

Table des matières

Introduction	1
Notation	3
1 Requis et préliminaires	6
1.1 Formulation des problèmes élastoviscoplastiques	7
1.1.1 lois de comportement	8
1.1.2 loi de comportement élasto-viscoplastique avec endommagement . . .	9
1.1.3 Conditions aux limites	10
1.1.4 Condition de contact avec réponse normale instantanée et frottement	11
1.1.5 Condition de contact sans frottement avec compliance normale . . .	12
1.1.6 Formulation mathématique des problèmes élasto-viscoplastiques . . .	13
1.2 Rappels d'analyse	15
1.2.1 Espaces fonctionnels	15
1.2.2 Espaces de Hilbert associés aux opérateurs divergence et déformation	15
1.2.3 Espaces de fonctions à valeurs vectorielles	17
1.2.4 Fonctions convexes	19
1.2.5 Enoncés de certains théorèmes	22
1.2.6 Compléments divers	23
2 Problème élasto-viscoplastique avec réponse normale instantanée et frottement	25
2.1 Problème mécanique et formulation variationnelle	26

2.2	Existence et unicité de la solution	30
3	Problème élasto-viscoplastique sans frottement avec compliance normale	42
3.1	Problème mécanique et formulation variationnelle	43
3.2	L'existence et l'unicité de la solution	47
	Bibliographie	53

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE FERHAT ABBAS - SETIF

MÉMOIRE

Présenté à la faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Pour l'obtention du diplôme de

MAGISTER

Option: Mathématiques Appliquées

Par

Melle: Smata Sihem

THÈME

Etude Mathématique de quelques problèmes aux limites
en élasto-viscoplasticité.

soutenu le: 20 /12 /2012

devant le jury:

Président	Mr Djabi Seddik	Pr.	Université de Sétif
Encadreur	Mme Selmani Lynda	Pr.	Université de Sétif
Examineur	Mme Boutechbak Soraya	M.C.A.	Université de Sétif

Remerciements

Je tiens à exprimer ma reconnaissance et mes remerciements les plus profonds à Mme Selmani Lynda, professeur à l'université Ferhat Abbas Sétif, pour m'avoir proposé ce passionnant sujet, m'avoir aiguillé dans ma recherche, pour sa patience, son encouragement et sa disponibilité ainsi que le soutien très précieux tout au long de cette étude.

Comme je tiens à remercier vivement, Monsieur Djabi Seddik, professeur à l'université Ferhat Abbas Sétif pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de ce mémoire.

Mes remerciements vont également à Mme Boutechbak Souraya, maître de conférences à l'université Ferhat Abbas Sétif, d'avoir accepter de juger mon travail.

Enfin, mes remerciements aussi à toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.

Introduction

Depuis la nuit des temps, les humains se sont intéressés aux problèmes de contact entre deux corps. Les problèmes de contact avec ou sans frottement, entre corps déformables, ou entre un corps et une fondation rigide, abondent en industrie et dans la vie de tous les jours. Le contact du sabot de frein avec la roue, du train d'atterrissage avec le sol, du piston avec la chemise, l'enfoncement progressif dans un pouf ou fauteuil lors d'une posture assise, les frottement entre plaques tectoniques, ne sont que quelques exemples quotidiens, parmi bien d'autres.

A cause de l'importance du phénomène, les études consacrées à ce vaste sujet qu'est la mécanique de contact sont considérables. L'étendue de la littérature concerne aussi bien la modélisation, l'analyse mathématique que l'approximation numérique des problèmes. Les premières études des problèmes de contact avec frottement via les inéquations variationnelles peuvent être trouvées dans [4]. Une excellente référence sur l'analyse et l'approximation numérique des problèmes de contact des corps élastiques est [19]. L'état récent de l'art de cette science, les aspects mathématiques et mécaniques, ainsi que l'analyse numérique se trouvent dans les actes de congrès [23], ainsi que dans l'édition spéciale [31].

Dans ce mémoire nous proposons certaines contributions à l'étude de quelque problèmes aux limites en mécanique de contact. La modélisation des problèmes de contact d'un corps déformable avec une base dépend essentiellement des propriétés mécaniques du matériau ainsi que des conditions aux limites de contact. Ici nous considérons des lois de comportement non linéaires pour des matériaux élasto-viscoplastiques, dans l'hypothèse des petites transformations. Les conditions de contact sont réponse nor-

male instantanée et frottement, ou compliance normale sans frottement. Chacun des problèmes est étudié selon le formalisme général suivant. Nous commençons par décrire le problème mécanique de départ, et après avoir précisé les hypothèses sur les données, nous présentons une analyse variationnelle du problème mécanique. Les méthodes que nous utilisons relèvent des équations d'évolutions du premier ordre avec des opérateurs monotones, des inéquations du type parabolique et des arguments du point fixe.

Le mémoire se compose de trois chapitres que nous allons brièvement décrire. Dans le premier chapitre, le but est d'introduire les éléments nécessaires pour une bonne compréhension de la suite des objets traités. Nous commençons par décrire les lois de comportement, les conditions aux limites et puis la formulation mécanique des deux problèmes à étudier. Ensuite nous rappelons les espaces fonctionnels et principales notations utilisées, puis nous décrivons le cadre physique des problèmes de contact étudiés. Ensuite nous passons en revue quelques résultats fondamentaux d'analyse fonctionnelle, énoncés de certains théorèmes. Enfin, nous terminons par rappeler les lemmes de Gronwall.

Dans le second chapitre, on étudie notre problème défini par le processus dynamique des matériaux élasto-viscoplastiques où l'endommagement interne du matériau est pris en considération. Le contact est modélisé par une réponse normale instantanée associée à une loi locale de frottement. On propose une formulation variationnelle. Pour établir l'existence et l'unicité de la solution pour ce problème, on utilise la théorie des équations d'évolutions du premier ordre avec des opérateurs non linéaires, des inéquations variationnelles du type parabolique et des arguments de point fixe de Banach.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude mathématique d'un problème de contact sans frottement pour des matériaux élasto-viscoplastiques avec endommagement dans un processus quasistatique. Le contact est modélisé par une compliance normale. On établit un résultat d'existence et d'unicité d'une solution faible en utilisant des résultats sur les équations dépendant du temps, la théorie des inéquations du type parabolique ainsi que des arguments de point fixe de Banach.

Notations

Si Ω est un domaine de $IR^d (d = 1, 2, 3)$, on note par.

$\bar{\Omega}$	l'adhérence de Ω
Γ	la frontière de Ω supposée régulière.
$\Gamma_i \quad (i = 1, 2, 3)$	une partie mesurable de la frontière Γ
$mes \Gamma_1$	la mesure de Lebesgue ($d = 1$) dimensionnelle de Γ_1
ν	la normale unitaire sortante à Γ
v_ν, v_τ	les composantes normal et tangentiel du champ vectoriel v défini sur $\bar{\Omega}$
$C(\bar{\Omega})$	l'espace des fonctions réelles continument différentiables sur $\bar{\Omega}$
$D(\bar{\Omega})$	l'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables et à support compact contenu dans Ω
H	l'espace $L^2(\Omega)^d$
H_1	l'espace $H_1(\Omega)^d$
	l'espace $L^2(\Omega)^{d \times d}$
	l'espace $\{\tau \in L^2(\Omega)\}$
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ
H_Γ	l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$
H'_Γ	l'espace dual de H_Γ
$\gamma : H_1 \rightarrow H_\Gamma$	l'application trace pour les fonctions vectorielles

si H est un espace de Hilbert réel et $d \in \mathbb{N}^*$, on utilise les notations suivantes

H^d	l'espace $\{x = (x_i) / x_i \in H\}$
$H^{d \times d}$	l'espace $\{x_i = (x_{ij}) / x_{ij} \in H\}$
$(\cdot, \cdot)_H$	le produits scalaire de H
$\ \cdot\ _H$	la norme de H
H'	l'espace dual de H
$(\cdot, \cdot)_{H' \times H}$	le produit dualité entre $H' \times H$
ψ_K	la fonction indicatrice de $k \subset H$
2^K	l'ensemble de toutes les parties de k
$x_n \rightarrow x$	la convergente forte de la suite (x_n) vers l'élément x dans H
$x_n \rightharpoonup x$	la convergente faible de la suite (x_n) vers l'élément x dans H
$\mathcal{L}(H)$	l'espace des applications linéaires et continues de H dans H
Si de plus $[0; T]$ est un intervalle de temps $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$ on note par:	
$C([0; T], H)$	l'espace des fonctions continues de $[0; T]$ dans H
$\ \cdot\ _{0,H}$	la norme de $C([0; T], H)$
$C^1([0; T], H)$	l'espace des fonctions continument dérivable de $[0; T]$ dans H .
$\ \cdot\ _{1,H}$	la norme de $C^1([0; T], H)$
$L^p(0, T, H)$	l'espace des fonctions mesurables de $[0; T]$ dans H
$\ \cdot\ _{0,p,H}$	la norme de $L^p(0, T, H)$, telles que $\int_0^T f(t) _H^p dt > +\infty$
	avec les modifications usuelles si $p = +\infty$
$W^{k,p}(0, T, H)$	l'espace de Sobolev de paramètres k et p .
$\ \cdot\ _{k,p,H}$	la norme de $W^{k,p}(0, T, H)$
Pour une fonctions f , on note	
$dom f$	le domaine de f .
$supp f$	le support de f .
$\dot{f}, \ddot{f}$	les dérivées première et seconde de f par rapport au temps.
$\partial_i f$	la dérivée partielle de f par rapport à la i ème composante x_i .
∇f	le gradient de f .
$\varepsilon(f)$	la partie symétrique du gradient de f qui vaut $\frac{1}{2}(\nabla f + \nabla^T f)$
$Div f$	la divergence de f
∂f	le sousdifférentiel (classique) de f .

Si H^1 et H^2 sont deux espaces de Hilbert réels, on note par

$\mathcal{L}(H^1, H^2)$ l'espace des applications linéaires et continues de H^1 dans H^2 .

$\|\cdot\|_{\mathcal{L}(H^1, H^2)}$ la norme de $\mathcal{L}(H^1, H^2)$.

Chapitre 1

Requis et préliminaires

Afin de faciliter la lecture de ce manuscrit, il nous est paru utile de présenter dans cette première partie le cadre physique et fonctionnel dans lequel nous allons travailler. Nous allons commencer par une description de la loi constitutive des matériaux élasto-viscoplastiques avec endommagement, ensuite nous présentons les différents types de conditions aux limites avec réponse normale instantanée associée à une loi locale de frottement et un contact sans frottement avec compliance normale. Nous continuons avec la formulation mathématique des problèmes étudiés. A la fin de ce chapitre nous passons en revue quelques rappels d'analyse fonctionnelle non linéaire dans les espaces de Hilbert ainsi que les outils mathématiques que nous utilisons pour la réalisation de ce travail, notamment des résultats sur les espaces fonctionnels, les équations et les inéquations variationnelles elliptiques et paraboliques, les lemmes de Gronwall qui seront utiles dans les démonstrations et quelques théorèmes classiques qui seront d'une grande utilité pour la réalisation de ce travail.

1.1 Formulation des problèmes élastoviscoplastiques

Dans cette partie on commence par décrire les deux lois de comportement élasto-viscoplastique, puis on s'intéresse aux différentes conditions aux limites. Au début, on considère la loi de contact avec réponse normale instantanée et frottement puis la loi de contact sans frottement avec compliance normale. Finalement, on donne la formulation mathématique des problèmes qui seront étudiés dans ce mémoire.

1.1.1 lois de comportement

Notons la densité de la masse $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ et la densité des forces volumiques $f_0 : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$; l'évolution du corps est décrite par l'équation du mouvement

$$\text{Div} \sigma + f_0 = \rho \ddot{u} \text{ dans } \Omega \times (0, T),$$

où $\ddot{u}$ représente l'accélération et $\dot{u}$ la vitesse du corps.

Les processus d'évolution modélisés par l'équation précédente s'appellent processus dynamiques. Dans certaines situation, cette équation peut encore se simplifier: par exemple dans le cas où $\dot{u} = 0$, il s'agit d'un problème d'équilibre (processus statiques), ou bien dans le cas où le champ des vitesse $\dot{u}$ varie très lentement par rapport au temps, c'est-à-dire que le terme $\rho \ddot{u}$ peut être négligé (processus quasistatiques). Dans ces deux cas l'équation du mouvement devient

$$\text{Div} \sigma + f_0 = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, T).$$

L'équation équivaut à d relation scalaires, et mathématiquement cette équation ne suffit par à modéliser le problème d'équilibre du corps car, par exemple les d composantes u_i du champ de déplacement ne figurent pas dans cette équation.

Du point de vue physique, il faut remarquer que l'équation exprime une loi universelle valable pour tous les matériaux. Si donc cette équation suffisait à déterminer tous les paramètres, cela signifierait que, soumis à des conditions identiques, les divers milieux continus auraient des comportements identiques. Ceci est naturellement absurde.

L'équation est donc insuffisante, à elle seule, à décrire l'équilibre des corps matériels, elle doit être complétée par d'autres relations qui caractérisent le comportement de chaque type de matériau et que l'on désigne sous le vocable général la loi de comportement qui est une relation reliant le tenseur de contrainte σ , le tenseur de déformation ε et leur dérivées.

On présente dans ce mémoire, les lois de comportement de deux catégories de matériau élasto-viscoplastique.

1.1.2 loi de comportement élasto-viscoplastique avec endommagement

1. La première loi de comportement d'un matériau élasto-viscoplastique avec endommagement où ce dernier est causé par des déformations élastiques est donnée par

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{E}(\varepsilon(u), \beta) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(s)), \varepsilon(u(s))) ds$$

où σ représente le champ de contrainte, u représente le champ de déplacement et $\varepsilon(u)$ est le champ de tenseur linéarisé. $\mathcal{A}$ et $\mathcal{E}$ sont des fonctions de viscosité et élasticité non linéaire, respectivement, $\mathcal{G}$ représente le tenseur de viscoplasticité où β est une variable interne représentant l'endommagement du matériau causé par des déformations élastiques.

L'inclusion différentielle suivante sera utilisée pour décrire l'évolution du champ d'endommagement

$$\dot{\beta} - k\Delta\beta + \partial\varphi_K(\beta) \ni S(\varepsilon(u), \beta)$$

L'ensemble des fonctions d'endommagement admissibles K défini par

$$K = \{\xi \in H_1(\Omega) \mid 0 \leq \xi \leq 1 \text{ dans } \Omega\},$$

k est un coefficient positif, $\partial\varphi_K$ représente le sous-différentiel de la fonction indicatrice φ_K . S est une fonction constitutive donnée qui représente la source d'endommagement dans le système.

