائية**، دار وائل للنشر، عمان، الأردن، الطبعة الأولى، 2014 ، ص 3.

[3]- جناد مباركة، مرجع سابق، ص 63.

أ- الفرضية الصفرية Null hypothesis: ويُطلق عليها بفرضية العدم أو الفرضية المبدئية ويرمز لها بالرمز H_O، وهي التي تصاغ بشكل نفي وجود علاقة بين متغيرين أو فروق بين مجموعتين أو أثر لمتغير مستقل على متغير آخر تابع، وهي الفرضية التي يُجرى عليها الاختبار الإحصائي ويُبنى القرار على عدم صحتها[1]؛ نذكر على سبيل المثال الفرضيات التالية:

- لا توجد فروق ذات دلالة إحصائية بين ربحية المصارف الإسلامية تعزى لحجم سوقها؛
- لا توجد علاقة بين هيكل السوق المصرفي وأداء المصارف الإسلامية؛
- لا يوجد أثر ذو دلالة إحصائية لدرجة التركز في السوق المصرفي على كفاءة المصارف.

ب- الفرضية البديلة Alternative Hypothesis: هي الفرضية المعاكسة للفرضية الصفرية والتي يدعمها الباحث حيث تُصاغ بشكل وجود علاقة بين متغيرين أو فروق بين مجموعتين أو أثر لمتغير مستقل على متغير آخر تابع، ويرمز لها بالرمز H_1.[2] مثال على ذلك:

- توجد فروق ذات دلالة إحصائية بين ربحية المصارف الإسلامية تعزى لحجم سوقها؛
- توجد علاقة بين هيكل السوق المصرفي وأداء المصارف الإسلامية؛
- يوجد أثر ذو دلالة إحصائية لدرجة التركز في السوق المصرفي على كفاءة المصارف.

ج- إحصائية الإختبار *Test Statistic*: هي متغير عشوائي لها توزيع احتمالي معروف، وتستخدم لوصف العلاقة بين القيم النظرية للمجتمع والقيم المحسوبة من العينة، تعتمد إحصائية الاختبار على ما سيتم اختباره من معلمات المجتمع المدروس، لذلك فهي تختلف باختلاف الحالة المدروسة للمعلمة، وتسمى عادة بإحصائية الاختيار المحسوبة، وتكون إحصاءات الاختبار على أنواع عدة نذكر منها إحصائية الإختبار (Z)، إحصائية الإختبار (T)، إحصائية الإختبار (F)، إحصائية الإختبار (X^2).[3]

د- منطقة اتخاذ القرار: تُقسم منطقة اتخاذ القرار إلى منطقتين، إحداهما تحوي القيم التي تدعم الفرضية البديلة وتسمى **منطقة الرفض (المناطق الحرجة)**، وهي مجموعة من القيم التي نستخدمها والتي تمكننا من **رفض الفرضية**

---

[1] -راجع: - محمد خير سليم أبو زيد، **التحليل الإحصائي للبيانات بإستخدام برمجية SPSS**، دار صفاء، عمان، الأردن، 2010، ص241.

- سالم عيسى بدر وعماد غصاب عبابنة، مرجع سابق، ص 296.

[2] - المرجع نفسه.

[3] - محمد صبحي أبو صالح، مرجع سابق، ص 334.

الصفرية، وحدودها يطلق عليها القيم الحرجة، وهي قيم تناظر مستوى الدلالة، والتي تمثل أعلى احتمالية لرفض الفرضية الصفرية هي صحيحة صدفة؛ فمنطقة الرفض إذن تتضمن **قبول الفرضية البديلة** والتي يعبر عنها إما باتجاه واحد على اليمين أو على اليسار، أو باتجاهين على جانبي القيمتين الحرجتين، والمنطقة الأخرى تسمى **منطقة القبول** تحتوي على القيم التي **تدعم الفرضية الصفرية** وبالتالي **رفض الفرضية البديلة**. فوقوع قيمة إحصائية الاختبار في منطقة الرفض يؤدي إلى رفض الفرضية الصفرية وبالتالي قبول الفرضية البديلة والعكس صحيح[1].

هـ- أخطاء إختبار الفرضيات وأنواعها

إن عملية إتخاذ أي قرار إحصائي ينطوي على أخطاء بنسب معينة، حيث أنه من المحتمل أن نرفض فرضية معينة في حين أنها صحيحة والعكس صحيح، وعموما يمكن القول أنه هناك نوعان من الأخطاء الإحصائية، بحيث إذا أدت قاعدة القرار الموضوعة إلى رفض الفرضية المبدئية إعتماد على نتائج العينة رغم أنها في الحقيقة صحيحة نقول أننا ارتكبنا **خطأ من النوع الأول Type 1 Error**، في حين إذا أدت إلى قبول الفرضية المبدئية رغم أنها في الحقيقة خاطئة نقول أننا ارتكبنا **خطأ من النوع الثاني Type 2 Error**، ويمكن أن نقلل من الخطأين بتكبير حجم العينة[2]، والجدول رقم (01) يوضح الفرق بين النوعين من الخطأ:

الجدول رقم (01):الخطأ من النوع الأول والخطأ من النوع الثاني

القرار	الفرضية H_0 صحيحة	الفرضية H_0 خاطئة
قبول الفرضية H_0	صواب	خطأ من النوع الثاني
رفض الفرضية H_0	خطأ من النوع الأول	صواب

المصدر: سهير فهمي حجازي ومحمود الدريني، **الإحصاء التطبيقي**، الشركة المصرية لإعادة التأمين، مصر، 2004، ص ص 79-80.

و- مستوى المعنوية Level of significance:

نسمي الإحتمال الذي نكون مستعدين وفقه بالمجازفة بإرتكاب خطأ من النوع الأول بمستوى المعنوية أو مستوى الدلالة، ونرمز له بالرمز α، ويحدد هذا الإحتمال قبل البدء في إجراء الإختبار أي قبل إجراء عملية المعاينة حتى لا تؤثر

[1]- راجع: - حسين ياسين طعمة و ايمان حسين حنوش، **الإحصاء الإستدلالي**، مرجع سابق، ص ص 274-277.
- محمد صبحي أبو صالح، مرجع سابق، ص ص 335-338.

[2] -François Cottet-Emard ,**probabilités et tests d'hypothèse : cours et exercices corrigés**, Belgique , 1er édition, 2014 , PP340-341.

النتائج التي نحصل عليها في قرارنا. وفي العادة نستخدم في الحياة العملية 0.05 أو 0.01 و هذا لا يمنع من إستخدام مستويات أخرى للمعنوية.[1]

4- أنواع إختبار الفرضيات

يوجد ثلاث أنواع من إختبار الفرضيات: إختبار ذو طرفين، إختبار ذو طرف أيسر، إختبار ذو طرف أيمن.

أ- إختبار ذو طرفين أو ذو جانبين أو ثنائي الإتجاه: عند هذا النوع من الإختبار فإن فرضية العدم H_0 تكون على شكل مساواة (أي إشارة =) وبالتالي فإن الفرضية البديلة تكون على شكل عدم مساواة (أي إشارة ≠)، في هذه الحالة تكون منطقة الرفض موزعة بالتساوي على حدي التوزيع. ويتم صياغة الفرضيات في هذه الحالة بالكيفية التالية:

$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

ب- إختبار ذو طرف أيسر: في هذه الحالة فإن العلاقة في H_0 تكون على شكل أكبر من أو يساوي (أي إشارة ≥) وبالتالي فإن الفرضية البديلة H_1 تكون على شكل أصغر (أي إشارة <)، وعليه تكون منطقة الرفض في الطرف الأيسر للتوزيع الإحتمالي، ويتم صياغة الفرضيات في هذه الحالة بالكيفية التالية:

$$\begin{cases} H_0: \mu \geq \mu_0 \\ H_1: \mu < \mu_0 \end{cases}$$

من الأمثلة على إختبارات الفروض في الجانب الأيسر: نجاح الطالب في جامعة ما يتوجب أن لا يقل معدله عن 10.

ج- إختبار ذو طرف أيمن: في هذه الحالة فإن العلاقة في H_0 تكون على شكل أصغر من أو يساوي (أي إشارة ≤) وبالتالي فإن الفرضية البديلة H_1تكون على شكل أكبر (أي إشارة >)، وتكون منطقة الرفض في الطرف الأيمن للتوزيع الإحتمالي. يتم صياغة الفرضيات في هذه الحالة بالكيفية التالية:

$$\begin{cases} H_0: \mu \leq \mu_0 \\ H_1: \mu > \mu_0 \end{cases}$$

من الأمثلة على إختبارات الفروض في الجانب الأيمن: ما تقوم به مصانع إنتاج الحليب منزوع الدسم أو الأغذية والمشروبات الخاصة بالحمية الغذائية يجب أن لا يزيد نسبة الدسم أو السكر عن نسبة معينة.

[1]-شبيجل وآخرون، **الإحتمالات والإحصاء: ملخصات شوم إيزي**. الدار الدولية للإستثمارات الثقافية، مصر،د ت ن، ص 98 .

5- خطوات عملية إختبار الفرضيات

بناء على ما تم طرحه سابقا يمكن عرض الخطوات المتبعة لإختبار أي فرضية إحصائية في المراحل التالية:

- صياغة الفرضية الصفرية H_O والفرضية البديلة H_1؛
- تثبيت مستوى المعنوية α؛
- تحديد شروط الاختبار المتوفرة (المجتمع محدود أو غير محدود، توزيع الاحتمالي معروف أم غير معروف، السحب بإرجاع أو دون إرجاع، العينة كبيرة أو صغيرة، تباين المجتمع معلوم أو غير معلوم...)؛
- تحديد إحصائية الاختبار المناسبة وذلك اعتماد على الشروط المتوفرة؛
- صياغة قاعدة القرار التي تؤدي إلى رفض أو قبول فرضية العدم عند مستوى المعنوية المختار ويتم ذلك بتحديد القيم أو القيمة الحرجة حسب طبيعة الاختبار (اختبار ذو طرفين، أو اختبار ذو جانب أيسر أو ذو جانب أيمن)؛
- حساب القيمة العددية لإحصائية الاختبار وإخضاعها لقاعدة القرار؛
- اتخاذ قرار قبول أو رفض فرضية العدم.

