

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ FERHAT ABBAS SÉTIF 1



THÈSE

Présentée à la Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Pour l'obtention du diplôme de
DOCTORAT EN SCIENCES
Option : Mathématiques Appliquées

Par

HADJ AMMAR Tedjani

THÈME

Etude Variationnelle et Numérique de Quelques Problèmes de Contact Entre Deux Corps Déformables

Soutenu le : 03 /06 / 2015

Devant le jury composé de :

Mr. HEMICI Nacerdine	Prof. Université Ferhat Abbas de Sétif 1	Président
Mr. BENABDERRAHMANE Benyattou	Prof. Université Mohamed Boudiaf de M'Sila	Rapporteur
Mr. DRABLA Salah	Prof. Université Ferhat Abbas de Sétif 1	Co-Rapporteur
Mr. GASMI Abdelkader	Prof. Université Mohamed Boudiaf de M'Sila	Examineur
Mr. CHACHA Djamel Ahmed	Prof. Université Kasdi Merbeh de Ouargla	Invité

Dédicaces

Je dédie ce travail à . . .

Mes Parents

Ma Femme

Mon fils Riad

Mon fils Rabie

Ma fille Ratiba

Ma fille Rania

Mon fils Abdessalam

Ma fille Ibtissam

Mes sœurs et mes frères

Remerciements

Je remercie Dieu le tout puissant de m'avoir donné assez de courage pour accomplir ce travail.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance et mes remerciements les plus profonds à mon encadreur Monsieur **Benyattou Benabderrahmane** professeur à l'université de M'sila qui m'a proposé le sujet de ce travail son aide et ses conseils ont été pour moi un soutien très précieux. Je tiens plus à le remercier pour sa compétence, sa rigueur, ainsi que pour le caractère novateur de ses idées.

J'adresse mes remerciements les plus chaleureuses et sincères à mon co-encadreur Monsieur **Salah Drabla** professeur à l'université Ferhat Abbas Sétif 1, pour son aide et sa compétence m'ont encouragé à pour suivre mes travaux de recherche, on le remercie aussi à ses directions et la confiance qu'il m'a accordés et ses conseils.

Comme Je tiens à remercier vivement, mes professeur Monsieur **Hemici Nacerdine** professeur à l'université de Sétif 1, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury à ce thèse.

Je tiens à remercier **Gasmi Abdelkader** professeur à l'université de M'Sila pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu accorder à ma thèse en acceptant de participer au jury en tant qu'examineur.

Mes remerciements s'adressent mes professeur **Chacha Djamel Ahmed** , professeur à l'université de Ouargla d'avoir accepté de participer au jury comme invité.

Je tiens aussi à manifester toute ma gratitude envers tous les membres du conseil scientifique .

Mes remerciements aussi à toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Mes derniers et profonds remerciements vont à mes chers parents à qui je dédie ce travail ainsi qu'à toute ma famille et mes amis pour leur grand soutien.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction générale	v
Notations	viii
 partie I Etude théorique et numérique d'un problème statique de contact entre deux corps déformables	 1
1. Etude variationnelle d'un problème élastique de contact	3
1.1 Problème mécanique et formulation variationnelle classique	4
1.1.1 Position du problème non linéaire	4
1.1.2 Formulation variationnelle classique	7
1.1.3 Résultats d'existence et d'unicité	14
1.1.4 Résultats d'équivalence	15
1.2 Formulation variationnelle mixte	15
1.2.1 Position du problème linéaire	16
1.2.2 Formulation variationnelle mixte	17
1.2.3 Résultats d'existence et d'unicité	21
2. Etude numérique d'un problème élastique linéaire de contact	23
2.1 Espaces discrets	24
2.2 Problème discret	24
2.3 Formulation en point fixe	25
2.4 Formulations matricielles	33
2.4.1 Formulation matricielle classique	33
2.4.2 Formulation matricielle approché de point fixe sur les forces de contact	35
2.4.3 Algorithme de point fixe sur les forces de contact (APFF)	37
2.4.4 Simulation numérique	37
 partie II Etude théorique et approximation numérique d'un problème de contact entre deux corps électro-déformable	 40
3. Etude variationnelle et numérique d'un problème électro-élastique avec adhésion.	42
3.1 Etude variationnelle d'un problème électro-élastique avec adhésion	43
3.1.1 Position du problème	43
3.1.2 Formulation variationnelle	44
3.1.3 Résultats d'existence et d'unicité	49
3.1.4 Démonstration du Théorème 3.1	50
3.2 Approximation numérique d'un problème électro-élastique avec adhésion	54

3.2.1	La discrétisation complète	54
3.2.2	Formulation variationnelle approchée	54
3.2.3	L'estimation d'erreur du problème approché	55
4.	Etude variationnelle d'un problème électro-élasto-viscoplastique avec adhésion.	60
4.1	Formulation du problème	61
4.2	Formulation variationnelle	62
4.2.1	Résultats d'existence et d'unicité	69
4.3	Démonstration du Théorème 4.1	69
	Annexe	78
A.	Modélisation	80
A.1	Cadre physique	80
A.2	Lois de comportement	82
A.3	Conditions aux limites de contact	85
A.3.1	Conditions aux limites de contact de Signorini	86
A.3.2	Condition de contact avec compliance normale et adhésion	86
B.	Outils Mathématiques	89
B.1	Rappels sur les espaces de Hilbert	89
B.2	Inéquations variationnelles elliptiques	92
B.3	Espaces fonctionnels	95
B.3.1	Espaces de distributions	95
B.3.2	Espaces de Sobolev	97
B.3.3	Espaces H et $\mathcal{H}$	101
B.3.4	Espaces des fonctions à valeurs vectorielles	108

Introduction générale

La modélisation des problèmes de contact entre deux corps déformables ou entre un corps déformable et une base rigide, dépend essentiellement des propriétés mécaniques des matériaux considérés ainsi que des conditions aux limites de contact. Parmi les différents types de problèmes considérés, on peut citer les problèmes de contact unilatéral ou bilatéral, avec ou sans frottement pour différents corps (élastiques, viscoélastiques, viscoplastiques, ...). La formulation des problèmes de contact unilatéral a été décrite par Signorini en 1933 [79]. Fichera [33] en 1964 et Duvaut et Lions [26] en 1973 et Nėčas, Jarušek et Haslinger [64] en 1980 ont montré l'existence et l'unicité de la solution pour une famille des problèmes de contact unilatéral avec ou sans frottement pour des matériaux ayant une loi de comportement élastique linéaire dans les deux cas unidimensionnel et bidimensionnel. Des résultats d'existence et d'unicité ont été obtenus dans [21] dans le cas non linéaire d'un problème de contact quasistatique avec ou sans frottement entre un corps élastique et une base rigide. Récemment, plusieurs auteurs, voir par exemple [8, 22, 23, 38, 39, 40, 58, 81, 82], ont étudié quelques problèmes de contact des corps mécaniques appliqués dans un champ électrique (matériaux électromécanique ou piézoélectriques). En 1989, Dhia [20] a appliqué la méthode de pénalisation pour étudier un problème de contact unilatéral avec frottement de Colomb pour des matériaux ayant une loi de comportement élastique linéaire pour les modèles de Kirchhoff-love et Mindlin-Reissner. Citons aussi les travaux de P.Hild et P.Laborde [45] en 2002, pour un problème de contact statique sans frottement entre deux corps déformables ayant une loi de comportement élastique linéaire, en se basant sur la méthode des éléments finis de type quadratique.

Les travaux sur les matériaux dits actifs se sont considérablement multipliés au cours des dix dernières années ; ils se caractérisent par leurs capacités à fournir une action mécanique sous l'effet d'un couplage, généralement réversible, de type électromécanique (matériaux piézoélectriques), magnétoélastique (matériaux magnétostrictifs) ou bien encore thermoélastique (alliages à mémoire de forme). L'intérêt est en effet de développer des matériaux ou des structures dites intelligentes, dans nombreuses branches de l'industrie.

Un phénomène très important en ingénierie sera considéré dans cette thèse, il s'agit du phénomène de contact avec adhésion entre deux corps déformables, ceci a lieu quand la colle est ajoutée pour réduire ou ralentir le mouvement des surfaces. Les problèmes de contact avec adhésion ont été considérés par plusieurs auteurs, voir par exemple [2, 3, 13, 14, 22, 23, 34, 35, 39, 80, 83]. La nouveauté dans tous ces articles est l'introduction d'une variable interne de surface, le champ d'adhésion noté par $0 \leq \beta \leq 1$ (voir [32, 33]), décrivant l'intensité d'adhésion sur la surface de contact, quand $\beta = 1$ au point de la surface de contact, l'adhésion est complète, quand $\beta = 0$ il n'y pas d'adhésion. Quand $0 < \beta < 1$ l'adhésion est partielle. Pour plus des détails, les lecteurs sont invités consulter une bibliographie abondante sur le sujet dans [68, 71, 75, 76].

Cette thèse représente une contribution à l'étude de l'existence, l'unicité et l'approximation numérique des solutions de quelques problèmes de contact avec ou sans adhésion entre deux corps déformables. Sous l'hypothèse des petites déformations, nous étudions des processus statiques, quasistatiques et dynamiques pour des matériaux élastiques, électro-élastiques et électro-élasto-viscoplastiques, respectivement. Les conditions aux limites sont du type de *Signorini* pour les cas statiques ou de compliance normale avec adhésion pour les autre cas.

Cette thèse se compose de deux parties et une annexe :

La première partie est consacrée à l'étude théorique et numérique d'un problème statique de contact unilatéral sans frottement entre deux corps déformables, cette partie se divise en deux chapitres :

Dans le premier chapitre on considère le problème mécanique de contact $\mathbb{P}$ avec les conditions aux limites de *Signorini* sans frottement dans un processus statique, où les inconnues dans ce cas, sont les champs des déplacements $\mathbf{u}^\ell$ et les champs des contraintes $\boldsymbol{\sigma}^\ell$. On commence par considérer un problème statique pour des matériaux ayant une loi de comportement élastique non linéaire. En utilisant la formule de *Green*, on propose deux formulations variationnelles $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$. Le problème $\mathbb{P}_1$ est la formulation variationnelle qui dépend uniquement de l'inconnue $\mathbf{u}^\ell$, tandis que le problème $\mathbb{P}_2$ ne dépend que de $\boldsymbol{\sigma}^\ell$. En utilisant le théorème de *Stampachia* concernant les inéquations variationnelles elliptiques, ainsi que des hypothèses de régularité qu'on imposera par la suite, on démontre que chacun des $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$ possède une solution unique. On termine par préciser le lien entre, d'une part les solutions des problèmes variationnels $\mathbb{P}_1$, $\mathbb{P}_2$ et le problème $\mathbb{P}$. Ensuite, en particulier on considère le problème de *Signorini* pour les équations de l'élasticité linéaire décrites par la loi de *Hook*. Pour ce dernier problème on propose la *formulation variationnelles mixte*, notée par $\mathbb{P}_m$ où les inconnues dans ce cas, sont le champs de déplacement $\mathbf{u}^\ell$ et la fonction λ qui n'est autre que la composante normale de tenseur de contrainte $\boldsymbol{\sigma}^\ell$ sur la zone de contact Γ_3 sachant que la composante tangentielle de contrainte sur Γ_3 est nulle. En se basant sur le théorème de représentation de *Riesz-Frechet*, ainsi que le théorème de *Lax-Milgram*, un résultat d'existence et d'unicité est obtenu. Ces résultats ont fait l'objet de deux publications [42, 43].

Dans le second chapitre, on s'intéresse à l'étude numériquement d'un problème de contact sans frottement entre deux corps déformables muni de la loi de *Hook*. Pour étudier numériquement ce problème, on suppose que Ω^1, Ω^2 sont des polygones, en utilisant la méthode des éléments finis, le problème $\mathbb{P}_m$ se transforme à un problème variationnel approché, noté $\mathbb{P}_m^h$. Ceci nous permet d'approcher la solution exacte $(\mathbf{u}, \lambda)$ par une solution approchée $(\mathbf{u}_h, \lambda_h)$, on introduit les deux ensembles V_h et M_h , où V_h et M_h désignent les sous espaces, de dimension finie qui approchent V et M , respectivement. De plus, et comme dans le premier chapitre, nous examinons la question d'existence et d'unicité d'une solution approchée du problème discrétisé. Pour cela on aura besoin de quelques techniques de l'analyse numérique telles que la méthode d'interpolation de *Lagrange* linéaire ou quadratique et la méthode de point fixe. On termine ce chapitre par illustrer un algorithme de point fixe sur les forces de contact (APFF). Les résultats d'approximation numérique dans ce chapitre sont démontrés dans [44].

La deuxième partie est dédiée aux problèmes électromécaniques de contact avec les conditions de compliance normale et l'adhésion entre deux corps électro-déformables, cette partie se décompose en deux chapitres (chapitres 3 et 4) :

Dans le troisième chapitre, voir [38], on s'intéresse à l'étude variationnelle et numérique d'un problème de contact entre deux corps électro-élastique dans un processus quasi-statique. On commence par considérer un problème quasi-statique de contact avec compliance normale et l'adhésion, où les inconnues dans ce cas, sont les champs des déplacements $\mathbf{u}^\ell$, les champs des contraintes $\boldsymbol{\sigma}^\ell$,

les potentiels électriques φ^ℓ , un champ d'adhésion β et les champs des déplacements électriques D^ℓ avec la loi de comportement électro-élastiques non linéaire.

Dans le dernier chapitre, voir [39], on s'intéresse à l'étude variationnelle d'un problème de contact entre deux corps électro-élasto-viscoplastique dans un processus dynamique. On commence par considérer un problème de contact avec compliance normale et l'adhésion, où les inconnues dans ce cas, sont les champs des déplacements u^ℓ , les champs des contraintes σ^ℓ , les potentiels électriques φ^ℓ , un champ d'adhésion β et les champs des déplacements électriques D^ℓ avec la loi de comportement électro-élasto-viscoplastique non linéaire. Ici le contact entre le deux corps est modélisé par l'adhésion dont l'évolution est décrite par une équation différentielle ordinaire du premier ordre. En suivant les mêmes démarches du chapitre précédent, on démontre l'existence et l'unicité d'une solution.

Ce travail se termine par une annexe dans laquelle nous présentons un rappel sur quelques notations générales de la mécanique nécessaires pour une bonne compréhension de la suite des problèmes traités, puis nous rappelons les espaces fonctionnels et les principales notations utilisées. Ensuite nous passons en revue quelques résultats fondamentaux d'analyse non linéaire, concernant les inéquations variationnelles, les équations d'évolution, les lemmes de *Gronwall*.

Notations

Notations diverses

$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels,
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels,
c	Constante réelle strictement positive,
<i>i.e.</i>	C'est à dire,
$\emptyset$	Ensemble vide,
δ_{ij}	Symbole de <i>Kronecker</i> ,
$x \mapsto \psi(x)$	Application,
$\psi _K$	La restriction de l'application ψ au sous-ensemble K ,
ψ^{-1}	Application réciproque de ψ si ψ est injective,
$(.)_+$	Partie positive : $(x)_+ = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0, \end{cases}$
$X \hookrightarrow Y$	L'ensemble X est contenu dans Y avec injection continue,
$X \subset\subset Y$	L'ensemble X est contenu dans Y avec injection compact,
$\partial_i \psi$	La dérivée partielle de ψ par rapport à la i^{eme} composante x_i : $\partial_i \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$,
$\nabla \psi$	Gradient de l'application ψ : $\nabla \psi = (\partial_1 \psi, \dots, \partial_d \psi)$,
$Div \psi$	Divergence de l'application, ψ : $Div \psi = \partial_1 \psi + \dots + \partial_d \psi$,
$\partial \psi$	Sous-différentiel de l'application ψ ,
(x, y)	Paire d'un espace produit $X \times Y$,
X^N	Espace de produit définie par, $X^N = \{x = (x_i); x_i \in X, i = 1, \dots, N\}$,
$X_s^{N \times N}$	Espace des matrices symétriques définie par $X_s^{N \times N} = \{x = (x_{ij}); x_{ji} = x_{ij} \in X, i, j = 1, \dots, N\}$,
$\mathbb{S}^d$	Espace des tenseurs symétriques du seconde ordre sur $\mathbb{R}^d$: $\mathbb{S}^d = \mathbb{R}_s^{d \times d}$,
0_d	Le zéro de $\mathbb{R}^d$ et celui de $\mathbb{S}^d$;
$\cdot$	Produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{S}^d$;
$ \cdot $	La norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{S}^d$;
$\ \cdot\ _X$	La norme sur l'espace X ;
$\langle \cdot, \cdot \rangle_X$	Le produit scalaire sur l'espace X ;
$K^\perp$	L'orthogonale de sous-ensemble K de X : $K^\perp = \{x \in X; \langle x, y \rangle_X = 0, \forall y \in K\}$
$x_n \rightarrow x$	Convergence forte dans l'espace X ;
$x_n \rightharpoonup x$	Convergence faible dans l'espace X ;
0_X	Le zéro de l'espace X ;
$L(X, Y)$	L'espace des applications linéaires et continues de X dans Y ;
$L(X)$	L'espace des applications linéaires et continues dans X , <i>i.e.</i> $L(X) = L(X, X)$;
X'	L'espace dual topologique de l'espace X , <i>i.e.</i> $X' = L(X, \mathbb{R})$;
X^*	L'espace des applications linéaires de X dans $\mathbb{R}$ (L'espace dual algébrique de X);
$\langle \cdot \rangle_{X' \times X}$	Le produit dual entre X' et X ;
I_X	L'opérateur identité sur X ;

$p.p.$	Presque partout;
Ω^ℓ	Ouvert de $\mathbb{R}^d$, parfois domaine Lipchitzien;
$\overline{\Omega^\ell}$	L'adhérence de Ω^ℓ ;
Γ^ℓ	La frontière de Ω^ℓ ;
Γ_i^ℓ	Les parties de frontière Γ^ℓ , ($i = 1, 2, 3$);
$mes(\Gamma_i^\ell)$	Mesure de <i>Lebesgue</i> (d-1) dimensionnelle de Γ_i^ℓ ;
$d\Gamma_i^\ell$	Mesure superficielle sur Γ_i^ℓ ;
η^ℓ	Normale extérieure unitaire à Γ^ℓ ;
v_η^ℓ, v_τ^ℓ	Les composantes normales et tangentielles du champ vectoriel v^ℓ défini sur $\overline{\Omega^\ell}$;
$C^1(\Omega^\ell)$	L'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur Ω^ℓ ;
$D(\Omega^\ell)$	L'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables et à support compact;
$D'(\Omega^\ell)$	Espace des distributions sur Ω^ℓ ;
D^ℓ	L'espace $\left\{ \phi^\ell = (\phi_i^\ell)_{1 \leq i \leq d}; \phi_i^\ell \in D(\Omega^\ell); \forall i = 1, \dots, d \right\} = \left(D(\Omega^\ell) \right)_s^d$;
D	L'espace $D^1 \times D^2$;
D'^ℓ	L'espace $\left\{ \Phi^\ell = (\Phi_i^\ell)_{1 \leq i \leq d}; \Phi_i^\ell \in D'(\Omega^\ell); \forall i = 1, \dots, d \right\} = \left(D'(\Omega^\ell) \right)_s^d$;
D'	L'espace $D'^1 \times D'^2$;
$\mathcal{D}^\ell$	L'espace $\left\{ \epsilon^\ell = (\epsilon_{ij}^\ell)_{1 \leq i, j \leq d}; \epsilon_{ij}^\ell = \phi_{ji}^\ell \in D(\Omega^\ell), \forall i, j = 1, \dots, d \right\} = \left(D(\Omega^\ell) \right)_s^{d \times d}$;
$\mathcal{D}$	L'espace $\mathcal{D}^1 \times \mathcal{D}^2$;
$\mathcal{D}'^\ell$	L'espace $\left\{ \Theta^\ell = (\Theta_{ij}^\ell)_{1 \leq i, j \leq d}; \Theta_{ij}^\ell = \Theta_{ji}^\ell \in D'(\Omega^\ell), \forall i, j = 1, \dots, d \right\} = \left(D'(\Omega^\ell) \right)_s^{d \times d}$;
$\mathcal{D}'$	L'espace $\mathcal{D}'^1 \times \mathcal{D}'^2$;
$L^2(\Omega^\ell)$	Espace des fonctions u^ℓ mesurables sur Ω^ℓ telles que $\int_{\Omega^\ell} u^\ell ^2 dx < +\infty$;
$\ \cdot\ _{L^2(\Omega^\ell)}$	La norme de $L^2(\Omega^\ell)$ définie par $\ u^\ell\ _{L^2(\Omega^\ell)} = \left(\int_{\Omega^\ell} u^\ell ^2 d\Omega^\ell \right)^{\frac{1}{2}}$;
$L^\infty(\Omega^\ell)$	Espace des fonctions u^ℓ mesurables sur Ω^ℓ telles que $\exists c > 0 : u^\ell < c$, $p.p.$, sur Ω^ℓ ;
$H^m(\Omega^\ell)$	Espace de <i>Sobolev</i> d'ordre $m \in \mathbb{N}$ défini par : $H^m(\Omega^\ell) = \left\{ u^\ell \in L^2(\Omega^\ell); D^\alpha u^\ell \in L^2(\Omega^\ell), \forall \alpha \in \mathbb{N}^d \text{ et } \alpha \leq m \right\}$
$\ \cdot\ _{H^m(\Omega^\ell)}$	La norme de $H^m(\Omega^\ell)$ définie par : $\ u^\ell\ _{H^m(\Omega^\ell)} = \left(\sum_{ \alpha \leq m} \ D^\alpha u^\ell\ _{L^2(\Omega^\ell)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$;
$ \cdot _{H^m(\Omega^\ell)}$	La semi-norme définie sur $H^m(\Omega^\ell)$ comme suite : $ u^\ell _{H^m(\Omega^\ell)} = \left(\sum_{ \alpha =m} \ D^\alpha u^\ell\ _{L^2(\Omega^\ell)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$;
$H^\tau(\Omega^\ell)$	Espace de <i>Sobolev</i> d'ordre $\tau \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$ si $\tau = m + \theta$ où $m \in \mathbb{N}$ et $0 < \theta < 1$ on a $H^\tau(\Omega^\ell) = \left\{ u^\ell \in H^m(\Omega^\ell); \int_{\Omega^\ell \times \Omega^\ell} \frac{ D^\alpha u^\ell(x) - D^\alpha u^\ell(y) ^2}{ x-y ^{d+2\theta}} dx dy < +\infty, \forall \alpha \in \mathbb{N}^d \text{ et } \alpha = m \right\}$
$\ \cdot\ _{H^\tau(\Omega^\ell)}$	La norme de $H^\tau(\Omega^\ell)$ définie par $\ u^\ell\ _{H^\tau(\Omega^\ell)} = \left(\ u^\ell\ _{H^m(\Omega^\ell)}^2 + \sum_{ \alpha =m} \int_{\Omega^\ell \times \Omega^\ell} \frac{ D^\alpha u^\ell(x) - D^\alpha u^\ell(y) ^2}{ x-y ^{d+2\theta}} dx dy \right)^{\frac{1}{2}}$