Si $\mathcal{G} = 0$ on obtient la loi constitutive viscoélastique du type Kelvin-voigt avec endommagement suivante

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{E}(\varepsilon(u), \beta)$$

1. La seconde loi de comportement d'un matériau élasto-viscoplastique avec endommagement où ce dernier est causé par des déformations plastiques est donnée par

$$\dot{\sigma} = \mathcal{E}(\varepsilon(\dot{u})) + \mathcal{G}(\sigma, \varepsilon(u), \beta)$$

où $\mathcal{E}$ est un tenseur d'ordre quatre, $\mathcal{G}$ est une fonction constitutive non linéaire et β représente le champ d'endommagement, l'évolution du champ d'endommagement est décrite par

$$\dot{\beta} - k\Delta\beta + \partial\varphi_K(\beta) \ni S(\sigma, \varepsilon(u), \beta)$$

où $k > 0$, $\partial\varphi_K$ est le sous-différentiel de la fonction indicatrice sur K défini précédent.

1.1.3 Conditions aux limites

Définissons maintenant les conditions aux limites sur chacune des trois parties de Γ . Le corps est encastré à la partie $\Gamma_1 \times (0, T)$, le champ des déplacements y est par conséquent nul:

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T).$$

Une traction surfacique de densité f_2 agit sur la partie $\Gamma_2 \times (0, T)$, et par conséquent le vecteur des contraintes de Cauchy $\sigma\nu$ satisfait

$$\sigma\nu = f_2 \text{ sur } \Gamma_2 \times (0, T).$$

Enfin, le corps est éventuellement en contact avec une fondation sur $\Gamma_3 \times (0, T)$. C'est ici que commence toute la richesse des problèmes et que réside notre intérêt, car les conditions sur la surface potentielle de contact Γ_3 peuvent être diverses et donner ainsi lieu à une variété de modèles de contact avec ou sans frottement. Nous nous limitons à citer deux exemples de conditions aux limites.

Définissons maintenant les conditions aux limites sur chacune des trois parties de Γ . Le corps est encastré à la partie $\Gamma_1 \times (0, T)$, le champ des déplacements y est par conséquent nul:

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T).$$

Une traction surfacique de densité f_2 agit sur la partie $\Gamma_2 \times (0, T)$, et par conséquent le vecteur des contraintes de Cauchy $\sigma\nu$ satisfait

$$\sigma\nu = f_2 \text{ sur } \Gamma_2 \times (0, T).$$

Enfin, le corps est éventuellement en contact avec une fondation sur $\Gamma_3 \times (0, T)$. C'est ici que commence toute la richesse des problèmes et que réside notre intérêt, car les conditions

sur la surface potentielle de contact Γ_3 peuvent être diverses et donner ainsi lieu à une variété de modèles de contact avec ou sans frottement. Nous nous limitons à citer deux exemples de conditions aux limites.

1.1.4 Condition de contact avec réponse normale instantanée et frottement

La condition dite de réponse normale instantanée sur la surface potentiel de contact $\Gamma_3 \times (0, T)$ s'écrit

$$-\sigma_\nu = p_\nu(\dot{u}_\nu) \quad (I. 1. 1)$$

où $\dot{u}_\nu$ désigne la vitesse normale et p_ν est une fonction donnée telle que $p_\nu(r) = 0$ pour $r \leq 0$. Cette égalité traduit une dépendance générale de la contrainte normale par rapport à la vitesse normale, elle peut représenter le comportement d'une couche de lubrifiant sur la surface de contact. Dans le cas où

$$p_\nu(r) = kr \quad \forall r \in \mathbb{R}, \quad (I. 1. 2)$$

avec $k \geq 0$ la résistance de la fondation à la pénétration est proportionnelle à la vitesse normale. De tels exemple de contact à réponse normale instantanée peuvent être trouvés dans [33]. La loi de frottement associée est donnée par:

$$-\sigma_\tau = p_\tau(\dot{u}_\tau) \quad (I. 1. 3)$$

où $\dot{u}_\tau$ représente la vitesse tangentielle sur la surface de contact. Cette seconde égalité dans (I. 1. 3) est sans seuil et dit que le cisaillement tangential sur la surface de contact dépend de la fonction de la vitesse tangentielle. Dans le cas où

$$p_\tau(r) = \mu r \quad \forall r \in \mathbb{R}^d \quad (I. 1. 4)$$

montre que le cisaillement tangential est proportionnel à la vitesse tangentielle. Tel est le cas quand la surface de contact est lubrifiée par une fine couche de fluide non newtonien, voir par exemple [33]. Dans (I. 1. 4), μ représente le coefficient de frottement, supposé positif. Nous pouvons également envisager d'autres exemples de fonctions de contact données par

$$p_\nu(r) = k(r_+)^m + p_0 \quad (I. 1. 5)$$

$$p_\tau(r) = \mu |r|^{m-1} r \quad (I. 1. 6)$$

avec $r = \max\{0, 1\}$ et $0 \leq m \leq 1$ est un coefficient fixe et p_0 peut jouer le rôle de la pression de l'huile qui est donnée et positive. Dans (I. 1. 5) si $m = 1$ la condition limite des (I. 1. 5) a été examiné en [25], où la surface de contact potential Γ_3 était supposé être la couverture.

1.1.5 Condition de contact sans frottement avec compliance normale

Nous rappelons la condition dite de compliance normale sur la surface potentielle de contact:

$$\sigma_\nu = -p_\nu(u_\nu - g) \quad (I. 1. 7)$$

où u_ν représente le déplacement normale, p_ν est une fonction positive donnée. les expressions générales de la forme (I. 1. 7) ont été utilisées dans [21, 8, 10, 20, 26] pour l'étude des problèmes dynamiques pour des matériaux élastiques linéaires.

Comme exemple de la fonction de compliance normale p_ν , nous pourrions considérer et

$$p_\nu(r) = c_\nu r_+, \quad (I. 1. 8)$$

où c_ν est une constante positive et $r_+ = \max\{0, r\}$. Et la condition de non pénétration de Signorini est obtenue quand $c_\nu \rightarrow +\infty$. Nous pouvons aussi considérer la fonction

$$p_\nu(r) = \begin{cases} c_\nu r_+ & \text{si } r \leq \alpha, \\ c_\nu \alpha & \text{si } r > \alpha, \end{cases} \quad (I. 1. 9)$$

où α est un coefficient positive relatif à la dureté de la surface. Dans ce cas, la condition de contact (I. 1. 8) signifie que quand la pénétration est trop profond, i.e. quand elle dépasse α , l'obstacle se désintègre et n'offre plus de résistance à la pénétration. Finalement nous supposons que le contact est sans frottement et ainsi la contrainte tangentielle sur la frontière s'annule durant le processus.

La condition de contact sans frottement est donnée par

$$\sigma_\tau = 0,$$

cette équation traduit le fait que la force de frottement est nulle sur la surface de contact.

1.1.6 Formulation mathématique des problèmes élasto-viscoplastiques

Nous considérons un corps élasto-viscoplastique qui occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) avec une surface frontière de Lipschitz Γ partitionnée en trois parties mesurables Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 , telle que $\text{mes } \Gamma_1 > 0$. On note par ν la normale unitaire sortante à Γ . Le corps est encastré sur Γ_1 dans une structure fixe. Sur Γ_2 agissent des tractions surfaciques de densité f_2 et dans Ω agissent des forces volumiques de densité f_0 . On suppose que f_2 et f_0 varient très lentement par rapport au temps.

Soit $T > 0$ et $[0, T]$ l'intervalle de temps en question. Nous étudions dans l'intervalle de temps $[0, T]$ l'évolution du corps matériel due à l'application de forces de volume et des tractions de surface.

Nous notons par $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ le champ de déplacement, $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow S_d$ le champ des contraintes et $\varepsilon(u)$ représente le tenseur des déformations et $\beta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ le champ d'endommagement. Le corps est fixé sur $\Gamma_1 \times (0, T)$, le champ des déplacements y est par conséquent nul. Une traction surfacique de densité f_2 agit sur $\Gamma_2 \times (0, T)$. Le corps est éventuellement en contact avec une fondation rigide sur $\Gamma_3 \times (0, T)$. Les conditions sur la surface potentielle de contact Γ_3 peuvent être diverses et donner lieu à une variété de modèles de contact avec ou sans frottement.

Notre objectif est l'étude de deux problèmes dynamique et quasistatique pour des matériaux élasto-viscoplastiques. Le premier problème est un problème de contact avec réponse normale instantanée et frottement, le second est un problème de contact sans frottement avec compliance normale.

L'étude variationnelle de ces problèmes se fera dans le cadre physique défini ci-dessus. Sous ces hypothèses, en notant par u_0 le déplacement initial, v_0 la vitesse initiale et par β_0 l'endommagement initial nous arrivons à formuler les différents problèmes de la manière suivante:

Problème P_1 : (matériau élasto-viscoplastique, réponse normale instantanée et loi locale de frottement)

Trouver le champ de déplacement $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ du tenseur des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow S_d$ et le champ d'endommagement $\beta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que.

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{E}(\varepsilon(u), \beta) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(s)), \varepsilon(u(s))) ds & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\
 \dot{\beta} - k\Delta\beta + \partial\varphi_K(\beta) &\ni \mathcal{S}(\varepsilon(u), \beta) & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\
 \operatorname{Div}\sigma + f_0 &= \rho\ddot{u} & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\
 u &= 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T) \\
 \sigma\nu &= f_2 & \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T) \\
 -\sigma_\nu &= p_\nu(\dot{u}_\nu), \quad -\sigma_\tau = p_\tau(\dot{u}_\tau) & \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T) \\
 \frac{\partial\beta}{\partial\nu} &= 0 & \text{sur } \Gamma \times (0, T) \\
 u(0) &= u_0, \dot{u}(0) = v_0, \beta(0) = \beta_0 & \text{dans } \Omega
 \end{aligned}$$

Problème P_2 : (matériau élasto-viscoplastique, contact sans frottement avec compliance normale).

Trouver le champ de déplacement $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ du tenseur des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow S_d$ et le champ d'endommagement $\beta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que.

$$\begin{aligned}
 \dot{\sigma} &= \mathcal{E}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}(\sigma, \varepsilon(u), \beta) & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\
 \dot{\beta} - k\Delta\beta + \partial\varphi_K(\beta) &\ni \mathcal{S}(\sigma, \varepsilon(u), \beta) & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\
 \operatorname{Div}\sigma + f_0 &= 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\
 u &= 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T) \\
 \sigma\nu &= f_2 & \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T) \\
 -\sigma_\nu &= p_\nu(u_\nu - g), \quad \sigma_\tau = 0 & \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T) \\
 \frac{\partial\beta}{\partial\nu} &= 0 & \text{sur } \Gamma \times (0, T) \\
 u(0) &= u_0, \sigma(0) = \sigma_0, \beta(0) = \beta_0 & \text{dans } \Omega
 \end{aligned}$$

Les problèmes que nous avons formulés ci-dessus seront étudiés aux deux chapitres de ce mémoire. Nous utilisons des équations d'évolutions du premier ordre avec des opérateurs monotones, des inéquations du type parabolique et des arguments du point fixe.

1.2 Rappels d'analyse

1.2.1 Espaces fonctionnels

On introduit dans cette section des espaces du type Sobolev utilisés en mécanique du contact, à savoir les espaces de Hilbert associés aux opérateurs divergence et déformation, ainsi que les espaces de fonctions à valeurs vectorielles. On présente en plus leurs principales propriétés, notamment les théorèmes de trace. On adopte ici la convention de l'indice muet et on précise aussi que toutes les notations ainsi que les espaces fonctionnels utilisés dans mémoire sont introduits dans cette section. En outre, dans la rédaction de cette section nous avons utilisé [9, 10]. Pour plus de détails sur les espaces de Sobolev et les espaces de distributions, on renvoie par exemple à [5].

1.2.2 Espaces de Hilbert associés aux opérateurs divergence et déformation

Nous désignons par S_d l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur IR^d ($d = 2, 3$), "." et $|\cdot|$ représentent respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne sur IR^d et S_d . Ainsi,

$$\begin{aligned} u.v &= u_i v_i, & |v| &= (v.v)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^d \\ \sigma.\tau &= \sigma_{ij} \tau_{ij}, & |\sigma| &= (\sigma.\sigma)^{\frac{1}{2}} \quad \forall \sigma, \tau \in S^d \end{aligned}$$

Dans toute la suite, $\Omega \subset IR^d$ est un domaine borné avec une surface frontière régulière de Lipschitz notée Γ .

Nous utilisons les espaces suivants.

$$\begin{aligned} H &= \{ u = (u_i) \mid u_i \in L^2(\Omega) \text{ pour } i = \overline{1, d} \} = L^2(\Omega)^d \\ \mathcal{H} &= \{ \sigma = (\sigma_{ij}) \mid \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega) \text{ pour } i, j = \overline{1, d} \} = L^2(\Omega)^{d \times d} \\ H_1 &= \{ u \in H \mid \varepsilon(u) \in \mathcal{H} \} = \{ u = (u_i) \mid u_i \in H^1(\Omega) \text{ pour } i = \overline{1, d} \} = H^1(\Omega)^d \\ \mathcal{H}_1 &= \{ \sigma \in \mathcal{H} \mid \text{Div } \sigma \in H \} \end{aligned}$$

où $\varepsilon : H_1 \rightarrow \mathcal{H}$ et $\text{Div} : \mathcal{H}_1 \rightarrow H$ sont les opérateurs de déformation et de divergence, définis par

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \text{Div } \sigma = (\sigma_{i,j}) \quad 1 \leq i, j \leq d$$

où la virgule représente la dérivée par rapport à la variable spatiale, c'est à dire que

$$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

Ces espaces respectifs sont des espaces de Hilbert réels munis de leurs produits scalaires suivants:

$$\begin{aligned} (u, v)_H &= \int_{\Omega} u_i v_i dx \quad \forall u, v \in H \\ (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}} &= \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} dx \quad \forall \sigma, \tau \in \mathcal{H} \\ (u, v)_{H_1} &= (u, v)_H + (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in H_1 \\ (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}_1} &= (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}} + (Div \sigma, Div \tau)_H \quad \forall \sigma, \tau \in \mathcal{H}_1 \end{aligned}$$

Les normes sur les espaces H , $\mathcal{H}$, H_1 et $\mathcal{H}_1$ sont notées respectivement par $|\cdot|_H$, $|\cdot|_{\mathcal{H}}$, $|\cdot|_{H_1}$ et $|\cdot|_{\mathcal{H}_1}$.

Comme la frontière Γ est Lipschitzienne, le vecteur normal extérieur ν à la frontière est définie p.p. Pour tout champ de vecteurs $u \in H_1$ nous utilisons la notation u pour désigner la trace γ_u de u sur Γ et nous notons par u_ν et u_τ les composantes normale et tangentielle de u sur la frontière données par

$$u_\nu = u \cdot \nu, \quad u_\tau = u - u_\nu \nu \quad (I. 2. 1)$$

Pour le champ des contraintes σ nous notons par σ_ν et σ_τ les composantes normale et tangentielle à la frontière, à savoir :

$$\sigma_\nu = (\sigma \nu) \cdot \nu, \quad \sigma_\tau = \sigma \nu - \sigma_\nu \nu \quad (I. 2. 2)$$

Nous rappelons que l'application de trace $\gamma : H_1 \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$ est linéaire continue, mais n'est pas surjective. L'image de H_1 par cette application est notée par H_Γ , ce sous-espace s'injecte continûment dans $L^2(\Gamma)^d$. Désignons par H'_Γ le dual H_Γ , et $(\cdot, \cdot)_{H'_\Gamma \times H_\Gamma}$ le produit de dualité entre H'_Γ et H_Γ .