ثانيا: إختبار الفرضيات المتعلقة بمتوسط المجتمع μ

1- حالة إختبار ذو طرفين:

في هذه الحالة نضع المسألة على الشكل التالي:

$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

حيث أن: μ_0 قيمة إفتراضية لوسط المجتمع و التي نقوم بإختبار صحتها، ولإختبار هذه الفرضية نميز بين حالتين هما:

أ- حالة العينات الكبيرة $n \geq 30$

لنفرض أنه تم سحب عينة حجمها $n \geq 30$ من مجتمع يتوزع بمتوسط μ ونريد إختبار الفرضية السابقة، ونعلم مما سبق أن أفضل مقدر لمتوسط المجتمع μ هو متوسط العينة $\bar{X}$ ، هذا الأخير وفي حالة العينات الكبيرة يتبع القانون الطبيعي، وبالتالي فإن إحصائية الإختبار هي:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_{\bar{X}}} \rightarrow N(0.1)$$

على أن تكون $\sigma_{\bar{X}}$ كما يلي:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

أي أن:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

عند مستوى دلالة α، فإن قرار رفض أو عدم رفض الفرضية المبدئية H_0 يكون وفقا لقاعدة القرار التالية:

$$\begin{cases} Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \in \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} ; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \Rightarrow \bar{R}H_0 \ H_0 \text{قبول} \\ Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \notin \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} ; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \Rightarrow RH_0 \ H_0 \text{رفض} \end{cases}$$

ملاحظة هامة:

- إذا كان الإنحراف المعياري للمجتمع σ مجهول فيتم إستبداله بالإنحراف المعياري للعينة S ونكتب:

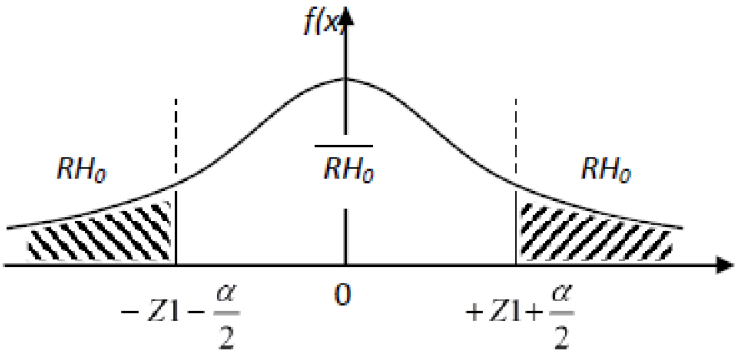
$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{S}{\sqrt{n-1}}$$

حيث أن الإنحراف المعياري للعينة S يحسب كما يلي:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

ويكون قرار رفض أو قبول الفرضية الصفرية في حالة الإختبار ذو طرفين موضح في الشكل التالي:

الشكل رقم (2): منطقتي القبول والرفض في الإختبار ذو طرفين



مثال:

يدعي مدير مصنع لصناعة نوع معين من الأنابيب المعدنية بأن المتوسط الحسابي لطول قطر الأنابيب المصنعة في مصنعه مطابق للمواصفات ويساوي 2 سم، للتأكد من صحة قوله سحبنا عينة عشوائية من الإنتاج الكلي تحتوي على 35 أنبوب معدني فكان الوسط الحسابي لهذه العينة يساوي 1.98 سم وكان $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = 2.7335$

المطلوب:

1- حدد فرضيتا الدراسة؟

2- إذا علمت أن أطوال الأنابيب تتوزع توزيعا طبيعيا، إختبر صحة إدعاء المدير عند مستوى المعنوية 0.05.

3- ما نوع الإختبار الذي قمت به؟

الحل:

1- صياغة الفرضيات:

$$\begin{cases} H_0: \mu = 2 \\ H_1: \mu \neq 2 \end{cases}$$

2- إختبار الفرضيات:

- مستوى الدلالة: هو α=0.05 ؛

- تحديد قاعدة القرار:

- بما أن $n=35>30$ (عينة كبيرة) وσ مجهول والمجتمع غير محدود فإن قاعدة القرار تُكتب كما يلي:

$$\begin{cases} Z=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n-1}}} \in \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\,;\,+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \Rightarrow \bar{R}H_0 \quad H_0 \text{قبول} \\ Z=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n-1}}} \notin \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\,;\,+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \Rightarrow RH_0 \quad H_0 \text{رفض} \end{cases}$$

- حساب القيمة الجدولية والفعلية لإحصائية الإختبار:

● القيمة الجدولية:

من جدول القانون الطبيعي المعياري نجد: $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}=Z_{1-\frac{0.05}{2}}=Z_{0.975}=1.96$

● القيمة الفعلية:

لدينا: $\bar{X}=1.98 \qquad \mu_0=2$

$$S=\sqrt{\frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{n}}=\sqrt{\frac{2.7335}{35}}=0.2795$$

$$Z=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n-1}}}=\frac{1.98-2}{\dfrac{0.2795}{\sqrt{35-1}}}=-0.42$$

- المقارنة وإتخاذ القرار:

بما أن:

$$Z=-0.42 \in [-1.96\,;\,+1.96] \Rightarrow \bar{R}H_0$$

هذا يعني أن القرار هو **قبول الفرضية الصفرية H_0** عند مستوى الدلالة ***α=0.05***، أي أننا نقبل إدعاء مدير المصنع بأن المتوسط الحسابي لطول قطر الأنابيب المصنعة في مصنعه مطابق للمواصفات ويساوي 2 سم.

3- نوع الإختبار: إختبار ذو طرفين.

ب- حالة العينات الصغيرة n< 30

والمجتمع طبيعي والإنحراف المعياري للمجتمع σ مجهول، في هذه الحالة فإن $\bar{X}$ يتبع قانون ستيودنت T بدرجة حرية (n-1)، ومنه فإن إحصائية الإختبار تصبح كالتالي:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_{\bar{X}}} \rightarrow t_{n-1}$$

وبما أن σ مجهول فإن :

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{n-1}}$$

أي أن:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}}$$

وعليه فعند مستوى دلالة α، فإن قرار رفض أو عدم رفض الفرضية المبدئية H_0 وفقا لهذه الشروط يكون كما يلي:

$$\begin{cases} T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} \in \left[-t_{n-1;\,1-\frac{\alpha}{2}}\,;\,+t_{n-1;\,1-\frac{\alpha}{2}}\right] \Rightarrow \bar{R}H_0 \quad H_0 \text{قبول} \\ T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} \notin \left[-t_{n-1;\,1-\frac{\alpha}{2}}\,;\,+t_{n-1;\,1-\frac{\alpha}{2}}\right] \Rightarrow RH_0 \quad H_0 \text{رفض} \end{cases}$$

مثال:

تدعي شركة لإنتاج البطاريات التي تستخدم في الأجهزة الطبية بأن عمر البطارية من إنتاجها له التوزيع الطبيعي بمتوسط 3 سنوات. أخذت عينة عشوائية من إنتاج هذه الشركة تحتوي على 6 بطاريات فكانت أعمارها بالسنوات كما يلي:

3.8 ، 1.9 ، 2.9 ، 0.9 ، 4 ، 3.5

المطلوب: هل إدعاء الشركة بأن متوسط عمر البطاريات التي تنتجها صحيح عند مستوى المعنوية 1%.

الحل:

نختبر صحة الفرضية التالية:

$$\begin{cases} H_0: \mu = 3 \\ H_1: \mu \neq 3 \end{cases}$$

- **تحديد قاعدة القرار:** بما أن $n = 6 < 30$ ومأخوذة من مجتمع طبيعي وغير محدود والإنحراف المعياري للمجتمع σ مجهول فإن قاعدة القرار تُكتب كما يلي:

$$\begin{cases} T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n-1}}} \in \left[-t_{n-1;\,1-\frac{\alpha}{2}}\,;\,+t_{n-1;\,1-\frac{\alpha}{2}}\right] \Rightarrow \bar{R}H_0 \quad H_0 \text{قبول} \\ T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n-1}}} \notin \left[-t_{n-1;\,1-\frac{\alpha}{2}}\,;\,+t_{n-1;\,1-\frac{\alpha}{2}}\right] \Rightarrow RH_0 \quad H_0 \text{رفض} \end{cases}$$

- **القيمة الجدولية لإحصائية الإختبار**

من جدول توزيع ستيودنت نجد: $t_{(n-1);1-\frac{\alpha}{2}} = t_{(6-1);1-\frac{0.01}{2}} = t_{5;0.995} = 4.03$

- **القيمة الفعلية لإحصائية الإختبار**

حساب الوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{3.5 + 4 + 0.9 + 2.9 + 1.9 + 3.8}{6} = 2.83$$

حساب الإنحراف المعياري للعينة S:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n}} \quad \sqrt{\frac{(3.5-2.83)^2 + (4-2.83)^2 + (0.9-2.83)^2 \ldots (3.8-2.83)^2 +}{6}}$$

$$S = 1.11$$

$$T = \frac{2.83 - 3}{\frac{1.11}{\sqrt{5}}} = -0.34$$

- **المقارنة وإتخاذ القرار:** بما أن:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} = -.34 \in [-4.03\ ;\ +4.03] \Rightarrow \bar{R} H_0 \text{ } H_0 \text{قبول}$$

هذا يعني أن القرار هو **قبول الفرضية الصفرية H_0** عند مستوى الدلالة **α=0.01**، أي أننا نقبل إدعاء الشركة بأن متوسط عمر البطاريات التي تنتجها يساوي 3 سنوات.

