

Table des matières

Notations	2
Introduction	5
1 Définitions et Propriétés	9
1.1 Introduction	9
1.2 Groupes libres	9
1.2.1 Groupes libres	9
1.2.2 Groupes π -libres	10
1.3 Groupes abéliens	10
1.4 Groupes n -abéliens	11
1.5 Groupes nilpotents	15
1.6 Groupes résolubles	20
1.7 Groupes métabéliens	21
1.8 Groupes d'Engel	22
1.8.1 Groupes n -Engel	22
1.8.2 Eléments 2-Engel à droite	23
1.9 Groupes n -Bell	27
1.10 Groupes n -Levi	27
1.11 n -centre d'un groupe	30
1.12 Groupes n -centraux	32
1.13 Groupes n -résolubles et n -nilpotents	35
1.13.1 Groupes n -résolubles	35
1.13.2 Groupes n -nilpotents	36
2 Groupes n-Abéliens Généralisés	37
2.1 Introduction	37

2.2	Groupes n -abéliens généralisés	38
2.3	Groupes 3-abéliens généralisés	45
3	Caractérisation des Groupes 3-Abéliens Généralisés	52
3.1	Introduction	52
3.2	Classe de nilpotence des Groupes 3-Abéliens Généralisés	53
3.3	Propriétés des Groupes 3-Abéliens Généralisés	60
	Bibliographie	63

Notations

Les notations utilisées sont standard. Le commutateur de n éléments $x_1, x_2, \dots, x_n$ d'un groupe G est défini par récurrence comme suit :

$$[x_1] = x_1, [x_1, x_2] = x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2$$

et

$$[x_1, \dots, x_{n-1}, x_n] = [[x_1, \dots, x_{n-1}], x_n] \quad (n \geq 2).$$

Le $n^{\text{ième}}$ terme de la suite centrale descendante est noté $\gamma_n(G)$ avec $\gamma_1(G) = G$ et $\gamma_n(G) = [\gamma_{n-1}(G), G]$ ($n \geq 2$). On désigne par $\mathcal{Z}(G)$ le centre de G .

Le groupe dérivé de G est noté G' . On note $R_2(G)$ le groupe des éléments 2-Engel à droite de G . $R_2(G) = \{g \in G \mid [g, x, x] = 1 \text{ pour tout } x \in G\}$.

$$E_2(G) = \langle \{[x, y, y]; x, y \in G\} \rangle$$

$\mathcal{Z}(G, m) = \{a \in G \mid (ax)^m = a^m x^m \text{ and } (xa)^m = x^m a^m \text{ pour tout } x \in G\}$ désigne le m -centre de G ; c'est un sous groupe caractéristique de G .

Si m est un entier ≥ 1 , la m -centrale serie ascendante $\mathcal{Z}_i(G, m)$ est définie par récurrence comme suit :

$$\mathcal{Z}_0(G, m) = 1, \mathcal{Z}_1(G, m) = \mathcal{Z}(G, m) \text{ et } \mathcal{Z}_{i+1}(G, m) / \mathcal{Z}_i(G, m) = \mathcal{Z}(G / \mathcal{Z}_i(G, m), m) \quad (i \geq 1).$$

Nous avons la serie $1 = \mathcal{Z}_0(G, m) \leq \mathcal{Z}_1(G, m) \leq \dots \leq \mathcal{Z}_i(G, m) \leq \mathcal{Z}_{i+1}(G, m) \leq \dots$

Un groupe G est dit m -nilpotent de classe au plus k , si $\mathcal{Z}_k(G, m) = G$.

Pour tous $x, y \in G$, on définit le m -commutateur de x et y par

$$[x, y]_m = (xy)^m y^{-m} x^{-m}$$

On appelle m -sous-groupe dérivé de G , le sous-groupe de G engendré par l'ensemble des m -commutateurs; c'est un sous-groupe caractéristique de G ; il est noté $[G, G]_m$.

π : Ensemble de nombres premiers.

π -élément : Un élément d'ordre fini d'un groupe dont les diviseurs premiers appartiennent à π .

π -libre : Un groupe G est dit π -libre, s'il n'admet aucun π -élément.

π_n : ensemble des nombres premiers $\leq n$.

$$\xi(G) = \{n \in \mathbb{Z}; (xy)^n = x^n y^n \text{ pour tous } x, y \in G\}.$$

$$\xi_0 = \{n \in \mathbb{Z}; n \in \xi(G) \text{ et } G^n \leq \mathcal{Z}(G)\}.$$

$$\mathcal{L}(G) = \{n \in \mathbb{Z}; [x^n, y] = [x, y]^n \text{ pour tous } x, y \in G\}.$$

$$\mathcal{L}_0(G) = \{n \in \mathbb{Z}; n \in \mathcal{L}(G) \text{ et } G^n \leq R_2(G)\}.$$

$$\begin{aligned}
B(G) &= \{n \in \mathbb{Z}; [x^n, y] = [x, y^n] \text{ pour tous } x, y \in G\} . \\
B_0 &= \{n \in \mathbb{Z}; n \in B(G) \text{ et } G^n \leq R_2(G)\} . \\
\langle x^G \rangle &= \langle \{x^g; g \in G\} \rangle \text{ et } x^g = g^{-1}xg .
\end{aligned}$$

Introduction

Dans ce travail, on étudie la classe des groupes n -abéliens généralisés et en particulier celle des groupes 3-abéliens généralisés. La notion de groupe n -abélien généralisé a été introduite, en l'an 2000, par Gérard Endimioni et Aliréza Abdollahi. Un groupe G est dit n -abélien si l'application $x \mapsto x^n$ est un endomorphisme de G ou ce qui revient au même $(xy)^n = x^n y^n$ pour tous $x, y \in G$. Il est dit n -abélien généralisé s'il existe n éléments $a_1, \dots, a_n \in G$ tels que l'application $x \mapsto x^{a_1} \dots x^{a_n}$ soit un endomorphisme de G . Si les éléments $a_1, \dots, a_n$ sont dans le centre de G , on retrouve la notion de groupe n -abélien ; donc la classe des groupes n -abéliens généralisés est une généralisation de celle des groupes n -abéliens ; cependant, cette dernière classe est une variété tandis que celle des groupes n -abéliens généralisés ne l'est pas car elle n'est pas stable par passage aux sous-groupes ; mais elle est stable par image homomorphe et par produit cartésien fini.

Cette thèse comporte trois chapitres. Dans le chapitre 1, on étudie les différentes classes de groupes (groupes abéliens, n -abéliens, nilpotents, résolubles, n -Engel, n -Bell. Les groupes 2-Engel jouent un rôle important dans les chapitres 2 et 3. En 1969, J. L. Alperin a classifié tous les groupes n -abéliens. Un groupe G est dit n -Bell, (n -Levi) si $[x^n, y] = [x, y^n]$ ($[x^n, y] = [x, y]^n$) pour tous $x, y \in G$. Les classes de groupes n -abéliens, n -Bell, n -Levi sont des variétés définies respectivement par les lois $(xy)^n y^{-n} x^{-n} = 1$, $[x^n, y] [x, y^n]^{-1} = 1$, $[x^n, y] [x, y]^{-n} = 1$. Un groupe G est dit groupe d'Alperin (de Bell, de Levi) s'il existe un entier n tel que G soit n -abélien (n -Bell, n -Levi). On désigne par $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{L}$ les classes de groupes d'Alperin (Bell, Levi). Il est facile de vérifier que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{B}$. C. Delizia, P. Moravec et C. Nicotera ont montré que $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{G} = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{G}$ où $\mathfrak{G}$ désigne la classe des groupes localement gradués. (Un groupe G est dit localement gradué si tout sous-groupe de G non trivial de type fini admet un quotient fini non trivial) c'est à dire que dans la classe des groupes localement gradués, les classes de groupes Levi et Bell coïncident. En 1953, Baer a introduit la notion de n -centre d'un groupe. Le n -centre d'un groupe G est défini comme suit :

$$\begin{aligned} Z(G, n) &= \{a \in G; (ax)^n = a^n x^n \ \forall x \in G\} \\ &= \{a \in G; (xa)^n = x^n a^n \ \forall x \in G\} \end{aligned}$$

C'est un sous- groupe caractéristique de G contenant le centre de G . En 1991, L. C. Kappe et M. N. Newel, [22], dans leur article : “ *On the n - centre of a group* ” ont donné des propriétés remarquables du n -centre d'un groupe ;

elles ont montré que

$$Z(G, 4) \subseteq R_5(G) \cap L_5(G)$$

où $R_5(G)$ et $L_5(G)$ désignent respectivement les ensembles 5-Engel à droite et 5-Engel à gauche de G . On définit le $i^{\text{ème}}$ n -centre $\mathcal{Z}_i(G, n)$ par la relation de récurrence suivante :

$$\mathcal{Z}_0(G, n) = 1, \mathcal{Z}_1(G, n) = Z(G, n) \text{ et } \mathcal{Z}_{i+1}(G, n) / \mathcal{Z}_i(G, n) = Z(G / \mathcal{Z}_i(G, n), n) \ (i \geq 1)$$

Nous avons la serie $1 = \mathcal{Z}_0(G, n) \leq \mathcal{Z}_1(G, n) \leq \dots \leq \mathcal{Z}_i(G, n) \leq \mathcal{Z}_{i+1}(G, n) \leq \dots$

Un groupe G est dit n -nilpotent de classe au plus k , si $\mathcal{Z}_k(G, n) = G$. Si tel est le cas, la longueur de la plus courte suite

$$1 = \mathcal{Z}_0(G, n) \leq \mathcal{Z}_1(G, n) \leq \dots \leq \mathcal{Z}_i(G, n) \leq \mathcal{Z}_{i+1}(G, n) \leq \dots \mathcal{Z}_k(G, n) = G$$

est appelée classe de n -nilpotence de G . En 1969, Karasev a introduit la notion de m -sous-groupe dérivé d'un groupe. Pour un entier donné $m \geq 2$, deux éléments x, y de G , on définit le m -commutateur de x and y par $[x, y]_m = (xy)^m y^{-m} x^{-m}$. Le sous-groupe de G engendré par l'ensemble des m -commutateurs de G est noté $[G, G]_m$. C'est un sous-groupe totalement invariant de G . $[G, G]_m$ est appelé m - sous-groupe dérivé de G . Si H est un sous-groupe normal de G , alors G/H est m -abelian si, et seulement si, $[G, G]_m \leq H$. On définit, par récurrence, le $i^{\text{ème}}$ m - sous-groupe dérivé de G

$$G_m^{(0)} = G, G_m^{(1)} = [G, G]_m, G_m^{(2)} = [G_m^{(1)}, G_m^{(1)}]_m, \dots, G_m^{(i)} = [G_m^{(i-1)}, G_m^{(i-1)}]_m$$

Un groupe G est dit m -résoluble s'il existe un entier positif r tel que $[G_m^{(r)}, G_m^{(r)}]_m = 1$. Le plus petit entier r vérifiant l'égalité précédente s'appelle "*longueur de m -résolubilité de G* ". Il est équivalent de dire qu'un groupe G est m -résoluble s'il admet une suite finie sous-groupes $1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_i \triangleleft G_{i+1} \dots \triangleleft G_{s-1} \triangleleft G_s = G$ tels que le quotient G_{i+1}/G_i soit m -abélien pour tout $i, 0 \leq i \leq s-1$. La longueur de la plus courte suite de G est appelée "*longueur de m -résolubilité ou longueur m -dérivée de G* ". On montre que les deux longueurs de m -résolubilité définies précédemment sont égales.

On étudie aussi la π -liberté d'un groupe ; un groupe G est dit π -libre (π étant un ensemble de nombres premiers) s'il n'admet aucun π -élément. Un p -groupe fini G est dit extra-spécial si G' et $Z(G)$ coïncident et sont d'ordre

p . [32, p. 145]. Il est dit extra-spécial généralisé si $Z(G)$ est cyclique et G' d'ordre p . [32, Exercice 5.3.8]. On appelle $H(q)$, L'ensemble des applications

$$f : GF(q) \rightarrow GF(q) \quad x \mapsto f(x) = ax + b$$

où a et $b \in GF(q)$ avec $a \neq 0$. Cet ensemble, muni de la composition des applications, est un groupe ; on montre qu'il est isomorphe au groupe des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ où a, b sont dans le corps fini $GF(q)$ avec $a \neq 0$. ces deux derniers groupes (extra-spécial généralisé et $H(q)$) seront utilisés dans le chapitre 2.

Dans le chapitre 2, on démontre le théorème suivant :

“ Tout groupe n -abélien généralisé, fini et π_n -libre est abélien ”

(π_n étant l'ensemble des nombres premiers $\leq n$). Pour démontrer ce théorème, on a utilisé les propriétés des groupes $H(q)$, extra-spéciaux généralisés et le célèbre théorème de Feit Thompson qui dit (que tout groupe fini d'ordre impair est résoluble). Avec des résultats convenables, ce résultat peut s'étendre à des groupes infinis (voir le corollaire 2). Cependant ce résultat ne se généralise pas à un groupe quelconque. En effet considérons le groupe :

$$G = \langle a, b \mid (b^2)^a = b^{-2}, (a^2)^b = a^{-2} \rangle$$

Il est sans torsion (donc infini) et 8-abélien généralisé car il vérifie l'identité

$$x^2 (x^2)^a (x^2)^b (x^2)^{ab} = 1 \quad \forall x \in G.$$

Dans le chapitre 3, on étudie le cas particulier où $n = 3$. En 2003, Alireza Abdollahi a montré que tout groupe 3-abélien généralisé est nilpotent de classe au plus 11 ; Gérard Endimioni a amélioré la borne à 10. En 2005, B. Daoud, Meriem Hamitouche et Khalissa Merikhi ont montré que la classe de nilpotence d'un tel groupe est inférieure ou égale à 7. Enfin, avec la méthode du GAP, Alireza Abdollahi a abaissé la borne à 3 et c'est la meilleure borne. En 1944, Levi a montré qu'un groupe est 3-abélien si, et seulement si, il est 2-Engel et l'exposant de G' divise 3. On se propose de généraliser le résultat de Levi à un groupe 3-abélien généralisé en donnant un résultat presque analogue à celui de Levi. On termine le chapitre 3 en montrant qu'un groupe

3-abélien généralisé est 9- abélien, 9–central 3–levi et 2–nilpotent de classe au plus 2.

Signalons que pour introduire ces notions on a utilisé les excellents ouvrages **[32]**, **[33]**, ainsi que les articles **[1]**, **[4]**, **[5]**, **[7]**, **[19]**, **[20]**, **[21]**, **[22]**, **[23]**, **[29]**, **[36]**.

Chapitre 1

Définitions et Propriétés

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons donner les définitions les plus importantes et les propriétés dont nous avons besoin dans l'étude de notre sujet de recherche.

La plupart des définitions, propositions et théorèmes ont été énoncés sans démonstration. Le lecteur curieux peut consulter l'excellent ouvrage de D. J. Robinson et les articles [1], [4], [5], [7], [19], [20], [21], [22], [23], [29], [36] où il trouve toutes les démonstrations détaillées.