Pour tout $\sigma \in \mathcal{H}_1$, il existe un élément noté $\sigma \nu \in H'_\Gamma$ tel que

$$(\sigma \nu, \gamma v)_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = (\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (Div \sigma, v)_H \quad \forall v \in H_1$$

En outre, si σ est assez régulier (par exemple C^1), nous avons la formule

$$(\sigma \nu, \gamma v) = \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot v da \quad \forall v \in H_1$$

donc, si σ est assez régulier nous avons la formule suivante:

$$(\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (Div \sigma, v)_H = \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot v da \quad \forall v \in H_1(\Omega) \quad (I. 2. 3)$$

Nous introduisons à présent un sous espace fermé de H_1 , dont la définition est donnée ci-après

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega)^d \mid v = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \right\}$$

puisque $mes \Gamma_1 > 0$, l'inégalité de Korn s'applique sur V : il existe une constante $C_k > 0$ dépendant uniquement de Ω et Γ_1 telle que

$$|\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \geq C_k |v|_{H_1} \quad \forall v \in V \quad (I. 2. 4)$$

une preuve de cette inégalité peut être trouvée dans [22, p.79].

Sur V nous considérons le produit scalaire donné par

$$(u, v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in V \quad (I. 2. 5)$$

et soit $|\cdot|_V$ la norme associée, c'est à dire

$$|v|_V = |\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \quad \forall v \in V$$

par l'inégalité de korn, il vient que $|\cdot|_{H_1}$ et $|\cdot|_V$ sont des normes équivalentes sur V et ainsi $(V, |\cdot|_V)$ est un espace de Hilbert.

En outre, par le théoème de trace de Sobolev, il existe constante $C_0 > 0$ dépendant uniquement de Ω , Γ_1 et Γ_2 telle que

$$|v|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq C_0 |v|_V \quad \forall v \in V. \quad (I. 2. 6)$$

1.2.3 Espaces de fonctions à valeurs vectorielles

Soit H un espace de Hilbert. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$ et $T > 0$. On rappelle que $W^{k,p}(0, T; H)$ est l'espace des distributions vectorielles $u \in D'(0, T; H)$ telles que $D_j u \in L^p(0, T; H)$ pour $j = \overline{0, k}$, D_j désignant la dérivée d'ordre j au sens des distributions.

Si $1 \leq p < +\infty$, $W^{k,p}(0, T; H)$ est un espace de Banach réel pour la norme définie par

$$\|u\|_{W^{k,p}(0,T;H)} = \left(\sum_{j=0}^k \int_0^T \|D_j u(x)\|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\forall u \in W^{k,p}(0, T; H).$$

En particulier, $W^{k,2}(0, T; H)$ est un espace de Hilbert réel pour le produit scalaire défini par

$$(u, v)_{W^{k,2}(0,T;H)} = \sum_{j=0}^k \int_0^T (D_j u(t), D_j v(t))_H dt$$

$$\forall u, v \in W^{k,2}(0, T; H)$$

D'autre part, $W^{k,\infty}(0, T; H)$ est un espace de Banach pour la norme définie par

$$\|u\|_{W^{k,\infty}(0,T;H)} = \sum_{j=0}^k \sup_{[0,T]} \|D_j(u(t))\|_H$$

$$\forall u \in W^{k,\infty}(0, T; H)$$

Pour le cas particulier $k = 0$, on remarque que

$$W^{0,p}(0, T; H) = L^p(0, T; H)$$

et on note alors la norme $L^p(0, T; H)$ par $\|\cdot\|_{L^p(0,T;H)}$ pour tout $1 \leq p \leq +\infty$. On définit aussi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'espace $C^k(0, T; H)$ des fonctions $u : [0, T] \rightarrow H$ telles que pour tout $j = \overline{0, k}$ les dérivées $\frac{d^j u}{dt^j}$ existent et sont continues sur $[0, T]$. On note, en particulier, $C^0(0, T; H)$ par $C(0, T; H)$. L'espace $C^k(0, T; H)$ est un espace de Banach pour la norme définie par

$$\|u\|_{C^k(0,T;H)} = \sum_{j=0}^k \max_{t \in [0,T]} \left\| \frac{d^j u}{dt^j}(t) \right\|_H$$

$$\forall u \in C^k(0, T; H).$$

En particulier, les normes sur les espaces $C(0, T; H)$ et $C^1(0, T; H)$ sont données par

$$\|u\|_{C(0,T;H)} = \max_{t \in [0,T]} \|u(t)\|_H \quad \forall u \in C(0, T; H)$$

$$\|u\|_{C^1(0,T;H)} = \max_{t \in [0,T]} \|u\|_H + \max_{t \in [0,T]} \|\dot{u}\|_H$$

$$\forall u \in C^1(0, T; H)$$

On précise que le point au dessus d'une expression désigne la dérivée de cette expression par rapport au temps, représentée par la variable $t \in [0, T]$.

1.2.4 Fonctions convexes

On considère une fonction φ définie sur un espace vectoriel réel X et à valeurs dans $] -\infty, +\infty]$. Une telle fonction est dite propre si elle n'est pas identiquement égale à $+\infty$, c'est à dire s'il existe $u_0 \in X$ tel que $\varphi(u_0) < +\infty$. La fonction φ est dite convexe si

$$\varphi(tu + (1-t)v) \leq t\varphi(u) + (1-t)\varphi(v) \quad \forall u, v \in X, t \in]0, 1[.$$

La fonction φ est dite strictement convexe si cette dernière inégalité est stricte pour tout $u, v \in X$ tels que $u \neq v$. Pour toute fonction $\varphi : X \rightarrow] -\infty, +\infty]$, on définit le domaine et l'épigraphe de φ respectivement par

$$\text{dom}(\varphi) = \{u \in X \mid \varphi(u) < +\infty\}$$

$$\text{epi } \varphi = \{(u, \alpha) \in X \times \mathbb{R} \mid \varphi(u) \leq \alpha\}.$$

Il est clair qu'on peut établir les résultats suivants

- 1) φ est propre si et seulement $\text{dom}(\varphi) \neq \emptyset$.
- 2) Le domaine de φ est un ensemble convexe de X si φ est convexe.
- 3) φ est convexe si et seulement si $\text{epi } \varphi$ est un ensemble convexe dans $X \times \mathbb{R}$.

Soit maintenant H un espace de Hilbert, une fonction $\varphi : H \rightarrow] -\infty, +\infty]$ est dite semi-continue inférieurement (s.c.i.) en $u_0 \in H$ si

$$\liminf_{u \rightarrow u_0} \varphi(u) \geq \varphi(u_0)$$

Une fonction est s.c.i. sur $K \subset H$ si elle est s.c.i. en tout point de K et elle est dite s.c.i. si elle est s.c.i. sur tout H .

La propriété de semi-continuité peut être caractérisée de la façon suivante:

Lemme. Soit $\varphi : H \rightarrow]-\infty, +\infty]$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes

- 1) φ est semi-continue inférieurement.
- 2) L'épigraphe de φ est fermé dans $H \times IR$.

Puisque dans un espace vectoriel normé tout ensemble convexe est simultanément fermé pour la topologie forte et la topologie faible, le lemme précédent conduit au résultat suivant:

Théorème. Soit $\varphi : H \rightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe et propre. Alors φ est semi-continue inférieurement si et seulement si elle est semi-continue inférieurement par rapport à la topologie faible de H .

Soit maintenant K un sous-ensemble de H . On appelle fonction indicatrice de K , la fonction $\Psi_K : H \rightarrow]-\infty, +\infty[$ définie par

$$\Psi_K(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in K \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

En utilisant cette définition, on peut facilement prouver le résultat suivant:

Lemme. K est un ensemble convexe, fermé et non vide de H si et seulement si la fonction indicatrice Ψ_K est convexe, semi-continue inférieurement et propre.

On note à présent par 2^H l'ensemble de toutes les parties de H . Une fonction $\varphi : H \rightarrow]-\infty, +\infty]$ est dite Gâteaux-différentiable au point $u \in H$ s'il existe un élément $\nabla\varphi(u) \in H$ tel que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(u + tv) - \varphi(u)}{t} = (\nabla\varphi(u), v)_H$$

$\forall v \in H$. L'élément $\nabla\varphi(u)$ s'appelle la différentielle au sens de Gâteaux de φ en u .

La fonction φ est dite Gâteaux-différentiable si elle est Gâteaux-différentiable en tout point de H . Dans ce cas l'opérateur $u \in H \mapsto \nabla\varphi(u) \in H$ s'appelle le gradient de φ .

La convexité des fonctions Gâteaux-différentiables peut être caractérisée de la façon suivante:

Lemme. Soit $\varphi : H \rightarrow IR$ une fonction Gâteaux-différentiable. Alors φ est une fonction convexe si et seulement si

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geq (\nabla\varphi(u), v - u)_H \quad \forall u, v \in H.$$

L'inégalité précédente suggère une généralisation de la notion de gradient aux fonctions convexes. On dit que la fonction $\varphi : H \rightarrow]-\infty, +\infty]$ est sous-différentiable en un point $u \in H$ s'il existe $f \in H$ tel que

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v - u)_H \quad \forall v \in H.$$

L'élément f est alors appelé un sous-gradient de φ en u et l'ensemble des sous-gradients de φ en u est appelé le sous-différentiel de φ en u et est noté $\partial\varphi(u)$:

$$\partial\varphi(u) = \{f \in H \mid \varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v - u)_H \quad \forall v \in H\}$$

On note par $\text{dom}(\partial\varphi)$ l'ensemble défini par

$$\text{dom}(\partial\varphi) = \{u \in H \mid \partial\varphi(u) \neq \emptyset\}$$

En utilisant définis l'ensembles $\partial\varphi(u)$ et $\text{dom}(\partial\varphi)$ ainsi que la définition du domaine d'une fonction, il résulte

$$\text{dom}(\partial\varphi) \subset \text{dom} \varphi.$$

L'opérateur multivoque $u \longmapsto \partial\varphi(u) : H \rightarrow 2^H$ s'appelle le sous-différentiel de φ . La fonction φ est dite sous-différentiable si elle est sous-différentiable en tout point de H , c'est à dire si $\text{dom}(\partial\varphi) = H$.

En utilisant l'inégalité, on obtient:

Lemme. Soit $\varphi : H \rightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction sous-différentiable. Alors φ est convexe, propre et semi-continue inférieurement.

Lemme. Soit $\varphi : H \rightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe, propre et semi-continue inférieurement. Alors φ est sous-différentiable en tout point intérieur de son domaine $\text{dom} \varphi$.

Dans le cas d'une fonction convexe, le lien entre l'opérateur gradient et le sous-différentiel est donné par

Lemme. Soit $\varphi : H \rightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe et Gâteaux-différentiable. Alors φ est sous-différentiable et $\partial\varphi(u) = \{\nabla\varphi(u)\}$ pour tout $u \in H$.

1.2.5 Enoncés de certains théorèmes

Nous considérons maintenant quelques théorèmes importants qui sont utilisés le long de ce mémoire.

Définition 1. L'inclusion de $(V, |\cdot|_V)$ dans $(H, \|\cdot\|_H)$ est continue et V est dense dans H . Nous notons par V' l'espace dual de V . V est identifié avec H et avec son propre dual, le triplet

$$V \subset H \subset V'$$

s'appelle le triplet de Gelfand.

Définition 2. On dit qu'une forme bilinéaire $a(u, v) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ est

- 1) Continue s'il existe une constante C telle que

$$|a(u, v)| \leq C |u|_H |v|_H \quad \forall u, v \in H \quad (I. 2. 10)$$

- 2) Coercive s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$a(v, v) \geq \alpha |v|_H^2 \quad \forall v \in H. \quad (I. 2. 11)$$

Théorème I. 2. 1. (conséquence de *Minty – Browder*). Soit $A : H \rightarrow H$ un opérateur non linéaire, fortement monotone et de Lipschitz.

Alors pour tout $f \in H$ il existe $u \in H$ unique solution de l'équation $Au = f$.

Théorème I. 2. 2. Soit $V \subset H \subset V'$ un triplet de Gelfand. Soit K un fermé non vide, et convexe de V .

Supposons que $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et symétrique satisfaisant pour toutes constantes $\zeta > 0$ et c_0 , la condition de coercivité:

$$a(v, v) + c_0 |v|_H^2 \geq \zeta |v|_V^2 \quad \forall v \in V.$$

Pour chaque $u_0 \in K$ et $f \in L^2(0, T; H)$, il existe une fonction unique $u \in H^1(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$ tels que $u(0) = u_0$, $u(t) \in K$ pour tout $t \in [0, T]$,

$$(\dot{u}(t), v - u(t))_{V', V} + a(u(t), v - u(t)) \geq (f(t), v - u(t))_H \quad \forall v \in K$$

Théorème I. 2. 3. Soit $V \subset H \subset V'$ un triplet de Gelfand. Soit $A : V \longrightarrow V'$ un opérateur hemicontinu et monotone satisfaisant.

$$(Av, v)_{V' \times V} \geq \omega |v|_V^2 + \lambda \quad \forall v \in V, \quad (I. 2. 12)$$

$$|Av|_{V'} \leq C (|v|_V + 1) \quad \forall v \in V, \quad (I. 2. 13)$$

pour des constantes $\omega > 0$, $C > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Etant donné $u_0 \in H$ et $f \in L^2(0, T; V')$, il existe une fonction unique u qui satisfait.

$$u \in L^2(0, T; V) \cap C(0, T; H), \quad \dot{u} \in L^2(0, T; V'),$$

$$\dot{u}(t) + Au(t) = f(t) \quad p.p. \quad t \in [0, T],$$

$$u(0) = u_0.$$

Théorème de Banach. (point fixe). Soit X un espace de Banach, K est un ensemble fermé et non vide de X . On suppose que $\Lambda : K \longrightarrow K$:

1- Λ est une contraction, i.e.,

$$\|\Lambda u - \Lambda v\| \leq \alpha \|u - v\| \quad \forall u, v \in K.$$

Avec $\alpha \in [0, 1)$.

Donc il existe une solution unique $u \in K$ de l'équation $\Lambda u = u$, i.e. Λ a un point fixe unique dans K .

2- Λ^m est une contraction pour m un entier positif, donc Λ a un point fixe unique dans K .

1.2.6 Compléments divers

Nous rappelons ici les lemmes classiques du type Gronwall qui interviennent dans de nombreux problèmes de majoration, en particulier pour établir l'unicité de la solution. Nous citons certains théorèmes utilisés dans ce mémoire. Pour avoir plus de détails sur les rappels figurant dans cette section, nous proposons par exemple [33].