2- إختبار ذو طرف أيسر:

في هذه الحالة نضع المسألة على الشكل التالي:

$$\begin{cases} H_0: \mu \geq \mu_0 \\ H_1: \mu < \mu_0 \end{cases}$$

لإختبار هذه الفرضية نميز بين حالتين هما:

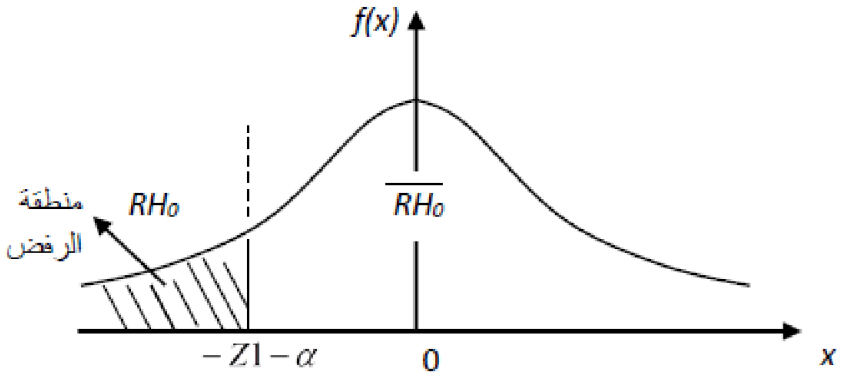
أ- حالة العينات الكبيرة $n \geq 30$

لنفرض أنه تم سحب عينة حجمها $n \geq 30$ من مجتمع يتوزع بمتوسط μ ونريد إختبار الفرضية السابقة، فعند مستوى دلالة α فإن قرار رفض أو عدم رفض الفرضية المبدئية H_0 يكون وفقا لقاعدة القرار التالية:

$$\begin{cases} Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq -Z_{1-\alpha} \Rightarrow \bar{R} H_0 \quad H_0 \text{قبول} \\ Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < -Z_{1-\alpha} \Rightarrow R H_0 \quad H_0 \text{رفض} \end{cases}$$

ويكون قرار رفض أو قبول الفرضية الصفرية في حالة الإختبار ذو طرف أيسر موضح في الشكل التالي:

الشكل رقم (3): منطقتي القبول والرفض في الإختبار ذو طرف أيسر



ب- حالة العينات الصغيرة n< 30

والمجتمع طبيعي والإنحراف المعياري للمجتمع σ مجهول، في هذه الحالة فإن $\bar{X}$ يتبع قانون ستيودنت T بدرجة حرية (n-1)، و منه فإن إحصائية الإختبار تصبح كالتالي:

$$\begin{cases} T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n-1}}} \geq -t_{n-1;\,1-\alpha} \Rightarrow \bar{R}H_0 & H_0 \text{قبول} \\ T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n-1}}} < -t_{n-1;\,1-\alpha} \Rightarrow RH_0 & H_0 \text{رفض} \end{cases}$$

مثال1:

يدعي أحد المنتجين أن متوسط عمر المنتوج الذي ينتجه لا يقل عن 2000 ساعة. للتأكد من صحة الإدعاء، سحبنا عينة عشوائية حجمها 196 وكان متوسط عمر السلعة من العينة 1955 ساعة. فإذا كان معلوما لهذا النوع من الصناعة أن الإنحراف المعياري هو 300 ساعة.

المطلوب:

1- عند مستوى الدلالة 10% ناقش الفرضية التالية:

$$H_0 : \mu \geq 2000$$

2- ما نوع الإختبار الذي قمت به؟

الحل:

$n=196$; $\bar{X} = 1955$ ساعة ; $\sigma = 300$ ساعة

1- مناقشة الفرضية التالية:

$$\begin{cases} H_0: \mu \geq 2000 \\ H_1: \mu < 2000 \end{cases}$$

بما أن $n=196 > 30$ والمجتمع غير محدود و σ معلوم فإن قاعدة القرار تكتب كما يلي:

$$\begin{cases} Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq -Z_{1-\alpha} \Rightarrow \bar{R}H_0 \quad H_0 \text{قبول} \\ Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < -Z_{1-\alpha} \Rightarrow RH_0 \quad H_0 \text{رفض} \end{cases}$$

$$-Z_{1-\alpha} = -Z_{1-0,1} = -Z_{0.90} = -1,2816$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{1955 - 2000}{\frac{300}{\sqrt{196}}} = -2.1$$

بما أن:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = -2.1 < -1.2816 \Rightarrow RH_0 \quad H_0 \text{رفض}$$

هذا يعني أن القرار هو **رفض الفرضية الصفرية H_0** عند مستوى الدلالة **α=0.1**، أي أننا نرفض إدعاء المنتج بأن متوسط عمر منتوجه الذي ينتجه لا يقل عن 2000 ساعة.

2- نوع الإختبار الذي قمنا به: هو إختبار ذو طرف أيسر.

مثال2:

في دراسة سابقة وجد أن معدل حضور الطلبة للمحاضرات بإحدى الكليات في جامعة سطيف 1 يقل عن 70 طالبا، و أن توزيعها يتبع التوزيع الطبيعي، نريد إختبار أن معدل الحضور قد تغير خلال هذا الموسم و العكس، فتم إختيار 29 طالبا عشوائيا فوجد أن معدل الحضور هو 23 طالبا بإنحراف معياري قدره 5 طلبة.

المطلوب: بإستعمال مستوى الدلالة 0.05 هل تؤيد هذه الفرضية.

الحل:

نختبر صحة الفرضية التالية:

$$\begin{cases} H_0: \mu \geq 70 \\ H_1: \mu < 70 \end{cases}$$

بما أن $n=29<30$ ومأخوذة من مجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا و σ مجهول، فإن قاعدة القرار تكتب كما يلي:

$$\begin{cases} T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n-1}}} \geq -t_{n-1;\,1-\alpha} \Rightarrow \bar{R}H_0 \quad H_0 \text{قبول} \\ T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n-1}}} < -t_{n-1;\,1-\alpha} \Rightarrow RH_0 \quad H_0 \text{رفض} \end{cases}$$

$$-t_{n-1;\,1-\alpha} = -\,t_{28;\,0.95} = -1.70$$

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n-1}}} = \frac{23 - 70}{\dfrac{5}{\sqrt{29-1}}} = -49.74$$

بما أن:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n-1}}} = -49.74 < -1.70 \Rightarrow RH_0 \quad H_0 \text{رفض}$$

وبالتالي **لا نؤيد الفرضية H_0** **ونقبل الفرضية البديلة H_1** التي مفادها أن معدل حضور الطلبة للمحاضرات بإحدى الكليات في جامعة سطيف 1 يقل عن 70 طالبا.

2- إختبار ذو طرف أيمن:

في هذه الحالة نضع المسألة على الشكل التالي:

$$\begin{cases} H_0: \mu \leq \mu_0 \\ H_1: \mu > \mu_0 \end{cases}$$

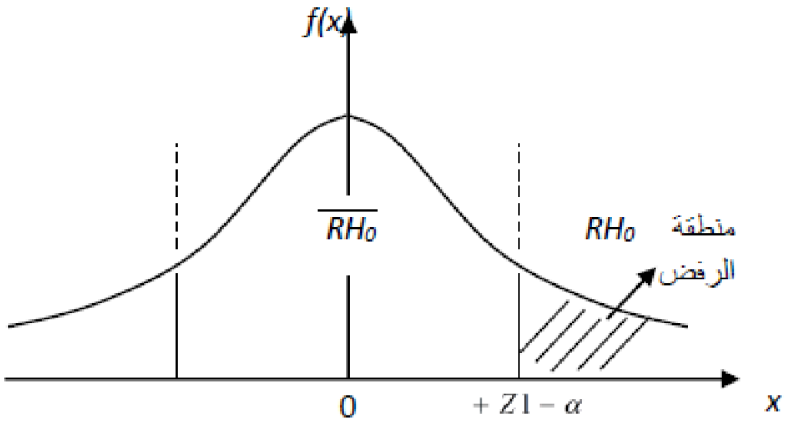
أ- حالة العينات الكبيرة $n \geq 30$

لنفرض أنه تم سحب عينة حجمها $n \geq 30$ من مجتمع يتوزع بمتوسط μ ونريد إختبار الفرضية السابقة، فعند مستوى دلالة α، فإن قرار رفض أو عدم رفض الفرضية المبدئية H_0 يكون وفقا لقاعدة القرار التالية:

$$\begin{cases} Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq +Z_{1-\alpha} \Rightarrow \bar{R}H_0 \; H_0 \text{قبول} \\ Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > +Z_{1-\alpha} \Rightarrow RH_0 \; H_0 \text{رفض} \end{cases}$$

ويكون قرار رفض أو قبول الفرضية الصفرية في حالة الإختبار ذو طرف أيمن موضح في الشكل التالي:

الشكل رقم (4): منطقتي القبول والرفض في الإختبار ذو طرف أيمن



ب- حالة العينات الصغيرة $n < 30$

والمجتمع طبيعي والإنحراف المعياري للمجتمع σ مجهول، في هذه الحالة فإن $\bar{X}$ يتبع قانون ستيودنت T بدرجة حرية (n-1)، ومنه فإن إحصائية الإختبار تصبح كالتالي:

$$\begin{cases} T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n-1}}} \leq +t_{n-1;\,1-\alpha} \Rightarrow \bar{R}H_0 \quad H_0 \text{قبول} \\ T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n-1}}} > +t_{n-1;\,1-\alpha} \Rightarrow RH_0 \quad H_0 \text{رفض} \end{cases}$$