1.2 Groupes libres

1.2.1 Groupes libres

Soit X un ensemble non vide ; notons $X^{-1} = \{x^{-1}/x \in X\}$ où x^{-1} n'est qu'un symbole.

Définition 1.2.1.1

Un mot écrit en alphabet X est une suite finie d'éléments de $X \cup X^{-1}$ noté $\omega = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} x_3^{\varepsilon_3} \dots x_r^{\varepsilon_r}$ où $r \in \mathbb{N}^*$, $x_i \in X$, $\varepsilon_i = \pm 1$
 r est la longueur du mot ω ; il est noté $\text{long}(\omega)$.

Définition 1.2.1.2 (groupe libre)

Soit F un groupe ; on dit que F est un groupe libre sur l'ensemble non vide X , s'il existe une application σ

$$\sigma : X \rightarrow F$$

$$x \rightarrow \sigma(x)$$

vérifiant la propriété suivante : pour tout groupe G et toute application

$$\alpha : X \rightarrow G$$

Il existe un unique homomorphisme

$$\beta : F \rightarrow G$$

tel que

$$\beta.\sigma = \alpha i.$$

Théorème 1.2.1.3

Soit X un ensemble non vide, alors il existe un groupe F et une application $\sigma : X \rightarrow F$ tel que (F, σ) soit libre sur X et $F = \langle \text{Im } \sigma \rangle$.

1.2.2 Groupes π -libres

Définition 1.2.2.1

Soit π un ensemble de nombres premiers non vide ; un élément a d'un group G est dit π -élément si son ordre est fini et si les diviseurs premiers de son ordre appartiennent à π . Un groupe est dit π -libre s'il n'admet aucun π -élément.

Pour chaque entier $n \geq 2$, on note π_n l'ensemble des nombres premiers inférieurs ou égaux à n . Remarquons qu'un groupe π_n -libre n'admet aucun élément non trivial d'ordre divisant $n(n-1)$.

Proposition 1.2.2.2

Soit π un ensemble de nombres premiers et soit G un groupe dont le centre $\mathcal{Z}(G)$ est π -libre ; alors :

(i) Les groupes suivants :

$G/\mathcal{Z}_i(G)$, $\mathcal{Z}_{i+1}(G)/\mathcal{Z}_i(G)$, $\mathcal{Z}_i(G)$ ($i \in \mathbb{N}$) et l'hypercentre de G sont tous π -libres.

(ii) Si H un sous-groupe normal périodique de G et si G est π -libre, G/H est aussi π -libre ; en d'autres termes, la π -liberté est conservée quand on quotiente par un sous-groupe normal périodique

1.3 Groupes abéliens

Proposition 1.3.1

Soit G un groupe abélien ; l'ensemble des éléments de torsion de G est un sous-groupe de G , noté T , et $\frac{G}{T}$ est sans-torsion.

Proposition 1.3.2

Soient G un groupe abélien et p un nombre premier ; l'ensemble des p -éléments de G est un sous-groupe de T , noté T_p .

Théorème 1.3.3

Un groupe abélien est fini si, et seulement si, il est somme directe d'un nombre fini de groupes cycliques dont l'ordre de chacun est une puissance d'un nombre premier.

Proposition 1.3.4

Si un groupe abélien est de type fini, il satisfait la condition maximale.

Théorème 1.3.5

(i) Un groupe abélien de type fini est fini si et seulement si, il est de torsion.

(ii) Un groupe abélien est de type fini si, et seulement si, il est somme directe d'un nombre fini de groupes cycliques dont l'ordre de chacun est ou bien infini ou bien fini d'ordre puissance d'un nombre premier.

1.4 Groupes n -abéliens

Définition 1.4.1

On dit qu'un groupe G est n -abélien ($n \in \mathbb{Z}$) si

$$(xy)^n = x^n y^n \quad \text{pour tous } x, y \in G$$

La classe des groupes n -abéliens est une variété définie par la loi

$$(xy)^n y^{-n} x^{-n} = 1$$

Remarques 1.4.2

- (i) Tout groupe est 0-abélien et 1-abélien.
- (ii) G est un groupe 2-abélien si, et seulement si, G est abélien.
- (iii) Un sous-groupe d'un groupe n -abélien est n -abélien.
- (iv) L'image homomorphe d'un groupe n -abélien est n -abélienne.
- (v) Le produit direct de groupes n -abéliens est n -abélien.

Proposition 1.4.3

- (i) Si G est un groupe n -abélien, alors G est $(1-n)$ -abélien.
- (ii) Si G est un groupe n -abélien et m -abélien, alors G est (nm) -abélien.

Proposition 1.4.4

- (i) *Tout groupe d'exposant fini divisant n est n -abélien.*
- (ii) *Tout groupe d'exposant fini divisant $(n - 1)$ est n -abélien.*

-En 1969, Alpérin ([4]) a établi le théorème suivant :

Théorème 1.4.5 ([4])

Un groupe G est n -abélien si, et seulement si, G est image homomorphisme d'un sous-groupe du produit direct d'un groupe d'exposant divisant n , d'un groupe d'exposant divisant $(n - 1)$ et d'un groupe abélien.

Dans le même article, Alpérin a donné la remarque suivante : Si l'application $x \mapsto x^n$ est un automorphisme de G , alors G est image homomorphisme d'un sous-groupe du produit direct d'un groupe d'exposant divisant $(n - 1)$ et d'un groupe abélien. [4] p. 1244.

Proposition 1.4.6 ([1])

Si G est 3-abélien, alors

$$[x, y^{-1}] [y^{-2}, x^{-1}] = 1.$$

Ce qui est équivalent à

$$\begin{aligned} [x, y] [y^2, x^{-1}] &= 1 \\ [x, y] &= [x^{-1}, y^2]. \end{aligned}$$

Proposition 1.4.7

Soient G un groupe et n un entier tels que l'application $x \mapsto x^n$ soit un endomorphisme de G . Alors

i) $(xy)^{n-1} = y^{n-1}x^{n-1}$ pour tous $x, y \in G$ (on dit que G est anti $(n - 1)$ -abélien).

ii) De plus, si cette application est un épimorphisme de G , l'application $x \mapsto x^{n-1}$ est un homomorphisme de G dans $Z(G)$ c.a.d que G est $(n - 1)$ -abélien.

Proposition 1.4.8

Soit G un groupe n -abélien, soient $x, y \in G$, alors

- (1) $[x, y]^n = [x^n, y]$.
- (2) $[x, y]^{n-1} = [y, x^{-(n-1)}]$.
- (3) $[x^n, y^{n-1}] = 1$.
- (4) $[x, y]^{n(n-1)} = 1$.

Preuve

(1)

$$\begin{aligned}[x, y]^n &= (x^{-1}x^y)^n \\ &= x^{-n}(x^y)^n \\ &= (x^n)^{-1}(x^n)^y \\ &= [x^n, y].\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}[x, y]^{n-1} &= (x^{-1}x^y)^{n-1} \\ &= (x^y)^{n-1}x^{-(n-1)} \\ &= (x^{n-1})^y x^{-(n-1)} \\ &= [y, x^{-(n-1)}].\end{aligned}$$

(3) On a

$$\begin{aligned}(x^n)^y &= (x^y)^n \\ &= (y^{-1}xy)^n \\ &= (y^n)^{-1}x^ny^n\end{aligned}$$

Alors

$$y^{n-1}x^n = x^ny^{n-1}.$$

(4)

$$\begin{aligned}[x, y]^{n(n-1)} &= [y, x^{-(n-1)}]^n \quad (\text{d'après (2)}) \\ &= [y^n, x^{-(n-1)}] \quad (\text{d'après (1)}) \\ &= 1 \quad (\text{d'après (3)}).\end{aligned}$$

Proposition 1.4.9

Si G est n -abélien et $(n+1)$ -abélien, alors G^n est abélien et contenu dans $Z(G)$.

Théorème 1.4.10

Soit G un groupe n -abélien, alors l'ensemble des éléments de torsion

$$T = \{x \in G \mid |x| < \infty\}$$

est un sous-groupe normal de G .

Lemme 1.4.11

Soit l'endomorphisme $\varphi : x \mapsto x^n$ du groupe G ; alors G est injectif si, et seulement si, n est premier avec l'ordre de n'importe quel élément non trivial de G .

Proposition 1.4.12

Soit l'endomorphisme $\varphi : x \mapsto x^n$ d'un groupe G . Alors φ est un automorphisme de G s'il vérifie l'une des deux conditions suivantes :

- (i) G est périodique et φ injectif.
- (ii) G est d'exposant fini et φ surjectif.

Preuve

(i) Prouvons que φ est surjectif

Soit $y \in G$. Soit $k = |y|$, comme φ est injectif, d'après le lemme précédent

$$(n, k) = 1,$$

alors il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$1 = nu + kv,$$

donc

$$\begin{aligned} y &= y^{nu+kv} \\ &= (y^k)^v (y^u)^n \\ &= (y^u)^n; \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} c(y^u) &= (y^u)^n \\ &= y \end{aligned}$$

et

φ est surjectif

(ii) Soit $x_0 \in \ker \varphi$. $x_0^n = 1$, φ étant injectif, il existe $a \in G$ tel que :

$$a^n = x_0 \quad (1)$$

et soit

$$k = |a|,$$

alors

$$a^k = 1 \quad (2).$$

Soit

$$e = \exp(G);$$

alors

$$e \mid n,$$

il existe $l \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$n = el \quad (3)$$

et comme

$$|a| = k \Rightarrow k \mid e$$

alors il existe $s \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$e = sk \quad (4)$$

(3) et (4) donnent

$$n = lsk \quad (5)$$

et (1) et (5) donnent

$$\begin{aligned} x_0 &= a^n \\ &= a^{lsk} \\ &= (a^k)^{ls} \\ &= 1^{ls} \\ &= 1 \end{aligned}$$

D'où

$$\ker \varphi = \{1\}$$

et

φ est injectif.

1.5 Groupes nilpotents

Définition 1.5.1

Un groupe G est dit nilpotent s'il admet une suite centrale finie, i.e une suite normale finie $1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_n = G$ telle que $G_{i+1}/G_i \leq$

$Z(G/G_i)$ pour tout i , $0 \leq i \leq n-1$. La longueur de la plus courte suite centrale de G est appelée “ classe de nilpotence de G ”.

Proposition 1.5.2

La suite $1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_n = G$ d'un groupe G est centrale si, et seulement si, $[G_{i+1}, G] \leq G_i$ pour tout i , $0 \leq i \leq n-1$.

Proposition 1.5.3

Soit G un groupe.

- (1) On note : $\gamma_1(G) = G$ et $\gamma_{i+1}(G) = [\gamma_i(G), G]$, $\forall i \in \mathbb{N}^*$. Alors :
- $\gamma_i(G)$ est totalement invariant dans G , $\forall i \in \mathbb{N}^*$.
 - $\gamma_{i+1}(G) \leq \gamma_i(G)$, $\forall i \in \mathbb{N}^*$; donc $G = \gamma_1(G) \geq \gamma_2(G) \geq \gamma_3(G) \geq \dots$
 - S'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\gamma_n(G) = 1$, alors $G = \gamma_1(G) \geq \gamma_2(G) \geq \dots \geq \gamma_n(G) = 1$ est une suite centrale appelée “ suite centrale descendante de G ”.
- (2) On note : $Z_0(G) = 1$, $Z_1(G) = Z(G)$ et $Z(G/Z_i(G)) = Z_{i+1}(G)/Z_i(G)$ $\forall i \in \mathbb{N}^*$. Alors :
- $Z_i(G)$ est caractéristique dans G , $\forall i \in \mathbb{N}^*$.
 - On a $1 = Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq Z_2(G) \leq \dots$
 - S'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $Z_m(G) = G$, alors $1 = Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq \dots \leq Z_m(G) = G$ est une suite centrale appelée “ suite centrale ascendante de G ”.

Proposition 1.5.4

Soit G un groupe nilpotent et soit $1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_n = G$ une suite centrale de G . Alors $G_i \leq Z_i(G)$ et $\gamma_{i+1}(G) \leq G_{n-i}$ pour tout i , $0 \leq i \leq n$.

Corollaire 1.5.5

Soit G un groupe nilpotent de classe c , et soient les 2 suites centrales ascendante et descendante alors $\gamma_i(G) \leq Z_{n-i+1}$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$.

Théorème 1.5.6

Soit G un groupe; les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) G est un groupe nilpotent.
- (ii) $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $Z_n(G) = G$
- (iii) $\exists m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\gamma_m(G) = 1$

Proposition 1.5.7

- (1) Un groupe G est nilpotent de classe $\leq c \iff Z_c(G) = G \iff \gamma_{c+1}(G) = 1$.
- (2) Si $G \neq 1$ est nilpotent, alors $Z(G) \neq 1$.
- (3) La classe de nilpotence d'un groupe nilpotent G est égale à

$$\text{Inf} \{n \mid Z_n(G) = G\} = \text{Inf} \{n \mid \gamma_{n+1}(G) = 1\}.$$

Lemme 1.5.8

Soient G un groupe, $x, y, z, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in G$. Alors, on a :

- (i) $[x, y]^{-1} = [y, x]$.
- (ii) $[x^{-1}, y] = \left([x, y]^{x^{-1}}\right)^{-1}$ et $[x, y^{-1}] = \left([x, y]^{y^{-1}}\right)^{-1}$.
- (iii) $[x, y]^z = [x^z, y^z]$.
- (iv) $[xy, z] = [x, z]^y [y, z] = [x, z] [x, z, y] [y, z]$.
- (v) $[x, yz] = [x, z] [x, y]^z = [x, z] [x, y] [x, y, z]$.
- (vi) $[x, y^{-1}, z]^y [y, z^{-1}, x]^z [z, x^{-1}, y]^x = 1$.
- (vii) $[x, y, z^x] [z, x, y^z] [y, z, x^y] = 1$ (Identité de Hall-Witt).
- (viii) $[x_1 x_2 \dots x_n, y] = [x_1, y]^{x_2 \dots x_n} [x_2, y]^{x_3 \dots x_n} \dots [x_{n-1}, y]^{x_n} [x_n, y]$.
- (viiii) $[x, y_1 y_2 \dots y_n] = [x, y_n]^{y_1} [x, y_{n-1}]^{y_2} \dots [x, y_2]^{y_3 \dots y_n} [x, y_1]^{y_2 \dots y_n}$.

Proposition 1.5.9

Soit G un groupe, $H \leq G$ et $N \triangleleft G$. Si G est nilpotent, alors H et $\frac{G}{N}$ sont nilpotents.

Ce qui signifie que la nilpotence est stable par passage aux sous-groupes et quotients.

Proposition 1.5.10

Si G est un groupe nilpotent et $1 \neq N \triangleleft G$, alors $N \cap Z(G) \neq 1$.

Proposition 1.5.11

Soit A un sous-groupe normal abélien maximal d'un groupe nilpotent G , alors

$$C_G(A) = A.$$

Proposition 1.5.12

Tout groupe nilpotent non abélien contient un sous-groupe maximal normal abélien.

Théorème 1.5.13 (P.Hall).