Lemmes de Gronwall

Lemme. Soient $m, n \in C(0, T; \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\varphi \in C(0, T; \mathbb{R})$ est une fonction telle que

$$\varphi(t) \leq a + \int_0^t m(s)ds + \int_0^t n(s)\varphi(s)ds \quad \forall t \in [0, T]$$

alors

$$\varphi(t) \leq (a + \int_0^t m(s)ds) \exp\left(\int_0^t n(s)ds\right) \quad \forall t \in [0, T]$$

Pour le cas particulier $m = 0$, ce lemme devient:

Corollaire. Soit $n \in C(0, T; \mathbb{R})$ telle que $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\varphi \in C(0, T; \mathbb{R})$ est une fonction telle que

$$\varphi(t) \leq a + \int_0^t n(s)\varphi(s)ds \quad \forall t \in [0, T]$$

alors

$$\varphi(t) \leq a \exp\left(\int_0^t n(s)ds\right) \quad \forall t \in [0, T]$$

Lemme. Soient $m, n \in C(0, T; \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\varphi \in C(0, T; \mathbb{R})$ est une fonction telle que

$$\frac{1}{2}\varphi^2(t) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^t m(s)\varphi(s)ds + \int_0^t n(s)\varphi^2(s)ds \quad \forall t \in [0, T]$$

alors

$$|\varphi(t)| \leq (a + \int_0^t m(s)ds) \exp\left(\int_0^t n(s)ds\right) \quad \forall t \in [0, T]$$

Chapitre 2

Problème élasto-viscoplastique avec réponse normale instantanée et frottement

Le second chapitre est consacré à l'étude mathématique d'un problème de contact avec frottement pour des matériaux élasto-viscoplastiques où l'endommagement interne du matériau est pris en considération, dans un processus dynamique. Le contact avec une base rigide est modélisé par une réponse normale instantanée associée à une loi locale de frottement. Le problème se formule comme un système qui comporte une équation variationnelle par rapport au champ de déplacement, une inéquation variationnelle du type parabolique par rapport au champ d'endommagement.

Pour ce problème, des résultats d'existence et d'unicité de la solution ont été considérés en utilisant la théorie des équations d'évolutions du premier ordre avec des opérateurs non linéaires, des inéquations variationnelles du type parabolique et des arguments de point fixe.

2.1 Problème mécanique et formulation variationnelle

Problème P₁

Trouver le champ de déplacement $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ du tenseur des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow S_d$ et le champ d'endommagement $\beta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que.

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{E}(\varepsilon(u), \beta) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(s)), \varepsilon(u(s))) ds \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (II. 1. 1)$$

$$\dot{\beta} - k\Delta\beta + \partial\varphi_K(\beta) \ni \mathcal{S}(\varepsilon(u), \beta) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (II. 1. 2)$$

$$\text{Div}\sigma + f_0 = \rho\ddot{u} \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (II. 1. 3)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T) \quad (II. 1. 4)$$

$$\sigma\nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T) \quad (II. 1. 5)$$

$$-\sigma_\nu = p_\nu(\dot{u}_\nu), \quad -\sigma_\tau = p_\tau(\dot{u}_\tau) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T) \quad (II. 1. 6)$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial\nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T) \quad (II. 1. 7)$$

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = v_0, \quad \beta(0) = \beta_0 \quad \text{dans } \Omega \quad (II. 1. 8)$$

Ici, les relations (II. 1. 1) représente la loi de comportement d'un matériau élasto-viscoplastique avec endommagement, (II. 1. 2) représente une inclusion différentielle décrivant l'évolution du champ d'endommagement où $\mathcal{S}$ est la fonction source d'endommagement, $\partial\varphi_K$ est le sous-différentiel de la fonction indicatrice de l'ensemble des fonctions d'endommagement admissibles K . (II. 1. 3) représente l'équations du mouvement pour le champ de déplacement. Les relations (II. 1. 4)-(II. 1. 5) sont les conditions de déplacement-traction. (II. 1. 6) représente les conditions de contact avec réponse normale instantanée et frottement. (II. 1. 7) représente la condition au limite de Neumann où $\frac{\partial\beta}{\partial\nu}$ est la dérivée normale β . La relation (II. 1. 8) représente les conditions initiales du champ de déplacement u_0 , du champ de vitesse v_0 et du champ d'endommagement β_0 .

- Pour obtenir la formulation variationnelle du problème (II. 1. 1)-(II. 1. 9), nous avons le sous-espace fermé de $H^1(\Omega)^d$:

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega)^d \quad / \quad v = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \right\}$$

Comme $mes(\Gamma_1) > 0$, l'inégalité de Korn est vérifiée, donc il existe une constante $C_k > 0$, qui dépend uniquement de Ω et Γ_1 , telle que:

$$|\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \geq C_k |v|_{H_1} \quad \forall v \in V.$$

La démonstration de l'inégalité de Korn peut être trouvée dans [22, p. 79]. L'espace V muni du produit scalaire et de la norme associée donnée par:

$$(u, v)_V = (\varepsilon(v), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad , \quad |v|_V = |\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in V \quad (II. 1. 10)$$

Il vient que $|\cdot|_{H^1(\Omega)^d}$ et $|\cdot|_V$ sont des normes équivalentes sur V et par conséquent, $(V, |\cdot|_V)$ est un espace de Hilbert réel.

Pour l'étude du problème (II. 1. 1)-(II. 1. 9), on considère les hypothèses suivantes.

L'opérateur de viscosité $\mathcal{A} : \Omega \times S_d \longrightarrow S_d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe une constante } L_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que} \\ |\mathcal{A}(x, \xi_1) - \mathcal{A}(x, \xi_2)| \leq L_{\mathcal{A}} |\xi_1 - \xi_2| \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in S_d \quad p.p. x \in \Omega. \\ (b) \text{ Il existe une constante } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que} \\ (\mathcal{A}(x, \xi_1) - \mathcal{A}(x, \xi_2)) \cdot (\xi_1 - \xi_2) \geq m_{\mathcal{A}} |\xi_1 - \xi_2|^2 \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in S_d \quad p.p. x \in \Omega. \\ (c) x \longrightarrow \mathcal{A}(x, \xi) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega. \\ (d) \text{ L'application } x \longrightarrow \mathcal{A}(x, 0) \text{ appartient à } \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (II.1.11)$$

L'opérateur d'élasticité $\mathcal{E} : \Omega \times S_d \times \mathbb{R} \longrightarrow S_d$ satisfait (II. 2. 15)

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe une constante } L_{\mathcal{E}} > 0 \text{ tel que} \\ |\mathcal{E}(x, \xi_1, \beta_1) - \mathcal{E}(x, \xi_2, \beta_2)| \leq L_{\mathcal{E}} (|\xi_1 - \xi_2| + |\beta_1 - \beta_2|), \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in S_d \\ \forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \quad p.p. x \in \Omega. \\ (b) \text{ Pour tout } \xi \in S_d \text{ et } \beta \in \mathbb{R}, \\ x \longrightarrow \mathcal{E}(x, \xi, \beta) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega. \\ (c) \text{ L'application } x \longrightarrow \mathcal{E}(x, 0, 0) \text{ appartient à } \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (II.1.12)$$

La fonction source d'endommagement $\mathcal{S} : \Omega \times S_d \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe une constante } L_{\mathcal{S}} > 0 \text{ tel que} \\ | \mathcal{S}(x, \xi_1, \alpha_1) - \mathcal{S}(x, \xi_2, \alpha_2) | \leq L_{\mathcal{S}} (|\xi_1 - \xi_2| + |\alpha_1 - \alpha_2|) \\ \forall \xi_1, \xi_2 \in S_d, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ (b) \text{ Pour tout } \xi \in S_d \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}, \\ x \longrightarrow \mathcal{S}(x, \xi, \alpha) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega. \\ (c) \text{ L'application } x \longrightarrow \mathcal{S}(x, 0, 0) \text{ appartient à } \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (II.1.13)$$

L'opérateur visco-plastique $\mathcal{G} : \Omega \times S_d \times S_d \longrightarrow S_d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe une constante } L_{\mathcal{G}} > 0 \text{ tel que} \\ | \mathcal{G}(x, \sigma_1, \xi_1) - \mathcal{G}(x, \sigma_2, \xi_2) | \leq L_{\mathcal{G}} (|\xi_1 - \xi_2| + |\sigma_1 - \sigma_2|) \\ \forall \xi_1, \xi_2, \sigma_1, \sigma_2 \in S_d \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ (b) \text{ Pour tout } \xi, \sigma \in S_d, \\ x \longrightarrow \mathcal{G}(x, \xi, \sigma) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega. \\ (c) \text{ L'application } x \longrightarrow \mathcal{G}(x, 0, 0) \text{ appartient à } \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (II. 1. 14)$$

La fonction de contact normal $P_{\nu} : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe une constante } C_1^{\nu}, C_2^{\nu} > 0 \text{ tel que} \\ |p_{\nu}(x, r)| \leq C_1^{\nu} |r| + C_2^{\nu} \quad \forall r \in \mathbb{R} \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ (b) (p_{\nu}(x, r_1) - p_{\nu}(x, r_2))(r_1 - r_2) \geq 0 \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R} \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ (c) \text{ L'application } x \longrightarrow p_{\nu}(x, r) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3, \forall r \in \mathbb{R}. \\ (d) \text{ L'application } r \longrightarrow p_{\nu}(x, r) \text{ est continue sur } \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (II.1.15)$$

La fonction de contact tangentiel $P_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe une constante } C_1^\tau, C_2^\tau > 0 \text{ tel que} \\ |p_\tau(x, d)| \leq C_1^\tau |d| + C_2^\tau \quad \forall d \in \mathbb{R}^d \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ (b) \\ (p_\tau(x, d_1) - p_\tau(x, d_2))(d_1 - d_2) \geq 0 \quad \forall d_1, d_2 \in \mathbb{R}^d \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ (c) \text{ L'application } x \longrightarrow p_\tau(x, d) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3, \forall d \in \mathbb{R}^d. \\ (d) \text{ L'application } d \longrightarrow p_\tau(x, d) \text{ est continue sur } \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ (e) \\ p_\tau(x, d) \cdot \nu(x) = 0 \quad \forall d \in \mathbb{R}^d \text{ tel que } d \cdot \nu(x) = 0 \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (II.1.16)$$

Nous supposons que la masse volumique, les forces volumiques et surfaciques satisfont

$$\rho \in C^\infty(\Omega), \exists \rho^* > 0, \text{ tel que } \rho(x) \geq \rho^* \text{ p.p. } x \in \Omega \quad (II. 1. 17)$$

$$f_0 \in L^2(0, T; H), \quad f_2 \in L^2\left(0, T; L^2(\Gamma_2)^d\right) \quad (II. 1. 18)$$

Le champ de déplacement initial satisfait

$$u_0 \in V, v_0 \in H \quad (II. 1. 19)$$

Le champ d'endommagement initial satisfait

$$\beta_0 \in K. \quad (II. 1. 20)$$

Nous définissons la forme bilinéaire $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$a(\zeta, \varphi) = k \int_{\Omega} \nabla \zeta \cdot \nabla \varphi dx. \quad (II. 1. 21)$$

Ensuite, on note par $f : [0, T] \rightarrow V'$ la fonction définie par

$$(f(t), v)_{V' \times V} = \int_{\Omega} f_0(t) \cdot v dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t) \cdot v da \quad \forall v \in V, t \in [0, T]. \quad (II. 1. 22)$$

Puis, la fonction de frottement $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$j(u, v) = \int_{\Gamma_3} (p_\nu(u_\nu) v_\nu + p_\tau(u_\tau) \cdot v_\tau) da, \quad \forall u, v \in V. \quad (II.1. 23)$$

De (II. 1. 15) et (II. 1. 16), on remarque que les intégrales (II. 1. 23) sont bien définies et nous notons que les conditions (II. 1. 18) indique

$$f \in L^2(0, T; V'). \quad (II. 1. 24)$$

En utilisant des arguments standards nous obtenons la formulation variationnelle du problème mécanique (II. 1. 1)-(II. 1. 9).

Problème P_V : Trouver le champ de déplacement $u : [0, T] \longrightarrow V$, le champ du tenseur des contraintes $\sigma : [0, T] \longrightarrow \mathcal{H}$ et le champ d'endommagement $\beta : [0, T] \longrightarrow H^1(\Omega)$ tels que:

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{E}(\varepsilon(u(t)), \beta(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(s)), \varepsilon(u(s))) ds \quad (II. 1. 25)$$

$$p.p. \forall t \in [0, T],$$

$$\beta(t) \in K, \text{ pour tout } t \in [0, T],$$

$$\left(\dot{\beta}(t), \xi - \beta(t) \right)_{L^2(\Omega)} + a(\beta(t), \xi - \beta(t)) \geq (S(\varepsilon(u(t)), \beta(t)), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \xi \in K \quad (II. 1. 26)$$

$$(\ddot{u}(t), v)_{V' \times V} + (\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(\dot{u}(t), v) = (f(t), v)_{V' \times V} \quad \forall v \in V, \text{ p.p. } t \in [0, T]. \quad (II. 1. 27)$$

$$u(0) = u_0, \dot{u}(0) = v_0, \beta(0) = \beta_0. \quad (II. 1. 28)$$

Nous notons que le problème variationnel P_V est formulé en termes de champ de déplacement, champ du tenseur des contraintes et champ d'endommagement.

2.2 Existence et unicité de la solution

Théorème II. 2. 1. Nous supposons que les hypothèses (II. 1. 11) – (II. 1. 20) sont satisfaites.

Alors, il existe une solution unique (u, σ, β) du problème P_V qui satisfait

$$u \in H^1(0, T; V) \cap C^1(0, T; H), \quad \ddot{u} \in L^2(0, T; V') \quad (II. 2. 1)$$

$$\sigma \in L^2(0, T; \mathcal{H}), \quad \text{Div } \sigma \in L^2(0, T; V'), \quad (II. 2. 2)$$

$$\beta \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)). \quad (II. 2. 3)$$

Les fonctions u , σ et β qui satisfont (II. 1. 25)-(II. 1. 26) s'appellent une solution faible du problème de contact. Nous concluons que sous les hypothèses (II. 1. 10)-(II. 1. 20), le problème mécanique (II. 1. 1)-(II. 1. 9) a une solution faible unique de régularité donnée par (II. 2. 1)-(II. 2. 3).

la démonstration du théorème II. 2. 1 se fait en plusieurs étapes. Nous supposons que les hypothèses du théorème II. 2. 1 sont vérifiées, C est une constante positive qui dépend de $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3, \mathcal{A}, \mathcal{G}, S, p_\nu, p_\tau$ et T mais ne dépend pas de t , ni du reste des données, dont la valeur varie d'une place à l'autre.

Soit $\eta \in L^2(0, T; V')$. Dans la première étape, on considère le problème variationnel suivant.

Problème PV_η . Trouver le champ de déplacement $u_\eta : [0, T] \longrightarrow V$ tel que :

$$\begin{aligned} (\ddot{u}_\eta(t), v)_{V' \times V} + (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_\eta(s)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(\dot{u}_\eta(t), v) + (\eta(t), v)_{V' \times V} &= (f(t), v)_{V' \times V} \\ \forall v \in V, \text{ p.p. } t \in [0, T], \end{aligned} \quad (II. 2. 4)$$

$$u_\eta(0) = u_0, \quad \dot{u}_\eta(0) = v_0. \quad (II. 2. 5)$$

Nous avons le résultat suivant.

Lemme II. 2. 1. Il existe une solution unique du problème PV_η qui satisfait la régularité (II. 2. 1).