مثال1: إذا كان متوسط المدة اللازمة لإستجابة المريض لدواء معين هو لا تزيد عن خمس دقائق، إقترح دواء جديد وجُرب على 64 مريض فكان متوسط المدة اللازمة لإستجابة المريض هو 4.7 دقيقة بإنحراف معياري قدره 1.2 دقيقة. فهل الدواء الجديد المقترح بنفس مستوى الفعالية أو أسوأ من الدواء القديم عند مستوى المعنوية α=0.01؟

الحل:

نختبر الفرضية التالية:

$$\begin{cases} H_0: \mu \leq 5 \\ H_1: \mu > 5 \end{cases}$$

بما أن n =64> 30 و σ مجهول فإن قاعدة القرار تكتب كما يلي:

$$\begin{cases} Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n-1}}} \leq +Z_{1-\alpha} \Rightarrow \bar{R}H_0 \; H_0 \text{قبول} \\ Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n-1}}} > +Z_{1-\alpha} \Rightarrow RH_0 \; H_0 \text{رفض} \end{cases}$$

$$Z_{1-\alpha} = Z_{1-0,01} = -Z_{0.99} = 2.3263$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n-1}}} = \frac{4.7 - 5}{\dfrac{1.2}{\sqrt{64-1}}} = -1.98$$

بما أن:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} = -1.98 \leq +2.3263 \Rightarrow\Rightarrow \bar{R}H_0 \quad H_0 \text{قبول}$$

ومنه فالدواء الجديد بنفس فعالية الدواء القديم، لأن الدواء القديم مدة الإستجابة لا تزيد عن خمس دقائق والدواء الجديد كذلك.

مثال2: تدعي إدارة محطة بنزين أن معدل فترة إنتظار السيارة للتزود بالوقود لا يفوق أربع دقائق. أخذت عينة عشوائية حجمها 10 سيارات و بعد أن دونت فترات الإنتظار وجدت أن معدل فترات الإنتظار هو 3 دقائق بإنحراف معياري 30 ثانية.

المطلوب:

إختبر إدعاء إدارة محطة البنزين عند مستوى معنوية 0.01 و هذا بإفتراض أن فترات إنتظار السيارات للتزود بالوقود تتبع التوزيع الطبيعي.

الحل:

- فرضيتا الدراسة:

$$\begin{cases} H_0: \mu \leq 4 \\ H_1: \mu > 4 \end{cases}$$

- إختبار صحة إدعاء الإدارة:

بما أن $n=10< 30$ ومأخوذة من مجتمع طبيعي والإنحراف المعياري للمجتمع σ مجهول، فإن قاعدة القرار تُكتب كما يلي:

$$\begin{cases} T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} \leq +t_{n-1;\,1-\alpha} \Rightarrow \bar{R}H_0 \quad H_0 \text{قبول} \\ T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} > +t_{n-1;\,1-\alpha} \Rightarrow RH_0 \quad H_0 \text{رفض} \end{cases}$$

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} = \frac{3-4}{\frac{0,5}{\sqrt{10-1}}} = -6.02$$

$$t_{n-1;\,1-\alpha} = t_{9;\,0,99} = 2.8221$$

بما أن:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} = -6,02 < 2,8221 \Rightarrow \bar{R}H_0 \quad H_0 \text{قبول}$$

أي أن إدعاء إدارة محطة البنزين بأن معدل فترة إنتظار السيارة للتزود بالوقود لا يفوق أربع دقائق صحيح.

ثالثا: إختبار الفرضيات المتعلقة بالنسبة في المجتمع P

تبقى الخطوات المتبعة في إختبار الفرضيات الخاصة بالمتوسط الحسابي للمجتمع صالحة في جميع الإختبارات الأخرى، كل ما يتغير هو إحصائية الإختبار المناسبة وتوزيعها الإحتمالي؛ ويشترط في تطبيق إختبار فرضيات النسبة في المجتمع أن تكون العينة كبيرة الحجم، مستوى المعنوية α، إحصائية الإختبار المناسبة هي Z والتي تحسب بالعلاقة التالية:

$$Z = \frac{f - p_0}{\sigma(f)} \rightarrow N(0.1)$$

حيث أن $\sigma(f)$ تُحسب كما يلي:

- إذا كان السحب مع الإرجاع أو السحب دون إرجاع من مجتمع غير محدود فإن:

$$\sigma(f) = \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$$

- إذا كان السحب دون إرجاع من مجتمع محدود فإن:

$$\sigma(f) = \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n} \times \frac{N-n}{N-1}}$$

يمكن تلخيص الفرضيات الإحصائية وقاعدة القرار لإختبار النسبة في المجتمع في الجدول الموالي:

الجدول رقم (2): ملخص إختبار الفرضيات الإحصائية للنسبة في المجتمع P

نوع الإختبار	الفرضيات الإحصائية	قاعدة القرار
إختبار ذو طرفين	$\begin{cases} H_0: p = p_0 \\ H_1: p \neq p_0 \end{cases}$	$\begin{cases} Z = \dfrac{f - p_0}{\sigma(f)} \in \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} ; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \Rightarrow \bar{R}H_0 \ H_0$ قبول $\\ Z = \dfrac{f - p_0}{\sigma(f)} \notin \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} ; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \Rightarrow RH_0 \ H_0$ رفض $\end{cases}$
إختبار ذو طرف أيسر	$\begin{cases} H_0: p \geq p_0 \\ H_1: p < p_0 \end{cases}$	$\begin{cases} Z = \dfrac{f - p_0}{\sigma(f)} \geq -Z_{1-\alpha} \Rightarrow \bar{R}H_0 \ H_0$ قبول $\\ Z = \dfrac{f - p_0}{\sigma(f)} < -Z_{1-\alpha} \Rightarrow RH_0 \ H_0$ رفض $\end{cases}$
إختبار ذو طرف أيمن	$\begin{cases} H_0: p \leq p_0 \\ H_1: p > p_0 \end{cases}$	$\begin{cases} Z = \dfrac{f - p_0}{\sigma(f)} \leq +Z_{1-\alpha} \Rightarrow \bar{R}H_0 \ H_0$ قبول $\\ Z = \dfrac{f - p_0}{\sigma(f)} > +Z_{1-\alpha} \Rightarrow RH_0 \ H_0$ رفض $\end{cases}$

المصدر: من إعداد الباحثة بناء على المراجع المستخدمة.

مثال: تدعي مؤسسة بريد الجزائر من دراسات سابقة أن 80% من الزبائن يفضلون إستخدام البطاقة الذهبية على الشيك في سحب أموالهم، وفي استقصاء جديد تم على 500 زبون وجد أن 420 يفضلون البطاقة الذهبية.

المطلوب:

- عند مستوى ثقة 95 %، هل بيانات العينة تؤيد إدعاء مؤسسة بريد الجزائر ؟

الحل:

- صياغة الفرضيات:

بما أن المسألة لم تتضمن اتجاها محددا حيث أشارت معطيات المثال إلى تحقق النسبة على مستوى العينة أم لا، فإنه يتم استعمال فرضية بديلة ذات اتجاهين، وتكون صياغة الفرضيتين كما يلي:

$$\begin{cases} H_0: p = p_0 \\ H_1: p \neq p_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0: p = 0.80 \\ H_1: p \neq 0.80 \end{cases}$$

- تحديد مستوى الدلالة:

مستوى الثقة $(1-\alpha) = 0.95$ ومنه مستوى الدلالة α هو 0.05، وبما أن الإختبار ثنائي الإتجاه فإن منطقة الرفض ستكون على جانبين.

- تحديد قاعدة القرار:

بما أن حجم العينة $n=500$ أكبر أو يساوي 30 فإنه يتم التقريب للقانون الطبيعي، وبما أن الإختبار ثنائي الإتجاه فإن قاعدة القرار تكتب كما يلي:

$$\begin{cases} Z = \dfrac{f - p_0}{\sigma(f)} \in \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\,;\, +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \Rightarrow \bar{R}H_0 \; H_0 \text{قبول} \\ Z = \dfrac{f - p_0}{\sigma(f)} \notin \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\,;\, +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \Rightarrow RH_0 \; H_0 \text{رفض} \end{cases}$$

- حساب القيمة الجدولية والفعلية لإحصائية الإختبار

- القيمة الجدولية:

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0.05}{2}} = Z_{0.975} = 1.96$$

- القيمة الفعلية:

$$f = \frac{420}{500} = 0.84$$

$$Z = \frac{f - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0.84 - 0.80}{\sqrt{\dfrac{0.8(1-0.8)}{500}}} = 1$$

- المقارنة وإتخاذ القرار:

بما أن:

$$Z = \frac{f - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} = 1 \in [-1.96;\, +1.96] \Rightarrow \bar{R}H_0 \; H_0 \text{قبول}$$

وهذا يعني **قبول الفرضية الصفرية H_0** أي أن إدعاء مؤسسة بريد الجزائر بأن 80% من الزبائن يفضلون إستخدام البطاقة الذهبية على الشيك في سحب أموالهم.

رابعا: إختبار الفرضيات المتعلقة بتباين المجتمع

يُشترط في تطبيق إختبار فرضيات تباين المجتمع أن تكون العينة المسحوبة n من مجتمع طبيعي، مستوى المعنوية α، مجال قبول أو رفض الفرضية الصفرية يتحدد بالإعتماد على توزيع كاي مربع بدرجة حرية (n-1) وبالتالي فإن إحصائية الإختبار المناسبة هي X^2 .

$$X^2 = \frac{(n-1)S^2}{{\sigma_0}^2}$$

حيث أن:

- ${\sigma_0}^2$: هي قيمة σ^2 المحددة بالفرضية الصفرية؛
- n: حجم العينه؛
- S^2: تباين العينة.

