الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Setif 1 University Ferhat Abbas
Faculty of Sciences
Department of Mathematics

جامعة سطيف 1 فرحات عباس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

Master's Thesis

in Mathematics

Option : Nonlinear Analysis and Partial Differential Equations

Theme :

Existence and Asymptotic Stability of Solutions for the Euler-Bernoulli Beam Equation with Memory Effects

Presented by

Miss. Ourida KHALED

Supervisor: **Pr. Mohamed DILMI**

Thesis defended on June 20, 2026, in front of the jury composed of:

Mr.	**Abdelbaki MEROUANI**	**Prof.**	**Setif 1 University Ferhat Abbas**	**President**
Mr.	**Mohamed DILMI**	**MCA.**	**Blida 1 University Saad Dahlab**	**Supervisor**
Mr.	**Aissa BENSEGHIR**	**Prof.**	**Setif 1 University Ferhat Abbas**	**Examiner**

2025/2026

Contents

Résumé **iv**

Abstract **v**

Notations **1**

Introduction **3**

1 Functional analysis tools **6**

1.1 Weak Topology 7

1.2 L^p space 9

1.3 Space of distributions 10

1.4 Hilbert Spaces and the Lax–Milgram Theorem 11

1.5 Vector-Valued Function Spaces 17

1.6 Some inequalities 19

1.7 Faedo–Galerkin Method 20

2 Existence of Weak Solutions for the Euler–Bernoulli Beam Equation with Memory Effects. **22**

2.1 Problem statement 23

2.2 The Weak Formulation 25

2.3 Existence of the weak solution 27

3 Asymptotic Stability of Solutions **38**

3.1 Energy functional and modified energy functional 39

3.1.1 Definition of energy functional 39

3.1.2 Modified energy functional 40

3.2 Exponential decay of the energy. 42

3.2.1 Perturbed energy $e_\varepsilon(t)$ 42

3.2.2 Decay of solutions 45

Conclusion **47**

Bibliographie **47**

الملخص

يكرس هذا العمل لتحليل الرياضياتي لمعادلة عارضة أويلر-برنولي، مع الأخذ بعين الاعتبار تأثيرات الذاكرة وتخميداً غير خطي. تظهر مثل هذه النماذج بشكل طبيعي في دراسة المواد اللزجة و المرنة.

أولاً، نقوم بإنشاء الصيغة التغايرية الضعيفة للمسألة في إطار وظيفي مناسب قائم على فضاءات سوبوليف. ثم نثبت وجود حلول ضعيفة باستعمال طريقة فايدو-غاليركين، مرفقة بحجج تراص ملائمة.

بعد ذلك، ندرس السلوك طويل الأمد وكذلك استقرار الحلول. من خلال إدخال دوال طاقة مناسبة وكذلك طاقات معدّلة تأخذ في الاعتبار مساهمات الذاكرة، نثبت الاستقرار التقاربي للنظام. وبشكل خاص، وتحت فرضيات ملائمة على آلية التخميد ونواة الذاكرة، نبرهن على تناقص أسي للطاقة، مما يُبرز الطابع التبددي للنموذج.

الكلمات المفتاحية : *معادلة عارضة أويلر-برنولي؛ وجود الحل؛ طريقة فايدو-غاليركين؛ استقرار الحل .*

Résumé

Ce travail est consacré à l'analyse mathématique de l'équation de la poutre d'Euler–Bernoulli, en tenant compte à la fois des effets de mémoire et d'un amortissement non linéaire. De tels modèles apparaissent naturellement dans l'étude des matériaux viscoélastiques.

Tout d'abord, nous établissons la formulation faible du problème dans un cadre fonctionnel approprié basé sur les espaces de Sobolev. L'existence de solutions faibles est ensuite démontrée à l'aide de la méthode de Faedo–Galerkin, combinée à des arguments de compacité adaptés.

Nous étudions ensuite le comportement à long terme ainsi que la stabilité des solutions. En introduisant des fonctionnelles d'énergie appropriées ainsi que des énergies modifiées prenant en compte les contributions de mémoire, nous établissons la stabilité asymptotique du système. En particulier, sous des hypothèses adéquates sur le mécanisme d'amortissement et le noyau de mémoire, nous démontrons une décroissance exponentielle de l'énergie, mettant ainsi en évidence le caractère dissipatif du modèle.

Mots clés : *Équation d'Euler–Bernoulli ; Existence de la solution ; Méthode de Faedo–Galerkin ; Stabilité de la solution.*

Abstract

This work is devoted to the mathematical analysis of the Euler–Bernoulli beam equation, incorporating both memory effects and nonlinear damping. Such models arise naturally in the study of viscoelastic materials.

First, we derive the weak formulation of the problem within an appropriate functional framework based on Sobolev spaces. The existence of weak solutions is then established using the Faedo–Galerkin method, combined with suitable compactness arguments.

We subsequently investigate the long-term behavior and stability of the solutions. By introducing appropriate energy functionals together with modified energies that account for memory contributions, we establish the asymptotic stability of the system. In particular, under suitable assumptions on the damping mechanism and the memory kernel, we prove exponential decay of the energy, thereby emphasizing the dissipative character of the model.

Keywords: *Euler–Bernoulli beam equation; Existence of the solution; Faedo-Galerkin Method Solution stability*.