Démonstration. En utilisant le théorème de représentation de Riesz, nous définissons l'opérateur $A : V \longrightarrow V'$

$$(Au, v)_V = (\mathcal{A}\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(u, v), \quad (II. 2. 6)$$

Pour tout $u, v \in V, t \in [0, T]$. Soient $u_1, u_2 \in V$. En utilisant (II. 2. 6) et la définition de j donnée par (II. 1. 23), nous trouvons:

$$\begin{aligned} (Au_1 - Au_2, u_1 - u_2)_{V' \times V} &= (\mathcal{A}\varepsilon(u_1) - \mathcal{A}\varepsilon(u_2), \varepsilon(u_1 - u_2))_{\mathcal{H}} \\ &+ \int_{\Gamma_3} (p_\nu(u_{1\nu}) - p_\nu(u_{2\nu})) (u_{1\nu} - u_{2\nu}) da \\ &+ \int_{\Gamma_3} (p_\tau(u_{1\tau}) - p_\tau(u_{2\tau})) \cdot (u_{1\tau} - u_{2\tau}) da. \end{aligned}$$

D'après (II. 1. 11), (II. 1. 15), et (II. 1. 21), nous obtenons

$$(Au_1 - Au_2, u_1 - u_2)_{V' \times V} \geq m_{\mathcal{A}} |u_1 - u_2|_V^2. \quad (II. 2. 7)$$

En utilisant (II. 2. 6) et (II. 1. 23), il vient que

$$\begin{aligned} (Au_1 - Au_2, v)_{V' \times V} &= (\mathcal{A}\varepsilon(u_1) - \mathcal{A}\varepsilon(u_2), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \\ &+ \int_{\Gamma_3} (p_\nu(u_{1\nu}) - p_\nu(u_{2\nu})) v_\nu da \\ &+ \int_{\Gamma_3} (p_\tau(u_{1\tau}) - p_\tau(u_{2\tau})) \cdot v_\tau da. \end{aligned}$$

Pour tout $v \in V$, par (I. 1. 6) et (II. 1. 11), nous déduisons que

$$\begin{aligned} |Au_1 - Au_2|_{V'} &\leq L_A |u_1 - u_2|_V + C_0 |p_\nu(u_{1\nu}) - p_\nu(u_{2\nu})|_{L^2(\Gamma_3)} \\ &+ C_0 |p_\tau(u_{1\tau}) - p_\tau(u_{2\tau})|_{L^2(\Gamma_3)^d}. \end{aligned} \quad (II. 2. 8)$$

L'inégalité (II. 2. 8) et les hypothèses (II. 1. 15)-(II. 1. 16) impliquent que l'opérateur $A : V \longrightarrow V'$ est continu donc il est hemicontinu. L'inégalité (II. 2. 7) indique que l'opérateur A est fortement monotone sur V . Nous choisissons $u_2 = 0_V$ dans (II. 2. 7) nous obtenons

$$(Au_1, u_1)_{V' \times V} \geq m_{\mathcal{A}} |u_1|_V^2 - |A0_V|_{V'} |u_1|_V$$

On a

$$2 |A0_V|_{V'} |u_1|_V \leq |A0_V|_{V'}^2 + |u_1|_V^2$$

donc

$$-\left| \frac{1}{\sqrt{m_{\mathcal{A}}}} A0_V \right|_{V'} |\sqrt{m_{\mathcal{A}}}| \geq -\frac{1}{2m_{\mathcal{A}}} |A0_V|_{V'}^2 - \frac{m_{\mathcal{A}}}{2} |u_1|_V^2$$

nous trouvons

$$(Au_1, u_1)_{V' \times V} \geq m_A |u_1|_V^2 - \frac{1}{2m_A} |A0_V|_{V'}^2 - \frac{m_A}{2} |u_1|_V^2$$

et donc

$$(Au_1, u_1)_{V' \times V} \geq \frac{1}{2} m_A |u_1|_V^2 - \frac{1}{2m_A} |A0_V|_{V'}^2 \quad \forall u_1 \in V.$$

Nous posons $\omega = \frac{m_A}{2}$, $\lambda = -\frac{|A0_V|_{V'}^2}{2m_A}$, donc A satisfait la condition (I. 2. 12), puis, nous choisissons $u_2 = 0_V$ dans (II. 2. 8) et en utilisant (II, 1, 15) et (II, 1, 16), nous trouvons

$$|Au_1|_{V'} \leq C(|u_1|_V + 1) \quad \forall u_1 \in V,$$

avec $C > 0$, donc A satisfait la condition (I. 2. 13). Finalement, d'après (II. 1. 18) et (II. 1. 19), nous déduisons que

$$f - \eta \in L^2(0, T; V'),$$

$$v_0 \in H.$$

Donc, il est clair d'après le théorème I. 2. 3 qu'il existe une fonction unique v_η satisfait

$$v_\eta \in L^2(0, T; V) \cap C(0, T; H), \dot{v}_\eta \in L^2(0, T; V'), \quad (II. 2. 9)$$

$$\dot{v}_\eta(t) + Av_\eta(t) + \eta(t) = f(t) \quad p.p. \ t \in [0, T], \quad (II. 2. 10)$$

$$v_\eta(0) = v_0. \quad (II. 2. 11)$$

Soit $u_\eta : [0, T] \longrightarrow V$ la fonction définie par

$$u_\eta(t) = \int_0^t v_\eta(s) ds + u_0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (II. 2. 12)$$

Il vient de (II. 2. 6) et (II. 2. 9) – (II. 2. 11) que u_η est une solution du problème variationnel PV_η et elle satisfait la régularité exprimée dans (II. 2. 1). Ce qui conclut la partie existence du lemme II. 2. 1. L'unicité de la solution vient de l'unicité de la solution du problème (II. 2. 10) – (II. 2. 11), grâce au théorème I. 2. 3.

Deuxième étape, soit $\theta \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ donné, on considère le problème variationnel pour le champ d'endommagement suivant.

Problème PV_θ . Trouver le champ d'endommagement $\beta_\theta : [0, T] \longrightarrow H^1(\Omega)$ tel que

$$\begin{aligned} \beta_\theta(t) \in K, \quad & \left(\dot{\beta}_\theta(t), \xi - \beta_\theta(t) \right)_{L^2(\Omega)} + a(\beta_\theta(t), \xi - \beta_\theta(t)) \\ & \geq (\theta(t), \xi - \beta_\theta(t))_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi \in K \text{ p.p. } t \in [0, T], \end{aligned} \quad (II. 2. 13)$$

$$\beta_\theta(0) = \beta_0. \quad (II. 2. 14)$$

Pour résoudre le problème PV_θ , on utilise un résultat standard sur les inégalités variationnelles paraboliques [32, p. 47].

Lemme II. 2. 2. Le problème PV_θ a une solution unique tel que

$$\beta_\theta \in H^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)). \quad (II. 2. 15)$$

Démonstration. L'inclusion de $(H^1(\Omega), |\cdot|_{H^1(\Omega)})$ dans $(L^2(\Omega), |\cdot|_{L^2(\Omega)})$ est continue et $H^1(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$. Nous notons par $(H^1(\Omega))'$ l'espace de dual de $H^1(\Omega)$. $H^1(\Omega)$ est identifié avec $L^2(\Omega)$ et avec son propre dual, nous pouvons écrire le triple de Gelfand

$$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset (H^1(\Omega))'.$$

Nous utilisons la notation $(\cdot, \cdot)_{(H^1(\Omega))' \times H^1(\Omega)}$ pour représenter le crochet de dualité entre $(H^1(\Omega))'$ et $H^1(\Omega)$. Nous avons :

$$(\beta, \xi)_{(H^1(\Omega))' \times H^1(\Omega)} = (\beta, \xi)_{L^2(\Omega)} \quad \forall \beta \in L^2(\Omega), \xi \in H^1(\Omega).$$

Nous notons que K est un ensemble fermé, convexe dans $H^1(\Omega)$. Puis, en utilisant la définition (II. 1. 21) de la forme bilinéaire et $\beta_0 \in K$ dans (II. 1. 20), il est facile de voir que le lemme II. 2. 2 est une conséquence du théorème I. 2. 2.

Dans la troisième étape, nous utilisons le champ de déplacement u_η obtenu dans le lemme II. 2. 1 et le champ d'endommagement β_θ obtenu dans le lemme II. 2. 2 pour construire le problème de Cauchy associé de champ du tenseur des contraintes.

Problème $PV_{\sigma\eta\theta}$. Trouver le champ du tenseur des contrainte $\sigma_{\eta\theta} : [0, T] \longrightarrow \mathcal{H}$ tel que

$$\sigma_{\eta\theta}(t) = \mathcal{E}(\varepsilon(u_\eta(t)), \beta_\theta(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma_{\eta\theta}(s), \varepsilon(u_\eta(s))) ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (II. 2. 16)$$

Dans l'étude du problème $PV_{\sigma\eta\theta}$ nous avons le résultat suivant.

Lemme II. 2. 3. Il existe une solution unique du problème $PV_{\sigma\eta\theta}$ qui satisfait

$$\sigma_{\eta\theta} \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{H}).$$

De plus, si σ_i , u_i et β_i représentent les solutions des problèmes $PV_{\sigma\eta_i\theta_i}$, PV_{η_i} et PV_{θ_i} , respectivement, pour $(\eta_i, \theta_i) \in L^2(0, T; V') \times L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $i = 1, 2$, il existe $C > 0$ tel que

$$|\sigma_1(t) - \sigma_2(t)|_{\mathcal{H}}^2 \leq C \left(|u_1(t) - u_2(t)|_V^2 + \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V^2 ds + |\beta_1 - \beta_2|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (II. 2. 17)$$

Démonstration. Soit $\Lambda_{\eta\theta} : L^2(0, T; \mathcal{H}) \longrightarrow L^2(0, T; \mathcal{H})$ est un opérateur défini par

$$\Lambda_{\eta\theta}\sigma(t) = \mathcal{E}(\varepsilon(u_\eta(t)), \beta_\theta(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s), \varepsilon(u_\eta(s))) ds, \quad \forall \sigma \in L^2(0, T; \mathcal{H}) \text{ et } t \in [0, T]. \quad (II. 2. 18)$$

Pour $\sigma_1, \sigma_2 \in L^2(0, T; \mathcal{H})$ en utilisant (II. 2. 18) et (II. 1. 14), nous obtenons

$$|\Lambda_{\eta\theta}\sigma_1(t) - \Lambda_{\eta\theta}\sigma_2(t)|_{\mathcal{H}} \leq L_{\mathcal{G}} \int_0^t |\sigma_1(s) - \sigma_2(s)|_{\mathcal{H}} ds.$$

Il résulte de cette inégalité que pour p assez grand, d'une puissance de l'opérateur $\Lambda_{\eta\theta}$ est une contraction sur l'espace de Banach $L^2(0, T; \mathcal{H})$ et, par conséquent, il existe un élément unique $\sigma_{\eta\theta} \in L^2(0, T; \mathcal{H})$ tel que $\Lambda_{\eta\theta}\sigma_{\eta\theta} = \sigma_{\eta\theta}$. Aussi, $\sigma_{\eta\theta}$ est unique solution du problème $\Lambda_{\sigma\eta\theta}$, et en utilisant (II. 2. 18), la régularité de u_η , β_θ et les propriétés des opérateurs $\mathcal{E}$ et $\mathcal{G}$, nous obtenons $\sigma_{\eta\theta} \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{H})$. Nous considérons $(\eta_1, \theta_1), (\eta_2, \theta_2) \in L^2(0, T; V') \times L^2(0, T; L^2(\Omega))$ pour $u_{\eta_i} = u_i$, $\sigma_{\eta_i\theta_i} = \sigma_i$ et $\beta_{\theta_i} = \beta_i$.

Nous avons

$$\sigma_i(t) = \mathcal{E}(\varepsilon(u_i(t)), \beta_i(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma_i(s), \varepsilon(u_i(s))) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

et, en utilisant les propriétés (II. 1. 12) et (II. 1. 14) de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{G}$, nous trouvons

$$\begin{aligned} |\sigma_1(t) - \sigma_2(t)|_{\mathcal{H}}^2 &\leq C(|u_1(t) - u_2(t)|_V^2 + |\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &+ \int_0^t |\sigma_1(s) - \sigma_2(s)|_{\mathcal{H}}^2 ds + \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V^2 ds), \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Nous utilisons le lemme de Gronwall, nous trouvons (II. 2. 17).

En considérant les propriétés de l'opérateur $\mathcal{G}$, l'opérateur $\mathcal{E}$ et la fonction $\mathcal{S}$, $t \in [0, T]$, nous considérons l'opérateur $\Lambda : L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega)) \longrightarrow L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$, $\forall (\eta, \theta) \in L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$ l'élément $\Lambda(\eta, \theta) \in L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$ défini par

$$\Lambda(\eta, \theta)(t) = (\Lambda^1(\eta, \theta)(t), \Lambda^2(\eta, \theta)(t)) \in V' \times L^2(\Omega), \quad (II. 2. 19)$$

défini par les égalités

$$\begin{aligned} (\Lambda^1(\eta, \theta)(t), v)_V &= (\mathcal{E}(\varepsilon(u_\eta(t)), \beta_\theta(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + \left(\int_0^t \mathcal{G}(\sigma_{\eta\theta}(s), \varepsilon(u_\eta(s))) ds, \varepsilon(v) \right)_{\mathcal{H}} \\ &\quad \forall v \in V, t \in [0, T], \end{aligned} \quad (II. 2. 20)$$

$$\Lambda^2(\eta, \theta)(t) = \mathcal{S}(\varepsilon(u_\eta(t)), \beta_\theta(t)), \quad t \in [0, T]. \quad (II. 2. 21)$$

Pour tout $(\eta, \theta) \in L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$, u_η , β_η et $\sigma_{\eta\theta}$ représentent le champ de déplacement, le champ d'endommagement et le champ du tenseur des contraintes obtenus les lemmes (II. 2. 1), (II. 2. 2), (II. 2. 3) respectivement.

Nous avons le résultat suivant.

Lemme II. 2. 4. l'opérateur Λ a une point fixe unique $(\eta^*, \theta^*) \in L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$ tel que $\Lambda(\eta^*, \theta^*) = (\eta^*, \theta^*)$.