و يمكن تلخيص الفرضيات الإحصائية و قاعدة القرار لإختبار التباين في المجتمع في الجدول الموالي:

الجدول رقم (3): ملخص إختبار الفرضيات الإحصائية لتباين المجتمع σ^2

نوع الإختبار	الفرضيات الإحصائية	قاعدة القرار
إختبار ذو طرفين	$\begin{cases} H_0: \sigma^2 = {\sigma_0}^2 \\ H_1: \sigma^2 \neq {\sigma_0}^2 \end{cases}$	$\begin{cases} X^2 = \frac{(n-1)S^2}{{\sigma_0}^2} \in \left[{x^2}_{\frac{\alpha}{2};n-1};\ {x^2}_{1-\frac{\alpha}{2};n-1} \right] \Rightarrow \bar{R}H_0\ H_0$قبول$ \\ X^2 = \frac{(n-1)S^2}{{\sigma_0}^2} \notin \left[{x^2}_{\frac{\alpha}{2};n-1};\ {x^2}_{1-\frac{\alpha}{2};n-1} \right] \Rightarrow RH_0\ H_0$رفض$ \end{cases}$
إختبار ذو طرف أيسر	$\begin{cases} H_0: \sigma^2 \geq {\sigma_0}^2 \\ H_1: \sigma^2 < {\sigma_0}^2 \end{cases}$	$\begin{cases} X^2 = \frac{(n-1)S^2}{{\sigma_0}^2} \geq {x^2}_{\alpha;n-1} \Rightarrow \bar{R}H_0\ H_0$قبول$ \\ X^2 = \frac{(n-1)S^2}{{\sigma_0}^2} < {x^2}_{\alpha;n-1} \Rightarrow RH_0\ H_0$رفض$ \end{cases}$
إختبار ذو طرف أيمن	$\begin{cases} H_0: \sigma^2 \leq {\sigma_0}^2 \\ H_1: \sigma^2 > {\sigma_0}^2 \end{cases}$	$\begin{cases} X^2 = \frac{(n-1)S^2}{{\sigma_0}^2} \leq {x^2}_{1-\alpha;n-1} \Rightarrow \bar{R}H_0\ H_0$قبول$ \\ X^2 = \frac{(n-1)S^2}{{\sigma_0}^2} > {x^2}_{1-\alpha;n-1} \Rightarrow RH_0\ H_0$رفض$ \end{cases}$

المصدر: من إعداد الباحثة بناء على المراجع المستخدمة.

مثال:

تقوم آلة بإنتاج دعائم معدنية ذات أطوال مختلفة بحيث يمكن ضبط الطول المطلوب بتعديل طفيف للآلة إلا أن هناك دوما فروق في حدود معينة، ولضمان تجانس نسبي للدعائم المنتجة فإن معايير الإنتاج تشترط أن لا يزيد تباين أطوالها عن 0.36 ملم.

بفرض أن أطوال الدعائم تتبع التوزيع الطبيعي سحبنا عشوائيا عينة من 20 دعامة فوجدنا أن تباين أطوالها هو 0.42 ملم، فهل يمكن قبول فرضية أن الدعائم متجانسة عند مستوى المعنوية 5%.

الحل:

- صياغة الفرضيات:

$$\begin{cases} H_0: \sigma^2 \leq 0.36 \\ H_1: \sigma^2 > 0.36 \end{cases}$$

- مستوى الدلالة α: هو 0.05.

- قاعدة القرار: تُكتب كما يلي:

$$\begin{cases} X^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{{\sigma_0}^2} \leq {x^2}_{1-\alpha;n-1} \Rightarrow \bar{R}H_0 \text{ } H_0 \text{قبول} \\ X^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{{\sigma_0}^2} > {x^2}_{1-\alpha;n-1} \Rightarrow RH_0 \text{ } H_0 \text{رفض} \end{cases}$$

- حساب القيمة الجدولية والفعلية لإحصائية الإختبار:

- القيمة الجدولية: من جدول كاي مربع نجد ${x^2}_{1-\alpha;n-1} = {x^2}_{0.95;19} = 30.1$

- القيمة الفعلية:

$$X^2 = \frac{(n-1)S^2}{{\sigma_0}^2} = \frac{19 \times 0.42}{0.36} = 22.167$$

- المقارنة وإتخاذ القرار

بما أن:

$$X^2 = \frac{(n-1)S^2}{{\sigma_0}^2} = 22.167 < {x^2}_{1-\alpha;n-1} = 30.1$$

يعني **قبول الفرضية الصفرية H_0** أي أن تشتت أطوال الدعائم يظهر في حدود معايير الإنتاج و بالتالي نعتبرها متجانسة.

خامسا: سلسلة تمارين محلولة

التمرين الأول

سحبت عينة عشوائية مكونة من 6 طلاب من طلبة السنة الثانية علوم التسيير وكانت علاماتهم في إمتحان الإحصاء كالتالي: 11، 13، 9، 16، 11، 12.علما أن علامات الطلبة تخضع للتوزيع الطبيعي.

المطلوب:

1- تحقق من صحة الفرضية التالية:$H_0 : \mu=13$ و ذلك عند مستوى دلالة 0.05؟

2- ما نوع الإختبار الذي قمنا به؟

التمرين الثاني

إذا كانت لدينا الفرضية التالية و المتعلقة بمتوسط المصاريف الأسبوعية للأسر داخل مجتمع ما:

$$H_0 : \mu=52 \qquad H_1 : \mu\neq52$$

من أجل التأكد من هذه الفرضية أخذنا عينة عشوائية حجمها 65 أسرة من هذا المجتمع، فتحصلنا على متوسط حسابي لهذه العينة يساوي 56 و إنحراف معياري لها يساوي 10.

المطلوب:

1- إجراء إختبار لهذه الفرضية عند مستوى الدلالة 5%؟

2- تحديد نوع الإختبار الذي قمت به؟

التمرين الثالث

من أجل إختبار متوسط وزن عبوات الشامبو لأحدى المؤسسات هي أكبر من أو يساوي 250 ملل، قامت وحدة الرقابة على الجودة بالمؤسسة بسحب عينة عشوائية حجمها 37 عبوة، فتحصلت على متوسط وزن يساوي 245 ملل بإنحراف معياري يساوي 24 ملل.

المطلوب:

1- حدد فرضيتا هذه الدراسة؟

2- إجراء إختبار لهذه الفرضية عند مستوى ثقة 95%؟

3- ما نوع الإختبار الذي قمت به؟ مثله بيانيا؟

التمرين الرابع

من أجل إختبار أن متوسط فترة حياة البطاريات المنتجة من طرف مؤسسة ما أصغر من أو يساوي 190 ساعة، تم سحب عينة عشوائية حجمها 101 بطارية، فتحصلنا على متوسط فترة حياة لهذه العينة يساوي 200 ساعة بإنحراف معياري 30 ساعة.

المطلوب:

1- حدد فرضيتا هذه الدراسة؟

2- إجراء إختبار لهذه الفرضية عند مستوى الدلالة 1%؟

3- ما نوع الإختبار الذي قمت به؟

حل سلسلة التمارين

حل التمرين الأول

نختبر صحة الفرضية التالية:

$$\begin{cases} H_0: \mu = 13 \\ H_1: \mu \neq 13 \end{cases}$$

بما أن $n = 13 < 30$ و مأخوذة من مجتمع طبيعي وغير محدود والإنحراف المعياري للمجتمع σ مجهول فإن قاعدة القرار تُكتب كما يلي:

$$\begin{cases} T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n-1}}} \in \left[-t_{n-1;\,1-\frac{\alpha}{2}}\,;\,+t_{n-1;\,1-\frac{\alpha}{2}}\right] \Rightarrow \bar{R}H_0 \quad H_0 \text{قبول} \\ T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n-1}}} \notin \left[-t_{n-1;\,1-\frac{\alpha}{2}}\,;\,+t_{n-1;\,1-\frac{\alpha}{2}}\right] \Rightarrow RH_0 \quad H_0 \text{رفض} \end{cases}$$

- **القيمة الجدولية لإحصائية الإختبار**

من جدول توزيع ستيودنت نجد: $t_{(n-1);1-\frac{\alpha}{2}} = t_{(6-1);1-\frac{0.05}{2}} = t_{5;0.975} = 2.57$

- **القيمة الفعلية لإحصائية الإختبار**

- حساب الوسط الحسابي للعينة $\overline{X}$:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{11+13+9+16+11+12}{6} = 12$$

- حساب الإنحراف المعياري للعينة S:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n}} \sqrt{\frac{(11-12)^2+(13-12)^2+(9-12)^2\ldots(12-12)^2}{6}}$$

$$S=2.20$$

$$T = \frac{12-13}{\frac{2.20}{\sqrt{5}}} = -1.02$$

بما أن:

$$T = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} = -1.02 \in [-2.75\,;\,+2.75] \Rightarrow \bar{R}H_0\ H_0 \text{قبول}$$

هذا يعني أن القرار هو **قبول الفرضية الصفرية H_0** عند مستوى الدلالة **α=0.01**، أي أن متوسط علامات طلبة السنة الثانية علوم التسيير في مقياس الإحصاء يساوي 13 نقطة.