H^ℓ	L'espace $\left\{ u^\ell = (u_i^\ell)_{1 \leq i \leq d} ; u_i^\ell \in L^2(\Omega^\ell), \forall i = 1, \dots, d \right\} = \left(L^2(\Omega^\ell) \right)^d$;
H	L'espace $H^1 \times H^2$;
H_1^ℓ	L'espace $\left\{ u^\ell = (u_i^\ell)_{1 \leq i \leq d} ; u_i^\ell \in H^1(\Omega^\ell), \forall i = 1, \dots, d \right\} = \left(H^1(\Omega^\ell) \right)^d$;
H_1	L'espace $H_1^1 \times H_1^2$;
$\mathcal{H}^\ell$	L'espace $\left\{ \sigma^\ell = (\sigma_{ij}^\ell)_{1 \leq i, j \leq d} / \sigma_{ji}^\ell = \sigma_{ij}^\ell \in L^2(\Omega^\ell), \forall i = 1, \dots, d \right\} = \left(L^2(\Omega^\ell) \right)_s^{d \times d}$;
$\mathcal{H}$	L'espace $\mathcal{H}^1 \times \mathcal{H}^2$;
$\mathcal{H}_1^\ell$	L'espace $\left\{ \sigma^\ell = (\sigma_{ij}^\ell)_{1 \leq i, j \leq d} / \sigma_{ji}^\ell = \sigma_{ij}^\ell \in H^1(\Omega^\ell), \forall i = 1, \dots, d \right\} = \left(H^1(\Omega^\ell) \right)_s^{d \times d}$;
$\mathcal{H}_1$	L'espace $\mathcal{H}_1^1 \times \mathcal{H}_1^2$;
$\overline{\mathcal{H}}_1$	L'espace $\left\{ \sigma = (\sigma^1, \sigma^2) \in \mathcal{H}_1 ; \sigma_\eta^1 = \sigma_\eta^2 \text{ sur } \Gamma_3 \right\}$;
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$	Espace de <i>Sobolev</i> d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ^ℓ ;
H_{Γ^ℓ}	L'espace $\left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell) \right)^d$;
$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$	L'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$;
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma^\ell}$	Le produit de dualité entre $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$ et $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$;
$\ \cdot \ _{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)}$	La norme de $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$ définie par $\ \psi \ _{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)} = \sup_{\phi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)} \frac{\langle \psi, \phi \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma^\ell}}{\ \phi \ _{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)}}$;
H'_{Γ^ℓ}	Espace dual de H_{Γ^ℓ} , i.e., $H'_{\Gamma^\ell} = \left(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell) \right)^d$;
$\gamma^\ell : H_1^\ell \rightarrow H_{\Gamma^\ell}$	L'application surjective de trace définie sur H_1^ℓ ;
$R^\ell : H_{\Gamma^\ell} \rightarrow H_1^\ell$	L'inverse à droite de l'application γ^ℓ ;

Si de plus $[0, T]$ un intervalle de temps, $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$, on note par

$C(0, T; H)$	L'espace des fonctions continues de $[0, T]$ dans H ,
$C^1(0, T; H)$	L'espace des fonctions continûment dérivables sur $[0, T]$ dans H ,
$L^p(0, T; H)$	L'espace des fonctions mesurables sur $[0, T]$ dans H ,
$\ \cdot \ _{L^p(0, T; H)}$	La norme de $L^p(0, T; H)$,
$W^{k,p}(0, T; H)$	L'espace de <i>Sobolev</i> de paramètres k et p ,
$\ \cdot \ _{W^{k,p}(0, T; H)}$	La norme de $W^{k,p}(0, T; H)$.

Notations en élasticité

Ω^1, Ω^2	Les domaines occupés par les corps déformables ;
Γ^ℓ	La frontière de Ω^ℓ : $\Gamma^\ell = \partial\Omega^\ell$;
$\Gamma_1^\ell, \Gamma_2^\ell, \Gamma_3$	Les parties de Γ^ℓ : $\Gamma^\ell = \overline{\Gamma_1^\ell} \cup \overline{\Gamma_2^\ell} \cup \Gamma_3$;
Γ_3	L'interface de contact entre les corps Ω^1, Ω^2 .
u^ℓ	Vecteurs des déplacements dans le domaine Ω^ℓ , on écrit u_i^ℓ les composantes du vecteur dans la base canonique ;
σ^ℓ	Tenseur des contraintes correspondant au déplacement u^ℓ , on écrit σ_{ij}^ℓ les composantes du tenseur dans la base canonique ;
φ^ℓ	Valeurs des potentiels électriques dans le domaine Ω^ℓ ;
β	Vecteurs d'adhésion sur la surface de contact Γ_3 ;
D^ℓ	Vecteurs des déplacements électriques dans le domaine Ω^ℓ ;

$\dot{u}^\ell, \ddot{u}^\ell$	Les dérivées première et seconde de u^ℓ par rapport au temps ,
$\varepsilon(u^\ell)$	Tenseur linéarisé des déformations : $(\varepsilon(u^\ell))_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j^\ell + \partial_j u_i^\ell)$;
A^ℓ	Tenseur du quatrième ordre (lois des comportements linéaires), on écrit A_{ijpq}^ℓ les composantes du tenseur dans la base canonique ;
$\sigma^\ell . u^\ell$	Produit tensoriel (matriciel) de u^ℓ par σ^ℓ : $(\sigma^\ell . u^\ell)_i = \sigma_{ij}^\ell . u_j^\ell$;
$A^\ell . \sigma^\ell$	Produit tensoriel de σ^ℓ par A^ℓ : $(A^\ell . \sigma^\ell)_{ij} = A_{ijpq}^\ell \sigma_{pq}^\ell$;
$\sigma^\ell : \epsilon^\ell$	Produit scalaire de deux tenseurs, $\sigma^\ell : \epsilon^\ell = \sigma_{ij}^\ell \epsilon_{ij}^\ell$;
σ_v^ℓ	Composante normale des contraintes à la frontière du domaine : $\sigma_v^\ell = (\sigma^\ell v^\ell) . v^\ell$ où v^ℓ est la normale unitaire sortante sur le bord du domaine Ω^ℓ ;
σ_τ^ℓ	Vecteur composante tangentielle des contraintes à la frontière du domaine ;
u_v^ℓ	Composante normale du déplacement u^ℓ sur le bord du domaine : $u_v^\ell = u^\ell . v^\ell$;
$u_v^\ell v^\ell$	Vecteur composante normale du déplacement u^ℓ : $(u_v^\ell v^\ell)_i = u_v^\ell v_i^\ell$;
u_τ^ℓ	Vecteur composante tangentielle du déplacement u^ℓ : $u_\tau^\ell = u^\ell - u_v^\ell v^\ell$.

Première partie

**ETUDE THÉORIQUE ET NUMÉRIQUE D'UN PROBLÈME STATIQUE
DE CONTACT ENTRE DEUX CORPS DÉFORMABLES**

Introduction

Cette partie est consacrée à l'étude théorique et numérique d'un problème statique de contact unilatéral sans frottement entre deux corps déformables. On commence, dans un premier chapitre, par étudier théoriquement le problème statique pour des matériaux ayant une loi de comportement élastique non linéaire. En utilisant la formule de *Green*, on propose deux formulations variationnelles, via le théorème *Stampachia* un résultat d'existence et d'unicité est obtenu. Ensuite, en particulier on considère le problème de *Signorini* pour les équations de l'élasticité linéaire décrites par la loi de *Hook*. Pour ce dernier problème on propose la formulation variationnelle mixte, notée par $\mathbb{P}_m$ où les inconnues dans ce cas, sont le champs de déplacement $\boldsymbol{u}^\ell$ et la fonction λ qui n'est autre que la composante normale de tenseur de contrainte σ^ℓ sur la zone de contact Γ_3 , sachant que la composante tangentielle de contrainte sur Γ_3 est nulle. En se basant sur le théorème de représentation de *Riesz-Frechet*, ainsi que le théorème de *Lax-Milgram*, on démontre un résultat d'existence et d'unicité d'une solution faible. Dans la deuxième chapitre, on s'intéresse à l'étude numériquement d'un problème de contact sans frottement entre deux corps déformables muni de la loi de *Hook* dans un domaine polygones. En utilisant la méthode des éléments finis, le problème $\mathbb{P}_m$ se transforme à un problème variationnel approché, noté par $\mathbb{P}_m^h$. Ceci nous permet d'approcher la solution exacte (u, λ) par une solution approchée (u_h, λ_h) , on introduit les deux ensembles V_h et M_h , où V_h, M_h désignent les sous espaces, de dimension finie qui approchent V et M , respectivement. Pour cela on aura besoin de quelques techniques d'analyse numérique telles que la méthode d'interpolation de *Lagrange* linéaire ou quadratique et la méthode de point fixe. On termine ce chapitre par illustrer un algorithme de point fixe sur les forces de contact (APFF). Les résultats d'approximation numérique dans ce chapitre sont démontrés dans [44].

1. ETUDE VARIATIONNELLE D'UN PROBLÈME ÉLASTIQUE DE CONTACT

Résumé :

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude théorique d'un problème statique de contact unilatéral sans frottement entre deux corps déformables. En utilisant la formule de *Green*, on établit deux formulations variationnelles du problème considéré. Ensuite, en particulier on considère le problème de *Signorini* pour loi de l'élasticité linéaire. Pour ce dernier problème on propose la formulation variationnelles mixte, en utilisant le théorème de représentation de *Riesz-Frechet*, ainsi que le théorème de *Stampachia*, nous permettent d'analyser la question d'existence et d'unicité.

Contenu :

1. Formulation variationnelle classique :

- 1.1. Position du problème non linéaire ;
- 1.2. Formulation variationnelle classique ;
- 1.3. Résultats d'existence et d'unicité ;
- 1.4. Résultats d'équivalence.

2. Formulation variationnelle mixte :

- 2.1. Position du problème linéaire ;
- 2.2. Formulation variationnelle mixte ;
- 2.3. Résultats d'existence et d'unicité.

1.1 Problème mécanique et formulation variationnelle classique

Dans cette section, nous considérons le problème statique, pour les équations d'élasticité avec les conditions aux limites de contact unilatéral sans frottement entre deux corps déformables.

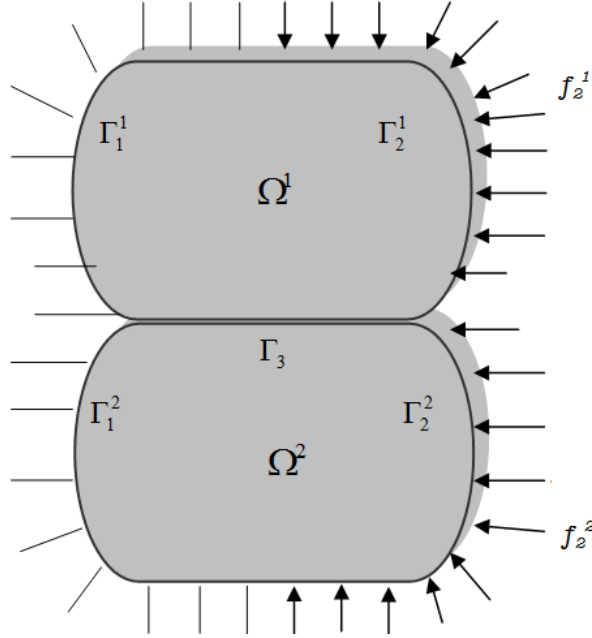


Fig. 1.1: Contact entre deux corps déformables.

Dans la suite nous désignerons par Ω^1 et Ω^2 les domaines qu'occupent les deux corps déformables dans $\mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$), on suppose que la frontière de chacun des domaines Ω^ℓ est constituée de trois parties disjointes $\partial\Omega^\ell = \Gamma^\ell = \Gamma_1^\ell \cup \Gamma_2^\ell \cup \Gamma_3^\ell$, on suppose que les parties $\Gamma_1^\ell, \Gamma_2^\ell, \Gamma_3^\ell$ sont mesurables au sens de *Lebesgue*, telles que $\text{mes}(\Gamma_1^\ell) > 0$ et $\text{mes}(\Gamma_3^\ell) > 0$. On suppose que les champs des déplacements s'annulent sur Γ_1^ℓ , que des tractions superficielles f_2^ℓ s'appliquent sur Γ_2^ℓ et que des forces volumiques f_0^ℓ agissent dans Ω^ℓ . Nous noterons par Γ_3^ℓ l'interface de contact du corps Ω^ℓ , ($\ell = 1, 2$), on a : $\Gamma_3^1 = \Gamma_3^2$, noté par Γ_3 .

1.1.1 Position du problème non linéaire

Dans ce paragraphe, on considère le problème non linéaire suivant :

ProblèmeP : Trouver les champs des déplacements $u = (u^1, u^2)$ avec $u^\ell : \Omega^\ell \rightarrow \mathbb{R}^d$ et les champs des contraintes $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2)$ avec $\sigma^\ell : \Omega^\ell \rightarrow \mathbb{S}^d$, tels que :

$$\sigma^\ell = \mathcal{F}^\ell(\epsilon(u^\ell)) \quad \text{dans } \Omega^\ell \quad (1.1)$$

$$\text{Div}\sigma^\ell + f_0^\ell = 0 \quad \text{dans } \Omega^\ell \quad (1.2)$$

$$u^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\ell \quad (1.3)$$

$$\sigma^\ell \nu^\ell = f_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_2^\ell \quad (1.4)$$

$$\begin{cases} (a) & \sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2 \equiv \sigma_\nu, \\ (b) & [u_\nu] \leq 0, \sigma_\nu \leq 0, \sigma_\nu[u_\nu] = 0, \quad \text{sur } \Gamma_3. \\ (c) & \sigma_\tau^1 = \sigma_\tau^2 = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

Pour étudier le problème $\mathbb{P}$, on aura besoin des hypothèses de régularité suivantes :
L'opérateur d'élasticité $\mathcal{F}^\ell$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d \text{ est un opérateur satisfait :} \\ (a) \text{ Il existe } m_{\mathcal{F}^\ell} > 0 \text{ tel que} \\ \quad (\mathcal{F}^\ell(x, \xi_1) - \mathcal{F}^\ell(x, \xi_2)) \cdot (\xi_1 - \xi_2) \geq m_{\mathcal{F}^\ell} \|\xi_1 - \xi_2\|^2 \\ \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell. \\ (b) \text{ Il existe } L_{\mathcal{F}^\ell} > 0 \text{ tel que} \\ \quad \|\mathcal{F}^\ell(x, \xi_1) - \mathcal{F}^\ell(x, \xi_2)\| \leq L_{\mathcal{F}^\ell} \|\xi_1 - \xi_2\| \\ \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell. \\ (c) \mathcal{F}^\ell(x, 0) = 0, \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell. \\ (d) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{F}^\ell(x, \xi) \text{ est Lebesgue mesurable dans } \Omega^\ell, \\ \quad \text{pour chaque } \xi \in \mathbb{S}^d. \end{array} \right. \quad (1.6)$$

Nous supposons que les forces volumiques et les traction surfaciques ont la régularité

$$f_0^\ell \in H^\ell \quad (1.7)$$

$$f_2^\ell \in H'_{\Gamma_2^\ell}. \quad (1.8)$$

Remarque 1.1: L'hypothèse (1.6) nous permet de considérer l'opérateur noté encore par $\mathcal{F}^\ell$ défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F}^\ell : \mathcal{H}^\ell \rightarrow \mathcal{H}^\ell \quad \text{tels que} \\ \mathcal{F}^\ell \varepsilon(x) = \mathcal{F}^\ell(x, \varepsilon(x)) \quad \forall \varepsilon \in \mathcal{H}^\ell, x \in \Omega^\ell. \end{array} \right.$$

En effet, si $\varepsilon \in \mathcal{H}^\ell$ (voir (B.68)), il résulte que $x \rightarrow \varepsilon(x)$ est une fonction mesurable de Ω^ℓ à valeurs dans $\mathbb{S}^d$ et d'après (1.6.b), il résulte :

$$\int_{\Omega^\ell} \|\mathcal{F}^\ell \varepsilon(x)\|^2 dx \leq L_{\mathcal{F}^\ell}^2 \int_{\Omega^\ell} \|\varepsilon(x)\|^2 dx < +\infty.$$

On a donc $\mathcal{F}^\ell(\varepsilon) \in \mathcal{H}^\ell$. On remarque également que d'après (1.6.a.b), l'opérateur $\mathcal{F}^\ell : \mathcal{H}^\ell \rightarrow \mathcal{H}^\ell$ est un opérateur *fortement monotone* et *Lipchitz*, car il satisfait aux inégalités :

$$\langle \mathcal{F}^\ell(\varepsilon_1) - \mathcal{F}^\ell(\varepsilon_2), \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rangle_{\mathcal{H}^\ell} \geq m \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\|_{\mathcal{H}^\ell}^2 \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathcal{H}^\ell \quad (1.9)$$

$$\|\mathcal{F}^\ell(\varepsilon_1) - \mathcal{F}^\ell(\varepsilon_2)\|_{\mathcal{H}^\ell} \leq L \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\|_{\mathcal{H}^\ell} \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathcal{H}^\ell. \quad (1.10)$$

Remarque 1.2: Etant donnée que l'opérateur $\mathcal{F}^\ell : \mathcal{H}^\ell \rightarrow \mathcal{H}^\ell$ est *fortement monotone* et *Lipchitz*, l'opérateur $\mathcal{F}^\ell$ est donc inversible et $(\mathcal{F}^\ell)^{-1} : \mathcal{H}^\ell \rightarrow \mathcal{H}^\ell$ est également *fortement monotone* et *Lipchitz*.

Remarque 1.3: Les hypothèses (1.7), (1.8) sont des hypothèses de *régularité* sur les données f_0^ℓ , f_2^ℓ qui sont nécessaires pour que le problème (1.3)–(1.5) ait une solution de la *régularité* $u \in H_1$, $\sigma \in \mathcal{H}_1$. En effet, puisque $\sigma^\ell \in \mathcal{H}_1^\ell$, $\ell = 1, 2$ alors $\text{Div} \sigma^\ell \in H^\ell$ et d'après (1.2), il vient $f_0^\ell \in H^\ell$. De plus $\sigma^\ell \nu^\ell \in H_{\Gamma^\ell}'$ ce qui entraîne que $f_2^\ell \in H_{\Gamma_2^\ell}'$ en utilisant (1.4).

Pour l'étude du problème $\mathbb{P}$, on considère le sous espace fermé $V(\Omega^\ell)$ de H_1^ℓ défini par :

$$V(\Omega^\ell) = \{ v^\ell \in H_1^\ell / v^\ell = 0 \text{ p.p sur } \Gamma_1^\ell \}. \quad (1.11)$$

Et on considère l'espace V défini par :

$$V = V(\Omega^1) \times V(\Omega^2). \quad (1.12)$$

Sur cet espace, on définit l'opérateur bilinéaire comme suit :

$$\begin{cases} \langle \cdot, \cdot \rangle_V : & V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \\ \langle v, \omega \rangle_V = & \sum_{\ell=1}^2 \langle \epsilon(v^\ell), \epsilon(\omega^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell}. \end{cases} \quad (1.13)$$

Lemme 1.1: L'espace V muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ est un espace du Hilbert.