Soit G un groupe. Si $N \triangleleft G$ tel que N et G/N' soient nilpotents, alors G est nilpotent.

Théorème 1.5.14

Soit G est un groupe nilpotent de type fini; alors tout sous-groupe de G est de type fini, c.a.d que tout groupe nilpotent de type fini vérifie max.

Théorème 1.5.15

Si G est un groupe nilpotent de type fini; alors G possède une suite centrale dont les facteurs sont ou bien cycliques infinis ou bien finis d'ordre une puissance d'un nombre premier.

Corollaire 1.5.16

Si G est un groupe nilpotent de type fini de torsion alors G est fini.

Proposition 1.5.17

Soit G un groupe engendré par un ensemble S . Supposons que

$$[s_1, s_2, \dots, s_c, s_{c+1}] = 1 \text{ pour tous } s_1, s_2, \dots, s_c, s_{c+1} \in S;$$

Alors G est nilpotent de classe au plus c .

Lemme 1.5.18 (d'Abdollahi)

Soient G un groupe engendré par deux éléments x, y vérifiant les deux relations suivantes :

$$[x, y, y] = 1 \text{ et } [y, x, x, x] = 1$$

Alors,

G est nilpotent de classe au 3.

Preuve

Première étape :

On montre que

$$[y, x, x] \in Z(G).$$

Puisque

$$\{x, y\} \text{ engendre } G,$$

il suffit de montrer que

$$[y, x, x] \text{ commute avec } x \text{ et } y;$$

par hypothèse, il commute avec x , prouvons qu'il commute avec y .

On utilise la première variante de l'identité de Hall-Witt aux éléments $[y, x]$, x et y .

$$1 = [[y, x], x^{-1}, y]^x [x, y^{-1}, [y, x]]^y [y, [y, x]^{-1}, x]^{[y, x]}$$

Posons

$$\begin{aligned} A &= [[y, x], x^{-1}, y]^x, \\ B &= [x, y^{-1}, [y, x]]^y, \\ C &= [y, [y, x]^{-1}, x]^{[y, x]}. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}[x, y^{-1}] &= \left([x, y]^{y^{-1}}\right)^{-1} \\ &= ([x, y] [x, y, y^{-1}])^{-1} \\ &= [y, x] \text{ (car } [x, y] \text{ commute avec } y).\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}B &= [[y, x], [y, x]]^y \\ &= 1\end{aligned}$$

et

$$C = 1$$

Donc

$$\begin{aligned}A &= [[y, x], x^{-1}, y]^x \\ &= 1\end{aligned}$$

D'où

$$[[y, x], x^{-1}, y] = 1$$

Par suite

$$\begin{aligned}1 &= \left([[y, x], x]^{-1}, y\right) \\ &= [y, x, x]^{-1}, y \text{ (car } [y, x, x] \text{ commute avec } x)\end{aligned}$$

Ce qui entraîne que

$$[y, x, x, y] = 1,$$

donc $[y, x, x]$ commute avec les deux éléments x et y de la partie génératrice $\{x, y\}$, et par suite, il commute avec tous les éléments de G .

Donc

$$[y, x, x] \in Z(G).$$

Deuxième étape :

Prouvons maintenant que

$$\frac{G}{Z(G)} \text{ est nilpotent de classe au plus } 2;$$

Or

$\{\bar{x}, \bar{y}\} = \{xZ(G), yZ(G)\}$ est une partie génératrice de $\frac{G}{Z(G)}$;

d'après la proposition (1.5.17), il suffit de montrer que

l'ensemble $\{\bar{x}, \bar{y}\}$ est nilpotent de classe au plus 2,

i.e

$$[\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}] = \bar{1} \text{ et } [\bar{y}, \bar{x}, \bar{x}] = \bar{1}$$

donc

$$[x, y, y] \text{ et } [y, x, x] \in Z(G)$$

Or

$$[x, y, y] = 1 \text{ et } [y, x, x] \in Z(G)$$

D'où

$\frac{G}{Z(G)}$ est nilpotent de classe au plus 2

et

G est nilpotent de classe au plus 3.

1.6 Groupes résolubles

Définition 1.6.1

Un groupe G est dit résoluble s'il admet une suite finie abélienne, i.e une suite finie de sous-groupes $1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_n = G$ tels que le quotient G_{i+1}/G_i soit abélien pour tout i , $0 \leq i \leq n-1$. La longueur de la plus courte suite de G est appelée "longueur de résolubilité ou longueur dérivée".

Proposition 1.6.2

Soit G un groupe. On note : $G^{(0)} = G$, $G^{(1)} = [G, G] = G'$ (G' est appelé le sous groupe dérivé de G) et $G^{(i+1)} = G^{(i)'} = [G^{(i)}, G^{(i)}]$, $\forall i \in \mathbb{N}^*$ (le sous groupe $G^{(i)}$ s'appelle le $i^{\text{ème}}$ sous groupe dérivé de G). Alors :

- (i) $G^{(i)}$ est totalement invariant dans G , $\forall i \in \mathbb{N}^*$.
- (ii) $G^{(i+1)} \trianglelefteq G^{(i)}$ et $G^{(i+1)}/G^{(i)}$ est abélien, $\forall i \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 1.6.3

Soit G un groupe résoluble et soit $1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_n = G$ une suite abélienne de G . Alors $G^{(i)} \leq G_{n-i}$ pour tout i , $0 \leq i \leq n$. En particulier $G^{(n)} = 1$.

Théorème 1.6.4

Soit G un groupe ; alors, les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) *G est un groupe résoluble.*
- (ii) *$\exists d \in \mathbb{N}$ tel que $G^{(d)} = 1$.*
- (iii) *$\exists m \in \mathbb{N}$ tel que $G^{(m)}$ soit abélien .*

Proposition 1.6.5

Soit G un groupe, $H \leq G$ et $N \triangleleft G$.

- (1) *Si G est résoluble, alors H est résoluble.*
- (2) *Si G est résoluble, alors G/N est résoluble.*
- (3) *Si N est résoluble et G/N est résoluble, alors G est résoluble.*

(1), (2) et (3) signifient que la résolubilité est stable respectivement par passage aux sous-groupes, par image homomorphe et par extension.

Théorème 1.6.6

Tout groupe fini d'ordre $p^n, p^n q, p^2 q^2, pqr$ où p, q, r sont des nombres premiers est un groupe résoluble.

Théorème 1.6.7

Tout groupe périodique résoluble de type fini est fini.

Définition 1.6.8

Un groupe G est dit localement résoluble si tout sous-groupe de type fini est résoluble.

Proposition 1.6.9

Soient G un groupe, $H \leq G$ et $N \triangleleft G$.

- (1) *Si G est localement résoluble, alors H et $\frac{G}{N}$ sont localement résolubles*

(2) *Si N est localement résoluble et G/N est localement résoluble, alors G est localement résoluble.*

(1) et (2) signifient que la résolubilité locale est stable respectivement par passage aux sous-groupes, par image homomorphe et par extension.

1.7 Groupes métabéliens

Définition 1.7.1

Un groupe résoluble de longueur 2 est dit groupe métabélien donc G est métabélien si, et seulement si, G' est abélien.

Proposition 1.7.2

Soient G un groupe métabélien, $x, y \in G$ et $n \geq 1$, alors :

$$[x, y^n] = \prod_{i=1}^n [x, {}_i y]^{C_n^i} \quad (*)$$

Proposition 1.7.3

Si G est métabélien on a les formules ;

(i) $\forall x_1, x_2, \dots, x_k \in G, [x_1, x_2, \dots, x_k] = [x_2, x_1, x_3, \dots, x_k]^{-1}.$

(ii) *Pour toute permutation σ de l'ensemble $\{1, 2, \dots, k\}$, pour tout $a \in G'$ et pour tous $x_1, x_2, \dots, x_k \in G$ on a*

$$[a, x_1, x_2, \dots, x_k] = [a, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(k)}].$$

En particulier si $k = 2$ on a $[a, x_1, x_2] = [a, x_2, x_1].$

Proposition 1.7.4 ([7])

Soit G un p -groupe métabélien satisfaisant l'identité $([x, {}_p y] [y, {}_p x])^{p^s} = 1$, alors $([x, {}_p y])^{p^s} = 1$. (p est un nombre premier)

Proposition 1.7.5

Si G est métabélien et $x, y, z \in G$, alors l'identité de Hall-Witt devient

$$[x, y, z] [z, x, y] [y, z, x] = 1.$$

Proposition 1.7.6

Dans un groupe métabélien, si $a \in G'$, alors $[a^n, x] = [a, x]^n$ pour tous $x \in G$ et $n \in \mathbb{Z}$.

Théorème 1.7.7

Soit G un groupe. Si $G^{(i)}$ et $\gamma_i(G)$ désignent respectivement le i^{eme} -sous-groupe dérivé et le terme général de la série centrale descendante, on a :

1) $G^{(i)} \leq \gamma_{2^i}(G).$

2) *Si G est nilpotent de classe au plus 3, il est métabélien.*

Proposition 1.7.8

Un groupe nilpotent de classe 4 et engendré par deux éléments est métabélien.

1.8 Groupes d'Engel

1.8.1 Groupes n-Engel

Définition 1.8.1.1

(i) Un élément g de G est dit élément d'Engel à droite de G , si pour tout $x \in G$, il existe un entier positif $n = n(g, x)$ tel que $[g, {}_n x] = 1$ (notons que la variable x est à droite).

Si l'entier n peut être choisi indépendamment de x , alors g est dit élément n -Engel à droite ou élément d'Engel borné à droite.

L'ensemble des éléments d'Engel à droite (d'Engel borné à droite) sera noté $R(G)$ ($\overline{R}(G)$).

(ii) Un élément g de G est dit élément d'Engel à gauche de G , si pour tout $x \in G$, il existe un entier positif $n = n(g, x)$ tel que $[x, {}_n g] = 1$ (notons que la variable x est à gauche).

Si l'entier n peut être choisi indépendamment de x , alors g est dit élément n -Engel à gauche ou élément d'Engel borné à gauche.

L'ensemble des éléments d'Engel à gauche (d'Engel borné à gauche) sera noté $L(G)$ ($\overline{L}(G)$).

Définition 1.8.1.2

Un groupe G est dit groupe n -Engel si pour tous $x, y \in G$; $[x, {}_n y] = 1$, c.a.d ; si $G = R(G) = L(G)$.

G est un groupe d'Engel s'il est un groupe n -Engel pour un certain n .

Théorème 1.8.1.3 ([19])

Soit G un groupe ; Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) G est un groupe 3-Engel.
- (ii) La clôture normale $\langle x^G \rangle$ de x dans G est 2-Engel pour tout $x \in G$.
- (iii) La clôture normale $\langle x^G \rangle$ de x dans G est nilpotente de classe au plus 2 pour tout $x \in G$.

Lorsque l'entier n est plus grand ou égal à 3, un groupe n -Engel n'est plus nilpotent ; cependant, en 1961, H. Heinken, a montré que tout groupe 3-Engel est localement nilpotent [32] et [15] En 2005, Georges Havas et Vaughen-Lee [14] ont prouvé que tout groupe 4-Engel est aussi localement nilpotent.

1.8.2 Eléments 2-Engel à droite

Théorème 1.8.2.1 (Kappe).

L'ensemble des éléments 2-Engel à droite d'un groupe G , forme un sous-groupe caractéristique dans G ; il est noté $R_2(G)$. (preuve voir [32])

Proposition 1.8.2.2

Soit G un groupe 2-Engel, si l'application

$$\begin{aligned}\varphi & : G \rightarrow G \\ x & \rightarrow x^n\end{aligned}$$

avec $n \neq 0, 1$ est un endomorphisme de G , alors

$$\exp(G') \text{ est fini et divise } \frac{n(n-1)}{2}.$$

Théorème 1.8.2.3 ([32])

Soit G un groupe 2-Engel et soient x, y, z des éléments de G , alors :

- (i) $\langle x^G \rangle$ est abélien.
 - (ii) $[x, y, z] = [z, x, y] = [x, y, z]^{-1}$.
 - (iii) $[x, y, z]^3 = 1 \iff (\gamma_3(G))^3 = 1$.
 - (iv) $[x, y, z, t] = 1$, donc G est nilpotent de classe ≤ 3 et métabélien.
- On peut généraliser le théorème (1.7.2.3) pour un élément a de $R_2(G)$.

Lemme 1.8.2.4 ([32])

Soit a un élément 2-Engel à droite et soient x, y et z des éléments d'un groupe G , alors :

- (i) la clôture normale a^G de a dans G est abélienne.
- (ii) $[a, x, y] = [a, y, x]^{-1}$.
- (iii) $[a, [x, y]] = [a, x, y]^2$.
- (iv) $[a, x, y, z]^2 = 1$.
- (v) $[a, [x, y], z] = 1$.

Lemme 1.8.2.5

Soit G un groupe quelconque et soient $y \in G$ et $a \in R_2(G)$, alors :

$$(ay)^n = a^n y^n [y, a]^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Preuve

Soit G un groupe et soient $y \in G, a \in R_2(G)$ donc

1) Si $n \geq 0$, on montre la propriété par récurrence sur n ;

Pour $n = 0, 1$ la propriété est vraie. Supposons la propriété vraie pour n

et

montrons la pour $(n + 1)$;

$$\begin{aligned}
(ay)^{n+1} &= (ay)^n ay \\
&= a^n y^n [y, a]^{\frac{n(n-1)}{2}} ay \\
&= a^n y^n a [y, a]^{\frac{n(n-1)}{2}} y \\
&= a^{n+1} a^{-1} y^n a [y, a]^{\frac{n(n-1)}{2}} y \\
&= a^{n+1} (y^n)^a [y, a]^{\frac{n(n-1)}{2}} y \\
&= a^{n+1} (y^a)^n [y, a]^{\frac{n(n-1)}{2}} y \\
&= a^{n+1} y^n [y^n, a] y [y, a]^{\frac{n(n-1)}{2}} \quad (\text{car } y \text{ commute avec } [y, a]) \\
&= a^{n+1} y^n [y, a]^n y [y, a]^{\frac{n(n-1)}{2}} \\
&= a^{n+1} y^n y [y, a]^{n+\frac{n(n-1)}{2}} \\
&= a^{n+1} y^{n+1} [y, a]^{\frac{(n+1)n}{2}}.
\end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie pour $n \geq 0$.

2) Si $n \leq 0$; posons $m = -n \geq 0$ donc

$$\begin{aligned}
(ay)^n &= (ay)^{-m} \\
&= (y^{-1} a^{-1})^m \\
&= (y^{-1})^m (a^{-1})^m [a^{-1}, y^{-1}]^{\frac{m(m-1)}{2}} \\
&= y^{-m} a^{-m} [a, y]^{\frac{m(m-1)}{2}} \\
&= y^n a^n [a, y]^{\frac{n(n+1)}{2}} \\
&= a^n a^{-n} y^n a^n ([y, a]^{-1})^{\frac{n(n+1)}{2}} \\
&= a^n (y^n)^{a^n} [y, a]^{-\frac{n(n+1)}{2}} \\
&= a^n y^n [y^n, a^n] [y, a]^{-\frac{n(n+1)}{2}} \\
&= a^n y^n [y, a]^{n^2} [y, a]^{-\frac{n(n+1)}{2}} \\
&= a^n y^n [y, a]^{n^2 - \frac{n(n+1)}{2}} \\
&= a^n y^n [y, a]^{\frac{n(n-1)}{2}}.
\end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie aussi pour $n \leq 0$. $\square$

Proposition 1.8.2.6 ([32])

Tout groupe 2-Engel sans éléments d'ordre 3 est nilpotent de classe au plus 2.