2- نوع الإختبار: إختبار ذو طرفين؛

حل التمرين الثاني

نختبر صحة الفرضية التالية:

$$\begin{cases} H_0: \mu = 52 \\ H_1: \mu \neq 52 \end{cases}$$

- بما أن $n = 65 > 30$ (عينة كبيرة) والمجتمع غير محدود وσ مجهول فإن قاعدة القرار تُكتب كما يلي:

$$\begin{cases} Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n-1}}} \in \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} ; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \Rightarrow \bar{R}H_0 \quad H_0 \text{قبول} \\ Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n-1}}} \notin \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} ; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \Rightarrow RH_0 \quad H_0 \text{رفض} \end{cases}$$

من جدول القانون الطبيعي المعياري نجد $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0.05}{2}} = Z_{0.975} = 1.9$

لدينا:

$$\bar{X} = 56 \; ; \; S = 10 \; ; \; \mu_0 = 52$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n-1}}} = \frac{56 - 52}{\dfrac{10}{\sqrt{65-1}}} = -3.2$$

بما أن:

$$Z = -3.2 \notin [-1.96 ; +1.96] \Rightarrow RH_0$$

هذا يعني أن القرار هو **رفض الفرضية الصفرية H_0** عند مستوى الدلالة ***α=O.05***.

نوع الإختبار: إختبار ذو طرفين.

حل التمرين الثالث

1- تحديد فرضيات الدراسة:

$$\begin{cases} H_0: \mu \geq 250 \\ H_1: \mu < 250 \end{cases}$$

2- إختبار صحة الفرضية:

بما أن $n = 37 > 30$ والمجتمع غير محدود و σ مجهول فإن قاعدة القرار تكتب كما يلي:

$$\begin{cases} Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n-1}}} \geq -Z_{1-\alpha} \Rightarrow \bar{R}H_0 \quad H_0 \text{قبول} \\ Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n-1}}} < -Z_{1-\alpha} \Rightarrow RH_0 \quad H_0 \text{رفض} \end{cases}$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n-1}}} = \frac{245 - 250}{\dfrac{24}{\sqrt{36}}} = -1.25$$

$$-Z_{1-\alpha} = -Z_{1-0.05} = -Z_{0.95} = -1.6449$$

بما أن:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} = -1.25 \geq -1.6449 \Rightarrow RH_0 \quad H_0 \text{رفض}$$

هذا يعني أن القرار هو **قبول الفرضية الصفرية H_0** عند مستوى الدلالة **α=0.01**، أي أن متوسط وزن عبوات الشامبو لأحدى المؤسسات هي أكبر من أو يساوي 250 ملل.

نوع الإختبار: أحادي الإتجاه ذو طرف أيسر.

حل التمرين الرابع

1- تحديد فرضيا الدراسة:

$$\begin{cases} H_0: \mu \leq 190 \\ H_1: \mu > 190 \end{cases}$$

2- إختبار صحة الفرضية:

بما أن $n = 101 > 30$ والمجتمع غير محدود σ مجهول فإن قاعدة القرار تكتب كما يلي:

$$\begin{cases} Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n-1}}} \leq +Z_{1-\alpha} \Rightarrow \bar{R}H_0 \ H_0 \text{قبول} \\ Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n-1}}} > +Z_{1-\alpha} \Rightarrow RH_0 \ H_0 \text{رفض} \end{cases}$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n-1}}} = \frac{200 - 190}{\dfrac{30}{\sqrt{101-1}}} = 3.33$$

$$Z_{1-\alpha} = Z_{1-0.01} = Z_{0.99} = 2.3263$$

بما أن:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n-1}}} = 3.33 > 2.3263 \Rightarrow RH_0 \ H_0 \text{رفض}$$

و منه فرضية أن متوسط فترة حياة البطاريات المنتجة من طرف مؤسسة ما أصغر من أو يساوي 190 ساعة غير صحيح.

3- **نوع الإختبار:** أحادي الإتجاه ذو طرف أيمن.

الملاحـــــــــق

الملحق رقم (01): جدول التوزيع الطبيعي المعياري 01

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5476	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.8366	0.6406	0.5443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6735	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	07422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	07734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8506	0.8531	0.8554	0.8577	0.8598	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	08962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9043	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9866	0.9871	0.9875	0.9876	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9915
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9978	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

z	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.8	4.0	4.5
F(z)	0.99865	0.999032	0.999513	0.999517	0.999563	0.999767	0.999941	0.999926	0.999968	0.999997

Activer Windows
Accédez aux paramètres p

الملحق رقم (02): جدول التوزيع الطبيعي المعياري 02

p	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.010	
0.00	-	3.0902	2.8782	2.7478	2.6521	2.5758	2.5121	2.4573	2.4089	2.3656	2.3263	0.99
0.01	2.3263	2.2904	2.2571	2.2262	2.1973	2.1701	2.1444	2.1201	2.0969	2.0749	2.0537	0.98
0.02	2.0537	2.0335	2.0141	1.9954	1.9774	1.9600	1.9431	1.9266	1.9110	1.8957	1.8808	0.97
0.03	1.8808	1.8663	1.8522	1.8364	1.8250	1.6119	1.7991	1.7868	1.7744	1.7624	1.7507	0.96
0.04	1.7507	1.7392	1.7279	1.7169	1.7060	1.6954	1.6849	1.6747	1.6646	1.6546	1.6449	0.95
0.05	1.6449	1.6352	1.6258	1.6164	1.6072	1.5982	1.5893	1.5805	1.5716	1.5632	1.5548	0.94
0.06	1.5548	1.5464	1.5382	1.5301	1.5220	1.5141	1.5063	1.4985	1.4908	1.4833	1.4758	0.93
0.07	1.4758	1.4684	1.4611	1.4538	1.4466	1.4396	1.4325	1.4265	1.4187	1.4118	1.4051	0.92
0.08	1.4051	1.3984	1.3917	1.3852	1.3787	1.3722	1.3658	1.3585	1.3532	1.3469	1.3408	0.91
0.09	1.3408	1.3346	1.3285	1.3225	1.3165	1.3108	1.3047	1.2988	1.2930	1.2873	1.2816	0.90
0.10	1.2816	1.2759	1.2702	1.2646	1.2591	1.2536	1.2481	1.2426	1.2372	1.2319	1.2265	0.89
0.11	1.2265	1.2212	1.2160	1.2107	1.2055	1.2004	1.1952	1.1901	1.1850	1.1880	1.1750	0.88
0.12	1.1750	1.1700	1.1650	1.1601	1.1552	1.1503	1.1455	1.1407	1.1359	1.1311	1.1264	0.87
0.13	1.1264	1.1217	1.1170	1.1123	1.1077	1.1031	1.0985	1.0939	1.0893	1.0848	1.0803	0.86
0.14	1.0803	1.0758	1.0714	1.0669	1.0625	1.0581	1.0537	1.0454	1.0450	1.0407	1.0364	0.85
0.15	1.0364	1.0322	1.0279	1.0237	1.0194	1.0152	1.0110	1.0069	1.0027	0.9986	0.9945	0.84
0.16	0.9945	0.9904	0.9863	0.9822	0.9782	0.9741	0.9701	0.9661	0.9621	0.9581	0.9542	0.83
0.17	0.9542	0.9502	0.9463	0.9424	0.9385	0.9346	0.9307	0.9269	0.9230	0.9192	0.9154	0.82
0.18	0.9154	0.9116	0.9078	0.9040	0.9002	0.8965	0.8927	0.8890	0.8853	0.8816	0.8779	0.81
0.19	0.8779	0.8742	0.8705	0.8669	0.8633	0.8596	0.8560	0.8524	0.8488	0.8452	0.8416	0.80
0.20	0.8416	0.8381	0.8345	0.8310	0.8274	0.8239	0.8204	0.8169	0.8134	0.8099	0.8064	0.79
0.21	0.8064	0.8030	0.7995	0.7961	0.7926	0.7892	0.7868	0.7824	0.7790	0.7756	0.7722	0.78
0.22	0.7722	0.7688	0.7655	0.7621	0.7588	0.7554	0.7521	0.7488	0.7454	0.7421	0.7388	0.77
0.23	0.7388	0.7366	0.7323	0.7290	0.7257	0.7226	0.7192	0.7160	0.7128	0.7095	0.7063	0.76
0.24	0.7063	0.7031	0.6999	0.6967	0.6935	0.6903	0.6871	0.6840	0.6808	0.6776	0.6745	0.75
0.25	0.6745	0.6713	0.6682	0.6651	0.6620	0.6588	0.6567	0.6528	0.6495	0.6464	0.6433	0.74
0.26	0.6433	0.6403	0.6372	0.6341	0.6311	0.6280	0.6250	0.6219	0.6189	0.6158	0.6128	0.73
0.27	0.6128	0.6098	0.6068	0.6038	0.6008	0.5978	0.5948	0.5918	0.5888	0.5858	0.5828	0.72
0.28	0.5828	0.5799	0.5769	0.5740	0.5710	0.5681	0.5651	0.5622	0.5592	0.5563	0.5534	0.71
0.29	0.5534	0.5505	0.5476	0.5446	0.5417	0.5388	0.5369	0.5330	0.5302	0.5273	0.5244	0.70
0.30	0.5244	0.5215	0.5187	0.5158	0.5129	0.5101	0.5072	0.5044	0.5016	0.4987	0.4956	0.69
0.31	0.4959	0.4930	0.4902	0.4874	0.4845	0.4817	0.4789	0.4761	0.4733	0.4705	0.4677	0.68
0.32	0.4677	0.4649	0.4621	0.4593	0.4565	0.4536	0.4510	0.4482	0.4454	0.4427	0.4399	0.67
0.33	0.4399	0.4372	0.4344	0.4316	0.4289	0.4261	0.4234	0.4207	0.4179	0.4152	0.4125	0.66
0.34	0.4125	0.4097	0.4070	0.4043	0.4016	0.3989	0.3961	0.3834	0.3907	0.3880	0.3853	0.65
0.35	0.3853	0.3826	0.3799	0.3772	0.3745	0.3719	0.3692	0.3665	0.3638	0.3611	0.3585	0.64
0.36	0.3585	0.3558	0.3531	0.3505	0.3478	0.3451	0.3425	0.3398	0.3372	0.3345	0.3319	0.63
0.37	0.3319	0.3292	0.3266	0.3239	0.3213	0.3186	0.3160	0.3134	0.3107	0.3081	0.3055	0.62
0.38	0.3055	0.3029	0.3002	0.2979	0.2950	0.2924	0.2898	0.2871	0.2845	0.2819	0.2793	0.61
0.39	0.2793	0.2767	0.2741	0.2715	0.2689	0.2663	0.2637	0.2611	0.2585	0.2559	0.2533	0.60
0.40	0.2533	0.2508	0.2482	0.2466	0.2430	0.2404	0.2378	0.2353	0.2327	0.2301	0.2275	0.59
0.41	0.2275	0.2250	0.2224	0.2198	0.2173	0.2147	0.2121	0.2095	0.2070	0.2045	0.2019	0.58
0.42	0.2019	0.1993	0.1968	0.1942	0.1917	0.1891	0.1866	0.1840	0.1815	0.1789	0.1764	0.57
0.43	0.1764	0.1738	0.1713	0.1687	0.1662	0.1637	0.1611	0.1588	0.1560	0.1535	0.1510	0.56
0.44	0.1510	0.1464	0.1459	0.1434	0.1408	0.1383	0.1358	0.1332	0.1307	0.1282	0.1257	0.55
0.45	0.1257	0.1231	0.1206	0.1181	0.1166	0.1130	0.1105	0.1080	0.1055	0.1030	0.1004	0.54
0.46	0.1004	0.0979	0.0954	0.0929	0.0904	0.0878	0.0853	0.0828	0.0803	0.0778	0.0753	0.53
0.47	0.0753	0.0728	0.0702	0.0677	0.0652	0.0627	0.0602	0.0577	0.0552	0.0527	0.0502	0.52
0.48	0.0502	0.0476	0.0451	0.0426	0.0401	0.0376	0.0351	0.0326	0.0301	0.0276	0.0251	0.51
0.49	0.0251	0.0226	0.0201	0.0175	0.0150	0.0125	0.0100	0.0075	0.0050	0.0025	0.0000	0.50
	0.010	0.009	0.008	0.007	0.006	0.005	0.004	0.003	0.002	0.001	0.000	p