Démonstration. Soient $(\eta, \theta) \in L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$, $(\eta_1, \theta_1), (\eta_2, \theta_2) \in L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$ Nous utilisons les notations $u_{\eta_i} = u_i$, $\dot{u}_{\eta_i} = v_{\eta_i}$, $\sigma_{\eta_i\theta_i} = \sigma_i$ et $\beta_{\theta_i} = \beta_i$, pour $i = 1, 2$. En utilisant (I. 2. 6), (II. 1. 12), et (II. 1. 14). nous avons

$$\begin{aligned} |\Lambda^1(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda^1(\eta_2, \theta_2)(t)|_{V'}^2 &\leq (L_{\mathcal{E}}(|\varepsilon(u_1(t)) - \varepsilon(u_2(t))|_{\mathcal{H}} + |\beta_1(t) - \beta_2(t)|) + \\ &\quad L_{\mathcal{G}} \int_0^t (|\sigma_1(s) - \sigma_2(s)| + |u_1(s) - u_2(s)|) ds)^2 \end{aligned}$$

$$\leq C \left(|u_1(t) - u_2(t)|_V^2 + |\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t |\sigma_1(s) - \sigma_2(s)|_{\mathcal{H}}^2 ds + \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V^2 ds \right). \quad (II. 2. 22)$$

D'après (II. 2. 17) nous obtenons

$$\begin{aligned} & |\Lambda^1(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda^1(\eta_2, \theta_2)(t)|_{V'} \\ \leq & C \left(|u_1(t) - u_2(t)|_V^2 + \int_0^t |u_1(t) - u_2(t)|_V^2 ds + |\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t |\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right) \end{aligned} \quad (II. 2. 23)$$

De la même manière, de (II. 2. 21) et (II. 1. 13) il vient que

$$\begin{aligned} & |\Lambda^2(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda^2(\eta_2, \theta_2)(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \leq & C \left(|u_1(t) - u_2(t)|_V^2 + |\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned} \quad (II. 2. 24)$$

En procédant de la façon que pour établir (II. 2. 23) et (II. 2. 24), on obtient

$$\begin{aligned} & |\Lambda(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda(\eta_2, \theta_2)(t)|_{V' \times L^2(\Omega)}^2 \\ \leq & C \left(|u_1(t) - u_2(t)|_V^2 + \int_0^t |u_1(t) - u_2(t)|_V^2 ds + \int_0^t |\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 ds + |\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \end{aligned} \quad (II. 2. 25)$$

D'après (II. 2. 4) nous obtenons

$$\begin{aligned} (\dot{v}_1, v_1)_{V' \times V} + (A\varepsilon(v_1(t)), \varepsilon(v_1(t)))_{\mathcal{H}} + j(v_1(t), v_1) + (\eta_1(t), v_1)_{V' \times V} &= (f(t), v_1)_{V' \times V} \\ \forall v_1 \in V, \text{ p.p. } t \in [0, T], \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

et

$$\begin{aligned} (\dot{v}_2, v_2)_{V' \times V} + (A\varepsilon(v_2(t)), \varepsilon(v_2(t)))_{\mathcal{H}} + j(v_2(t), v_2) + (\eta_2(t), v_2)_{V' \times V} &= (f(t), v_2)_{V' \times V} \\ \forall v_2 \in V, \text{ p.p. } t \in [0, T], \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

donc

$$\begin{aligned}
 (\dot{v}_1 - \dot{v}_2, v_1 - v_2)_{V' \times V} + (A\varepsilon(v_1) - \varepsilon(v_2), \varepsilon(v_1 - v_2))_{\mathcal{H}} + j(v_1, v_1 - v_2) - j(v_2, v_1 - v_2) \\
 = -(\eta_1 - \eta_2, v_1 - v_2)_{V' \times V}.
 \end{aligned}
 \tag{II. 2. 26}$$

En utilisant (II. 1. 15), (II. 1. 16) et (II. 1. 23) nous déduisons que

$$j(v_1, v_1 - v_2) - j(v_2, v_1 - v_2) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T]. \tag{II. 2. 27}$$

Et d'après (II. 2. 26) et (II. 2. 27) on a

$$(\dot{v}_1 - \dot{v}_2, v_1 - v_2)_{V' \times V} + (A\varepsilon(v_1(t)) - \varepsilon(v_2(t)), \varepsilon(v_1 - v_2))_{\mathcal{H}} \leq -(\eta_1 - \eta_2, v_1 - v_2)_{V' \times V}.$$

En intégrant l'inégalité précédente par rapport au temps, en utilisant les conditions initiales $v_1(0) = v_2(0) = v_0$ et la condition (II. 1. 11) pour trouver.

$$\begin{aligned}
 m_A \int_0^t |v_1 - v_2|_V^2 ds &\leq - \int_0^t (\eta_1 - \eta_2, v_1(s) - v_2(s))_{V' \times V} ds, \quad \forall t \in [0, T], \\
 &\leq - \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V'} |v(s) - v(s)|_V ds,
 \end{aligned}$$

et donc

$$2m_A \int_0^t |v_1 - v_2|^2 ds \leq - \int_0^t 2 |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V'} |v(s) - v(s)|_V ds,$$

en utilisant l'inégalité $2ab \leq \frac{a^2}{m_A} + m_A b^2$, nous obtenons

$$\int_0^t |v_1 - v_2|^2 ds \leq C \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V'}^2 ds \quad \forall t \in [0, T]. \tag{II. 2. 28}$$

D'autre part, de (II. 2. 13) nous déduisons

$$\begin{aligned}
 (\dot{\beta}_1 - \dot{\beta}_2, \beta_1 - \beta_2)_{L^2(\Omega)} + a(\beta_1 - \beta_2, \beta_1 - \beta_2) \\
 \leq (\theta_1 - \theta_2, \beta_1 - \beta_2)_{L^2(\Omega)} \quad p.p. \quad t \in [0, T]
 \end{aligned}$$

En intégrant l'inégalité précédente par rapport au temps, en utilisant les conditions initiales $\beta_1(0) = \beta_2(0) = \beta_0$ et l'inégalité $a(\beta_1 - \beta_2, \beta_1 - \beta_2) \geq 0$. On a

$$(\dot{\beta}_1 - \dot{\beta}_2, \beta_1 - \beta_2)_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\beta_1 - \beta_2|_{L^2(\Omega)}^2,$$

et donc

$$\frac{1}{2} |\beta_1 - \beta_2|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t a(\beta_1 - \beta_2, \beta_1 - \beta_2) ds \leq \int_0^t (\theta_1 - \theta_2, \beta_1 - \beta_2)_{L^2(\Omega)} ds.$$

Ce qui implique que

$$\frac{1}{2} |\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_0^t (\theta_1(s) - \theta_2(s), \beta_1(s) - \beta_2(s))_{L^2(\Omega)} ds,$$

donc

$$\begin{aligned} |\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \int_0^t |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ &\quad + \int_0^t |\beta_1(s) - \beta_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds, \end{aligned}$$

cette inégalité combinée avec l'inégalité de Gronwall nous donnent

$$|\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_0^t |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (II. 2. 29)$$

On a $u_1(0) = u_2(0) = u_0$, donc

$$|u_1(t) - u_2(t)| \leq \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)| ds$$

Nous utilisons l'inégalité précédente et (II. 2. 25) pour obtenir

$$\begin{aligned} |\Lambda(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda(\eta_2, \theta_2)(t)|_{V' \times L^2(\Omega)}^2 &\leq C \left(\int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds + |\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + \right. \\ &\quad \left. \int_0^t |\beta_1(s) - \beta_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right) \end{aligned}$$

Il vient donc de l'inégalité précédente, des évaluations (II. 2. 28) et (II. 2. 29)

$$|\Lambda(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda(\eta_2, \theta_2)(t)|_{V' \times L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^t |(\eta_1, \theta_1)(s) - (\eta_2, \theta_2)(s)|_{V' \times L^2(\Omega)}^2 ds.$$

On a

$$\begin{aligned}
 |\Lambda^2(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda^2(\eta_2, \theta_2)(t)|_{V' \times L^2(\Omega)}^2 &\leq C \int_0^t |\Lambda(\eta_1, \theta_1)(r) - \Lambda(\eta_2, \theta_2)(r)|_{V' \times L^2(\Omega)}^2 dr \\
 &\leq C^2 \int_0^t \int_0^s |(\eta_1, \theta_1)(s) - (\eta_2, \theta_2)(s)|_{V' \times L^2(\Omega)}^2 ds dr \\
 &\leq \frac{C^2 T^2}{2} |(\eta_1, \theta_1)(s) - (\eta_2, \theta_2)(s)|_{V' \times L^2(\Omega)}^2.
 \end{aligned}$$

En réitérant cette inégalité m fois on obtient:

$$\begin{aligned}
 |\Lambda^m(\eta_1, \theta_1) - \Lambda^m(\eta_2, \theta_2)|_{L^2(0, T; V \times L^2(\Omega))}^2 \\
 \leq \frac{C^m T^m}{m!} |(\eta_1, \theta_1) - (\eta_2, \theta_2)|_{L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))}^2
 \end{aligned}$$

pour m suffisant grand Λ^m est une contraction sur l'espace de Banach $L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$, et donc Λ a un point fixe unique.

Maintenant, on a toutes les données qui prouvent la théorème II. 2. 1.

Démonstration. De l'existence. Soit $(\eta^*, \theta^*) \in L^2(0, T; V \times L^2(\Omega))$ est un point fixe de Λ défini par (II. 2. 19) – (II. 2. 21) et $u = u_{\eta^*}$, $\beta = \beta_{\theta^*}$ et $\sigma_{\eta^* \theta^*}$ sont des solutions du problèmes PV_{η^*} , PV_{θ^*} et $PV_{\sigma_{\eta^* \theta^*}}$ pour $\eta = \eta^*$ et $\theta = \theta^*$.

Soit

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \sigma_{\eta^* \theta^*} \\
 &= \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{E}(\varepsilon(u(t)), \beta(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma_{\eta^* \theta^*}(s), \varepsilon(u(s))) ds \\
 &= \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{E}(\varepsilon(u(t)), \beta(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(s)), \varepsilon(u_{\eta^*}(s))) ds,
 \end{aligned}$$

donc on trouve (II. 1. 25).

Et d'autre part

$$\Lambda^2(\eta^*, \theta^*) = \theta^*,$$

ce qui implique

$$\mathcal{S}(\varepsilon(u(t)), \beta(t)) = \theta^*,$$

et

$$(\mathcal{S}(\varepsilon(u(t)), \beta(t)), \zeta - \beta(t))_{L^2(\Omega)} = (\theta^*(t), \zeta - \beta(t))_{L^2(\Omega)},$$

β_{θ^*} solution de PV_{θ} , donc on a

$$\left(\dot{\beta}(t), \xi - \beta(t) \right)_{L^2(\Omega)} + a(\beta(t), \xi - \beta(t)) \geq (\theta^*(t), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)}, \forall \xi \in K, t \in [0, T],$$

$$\beta(0) = \beta_0.$$

Donc

$$\begin{aligned} \left(\dot{\beta}(t), \xi - \beta(t) \right)_{L^2(\Omega)} + a(\beta(t), \xi - \beta(t)) &\geq (S(\varepsilon(u(t)), \beta(t)), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)}, \\ \forall \xi &\in K, t \in [0, T], \end{aligned}$$

$$\beta(0) = \beta_0.$$

et on trouve (II. 1. 26). On a u_{η^*} la solution de PV_{η} c'-à-d

$$\begin{aligned} (\ddot{u}(t), v)_{V' \times V} + (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(s)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(\dot{u}(t), v) + (\eta^*(t), v)_{V' \times V} &= (f(t), v)_{V' \times V} \\ \forall v &\in V, p.p. t \in [0, T], \end{aligned}$$

$$u(0) = u_0, \dot{u}(0) = v_0.$$

Et on a

$$\eta^*(t) = \mathcal{E}(\varepsilon(u(t)), \beta(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(s)), \varepsilon(u(s))) ds,$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} (\ddot{u}(t), v)_{V' \times V} + (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(s)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(\dot{u}(t), v) + (\mathcal{E}(\varepsilon(u(t)), \beta_{\theta}(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + \\ \left(\int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(s))) ds, \varepsilon(u(s)) \right), \varepsilon(v) \Big) = (f(t), v)_{V' \times V}, \end{aligned}$$

et on trouve (II. 1. 27) et (II. 1. 28). Et d'après les lemmes II. 2. 1, II. 2. 2 et II. 2. 3 on a les régularités (II. 2. 1) – (II. 2. 3).

L'unicité. la solution unique est la conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ défini par (II. 2. 19) – (II. 2. 21) et l'unicité de la solution des problèmes PV_{η} , PV_{θ} et $PV_{\sigma\eta\theta}$.

Chapitre 3

Problème élasto-viscoplastique sans frottement avec compliance normale

Le troisième chapitre du mémoire est consacré à l'étude mathématique d'un problème de contact sans frottement pour des matériaux élasto-viscoplastiques avec endommagement dans un processus quasi-statique. Le problème se formule comme un système formé par une équation variationnelle par rapport au champ de déplacement, une inéquation variationnelle du type parabolique par rapport au champ d'endommagement. Des résultats d'existence et d'unicité de la solution ont été considérés en utilisant la théorie des inéquations du type parabolique, et des arguments de point fixe.

3.1 Problème mécanique et formulation variationnelle

Problème P_2

Trouver le champ de déplacement $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow S_d$ et le champ d'endommagement $\beta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que.

$$\begin{aligned}
 \dot{\sigma} &= \mathcal{E}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}(\sigma, \varepsilon(u), \beta) & \text{dans } \Omega \times (0, T) & \quad (III. 1. 1) \\
 \dot{\beta} - k\Delta\beta + \partial\varphi_K(\beta) &\ni \mathcal{S}(\sigma, \varepsilon(u), \beta) & \text{dans } \Omega \times (0, T) & \quad (III. 1. 2) \\
 Div\sigma + f_0 &= 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T) & \quad (III. 1. 3) \\
 u &= 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T) & \quad (III. 1. 4) \\
 \sigma\nu &= f_2 & \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T) & \quad (III. 1. 5) \\
 -\sigma_\nu &= p_\nu(u_\nu - g), \quad \sigma_\tau = 0 & \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T) & \quad (III. 1. 6) \\
 \frac{\partial\beta}{\partial\nu} &= 0 & \text{sur } \Gamma \times (0, T) & \quad (III. 1. 7) \\
 u(0) = u_0, \quad \sigma(0) = \sigma_0, \quad \beta(0) = \beta_0 & & \text{dans } \Omega & \quad (III. 1. 8)
 \end{aligned}$$

Ici, la relations (III. 1. 1) représente la loi de comportement d'un matériau élasto-viscoplastique avec endommagement, (III. 1. 3) représente l'équation d'évolution du champ d'endommagement qui est gouvernée par la fonction source d'endommagement S , $\partial\varphi_K$ est le sous-différentiel de la fonction indicatrice de l'ensemble des fonctions d'endommagement admissibles K , les relations (III. 1. 3) représente l'équation d'équilibres pour le champ de déplacement. Les relations (III. 1. 4)-(III. 1. 5) sont les conditions de déplacement-traction. La relation (III. 1. 6) représente la condition de contact avec compliance normale sans frottement. (III. 1. 7) représente la condition aux limites de Neumann où $\frac{\partial\beta}{\partial\nu}$ est la dérivée normale de β . La relation (III. 1. 8) représente les conditions initiales du champ de déplacement u_0 , du champ des contraintes σ_0 et du champ d'endommagement β_0 .

Pour obtenir la formulation variationnelle du problème (III. 1. 1)-(III. 1. 8), nous avons le sous-espace fermé définit par:

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega)^d \quad / \quad v = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \right\},$$

Comme $mes(\Gamma_1) > 0$, l'inégalité de Korn est vérifiée, donc il existe une constante $C_k > 0$, qui dépend uniquement de Ω et Γ_1 , telle que:

$$|\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \geq C_k |v|_{H^1(\Omega)^d} \quad \forall v \in V.$$

La démonstration de l'inégalité de Korn peut être trouvée dans [22, p.79]. L'espace V muni du produit scalaire et de la norme associée donnée par:

$$(u, v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad , \quad |v|_V = |\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in V \quad (III. 1. 9)$$

Il vient que $|\cdot|_{H^1(\Omega)^d}$ et $|\cdot|_V$ sont des normes équivalentes sur V et par conséquent, $(V, |\cdot|_V)$ est un espace de Hilbert réel.