Proposition 1.8.2.7

Un groupe d'exposant 3 est un groupe 2-Engel .

Théorème 1.8.2.8 (Levi).

Un groupe G est 3-abélien si, et seulement si, G est 2-Engel et $\exp(G')$ divise 3.

Preuve

- Soient G un groupe 3-abélien et $x, y \in G$, alors

$$\begin{aligned}
[x, y, y] &= [y, x] y^{-1} [x, y] y \\
&= [y, x] y^{-1} x^{-1} y^{-1} x y^2 \\
&= [y, x] x x^{-1} y^{-1} x^{-1} y^{-1} x y^2 \\
&= [y, x] x (x^{-1} y^{-1})^2 x y^2 \\
&= [y, x] x y^{-2} x^{-2} x y^2 \\
&= [y, x] [x^{-1}, y^2] \\
&= [y, x] [x, y] \quad (\text{d'après le lemme d'Abdollahi 1.4.7}) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Donc G est 2-Engel et d'après le lemme 1.8.2.5 on a

$$(xy)^3 = x^3 y^3 [y, x]^{\frac{3(3-1)}{2}}.$$

D'où

$$[x, y]^3 = 1.$$

- Si G est 2-Engel et $\exp(G')$ divise 3 on a toujours

$$(xy)^3 = x^3 y^3 [y, x]^{\frac{3(3-1)}{2}}.$$

et comme $[x, y]^3 = 1$, alors

$$(xy)^3 = x^3 y^3,$$

c.a.d G est 3-abélien. $\square$

Lemme 1.8.2.9 ([36])

Soit G un groupe et soient $x, y, z \in G$, $a \in R_2(G)$, alors :

- (i) $[x, y]^{[a, z]^m} = [x, y]$ pour tout entier m .
- (ii) $[a, x, y]^z = [a, x, y] [a, x, z, y]$.

1.9 Groupes n-Bell

Définition 1.9.1

Soit n un entier rationnel. Un groupe G est dit n -Bell si $[x^n, y] = [x, y^n]$ pour tous $x, y \in G$; la classe des groupes n -Bell forme une variété définie par la loi $[x^n, y][y^n, x] = 1$.

Proposition 1.9.2

Soit G un groupe; posons $B(G) = \{n \in \mathbb{Z}; [x^n, y] = [x, y^n] \text{ pour tous } x, y \in G\}$ alors :

- (i) $0, 1 \in B(G)$ et si $n, m \in B(G)$ alors $nm \in B(G)$.
- (ii) Si $n \in B(G)$ alors $(1 - n) \in B(G)$.
- (iii) Si $n \in B(G)$ alors $n(1 - n) \in B(G)$.

Proposition 1.9.3

Soit G un groupe. Si $n, (n + 1) \in B(G)$, alors $G^n \leq R_2(G)$

Proposition 1.9.4

Soit $n \in B(G)$ alors ;

- (i) $[y^n, x, x] = 1$ pour tout $y \in G$ est équivalent à $x^n \in Z(\langle x^G \rangle)$.
- (ii) $[x^n, y, x^{1-n}] = 1$ pour tous $x, y \in G$.
- (iii) $x^{n-n^2} \in Z(\langle x^G \rangle)$.

Corollaire 1.9.5

Soit G un groupe. Si $n \in B(G)$; alors $y^{n(1-n)} \in R_2(G)$ pour tout $y \in G$.

Proposition 1.9.6 ([36])

Tout groupe n -Bell est aussi $n(n - 1)$ -Bell.

Théorème 1.9.7 ([36])

Si G est un groupe n -Bell, alors $(G/R_2(G))$ est d'exposant fini divisant $n(n - 1)$.

Théorème 1.9.8 ([36])

Si G est un groupe n -Bell, alors $(G/Z_2(G))$ est d'exposant fini divisant $\frac{3n^2(n-1)^2}{2}$.

Corollaire 1.9.9 ([36])

Soit G un groupe n -Bell; si 4 ne divise pas $n(n - 1)$, alors $G/Z_3(G)$ est d'exposant fini divisant $n(n - 1)$.

1.10 Groupes n-Levi

Définition 1.10.1

Soit n un entier rationnel. Un groupe G est dit n -Levi si $[x^n, y] = [x, y]^n$ pour tous $x, y \in G$. La classe des groupes n -Levi forme aussi une variété définie par la loi $[x^n, y][y, x]^n = 1$.

Proposition 1.10.2

Soit G un groupe ; posons $\mathcal{L}(G) = \{n \in \mathbb{Z}; [x^n, y] = [x, y]^n \text{ pour tous } x, y \in G\}$ alors :

- (i) $0, 1 \in \mathcal{L}(G)$ et si $n, m \in \mathcal{L}(G)$ alors $nm \in \mathcal{L}(G)$.
- (ii) Si $n \in \mathcal{L}(G)$ alors $(1 - n) \in \mathcal{L}(G)$.
- (iii) Si $n \in \mathcal{L}(G)$ alors $n(1 - n) \in \mathcal{L}(G)$.

Proposition 1.10.3

Un groupe n -abélien est un groupe n -Levi .

Preuve

Soit G un groupe n -abélien, soient $x, y \in G$

On a

$$\begin{aligned} [x^n, y] &= (x^n)^{-1} (x^n)^y \\ &= x^{-n} (x^y)^n \\ &= (x^{-1} x^y)^n \\ &= [x, y]^n. \end{aligned}$$

Alors G est un groupe n -Levi.

Proposition 1.10.4

Soit G un groupe ; si $n, (n + 1) \in \mathcal{L}(G)$ alors $G^n \leq R_2(G)$.
c.a.d pour tous $x, y \in G$; $[y^n, x, x] = 1$.

Proposition 1.10.5

Soit $n \in \mathcal{L}(G)$ alors ;

- (i) $[y^n, x, x] = 1$ pour tout $y \in G$ est équivalent à $x^n \in Z(\langle x^G \rangle)$.
- (ii) $[x^n, y, x^{1-n}] = 1$ pour tous $x, y \in G$.
- (iii) $x^{n-n^2} \in Z(\langle x^G \rangle)$.

Corollaire 1.10.6

Soit G un groupe.

Si $n \in \mathcal{L}(G)$; alors $y^{n(1-n)} \in R_2(G)$ pour tout $y \in G$.

Proposition 1.10.7 ([36])

Tout groupe n -Levi est aussi $n(n - 1)$ -Levi .

Théorème 1.10.8

Si G est un groupe n -Levi alors $(G/R_2(G))$ est d'exposant fini divisant $n(n - 1)$.

Théorème 1.10.9

Tout groupe 2-Engel est un groupe n -Levi.

Preuve

Soient G un groupe 2-Engel et $x, y \in G$.

Montrons par récurrence sur n la relation

$$[x^n, y] = [x, y]^n$$

- Pour $n = 1$ on a

$$[x^1, y] = [x, y]^1.$$

- Supposons la relation vraie pour n et montrons la pour $n + 1$.

Par hypothèse x commute avec $[x, y]$ car G est 2-Engel.

Donc x^n commute avec $[x, y]$

$$[x, y, x^n] = 1.$$

Alors

$$\begin{aligned} [x^{n+1}, y] &= [xx^n, y] \\ &= [x, y]^{x^n} [x^n, y] \\ &= [x, y] [x, y, x^n] [x^n, y] \\ &= [x, y] [x^n, y] \\ &= [x, y] [x, y]^n \\ &= [x, y]^{n+1}. \end{aligned}$$

D'où G est un groupe n -Levi pour tout $n \in \mathbb{Z}$. $\square$

Théorème 1.10.10 ([36])

Si G est un groupe n -Levi; alors $(G/Z_2(G))$ est d'exposant fini divisant $3n(n-1)$.

Corollaire 1.10.11 ([36])

Soit G un groupe n -Levi, alors $G/Z_3(G)$ est d'exposant fini divisant $n(n-1)$.

Théorème 1.10.12

Tout groupe n -Levi est un groupe n -Bell.

Preuve

Soient G un groupe n -Levi et $x, y \in G$, alors

$$\begin{aligned} [x^n, y] &= [x, y]^n \\ [x^n, y]^{-1} &= ([x, y]^n)^{-1} \\ [y, x^n] &= [y, x]^n \\ [y, x^n] &= [y^n, x]. \end{aligned}$$

Et comme x, y sont quelconques dans G , alors G est un groupe n -Bell. $\square$

Théorème 1.10.13 ([20])

Soit G un groupe ; les quatre conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) G est 3-Engel satisfaisant l'identité $[x, y, y]^3 = 1$ pour tous $x, y \in G$.
- (ii) La clôture normale $\langle x^G \rangle$ de x dans G est 3-abélienne.
- (iii) G est 3-Levi.
- (iv) G est 3-Bell.

1.11 n -centre d'un groupe

Définition 1.11.1

On appelle n -centre d'un groupe G l'ensemble $\{x \in G ; (xy)^n = x^n y^n, \text{ pour tout } y \in G\}$, il est noté $Z(G, n)$.

Théorème 1.11.2 ([22])

Soient G un groupe quelconque et n un entier, alors

$$\begin{aligned} Z(G, n) &= \{a \in G; (ax)^n = a^n x^n \forall x \in G\} \\ &= \{a \in G; (xa)^n = x^n a^n \forall x \in G\} \end{aligned}$$

Proposition 1.11.3 ([22])

$Z(G, n)$ est un sous-groupe caractéristique de G .

Lemme 1.11.4 ([22])

Soit $a \in Z(G, n)$, alors

- i) $[a^{n-1}, x^n] = 1$ pour tout $x \in G$
- ii) $a \in Z(G, 1-n)$
- iii) $[a^n, x] = [a, x]^n = [a, x^n]$ pour tout $x \in G$
- iv) $1 = [a, x^{n(1-n)}] = [a^{n(1-n)}, x] = [a, x]^{n(1-n)} = [a^n, x^{1-n}]$ pour tout $x \in G$
- v) $a^n \in Z(G, n-1)$

Preuve

i) Cela a été montré pour $a \in S_1(G, n)$ dans le théorème 1.11.2

ii) D'après le théorème 1.11.2, on a

$$(xa)^{n-1} = a^{n-1}x^{n-1}$$

Alors

$$\begin{aligned} (xa)^{1-n} &= ((xa)^{n-1})^{-1} \\ &= (a^{n-1}x^{n-1})^{-1} \\ &= x^{1-n}a^{1-n} \end{aligned}$$

donc

$$a \in Z(G, 1-n)$$

iii) On a

$$\begin{aligned} [a, x]^n &= (a^{-1}a^x)^n \\ &= a^{-n}a^{nx} \\ &= [a^n, x] \end{aligned}$$

$(a^n x^{-n})$ commute avec (ax^{-1}) , depuis $a^n x^{-n} = (ax^{-1})^n$.

Ainsi

$$\begin{aligned} a^{n+1} [a, x^n] x^{-n-1} &= a^{n+1} a^{-1} x^{-n} a x^n x^{-n-1} \\ &= a^n x^{-n} a x^{-1} \\ &= a x^{-1} a^n x^{-n} \\ &= a^{n+1} a^{-n} x^{-1} a^n x x^{-n-1} \\ &= a^{n+1} [a^n, x] x^{-n-1} \end{aligned}$$

Donc

$$[a, x^n] = [a^n, x]$$

iv) D'après (i), (ii) et (iii) on a

$$\begin{aligned} 1 &= [a^{1-n}, x^n] \\ &= [a^{1-n}, x]^n \\ &= [a, x]^{n(1-n)} \\ &= [a^{n(1-n)}, x] \end{aligned}$$

Et de même

$$\begin{aligned} 1 &= [a^{1-n}, x^n] \\ &= [a, x^{n(1-n)}] \\ &= [a^n, x^{1-n}] \end{aligned}$$

v) D'après (iv), a^n commute avec x^{n-1}

$$\begin{aligned} (a^n x)^{n-1} &= (a^n x)^n (a^n x)^{-1} \\ &= (a^n x)^n x^{-1} a^{-n} \\ &= a^{n^2} x^{n-1} a^{-n} \\ &= a^{n(n-1)} x^{n-1} \end{aligned}$$

Donc

$$a^n \in Z(G, n-1). \square$$

Théorème 1.11.5 ([22])

Soit G un groupe, alors

$$Z(G, 3) = \{a \in R_2(G); a^3 \in Z(G)\} \text{ et } Z(G, 3) \subset Z_3(G)$$

Proposition 1.11.6 (L.C. Kappe)

Soit G un groupe, alors

$$Z(G, 4) \subseteq R_5(G) \cap L_5(G)$$

où $R_5(G)$ et $L_5(G)$ désignent respectivement les ensembles 5-Engel à droite et 5-Engel à gauche de G .

1.12 Groupes n-centraux

Définition 1.12.1

On dit qu'un groupe G est n -central si

$$G^n \leq Z(G)$$

i.e

$$[x^n, y] = 1 \text{ pour tous } x, y \in G.$$

Proposition 1.12.2

Un groupe G est n – central si, et seulement si,

$$(xy)^n = (yx)^n \text{ pour tous } x, y \in G.$$

Preuve

Supposons que

G est n – central

et montrons que

$$(xy)^n = (yx)^n \text{ pour tous } x, y \in G$$

On a

$$\begin{aligned} (xy)^n &= x(yx)^{n-1}y \\ &= (y^{-1}y)x(yx)^{n-1}y \\ &= y^{-1}(yx)(yx)^{n-1}y \\ &= y^{-1}(yx)^ny \\ &= (yx)^n \end{aligned}$$

Supposons maintenant que

$$(xy)^n = (yx)^n \text{ pour tous } x, y \in G$$

et montrons que

G est n – central

on a

$$\begin{aligned} [x^n, y] &= x^{-n}y^{-1}x^ny \\ &= x^{-n}(y^{-1}xy)^n \\ &= x^{-n}(y^{-1}(xy))^n \\ &= x^{-n}((xy)y^{-1})^n \\ &= x^{-n}x^n \\ &= 1. \end{aligned}$$

Théorème 1.12.3 ([21])

Soit G un groupe quelconque, les conditions suivantes sont équivalentes :

i) G est 2 – central.

ii) $[x, y]^2 = [x, y, y] = 1$ pour tout $x, y \in G$.

iii) $(\gamma_2(G))^3 = \gamma_3(G) = 1$.

Proposition 1.12.4

Soit G un groupe métabélien, n -central. Alors l'exposant de G' divise n^2 et $\gamma_3(G)$ est d'exposant divisant n .

Proposition 1.12.5

Soit G un groupe n -abélien alors, G est $(n-1)$ -central si et seulement si il est $(n-1)$ -abélien.