Activ

الملحق رقم (03): جدول توزيع كاي تربيع

	$\chi^2_{0.005}$	$\chi^2_{0.01}$	$\chi^2_{0.025}$	$\chi^2_{0.05}$	$\chi^2_{0.10}$	$\chi^2_{0.25}$	$\chi^2_{0.50}$	$\chi^2_{0.75}$	$\chi^2_{0.90}$	$\chi^2_{0.95}$	$\chi^2_{0.975}$	$\chi^2_{0.99}$	$\chi^2_{0.995}$	$\chi^2_{0.999}$
1	0.0000	0.0002	0.0010	0.0089	0.0158	0.102	0.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	10.8
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.108	0.211	0.575	1.89	2.77	4.61	5.99	7.33	9.21	10.6	13.8
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.8	12.8	16.3
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9	18.5
5	0.412	0.554	0.881	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	16.1	16.7	20.5
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5	22.5
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.88	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3	24.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.67	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0	26.1
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	**16.9**	19.0	21.7	23.6	27.9
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.84	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2	29.6
11	2.60	3.05	8.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8	31.3
12	3.07	3.57	4.40	5.28	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.8	26.2	28.3	32.9
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.8	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8	34.5
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.8	36.1
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8	37.7
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.81	11.9	15.8	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3	39.3
17	5.70	6.41	7.66	8.67	10.1	12.8	16.8	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7	40.8
18	6.26	7.01	8.23	9.89	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.6	34.8	37.2	42.3
19	6.84	7.68	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6	43.8
20	7.48	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0	45.3
21	8.08	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	88.9	41.4	46.8
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8	48.3
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2	49.7
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6	51.2
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9	52.6
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.8	54.1
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6	55.5
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.8	51.0	56.9
29	13.1	14.8	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3	58.8
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.8	43.8	47.0	50.9	53.7	59.7
40	20.7	22.2	24.4	26.5	29.1	33.7	39.3	45.6	51.8	55.8	59.8	63.7	66.8	73.4
50	28.0	29.7	32.4	34.8	37.7	42.9	49.3	56.8	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5	86.7
60	35.5	37.5	40.5	43.2	46.5	52.3	59.3	67.0	74.4	79.1	88.3	88.4	92.0	99.6
70	43.3	45.4	48.8	51.7	55.3	61.7	69.3	77.6	85.5	90.5	95.0	100	104	112
80	51.2	53.5	57.2	60.4	64.3	71.1	79.3	88.1	96.6	102	107	112	116	125
90	59.2	61.8	65.6	69.1	73.8	80.6	89.3	98.6	108	113	118	124	128	137
100	67.3	70.1	74.2	77.9	82.4	90.1	99.3	109	118	124	130	136	140	149

Activer Windows
Accédez aux paramètres pc

الملحق رقم (04): جدول توزيع ستيودنت

	$t_{0.55}$	$t_{0.60}$	$t_{0.70}$	$t_{0.75}$	$t_{0.80}$	$t_{0.90}$	$t_{0.95}$	$t_{0.975}$	$t_{0.99}$	$t_{0.995}$
1	0.158	0.325	0.727	1.000	1.376	3.08	6.31	12.71	31.82	63.66
2	0.142	0.289	0.617	0.816	1.061	1.89	2.92	4.30	6.96	9.92
3	0.137	0.277	0.584	0.765	0.978	1.64	2.35	3.18	4.54	5.84
4	0.134	0.271	0.569	0.741	0.941	1.58	2.13	2.78	3.75	4.60
5	0.132	0.267	0.559	0.727	0.920	1.48	2.02	2.57	3.36	4.03
6	0.131	0.265	0.553	0.718	0.906	1.44	1.94	2.45	3.14	3.71
7	0.130	0.263	0.549	0.711	0.896	1.42	1.90	2.36	3.00	3.50
8	0.130	0.262	0.546	0.706	0.889	1.40	1.86	2.31	2.90	3.36
9	0.129	0.261	0.543	0.703	0.888	1.38	1.83	2.26	2.82	3.25
10	0.129	0.260	0.542	0.700	0.879	1.37	1.81	2.23	2.76	3.17
11	0.129	0.260	0.540	0.697	0.876	1.36	1.80	2.20	2.72	3.11
12	0.128	0.259	0.539	0.695	0.873	1.36	1.78	2.18	2.68	3.06
13	0.128	0.259	0.538	0.694	0.870	1.35	1.77	2.16	2.65	3.01
14	0.128	0.258	0.537	0.692	0.868	1.34	1.76	2.14	2.62	2.98
15	0.128	0.258	0.536	0.691	0.866	1.34	1.75	2.13	2.60	2.95
16	0.128	0.258	0.535	0.690	0.865	1.34	1.75	2.12	2.58	2.92
17	0.128	0.257	0.534	0.689	0.863	1.33	1.74	2.11	2.57	2.90
18	0.127	0.257	0.534	0.688	0.862	1.33	1.73	2.10	2.55	2.88
19	0.127	0.257	0.533	0.688	0.861	1.33	1.73	2.09	2.54	2.86
20	0.127	0.257	0.533	0.687	0.860	1.32	1.72	2.09	2.53	2.84
21	0.127	0.257	0.532	0.686	0.859	1.32	1.72	2.08	2.52	2.83
22	0.127	0.256	0.532	0.686	0.858	1.32	1.72	2.07	2.51	2.82
23	0.127	0.256	0.532	0.685	0.858	1.32	1.71	2.07	2.50	2.81
24	0.127	0.256	0.531	0.685	0.857	1.32	1.71	2.06	2.49	2.80
25	0.127	0.256	0.531	0.684	0.856	1.32	1.71	2.06	2.48	2.79
26	0.127	0.256	0.531	0.684	0.856	1.32	1.71	2.06	2.48	2.78
27	0.127	0.256	0.531	0.684	0.855	1.31	1.70	2.05	2.47	2.77
28	0.127	0.256	0.530	0.683	0.855	1.31	1.70	2.05	2.47	2.76
29	0.127	0.256	0.530	0.683	0.854	1.31	1.70	2.04	2.46	2.76
30	0.127	0.256	0.530	0.683	0.854	1.31	1.70	2.04	2.46	2.75
40	0.126	0.255	0.529	0.681	0.851	1.30	1.68	2.02	2.42	2.70
60	0.126	0.254	0.527	0.679	0.848	1.30	1.67	2.00	2.39	2.66
120	0.126	0.254	0.526	0.677	0.845	1.29	1.66	1.98	2.36	2.62
∞	0.126	0.253	0.524	0.674	0.842	1.28	1.645	1.96	2.33	2.58

الملحق رقم (05): جدول توزيع فيشر

$$p = 0.95$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	251	252	253	254
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.37
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.98
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.70	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.80
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.18
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.43	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

الملحق رقم (06): جدول توزيع فيشر

$p = 0.99$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4050	5000	5403	5625	5764	5859	5923	5981	6023	6056	6106	6157	62.09	6235	6261	6287	6313	6339	6366
2	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5
3	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3	27.2	27.1	26.9	26.7	26.6	26.5	26.4	26.3	26.2	26.1
4	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7	14.5	14.4	14.2	14.0	13.9	13.8	13.7	13.7	13.6	13.5
5	16.8	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2	10.1	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.48	3.34	3.25	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.70	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	8.68	3.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	8.40	6.11	5.19	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.68	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.48	4.10	3.87	3.70	3.66	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.56	2.46	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.82	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00

المراجـــــــــع

قائمة المراجع

أولا: المراجع باللغة العربية

1- إبراهيم أبو عقيل، **مبادئ في الإحصاء**، دار أسامة للنشر و التوزيع، عمان، الأردن، الطبعة الأولى، 2012.