Démonstration. Il est clair que l'opérateur $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ est une forme bilinéaire positive, symétrique. On pose :

$$\|v\|_V = \sqrt{\langle v, v \rangle_V}. \quad (1.14)$$

Puisque $\text{mes}(\Gamma_1^\ell) > 0$, l'inégalité de Korn s'applique sur $V(\Omega^\ell)$ (voir Théorème B.33, page. 104) : il existe une constante $m^\ell > 0$ dépendant uniquement de Ω^ℓ et Γ_1^ℓ telle que :

$$\|\epsilon(v^\ell)\|_{\mathcal{H}^\ell} \geq m^\ell \|v^\ell\|_{H_1^\ell} \quad \forall v^\ell \in V.$$

Pour $m = \min(m^1, m^2)$, on a $\|v\|_V \geq m \|v\|_{H_1} \quad \forall v \in V$ ce qui nous permet de conclure que si $\|v\|_V = 0$, alors $v = 0$, d'où il résulte que $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ est un opérateur défini positif et par conséquent $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ est un produit scalaire sur V .

Il ne reste que de démontrer que V est complet. Ceci est clair en utilisant le fait que V est fermé dans H_1 , ce qui achève la démonstration.

Remarque 1.4: Les deux normes $\|\cdot\|_V$ et $\|\cdot\|_{H_1}$ sont équivalentes sur V .

Il est facile de voir que l'application :

$$v^\ell \mapsto \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell v^\ell d\Omega^\ell + \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell v^\ell d\Gamma_2^\ell$$

est une forme linéaire continue sur $V(\Omega^\ell)$, en appliquant le Théorème de représentation du *Riesz-Fréchet*, il résulte qu'il existe $\varphi^\ell \in V(\Omega^\ell)$ tel que :

$$\langle \varphi^\ell, v^\ell \rangle_{V(\Omega^\ell)} = \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell v^\ell d\Omega^\ell + \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell v^\ell d\Gamma_2^\ell \quad \forall v^\ell \in V(\Omega^\ell). \quad (1.15)$$

On pose $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2)$. En outre on définit respectivement les ensembles des “déplacement admissible” et l'ensemble des “contrainte admissible” suivants :

$$U_{ad} = \{v = (v^1, v^2) \in V \mid [v_v] \leq 0 \text{ sur } \Gamma_3\} \quad (1.16)$$

$$\Sigma_{ad} = \{\tau = (\tau^1, \tau^2) \in \overline{\mathcal{H}_1} \mid \langle \tau^1, \varepsilon(v^1) \rangle_{\mathcal{H}^1} + \langle \tau^2, \varepsilon(v^2) \rangle_{\mathcal{H}^2} \geq \langle \varphi, v \rangle \quad \forall v \in U_{ad}\} \quad (1.17)$$

où

$$\overline{\mathcal{H}_1} = \{\tau = (\tau^1, \tau^2) \in \mathcal{H}_1 \mid \tau_v^1 = \tau_v^2 \text{ sur } \Gamma_3\}. \quad (1.18)$$

1.1.2 Formulation variationnelle classique

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la formulation variationnelle du problème considéré qui consiste dans une première formulation, notée $\mathbb{P}_1$, à trouver les champs des déplacements $u = (u^1, u^2)$, tandis que dans la seconde formulation, notée $\mathbb{P}_2$, on cherche les champs des contraintes $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$. Ces résultats sont basés sur le lemme suivant :

Lemme 1.2: Si le couple (u, σ) est une solution du Problème $\mathbb{P}$ alors :

$$u \in U_{ad} \quad \sigma \in \Sigma_{ad} \quad (1.19)$$

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \varepsilon(v^\ell) - \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} \geq \langle \varphi, v - u \rangle \quad \forall v \in U_{ad} \quad (1.20)$$

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \tau^\ell - \sigma^\ell, \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad}. \quad (1.21)$$

Démonstration

$u \in U_{ad}$: L'appartenance $u \in U_{ad}$ est clair en utilisant (1.3) et (1.5).

(1.20) : En appliquant la formule de Green, de (1.2), il vient :

$$\langle \sigma^\ell, \varepsilon(v^\ell) - \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} = \langle f_0^\ell, v^\ell - u^\ell \rangle_{H^\ell} + \int_{\Gamma^\ell} \sigma^\ell v^\ell (v^\ell - u^\ell) v^\ell d\Gamma^\ell.$$

En utilisant (1.3), (1.4) et (1.15), il en résulte :

$$\langle \sigma^\ell, \varepsilon(v^\ell) - \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} = \langle \varphi^\ell, v^\ell - u^\ell \rangle_{H^\ell} + \int_{\Gamma_3} \sigma^\ell v^\ell (v^\ell - u^\ell) v^\ell d\Gamma_3. \quad (1.22)$$

Par sommation sur ℓ , avec (1.5.a.c), il vient :

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \varepsilon(v^\ell) - \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} = \langle \varphi, v - u \rangle_H + \int_{\Gamma_3} \sigma_v ([v_v] - [u_v]) d\Gamma_3.$$

Et du fait de (1.5.b), il en découle :

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \varepsilon(v^\ell) - \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} = \langle \varphi, v - u \rangle_H + \int_{\Gamma_3} \sigma_v ([v_v]) d\Gamma_3.$$

Et (1.16), on obtient alors :

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \epsilon(v^\ell) - \epsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} \geq \langle \varphi, v - u \rangle_H.$$

D'où l'inégalité (1.20).

$\sigma \in \Sigma_{ad}$: Pour $v = 2u \in U_{ad}$ et pour $v = 0 \in U_{ad}$ dans (1.20), il résulte :

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \epsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} = \langle \varphi, u \rangle_H. \quad (1.23)$$

On a

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \epsilon(v^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} = \sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \epsilon(v^\ell) - \epsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \epsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell}.$$

En utilisant (1.20) et (1.23), il en découle :

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \epsilon(v^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} \geq \langle \varphi, v - u \rangle_H + \langle \varphi, u \rangle_H \quad \forall v \in U_{ad},$$

ou encore

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \epsilon(v^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} \geq \langle \varphi, u \rangle_H \quad \forall v \in U_{ad}.$$

Ce qui implique que $\sigma \in \Sigma_{ad}$.

(1.21) : On a

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \tau^\ell - \sigma^\ell, \epsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} = \sum_{\ell=1}^2 \langle \tau^\ell, \epsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \epsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell}$$

De (1.17) et (1.23), il en résulte :

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \tau^\ell - \sigma^\ell, \epsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} \geq \langle \varphi, u \rangle_H - \langle \varphi, u \rangle_H = 0 \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad}.$$

D'où l'inégalité (1.21).

Grâce à la Remarque 1.2, le lemme précédent nous permet de considérer les deux formulations faibles associées au problème $\mathbb{P}$.

Problème $\mathbb{P}_1$: Trouver les champs des déplacements $u = (u^1, u^2)$ avec $u^\ell : \Omega^\ell \longrightarrow \mathbb{R}^d$, tels que :

$$u \in U_{ad} \quad \sum_{\ell=1}^2 \langle \mathcal{F}^\ell(\epsilon(u^\ell)), \epsilon(v^\ell) - \epsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} \geq \langle \varphi, v - u \rangle \quad \forall v \in U_{ad}. \quad (1.24)$$

Problème $\mathbb{P}_2$: Trouver les champs des contraintes $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2)$ avec $\sigma^\ell : \Omega^\ell \longrightarrow \mathbb{S}^d$, tels que :

$$\sigma \in \Sigma_{ad} \quad \sum_{\ell=1}^2 \langle \tau^\ell - \sigma^\ell, (\mathcal{F}^\ell)^{-1}(\sigma^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad}. \quad (1.25)$$

Remarque 1.5: Le lemme 1.2, nous permet de conclure facilement que si (u, σ) est une solution régulière du problème $\mathbb{P}$ alors u est une solution du problème $\mathbb{P}_1$ et σ est une solution du problème $\mathbb{P}_2$.

Dans la suite nous allons préciser le lien entre les problèmes variationnels qu'on a introduit et le problème $\mathbb{P}$. On commence par :

Théorème 1.1: Si $u = (u^1, u^2)$ est une solution du problème $\mathbb{P}_1$, et on pose $\sigma^\ell = \mathcal{F}^\ell(\epsilon(u^\ell))$, $\ell = 1, 2$ on a (u, σ) est une solution du problème $\mathbb{P}$.

Démonstration.

(1.2) : Pour tout $\Phi^\ell \in D^\ell$, on pose $\Phi = (\Phi^1, \Phi^2)$ avec $\Phi^{3-\ell} = 0$, en substituant $v = u \pm \Phi \in U_{ad}$ dans (1.24), on obtient :

$$\langle \sigma^\ell, \epsilon(\Phi^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} = \langle \varphi^\ell, \Phi^\ell \rangle_{V(\Omega^\ell)}.$$

En utilisant la formule de Green ainsi que l'inégalité (1.15), il en découle :

$$- \int_{\Omega^\ell} \text{Div} \sigma^\ell \Phi^\ell d\Omega^\ell = \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell \Phi^\ell d\Omega^\ell \quad \forall \Phi^\ell \in D^\ell.$$

Ou encore :

$$\text{Div} \sigma^\ell + f_0^\ell = 0 \quad \text{sur } \Omega^\ell.$$

(1.4) : Soit $v \in U_{ad}$, en appliquant la formule de Green, on obtient :

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell v^\ell, (v^\ell - u^\ell) v^\ell \rangle_{H'_{\Gamma^\ell} \times H_{\Gamma^\ell}} + \sum_{\ell=1}^2 \langle f_0^\ell, v^\ell - u^\ell \rangle_{H^\ell} = \\ & \sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \epsilon(v^\ell) - \epsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 \langle \text{Div} \sigma^\ell, v^\ell - u^\ell \rangle_{H^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 \langle f_0^\ell, v^\ell - u^\ell \rangle_{H^\ell} \end{aligned}$$

Pour $\sigma^\ell = \mathcal{F}^\ell(\epsilon(u^\ell))$, de l'équation d'équilibre (1.2), on conclut :

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell v^\ell, (v^\ell - u^\ell) v^\ell \rangle_{H'_{\Gamma^\ell} \times H_{\Gamma^\ell}} + \sum_{\ell=1}^2 \langle f_0^\ell, v^\ell - u^\ell \rangle_{H^\ell} = \sum_{\ell=1}^2 \langle \mathcal{F}^\ell(\epsilon(u^\ell)), \epsilon(v^\ell) - \epsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell}$$

Ce qui implique en utilisant (1.24) que

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell v^\ell, (v^\ell - u^\ell) v^\ell \rangle_{H'_{\Gamma^\ell} \times H_{\Gamma^\ell}} + \sum_{\ell=1}^2 \langle f_0^\ell, v^\ell - u^\ell \rangle_{H^\ell} \geq \langle \varphi, v - u \rangle.$$

Et de (1.15), on tire :

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell v^\ell, (v^\ell - u^\ell) v^\ell \rangle_{H'_{\Gamma^\ell} \times H_{\Gamma^\ell}} + \sum_{\ell=1}^2 \langle f_0^\ell, v^\ell - u^\ell \rangle_{H^\ell} \geq \sum_{\ell=1}^2 \langle f_0^\ell, v^\ell - u^\ell \rangle_{H^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 \langle f_2^\ell, (v^\ell - u^\ell) v^\ell \rangle_{H'_{\Gamma_2^\ell} \times H_{\Gamma_2^\ell}}.$$

Ou encore :

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell v^\ell, (v^\ell - u^\ell) v^\ell \rangle_{H'_{\Gamma^\ell} \times H_{\Gamma^\ell}} \geq \sum_{\ell=1}^2 \langle f_2^\ell, (v^\ell - u^\ell) v^\ell \rangle_{H'_{\Gamma_2^\ell} \times H_{\Gamma_2^\ell}}. \quad (1.26)$$

Pour tout $\omega^\ell \in H_1^\ell$ avec $\omega^\ell = 0$ sur $\Gamma_1^\ell \cup \Gamma_3$, on pose $\omega = (\omega^1, \omega^2)$ avec $\omega^{3-\ell} = 0$, par substitution de $v = u \pm \omega \in U_{ad}$ dans (1.26), il vient :

$$\langle \sigma^\ell v^\ell, \omega^\ell v^\ell \rangle_{H_{\Gamma_2^\ell}^{\ell'} \times H_{\Gamma_2^\ell}^\ell} = \langle f_2^\ell, \omega^\ell v^\ell \rangle_{H_{\Gamma_2^\ell}^{\ell'} \times H_{\Gamma_2^\ell}^\ell}.$$

D'où la condition (1.4).

(1.5) :

(1.5.c) : Pour tout $\omega^\ell \in H_1^\ell$ avec $\omega^\ell = 0$ sur $\Gamma_1^\ell \cup \Gamma_2^\ell$, et $\omega_\eta^\ell = 0$ sur Γ_3 , si on pose $\omega = (\omega^1, \omega^2)$ avec $\omega^{3-\ell} = 0$, par substitution de $v = u \pm \omega \in U_{ad}$ dans (1.26), on obtient alors

$$\langle \sigma^\ell v^\ell, \omega^\ell v^\ell \rangle_{H_{\Gamma_3}^{\ell'} \times H_{\Gamma_3}^\ell} = 0.$$

C'est à dire :

$$\langle \sigma_\tau^\ell, \omega_\tau^\ell \rangle_{H_{\Gamma_3}^{\ell'} \times H_{\Gamma_3}^\ell} = 0$$

Et donc $\sigma_\tau^\ell = 0$ sur Γ_3 , d'où la condition (1.5.c).

$\sigma_v^\ell \leq 0$: Soit $\omega^\ell \in H_1^\ell$ avec $\omega^\ell = 0$ sur $\Gamma_1^\ell \cup \Gamma_2^\ell$ et $\omega_\tau^\ell = 0$, $\omega_v^\ell \leq 0$ sur Γ_3 , si on pose $\omega = (\omega^1, \omega^2)$ avec $\omega^{3-\ell} = 0$, en remplaçant $v = u \pm \omega \in U_{ad}$ dans (1.26), on trouve :

$$\langle \sigma^\ell v^\ell, \omega^\ell v^\ell \rangle_{H_{\Gamma_3}^{\ell'} \times H_{\Gamma_3}^\ell} \geq 0.$$

Et puisque $\omega_\tau^\ell = 0$ et $\omega_v^\ell \leq 0$ sur Γ_3 , on a alors

$$\langle \sigma_v^\ell, \omega_v^\ell \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma_3} \geq 0$$

D'où on déduit que $\sigma_v^\ell \leq 0$ sur Γ_3 .

(1.5.a) : Pour tout $\omega = (\omega^1, \omega^2) \in H_1$ avec $\omega^\ell = 0$ sur $\Gamma_1^\ell \cup \Gamma_2^\ell$, $\ell = 1, 2$ et $[\omega_v] = 0$ sur Γ_3 , et $\omega_\tau^\ell = 0$ sur Γ_3 , et pour $v = u \pm \omega \in U_{ad}$ dans (1.26), on obtient :

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma_v^\ell, \omega_v^\ell \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma_3} = 0.$$

Ou encore en utilisant le fait que $\omega_v^1 = -\omega_v^2$ sur Γ_3 , il en découle :

$$\langle \sigma_v^1 - \sigma_v^2, \omega_v^\ell \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma_3} = 0.$$

D'où l'égalité :

$$\langle \sigma_v^1, \omega_v^\ell \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma_3} = \langle \sigma_v^2, \omega_v^\ell \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma_3}.$$

Ce qui donne la condition (1.5.a).

$[u_v] \leq 0$: L'appartenance $u \in U_{ad}$ entraîne que $[u_v] \leq 0$ sur Γ_3 .

$\sigma_v[u_v] = 0$: Pour $v = 2u \in U_{ad}$ et pour $v = 0 \in U_{ad}$ dans (1.26), il résulte :

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell v^\ell, u^\ell v^\ell \rangle_{H_{\Gamma_2^\ell}^{\ell'} \times H_{\Gamma_2^\ell}^\ell} = \sum_{\ell=1}^2 \langle f_2^\ell, u^\ell v^\ell \rangle_{H_{\Gamma_2^\ell}^{\ell'} \times H_{\Gamma_2^\ell}^\ell}$$

Et moyennant (1.4) avec $u^\ell = 0$ sur Γ_1^ℓ , on a donc

$$\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \sigma^\ell v^\ell \cdot u^\ell v^\ell d\Gamma_3 = 0$$

En utilisant (1.5.a) et (1.5.c), on obtient :

$$\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \sigma_v(u_v^\ell) d\Gamma_3 = 0.$$

Ou encore :

$$\int_{\Gamma_3} \sigma_v[u_v] d\Gamma_3 = 0.$$

Et $\sigma_v \leq 0$ et $[u_v] \leq 0$ sur Γ_3 , d'où $\sigma_v[u_v] = 0$ sur Γ_3 .

Remarque 1.6: En utilisant le fait que $0 \in U_{ad}$ et $(\epsilon(\varphi^1), \epsilon(\varphi^2)) \in \Sigma_{ad}$, alors U_{ad} , Σ_{ad} , sont deux sous-ensembles convexes, fermés et non vides de V , $\mathcal{H}$, respectivement.

Théorème 1.2: Pour $\sigma^\ell = \mathcal{F}^\ell(\epsilon(u^\ell))$ et $u = (u^1, u^2) \in V$, si $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2)$ est une solution du problème $\mathbb{P}_2$, alors u est une solution du problème $\mathbb{P}_1$.

Démonstration. On suppose que $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2)$ est une solution de (1.25), on commence par démontrer que $u \in U_{ad}$. On suppose que $u \notin U_{ad}$ et notons par $u_* = (u_*^1, u_*^2)$ la projection de u sur U_{ad} qui est caractérisée par :

$$\langle u_* - u, v \rangle \geq \langle u_* - u, u_* \rangle > \langle u_* - u, u \rangle \quad \forall v \in U_{ad} \quad (1.27)$$

ce qui nous permet de conclure l'existence d'un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\langle u_* - u, v \rangle > \alpha > \langle u_* - u, u \rangle \quad \forall v \in U_{ad} \quad (1.28)$$

on introduit la fonction τ_* définie par :

$$\tau_* = (\tau_*^1, \tau_*^2) = (\epsilon(u_*^1 - u^1), \epsilon(u_*^2 - u^2)) \in \mathcal{H}. \quad (1.29)$$

En utilisant le produit scalaire défini par (1.13) avec (1.23.c), on déduit :

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \epsilon(u_*^\ell - u^\ell), \epsilon(v^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} > \alpha > \sum_{\ell=1}^2 \langle \epsilon(u_*^\ell - u^\ell), \epsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell}, \quad \forall v \in U_{ad}$$

Et de (1.5.b), on a

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \tau_*^\ell, \epsilon(v^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} > \alpha > \sum_{\ell=1}^2 \langle \tau_*^\ell, \epsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} \quad \forall v \in U_{ad}. \quad (1.30)$$

En prenant $v = 0 \in U_{ad}$ dans (1.30), il vient :

$$\alpha < 0. \quad (1.31)$$

Il est aisé de vérifier que

$$\langle \tau_*^1, \epsilon(v^1) \rangle_{\mathcal{H}^1} + \langle \tau_*^2, \epsilon(v^2) \rangle_{\mathcal{H}^2} \geq 0 \quad \forall v \in U_{ad}. \quad (1.32)$$

En effet, on suppose qu'il existe $v_* = (v_*^1, v_*^2) \in U_{ad}$ tel que :

$$\langle \tau_*^1, \epsilon(v_*^1) \rangle_{\mathcal{H}^1} + \langle \tau_*^2, \epsilon(v_*^2) \rangle_{\mathcal{H}^2} < 0 \quad (1.33)$$

puisque $\beta v_* \in U_{ad} \forall \beta > 0$, si on remplace $v = \beta v_*$ dans (1.30), il vient

$$\beta \left(\langle \tau_*^1, \epsilon(v_*^1) \rangle_{\mathcal{H}^1} + \langle \tau_*^2, \epsilon(v_*^2) \rangle_{\mathcal{H}^2} \right) > \alpha \quad \forall \beta > 0.$$

Et en faisant tendre β vers $+\infty$ avec (1.33), on déduit que $\alpha \leq -\infty$, ce qui contredit le fait que α est un réel. D'où (1.32).

Posons

$$\varepsilon_* = (\varepsilon_*^1, \varepsilon_*^2) = (\epsilon(\varphi^1), \epsilon(\varphi^2)) \quad (1.34)$$

En utilisant (1.29) et (1.34), on obtient :

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \tau_*^\ell + \varepsilon_*^\ell, \epsilon(v^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} = \sum_{\ell=1}^2 \langle \tau_*^\ell, \epsilon(v^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} + \langle \varphi, v \rangle \geq 0 + \langle \varphi, v \rangle, \quad \forall v \in U_{ad}.$$

Donc $\tau_* + \varepsilon_* \in \Sigma_{ad}$.

En utilisant maintenant (1.25) pour $\tau = \tau_* + \varepsilon_*$, on a alors

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \tau_*^\ell + \varepsilon_*^\ell - \sigma^\ell, \epsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} \geq 0$$

on a

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \tau_*^\ell, \epsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} \geq \sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell - \varepsilon_*^\ell, \epsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell}$$

ce qui implique, grâce aux (1.30) et (1.31), que

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell - \varepsilon_*^\ell, \epsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} < 0 \quad (1.35)$$

On vérifie que $2\sigma - \varepsilon_* \in \Sigma_{ad}$: On a

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle 2\sigma^\ell - \varepsilon_*^\ell, \epsilon(v^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} = 2 \sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \epsilon(v^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} - \langle \varphi, v \rangle \quad \forall v \in U_{ad}.$$

Par ailleurs, comme $\sigma \in \Sigma_{ad}$, on a

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle 2\sigma^\ell - \varepsilon_*^\ell, \epsilon(v^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} \geq 2\langle \varphi, v \rangle - \langle \varphi, v \rangle = \langle \varphi, v \rangle \quad \forall v \in U_{ad}.$$

C'est à dire $2\sigma - \varepsilon_* \in \Sigma_{ad}$.