Preuve

Supposons G un groupe $(n-1)$ -central ;

Pour tous $x, y \in G$

$$\begin{aligned} x^{n-1}y^{n-1} &= x^n x^{-1} y^{n-1} \\ &= x^n y^{n-1} x^{-1} \\ &= x^n y^n y^{-1} x^{-1} \\ &= (xy)^n (xy)^{-1} \\ &= (xy)^{n-1} \end{aligned}$$

Réciproquement, supposons que G est un groupe $(n-1)$ -abélien ;
Pour montrer que G est $(n-1)$ -central, il suffit de montrer que

$$[x^{n-1}, y] = 1 \text{ pour tous } x, y \in G.$$

Soient $x, y \in G$:

$$\begin{aligned} [x^{n-1}, y] &= x^{1-n} y^{-1} x^{n-1} y \\ &= x^{1-n} y^{1-n} y^{n-2} x^{n-1} y \\ &= (xy)^{1-n} y^{n-2} x^{n-1} y \\ &= (xy)^{1-n} y^{n-2} x^{n-2} xy \end{aligned}$$

Puisque G est $(n-1)$ -abélien alors il est *anti* $-(n-2)$ -abélien ;
Donc

$$\begin{aligned} [x^{n-1}, y] &= (xy)^{1-n} (xy)^{n-2} xy \\ &= (xy)^{-1} (xy) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Par suite

$$[x^{n-1}, y] = 1 \text{ pour tous } x, y \in G$$

D'où

G est $(n - 1)$ – central.

Proposition 1. 12.6

Tout groupe n -abélien est $n(n - 1)$ central.

Preuve

Soient $x, y \in G$: D'après les propriétés des groupes n -abéliens, on a :

$$[x^{n(n-1)}, y] = [(x^{n-1})^n, y] = [x^{n-1}, y]^n = [x^{n-1}, y^n] = 1$$

En 1969, Narain Gupta et Akbar Remtullah ont répondu partiellement à cette question en établissant le résultat suivant :

Théorème 1.12.7

- (i) *Un groupe 2 – central est un groupe 4 – abélien.*
- (ii) *Un groupe 3 – central est un groupe 9 – abélien.*
- (iii) *Un groupe 4 – central est un groupe 32 – abélien.*

En 2006, P. Moravec a amélioré les résultats de Gupta et Remtullah en établissant les deux théorèmes suivants :

Théorème 1.12.8 ([29])

Un groupe 4 – central est un groupe 16 – abélien.

Théorème 1.12.9 ([29])

Un groupe 6 – central est un groupe 36 – abélien.

Dans la proposition 1.12.6, on a montré que tout groupe n -abélien est $n(n - 1)$ central ; ce qui signifie que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C}$ où $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{C}$ désignent respectivement les classes de groupes Alpérin et $\mathfrak{C}$ celle des groupes G pour lesquels il existe $n \in N$ tel que G soit n -central. Réciproquement un groupe n -central est-il un groupe d'Alpérin ? c.a.d existe-t-il $m \in N^*$ tel que ce groupe soit m -abélien ? où ce qui est équivalent, a-t-on $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{A}$? C. Delizia, P. Moravec et C. Nicotera ont montré que dans la classe des groupes localement gradués $\mathfrak{G}$, les deux classes $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{C}$ coïncident c'est à dire

$$\mathfrak{G} \cap \mathfrak{A} = \mathfrak{G} \cap \mathfrak{C}.$$

1.13 Groupes n -résolubles et n -nilpotents

1.13.1 Groupes n -résolubles

Définition 1.13.1.1

Un groupe G est dit n -résoluble s'il admet une suite finie n -abélienne, i.e une suite finie de sous groupes $1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_k = G$ telle que G_{i+1}/G_i soit n -abélien pour tout i , $0 \leq i \leq k - 1$.

la longueur de la plus courte suite précédente s'appelle longueur de n -résolubilité de G .

Un groupe est résoluble si, et seulement si, il est 1-résoluble.

Théorème 1.13.1.2 ([5])

Si l'ordre d'un groupe n -résoluble G est produit de deux nombres premiers h et k tels que n ou bien $(1 - n)$ soit premier avec un des nombres h et k , alors G est produit de deux sous-groupes d'ordre h et k respectivement.

Corollaire 1.12.1.3 ([5])

Si l'ordre d'un groupe n -résoluble G est produit de deux nombres premiers h et k , et si $n(1 - n)$ est premier avec h ou bien avec k , alors deux sous-groupes de G quelconques d'ordre h sont conjugués.

Théorème 1.13.1.4 ([36])

Soit G un groupe n -Bell, alors $G/R_2(G)$ est un groupe n -abélien. En particulier G est un groupe n -résoluble de longueur au plus 3.

1.13.2 Groupes n -nilpotents

Définition 1.13.2.1

Un groupe G est dit n -nilpotent s'il admet une suite finie n -centrale ascendante.

Proposition 1.13.2.2 ([5])

- (i) un sous-groupe d'un groupe n -nilpotent est n -nilpotent.
- (ii) L'image homomorphe d'un groupe n -nilpotent est n -nilpotente.

Proposition 1.13.2.3

Si G est un groupe n -Bell satisfaisant $\max - ab$, alors G est n -nilpotent du classe au plus $(k + 1)$ où k est le plus petit entier vérifiant

$$R_2(G) \leq Z_k(G) \text{ (voir [33, Theorem 7.21]).}$$

Théorème 1.13.2.4 ([36, Corollary 2.5])

Soit G un groupe n - Bell. Si 4 ne divise pas $n(n - 1)$, alors G est n - nilpotent de classe au plus 4.

Théorème 1.13.2.5 ([36, Corollary 2.5])

Un groupe n - Levi est un groupe n - nilpotent de classe au plus 4.

Chapitre 2

Groupes n-Abéliens Généralisés

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons donner la définition des groupes n-abéliens généralisés et des résultats qui ont été précédemment cités dans les groupes 3-abéliens généralisés.

Dans ce chapitre, on démontre le théorème suivant :

” Tout groupe n -abélien généralisé, fini et π_n -libre est abélien ”

(π_n étant l'ensemble des nombres premiers $\leq n$). Pour démontrer ce théorème, on a utilisé les propriétés des groupes $H(q)$, extra-spéciaux généralisés et le célèbre théorème de Feit Thompson qui dit (que tout groupe fini d'ordre impair est résoluble). Avec des résultats convenables, ce résultat peut s'étendre à des groupes infinis voir le corollaire 2) . Cependant ce résultat ne se généralise pas à un groupe quelconque, En effet considérons le groupe :

$$G = \langle a, b \mid (b^2)^a = b^{-2}, (a^2)^b = a^{-2} \rangle$$

Il est sans torsion (donc infini) et 8-abélien généralisé car il vérifie l'identité

$$x^2 (x^2)^a (x^2)^b (x^2)^{ab} = 1 \quad \forall x \in G.$$

Un autre exemple est donné par le groupe diédral infini $G = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = 1, ab = ba \rangle$, qui est 4-abélien généralisé puisque $ax^2ax^2 = 1$ quel que soit x .

2.2 Groupes n-abéliens généralisés

Soit n un entier ≥ 2 . On dit qu'un groupe G est n -abélien généralisé s'il existe n éléments $a_1, a_2, \dots, a_n \in G$ tels que l'application $x \mapsto x^{a_1} x^{a_2} \dots x^{a_n}$ soit un endomorphisme de G .

Définition 2.2.1

Soit h un entier rationnel. On dit qu'un groupe G vérifie la propriété $\xi(h)(\mathcal{M}(h))$ s'il existe r éléments $a_1, a_2, \dots, a_r \in G$ et r entiers rationnels $h_1, h_2, \dots, h_r$ tels que l'application

$$\varphi : x \mapsto (x^{a_1})^{h_1} (x^{a_2})^{h_2} \dots (x^{a_r})^{h_r} = x^h \prod_{i=1}^r [x^{h_i}, a_i] [x^{h_i}, a_i, x^{h-(h_1+\dots+h_i)}]$$

soit un endomorphisme (un monomorphisme) de G avec $h = h_1 + h_2 + \dots + h_r$.

Proposition 2.2.2 ([2])

Soient G un groupe nilpotent et h un entier rationnel différent de 0 et 1. Soient π l'ensemble des nombres premiers divisant $\frac{h(h-1)}{2}$ et π_1 celui des nombres premiers divisant $(h-1)$.

Alors G est abélien si l'une des trois conditions suivantes est vérifiée :

1. G satisfait $\xi(-1)$ ou $\xi(2)$.
2. G satisfait $\xi(h)$ et $\mathcal{Z}(G)$ est π -libre.
3. G satisfait $\mathcal{M}(h)$ et $\mathcal{Z}(G)$ est π_1 -libre.

Preuve

1) et 2) Remarquons qu'en vertu de la proposition 1.2.2.2 (i), G est π -libre. Si c désigne la classe de nilpotence de G , supposons d'abord $c = 2$. Puisque le groupe G vérifie $\xi(h)$, il existe r éléments $a_1, a_2, \dots, a_r \in G$ et r entiers rationnels $h_1, h_2, \dots, h_r$ tels que l'application

$$\varphi : x \mapsto (x^{a_1})^{h_1} (x^{a_2})^{h_2} \dots (x^{a_r})^{h_r} = x^h \prod_{i=1}^r [x^{h_i}, a_i] [x^{h_i}, a_i, x^{h-(h_1+\dots+h_i)}]$$

soit un endomorphisme de G avec $h = h_1 + h_2 + \dots + h_r$.

Soient $x, y \in G$; de la relation $\varphi(xy) = \varphi(x) \varphi(y)$ et en tenant compte du fait que $c = 2$, on peut écrire

$$(xy)^h \prod_{i=1}^r [(xy)^{h_i}, a_i] = x^h y^h \prod_{i=1}^r [x^{h_i}, a_i] [y^{h_i}, a_i].$$

mais

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^r [(xy)^{h_i}, a_i] &= \prod_{i=1}^r [xy, a_i]^{h_i} = \prod_{i=1}^r ([x, a_i] [y, a_i])^{h_i} \\ &= \prod_{i=1}^r [x^{h_i}, a_i] [y^{h_i}, a_i] \end{aligned}$$

$$(xy)^h = x^h y^h$$

Donc G est abélien si $h = -1$ ou 2 . D'autre part

$$(xy)^h = x^h y^h [y, x]^{\frac{h(h-1)}{2}}$$

Ce qui donne

$$[y, x]^{\frac{h(h-1)}{2}} = 1$$

Et par suite G' est trivial car G est π -libre. Si h est différent de -1 et 2 et si G est π -libre, G' est trivial, G est aussi abélien; dans les deux cas on arrive à une contradiction.

Supposons maintenant $c \geq 3$. Le groupe quotient $\bar{G} = G/\mathcal{Z}_{c-2}(G)$ est nilpotent de classe 2 et vérifie $\xi(h)$. De plus, G étant π -libre, $\bar{G}$ l'est aussi; (voir la proposition 1.2.2.2); donc $\bar{G}$ est abélien ce qui contredit le fait que $c \geq 3$; donc nécessairement $c = 1$.

3) Supposons $\mathcal{Z}(G)$ π_1 -libre et l'endomorphisme φ injectif; supposons qu'il existe un élément non trivial x_o de $\mathcal{Z}(G)$ dont l'ordre est un diviseur premier p de h ; alors $x_o^h = 1$ or $\varphi(x_o) = x_o^h$; donc $\varphi(x_o) = 1$, ce qui contredit le fait que l'endomorphisme φ est injectif et par suite $\mathcal{Z}(G)$ est π -libre et nous sommes ramenés au deuxième cas.

Proposition 2.2.3

Soient G un groupe hypercentral, h un entier rationnel ($h \neq 0, 1$), π l'ensemble des nombres premiers divisant $\frac{h(h-1)}{2}$ et π_1 celui des nombres premiers divisant $(h-1)$. G est abélien si l'une des trois conditions suivantes est satisfaite :

1. G vérifie $\xi(-1)$ ou $\xi(2)$.
2. $\mathcal{Z}(G)$ est π -libre et G vérifie $\xi(h)$.
3. G satisfait $\mathcal{M}(h)$ et $\mathcal{Z}(G)$ est π_1 -libre.

Corrolaire 2.2.4 ([2])

Soient G un groupe nilpotent de type fini et h un entier rationnel différent de 0 et 1; Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. G satisfait $\xi(h)$ (pour un certain $h \neq 0, 1$).
2. G est une extension finie de son centre.
3. G est m -abélien (pour un entier $m \geq 2$).

Proposition 2.2.5

Tout groupe 2-abélien généralisé et plus généralement tout groupe admettant un endomorphisme qui est somme de deux épimorphismes est abélien.

Preuve

Soit $\varphi : x \mapsto \alpha(x)\beta(x)$ un endomorphisme de G où α et β sont deux épimorphismes de G ; et soient x et $y \in G$; il existe a et b dans G tels que $x = \alpha(b)$ et $y = \beta(a)$; de la relation $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ on en déduit $xy = yx$.
□

Définition 2.2.6

On dit qu'un p -groupe fini G est extra-spécial si G' et $Z(G)$ coïncident et sont d'ordre p .

On dit qu'un p -groupe fini G est extra-spécial généralisé si $Z(G)$ est cyclique et G' d'ordre p .

voir [32, p. 145] et [32, Exercice 5.3.8].

Remarque 2.2.7

Un groupe extra-spécial généralisé est nilpotent de classe ≤ 2 . Voir [32, Exercice 5.3.8].

Définition 2.2.8

L'ensemble des applications $f : GF(q) \rightarrow GF(q)$

$$x \mapsto f(x) = ax + b$$

où a et $b \in GF(q)$ avec $a \neq 0$, muni de la composition des applications est un groupe, il est noté $H(q)$.

Proposition 2.2.9

Le groupe $H(q)$ est isomorphe au groupe des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

où a, b sont dans le corps fini $GF(q)$ avec $a \neq 0$.

Preuve

Soient $f : GF(q) \rightarrow GF(q)$ et $f' : GF(q) \rightarrow GF(q)$
 $x \mapsto f(x) = ax + b$ $x \mapsto f'(x) = a'x + b'$

où $a, a' \neq 0$ et $b, b' \in GF(q)$.

Définissons $\psi : (G, \cdot) \rightarrow (H(q), \circ)$

$$f = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \psi(f) : GF(q) \rightarrow GF(q)$$

$$x \mapsto f(x) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = ax + b.$$

On a

$$\begin{aligned} \psi(ff') &= \psi \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \psi \begin{pmatrix} aa' & ab' + b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (aa')x + (ab' + b) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \psi(f) \circ \psi(f') &= a(a'x + b') + b \\ &= (aa')x + (ab' + b) \end{aligned}$$

alors

$$\psi(ff') = \psi(f) \circ \psi(f') \text{ et } \psi \text{ est un homomorphisme.}$$

Prouvons maintenant que ψ bijective

$$\begin{aligned} \ker \psi &= \left\{ f \in G \text{ tel que } \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \{ f \in G \text{ tel que } a = 1 \text{ et } b = 0 \} \\ &= id_G. \end{aligned}$$

d'où ψ est injective.