2- إبراهيم علي إبراهيم عبد ربه، **مبادئ علم الإحصاء**، الدار الجامعية، الإسكندرية، مصر، الطبعة الثانية، 2008.

3- أماني موسى محمد، **التحليل الإحصائي للبيانات**، مركز تطوير الدراسات العليا والبحوث كلية الهندسة لجامعة القاهرة، مصر، الطبعة الأولى، 2007.

4- جبار عبد مضحي، **مقدمة في نظرية الاحتمالات**، دار المسيرة للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، الطبعة الأولى، 2011.

5- جمال رشيد الكحلوت، **مبادئ نظرية العينات**، مكتبة الفريد الالكترونية، 2003 .

6- جمال محمد شاكر محمد، **المرشد في التحليل الاحصائي للبيانات باستخدامSPS** ، الدار الجامعية للنشر، الاسكندرية، مصر، الطبعة الأولى، 2007 .

7- جميل أحمد. **أساليب المعاينة، القياس وتحليل البيانات** .المركز الجامعي بويرة، ص ص 200-202.

8- حسن ياسين طعمة وإيمان حسين حنوش، **طرق الإحصاء الوصفي**، دار صفاء للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، الطبعة الأولى، 2009.

9- حسن ياسين طعمة وإيمان حسين حنوش، **الإحصاء الإستدلالي**، دار صفاء للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، الطبعة الثانية، 2015.

10- سالم عيسى بدر وعماد غصاب عبابنة، **مبادئ الإحصاء الوصفي و الإستدلالي**، دار المسيرة للنشر والتوزيع، عمان، الاردن، الطبعة الأولى، 2007.

11- سعيد التل وآخرون، **مناهج البحث العلمي، تصميم البحث والتحليل الإحصائي**، دار المسيرة، عمان، الأردن، 2007 .

12- سليم ذياب السعدي، **مبادئ علم الإحصاء**، دار الكتاب الجديدة المتحدة، بيروت، لبنان، الطبعة الأولى، 2004

13- شفيق أحمد العتوم، **طرق الإحصاء بإستخدامSPS**، دار المناهج للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، الطبعة الثالثة، 2008.

14- عبد الرزاق بني هاني، **الاقتصاد القياسي: المبادئ الرياضية والاحصائية**، دار وائل للنشر، عمان، الأردن، الطبعة الأولى، 2014 .

15- عدنان عوض، **الإحصاء التطبيقي**، الشركة العربية المتحدة للتسويق و التوريدات، القاهرة، جمهورية مصر العربية، الطبعة 2008/10.

16- عزام عبد الرحمن صبري، **الإحصاء التطبيقي بنظام SPSS**، الدار المنهجية للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى، 2016.

17- علي أحمد السقاف، **الإحصاء الوصفي و الإستدلالي**، إصدار المركز الديمقراطي العربي، برلين، ألمانيا، الطبعة الأولى، 2020.

18- فاطمة بوعروري، **محاضرات في مقياس الإحصاء 3** ، كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير، جامعة سطيف 1، الجزائر، 2022-2023.

19- مباركة جناد، **محاضرات في مقياس الإحصاء 3 موجهة إلى طلبة السنة الثانية علوم المالية و المحاسبة**، كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير، جامعة سطيف 1، الجزائر، 2020-2021.

20- محمد خير سليم أبو زيد، **التحليل الإحصائي للبيانات بإستخدام برمجية SPSS**، دار صفاء، عمان، الأردن، 2010.

21- محمد صبحي أبو صالح، **الطرق الإحصائية**، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، الطبعة العربية 2009.

22- محمد عبد الفتاح الصيرفي ، **الدليل التطبيقي للباحثين**، دار وائل، عمان، الأردن، 2002 .

23- مركز الإحصاء أبو ضبي. **دليل المعاينة الإحصائية: أدلة المنهجية والجودة**، دليل رقم (4). متوفر على الموقع www.scad.ae

24- سهير فهمي حجازي ومحمود الدريني، **الإحصاء التطبيقي**، الشركة المصرية لإعادة التأمين، مصر، 2004.

25-شبيجل وآخرون، **الإحتمالات والإحصاء: ملخصات شوم إيزي**. الدار الدولية للإستثمارات الثقافية، مصر،د ت ن.

ثانيا: المراجع باللغة الأجنبية

26- Ansion Guy, **Sondages et statistique**, labor éditions, Bruxelles, 1997.
27- François Cottet-Emard ,**probabilités et tests d'hypothèse : cours et exercices corrigés**, Belgique , 1er édition, 2014 .
28- Hamdani Hocine, **statistique descriptive**, office des publications universitaires, Alger, 2001.
29- Tille Yves, **théorie des sondages, Echantillionnage et estimation en populations finies**, Dunod, Paris, 2001.

فهرس الجداول والأشكال البيانية والملاحق

أولا: قائمة الجداول

رقم الجدول	عنوان الجدول	الصفحة
01	الخطأ من النوع الأول والخطأ من النوع الثاني	84
02	ملخص إختبار الفرضيات الإحصائية للنسبة في المجتمع P	100
03	ملخص إختبار الفرضيات الإحصائية لتباين المجتمع σ^2	102

ثانيا: قائمة الأشكال البيانية

رقم الشكل	عنوان الشكل	الصفحة
01	تمثيل بياني لكيفية حصر Z بين قيمتين	66
02	منطقتي القبول والرفض في الإختبار ذو طرفين	88
03	منطقتي القبول والرفض في الإختبار ذو طرف أيسر	93
04	منطقتي القبول والرفض في الإختبار ذو طرف أيمن	96

ثالثا: قائمة الملاحق

رقم الملحق	عنوان الملحق	الصفحة
01	جدول التوزيع الطبيعي المعياري 01	111
02	جدول التوزيع الطبيعي المعياري 01	112
03	جدول توزيع كاي تربيع	113
04	جدول توزيع ستيودنت	114
05	جدول توزيع فيشر عند P=0.95	115
06	جدول توزيع فيشر عند P=0.99	116

فهرس المحتويات

فهرس المحتويات

العنوان	الصفحة
مقدمـــــة	**ب-ج**
الفصل الأول: مدخل للتعريف بالإحصاء الإستدلالي	**22-2**
تمهيد	2
أولا: مفهوم الإحصاء والإحصاء الإستدلالي	3
1- تعريف علم الإحصاء	3
2- فروع علم الإحصاء	4
3- مفاهيم حول المجتمع الإحصائي، العينة الإحصائية، الوحدة الإحصائية، معالم المجتمع وإحصائيات العينة	5
ثانيا:البيانات الإحصائية	7
1- تعريف البيانات الإحصائية	7
2- المتغيرات وعلاقتها بالبيانات الإحصائية	7
3- طبيعة البيانات الإحصائية	8
4- أساليب جمع البيانات الإحصائية	9
5- طرق جمع البيانات الإحصائية	10
6- مصادر جمع البيانات الإحصائية	10
ثالثا: المعاينة الإحصائية	11
1- تعريف المعاينة الإحصائية	11
2- خطوات تصميم عينة	11
3- أنواع العينات وطرق إختيارها	13
4- تحديد حجم العينة	20
5- مصادر الأخطاء في الدراسات عن طريق العينات	22
الفصل الثاني: نظرية المعاينة	46-24
تمهيد	24
أولا: توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $(\bar{x})$	25
1- متوسط وتباين توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $(\bar{x})$	25
2- طبيعة التوزيع الإحتمالي للوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$	30
ثانيا: توزيع المعاينة للنسبة في العينة (f)	34
ثالثا: توزيع المعاينة لتباين العينة S^2	37
رابعا: توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي عينتين $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$	38
خامسا: توزيع المعاينة للفرق بين نسبتي عينتين $(f_1 - f_2)$	43

سادسا: توزيع المعاينة للنسبة بين تباين عينتين $\frac{{S_1}^2}{{S_2}^2}$	45
سابعا: سلسلة تمارين محلولة.	46
الفصل الثالث: نظرية التقدير	79-48
تمهيد	48
أولا: مفاهيم ومصطلحات	49
1- التقدير	49
2- خصائص المقَدر الجيد	49
3- أنواع التقدير	51
ثانيا: مجال الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع μ	55
1- حالة العينات الكبيرة $n \geq 30$	55
2- حالة العينات الصغيرة $n < 30$	60
ثالثا: مجال الثقة للنسبة في المجتمع P	62
رابعا: مجال الثقة لتباين المجتمع σ^2	64
خامسا: خطأ المعاينة في التقدير و تحديد حجم العينة اللازم لعدم تجاوز خطأ معين	67
1- تحديد حجم العينة n اللازم لتقدير المتوسط الحسابي للمجتمع μ	68
2- تحديد حجم العينة n اللازم لتقدير النسبة في المجتمع P	70
سادسا: سلسلة تمارين محلولة	71
الفصل الرابع: إختبار الفرضيات	109-81
تمهيد	81
أولا: مفاهيم ومصطلحات	82
1- مفهوم الفرضية الإحصائية	82
2- مفهوم إختبار الفرضيات الإحصائية	82
3- عناصر الإختبار الإحصائي	82
4- أنواع إختبار الفرضيات	85
5- خطوات عملية إختبار الفرضيات	86
ثانيا: إختبار الفرضيات المتعلقة بمتوسط المجتمع μ	86
1- حالة إختبار ذو طرفين	86
2- إختبار ذو طرف أيسر	92
2- إختبار ذو طرف أيمن	96
ثالثا: إختبار الفرضيات المتعلقة بالنسبة في المجتمع P	99

رابعا: إختبار الفرضيات المتعلقة بتباين المجتمع σ^2	102
خامسا: سلسلة تمارين محلولة	104
الملاحق	116-111
قائمة المراجع	119-118
قائمة الجداول والأشكال البيانية والملاحق	120
فهرس المحتويات	124-122