A partir de (1.13), il vient

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell - \varepsilon_*^\ell, \epsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} \geq \sum_{\ell=1}^2 \langle 2\sigma^\ell - \varepsilon_*^\ell, \epsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} - \langle \varphi, u \rangle$$

Par ailleurs, comme $2\sigma - \varepsilon_* \in \Sigma_{ad}$, on a

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell - \varepsilon_*^\ell, \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} \geq 0. \quad (1.36)$$

Les relations (1.35) et (1.36) constituent une contradiction, on déduit alors que $u \in U_{ad}$. Il ne reste que de prouver l'inéquation donnée dans (1.24).

Pour $\tau = \varepsilon_*$. En tenant compte (1.25), il vient

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \varepsilon_*^\ell - \sigma^\ell, \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} \geq 0.$$

Et de (1.13), (1.34) on tire :

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} \leq \langle \varphi, u \rangle.$$

Comme $\sigma \in \Sigma_{ad}$ et $u \in U_{ad}$, on a alors

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} \geq \langle \varphi, u \rangle.$$

D'où l'égalité :

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} = \langle \varphi, u \rangle. \quad (1.37)$$

Moyennant (1.37) et $\sigma \in \Sigma_{ad}$, on a

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \mathcal{F}^\ell(\varepsilon(u^\ell)), \varepsilon(v^\ell) - \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} = \sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \varepsilon(v^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} - \langle \varphi, u \rangle \quad \forall v \in U_{ad}.$$

C'est à dire

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \mathcal{F}^\ell(\varepsilon(u^\ell)), \varepsilon(v^\ell) - \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} \geq \langle \varphi, v - u \rangle \quad \forall v \in U_{ad}.$$

Donc u est une solution du Problème $\mathbb{P}_1$.

Le Théorème 1.1 et Théorème 1.2, nous permettent de conclure le résultat suivant :

Corollaire 1.1: Pour $\sigma^\ell = \mathcal{F}^\ell(\varepsilon(u^\ell))$, $u = (u^1, u^2) \in V$, si $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2)$ est une solution du Problème $\mathbb{P}_2$, alors (u, σ) est une solution du problème $\mathbb{P}$.

Aussi, le Théorème 1.1 et la Remarque 1.5, nous permettent de déduire le résultat :

Corollaire 1.2: Si $u = (u^1, u^2)$ est une solution du Problème $\mathbb{P}_1$, et on pose $\sigma^\ell = \mathcal{F}^\ell(\varepsilon(u^\ell))$, $\ell = 1, 2$ on a σ est une solution du Problème $\mathbb{P}_2$.

1.1.3 Résultats d'existence et d'unicité

Le but de ce paragraphe est de prouver quelques résultats d'existence et d'unicité des solutions des problèmes variationnels $\mathbb{P}_1$, $\mathbb{P}_2$, et de préciser le lien entre ces problèmes.

Théorème 1.3: Sous les hypothèses (1.6)–(1.8), le problème variationnel $\mathbb{P}_1$ possède une solution unique .

Démonstration. Soit $\omega \in V$, il est facile de vérifier que l'application :

$$v \mapsto \sum_{\ell=1}^2 \langle \mathcal{F}^\ell(\epsilon(\omega^\ell)), \epsilon(v^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell}$$

est une forme linéaire continue sur V (pour ω fixe), par conséquent le Théorème représentation de Riez-Fréchet nous permet de définir l'opérateur

$A : V \longrightarrow V$ tel que

$$\langle A\omega, v \rangle = \sum_{\ell=1}^2 \langle \mathcal{F}^\ell(\epsilon(\omega^\ell)), \epsilon(v^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} \quad \forall \omega, v \in V.$$

Moyennant (1.6) et l'inégalité de Korn, on déduit que l'opérateur A est *fortement monotone* et *Lip-schitzien* sur V . Par ailleurs, U_{ad} est un convexe fermé non vide de V .

Grâce au Théorème du Stampachia (voir Théorème B.15, page 94), on obtient l'existence et l'unicité d'une solution $u \in V$ telle que

$$u \in U_{ad}, \quad \sum_{\ell=1}^2 \langle \mathcal{F}^\ell(\epsilon(u^\ell)), \epsilon(v^\ell) - \epsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} \geq \langle \varphi, u - v \rangle \quad \forall v \in U_{ad}.$$

Théorème 1.4: Sous les hypothèses (1.6)–(1.8), le problème variationnel $\mathbb{P}_2$ possède une solution unique $\sigma \in \mathcal{H}_1$.

Démonstration. Soit $\tilde{\sigma} = (\tilde{\sigma}^1, \tilde{\sigma}^2)$ un élément fixé dans $\mathcal{H}$; on peut vérifier facilement que l'application :

$$\tau \mapsto \sum_{\ell=1}^2 \langle \tau^\ell, (\mathcal{F}^\ell)^{-1}(\tilde{\sigma}^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell}$$

est une forme linéaire continue sur V (pour $\tilde{\sigma}$ fixe), et par conséquent en appliquant le Théorème représentation de Riez-Fréchet, on peut de définir l'opérateur

$B : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ tel que

$$\langle B\tilde{\sigma}, \tau \rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{\ell=1}^2 \langle \tau^\ell, (\mathcal{F}^\ell)^{-1}(\tilde{\sigma}^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} \quad \forall \tau, \tilde{\sigma} \in \mathcal{H}.$$

Tenant compte du fait que Σ_{ad} est convexe, fermé et non vide dans $\mathcal{H}$.

Le théorème de Stampachia, nous assure l'existence et l'unicité $\sigma \in \mathcal{H}$ tel que :

$$\sigma \in \Sigma_{ad}, \quad \sum_{\ell=1}^2 \langle \tau^\ell - \sigma^\ell, (\mathcal{F}^\ell)^{-1}(\sigma^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad}.$$

Il ne reste que de vérifier que $\sigma \in \mathcal{H}_1$.

Pour tout $\Phi^\ell \in D^\ell$, on pose $\Phi = (\Phi^1, \Phi^2)$ où $\Phi^{3-\ell} = 0$, par substitution de $\pm\Phi \in U_{ad}$ dans (1.17) avec $\tau = \sigma$, on obtient :

$$\langle \sigma^\ell, \epsilon(\Phi^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} = \langle \varphi^\ell, \Phi^\ell \rangle_{V(\Omega^\ell)}$$

et compte tenu de (1.15), on a alors

$$\langle \sigma^\ell, \epsilon(\Phi^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} = \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell \Phi^\ell d\Omega^\ell \quad \forall \Phi^\ell \in D^\ell$$

il en résulte que $\text{Div} \sigma^\ell + f_0^\ell = 0$ sur Ω^ℓ , puisque $f_0^\ell \in H^\ell$ alors $\text{Div} \sigma^\ell \in H^\ell$, et par conséquent $\sigma^\ell \in \mathcal{H}_1^\ell$. Dans le paragraphe suivant on s'intéresse à la comparaison entre les solutions des problèmes $\mathbb{P}_1$, $\mathbb{P}_2$ et la solution du problème $\mathbb{P}$.

1.1.4 Résultats d'équivalence

Lemme 1.3: Soit u la solution du problème $\mathbb{P}_1$ donnée par le Théorème 1.3, et soit σ la solution du problème $\mathbb{P}_2$ donnée par Théorème 1.4, alors $\sigma^\ell = \mathcal{F}^\ell(\epsilon(u^\ell))$, $\ell = 1, 2$.

Démonstration. On pose $\sigma_*^\ell = \mathcal{F}^\ell(\epsilon(u^\ell))$, alors d'après le corollaire 1.2, $\sigma_* = (\sigma_*^1, \sigma_*^2)$ est une solution du problème $\mathbb{P}_2$. Comme l'unicité est assurée dans le Théorème 1.4, alors on déduit $\sigma = \sigma_*$.

Théorème 1.5: Sous les hypothèses (1.6)–(1.8), soit $u \in V$ et soit $\sigma \in \mathcal{H}_1$, on considère les assertions suivantes :

- (i) : u est une solution du problème $\mathbb{P}_1$;
- (ii) : σ est une solution du problème $\mathbb{P}_2$;
- (iii) : σ et u vérifient $\sigma^\ell = \mathcal{F}^\ell(\epsilon(u^\ell))$.

Alors la vérification de deux assertions parmi celles ci-dessus entraîne la troisième .

Démonstration. La démonstration du ce théorème est un résultat de Lemme 1.3, le Corollaire 1.1 et le Corollaire 1.2.

1.2 Formulation variationnelle mixte

Le problème qu'on va étudier dans cette section est un problème de contact sans frottement entre deux corps homogènes élastiques isotropes occupants des domaines bornés de $\mathbb{R}^d$. Nous allons considérer des lois de comportements linéaires, c'est à dire $\mathcal{F}^\ell$ est considérée comme une fonction linéaire de ϵ , Plus précisément nous nous limitons au cas de l'élasticité linéaire :

$$\sigma^\ell = A^\ell \epsilon(u^\ell) \quad (\sigma_{ij}^\ell = A_{ijpq}^\ell \epsilon_{pq}(u^\ell))$$

où $A^\ell = (A_{ijpq}^\ell)$ est un tenseur d'ordre quatre. Ses composantes A_{ijpq}^ℓ s'appellent coefficients d'élasticité qui sont indépendants du tenseur des déformations. Dans le cas non-homogène les A_{ijpq}^ℓ dépendent de $x \in \Omega^\ell$, et dans les cas contraire ils sont constantes. On suppose d'habitude que A^ℓ est un tenseur symétrique et elliptique :

$$\langle A^\ell \epsilon_1, \epsilon_2 \rangle = \langle \epsilon_1, A^\ell \epsilon_2 \rangle \quad \forall x \in \Omega^\ell \quad \forall \epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathbb{S}^d,$$

$$\text{il existe } m > 0 \text{ tel que } \langle A^\ell \epsilon, \epsilon \rangle \geq m \|\epsilon\|^2 \quad \forall x \in \Omega^\ell \quad \forall \epsilon \in \mathbb{S}^d.$$

La condition de symétrie est équivalente aux égalités :

$$A_{ijpq}^\ell = A_{pqij}^\ell = A_{ijqp}^\ell$$

et elle réduit à 21 le nombre de coefficients d'élasticité qui définissent le tenseur A^ℓ en chaque point $x \in \Omega^\ell$, la condition d'ellipticité entraîne l'inversibilité du tenseur A^ℓ donc la loi de comportement $\sigma^\ell = A^\ell \varepsilon(u^\ell)$, équivaut à :

$$\varepsilon(u^\ell) = (A^\ell)^{-1} \sigma^\ell$$

où $(A^\ell)^{-1}$ est l'inverse du tenseur A^ℓ , pour plus de détails sur le cas linéaire, on peut se référer [51]. Dans ce chapitre, on considère le cas *homogène* et *isotrope* (c'est à dire toutes les directions autour d'un point sont matériellement équivalents) les coefficients A_{ijpq}^ℓ sont donnés par :

$$A_{ijpq}^\ell = \tilde{\lambda}^\ell \delta_{ij} \delta_{pq} + \tilde{\mu}^\ell (\delta_{jp} \delta_{iq} + \delta_{iq} \delta_{jp})$$

où les scalaires $\tilde{\lambda}^\ell, \tilde{\mu}^\ell$ sont les coefficients de Lamé et δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

En utilisant les coefficients de Lamé dans le loi de comportement et les composantes σ_{ij}^ℓ du tenseur des contraintes, il vient :

$$\sigma^\ell = A^\ell \varepsilon(u^\ell) = \tilde{\lambda}^\ell \text{tr}(\varepsilon(u^\ell)) I_d + 2\tilde{\mu}^\ell \varepsilon(u^\ell) \quad (1.38)$$

d'où, par contraction

$$\sigma_{ij}^\ell = \tilde{\lambda}^\ell \delta_{ij} \varepsilon_{pp}(u^\ell) + 2\tilde{\mu}^\ell \varepsilon_{ij}(u^\ell), \quad \sigma_{pp}^\ell = (3\tilde{\lambda}^\ell + 2\tilde{\mu}^\ell) \varepsilon_{pp}(u^\ell).$$

En conclusion, l'opérateur d'élasticité $A^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait :

$$\begin{cases} (a) & A^\ell \text{ linéaire, continu;} \\ (b) & A^\ell \text{ symétrique : } \langle A^\ell \epsilon_1, \epsilon_2 \rangle = \langle \epsilon_1, A^\ell \epsilon_2 \rangle \quad \forall \epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathbb{S}^d; \\ (c) & A^\ell \text{ elliptique : } \exists m > 0, \langle A^\ell \epsilon, \epsilon \rangle \geq m \|\epsilon\|^2 \quad \forall \epsilon \in \mathbb{S}^d. \end{cases} \quad (1.39)$$

1.2.1 Position du problème linéaire

On considère le problème linéaire, noté par $\mathbb{P}$ suivant :

Problème $\mathbb{P}$: Trouver les champs des déplacements $u = (u^1, u^2)$ avec $u^\ell : \Omega^\ell \rightarrow \mathbb{R}^d$ et les champs des contraintes $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2)$ avec $\sigma^\ell : \Omega^\ell \rightarrow \mathbb{S}^d$, tels que :

$$\sigma^\ell = A^\ell \varepsilon(u^\ell) \quad \text{dans } \Omega^\ell \quad (1.40)$$

$$\text{Div} \sigma^\ell + f_0^\ell = 0 \quad \text{dans } \Omega^\ell \quad (1.41)$$

$$u^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\ell \quad (1.42)$$

$$\sigma^\ell \nu^\ell = f_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_2^\ell \quad (1.43)$$

$$\begin{cases} (a) & \sigma_v^1 = \sigma_v^2 \equiv \sigma_v \\ (b) & [u_v] \leq 0, \sigma_v \leq 0, \sigma_v [u_v] = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \\ (c) & \sigma_\tau^1 = \sigma_\tau^2 = 0 \end{cases} \quad (1.44)$$

Ce problème n'est autre que le problème considéré dans le premier chapitre en remplaçant la loi de comportement $\sigma^\ell = \mathcal{F}^\ell(\varepsilon(u^\ell))$ par $\sigma^\ell = A^\ell \varepsilon(u^\ell)$.

1.2.2 Formulation variationnelle mixte

Pour établir la formulation variationnelle mixte du problème posé, on commencer par donner quelques définitions qui seront utiles par la suite : On définit l'ensemble de λ -admissible suivant :

$$M = \left\{ \mu \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3) \mid \int_{\Gamma_3} \mu \psi d\Gamma_3 \geq 0 \quad \forall \psi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3), \psi \geq 0 \text{ p.p sur } \Gamma_3 \right\}. \quad (1.45)$$

On définit les opérateurs suivants :

$$\begin{cases} a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \text{ telque} \\ a(u, v) = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} A^\ell \epsilon(u^\ell) \epsilon(v^\ell) d\Omega^\ell \end{cases} \quad (1.46)$$

$$\begin{cases} b : V \times M \longrightarrow \mathbb{R} \text{ telque} \\ b(u, \mu) = \int_{\Gamma_3} \mu [u_\nu] d\Gamma_3 \end{cases} \quad (1.47)$$

$$\begin{cases} L : V \longrightarrow \mathbb{R} \text{ telque} \\ L(v) = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell v^\ell d\Omega^\ell + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell v^\ell d\Gamma_2^\ell \end{cases} \quad (1.48)$$

Remarque 1.7:

- M est un sous-ensemble fermé, convexe, non vide dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)$.
- $a(.,.)$ est une forme bilinéaire continue, coercive, symétrique.
- $L(.)$ est une forme linéaire continue sur V .

Remarque 1.8: Sous les hypothèses (1.7), (1.8) et (1.39) alors le problème $\mathbb{P}_1$ admet une solution unique .

En effet, en tenant compte du fait que A^ℓ est un opérateur *maximal monotone* et *Lipschitzien*. La Remarque 1.8 est une conséquence du Théorème 1.3, pour $\sigma^\ell = A^\ell \epsilon(u^\ell)$, $\ell = 1, 2$.

Ceci nous permet de déduire le résultat :

Lemme 1.4: Pour $\sigma^\ell = A^\ell \epsilon(u^\ell)$, $\ell = 1, 2$, si u est une solution du Problème $\mathbb{P}_1$, alors :

$$\sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2 (\equiv -\lambda) \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (1.49)$$

$$\lambda \in M \quad (1.50)$$

$$a(u, v) + b(v, \lambda) = L(v); \quad \forall v \in V \quad (1.51)$$

$$b(v, \mu - \lambda) \leq 0; \quad \forall \mu \in M \quad (1.52)$$

Démonstration

(1.49) : En utilisant le résultat du Théorème 1.1, on déduit que (u, σ) est une solution de $\mathbb{P}$, donc $\sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2$.

(1.50) : L'appartenance de u à $\mathcal{H}_1$, nous permet facilement de déduire que $\sigma_v \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)$. D'autre part, en tenant compte du fait que $\sigma_v \leq 0$ sur Γ_3 , d'après la condition (1.44.b), on déduit que $\lambda \geq 0$ sur Γ_3 , d'où sur $\forall \psi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3)$, $\psi \geq 0$ sur Γ_3 , on a

$$\langle \lambda, \psi \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma_3} \geq 0$$

d'où $\lambda \in M$.

(1.51) : En utilisant (1.46), (1.47), $\sigma^\ell = A^\ell \epsilon(u^\ell)$, $\ell = 1, 2$, avec (1.49), on a

$$a(u, v) + b(v, \lambda) = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \sigma^\ell \epsilon(v^\ell) d\Omega^\ell - \int_{\Gamma_3} \sigma_v [v_v] d\Gamma_3 \quad \forall v \in V.$$

En appliquant la formule de Green, avec (1.40), on tire :

$$a(u, v) + b(v, \lambda) = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell \cdot v^\ell d\Omega^\ell + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma^\ell} \sigma^\ell v^\ell d\Gamma^\ell - \int_{\Gamma_3} \sigma_v [v_v] d\Gamma_3.$$

De (1.44.c), il vient

$$a(u, v) + b(v, \lambda) = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell \cdot v^\ell d\Omega^\ell + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma^\ell} \sigma_v v_v^\ell d\Gamma^\ell - \int_{\Gamma_3} \sigma_v [v_v] d\Gamma_3.$$

En remarquant que $\sigma_v [v_v] = 0$ sur Γ_3 de plus $v^\ell = 0$ sur Γ_1^ℓ , il en résulte :

$$a(u, v) + b(v, \lambda) = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell v^\ell d\Omega^\ell + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} \sigma_v v_v^\ell d\Gamma_2^\ell.$$

Ou encore en utilisant la condition $\sigma^\ell v^\ell = f_2^\ell$ sur Γ_2^ℓ ; $\ell = 1, 2$, on a

$$a(u, v) + b(v, \lambda) = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell v^\ell d\Omega^\ell + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell v_v^\ell d\Gamma_2^\ell$$

D'où l'égalité (1.51).

(1.52) : On a

$$\forall \mu \in M : b(u, \mu - \lambda) = b(u, \mu + \sigma_v)$$

Ce qui implique que :

$$b(u, \mu - \lambda) = \int_{\Gamma_3} \mu [u_v] d\Gamma_3 + \int_{\Gamma_3} \sigma_v [u_v] d\Gamma_3.$$

Moyennant les conditions $\sigma_v [u_v] = 0$ et $[u_v] \leq 0$ sur Γ_3 avec $\mu \in M$, il découle :

$$b(u, \mu - \lambda) = \int_{\Gamma_3} \mu [u_v] d\Gamma_3 \leq 0.$$

D'où (1.52) .

Le lemme précédent nous permet donc de donner la formulation variationnelle suivante :

Problème $\mathbb{P}_m$: Trouver $u \in V$ et $\lambda \in M$ tels que :

$$a(u, v) + b(v, \lambda) = L(v) \quad \forall v \in V \quad (1.53)$$

$$b(v, \mu - \lambda) \leq 0 \quad \forall \mu \in M. \quad (1.54)$$

Remarque 1.9: Grâce au lemme précédent, il est facile de remarquer que $\mathbb{P}_m$ n'est autre qu'une formulation mixte du problème $\mathbb{P}_1$, où si u est une solution du problème $\mathbb{P}_1$, alors $(u, -\sigma_v)$ est une solution du problème $\mathbb{P}_m$.