Soit $g : x \rightarrow ax + b$ alors $f = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est un antécédent

d'où ψ est surjective ; par suite ψ est un isomorphisme. $\square$

Théorème 2.2.10

Tout groupe fini n -abélien généralisé et π_n -libre est abélien.

Lemme 2.2.11

Soit G un groupe fini résoluble non abélien dont tous les quotients propres sont abéliens, alors G est isomorphe soit à un groupe extra-spécial généralisé, soit à un sous-groupe de $H(q)$ ($q \geq 2$). ([32])

Preuve de Théorème 2.2.10

Supposons qu'il existe un groupe fini non abélien vérifiant les hypothèses du théorème.

Soit G un tel groupe, choisi d'ordre minimal. Puisque G est d'ordre impair, il est résoluble en vertu du théorème de Feit-Thompson. De plus, tous les quotients propres de G satisfont les hypothèses du théorème. Ils sont donc abéliens par minimalité. Alors, G est isomorphe soit à un groupe extra-spécial généralisé, soit à un sous-groupe de $H(q)$ ($q \geq 2$) (d'après lemme précédent). Si G était isomorphe à un groupe extra-spécial généralisé, il serait abélien en vertu de la proposition 4. Donc G est isomorphe à un sous-groupe de $H(q)$. Puisque G est n -abélien généralisé, il existe n éléments $g_1, \dots, g_n$ de G tels que l'application $\phi : f \rightarrow f^{g_1} \dots f^{g_n}$ soit un endomorphisme de G . Posons

$$g_i = \begin{pmatrix} c_i & d_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ avec } c_i, d_i \in GF(q) \text{ et } c_i \neq 0.$$

Le groupe G n'étant pas abélien, on peut toujours trouver un élément $f = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ et un élément $f' = \begin{pmatrix} 1 & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G'$ avec $a \neq 0, 1$ et $b' \neq 0$. Puisque l'application ϕ est un endomorphisme, on a

$$\prod_{i=1}^n (f f')^{g_i} = \left(\prod_{i=1}^n f^{g_i} \right) \left(\prod_{i=1}^n f'^{g_i} \right)$$

A l'aide de la relation

$$\prod_{i=1}^n \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \prod_{i=1}^n a_i & b_1 + \sum_{j=2}^n \left(\prod_{i=1}^{j-1} a_i \right) b_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut écrire

$$\prod_{i=1}^n (f f')^{g_i} = \prod_{i=1}^n \begin{pmatrix} a & c_i^{-1}(ad_i + ab' + b - d_i) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (*)$$

En posant

$$v = c_1^{-1}(ad_1 + ab' + b - d_1) + \sum_{j=2}^n a^{j-1} c_j^{-1}(ad_j + ab' + b - d_j).$$

De même,

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^n f^{g_i} &= \prod_{i=1}^n \begin{pmatrix} a & c_i^{-1}(ad_i + b - d_i) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^n & c_1^{-1}(ad_1 + b - d_1) + \sum_{j=2}^n a^{j-1}c_j^{-1}(ad_j + b - d_j) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^n f'^{g_i} &= \prod_{i=1}^n \begin{pmatrix} 1 & c_i^{-1}b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & (c_1^{-1} + \dots + c_n^{-1})b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Il en résulte l'égalité

$$\left(\prod_{i=1}^n f^{g_i}\right) \left(\prod_{i=1}^n f'^{g_i}\right) = \begin{pmatrix} a^n & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (**)$$

en posant

$$w = a^n(c_1^{-1} + \dots + c_n^{-1})b' + c_1^{-1}(ad_1 + b - d_1) + \sum_{j=2}^n a^{j-1}c_j^{-1}(ad_j + b - d_j).$$

En égalisant les matrices (*) et (**), et après simplification, on obtient la relation

$$\begin{aligned}P(a) &= c_1^{-1} + c_2^{-1}a + \dots + c_{n-1}^{-1}a^{n-2} + (-c_1^{-1} - \dots - c_{n-1}^{-1})a^{n-1} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Notons que P est un polynôme non nul à coefficients dans $GF(q)$ de degré inférieur ou égal à $n - 1$. l'égalité

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} a^k & b(a^k - 1)(a - 1)^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

montre que l'ordre e de f dans G est égale à l'ordre de a dans le groupe multiplicatif $GF(q) \setminus \{0\}$ (rappelons que a est choisi distinct de 1). En remplaçant successivement dans le calcul précédent f par $f^2, \dots, f^{e-1}$, on en déduit

que les éléments $a, a^2, \dots, a^{e-1}$ sont des racines (distinctes) du polynôme P ; notons aussi que $P(1) = 0$. De plus, on a $e \geq n + 1$, puisque G est π_n -libre. Le polynôme P doit donc être de degré $\geq n + 1$, d'où une contradiction. Il en résulte que G ne peut pas être isomorphe à un sous-groupe de $H(q)$, ce qui achève la démonstration du théorème.

Remarque 2.2.12

Si un groupe G admet un monomorphisme de la forme $\varphi : x \mapsto x^{a_1} x^{a_2} \dots x^{a_n}$, alors, il suffit que G soit π_{n-1} -libre pour que G soit abélien.

En effet le groupe extra-spécial généralisé considéré précédemment (qui est nilpotent de classe ≤ 2) est alors abélien en vertu de la proposition 2.2.3. Si maintenant G est isomorphe à $H(q)$, on a vu que “ π_{n-1} -libre” implique une contradiction.

Corollaire 2.2.13

Soit G un groupe admettant un endomorphisme de la forme $\varphi : x \mapsto x^{a_1} x^{a_2} \dots x^{a_n}$. Alors G est abélien si l'une des quatre conditions suivantes est satisfaite :

- (i) G est un FC-groupe π_n -libre.
- (ii) La clôture normale de $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ dans G est finie (c'est par exemple le cas si l'ensemble $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ est normal et les ordres des éléments a_i finis) et G est π_n -libre.
- (iii) G est un FC-groupe π_{n-1} -libre et φ bijectif.
- (iv) La clôture normale de $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ dans G est finie, φ bijectif et G est π_{n-1} -libre.

Preuve

(i) Supposons que G est un FC- groupe π_n -libre. Soit u et v deux éléments quelconques de G et soit H le sous-groupe de G engendré par $u, v, a_1, a_2, \dots, a_n$; H étant un FC- groupe de type fini est central par fini et n -abélien généralisé (il suffit de considérer la restriction de φ à H); donc le groupe $H/\mathcal{Z}(H)$ est fini et n -abélien généralisé car la propriété “ n -abélien généralisé” est stable par passage au quotient; de plus il est π_n -libre en vertu de la proposition 1.2.2.2 (i); le théorème 2.2.10 entraîne la commutativité de $H/\mathcal{Z}(H)$; et par suite H est nilpotent; comme il est π_n -libre et n -abélien généralisé, il est abélien; et par suite u commute avec v .

(ii) Notons F la clôture normale de $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ dans G . Le sous-groupe F étant fini, le groupe quotient G/F est π_n -libre; de plus il est n -abélien. Or tout groupe n -abélien π_n -libre est abélien [4], Par suite G' est fini; donc G est un FC groupe π_n -libre; et l'on est ramené au premier cas. (Le fait que F soit fini quand $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ est un ensemble normal et les

ordres de a_i finis est bien entendu une conséquence du lemme de Dicman.[32, 14.5.7].

(iii) Dans (i) la restriction de φ à H est un automorphisme rationnel de H ; or φ induit sur le groupe quotient $H/\mathcal{Z}(H)$ un automorphisme rationnel; ce qui implique que $H/\mathcal{Z}(H)$ (qui est fini, n -abélien généralisé et π_{n-1} -libre) est abélien en vertu de la proposition 3.4.4 (iii); la suite de la démonstration est la même que celle dans (i).

(iv) La démonstration est la même que celle dans (ii) et (iii). Ce qui termine la démonstration du corollaire 3.5.6.

2.3 Groupes 3-abéliens généralisés

On dit qu'un groupe G est 3-abélien généralisé s'il existe $c_1, c_2, c_3 \in G$ tels que

l'application $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^{c_1} \mathbf{x}^{c_2} \mathbf{x}^{c_3}$ soit un endomorphisme de $\mathbf{G}$.

La classe des groupes 3-abéliens généralisés est une généralisation de celle des groupes 3-abéliens .

Lemme 2.3.1

Soit G un groupe quelconque et soient $x, y \in G$ et $a \in R_2(G)$, alors :

- (i) $[a, y, a] = [a, y, a^{-1}] = 1$.
- (ii) $\{[a, x], [a, x, y], [a, x, y, z]\} \subset R_2(G)$.
- (iii) $a^2 \in Z_3(G)$ et $[a, x]^k = [a^k, x]$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
- (iv) Si a est d'ordre impair il appartient à $Z_3(G)$.

Preuve

Soit G un groupe et soient $x, y \in G, a \in R_2(G)$ donc

- (i) On a $[a, y] = a^{-1}a^y \in a^G$ et $a, a^{-1} \in a^G$ donc

$$[a^{-1}a^y, a] = 1 \text{ et } [a^{-1}a^y, a^{-1}] = 1 \text{ (car } a^G \text{ est abélien).}$$

D'où

$$[a, y, a] = [a, y, a^{-1}] = 1.$$

- (ii) $R_2(G)$ est un sous- groupe normal de G et a^G est le plus petit sous-groupe normal contenant a donc $a^G \leq R_2(G)$ (car $a \in R_2(G)$).

Et comme

$$[a, x] = a^{-1}a^x \in a^G$$

donc

$$[a, x] \in R_2(G)$$

aussi

$$[a, x, y] = [a, x]^{-1} [a, x]^y \in a^G \leq R_2(G)$$

et

$$[a, x, y, z] = [a, x, y]^{-1} [a, x, y]^z \in a^G \leq R_2(G).$$

D'où

$$\{[a, x], [a, x, y], [a, x, y, z]\} \subset R_2(G).$$

(iii) On a ;

$$\begin{aligned} [a^2, x] &= [a, x]^a [a, x] \\ &= [a, x] [a, x, a] [a, x] \\ &= [a, x]^2 \quad (\text{d'après (i)} ; [a, x, a] = 1). \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} [a^2, x, y] &= [[a^2, x], y] \\ &= [[a, x]^2, y] \\ &= [a, x, y]^2 \quad (\text{car } [a, x] \in R_2(G)). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} [a^2, x, y, z] &= [[a^2, x, y], z] \\ &= [[a, x, y]^2, z] \\ &= [a, x, y, z]^2. \end{aligned}$$

Mais d'après (iv) de lemme 1.8.2.4, on a $[a, x, y, z]^2 = 1$.

Donc

$$[a^2, x, y, z] = 1.$$

Et par suite $a^2 \in Z_3(G)$.

-Pour montrer la relation $[a^k, x] = [a, x]^k$ on raisonne par récurrence sur k ; on supposant d'abord $k \geq 0$.

*Pour $k = 1$ on a $[a^1, x] = [a, x]^1$.

*Supposons que $[a, x]^k = [a^k, x]$ et on montrons que $[a, x]^{k+1} = [a^{k+1}, x]$

$$\begin{aligned}
[a, x]^{k+1} &= [a, x]^k [a, x] \\
&= [a^k, x] [a, x] \\
&= a^{-k} x^{-1} a^k x a^{-1} x^{-1} a x \\
&= a^{-k} a^{-1} x^{-1} a^k x x^{-1} a x \text{ (car } a^G \text{ est abélien)} \\
&= a^{-(k+1)} x^{-1} a^{k+1} x \\
&= [a^{k+1}, x].
\end{aligned}$$

- Si k est négatif, posons $l = -k$

$$\begin{aligned}
[a^k, x] &= [a^{-l}, x] \\
&= \left[(a^l)^{-1}, x \right] \\
&= \left([a^l, x]^{(a^l)^{-1}} \right)^{-1} \\
&= \left(\left([a, x]^l \right)^{a^{-l}} \right)^{-1} \\
&= \left([a, x]^{-l} \right)^{a^{-l}} \\
&= [a, x]^k [a^k, x^k, a^k] \\
&= [a, x]^k.
\end{aligned}$$

Donc

$$[a, x]^k = [a^k, x] \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}.$$

(iv) Soit $(2n+1)$ l'ordre de a , alors $a^{2n+1} = 1$

$$1 = (a^2)^n a \implies a = (a^{-2})^n \in Z_3(G) \text{ (d'après (iii)). } \square$$

Rappelons le résultat établi dans la proposition 1.4.7 :

Soient G un groupe et n un entier tels que l'application $x \mapsto x^n$ soit un endomorphisme de G . Alors

(i) $(xy)^{n-1} = y^{n-1} x^{n-1}$ pour tous $x, y \in G$ (on dit que G est $\text{anti}(n-1)$ -abélien).

(ii) De plus, si cette application est un épimorphisme de G , l'application $x \mapsto x^{n-1}$ est un homomorphisme de G dans $\mathcal{Z}(G)$ c.a.d. que G est $(n-1)$ -abélien.

Théorème 2.3.2 ([2])

Soit G un groupe 3-abélien généralisé c'est à dire admettant un endomorphisme de forme :

$$x \longmapsto x^{c_1} x^{c_2} x^{c_3}$$

où $c_1, c_2, c_3 \in G$. Alors : G est nilpotent de classe au plus 10.

Preuve

(i) Soit G un groupe 3-abélien généralisé. Il existe donc 3 élément c_1, c_2, c_3 de G tels que l'application $\varphi : x \longmapsto x^{c_1} x^{c_2} x^{c_3}$ soit un endomorphisme de G .

Par conséquent, $\phi : x \longmapsto x^a x x^b$ est aussi un endomorphisme de G , où

$$a = c_1 c_2^{-1}$$

et

$$b = c_3 c_2^{-1}.$$

La relation

$$\phi(x^{-1}) = (\phi(x))^{-1}$$

nous donne

$$\phi(x) = x^a x x^b = x^b x x^a$$

pour tout x dans G ; donc a et b jouent un rôle symétrique, ce qui signifie que toute propriété valable pour a est aussi valable pour b et réciproquement .

Pour chaque $x \in G$, on a

$$\phi\left(x^{b^{-1}} x^{a^{-1}}\right) = \phi\left(x^{b^{-1}}\right) \phi\left(x^{a^{-1}}\right),$$

ce qui implique l'égalité

$$x x^{b^{-1}} x^{a^{-1}} x = x^{b^{-1}} x^2 x^{a^{-1}} \text{ pour chaque } x \in G.$$

En substituant a, b à x dans cette dernière égalité , on obtient

$$a^b a = a a^b$$

et

$$b^a b = b b^a.$$

Il en résulte que le commutateur $c = [a, b]$ commute avec a et b . A l'aide de ce résultat, il est facile de voir que la relation

$$\phi(cya^{-1}) = \phi(c)\phi(ya^{-1})$$

(pour un y quelconque dans G) implique la relation

$$y^2 = y^{c^2}y^c.$$

Grâce à cette égalité et celle obtenue en remplaçant y par y^{-1} , on obtient la relation

$$y^{c^2}y^c = y^cy^{c^2}.$$

Il en résulte que $[c, y, y] = 1$ pour tout $y \in G$, d'où $c^2 \in Z_3(G)$ d'après [33, Theorem 7.13].