Dans l'étude du problème (III. 1. 1)-(III. 1. 8), on considère les hypothèses suivantes.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E} : \Omega \times S_d \rightarrow S_d, \\ (a) \quad \mathcal{E}_{ijkh} \in L^\infty(\Omega). \\ (b) \quad \mathcal{E}_{\sigma.\tau} = \sigma.\mathcal{E}_{\tau} \quad \forall \sigma, \tau \in S_d, \text{ p.p. dans } \Omega. \\ (c) \quad \mathcal{E}_{\sigma.\sigma} \geq \alpha |\sigma|^2 \quad \forall \sigma \in S_d, \text{ pour } \alpha > 0. \end{array} \right. \quad (III. 1. 10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{G} : \Omega \times S_d \times S_d \times \mathbb{R} \rightarrow S_d, \\ (a) \quad \text{Il existe une constante } L_{\mathcal{G}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad |\mathcal{G}(x, \varepsilon_1, \beta_1) - \mathcal{G}(x, \varepsilon_2, \beta_2)| \leq L_{\mathcal{G}} (|\sigma_1 - \sigma_2| + |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |\beta_1 - \beta_2|), \\ \quad \forall \sigma_1, \sigma_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S_d, \forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ (b) \quad \text{Pour tout } \sigma, \varepsilon \in S_d \text{ et } \beta \in \mathbb{R}, \\ \quad x \rightarrow \mathcal{G}(x, \sigma, \varepsilon, \beta) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega. \\ (c) \quad \text{L'application } x \rightarrow \mathcal{G}(x, 0, 0, 0) \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (III. 1. 11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{S} : \Omega \times S_d \times S_d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \\ (a) \quad \text{Il existe une constante } L_{\mathcal{S}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad |\mathcal{S}(x, \sigma_1, \varepsilon_1, \beta_1) - \mathcal{S}(x, \sigma_2, \varepsilon_2, \beta_2)| \leq L_{\mathcal{S}} (|\sigma_1 - \sigma_2| + |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |\beta_1 - \beta_2|), \\ \quad \forall \sigma_1, \sigma_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S_d, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ (b) \quad \text{Pour tout } \sigma, \varepsilon \in S_d \text{ et } \beta \in \mathbb{R}, \\ \quad x \rightarrow \mathcal{S}(x, \sigma, \varepsilon, \beta) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega. \\ (c) \quad \text{L'application } x \rightarrow \mathcal{S}(x, 0, 0, 0) \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (III. 1. 12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+, \\ (a) \text{ Il existe une constante } L_\nu > 0 \text{ tel que} \\ |p_\nu(x, r_1) - p_\nu(x, r_2)| \leq L_\nu |r_1 - r_2| \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ (b) (p_\nu(x, r_1) - p_\nu(x, r_2)) \cdot (r_1 - r_2) \geq 0 \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ (c) \text{ Pour tout } r \in \mathbb{R}, \\ r \longrightarrow p_\nu(., r) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3. \\ (d) \text{ Pour tout } r \leq 0, \text{ l'application } p_\nu(., r) = 0. \end{array} \right. \quad (III. 1. 13)$$

Nous supposons aussi que les forces volumiques et surfaciques satisfont la régularité

$$f_0 \in W^{1,2}(0, T; H), \quad f_2 \in W^{1,2}\left(0, T; L^2(\Gamma_2)^d\right). \quad (III. 1. 14)$$

La fonction g satisfait

$$g \in L^2(\Gamma_3), \quad g(x) \geq 0 \text{ p.p. } x \in \Gamma_3, \quad (III. 1. 15)$$

Le champ de déplacement initial satisfait

$$u_0 \in V. \quad (III. 1. 16)$$

Le champ des contraintes initial satisfait

$$\sigma_0 \in \mathcal{H}_1. \quad (III.1. 17)$$

Le champ d'endommagement initial satisfait

$$\beta_0 \in H^1(\Omega), \quad 0 < \beta_* \leq \beta_0 \leq 1, \text{ p.p. sur } \Omega. \quad (III. 1. 18)$$

Nous définissons la forme bilinéaire $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$a(\zeta, \varphi) = k \int_{\Omega} \nabla \zeta \cdot \nabla \varphi \, dx, \quad \forall \zeta, \varphi \in H^1(\Omega). \quad (III. 1. 19)$$

Ensuite, on note par $f : [0, T] \rightarrow V$ la fonction définie par

$$(f(t), v)_V = \int_{\Omega} f_0(t) \cdot v \, dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t) \cdot v \, da \quad \forall v \in V, t \in [0, T]. \quad (III. 1. 20)$$

Puis, la fonction $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$j(u, v) = \int_{\Gamma_3} p_{\nu} (u_{\nu} - g) v_{\nu} \, da, \quad \forall v, w \in V. \quad (III. 1. 21)$$

De (III. 1. 13) et (II. 1. 15), on remarque que les intégrales (III. 1. 21) sont bien définies et nous notons que la condition (II. 1. 14) implique

$$f \in W^{1,2}(0, T; V). \quad (III. 1. 22)$$

Finalement, nous supposons la condition de compatibilité

$$(\sigma_0, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(u_0, v) = (f(0), v)_V, \quad \forall v \in V. \quad (III. 1. 23)$$

En utilisant des arguments standards, nous obtenons la formulation variationnelle du problème mécanique (III. 1. 1)-(III. 1. 8)

Problème P_V : Trouver le champ de déplacement $u : [0, T] \rightarrow V$, le champ de contrainte $\sigma : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}_1$ et le champ d'endommagement $\beta : [0, T] \rightarrow H^1(\Omega)$ tels que

$$\dot{\sigma}(t) = \mathcal{E}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{G}(\sigma(t), \varepsilon(u(t)), \beta(t)) \quad p.p. \, t \in (0, T), \quad (III. 1. 24)$$

$$(\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(u(t), v) = (f(t), v)_V \quad \forall v \in V, \quad t \in (0, T) \quad (III. 1. 25)$$

$$\beta(t) \in K, \quad p.p. \, t \in [0, T],$$

$$\begin{aligned} & \left(\dot{\beta}(t), \xi - \beta(t) \right)_{L^2(\Omega)} + a(\beta(t), \xi - \beta(t)) \\ & \geq (S(\sigma(t), \varepsilon(u(t)), \beta(t)), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi \in K, \quad p.p. \, t \in (0, T), \end{aligned} \quad (III. 1. 26)$$

$$u(0) = u_0, \quad \sigma(0) = \sigma_0, \quad \beta(0) = \beta_0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (III. 1. 27)$$

Nous notons que le problème variationnel P_V est formulé en termes de champ de déplacement, champ de contrainte et champ d'endommagement.

3.2 L'existence et l'unicité de la solution

Théorème III.2.1. Nous supposons que les hypothèses (III. 1. 10)-(III. 1. 18) et (III. 1. 23) sont satisfaites.

Alors, il existe une solution unique $\{u, \sigma, \beta\}$ du problème PV . De plus, la solution satisfait

$$u \in W^{1,2}(0, T; V), \sigma \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{H}_1). \quad (III. 2. 1)$$

$$\beta \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)). \quad (III. 2. 2)$$

la démonstration du théorème III. 2. 1 se fait en plusieurs étapes, elle trouve dans [9, 14].

Soient $\eta = (\eta^1, \eta^2) \in L^2(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$. On a

$$\dot{\sigma}(t) = \mathcal{E}_\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{G}(\sigma(t), \varepsilon(u(t)), \beta(t)),$$

En intégrant l'équation précédente par rapport au temps, on trouve

$$\sigma_\eta(t) - \sigma_0 = \mathcal{E}_\varepsilon(u_\eta(t)) - \mathcal{E}_\varepsilon(u_0) + \int_0^t \eta^1(s) ds,$$

donc

$$\sigma_\eta(t) = \mathcal{E}_\varepsilon(u_\eta(t)) - \mathcal{E}_\varepsilon(u_0) + \int_0^t \eta^1(s) ds + \sigma_0$$

on pose

$$Z_\eta^1(t) = \int_0^t \eta^1(s) ds + \sigma_0 - \mathcal{E}_\varepsilon(u_0)$$

donc

$$Z_\eta^1 \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{H})$$

Dans la première étape, nous considérons le problème variationnel suivant.

Problème $PV_{\eta 1}$: Trouver le champ de déplacement $u_\eta : [0, T] \longrightarrow V$ et le champ de contrainte $\sigma_\eta : [0, T] \longrightarrow \mathcal{H}$ tels que

$$\sigma_\eta(t) = \mathcal{E}_\varepsilon(u_\eta(t)) + Z_\eta^1(t), \quad \forall t \in [0, T], \quad (III. 2. 3)$$

$$(\sigma_\eta(t), \varepsilon(v)) + j(u_\eta(t), v) = (f(t), v)_V, \quad (III. 2. 4)$$

$$u_\eta(0) = u_0, \quad \sigma_\eta(0) = \sigma_0. \quad (III. 2. 5)$$

Dans l'étude du problème $PV_{\eta 1}$, nous avons le résultat suivant.

Lemme III. 2. 1. Le problème $PV_{\eta 1}$ a une solution faible unique, telle que

$$u_\eta \in W^{1,2}(0, T; V), \quad \sigma_\eta \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{H}_1). \quad (III. 2. 6)$$

Démonstration. Soit $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme bilinéaire donnée par

$$a(u, v) = (\mathcal{E}\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}, \quad \forall u, v \in V.$$

De (III. 1. 19) et (III. 1. 10), nous obtenons que $a(.,.)$ est continu et coercive sur V .

De la définition de la fonctionnelle j donnée par (III. 1. 21), nous avons

$$j(u_1, u_1 - u_2) - j(u_2, u_1 - u_2) \geq 0, \quad \forall u_1, u_2 \in V, \quad (III. 2. 7)$$

$$j(u_1, v) - j(u_2, v) \leq C |u_1 - u_2|_V |v|_V, \quad \forall u_1, u_2 \in V. \quad (III. 2. 8)$$

De plus, l'utilisation du théorème de représentation de Riesz, nous pouvons définir un opérateur $B : V \longrightarrow V$ et un élément $f_\eta(t) \in V$ par

$$(Bu, v)_V = a(u, v) + j(u, v), \quad (III. 2. 9)$$

$$(f_\eta(t), v)_V = (f(t), v)_V - (Z_\eta^1(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}. \quad (III. 2. 10)$$

On a

$$\begin{aligned} (Bu_1 - Bu_2, u_1 - u_2)_V &= a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) + j(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \\ &= a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) + j(u_1, u_1 - u_2) - j(u_2, u_1 - u_2) \end{aligned} \quad (III. 2. 11)$$

Nous savons que a est coercive et d'après (III. 2. 7), nous trouvons

$$(Bu_1 - Bu_2, u_1 - u_2)_V \geq \alpha_0 |u_1 - u_2|_V^2, \quad \forall u_1, u_2 \in V, \quad (III. 2. 12)$$

i.e., que $B : V \longrightarrow V$ est un opérateur fortement monotone dans V .

En utilisant (III. 2. 8) et (III. 2. 9), nous obtenons

$$(Bu_1 - Bu_2, v)_V \leq C |u_1 - u_2|_V |v|_V, \quad \forall v \in V.$$

Donc

$$|Bu_1 - Bu_2|_V \leq C |u_1 - u_2|_V \quad (\text{III. 2. 13})$$

Ce qui indique que $B : V \longrightarrow V$ est de Lipschitz.

De (III. 2. 12), (III. 2. 13) et d'après le théorème I. 2. 1 il existe

$$u_\eta \in V, \text{ tel que } Bu_\eta(t) = f_\eta(t), \forall t \in [0, T].$$

On a $Z_\eta^1 \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{H})$ et $f_\eta \in W^{1,2}(0, T; V)$ donc $u_\eta \in W^{1,2}(0, T; V)$ et $\sigma_\eta \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{H}_1)$.

Deuxième étape, on considère le problème variationnel pour le champ d'endommagement suivant.

Problème $PV_{\eta 2}$: Trouver le champ d'endommagement $\beta_\eta : [0, T] \longrightarrow H^1(\Omega)$ tel que

$$\begin{aligned} \beta_\eta(t) \in K, \quad & \left(\dot{\beta}_\eta(t), \xi - \beta_\eta(t) \right)_{L^2(\Omega)} + a(\beta_\eta(t), \xi - \beta_\eta(t)) \\ & \geq (\eta^2(t), \xi - \beta_\eta(t))_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi \in K \text{ p.p. } t \in [0, T], \end{aligned} \quad (\text{III. 2. 14})$$

$$\beta_\eta(0) = \beta_0. \quad (\text{III. 2. 15})$$

Pour résoudre le problème $PV_{\eta 2}$, on utilise un résultat standard sur les inégalités variationnelles paraboliques.

Lemme III. 2. 2. Le problème $PV_{\eta 2}$ a une solution unique tel que

$$\beta_\eta \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)). \quad (\text{III. 2. 16})$$

Démonstration. L'inclusion de $(H^1(\Omega), |\cdot|_{H^1(\Omega)})$ dans $(L^2(\Omega), |\cdot|_{L^2(\Omega)})$ est continue et $H^1(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$. Nous notons par $(H^1(\Omega))'$ l'espace de dual de $H^1(\Omega)$. $H^1(\Omega)$ est identifié avec $L^2(\Omega)$ et avec son propre dual, nous pouvons écrire le triple de Gelfand

$$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset (H^1(\Omega))'.$$

Nous utilisons la notation $(\cdot, \cdot)_{(H^1(\Omega))' \times H^1(\Omega)}$ pour représenter le crochet de dualité entre $(H^1(\Omega))'$ et $H^1(\Omega)$. Nous avons :

$$(\beta, \xi)_{(H^1(\Omega))' \times H^1(\Omega)} = (\beta, \xi)_{L^2(\Omega)} \quad \forall \beta \in L^2(\Omega), \quad \xi \in H^1(\Omega).$$

Nous notons que K est un ensemble fermé, convexe dans $H^1(\Omega)$. Puis, en utilisant la définition (III. 1. 19) de la forme bilinéaire et $\beta_0 \in K$ dans (III. 1. 18), il est facile de voir que le lemme III. 2. 2 est une conséquence du théorème I. 2. 2.

Dans la troisième étape, nous utilisons le champ de déplacement u_η , le champ des contraintes σ_η obtenus dans le lemme III. 2. 1 et le champ d'endommagement β_η obtenu dans le lemme III. 2. 2.