Lemme 1.5: On définit l'application suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{L}(., .) : V \times M \longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathcal{L}(v, \mu) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v) + b(v, \mu). \end{cases}$$

Si $(u, \lambda) \in V \times M$ est une solution du problème $\mathbb{P}_m$ alors :

$$\mathcal{L}(u, \mu) \leq \mathcal{L}(u, \lambda) \quad \forall \mu \in M \quad (1.55)$$

$$\mathcal{L}(u, \lambda) \leq \mathcal{L}(v, \lambda) \quad \forall v \in V. \quad (1.56)$$

Démonstration

(1.55) : Moyennant de (1.46) et (1.54), on a alors :

$$\mathcal{L}(u, \mu) - \mathcal{L}(u, \lambda) = b(u, \mu) - b(u, \lambda) = b(u, \mu - \lambda) \leq 0 \quad \forall \mu \in M.$$

(1.56) : A l'autre face

$$\mathcal{L}(u, \lambda) - \mathcal{L}(v, \lambda) = \frac{1}{2}a(u, u) - L(u) + b(u, \lambda) - \frac{1}{2}a(v, v) + L(v) - b(v, \lambda).$$

Et, (1.53) on a

$$\mathcal{L}(u, \lambda) - \mathcal{L}(v, \lambda) = \frac{1}{2}a(u, u) - a(u, u) - \frac{1}{2}a(v, v) + a(u, v).$$

Ou encore

$$\mathcal{L}(u, \lambda) - \mathcal{L}(v, \lambda) = a(u, v) - \frac{1}{2}a(u, u) - \frac{1}{2}a(v, v).$$

Ce qui implique que

$$\mathcal{L}(u, \lambda) - \mathcal{L}(v, \lambda) = -\frac{1}{2} [a(u, u) - 2a(u, v) + a(v, v)].$$

On obtient

$$\mathcal{L}(u, \lambda) - \mathcal{L}(v, \lambda) = -\frac{1}{2}a(u - v, u - v) \leq 0.$$

Le lemme 1.5, nous permet de réécrire $\mathbb{P}_m$ comme suit :

Problème $\tilde{\mathbb{P}}_m$: Trouver $u \in V$ et $\lambda \in M$ tels que :

$$\mathcal{L}(u, \mu) \leq \mathcal{L}(u, \lambda) \leq \mathcal{L}(v, \lambda) \quad \forall v \in V \quad \forall \mu \in M. \quad (1.57)$$

Théorème 1.6: Soient $u \in V$ et $\lambda \in M$ alors les deux hypothèses suivantes sont équivalentes :

- (i) : (u, λ) est une solution du problème $\mathbb{P}_m$
- (ii) : (u, λ) est une solution du Problème $\tilde{\mathbb{P}}_m$.

Démonstration. L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est évidente en tenant compte le Lemme 1.5.

Reste à démontrer l'implication inverse (ii) $\Rightarrow$ (i). Soit donc (u, λ) une solution du problème $\tilde{\mathbb{P}}_m$ et $v \in V, \mu \in M$, en utilisant l'inégalité (1.55), il résulte :

$$\frac{1}{2}a(u, u) - L(u) + b(u, \mu) \leq \frac{1}{2}a(u, u) - L(u) + b(u, \lambda).$$

C'est à dire que :

$$b(u, \mu) \leq b(u, \lambda).$$

D'où l'inégalité (1.54) suivante :

$$b(u, \mu - \lambda) \leq 0.$$

En appliquant le Théorème de représentation de *Riesz-Frechet* sur la forme :

$$v \mapsto L(v) - b(v, \lambda).$$

On déduit qu'il existe un unique élément $\varphi_\lambda \in V$ tel que :

$$L(v) - b(v, \lambda) = \langle \varphi_\lambda, v \rangle \quad \forall v \in V.$$

Et, (1.56) on a

$$\frac{1}{2}a(u, u) - \langle \varphi_\lambda, u \rangle \leq \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \varphi_\lambda, v \rangle \quad \forall v \in V.$$

Ce qui n'est autre que le problème de minimisation de l'énergie $J(u) = \frac{1}{2}a(u, u) - \langle \varphi_\lambda, u \rangle$ qui est, dans le cas où $a(.,.)$ est symétrique, en utilisant le théorème du *Lax-Milgram* (page 94), on conclut que est une solution de :

$$a(u, v) = \langle \varphi_\lambda, v \rangle \quad \forall v \in V.$$

D'où (1.53).

Lemme 1.6: Si u est une solution du problème $\mathbb{P}_1$ alors

$$u \in U_{ad} \tag{1.58}$$

$$a(u, v - u) \geq L(v - u) \quad \forall v \in U_{ad}. \tag{1.59}$$

Démonstration. Il est clair que $u \in U_{ad}$, (grâce aux hypothèses (1.3)–(1.5)). Alors il ne reste que de prouver l'inégalité (1.59). Pour $(u, -\sigma_v)$ solution du problème $\tilde{\mathbb{P}}_m$, on a :

$$\mathcal{L}(u, -\sigma_v) \leq \mathcal{L}(v, -\sigma_v) \quad \forall v \in U_{ad}$$

ou bien :

$$\frac{1}{2}a(u, u) - L(u) + b(u, -\sigma_v) \leq \frac{1}{2}a(v, v) - L(v) + b(v, -\sigma_v) \quad \forall v \in U_{ad}. \tag{1.60}$$

Et puisque $\sigma_v[u_v] = 0$ sur Γ_3 , il résulte :

$$b(u, -\sigma_v) = - \int_{\Gamma_3} \sigma_v[u_v] d\Gamma_3 = 0.$$

D'autre part $\forall v \in U_{ad}$, on a alors $[v_v] \leq 0$ ce qui nous permet en utilisant le Théorème 1.1 et l'inégalité (1.44.b) de conclure que $\sigma_v \leq 0$, et par conséquent $b(v, -\sigma_v) \leq 0$.

De (1.60), on tire :

$$\frac{1}{2}a(u, u) - L(u) \leq \frac{1}{2}a(v, v) - L(v) \quad \forall v \in U_{ad}.$$

En appliquant le théorème du *Stampachia* on a (1.59).

Remarque 1.10: Le lemme 1.6, nous permet d'introduire une autre formulation variationnelle classique faible de la forme :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in U_{ad} \text{ telque :} \\ a(u, v - u) \geq L(v - u) \quad \forall v \in U_{ad} \end{cases} \quad (1.61)$$

Il est aisé de vérifier que le problème (1.61) possède une solution unique, en utilisant le théorème de *Stampachia*.

1.2.3 Résultats d'existence et d'unicité

L'objectif principal dans ce paragraphe est d'obtenir un résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème $\mathbb{P}_m$.

Lemme 1.7: Le problème $\mathbb{P}_m$ admet une unique solution dans $V \times M$.

Démonstration. En utilisant le Théorème 1.3 et le Lemme 1.4, il résulte que $\mathbb{P}_m$ admet aux moins une solution de la forme $(u, -\sigma_v) \in V \times M$. Reste à vérifier que cette solution est unique, pour cela on suppose que le problème $\mathbb{P}_m$ admet deux solutions (u_1, λ_1) , (u_2, λ_2) , on a alors :

$$a(u_1, v) + b(v, \lambda_1) = L(v) = a(u_2, v) + b(v, \lambda_2) \quad \forall v \in V.$$

Et par conséquent

$$a(u_1 - u_2, v) + b(v, \lambda_1 - \lambda_2) = 0 \quad \forall v \in V. \quad (1.62)$$

Pour $v = u_1 - u_2 \in V$ dans (1.62), il résulte :

$$a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) + b(u_1 - u_2, \lambda_1 - \lambda_2) = 0 \quad (1.63)$$

Et comme $a(., .)$ est positive et de plus

$$b(u_1 - u_2, \lambda_1 - \lambda_2) = -[b(u_1, \lambda_2 - \lambda_1) + b(u_2, \lambda_1 - \lambda_2)] \geq 0.$$

Il vient

$$a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = b(u_1 - u_2, \lambda_1 - \lambda_2) = 0.$$

Ce qui implique que

$$u_1 = u_2. \quad (1.64)$$

Moyennant (1.62) et (1.64), on a alors

$$b(v, \lambda_1 - \lambda_2) = 0 \quad \forall v \in V$$

il en résulte donc que $\lambda_1 = \lambda_2$.

Théorème 1.7: Pour $\sigma^\ell = A^\ell \epsilon(u^\ell)$, $\ell = 1, 2$ soient $u \in V$ et $\lambda \in M$, les hypothèses suivantes sont équivalentes :

- (i) : u est une solution du Problème $\mathbb{P}_1$ avec $\lambda = -\sigma_\nu$;
- (ii) : (u, λ) est une solution du Problème $\mathbb{P}_m$.

Démonstration. L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est claire en utilisant le Lemme 1.4. Pour l'implication inverse (ii) $\Rightarrow$ (i) : Soit $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ une solution du problème $\mathbb{P}_1$, pour $\tilde{\sigma}^\ell = A^\ell \epsilon(\tilde{u}^\ell)$, $\ell = 1, 2$, grâce au Lemme 1.4, on conclut que $(\tilde{u}, -\tilde{\sigma}_\nu)$ est une solution du problème $\mathbb{P}_m$. Ceci nous permet de conclure que $u = \tilde{u}$, en tenant compte du fait que la solution de $\mathbb{P}_m$ est unique, donc u est une solution du problème $\mathbb{P}_1$, avec $\lambda = -\sigma_\nu$.

2. ETUDE NUMÉRIQUE D'UN PROBLÈME ÉLASTIQUE LINÉAIRE DE CONTACT

Résumé :

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude numérique d'un problème de contact statique sans frottement entre deux corps ayant une loi de comportement élastique linéaire. En se basant sur la méthode des éléments finis linéaire et quadratique, on arrive à formuler le problème, noté P_m^h , qui discrétise le problème variationnel mixte $\mathbb{P}_m$. En appliquant l'inégalité des projections, le problème discrétisé se ramène à la recherche d'un point fixe. La méthode de point fixe sur les forces de contact (APFF), nous permet d'illustrer un algorithme.

Contenu :

1. Espaces discrets ;
2. Problème discret ;
3. Formulation en point fixe ;
4. Formulations matricielles :
 - 4.1. Formulation matricielle classique ;
 - 4.2. Formulation matricielle approché de point fixe sur les forces de contact ;
 - 4.3. Algorithme de point fixe sur les forces de contact (APFF) ;
 - 4.3. Simulation numérique.

2.1 Espaces discrets

Pour simplifier on suppose que Ω^ℓ est un domaine polygones, et pour tout $h_\ell > 0$, destiné à tendre vers 0, on associe à h_ℓ la triangulation $\mathcal{T}_h^\ell$ de Ω^ℓ en triangles de taille maximale h_ℓ . La triangulation $\mathcal{T}_h^\ell$ est *régulière*, c'est à dire qu'il existe une constante strictement positive $\alpha > 0$ indépendante du paramètre h telle que (voir [17]) :

$$\frac{\rho_K}{h_K} \geq \alpha, \quad \forall K \in \cup_{h_\ell > 0} \mathcal{T}_h^\ell, \quad (2.1)$$

où ρ_K le diamètre de grand cycle fermée contenu dans K . Pour tous entier q , on note aussi par $P_q(K)$ l'espace des polynômes définies sur K de degré inférieur ou égale à q . L'ensemble des nœuds dans Γ_3 de triangulation $\mathcal{T}_h^\ell$, est défini par $\zeta_h^\ell = \left\{ c_1 = x_0^\ell, x_1^\ell, \dots, x_{N_h^\ell+1}^\ell = c_2 \right\}$. On définit les espaces approchés comme suit :

$$V_h(\Omega^\ell) = \left\{ v_h^\ell \in (C(\overline{\Omega}^\ell))^2 / v_h^\ell|_K \in (P_1(K))^2 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h^\ell \quad v_h^\ell|_{\Gamma_1^\ell} \equiv 0 \right\}, \quad (2.2)$$

$$V_h = V_h(\Omega^1) \times V_h(\Omega^2), \quad (2.3)$$

$$W_h^\ell(\Gamma_3) = \left\{ \psi_h^\ell \in C(\overline{\Gamma}_3) / \exists v_h^\ell \in V_h(\Omega^\ell) \quad v_h^\ell \cdot \nu^\ell = \psi_h^\ell \quad \text{p.p sur } \Gamma_3 \right\}. \quad (2.4)$$

Il est claire que les sous espaces V_h , $W_h^\ell(\Gamma_3)$ sont des sous-espace fermés du dimension fini de V , $L^2(\Gamma_3)$, respectivement.

On souhaite approximer le cône fermé convexe M par un sous ensemble de $W_h^\ell(\Gamma_3)$, pour cela on introduit les ensembles Q_h^ℓ (respectivement : L_h^ℓ) des fonctions dans $W_h^\ell(\Gamma_3)$ non négatives sur Γ_3 (respectivement : sur ξ_h^ℓ) c'est-à-dire :

$$Q_h^\ell = \left\{ \mu_h^\ell \in W_h^\ell(\Gamma_3) / \mu_h^\ell \geq 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \right\}, \quad (2.5)$$

$$L_h^\ell = \left\{ \mu_h^\ell \in W_h^\ell(\Gamma_3) / \mu_h^\ell(x) \geq 0 \quad \forall x \in \xi_h^\ell \right\}. \quad (2.6)$$

On définit les cônes polaires positives $Q_h^{\ell,*}$ (respectivement $L_h^{\ell,*}$) de cône Q_h^ℓ (respectivement L_h^ℓ) comme suit :

$$Q_h^{\ell,*} = \left\{ \mu_h^\ell \in W_h^\ell(\Gamma_3) / \int_{\Gamma_3} \mu_h^\ell \psi_h d\Gamma_3 \geq 0 \quad \forall \psi_h \in Q_h^\ell \right\}, \quad (2.7)$$

$$L_h^{\ell,*} = \left\{ \mu_h^\ell \in W_h^\ell(\Gamma_3) / \int_{\Gamma_3} \mu_h^\ell \psi_h d\Gamma_3 \geq 0 \quad \forall \psi_h \in L_h^\ell \right\}. \quad (2.8)$$

Puisque $Q_h^\ell \subset L_h^\ell$, on a alors $L_h^{\ell,*} \subset Q_h^{\ell,*}$. Le cône convexe $Q_h^{\ell,*}$ dénote l'approximation de type *quadratique* de M , tandis que $L_h^{\ell,*}$ dénote l'approximation de type *linéaire* de M .

2.2 Problème discret

Dans ce paragraphe, on va utiliser tous les sous espaces des dimensions finies qu'on a construit auparavant. On considère la formulation variationnelle discrétisée de $\mathbb{P}_m$ qui sera notée par $\mathbb{P}_m^h$ et

elle est donnée par :

Problème $\mathbb{P}_m^h$: Trouver $u_h \in V_h$ et $\lambda_h \in M_h$ tels que :

$$a(u_h, v_h) + b(v_h, \lambda_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_h, \quad (2.9)$$

$$b(u_h, \mu_h - \lambda_h) \leq 0 \quad \forall \mu_h \in M_h, \quad (2.10)$$

avec $M_h = Q_h^{\ell,*}$ ou $M_h = L_h^{\ell,*}$.

On note par (u_h, λ_h) la solution du problème discrétisé $\mathbb{P}_m^h$, qui désigne aussi la solution approchée de (u, λ) solution du problème mixte $\mathbb{P}_m$.

2.3 Formulation en point fixe

Maintenant, grâce à la projection sur un convexe fermé de M_h , on déduit l'existence d'une projection notée par P_{M_h} de l'espace $W_h^\ell(\Gamma_3)$ sur M_h . Définissons l'application T_h comme suit :

$$\begin{cases} T_h : W_h^\ell(\Gamma_3) \longrightarrow M_h \\ \lambda_h \mapsto T_h(\lambda_h) = P_{M_h}(\lambda_h + r[u_{hv}]) \end{cases} \quad (2.11)$$

où $u_h \in V_h$ est un solution de :

$$a(u_h, v_h) + b(v_h, \lambda_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \quad (2.12)$$

avec $r > 0$ est un paramètre d'augmentation arbitraire.

Remarque 2.1: Pour $\lambda_h \in W_h^\ell(\Gamma_3)$ connu, l'égalité (2.12) admet solution unique $u_h \in V_h$, grâce Théorème B.14 de *Lax-Milgram* (page 94).

Proposition 2.1: Si le couple de fonctions (u_h, λ_h) est une solution du Problème discrétisé $\mathbb{P}_m^h$, alors on a

$$\lambda_h = P_{M_h}(\lambda_h + r[u_{hv}]), \quad (2.13)$$

c'est à dire $\lambda_h = T_h(\lambda_h)$.

Démonstration. En utilisant (2.10), on a alors

$$2r\langle \mu_h - \lambda_h, [u_{hv}] \rangle \leq 0 \quad \forall \mu_h \in M_h.$$

Ce qui implique

$$\|\mu_h - \lambda_h\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 - 2r\langle \mu_h - \lambda_h, [u_{hv}] \rangle + r^2\|[u_{hv}]\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \geq r^2\|[u_{hv}]\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \quad \forall \mu_h \in M_h.$$

c'est à dire

$$\|\mu_h - (\lambda_h + r[u_{hv}])\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \geq \|\lambda_h - (\lambda_h + r[u_{hv}])\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \quad \forall \mu_h \in M_h.$$

D'où l'inégalité (2.13).

La proposition 2.1, nous permet de réécrire le Problème numérique $\mathbb{P}_m^h$ sous la formulation suivante :

Problème $\mathbb{PF}_h$: Trouver $u_h \in V_h$ et $\lambda_h \in M_h$ tels que :

$$a(u_h, v_h) + b(v_h, \lambda_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \quad (2.14)$$

$$\lambda_h = P_{M_h}(\lambda_h + r[u_{hv}]), \quad (2.15)$$

où $M_h = Q_h^{\ell,*}$ ou $M_h = L_h^{\ell,*}$.

Proposition 2.2: Soit $u_h \in V_h$ et $\lambda_h \in M_h$, alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) (u_h, λ_h) est une solution du Problème discrétisé $\mathbb{P}_m^h$;
- (ii) (u_h, λ_h) est une solution du Problème en point fixe $\mathbb{PF}_h$.

Démonstration. L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est évidente en tenant compte de la proposition précédente. Pour montrer l'implication inverse, soit (u_h, λ_h) une solution du problème (2.14)-(2.15), l'égalité (2.14), donne

$$\|\lambda_h - (\lambda_h + r[u_{hv}])\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \leq \|\mu_h - (\lambda_h + r[u_{hv}])\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \quad \forall \mu_h \in M_h.$$

Comme M_h est convexe, alors en choisissant $\mu_h = \lambda_h + t(\zeta_h - \lambda_h) \in M_h$, $t \in]0,1[$ $\zeta_h \in M_h$, on tire

$$r^2 \| [u_{hv}] \|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \leq \| t(\zeta_h - \lambda_h) - r[u_{hv}] \|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \quad \forall t \in]0,1[, \quad \forall \zeta_h \in M_h,$$

d'où on déduit

$$r^2 \| [u_{hv}] \|^2 \leq t^2 \| \zeta_{hv} - \lambda_{hv} \|^2 - 2rt \langle \zeta_{hv} - \lambda_{hv}, [u_{hv}] \rangle + r^2 \| [u_{hv}] \|^2 \quad \forall t \in]0,1[, \quad \forall \zeta_h \in M_h.$$

On obtient alors

$$2r \langle \zeta_{hv} - \lambda_{hv}, [u_{hv}] \rangle \leq t \| \zeta_{hv} - \lambda_{hv} \|^2 \quad \forall t \in]0,1[\quad \forall \zeta_h \in M_h$$

d'où l'inégalité (2.10), lorsque $t \rightarrow 0^+$.

En utilisant le fait que l'espace $W_h^\ell(\Gamma_3)$ est fermé dans $L^2(\Gamma_3)$, on déduit l'existence d'une projection $\pi_h^\ell : L^2(\Gamma_3) \rightarrow W_h^\ell(\Gamma_3)$ telle que :

$$\int_{\Gamma_3} (\pi_h^\ell \psi - \psi) \mu_h d\Gamma_3 = 0 \quad \forall \psi \in L^2(\Gamma_3) \quad \forall \mu_h \in W_h^\ell(\Gamma_3). \quad (2.16)$$

La fonction $\pi_h^\ell \lambda$ désigne la projection de la fonction λ sur l'espace $W_h^\ell(\Gamma_3)$.

Soient K_h^Q et K_h^L les deux sous ensembles de V_h définis par

$$K_h^Q = \{v_h = (v_h^1, v_h^2) \in V_h \mid \pi_h^\ell[v_{hv}] \leq 0 \text{ sur } \Gamma_3\}, \quad (2.17)$$

$$K_h^L = \{v_h = (v_h^1, v_h^2) \in V_h \mid \pi_h^\ell[v_{hv}](x) \leq 0 \quad \forall x \in \xi_h^\ell\}. \quad (2.18)$$

Définition 2.1: Soit X un cône, on appelle cône positif de X , l'ensemble X^* défini par :

$$X^* = \left\{ \mu_h \in W_h^\ell(\Gamma_3) \mid \int_{\Gamma_3} \mu_h \psi_h d\Gamma_3 \geq 0 \quad \forall \psi_h \in X \right\}. \quad (2.19)$$

Lemme 2.1: Soit X est un cône convexe fermé de $W_h^\ell(\Gamma_3)$, alors

$$(X^*)^* = X. \quad (2.20)$$

Démonstration. Pour $\mu_h \in X$, on a $\int_{\Gamma_3} \psi_h \mu_h d\Gamma_3 \geq 0 \quad \forall \psi_h \in X^*$. Ce qui implique que $\mu_h \in (X^*)^*$, d'où l'inclusion $X \subset (X^*)^*$. Reste à vérifier l'inclusion inverse ; Soit $\mu_h \notin X$, d'après le Théorème de *Hahn-Banach* (Théorème B.3, page 90), il résulte qu'ils existent une forme linéaire F_h et un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$, tels que

$$F_h(\mu_h) < \alpha < F_h(\psi_h) \quad \forall \psi_h \in X. \quad (2.21)$$

En appliquant le Théorème de représentation du *Riez-Fréchet*, (Théorème B.4, page 90), alors il existe $\Phi_h \in W_h^\ell(\Gamma_3)$ tel que :

$$F_h(\psi_h) = \int_{\Gamma_3} \Phi_h \psi_h d\Gamma_3 \quad \forall \psi_h \in W_h^\ell. \quad (2.22)$$

Et, en prenant $\psi_h = 0 \in X$ dans (2.21), il vient

$$\alpha < 0. \quad (2.23)$$

Vérifions par absurde que $F_h \geq 0$. On suppose à présent qu'il existe $\psi_h \in X$ tel que $F_h(\psi_h) < 0$, puisque $\beta\psi_h \in X \quad \forall \beta > 0$, si on remplace ψ_h par $\beta\psi_h$ dans (2.21), il vient

$$\beta F_h(\psi_h) > \alpha, \quad \forall \beta > 0.$$

Et en faisant tendre β vers $+\infty$, on déduit que $\alpha \leq -\infty$ ceci constitue une contradiction avec le fait que α soit un réel. On déduit alors

$$F_h(\psi_h) = \int_{\Gamma_3} \Phi_h \psi_h d\Gamma_3 \geq 0 \quad \forall \psi_h \in X.$$

C'est à dire

$$\Phi_h \in X^*. \quad (2.24)$$

Moyennant (2.21)–(2.23), on a alors

$$\int_{\Gamma_3} \Phi_h \mu_h d\Gamma_3 < 0$$

Et, de (2.24), on a $\mu_h \notin (X^*)^*$.