L'égalité $y^2 = y^{c^2}y^c$ donne alors

$$y \equiv y^c \pmod{Z_3(G)}$$

ce qui prouve que

$$c = [a, b] \in Z_4(G)$$

Partant de la relation

$$\phi(a^{-1}y) = \phi(a^{-1})\phi(y)$$

et grâce au fait que

$$[a, b] \equiv 1 \pmod{Z_4(G)}$$

on montre facilement que

$$y^2 \equiv y^{a^2}y^a \pmod{Z_4(G)}$$

En utilisant cette congruence et celle obtenue en remplaçant y par y^{-1} , on obtient

$$y^ay^{a^2} \equiv y^{a^2}y^a \pmod{Z_4(G)}$$

d'où

$$[a, y, y] \equiv 1 \pmod{Z_4(G)}$$

En appliquant à nouveau ([33, Theorem 7.13]), on en déduit que

$$a^2Z_4(G) \in Z_3(G/\zeta_4(G))$$

en d'autres termes, on a

$$a^2 \in Z_7(G).$$

De façon analogue, en partant de la relation

$$\phi(yb) = \phi(y)\phi(b)$$

on montre que

$$y^2 \equiv y^b y^{b^2} \pmod{Z_4(G)}$$

et ensuite que

$$b^2 \in Z_7(G).$$

Les congruences

$$y^2 \equiv y^{a^2} y^a \pmod{Z_4(G)}$$

et

$$y^2 \equiv y^b y^{b^2} \pmod{Z_4(G)}$$

impliquent donc

$$y \equiv y^a \pmod{Z_7(G)}$$

et

$$y \equiv y^b \pmod{Z_7(G)}$$

ce qui montre que a et b sont dans $Z_8(G)$.

Le groupe quotient $G/Z_7(G)$ est donc 3-*abélien* puisque ϕ induit sur ce quotient l'endomorphisme $x \mapsto x^3$.

D'après un résultat de Levi[28], cela implique que

$$G/Z_7(G) \text{ est } 2\text{-Engel}.$$

Donc ce quotient est *nilpotent* de classe au plus 3 [32].

Il en résulte que

G est nilpotent de classe au plus 10. $\square$

Corollaire 2.3.3 ([2])

Un groupe 3-abélien généralisé de type fini est une extension de son centre.

Preuve

Comme G est 3-abélien généralisé, il est nilpotent, G est nilpotent de type fini et 3-abélien généralisé, d'où G est une extension finie de son centre (d'après le corollaire 2.2.4).

Corollaire 2.3.4 ([2])

Soit G un groupe 3-abélien généralisé et soit

$$\varphi : x \longmapsto x^{c_1} x^{c_2} x^{c_3}$$

l'endomorphisme polynomial associé. Alors G est abélien si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

1. *le centre de G n'admet aucun éléments d'ordre 3.*
2. *φ est un monomorphisme.*

Preuve

D'après le théorème précédent, G est nilpotent. Donc, si le centre de G n'admet aucun élément d'ordre 3, il est facile de voir que G est 3-libre.

La première partie du corollaire est ainsi une conséquence de la Proposition 2.3.2. Remarquons maintenant que tout élément d'ordre 3 dans le centre de G appartient au noyau de φ . Il en résulte que si ce noyau est trivial, le centre de G n'admet aucun élément d'ordre 3 et l'on est ramené au cas précédent. $\square$

Le dernier résultat caractérise les groupes possédant un automorphisme polynomial positif de degré 3 (rappelons que par définition, si d est un entier positif, un groupe abélien G est d -divisible si $G = \{g^d \mid g \in G\}$).

Corollaire 2.3.5 ([2])

Un groupe G admet un automorphisme polynomial positif de degré 3 si et seulement si G est un groupe abélien 3-divisible sans éléments d'ordre 3.

Preuve

Il suffit de remarquer que d'après le corollaire précédent, un groupe admettant un automorphisme polynomial positif de degré 3 est nécessairement abélien. Le reste de la démonstration est clair. $\square$

Chapitre 3

Caractérisation des Groupes 3-Abéliens Généralisés

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudie le cas particulier où $n = 3$. Nous allons prouver que 3 est la meilleure borne de la classe de nilpotence d'un groupe 3-abélien généralisé.

En 1965, Trotter a prouvé que G est abélien si l'application $x \mapsto x^3$ est un automorphisme de G .

En 2006, Abdollahi, Daoud et Endimioni ont montré qu'un groupe 3-abélien généralisé de type fini est un groupe d'Alpérin ; on se propose d'améliorer ce résultat.

Un groupe G est dit m -nilpotent de classe au plus k , si $Z_k(G, m) = G$. Karasev [24] a introduit la notion de m -sous-groupe dérivé d'un group G comme suit : Pour un entier donné $m \geq 2$ et deux éléments x, y de G , le m -commutateur de x et y est défini par $[x, y]_m = (xy)^m y^{-m} x^{-m}$. Le m -sous-groupe dérivé d'un group G , $([G, G]_m)$, est le sous-groupe engendré par l'ensemble des m -commutateurs de G . Dans notre travail on montre qu'un groupe 3-abélien généralisé est un groupe 3-nilpotent de classe au plus 2.

En 2003, Alireza Abdollahi, a montré que tout groupe 3-abélien généralisé est nilpotent de classe au plus 11 ; Gérard Endimioni a amélioré la borne à 10. En 2005, B. Daoud, Meriem Hamitouche et Khalissa Merikhi ont montré que la classe de nilpotence est inférieure ou égale à 7. Enfin, avec la méthode de GAP, Alireza Abdollahi, (qui est mon co-encadreur) a abaissé la borne

à 3. L'exemple suivant (qui nous a été donné par le referee) : <<Le groupe libre F engendré par 4 éléments et d'exposant 3 est 3-abélien nilpotent de classe 3>>, montre que 3 est la meilleure borne. On termine le chapitre 3 en montrant qu'un groupe 3-abélien généralisé est 9-abélien, 9-central 3-levi et 2-nilpotent de classe au plus 2.

3.2 Classe de nilpotence des Groupes 3-Abéliens Généralisés

Théorème 3.2.1

Soit G un groupe 3-abélien généralisés, c'est à dire admettant un endomorphisme de forme :

$$\varphi : x \longmapsto x^a x^b$$

$a, b \in G$. Alors :

- i) si $a, b \in Z_2(G)$, G est 3-abélien.
- ii) G est nilpotent de class au plus 7.

Lemme 3.2.2

Soit G un groupe, alors $Z(G, 3) = \{a \in R_2(G) \mid a^3 \in Z(G)\}$ et $Z(G, 3) \leq Z_3(G)$ [17, Theorem 4.3]

Lemme 3.2.3

Soit G un groupe, alors $Z_i(G, 3) \leq Z_{3i}(G)$ por tout i .

Preuve

On montre par récurrence sur i ; pour $i = 1$, d'après lemme 1 on a $Z(G, 3) \leq Z_3(G)$.

On suppose que la relation est vraie pour i et on la montre pour $i + 1$; on a

$$Z_{i+1}(G, 3) / Z_i(G, 3) = Z(G / Z_i(G, 3), 3).$$

Soit

$$a \in Z_{i+1}(G, 3)$$

alors

$$[a, x]_3 \equiv 1 \pmod{Z_i(G, 3)} \text{ pour tout } x \in G.$$

Par hypothèse

$$[a, x]_3 \equiv 1 \pmod{Z_{3i}(G)} \text{ pour tout } x \in G.$$

Donc

$$a\zeta_{3i}(G) \in \mathcal{Z}((G/\mathcal{Z}_{3i}(G)), 3)$$

D'après lemme 3.2.2

$$\mathcal{Z}(G/\mathcal{Z}_{3i}(G), 3) \leq \mathcal{Z}_3(G/\mathcal{Z}_{3i}(G)) = \mathcal{Z}_{3+3i}(G)/\mathcal{Z}_{3i}(G)$$

Alors

$$a\mathcal{Z}_{3i}(G) \in \mathcal{Z}_{3(i+1)}(G)/\mathcal{Z}_{3i}(G)$$

d'où

$$a \in \mathcal{Z}_{3(i+1)}(G).$$

Preuve de théorème 3.2.1

i) $\varphi(x)\varphi(y) = x^3y^3[x, c_1c_2c_3][y, c_1c_2c_3]$ et $\varphi(xy) = (xy)^3[xy, c_1c_2c_3]$, d'où le résultat.

iii) de la relation

$$\varphi(x^{b^{-1}}x^{a^{-1}}) = \varphi(x^{b^{-1}})\varphi(x^{a^{-1}})$$

on a

$$xx^{b^{-1}}x^{a^{-1}}x = x^{b^{-1}}x^2x^{a^{-1}} \text{ pour tout } x \in G.$$

Nous substituons a à x , on obtient $a^b a = a a^b$, donc $c = [a, b]$ commute avec a .

de la relation

$$\varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}$$

on obtenons

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x^a x x^b \\ &= x^b x x^a, \end{aligned}$$

donc

$$c \text{ commute avec } b.$$

Il est facile de voir que la relation

$$\varphi(cya^{-1}) = \varphi(c)\varphi(ya^{-1}) \text{ pour } y \in G$$

implique la relation

$$y^2 = y^{c^2}y^c(3).$$

En utilisant cette relation et celle obtenue, en remplaçant y par y^{-1} , on obtient la relation

$$y^{c^2} y^c = y^c y^{c^2}.$$

Il en résulte que

$$[c, y, y] = 1 \text{ pour tout } y \in G.$$

d'où

$$c \in R_2(G).$$

On a

$$\varphi(a) = a^3[a, b], \quad \varphi(b) = b^3[b, a] \text{ et } \varphi(ab) = (ab)^3.$$

De la relation

$$\varphi(ab) = \varphi(a) \varphi(b)$$

On en déduit

$$(ab)^3 = a^3 b^3,$$

Donc

$$(ba)(ba) = a^2 b^2$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} 1 &= a^{-1} b^{-1} a^2 b^2 a^{-1} b^{-1} \\ &= a^{-1} (a^b)^2 (a^{-1})^{b^{-1}} \\ &= [a, b]^3 \end{aligned}$$

car $[a, b]$ commute avec a et b .

D'après lemme 3.2.2, on a

$$[a, b] \in \mathcal{Z}_3(G, 3).$$

De la relation

$$\varphi(a^{-1}y) = \varphi(a^{-1})\varphi(y)$$

$$[a, b] \equiv 1 \pmod{\mathcal{Z}_3(G)}$$

On peut facilement voir que

$$y^2 \equiv y^{a^2} y^a \pmod{\mathcal{Z}(G, 3)}.$$

En remplaçant y par y^{-1} , on obtient

$$y^a y^{a^2} \equiv y^{a^2} y^a \bmod \mathcal{Z}(G, 3)$$

Ce qui donne

$$yy^a \equiv y^a y \bmod \mathcal{Z}(G, 3)$$

D'où

$$[a, y, y] \equiv 1 \bmod \mathcal{Z}(G, 3) \text{ pour tout } y \in G$$

Par conséquent

$$a\mathcal{Z}(G, 3) \in R_2(G/\mathcal{Z}(G, 3)).$$

De la relation

$$\varphi(ay) = \varphi(a)\varphi(y)$$

et les congruences

$$[a, b] \equiv 1 \text{ et } yy^a \equiv y^a y \bmod \mathcal{Z}(G, 3)$$

On a :

$$ya^3 \equiv a^3 y \bmod \mathcal{Z}(G, 3) \text{ pour tout } y \in G$$

D'où

$$a^3\mathcal{Z}(G, 3) \in \mathcal{Z}(G/\mathcal{Z}_3(G))$$

Nous en déduisons

$$a\mathcal{Z}(G, 3) \in \mathcal{Z}(G/\mathcal{Z}(G, 3), 3).$$

Mais

$$\mathcal{Z}(G/\mathcal{Z}(G, 3), 3) = \mathcal{Z}_2(G, 3)/\mathcal{Z}(G, 3)$$

Il s'ensuit que

$$a \in \mathcal{Z}_2(G, 3).$$

Alors

$$b \in \mathcal{Z}_2(G, 3).$$

En utilisant le lemme 3, on montre que a et $b \in \mathcal{Z}_6(G)$. Aussi φ induit dans $G/\mathcal{Z}_4(G)$ l'endomorphisme $\bar{y} \rightarrow \bar{y}^a \bar{y} \bar{y}^b$; alors $a\mathcal{Z}_4(G)$ et $b\mathcal{Z}_4(G)$ appartiennent à $\mathcal{Z}_6(G)/\mathcal{Z}_4(G)$ lequel est égal au second centre de $G/\mathcal{Z}_4(G)$.

D'après *i)*

$G/\mathcal{Z}_4(G)$ est 3-abelian, et $G/\mathcal{Z}_4(G)$ est nilpotent de classe au plus 3

donc

G est nilpotent de classe au plus 7. $\square$

Lemme 3.2.4 ([32])

Soit G un groupe nilpotent de classe c , alors on a la relation suivante

$$\gamma_i(G) \leq Z_{c-i+1}(G)$$

Théorème 3.2.5

Soit G un groupe 3-abélien généralisé, c'est à dire admettant un endomorphisme de forme :

$$\varphi : x \mapsto x^a x x^b$$

$a, b \in G$. Alors :

- i)* G est nilpotent de classe au plus 3.
- ii)* $[G, G]^3 \leq Z(G)$ et $\gamma_3(G)^3 = 1$.
- iii)* L'exposant de $[G, G]$ divise 9.

Preuve

i) Soit G un groupe 3-abélien généralisé avec l'endomorphisme donné ■ défini par

$$\varphi(x) = x^a x x^b \text{ pour tout } x \in G,$$

où $a, b \in G$ sont fixes.

Pour montrer que la classe nilpotence de G est ≤ 3 , il suffit de montrer que

$$[g_1; g_2; g_3; g_4] = 1 \text{ pour tous } g_1, g_2, g_3, g_4 \in G$$

Donc, soient $g_1, g_2, g_3, g_4 \in G$ et soit H le sous-groupe de G engendré par g_1, g_2, g_3, g_4, a, b

$$H = \langle g_1, g_2, g_3, g_4, a, b \rangle$$

la restriction de φ à H est un endomorphisme de H . Il suffit donc de montrer que H est nilpotent de classe au plus 3. On va utiliser la méthode du **GAP**. Cette méthode inventée par le mathématicien allemand s'applique

uniquement aux groupes nilpotents de type fini ; comme notre groupe G est nilpotent [2, Théorème 3.1], non nécessairement de type fini, la méthode du **GAP** ne lui est pas applicable, mais, elle s'applique à $H = \langle g_1, g_2, g_3, g_4, a, b \rangle$ qui est nilpotent de type fini

Note H est 3-abélien généralisé . Par [2, Théorème 3.1], H est nilpotent.