Nous considérons l'espace $X = L^2(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$ avec $|\cdot|_X$ donnée par

$$|\eta|_X^2 = \int_0^t \left(|\eta^1(s)|_{\mathcal{H}}^2 + |\eta^2(s)|_{\mathcal{H}}^2 \right) ds, \quad \forall \eta = (\eta^1, \eta^2) \in X.$$

Nous définissons l'opérateur $\Lambda : X \longrightarrow X$ tel que

$$\Lambda(\eta)(t) = (\Lambda^1(\eta)(t), \Lambda^2(\eta)(t)). \quad (\text{III. 2. 17})$$

Défini par les égalités

$$\Lambda^1(\eta)(t) = \mathcal{G}(\sigma_\eta(t), \varepsilon(u_\eta(t)), \beta_\eta(t)) \quad (\text{III. 2. 18})$$

$$\Lambda^2(\eta)(t) = S(\sigma_\eta(t), \varepsilon(u_\eta(t)), \beta_\eta(t)). \quad (\text{III. 2. 19})$$

Nous avons le résultat suivant.

Lemme III. 2. 3. l'opérateur Λ a une point fixe unique $\eta = (\eta_*^1, \eta_*^2) \in L^2(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$ tel que $\Lambda(\eta_*^1, \eta_*^2) = (\eta_*^1, \eta_*^2)$.

Démonstration. Soient (η_1^1, η_1^2) et $(\eta_2^1, \eta_2^2) \in L^2(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$. Nous utilisons les notations $u_{\eta_i} = u_i$, $\sigma_{\eta_i} = \sigma_i$ et $\beta_{\eta_i} = \beta_i$, en utilisant (II. 1. 10), (III. 1. 11) et (III. 2. 18), nous avons

$$|\Lambda^1 \eta_1(t) - \Lambda^1 \eta_2(t)|_{\mathcal{H}} \leq L_{\mathcal{G}}(|\sigma_1(t) - \sigma_2(t)|_{\mathcal{H}} + |u_1(t) - u_2(t)|_V + |\beta_1(t) - \beta_2(t)|), \quad (\text{III. 2. 20})$$

et en utilisant (II. 1. 10), (III. 1. 12) et (III. 2. 19), nous obtenons

$$\left| \Lambda^2 (\eta_1^1, \eta_1^2) (t) - \Lambda^2 (\eta_2^1, \eta_2^2) (t) \right| \leq L_S (|\sigma_1 (t) - \sigma_2 (t)|_{\mathcal{H}} + |u_1 (t) - u_2 (t)|_V + |\beta_1 (t) - \beta_2 (t)|) \quad (III. 2. 21)$$

On a

$$\sigma_i (t) = \mathcal{E} \varepsilon (u_i (t)) + Z_i^1 (t), \quad (III. 2. 22)$$

$$(\sigma_i (t), \varepsilon (v)) + j (u_i (t), v) = (f (t), v)_V, \forall v \in V. \quad (III. 2. 23)$$

Il résulte de (II. 1. 10) et (III. 2. 22) que

$$|\sigma_1 (t) - \sigma_2 (t)|_{\mathcal{H}} \leq C |u_1 (t) - u_2 (t)|_V + |Z_1^1 (t) - Z_2^1 (t)|_{\mathcal{H}}, \quad \forall u_1, u_2 \in V. \quad (III. 2. 24)$$

D'après (III. 2. 22) et (III. 2. 23), nous trouvons

$$(\mathcal{E} \varepsilon (u_1) - \mathcal{E} \varepsilon (u_2), \varepsilon (u_1) - \varepsilon (u_2))_{\mathcal{H}} + j (u_1, u_1 - u_2) - j (u_2, u_1 - u_2) = (Z_1^1 - Z_2^1, \varepsilon (u_1) - \varepsilon (u_2))_{\mathcal{H}}. \quad (III. 2. 25)$$

de (III. 2. 25), (II. 1. 10) et (III. 2. 7) nous obtenons

$$(\mathcal{E} \varepsilon (u_1 (t)) - \mathcal{E} \varepsilon (u_2 (t)), \varepsilon (u_1 (t)) - \varepsilon (u_2 (t)))_{\mathcal{H}} \leq |Z_1^1 (t) - Z_2^1 (t)|_{\mathcal{H}} |u_1 (t) - u_2 (t)|_V. \quad (III. 2. 26)$$

l'hypothèse (III. 1. 10) et la relation (III. 2. 26) on obtient

$$\alpha |u_1 (t) - u_2 (t)|_V^2 \leq |Z_1^1 (t) - Z_2^1 (t)|_{\mathcal{H}} |u_1 (t) - u_2 (t)|_V$$

donc

$$\begin{aligned} |u_1 (t) - u_2 (t)|_V &\leq C |Z_1^1 (t) - Z_2^1 (t)|_{\mathcal{H}} \\ &\leq C |Z_1 - Z_2|_{\mathcal{H} \times L^2(\Omega)} \end{aligned} \quad (III. 2. 27)$$

On pose

$$\beta_\eta = Z_\eta^2,$$

donc

$$|\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Omega)} = |Z_1^2(t) - Z_2^2(t)|_{L^2(\Omega)} \quad (III. 2. 28)$$

On a

$$|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)|_{\mathcal{H} \times L^2(\Omega)} = |\Lambda^1\eta_1(t) - \Lambda^1\eta_2(t)|_{\mathcal{H}} + |\Lambda^2\eta_1(t) - \Lambda^2\eta_2(t)|_{L^2(\Omega)}, \quad (III. 2. 29)$$

on utilise dans (III. 2. 29), (III. 2. 20), (III. 2. 21), (III. 2. 24), (III. 2. 27), (III. 2. 28)

on obtient

$$\begin{aligned} |\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)|_{\mathcal{H} \times L^2(\Omega)} &\leq C |Z_1(t) - Z_2(t)|_{\mathcal{H} \times L^2(\Omega)} \\ &\leq C \left(\int_0^t |\eta_1^1(s) - \eta_2^1(s)|_{\mathcal{H}} ds + \int_0^t |\eta_1^2(s) - \eta_2^2(s)|_{L^2(\Omega)} ds \right) \\ &\leq C \int_0^t (|\eta_1^1(s) - \eta_2^1(s)|_{\mathcal{H}} + |\eta_1^2(s) - \eta_2^2(s)|_{L^2(\Omega)}) ds \\ &\leq C \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{\mathcal{H} \times L^2(\Omega)} ds, \end{aligned}$$

de plus, on a

$$\begin{aligned} |\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)|_{\mathcal{H} \times L^2(\Omega)}^2 &\leq C \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{\mathcal{H} \times L^2(\Omega)}^2 ds \\ &\leq Ct |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{\mathcal{H} \times L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |\Lambda^2\eta_1(t) - \Lambda^2\eta_2(t)|_{\mathcal{H} \times L^2(\Omega)}^2 &\leq C \int_0^t |\Lambda\eta_1(s) - \Lambda\eta_2(s)|_{\mathcal{H} \times L^2(\Omega)}^2 ds \\ &\leq C^2 \int_0^t \int_0^s |\eta_1(r) - \eta_2(r)|_{\mathcal{H} \times L^2(\Omega)}^2 dr ds \\ &\leq \frac{C^2 t^2}{2} |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{\mathcal{H} \times L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

En réitérant cette inégalité m fois on obtient:

$$\begin{aligned} |\Lambda^m\eta_1 - \Lambda^m\eta_2|_{L^2(0,T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))}^2 &\leq \frac{C^m T^m}{m!} |\eta_1 - \eta_2|_{L^2(0,T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))}^2 \end{aligned}$$

ainsi, pour m suffisant grand Λ^m est une contraction sur l'espace de Banach $L^2(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$, donc Λ a un point fixe unique.

Maintenant, on a toutes les données qui prouvent la Théorème III.2.1.

Démonstration. de l'existence. Soit $(\eta_*^1, \eta_*^2) \in L^2(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$ est un point fixe de Λ défini par (III. 2. 17) – (III. 2. 19) et u, σ et β sont des solutions du problèmes PV_{η_1} , et PV_{η_2} pour $\eta = \eta_*$ respectivement i.e $u = u_{\eta_*}, \sigma = \sigma_{\eta_*}$ et $\beta = \beta_{\eta_*}$. Nous savons que $(u_{\eta_*}, \sigma_{\eta_*})$ est une solution de PV_{η_1} , donc

$$\sigma(t) = \mathcal{E}\varepsilon(u(t)) + Z_{\eta_*}^1(t), \quad \forall t \in [0, T],$$

$$u(0) = u_0, \sigma(0) = \sigma_0$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(t) &= \mathcal{E}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \dot{Z}_{\eta_*}^1(t), \quad \forall t \in [0, T] \\ &= \mathcal{E}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \eta_*^1(t). \end{aligned}$$

On pose

$$\eta_*^1(t) = \mathcal{G}(\sigma(t), \varepsilon(u(t)), \beta(t)).$$

Et on trouve (III. 1. 24).

Et d'autre part, β_{η_*} est une solution de PV_{η_2} pour $\eta = \eta_*$, donc

$$\begin{aligned} \beta_{\eta}(t) &\in K, \quad \left(\dot{\beta}(t), \xi - \beta(t) \right)_{L^2(\Omega)} + a(\beta(t), \xi - \beta(t)) \\ &\geq \left(\eta_*^2(t), \xi - \beta(t) \right)_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi \in K \text{ p.p. } t \in [0, T], \end{aligned}$$

$$\beta(0) = \beta_0$$

On pose

$$S(\sigma(t), \varepsilon(u(t)), \beta(t)) = \eta_*^2(t)$$

et on trouve (III. 1. 26) et (III. 1. 27). Et d'après les lemmes III. 2. 1, et II. 2. 2 on a les régularités (III. 2. 1) – (II. 2. 2).

Unicité. la solution unique est la conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ défini par (III. 2. 17) – (III. 2. 19) et l'unicité de la solution des problème PV_{η_1} , et PV_{η_2} .

Bibliographie

- [1] Y. Ayyad, M. Sofonea, Analysis of two dynamic frictionless contact problems for elastic-visco-plastic materials, *Edje*, vol. 2007 (2007), No. 55, pp. 1-17.
- [2] O. Chau, J.R. Fernandez-Garcia, W. Han, M. Sofonea, A frictionless contact problem for elastic-viscoplastic materials with normal compliance and damage, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 191 (2002), 5007-5026.
- [3] N. Cristescu, I. Suliciu, *Viscoplasticity*. Bucharest: Martinus Nijhoff Publishers, Editura Technica (1982).
- [4] G. Duvaut, J.L. Lions, *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*. Berlin: Springer-Verlage (1976).
- [5] G. Duvaut and J.L. Lions, *Les Inéquation en mécanique et en Physique*, Dunod (1972).
- [6] J.R. Fernandez-Garcia, M. Sofonea, J.M. Viano, A frictionless contact problem for elastic-viscoplastic materials with normal compliance, *Numerische Mathematik*, in press.
- [7] J.R. Fernandez-Garcia, W. Han, M Sofonea, J.M. Viano, Variational and numerical analysis of a frictionless contact problem for elastic-viscoplastic materials with internal state variable, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 54 (2001), 501-522.
- [8] J.R. Fernandez-Garcia, M. Sofonea, J.M.Viano. Analyse numérique d'un problème élasto-viscoplastique de contact sans frottement avec compliance normale, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t.331, Série I (2000) 323-328.

-
- [9] M. Frémond, K.L. Kuttler, B. Nedjar, M. Shillor, One-dimensional models of damage, *Adv. Math. Sci. Appl.*, 8 (2) (1998), 541-570.
 - [10] M. Frémond, B. Nedjar, Damage in concrete: the unilateral phenomenon, *Nuclear Engng Design*, 156 (1995), 323-335.
 - [11] M. Frémond, B. Nedjar, Damage, gradient of damage and principle of virtual work, *Int. J. Solids structures*, 33 (8) (1996), 1083-1103.
 - [12] W. Han, M. Shillor, M. Sofonea, Variational and numerical analysis of a quasistatic viscoelastic problem with normal compliance, friction and damage, *J. Comput. Appl. Math.*, 137 (2001), 377-398.
 - [13] W. Han, M. Sofonea, Evolutionary variational inequalities arising in viscoelastic contact problems, *SIAM J. Numer. Anal.*, 38 (2000), 556-579.
 - [14] W. Han, M. Sofonea, On a dynamic contact problem for elastic-visco-plastic materials, *Appl. Numer. Math.*, 57 (2007), 498-579.
 - [15] W. Han, M. Sofonea, Quasistatic contact problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity. (Studies in Advanced Mathematics, vol.30) Providence, RI: American Mathematical Society-International Press (2002).
 - [16] I.R. Ionescu, M. Sofonea, Functional and Numerical Methods in Viscoplasticity. Oxford: Oxford University Press (1994).
 - [17] N. Kikuchi, J.T. Oden, Contact problems in Elasticity : A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods, SIAM, Philadelphia (1988).
 - [18] A. Klarbring, A. Mikelic, M. Shillor, Frictional contact problems with normal compliance, *Int. J. Engrg. Sci.* 26 (1988) 811-832.
 - [19] J. T. Martins, J.T. Oden, Existence and uniqueness results for dynamic contact problems with nonlinear normal and friction interface laws, *Nonlin. Anal. TMA* 11 (1987) 407-428.

- [20] J. Necas, I. Hlavacek, Mathematical Theory of Elastic and Elastoplastic Bodies: An Introduction, Elsevier, Amsterdam, 1981.
- [21] M. Raous, M. Jean and J.J. Moreau (Eds), Contact Mechanics, Plenum Press, New York (1995).
- [22] M. Rochdi, M. Shillor, M. Sofonea, Analysis of a quasistatic viscoelastic problem with friction and damage, Adv. Math. Sci. Appl., 10 (2002), 173-189.
- [23] M. Rochdi, M. Shillor, M. Sofonea, A quasistatic contact problem with directional friction and damped response, Applicable Analysis, 68 (1998), 409-422.
- [24] M. Rochdi, M. Shillor, M. Sofonea, Quasistatic viscoelastic contact with normal compliance and friction, J. Elasticity 51 (1998) 105-126.
- [25] L. Selmani, N. Bensebaa, A frictionless contact problem with adhesion and damage in elasto-viscoplasticity, Rend. Sem. Mat. Univ. padova. 118 (2007), 49-71.
- [26] M. Selmani, B. Merouani, L. Selmani, Analysis of class of Frictional Contact Problem for the Bingham Fluid, Mediterr.j. 2 (2005), 113-124.
- [27] M. Selmani, L. Selmani, A Dynamic Frictionless contact problem with Adhesion and Damage, Bull. Polish Acad. Sci. Math., 55 (2007), 17-34.
- [28] L. Selmani, Thèse de doctorat d'état, étude variationnelle de quelques problèmes aux limites en viscoélasticité et viscoplasticité, Université F. Abbas de Sétif, (2002).
- [29] M. Shillor (ed), Recent Advances in Contact Mechanics, Mathematical and Computer Modelling, vol. 28 (1998), 4-8.
- [30] M. Sofonea, W. Han, M. Shillor, Analysis and Approximation of Contact Problems with Adhesion or Damage. (Pure and Applied Mathematics 276) New york: Chpman-hall / CRC Press (2006).
- [31] M. Sofonea, M. Shillor, Variational analysis of quasistatic viscoplastic contact problems with friction, Commun. Appl. Anal., 5 (2001), 135-151.