D'où on tire $(X^*)^* \subset X$. Par ceci la démonstration est achevée.

On déduit que

$$(Q_h^{\ell,*})^* = Q_h^\ell \quad \text{et} \quad (L_h^{\ell,*})^* = L_h^\ell. \quad (2.25)$$

Proposition 2.3: S'il existe une solution $(u_h, \lambda_h) \in V_h \times M_h$ du Problème discrétisé $\mathbb{P}_m^h$, alors u_h est une solution de l'inéquation variationnelle discrétisée classique suivante :

$$u_h \in K_h \quad a(u_h, v_h - u_h) \geq L(v_h - u_h) \quad \forall v_h \in K_h \quad (2.26)$$

où $K_h = K_h^Q$ si $M_h = Q_h^{\ell,*}$ et $K_h = K_h^L$ si $M_h = L_h^{\ell,*}$.

Démonstration. Pour $\mu_h = 0 \in M_h$ et $\mu_h = 2\lambda_h \in M_h$ dans (2.10), il résulte :

$$b(u_h, \lambda_h) = 0. \quad (2.27)$$

En utilisant (2.10), (2.16) et (2.27), il en découle

$$b(u_h, \mu_h - \lambda_h) = b(u_h, \mu_h) = \int_{\Gamma_3} \mu_h [u_{hv}] d\Gamma_3 = \int_{\Gamma_3} \mu_h \pi_h^\ell [u_{hv}] d\Gamma_3 \leq 0 \quad \forall \mu_h \in M_h$$

ou encore

$$b(u_h, \mu_h - \lambda_h) \leq 0 \quad \forall \mu_h \in M_h.$$

Ce qui implique que

$$-\pi_h^\ell [u_{hv}] \in M_h^*. \quad (2.28)$$

Si $M_h = Q_h^{\ell,*}$: En utilisant (2.20) et (2.28), on obtient

$$-\pi_h^\ell [u_{hv}] \in Q_h^\ell \quad (2.29)$$

ce qui implique que $u_h \in K_h^Q$. Et de (2.9), (2.27) on tire

$$a(u_h, u_h) = L(u_h). \quad (2.30)$$

Posons $v_h \in K_h^Q$ et puisque $\lambda_h \in M_h = Q_h^{\ell,*}$, on a alors

$$\begin{aligned} a(u_h, v_h) - L(v_h) &= -b(v_h, \lambda_h) \\ &= - \int_{\Gamma_3} \lambda_h [v_{hv}] d\Gamma_3 \\ &= - \int_{\Gamma_3} \lambda_h \pi_h^\ell [v_{hv}] d\Gamma_3 \geq 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

on déduit que

$$a(u_h, v_h) \geq L(v_h) \quad \forall v_h \in K_h^Q. \quad (2.32)$$

Moyennant de (2.30) et (2.32), on a alors

$$a(u_h, v_h - u_h) \geq L(v_h - u_h) \quad \forall v_h \in K_h^Q$$

Donc u_h est une solution du Problème discret classique (2.26) pour $K_h = Q_h^{\ell,*}$.

Si $M_h = L_h^{\ell,*}$: Moyennant (2.20) et (2.28), on obtient :

$$-\pi_h^\ell [u_{hv}] \in L_h^\ell \quad (2.33)$$

c'est à dire $u_h \in K_h^L$ et de (2.9), (2.27), on tire :

$$a(u_h, u_h) = L(u_h). \quad (2.34)$$

Pour tout $v_h \in K_h^L$ et puisque $\lambda_h \in M_h = L_h^{\ell,*}$, on a alors

$$\begin{aligned} a(u_h, v_h) - L(v_h) &= -b(v_h, \lambda_h) \\ &= - \int_{\Gamma_3} \lambda_h [v_{hv}] d\Gamma_3 \\ &= - \int_{\Gamma_3} \lambda_h \pi_h^\ell [v_{hv}] d\Gamma_3 \geq 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

on déduit que

$$a(u_h, v_h) \geq L(v_h) \quad ; \quad \forall v_h \in K_h^L \quad (2.36)$$

Moyennant de (2.34) et (2.36), on a alors

$$a(u_h, v_h - u_h) \geq L(v_h - u_h) \quad \forall v_h \in K_h^L.$$

Donc u_h est une solution du Problème discretisé classique (2.26) pour $K_h = L_h^{\ell,*}$.

Remarque 2.2: Si les deux mèches sont convenables (i.e : $\xi_h^1 = \xi_h^2$), alors $W_h^1(\Gamma_3) = W_h^2(\Gamma_3)$ et par conséquent, pour tout $v_h = (v_h^1, v_h^2) \in V_h$ on a $[v_{hv}] \in W_h^1(\Gamma_3)$, la relation (2.26) peut s'écrire comme suit :

$$a(u_h, v_h) - L(v_h) = - \int_{\Gamma_3} \lambda_h [v_{hv}] d\Gamma_3 \leq 0 \quad \forall v_h \in K_h.$$

Remarque 2.3: Comme K_h est un convexe fermé non vide dans V_h et puisque $a(.,.)$ est une forme bilinéaire continue V_h -elliptique et $L(.)$ est une forme linéaire continue sur V_h alors l'inéquation variationnelles (2.26) admet une unique solution $u_h \in K_h$ (grâce au Théorème B.15 du Stampachia).

Proposition 2.4: Pour $\sigma_h^\ell = A^\ell \epsilon(u_h^\ell)$, si u_h est une solution du Problème discrétisé classique (2.26), alors le couple (u_h, σ_h) vérifie les hypothèses suivantes :

$$\text{Div} \sigma_h^\ell + f_0^\ell = 0 \quad \text{dans } \Omega^\ell \quad (2.37)$$

$$u_h^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\ell \quad (2.38)$$

$$\sigma_h^\ell \nu^\ell = f_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_2^\ell \quad (2.39)$$

$$\begin{cases} (a) : & \sigma_{hv}^1 = \sigma_{hv}^2 \equiv \sigma_v^h \\ (b) : & \sigma_v^h \leq 0 \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (2.40)$$

$$\int_{\Gamma_3} \sigma_v^h [u_{hv}] d\Gamma_3 = 0. \quad (2.41)$$

Démonstration.

(2.37) : Pour tout $\Phi^\ell \in D^\ell (\equiv D(\Omega^\ell)^2)$, on pose $\Phi = (\Phi^1, \Phi^2)$ avec $\Phi^{3-\ell} = 0$; en substituant $v_h = u_h \pm \Phi \in K_h$ dans (2.26), on obtient

$$\langle A^\ell \epsilon(u_h^\ell), \epsilon(\Phi^\ell) \rangle = \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell \Phi^\ell d\Omega^\ell.$$

En utilisant la formule de *Green* avec $\sigma_h^\ell = A^\ell \epsilon(u_h^\ell)$, il découle :

$$-\langle \text{Div} \sigma_h^\ell, \Phi^\ell \rangle_{H^\ell} = \langle f_0^\ell, \Phi^\ell \rangle_{H^\ell} \quad \forall \Phi^\ell \in D^\ell.$$

D'où l'hypothèses (2.37).

(2.38) : est évidente grâce au fait que $u_h \in V_h$.

(2.39) : Soit $\omega^\ell \in H_1^\ell$ telle que $\omega^\ell = 0$ sur $\Gamma_1^\ell \cup \Gamma_3$ et $\ell = 1, 2$. Si on pose $\omega = (\omega^1, \omega^2)$ avec $\omega^{3-\ell} = 0$ et pour $v_h = u_h \pm \omega \in K_h$, de (2.26), alors on tire

$$\langle A^\ell \epsilon(u_h^\ell), \epsilon(\omega^\ell) \rangle_{H^\ell} = \langle f_0^\ell, \omega^\ell \rangle_{H^\ell} + \langle f_2^\ell, \omega^\ell \rangle_{H_{\Gamma_2^\ell}' \times H_{\Gamma_2^\ell}}.$$

En utilisant la formule de *Green* avec $\sigma_h^\ell = A^\ell \epsilon(u_h^\ell)$, il en découle

$$\langle \sigma_h^\ell v^\ell, \omega^\ell v^\ell \rangle_{H_{\Gamma_2^\ell}' \times H_{\Gamma_2^\ell}} - \langle \text{Div} \sigma_h^\ell, \omega^\ell \rangle_{H^\ell} = \langle f_0^\ell, \omega^\ell \rangle_{H^\ell} + \langle f_2^\ell, \omega^\ell v^\ell \rangle_{H_{\Gamma_2^\ell}' \times H_{\Gamma_2^\ell}}$$

ou encore

$$\langle \sigma_h^\ell v^\ell, \omega^\ell v^\ell \rangle_{H_{\Gamma_2^\ell}' \times H_{\Gamma_2^\ell}} = \langle f_2^\ell, \omega^\ell v^\ell \rangle_{H_{\Gamma_2^\ell}' \times H_{\Gamma_2^\ell}}.$$

D'où l'hypothèse (2.39);

(2.40.a) : Soit $\omega = (\omega^1, \omega^2) \in H_1$ telle que $\omega^\ell = 0$ sur $\Gamma_1^\ell \cup \Gamma_2^\ell$ pour $\ell = 1, 2$ avec $\omega_\tau^1 = \omega_\tau^2 = 0$ et $\omega_v^1 = -\omega_v^2$ sur Γ_3 . Pour $v_h = u_h \pm \omega \in K_h$, de (2.26), on tire :

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle A^\ell \epsilon(u_h^\ell), \epsilon(\omega^\ell) \rangle_{H^\ell} = \sum_{\ell=1}^2 \langle f_0^\ell, \omega^\ell \rangle_{H^\ell}.$$

En utilisant la formule de *Green* avec $\sigma_h^\ell = A^\ell \epsilon(u_h^\ell)$, on a

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma_h^\ell v^\ell, \omega^\ell v^\ell \rangle_{H_{\Gamma_2^\ell}' \times H_{\Gamma_2^\ell}} - \sum_{\ell=1}^2 \langle \text{Div} \sigma_h^\ell, \omega^\ell \rangle_{H^\ell} = \sum_{\ell=1}^2 \langle f_0^\ell, \omega^\ell \rangle_{H^\ell}.$$

Et, de (2.37), il vient

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma_h^\ell v^\ell, \omega^\ell v^\ell \rangle_{H_{\Gamma_2^\ell}' \times H_{\Gamma_2^\ell}} = 0$$

on obtient ainsi

$$\langle \sigma_h^1 v^1, \omega^1 v^1 \rangle_{H_{\Gamma_3}^1 \times H_{\Gamma_3}} = \langle \sigma_h^2 v^2, \omega^1 v^1 \rangle_{H_{\Gamma_3}^2 \times H_{\Gamma_3}}.$$

D'où l'hypothèse (2.40.a);

(2.40.b) : Pour tout $\omega^1 \in H_1^1$ telle que $\omega^1 = 0$ sur $\Gamma_1^1 \cup \Gamma_2^1$ et $\omega_\tau^1 = 0$, $\omega_\eta^1 \leq 0$ sur Γ_3 , et pour $v_h = u_h \pm (\omega^1, 0) \in K_h$ dans (2.26), on tire :

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle A^\ell \epsilon(u_h^\ell), \epsilon(\omega^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} \geq \sum_{\ell=1}^2 \langle f_0^\ell, \omega^\ell \rangle_{\mathcal{H}^\ell}$$

on obtient donc

$$\langle \sigma_h^1 v^1, \omega^1 v^1 \rangle_{H_{\Gamma_1}^1 \times H_{\Gamma_1}^1} - \langle \text{Div} \sigma_h^1, \omega^1 \rangle_{H^1} \geq \langle f_0^1, \omega^1 \rangle_{H^1}.$$

Et, de (2.37) il vient

$$\langle \sigma_h^1 v^1, \omega^1 v^1 \rangle_{H_{\Gamma_1}^1 \times H_{\Gamma_1}^1} \geq 0$$

D'où l'hypothèse (2.40.b).

(2.41) : Pour $v_h = 0 \in K_h$ et pour $v_h = 2u_h \in K_h$ dans (2.26), on tire :

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle A^\ell \epsilon(u_h^\ell), \epsilon(u_h^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} = \sum_{\ell=1}^2 \langle f_0^\ell, u_h^\ell \rangle_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell u_h^\ell d\Gamma_2^\ell$$

Moyennant $\sigma_h^\ell = A^\ell \epsilon(u_h^\ell)$ et la formule de Green, on obtient

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma_{hv}^\ell, u_h^{\ell v} \rangle_{H_{\Gamma_1}^{\ell} \times H_{\Gamma_1}^{\ell}} - \sum_{\ell=1}^2 \langle \text{Div} \sigma_h^\ell, u_h^\ell \rangle_{H^1} = \sum_{\ell=1}^2 \langle f_0^\ell, u_h^\ell \rangle_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell u_h^\ell d\Gamma_2^\ell.$$

Et de (2.37)-(2.40) il vient

$$\int_{\Gamma_3} \sigma_v^h [u_{hv}] d\Gamma_3 = 0.$$

C'est à dire (2.41).

Par ceci on termine la démonstration.

Nous utilisant la Proposition 2.4 pour obtenir le résultat d'existence et d'unicité suivant :

Théorème 2.1: Si $M_h = Q_h^{\ell,*}$ ou $M_h = L_h^{\ell,*}$; $\ell = 1, 2$, le problème $\mathbb{P}_m^h$ possède une solution unique $(u_h, \lambda_h) \in V_h \times M_h$.

Démonstration.

Existence : Soit $u_h \in K_h$ la solution du problème (2.26) (voir Remarque 2.3). On pose $\sigma_h^\ell = A^\ell \epsilon(u_h^\ell)$, on a (2.40) et pour $\lambda_h = -\sigma_v^h$ sur Γ_3 , on vérifie que (u_h, λ_h) est une solution du problème $\mathbb{P}_m^h$.

Par définition, on a

$$a(u_h, v_h) + b(v_h, \lambda_h) = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} A^\ell \epsilon(u_h^\ell) \cdot \epsilon(v_h^\ell) d\Omega^\ell + \int_{\Gamma_3} \lambda_h [v_{hv}] d\Gamma_3.$$

En utilisant la loi de comportement $\sigma_h^\ell = A^\ell \epsilon(u_h^\ell)$ avec $\lambda_h = -\sigma_v^h$, il découle :

$$a(u_h, v_h) + b(v_h, \lambda_h) = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \sigma_h^\ell \cdot \epsilon(v_h^\ell) d\Omega^\ell - \int_{\Gamma_3} \sigma_v [v_{hv}] d\Gamma_3.$$

En appliquant la formule de *Green*, on obtient

$$a(u_h, v_h) + b(v_h, \lambda_h) = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma^\ell} \sigma_h^\ell v_h^\ell \cdot v_h^\ell d\Gamma^\ell - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \text{Div} \sigma_h^\ell \cdot v_h^\ell d\Omega^\ell - \int_{\Gamma_3} \sigma_v[v_{hv}] d\Gamma_3.$$

En utilisant (2.37), (2.39) et (2.40.a), on obtient :

$$a(u_h, v_h) + b(v_h, \lambda_h) = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell v_h^\ell d\Omega^\ell + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell v_h^\ell d\Gamma_2^\ell.$$

D'où la condition (2.9).

Par définition de l'ensemble K_h , on a $-\pi_h^\ell[u_{hv}] \in M_h^*$, donc

$$\langle \mu_h^\ell, [u_{hv}] \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma_3} = \int_{\Gamma_3} \mu_h^\ell \pi_h^\ell[u_{hv}] d\Gamma_3 \leq 0 \quad \forall \mu_h^\ell \in M_h. \quad (2.42)$$

De (2.41) avec $\lambda_h = -\sigma_v^h$, on conclut

$$\langle \lambda_h, [u_{hv}] \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma_3} = - \int_{\Gamma_3} \sigma_v^h[u_{hv}] d\Gamma_3 = 0. \quad (2.43)$$

Moyennant (2.42) et (2.43), on obtient la condition (2.10).

Unicité : Soient (u_h, λ_h) , $(\tilde{u}_h, \tilde{\lambda}_h)$ deux solution du Problème $\mathbb{P}_m^h$, on a alors :

$$a(u_h, v_h) + b(v_h, \lambda_h) = L(v_h) = a(u_h, v_h) + b(v_h, \lambda_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

Il vient

$$a(u_h - \tilde{u}_h, v_h) + b(v_h, \lambda_h - \tilde{\lambda}_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h. \quad (2.44)$$

En prend $v_h = u_h - \tilde{u}_h \in V_h$, d'où par (2.44), on a

$$a(u_h - \tilde{u}_h, u_h - \tilde{u}_h) + b(u_h - \tilde{u}_h, \lambda_h - \tilde{\lambda}_h) = 0. \quad (2.45)$$

En utilisant (2.10), on a

$$b(u_h - \tilde{u}_h, \lambda_h - \tilde{\lambda}_h) = - \left[b(u_h, \tilde{\lambda}_h - \lambda_h) + b(\tilde{u}_h, \lambda_h - \tilde{\lambda}_h) \right] \geq 0 \quad (2.46)$$

Moyennant (2.45), (2.46) et le fait que $a(\cdot, \cdot)$ est définie positive, on a alors :

$$a(u_h - \tilde{u}_h, u_h - \tilde{u}_h) = 0.$$

On a alors $u_h - \tilde{u}_h = 0$, c'est à dire $u_h = \tilde{u}_h$.

En utilisant maintenant l'égalité (2.44) avec $u_h = \tilde{u}_h$, on déduit que

$$b(v_h, \lambda_h - \tilde{\lambda}_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h. \quad (2.47)$$

Par définition de $W_h^\ell(\Gamma_3)$, soit $v_h^\ell \in V(\Omega^\ell)$ tel que $v_h^\ell = \lambda_h - \tilde{\lambda}_h$ sur Γ_3 . En posant $v_h = (v_h^1, v_h^2)$, avec $v_h^{3-\ell} = 0$. Et, de (2.47), on obtient

$$\int_{\Gamma_3} |\lambda_h - \tilde{\lambda}_h|^2 d\Gamma_3.$$

D'où $\lambda_h = \tilde{\lambda}_h$.

2.4 Formulations matricielles

2.4.1 Formulation matricielle classique

Introduisant maintenant les notations matricielles suivantes :

$$u_h^1 = \sum_{i=1}^{n_1} (u_{1,i}^1, u_{2,i}^1) w_i^1, \quad u_h^2 = \sum_{i=1}^{n_2} (u_{1,i}^2, u_{2,i}^2) w_i^2, \quad \text{et} \quad \lambda_h = \sum_{i=1}^{n_3} \lambda_i \varphi_i^\ell,$$

où w_i^ℓ les fonctions de base volumique de *Lagrange* sur Ω^ℓ qui sont continues et prennent la valeur 1 au noeud i et 0 aux autres (voir figure 2.1), et φ_i^ℓ les fonctions de base surfacique de *Lagrange* sur Γ_3 qui sont continues et prennent la valeur 1 au noeud $x_i^\ell \in \zeta_h^\ell$ et 0 aux autres noeuds (voir figure 2.2), où n_1, n_2 désigne les nombres total de noeuds du maillage dans Ω^1, Ω^2 respectivement, et n_3 le nombre total de noeuds liés au contact. Les vecteurs $(u_{1,i}^\ell, u_{2,i}^\ell)$ et λ_i sont respectivement les valeurs au noeud i des fonctions $u^\ell = (u_1^\ell, u_2^\ell)$ et λ . Avec cette construction des espaces V_h et $W_h^\ell(\Gamma_3)$ les fonctions $u_h = (u_h^1, u_h^2) \in V_h$ (resp $\lambda_h \in W_h^\ell(\Gamma_3)$) sont caractérisées par leurs valeurs aux sommets de la triangularisation (voir [17]).