Maintenant on peut utiliser **nq** Paquets de Werner Nickel [31] mis en œuvre dans **GAP** [35] est **MAGMA** [6] pour trouver la classe de nilpotence de H .

Le paquet **nq** a la capacité de calculer le plus grand quotient nilpotent (s'il existe) d'un groupe de type fini avec un nombre fini de relations identiques et de relations infiniment nombreuses.

Par exemple, si nous voulons construire le plus grand quotient nilpotent d'un groupe G comme suit

$$\langle x_1, \dots, x_n \mid r_1(x_1, \dots, x_n) = \dots = r_m(x_1, \dots, x_n) = 1, w(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k) = 1 \rangle,$$

où $r_1, \dots, r_m$ sont des relations $x_1, \dots, x_n$ et $w(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k) = 1$ est une relation identique dans le groupe $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$, On peut appliquer le code suivant pour utiliser le paquet **nq** dans **GAP** :

```
LoadPackage("nq"); #nq package of Werner Nickel #
F :=FreeGroup(n+k);
L :=F/[r1(F.1,...,F.n),...,rm(F.1,...,F.n),w(F.1,...,F.n,F.(n+1),...,F.(n+k))];
H :=NilpotentQuotient (L, [F.(n+1),...,F.(n+k)]);
```

Il faut noter que nous devons construire le groupe libre de rang $n + k$ pace que, ainsi que les n générateurs pour G , nous avons aussi une relation identique avec k variables.

Il faut aussi noter que la fonction **NilpotentQuotient(L)** essaie de calculer le plus grand quotient nilpotent de **L** et ce calcul ne se terminera que si la fonction **NilpotentQuotient(L)** admet un plus grand quotient nilpotent.

Notre identité $(xy)^\phi = x^\phi y^\phi$ pour tous $x, y \in G$, peut être écrite de la façon suivante :

$$(xy)^a (xy) (xy)^b = (x^a x x^b) (y^a y y^b)$$

ou

$$y^a (xy) x^b (x x^b y^a y)^{-1} = 1$$

Donc, pour notre problème, nous avons besoin du code suivant :

```

LoadPackage("nq"); #nq package of Werner Nickel #
F := FreeGroup(8); x := F.1; y := F.2; a := F.3; b := F.4;
L := F/[(F.2^F.3) * (F.1*F.2) * (F.1^F.4)*(F.1 * F.1^F.4*F.1*F.2^F.3*F.2^F.4)^-
1];
H := NilpotentQuotient(L, [F.1,F.2]);
NilpotencyClassOfGroup(H);

```

□

ii) φ Induit sur le groupe quotient $G/\gamma_3(G)$ l'endomorphisme

$$\bar{x} \longmapsto \bar{x}^{\bar{a}} \bar{x}^{\bar{b}}$$

$G/\gamma_3(G)$ est nilpotent de classe au plus 2; donc il est 3-abélien;
par le théorème de Levi

$$\exp[G/\gamma_3(G), G/\gamma_3(G)] \text{ divise } 3$$

or

$$[G/\gamma_3(G), G/\gamma_3(G)] \simeq ([G, G] \gamma_3(G))/\gamma_3(G);$$

lequel est isomorphe à

$$[G, G] / \gamma_3(G) \quad (\text{car } \gamma_3(G) \subset [G, G];$$

alors

$$\exp([G, G] / \gamma_3(G)) \text{ divise } 3.$$

Soient $x, y \in G$,

$$[x\gamma_3(G), y\gamma_3(G)]^3 = \gamma_3(G)$$

$$[x, y]^3 \gamma_3(G) = \gamma_3(G)$$

$$[x, y]^3 \in \gamma_3(G)$$

Donc

$$[G, G]^3 \leq \gamma_3(G).$$

Et d'après le lemme 3.2.4

$$\gamma_3(G) \leq Z(G).$$

Maintenant, soient $x, y, z \in G$;

$$\begin{aligned} 1 &= [[x, y]^3, z] \\ &= [x, y, z]^3 \end{aligned}$$

alors

$$\gamma_3(G)^3 = 1.$$

iii) On a vu dans ii) que

$$\exp([G, G] / \gamma_3(G)) \text{ divise } 3$$

et

$$\exp(\gamma_3(G)) \text{ divise } 3$$

Alors

$$\exp[G, G] \text{ divise } (3 \times 3).$$

Donc

$$\exp[G, G] \text{ divise } 9. \square$$

3.3 Propriétés des Groupes 3-Abéliens Généralisés

En 2006, Abdollahi, Daoud et Endimioni ont montré qu'un groupe 3-abélien généralisé de type fini est central par fini et par suite m -abélien où m est l'indice du centre $Z(G)$ dans G . c'est à dire qu'ils ont montré qu'un groupe 3-abélien généralisé de type fini est un groupe d'Alpérin .

Dans ce travail on se propose d'améliorer ce résultat en démontrant le théorème suivant :

Théorème 3.3.1 :

Soit G un groupe 3-abélien généralisé, Alors : G est 9-abélien, 9-central et 3-Levi.

Lemme 3.3.2 ([16]).

Soient G un groupe métabelien et $x, y, z \in G$, alors

$$(i) [x, y^n] = \prod_{1 \leq i \leq n} [x, y]^{(i)}.$$

$$(ii) (xy^{-1})^n = x^n \prod_{1 \leq i+j \leq n-1} [x, y, x]^{(i+j+1)} \cdot y^{-n}.$$

Pour la preuve voir [16].

Preuve de Théorème 3.3.1

Rappelons que pour tout entier n différent de 0, un groupe G est appelé n -Levi, si $[x, y^n] = [x, y]^n$ pour tous $x, y, \in G$. Il est appelé n -abélien (n -central) si $(xy)^n = x^n y^n$ ($n \geq 1$ et $[x, y^n] = 1$) pour tous $x, y, \in G$.

Soient $x, y, \in G$;

$$\begin{aligned} [x, y^3] &= \prod_{1 \leq i \leq 3} [x, y]^{(3)}_i \\ &= [x, y]^3 [x, y, y]^3 [x, y, y, y] \\ &= [x, y]^3, \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} [x, y^9] &= \prod_{1 \leq i \leq 9} [x, y]^{(9)}_i \\ &= [x, y]^9 [x, y, y]^{36} \prod_{3 \leq i \leq 9} [x, y]^{(9)}_i \\ &= 1 \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} (xy^{-9}) &= x^9 \prod_{1 \leq i+j \leq 8} [x, y, y, y]^{(9+j+1)}_i y^{-9} \\ &= x^9 [x, y]^{36} [x, y, x]^{84} [x, y, y]^{84} \prod_{3 \leq i+j \leq 8} [x, y, y, y]^{(9+j+1)}_i y^{-9} \\ &= x^9 y^{-9}. \end{aligned}$$

□

En 1965, Trotter[38] a prouvé que G est abélien si l'application $x \mapsto x^3$ est un automorphisme de G . En réalité, l'hypothèse qu'il a utilisée est trop forte ; il suffit simplement que cette application soit un épimorphisme ou un monomorphisme de G . Mais on peut généraliser ce résultat dans le théorème suivant :

Théorème 3.3.3 :

Soient G un groupe 3-abélien généralisé et $\varphi : x \mapsto x^a x x^b$ l'endomorphisme associé de G , Alors : G est abélien si l'endomorphisme φ est surjectif ou injectif .

Preuve

Il suffit de prouver que le sous-groupe $\text{Im}(\varphi)$ est abélien.

Soient $x, y, \in G$; Il est facile de voir que

$$\varphi(x) = x^3X \text{ et } \varphi(y) = y^3Y$$

Où

$$X = [x, a][x, a, x^2][x, b][x, b, x^2] \text{ et } Y = [y, a][y, a, y^2][y, b][y, b, y^2]$$

On a

$$\begin{aligned} [\varphi(x), \varphi(y)] &= [x^3X, y^3Y] \\ &= ([x^3, y^3Y]^X)([X, y^3Y]) \\ &= (A)(B). \end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned} A &= [x^3, Y][x^3, y^3][x^3, y^3, Y][x^3, y, X][x^3, y^3, X][x^3, y^3, Y, X] \\ &= [x, Y^3][x, y]^9[x, y, Y]^9[x, Y, X]^3[x, y, X]^9[x, y^3Y, X]^3 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} B &= [X, Y][X, y^3][X, y^3, Y] \\ &= [X^3, y][X^3, y, Y] \\ &= 1 \end{aligned}$$

Alors

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = 1. \square$$

Théorème 3.3.4

Soit G un groupe 3-abélien généralisé et soit $\varphi : x \longmapsto x^a x x^b$ l'endomorphisme associé de G , Alors :

- i) G est 3-nilpotent de classe au plus 2.*
- ii) L'exposant de $[G, G]_3$ divise 3.*

Preuve

i) Nous avons vu que $G/Z(G)$ est 3-abélien, puis $\frac{G}{\frac{Z(G)}{Z(G,3)}}$ (Qui est isomorphe à $\frac{G}{Z(G,3)}$) est aussi 3-abélien; est par suite la série $1 \leq Z(G, 3) \leq G$ est 3-central.

ii) Soient $x, y \in G$; Il est facile de voir que

$$\begin{aligned} [x, y]_3 &= [y, x]^{y^{-1}x^{-2}} [y^2, x]^{y^{-2}x^{-3}} \\ &= [y, x] [y, x, y^{-1}x^{-2}] [y^2, x] [y^2, x, y^{-2}x^{-3}] \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} [x, y]_3^3 &= [y, x]^3 [y, x, y^{-1}x^{-2}]^3 [y^2, x]^3 [y^2, x, y^{-2}x^{-3}]^3 \\ &= [y, x]^3 ([y, x]^2 [y, x, x])^3 \\ &= [y, x]^9 \\ &= 1. \square \end{aligned}$$

On termine ce chapitre par la question suivante : Un groupe nilpotent de classe au plus 3 vérifiant $[G, G]^9 = 1$, est-il un groupe 3-abélien généralisé ?.

Bibliographie

- [1] A. Abdollahi, *A characterization of infinite 3-abelian groups*, Arch. Math. **73** (1999) 101-108).
- [2] A. Abdollahi, B. Daoud et G. Endimioni, *Groupes n -abéliens généralisés*, Bull. Belg. Math. Soc. **13** (2006), 287-294.
- [3] S. I. Adjan, *The Burnside problem and identities in groupes*, Springer Verlag, Berlin, 1979.
- [4] J. L. Alperin, *A classification of n -abelian groups*, Canad. J. Math. **21** (1969), 1238-1244
- [5] R. Baer, *Factorization of n -soluble and n -nilpotent groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 15-26.
- [6] Wieb Bosma, John Cannon and Catherine Playoust, *The Magma algebra system I : The user language*. J. Symbolic Comput. **24**, (1997) 235-265.
- [7] R. Brandl and L. C. Kappe, *On n -Bell groups*, Comm. Algebra **17** (1989), no. 4, 787-807.
- [8] G. Corsi Tani et M. F. Rinaldi Bonafede, *Polynomial automorphisms in nilpotent finite groups*, Boll. Un. Mat. Ital. A (6) **5** (1986), no. 2, 285-292.
- [9] B. Daoud, *Rational endomorphisms of a nilpotent group*, International Journal of Algebra, Vol. **2** (2008). no 1, 13-20.
- [10] B. Daoud, M. Hamitouche and K. Merikhi, *On the nilpotency class of a generalized 3-abelian group*, Mediterranean Journal of Mathematics (2013)
- [11] C. Delizia, M. R. R. Moghaddam and A. Rhemtulla, *The structure of Bell groups*, J. Group Theory **9** (2006), no. 1, 117-125.

- [12] C. Delizia, P. Moravec and C. Nicotera, *Locally graded Bell groups*, Publ. Math. Debrecen **71/1-2** (2007), 1-9.
- [13] K. W. Gruenberg, *Two theorems on Engel groups*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **49** (1953), 377-380.
- [14] G.Havas and M.R.Vaughen-Lee, *4-Engel groups are locally nilpotent*, Int.J.Algebra Comput **15**, no 4, (2005), 649-652.
- [15] H. Heinken, *Engelsche elemente der lange drei*, Illinois J. Math. **5**, 681-707 (1961).
- [16] G.T. Hogan and W. P. Kappe, *On the H_p -problem for finite p -groups*, Proc.Amer. Math. Soc. **20** (1969).450-454.
- [17] L. C. Kappe, *Engel margins in metabelien groups*, Comm. Algebra **11** (1983), 1965-1987.
- [18] L. C. Kappe, *On n -Levi groups*, Arch. **47** (1986), 198-210.
- [19] L. C. Kappe et W. P. Kappe, *On three-Engel groups*, Bull. Austral. Math. Soc. **7** (1972), 391-405.
- [20] L.C. Kappe and R.F. Morse, *Groups with 3-abelian normal closures*, Arch. Math. Vol. 51, 104-110 (1988).
- [21] L. C. Kappe and R. F. Morse, *Levi-properties in metabelian groups*, Contemporary Mathematics, **51** (1990), 59-72.
- [22] L. C. Kappe and M. L. Newell, *On the n -centre of group*, Groups St. Andrews 1989, LMS Lecture Notes, **160** , 339-352.
- [23] W. P. Kappe, *Die A-Norm einer Gruppe*, Illinois J. Math. **5** (1961) 187–197.
- [24] G A Karasev. *On the theory of n -nilpotent groups*. Mat. Zamretki **5** (1969), 653-654.
- [25] Y. K. Kim et A. H. Rhemtulla, *Weak maximality condition and polycyclic groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), 711-714.
- [26] “Kourovka Notebook N_o15” ,*Unsolved problems in group theory*, Novosibirsk, 2002.
- [27] G. Kowol, *Polynomautomorphismen von Gruppen*, Arch. Math. **57** (1991), no. 2, 114-121.
- [28] F. W. Levi, *Notes on group theory*. I, II, J. Indian Math. Soc. (N. S.) **8** (1944), 1-9.

- [29] P. Moravec, *On power endomorphisms of n -central groups*, J. Group Theory **9** (2006), no. 4, 519-536.
- [30] P. Moravec, *Some groups with n -central normal closures*, Publ. Math. Debrecen **67** no. 3-4 (2005), 355-372.
- [31] W. Nickel, NQ, 1998, *A refereed GAP 4 package*, see [35].
- [32] D. J. S. Robinson, *A course in the theory of groups*, Springer-Verlag, Berlin, (1996).
- [33] D. J. S. Robinson, *Finiteness Conditions and generalized soluble groups*, Part I, II, "Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, (1972).
- [34] D. Schweigert, *Polynomautomorphismen auf endlichen Gruppen*, Arch. Math. **29** (1977), no. 1, 34-38.
- [35] The GAP Group, *GAP-Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4.12; 2008*, (<http://www.gap-system.org>).
- [36] A. Tortora, *Some properties of Bell groups*, *Communications in Algebra*, **37** (2009), 431-438
- [37] G. Traustason, *Locally nilpotent 4-Engel groups are fitting groups*, J. Algebra **270** (10) (2003), 7-27.
- [38] H. F. Trotter, *Groups in which raising to a power is an automorphism*, *Canad. Math. Bull.* **8**(1965), 825-827.