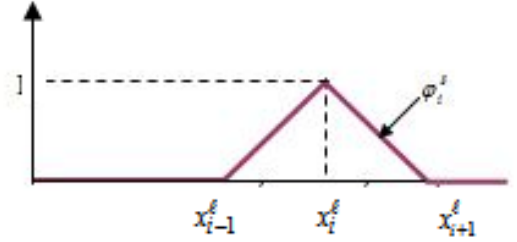
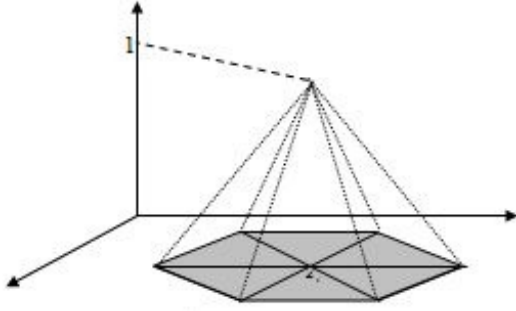


Fig. 2.1: Fonction de base volumique du *Lagrange* w_i^ℓ . Fig. 2.2 :Fonction de base surfacique du *Lagrange* φ_i^ℓ .

On définit les matrices suivantes :

$$U_1^1 = (u_{1,i}^1)_{1 \leq i \leq n_1}, U_2^1 = (u_{2,i}^1)_{1 \leq i \leq n_1}, \quad U_1^2 = (u_{1,i}^2)_{1 \leq i \leq n_2}, U_2^2 = (u_{2,i}^2)_{1 \leq i \leq n_2}, \quad \Lambda = (\lambda_i)_{1 \leq i \leq n_3}$$

La condition (2.9), avec (1.38), (1.46), peut être exprimée par la système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n_\ell} u_{1,i}^\ell \left[(\tilde{\lambda}^\ell + 2\tilde{\mu}^\ell) \int_{\Omega^\ell} \partial_x w_i^\ell \cdot \partial_x w_j^\ell d\Omega^\ell + \tilde{\mu}^\ell \int_{\Omega^\ell} \partial_y w_i^\ell \cdot \partial_y w_j^\ell d\Omega^\ell \right] \\ \quad + \sum_{i=1}^{n_\ell} u_{2,i}^\ell \left[\tilde{\lambda}_2^\ell \int_{\Omega^\ell} \partial_y w_i^\ell \cdot \partial_x w_j^\ell d\Omega^\ell + \tilde{\mu}^\ell \int_{\Omega^\ell} \partial_x w_i^\ell \cdot \partial_y w_j^\ell d\Omega^\ell \right] = \int_{\Omega^\ell} f_{0,1}^\ell \cdot w_j^\ell d\Omega^\ell + \int_{\Gamma_2^\ell} f_{2,1}^\ell \cdot w_j^\ell d\Gamma_2^\ell; \\ \sum_{i=1}^{n_\ell} u_{1,i}^\ell \left[\tilde{\lambda}^\ell \int_{\Omega^\ell} \partial_x w_i^\ell \cdot \partial_y w_j^\ell d\Omega^\ell + \tilde{\mu}^\ell \int_{\Omega^\ell} \partial_y w_i^\ell \cdot \partial_x w_j^\ell d\Omega^\ell \right] + \sum_{i=1}^{n_\ell} u_{2,i}^\ell \left[(\tilde{\lambda}^\ell + 2\tilde{\mu}^\ell) \int_{\Omega^\ell} \partial_y w_i^\ell \cdot \partial_y w_j^\ell d\Omega^\ell \right. \\ \quad \left. + \tilde{\mu}^\ell \int_{\Omega^\ell} \partial_x w_i^\ell \cdot \partial_x w_j^\ell d\Omega^\ell \right] + \sum_{k=1}^{n_3} \lambda_k \int_{\Gamma_3} \varphi_k^\ell \cdot w_j^\ell d\Gamma_3 = \int_{\Omega^\ell} f_{0,2}^\ell \cdot w_j^\ell d\Omega^\ell + \int_{\Gamma_2^\ell} f_{2,2}^\ell \cdot w_j^\ell d\Gamma_2^\ell; \\ j = 1, \dots, n_\ell; \quad \ell = 1, 2. \end{array} \right.$$

où $f_0^\ell = (f_{0,1}^\ell, f_{0,2}^\ell)$ et $f_2^\ell = (f_{2,1}^\ell, f_{2,2}^\ell)$.

La condition (2.9) peut s'écrire sous la formulation matricielle suivante :

$$\begin{cases} A_1^1 U_1^1 + A_2^1 U_2^1 = F_1^1 \\ A_3^1 U_1^1 + A_4^1 U_2^1 + \dot{B}^{1^T} \Lambda = F_2^1 \\ A_1^2 U_1^2 + A_2^2 U_2^2 = F_1^2 \\ A_3^2 U_1^2 + A_4^2 U_2^2 + \dot{B}^{2^T} \Lambda = F_2^2, \end{cases} \quad (2.48)$$

où

$$\begin{aligned} (A_1^\ell)_{ij} &= (\tilde{\lambda}^\ell + 2\tilde{\mu}^\ell) \int_{\Omega^\ell} \partial_x w_i^\ell \cdot \partial_x w_j^\ell d\Omega^\ell + \tilde{\mu}^\ell \int_{\Omega^\ell} \partial_y w_i^\ell \cdot \partial_y w_j^\ell d\Omega^\ell; \\ (A_2^\ell)_{ij} &= \tilde{\lambda}^\ell \int_{\Omega^\ell} \partial_y w_i^\ell \cdot \partial_x w_j^\ell d\Omega^\ell + \tilde{\mu}^\ell \int_{\Omega^\ell} \partial_x w_i^\ell \cdot \partial_y w_j^\ell d\Omega^\ell; \\ (A_3^\ell)_{ij} &= \tilde{\lambda}^\ell \int_{\Omega^\ell} \partial_x w_i^\ell \cdot \partial_y w_j^\ell d\Omega^\ell + \tilde{\mu}^\ell \int_{\Omega^\ell} \partial_y w_i^\ell \cdot \partial_x w_j^\ell d\Omega^\ell \\ (A_4^\ell)_{ij} &= (\tilde{\lambda}^\ell + 2\tilde{\mu}^\ell) \int_{\Omega^\ell} \partial_y w_i^\ell \cdot \partial_y w_j^\ell d\Omega^\ell + \tilde{\mu}^\ell \int_{\Omega^\ell} \partial_x w_i^\ell \cdot \partial_x w_j^\ell d\Omega^\ell; \\ (\dot{B}^\ell)_{ij} &= \int_{\Gamma_3} \varphi_i^\ell \cdot w_j^\ell \eta^\ell d\Gamma_3; \quad (F_k^\ell)_i = \int_{\Omega^\ell} f_{0,k}^\ell \cdot w_i^\ell d\Omega^\ell + \int_{\Gamma_2^\ell} f_{2,k}^\ell \cdot w_i^\ell \eta^\ell d\Gamma_2^\ell; \quad k = 1, 2. \end{aligned}$$

En introduisant les matrices suivantes :

$$A^\ell = \begin{pmatrix} A_1^\ell & A_2^\ell \\ A_3^\ell & A_4^\ell \end{pmatrix}, \quad B^\ell = (0, \dot{B}^\ell) \in \mathbb{R}^{2n_\ell \times n_3}, \quad F^\ell = \begin{pmatrix} F_1^\ell \\ F_2^\ell \end{pmatrix}, \quad U^\ell = \begin{pmatrix} U_1^\ell \\ U_2^\ell \end{pmatrix}; \quad \ell = 1, 2.$$

Ceci nous permet de réécrire (2.48) comme suit :

$$\begin{cases} A^1 U^1 + B^{1^T} \Lambda = F^1 \\ A^2 U^2 + B^{2^T} \Lambda = F^2 \end{cases} \quad (2.49)$$

Maintenant, la condition (2.10), peut être exprimée par la formulation matricielle suivante :

$$(M - \Lambda)^T B^1 U^1 + (M - \Lambda)^T B^2 U^2 \leq 0 \quad \forall M \in \mathcal{M}_h \quad (2.50)$$

où $\mathcal{M}_h = \{M = (\mu_i) \in \mathbb{R}^{n_3} \mid \sum_{i=1}^{n_3} \mu_i \varphi_i^\ell \in M_h\}$.

Le système (2.9)–(2.10) peut être réécrit sous la forme :

Problème PM : Trouver $U^1 \in \mathbb{R}^{2n_1}$, $U^2 \in \mathbb{R}^{2n_2}$ et $\Lambda \in \mathbb{R}^{n_3}$ tels que :

$$A^1 U^1 + B^{1^T} \Lambda = F^1 \quad (2.51)$$

$$A^2 U^2 + B^{2^T} \Lambda = F^2 \quad (2.52)$$

$$(M - \Lambda)^T B^1 U^1 + (M - \Lambda)^T B^2 U^2 \leq 0 \quad \forall M \in \mathcal{M}_h. \quad (2.53)$$

2.4.2 Formulation matricielle approché de point fixe sur les forces de contact

Lemme 2.2: Soit $\Lambda \in \mathbb{R}^{n_3}$, les deux hypothèses suivantes sont équivalentes :

$$(i) (M - \Lambda)^T B^1 U^1 + (M - \Lambda)^T B^2 U^2 \leq 0 \quad \forall M \in \mathcal{M}_h$$

$$(ii) \Lambda = P_{\mathcal{M}_h}(\Lambda + r(B^1 U^1 + B^2 U^2)) \quad \forall r > 0$$

où $P_{\mathcal{M}_h}$ désigne la projection dans $\mathcal{M}_h$.

Démonstration.

(i) $\Rightarrow$ (ii) : L'inégalité (i), avec $r > 0$ donne

$$r^2 \|B^1 U^1 + B^2 U^2\|^2 - 2r(M - \Lambda)^T (B^1 U^1 + B^2 U^2) + \|M - \Lambda\|^2 \geq r^2 \|B^1 U^1 + B^2 U^2\|^2 \quad \forall M \in \mathcal{M}_h$$

on a

$$\|M - (\Lambda + r(B^1 U^1 + B^2 U^2))\|^2 \geq \|\Lambda - (\Lambda + r(B^1 U^1 + B^2 U^2))\|^2 \quad \forall M \in \mathcal{M}_h$$

ce qui implique

$$\Lambda = P_{\mathcal{M}_h}(\Lambda + r(B^1 U^1 + B^2 U^2)).$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) : L'égalité (ii), avec $M \in \mathcal{M}_h$ donne

$$\|M - (\Lambda + r(B^1 U^1 + B^2 U^2))\|^2 \geq \|\Lambda - (\Lambda + r(B^1 U^1 + B^2 U^2))\|^2 \quad \forall r > 0$$

on a

$$-2r(M - \Lambda)^T (B^1 U^1 + B^2 U^2) + \|M - \Lambda\|^2 \geq 0 \quad \forall r > 0$$

on obtient

$$(M - \Lambda)^T (B^1 U^1 + B^2 U^2) - \frac{\|M - \Lambda\|^2}{2r} \leq 0 \quad \forall r > 0$$

En passant alors à la limite $r \rightarrow +\infty$, on déduit (i).

Remarque 2.4: Le lemme 2.2 nous permet d'établir une autre formulation matricielle sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } U^1 \in \mathbb{R}^{2n_1}, U^2 \in \mathbb{R}^{2n_2} \text{ et } \Lambda \in \mathbb{R}^{n_3} \text{ tels que :} \\ A^1 U^1 + B^{1T} \Lambda = F^1 \\ A^2 U^2 + B^{2T} \Lambda = F^2 \\ \Lambda = P_{\mathcal{M}_h}(\Lambda + r(B^1 U^1 + B^2 U^2)). \end{array} \right. \quad (2.54)$$

La formulation matricielle (2.54) sera facile à exploiter numériquement si l'ensemble M_h^+ est simple à exprimer. L'approximation de M_h la plus simple est :

$$M_h^+ = \left\{ \lambda_h = \sum_{i=1}^{n_3} \lambda_i \varphi_i^\ell \mid \lambda_i \geq 0 \right\}.$$

La formulation matricielle approchée pour $r > 0$, de (2.54) est la suivante :

Problème PM_r^h : Trouver $U^1 \in \mathbb{R}^{2n_1}$, $U^2 \in \mathbb{R}^{2n_2}$ et $\Lambda \in \mathbb{R}^{n_3}$ tels que :

$$A^1 U^1 + B^{1T} \Lambda = F^1 \quad (2.55)$$

$$A^2 U^2 + B^{2T} \Lambda = F^2 \quad (2.56)$$

$$\Lambda_i = (\Lambda_i + r(B^1 U^1 + B^2 U^2)_i)_+ \quad i = 1, \dots, n_3. \quad (2.57)$$

Remarque 2.5: Les relations (2.51), (2.52) peuvent réécrire comme suit :

$$\begin{cases} U^1 = (A^1)^{-1}(F^1 - B^{1T} \Lambda) \\ U^2 = (A^2)^{-1}(F^2 - B^{2T} \Lambda) \end{cases} \quad (2.58)$$

Grâce au (2.53), (2.58) et Lemme 2.2, on obtient le problème d'optimisation avec contraintes d'une forme quadratique suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \Lambda \in \mathcal{M}_h \text{ tels que} \\ \Theta(\Lambda) \leq \Theta(M), \quad \forall M \in \mathcal{M}_h \end{cases} \quad (2.59)$$

où

$$\Theta(M) = \frac{1}{2} M^T C M + D M$$

avec

$$C = B^1(A^1)^{-1}(B^1)^T + B^2(A^2)^{-1}(B^2)^T, \quad D = B^1(A^1)^{-1}F^1 + B^2(A^2)^{-1}F^2.$$

Lemme 2.3: Si Λ est une solution de (2.59), alors

$$(C\Lambda + D)(\Lambda - M) \leq 0 \quad \forall M \in \mathcal{M}_h. \quad (2.60)$$

Démonstration. Soit $M \in \mathcal{M}_h$, comme $\mathcal{M}_h$ est un ensemble convexe on a alors

$$\Theta(\Lambda + t(M - \Lambda)) = \Theta(tM + (1 - t)\Lambda) \geq \Theta(\Lambda) \quad \forall t \in]0, 1[$$

ou encore

$$\frac{\Theta(\Lambda + t(M - \Lambda)) - \Theta(\Lambda)}{t} \geq 0 \quad \forall t \in]0, 1[.$$

En faisant tendre $t \rightarrow 0^+$, on déduit que

$$\vec{\nabla} \Theta(\Lambda)(M - \Lambda) \geq 0.$$

D'où (2.60).

Remarque 2.6: Si Λ est une solution de (2.59) avec $\Lambda \in \mathcal{M}_h^0$, alors Λ est un minimum local de $\Theta(\cdot)$, c'est à dire Λ est un point critique de $\Theta(\cdot)$, alors $\vec{\nabla} \Theta(\Lambda) = 0$, et par conséquent Λ est une solution du système linéaire

$$C\Lambda = -D. \quad (2.61)$$

Moyennant de (2.61) et (2.58), la formulation matricielle (2.51)- (2.53) devient

$$\begin{cases} \text{Trouver } U^1 \in \mathbb{R}^{2n_1}, U^2 \in \mathbb{R}^{2n_2} \text{ et } \Lambda \in \mathbb{R}^{n_3} \text{ satisfaisant} \\ A^1 U^1 = E^1 \\ A^2 U^2 = E^2 \\ C\Lambda = -D \end{cases} \quad (2.62)$$

où

$$E^1 = F^1 + B^{1T} C^{-1} D, \quad E^2 = F^2 + B^{2T} C^{-1} D$$

2.4.3 Algorithme de point fixe sur les forces de contact (APFF)

On considère l'algorithme de point fixe sur les forces de contact défini par (2.55)-(2.57) et qui nous permet de construire des suites de $(U^{1,k}, U^{2,k}, \Lambda^k)_{k \geq 0}$ dans $\mathbb{R}^{2n_1} \times \mathbb{R}^{2n_2} \times \mathbb{R}^{n_3}$ telles que

1- Initialisation : $k = 0$

choix de $\Lambda^0 = (\Lambda_1^0, \dots, \Lambda_{n_3}^0) \in (\mathbb{R}^+)^{n_3}$

2- Itération : k

Etant donné $\Lambda^k = (\Lambda_1^k, \dots, \Lambda_{n_3}^k)$;

a)- calcul $U^{1,k}$ et $U^{2,k}$ solutions de

$$\begin{cases} A^1 U^{1,k} + B^{1T} \Lambda^k = F^1 \\ A^2 U^{2,k} + B^{2T} \Lambda^k = F^2 \end{cases}$$

b)- calcul Λ^{k+1} solution de :

$$\Lambda_i^{k+1} = \left(\Lambda_i^k + r(B^1 U^{1,k} + B^2 U^{2,k})_i \right)_+ \quad i = 1, \dots, n_3.$$

3- Revenir à (2), on pose $k = k + 1$, jusqu'à ce que le critère d'arrêt soit vérifié.

2.4.4 Simulation numérique

Pour fixer les idées, on s'intéresse dans cette section à l'algorithme de point fixe sur les forces de contact, dans les cas suivants :

- Ω^1, Ω^2 sont des rectangles dans le plan $\mathbb{R}^2$, tels que

$$\Omega^1 = [0, 1] \times [0, 1], \quad \Omega^2 = [0, 1] \times [-1, 0]$$

- Les Γ_i^ℓ sont données par les segments :

$$\Gamma_1^1 = [0, 1] \times \{1\}, \quad \Gamma_2^1 = \{0, 1\} \times [0, 1], \quad \Gamma_1^2 = [0, 1] \times \{-1\}, \quad \Gamma_2^2 = \{0, 1\} \times [-1, 0], \quad \Gamma_3 = [0, 1] \times \{0\}$$

- Les forces volumiques $f_0^\ell = (f_{0,1}^\ell, f_{0,2}^\ell)$ $\ell = 1, 2$, sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} f_0^1 : \Omega^1 &\rightarrow \mathbb{R}^2; & f_0^1(x, y) &= (0.5, -0.5); \\ f_0^2 : \Omega^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2; & f_0^2(x, y) &= (0.5, 0). \end{aligned}$$

- Les forces surfaciques $f_2^\ell = (f_{2,1}^\ell, f_{2,2}^\ell)$ $\ell = 1, 2$, sont définies comme suit :

$$f_2^1 : \Gamma_2^1 \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad f_2^1 = (f_{2,1}^1, f_{2,2}^1)$$

$$f_{2,1}^1(x, y) = \begin{cases} 3 \times 10^{-2} & \text{si } (x, y) \in \Gamma_{2,1}^1 = \{0\} \times [0, 1] \\ -10^{-1} & \text{si } (x, y) \in \Gamma_{2,2}^1 = \{1\} \times [0, 1] \end{cases}$$

$$f_{2,2}^1(x, y) = 10^{-1} \quad \text{si } (x, y) \in \Gamma_2^1.$$

$$f_2^2 : \Gamma_2^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad f_2^2 = (f_{2,1}^2, f_{2,2}^2)$$

$$f_{2,1}^2(x, y) = \begin{cases} 5 \times 10^{-2} & \text{si } (x, y) \in \Gamma_{2,1}^2 = \{0\} \times [-1, 0] \\ -10^{-2} & \text{si } (x, y) \in \Gamma_{2,2}^2 = \{1\} \times [-1, 0] \end{cases}$$

$$f_{2,2}^2(x, y) = -10^{-2} \quad \text{si } (x, y) \in \Gamma_2^2.$$

- Les coefficients de Lamé $\tilde{\lambda}^\ell, \tilde{\mu}^\ell$, sont donés par :

$$\tilde{\lambda}^1 = 1500GP, \quad \tilde{\mu}^1 = 1000GP, \quad \tilde{\lambda}^2 = 1000GP, \quad \tilde{\mu}^2 = 800GP.$$

- Choisir le paramètre d'augmentation arbitraire $r = 10$
- On s'intéresse la triangulation de $\Omega^1 \cup \Omega^2$ à 32 + 32 triangles K à sommets de la forme $a_1^K(x, y), a_2^K(x + h, y), a_3^K(x + h, y + h)$ ou la forme $a_1^K(x, y), a_2^K(x, y + h), a_3^K(x + h, y + h)$ avec le pas de discrétisation $h = 0.25$, 45 noeuds associés : $z_{ij} = (ih, jh)$; $i = 0, 1, 2, 3, 4$, $j = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$ (voir Fig. 2.2).
- En utilisant l'APFF, nous arrêtons, les itérations sur j , lorsque l'erreur relative entre l'itération $j + 1$ et l'itération j au sens de la norme uniforme satisfait le seuil de tolérance :

$$\|\Lambda^{j+1} - \Lambda^j\|_\infty \leq 10^{-4}.$$

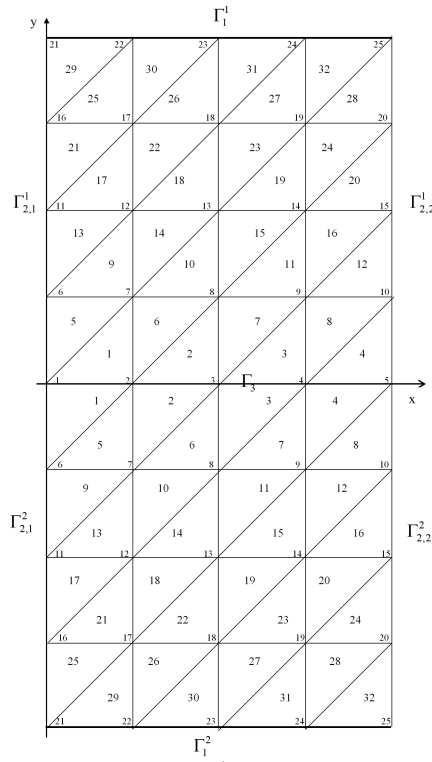


Fig. 2.2: Triangulation des domaines Ω^1, Ω^2 .

On a les solutions approchées :

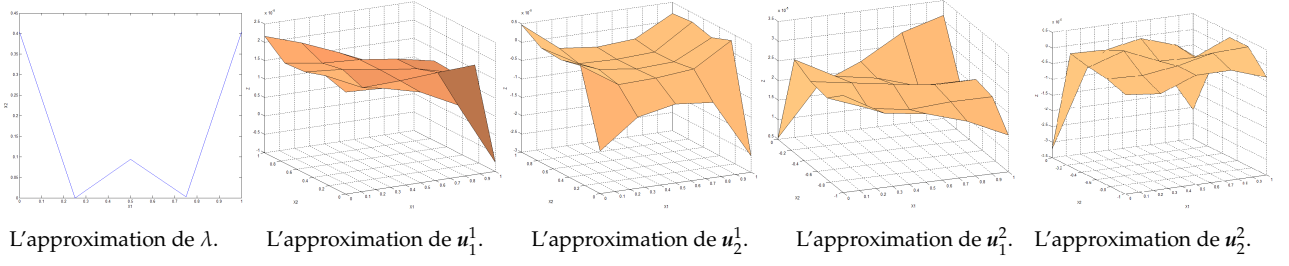


Fig. 2.4. Solutions approchées

ou les matrices approchées :

$\Lambda =$	$U_1^1 = 10^{-4} \times$	$U_2^1 = 10^{-4} \times$	$U_1^2 = 10^{-4} \times$	$U_2^2 = 10^{-4} \times$
0.4043	0.1766	-0.1836	0.0537	-0.3221
0	0.1720	-0.1059	0.1785	-0.0780
0.0940	0.1466	-0.0845	0.2217	-0.0616
0.0027	0.0964	-0.0954	0.2820	-0.0856
0.4042	-0.0747	-0.2556	0.3126	-0.2562
	0.1931	0.0214	0.2877	0.0113
	0.1452	-0.0457	0.2313	0.0076
	0.1489	-0.0421	0.2131	0.0294
	0.1565	-0.0323	0.1796	-0.0064
	0.1613	0.0314	0.1787	-0.0892
	0.1758	0.0084	0.2653	-0.0033
	0.1671	-0.0320	0.2489	0.0338
	0.1513	-0.0456	0.2317	-0.0148
	0.1387	-0.0405	0.2167	-0.0172
	0.1120	0.0104	0.2175	0.0314
	0.1715	0.0126	0.2576	-0.0120
	0.1566	-0.0444	0.2176	-0.0161
	0.1507	-0.0474	0.2010	-0.0009
	0.1371	-0.0422	0.2078	0.0258
	0.1171	0.0251	0.2074	0.0303
	0.2160	0.0477	0.2979	-0.0334
	0.1827	-0.0309	0.2391	-0.0452
	0.1416	-0.0422	0.2245	-0.0006
	0.0962	-0.0350	0.1919	-0.0013
	0.0416	0.0196	0.1432	-0.0380

Deuxième partie

**ETUDE THÉORIQUE ET APPROXIMATION NUMÉRIQUE D'UN
PROBLÈME DE CONTACT ENTRE DEUX CORPS
ÉLECTRO-DÉFORMABLE**

Introduction

Cette partie se compose de deux chapitres. Dans le premier, on s'intéresse à l'étude théorique et numérique d'un problème quasistatique de contact avec les conditions de compliance normale et l'adhésion entre deux corps piézoélectriques, pour des matériaux ayant une loi de comportement électro-élastiques non linéaire de la forme :

$$\begin{aligned}\sigma^\ell &= \mathcal{A}^\ell \varepsilon(u^\ell) + (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell \\ D^\ell &= \mathcal{E}^\ell \varepsilon(u^\ell) - \mathcal{B}^\ell \nabla \varphi^\ell\end{aligned}$$

où u^ℓ , σ^ℓ , σ^ℓ et D^ℓ représente le champ des déplacements, le champs de contraintes, les potentiels électriques et les champs des déplacements électriques, respectivement. Ce chapitre qui s'inspire de l'article [38], contient deux sections. Dans la première, on considère un problème quasistatique avec compliance normale et l'adhésion. En se basant sur l'analyse variationnelle nous démontrons l'existence et l'unicité d'une solution faible. Dans la seconde section, en utilisant la méthode des éléments finis nous décrivons la formulation du problème discrétisé. Dans le seconde chapitre on s'intéresse à l'étude variationnelle d'un problème de contact entre deux corps piézoélectriques dans un processus dynamique pour des matériaux ayant une loi de comportement électro-élasto-viscoplastique non linéaire de la forme :

$$\begin{aligned}\sigma^\ell &= \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}^\ell) + \mathcal{G}^\ell \varepsilon(u^\ell) + (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell + \int_0^t \mathcal{F}^\ell(\sigma^\ell(s) - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}^\ell(s)) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell, \varepsilon(u^\ell(s))) ds \\ D^\ell &= \mathcal{E}^\ell \varepsilon(u^\ell) - \mathcal{B}^\ell \nabla \varphi^\ell.\end{aligned}$$

Dans ce chapitre, qui s'inspire de l'article [39], on considère un problème de contact avec compliance normale et l'adhésion. Pour ce problème le contact entre le deux corps est modélisé par l'adhésion dont l'évolution est décrite par une équation différentielle ordinaire du premier ordre. En utilisant la formule de *Green*, on propose une formulation variationnelle associée au problème mécanique puis nous démontrons l'existence et l'unicité d'une solution faible.

3. ETUDE VARIATIONNELLE ET NUMÉRIQUE D'UN PROBLÈME ÉLECTRO-ÉLASTIQUE AVEC ADHÉSION.

Résumé :

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude variationnelle et numérique d'un problème de contact entre deux corps électro-élastiques dans un processus quasistatique. Dans la première section, en se basant sur des arguments d'inéquations variationnelles dépendant du temps et la méthode de point fixe, nous obtenons un résultat sur l'existence et l'unicité de la solution. Tandis que dans la deuxième section, en se basant sur la méthode des éléments finis on établit la discrétisation complète du problème considéré. La convergence forte dans ce cas est établie sous certaines conditions de régularité minimales.

Contenu :

1. Etude variationnelle d'un problème électro-élastique avec adhésion :

- 1.1. Position du problème ;
- 1.2. Formulation variationnelle ;
- 1.3. Existence et Unicité de la solution ;
- 1.4. Démonstration du Théorème.

2. Approximation numérique d'un problème électro-élastique avec adhésion :

- 2.1. La discrétisation complète ;
- 2.2. Formulation variationnelle approchée ;
- 2.3. Estimation de l'erreur.

3.1 Etude variationnelle d'un problème électro-élastique avec adhésion.

Dans cette section, nous étudions un problème électro-élastique en supposant que le comportement du matériau est modélisé par une loi constitutive électro-élastique non linéaire. Nous supposons que le contact avec compliance normale et l'adhésion entre les deux corps. En se basant sur des arguments d'inéquations variationnelles dépendant du temps, la méthode de point fixe nous permet de démontrer un résultat d'existence et d'unicité d'une solution faible.

3.1.1 Position du problème

Les deux corps considérés sont électro-élastiques, le contact est modélisé par les conditions de compliance normale couplées avec l'adhésion. Le modèle mécanique qu'on va considéré peut se formuler de la manière suivante :

Problème P. Trouver les champs des déplacements $\mathbf{u}^\ell : \Omega^\ell \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d$, les champs des contraintes $\boldsymbol{\sigma}^\ell : \Omega^\ell \times (0, T) \rightarrow \mathbb{S}^d$, les potentiels électriques $\varphi^\ell : \Omega^\ell \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, un champ d'adhésion $\beta : \Gamma_3 \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ et les champs des déplacements électriques $\mathbf{D}^\ell : \Omega^\ell \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\ell = 1, 2$ tels que :

$$\boldsymbol{\sigma}^\ell = \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell) + (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \quad (3.1)$$

$$\mathbf{D}^\ell = \mathcal{E}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell) - \mathcal{B}^\ell \nabla \varphi^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \quad (3.2)$$

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma}^\ell + \mathbf{f}_0^\ell = 0 \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \quad (3.3)$$

$$\text{div } \mathbf{D}^\ell - q_0^\ell = 0 \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \quad (3.4)$$

$$\mathbf{u}^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\ell \times (0, T), \quad (3.5)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^\ell \mathbf{v}^\ell = \mathbf{f}_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_2^\ell \times (0, T), \quad (3.6)$$

$$\begin{cases} \sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2 \equiv \sigma_\nu, \\ \sigma_\nu = -p_\nu([u_\nu]) + \gamma_\nu \beta^2 R_\nu([u_\nu]) \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.7)$$

$$\begin{cases} \sigma_\tau^1 = -\sigma_\tau^2 \equiv \sigma_\tau, \\ |\sigma_\tau| = p_\tau(\beta) R_\tau([u_\tau]) \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.8)$$

$$\dot{\beta} = -\left(\beta \left(\gamma_\nu (R_\nu([u_\nu]))^2 + \gamma_\tau (R_\tau([u_\tau]))^2\right) - \varepsilon_a\right)_+ \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.9)$$

$$\varphi^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a^\ell \times (0, T), \quad (3.10)$$

$$\mathbf{D}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell = q_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_b^\ell \times (0, T), \quad (3.11)$$

$$\beta(0) = \beta_0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (3.12)$$

Rappelons ici que les équations d'évolution (3.1) et (3.2) représentent la loi constitutive électro-élastique. $\mathcal{A}^\ell$ est l'opérateur de élasticité, où $\varepsilon(u^\ell)$ représente le tenseur des déformations linéarisé, $E^\ell(\varphi^\ell) = -\nabla \varphi^\ell$ est le champ électrique, $\mathcal{E}^\ell$ représente le tenseur piézoélectrique du troisième ordre, $(\mathcal{E}^\ell)^*$ est son transposé et $\mathcal{B}^\ell$ représente le tenseur de permittivité électrique. Ensuite, les équations (3.3) et (3.4) sont les équations d'équilibre associées aux champs de contrainte et de déplacement électrique, où "Div" et "div" dénotent l'opérateur de divergence pour les tenseurs et les vecteurs, respectivement. Les conditions (3.5) et (3.6) sont les conditions aux limites classiques déplacement-traction tandis que (3.10) et (3.11) représentent les conditions électriques de frontières. L'équation (3.7) représente les conditions de compliance normale avec adhésion sur Γ_3 , où γ_v est le coefficient d'adhésion et R_v est un opérateur de troncation défini par :

$$R_v(s) = \begin{cases} L & \text{si } s < -L, \\ -s & \text{si } -L \leq s \leq 0, \\ 0 & \text{si } s > 0. \end{cases}$$

où $L > 0$ est la longueur caractéristique de la liaison, voir[83]. La condition (3.8) représente la condition de contact avec adhésion sur le plan tangentiel, dans lequel p_τ est une fonction donnée et R_τ dénote l'opérateur de troncation donné par :

$$R_\tau(v) = \begin{cases} |v| & \text{si } |v| \leq L, \\ L & \text{si } |v| > L. \end{cases}$$

L'équation (3.9) décrit l'évolution du champ d'adhésion avec les paramètres physiques positifs donnés γ_v, γ_τ et ε_a , et en effet, $r_+ = \max\{r, 0\}$. Nous notons que le processus adhésif est irréversible ; une fois que la "déliaison" se produit l'adhésion ne peut pas être rétablie, car $\dot{\beta} \leq 0$. En outre, il est facile de voir que si $0 \leq \beta_0 \leq 1$ p.p. sur Γ_3 , alors $0 \leq \beta \leq 1$ p.p. sur Γ_3 pendant le processus. Enfin, dans (3.12) on a la condition initiale dans laquelle β_0 représente le champ initial d'adhésion.

3.1.2 Formulation variationnelle

Pour l'étude du problème $\mathbb{P}$. on considère sous espace fermé V^ℓ de H_1^ℓ défini par :

$$V(\Omega^\ell) = \{v^\ell \in H_1^\ell / v^\ell = 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_1^\ell\}. \quad (3.13)$$

Et on considère l'espace V défini par :

$$V = V(\Omega^1) \times V(\Omega^2). \quad (3.14)$$

L'espace V muni du produit scalaire et de la norme associée donnée par (Lemme 1.1, page 6) :

$$\langle v, \omega \rangle_V = \sum_{\ell=1}^2 \langle \varepsilon(v^\ell), \varepsilon(\omega^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell}. \quad (3.15)$$

Par l'inégalité de Korn, il vient que $\|\cdot\|_{H_1}$ et $\|\cdot\|_V$ sont des normes équivalentes sur V et ainsi $(V, \|\cdot\|_V)$ est un espace de Hilbert réel. En outre, par le théorème de trace de Sobolev, il existe une constante $c_0 > 0$, dépendant uniquement de $\Omega^\ell, \Gamma_1^\ell$ et Γ_3 telle que

$$\|v^\ell\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq c_0 \|v^\ell\|_{V(\Omega^\ell)} \quad \forall v^\ell \in V(\Omega^\ell). \quad (3.16)$$

De plus, pour le potentiel électrique et le champ de déplacement électrique nous utilisons les espaces

$$W^\ell = \{\psi^\ell \in H^1(\Omega^\ell); \psi^\ell = 0 \text{ sur } \Gamma_a^\ell\}, \quad (3.17)$$

$$\mathcal{W}_1^\ell = \{D^\ell = (D_i^\ell); D_i^\ell \in L^2(\Omega^\ell), \operatorname{div} D^\ell \in L^2(\Omega^\ell)\} \quad (3.18)$$

respectivement. Puisque $\operatorname{meas} \Gamma_a^\ell > 0$, l'inégalité de *Friedrichs-Poincaré* montre qu'il existe une constante $c_F^\ell > 0$ dépendant uniquement de Ω^ℓ et Γ_a^ℓ telle que

$$\|\nabla \psi^\ell\|_{L^2(\Omega^\ell)^d} \geq c_F^\ell \|\psi^\ell\|_{H^1(\Omega^\ell)} \quad \forall \psi^\ell \in W^\ell. \quad (3.19)$$

Sur l'espace W^ℓ nous considérons le produit scalaire donné par :

$$(\varphi^\ell, \psi^\ell)_{W^\ell} = \int_{\Omega^\ell} \nabla \varphi^\ell \cdot \nabla \psi^\ell dx$$

et soit $\|\cdot\|_{W^\ell}$ la norme associée. En utilisant (3.19) on peut vérifier que $\|\cdot\|_{H^1(\Omega^\ell)}$ et $\|\cdot\|_{W^\ell}$ sont deux normes équivalentes sur W^ℓ . Il en résulte que $(W^\ell, \|\cdot\|_{W^\ell})$ est un espace de Hilbert réel. Aussi l'espace $\mathcal{W}_1^\ell$ est un espace de Hilbert réel avec le produit scalaire :

$$(D^\ell, E^\ell)_{\mathcal{W}_1^\ell} = \int_{\Omega^\ell} D^\ell \cdot E^\ell dx + \int_{\Omega^\ell} \operatorname{div} D^\ell \cdot \operatorname{div} E^\ell dx,$$

et la norme associée $\|\cdot\|_{\mathcal{W}_1^\ell}$. Et on considère les espaces de produit, définis par :

$$W = W^1 \times W^2, \quad \mathcal{W}_1 = \mathcal{W}_1^1 \times \mathcal{W}_1^2. \quad (3.20)$$

Les espaces W et $\mathcal{W}_1$ sont espaces de Hilbert réel munis des produits scalaires

$$(\varphi, \psi)_W = \sum_{\ell=1}^2 (\varphi^\ell, \psi^\ell)_{W^\ell}, \quad (D, E)_{\mathcal{W}_1} = \sum_{\ell=1}^2 (D^\ell, E^\ell)_{\mathcal{W}_1^\ell}$$

et leurs normes associées $\|\cdot\|_W$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{W}_1}$, respectivement.

Pour l'étude du Problème **P**, on considère les hypothèses suivantes :

L'opérateur d'élasticité $\mathcal{A}^\ell$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{A}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d. \\ \text{(b) Il existe } L_{\mathcal{A}^\ell} > 0 \text{ tel que} \\ \quad \|\mathcal{A}^\ell(x, \xi_1) - \mathcal{A}^\ell(x, \xi_2)\| \leq L_{\mathcal{A}^\ell} \|\xi_1 - \xi_2\| \\ \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell. \\ \text{(c) Il existe } m_{\mathcal{A}^\ell} > 0 \text{ tel que} \\ \quad (\mathcal{A}^\ell(x, \xi_1) - \mathcal{A}^\ell(x, \xi_2)) \cdot (\xi_1 - \xi_2) \geq m_{\mathcal{A}^\ell} \|\xi_1 - \xi_2\|^2 \\ \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ a.e. } x \in \Omega^\ell. \\ \text{(d) L'application } x \mapsto \mathcal{A}^\ell(x, \xi) \text{ est Lebesgue mesurable dans } \Omega^\ell, \\ \quad \text{pour chaque } \xi \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(e) L'application } x \mapsto \mathcal{A}^\ell(x, 0) \in \mathcal{H}^\ell. \end{array} \right. \quad (3.21)$$

L'opérateur piézoélectrique $\mathcal{E}^\ell$ satisfait :

$$\begin{cases} (a) \mathcal{E}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d. \\ (b) \mathcal{E}^\ell(x, \tau) = (e_{ijk}^\ell(x) \tau_{jk}), \quad \forall \tau = (\tau_{ij}) \in \mathbb{S}^d; \\ (c) e_{ijk}^\ell = e_{ikj}^\ell \in L^\infty(\Omega^\ell), \quad 1 \leq i, j, k \leq d. \end{cases} \quad (3.22)$$

L'opérateur de permittivité électrique $\mathcal{B}^\ell$ satisfait :

$$\begin{cases} (a) \mathcal{B}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d. \\ (b) \mathcal{B}^\ell(x, \mathbf{E}) = (b_{ij}^\ell(x) E_j) \quad \forall \mathbf{E} = (E_i) \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell; \\ (c) b_{ij}^\ell = b_{ji}^\ell, \quad b_{ij}^\ell \in L^\infty(\Omega^\ell), \quad 1 \leq i, j \leq d. \\ (d) \text{ Il existe } m_{\mathcal{B}^\ell} > 0 \text{ tel que } \mathcal{B}^\ell \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \geq m_{\mathcal{B}^\ell} |\mathbf{E}|^2 \\ \quad \forall \mathbf{E} = (E_i) \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell. \end{cases} \quad (3.23)$$

La fonction de contact normale p_v satisfait

$$\begin{cases} (a) p_v : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+. \\ (b) \text{ Il existe } L_v > 0 \text{ tel que } |p_v(x, r_1) - p_v(x, r_2)| \leq L_v |r_1 - r_2| \\ \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ a.e. } x \in \Gamma_3. \\ (c) (p_v(x, r_1) - p_v(x, r_2))(r_1 - r_2) \geq 0 \\ \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ (d) \text{ L'application } x \mapsto p_v(x, r) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3, \forall r \in \mathbb{R}. \\ (e) p_v(x, r) = 0, \text{ pour tout } r \leq 0, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \end{cases} \quad (3.24)$$

La fonction de contact tangentielle p_τ satisfait :

$$\begin{cases} (a) p_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+. \\ (b) \text{ Il existe } L_\tau > 0 \text{ tel que } |p_\tau(x, d_1) - p_\tau(x, d_2)| \leq L_\tau |d_1 - d_2| \\ \quad \forall d_1, d_2 \in \mathbb{R}, \text{ a.e. } x \in \Gamma_3. \\ (c) \exists M_\tau > 0 \text{ such that } |p_\tau(x, d)| \leq M_\tau \quad \forall d \in \mathbb{R}, \text{ a.e. } x \in \Gamma_3. \\ (d) \text{ L'application } x \mapsto p_\tau(x, d) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3, \forall d \in \mathbb{R}. \\ (e) \text{ L'application } x \mapsto p_\tau(x, 0) \in L^2(\Gamma_3). \end{cases} \quad (3.25)$$

Rappelons que le tenseur transposé $(\mathcal{E}^\ell)^*$ est donné par $(\mathcal{E}^\ell)^* = (e_{ijk}^{\ell,*})$ où $e_{ijk}^{\ell,*} = e_{kij}^\ell$ et l'égalité suivante est satisfaite :

$$\mathcal{E}^\ell \sigma \cdot \tau = \sigma \cdot (\mathcal{E}^\ell)^* \tau \quad \forall \sigma, \tau \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell. \quad (3.26)$$

Nous supposons que les forces volumiques, la traction surfacique, et la densité des charges électriques ont la régularité

$$\begin{aligned} f_0^\ell &\in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega^\ell)^d), \quad f_2^\ell \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_2^\ell)^d), \\ q_0^\ell &\in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega^\ell)), \quad q_2^\ell \in W^{1,p}(0, T; L^2(\Gamma_b^\ell)). \end{aligned} \quad (3.27)$$

On suppose que :

$$q_2^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T). \quad (3.28)$$

Les coefficients d'adhésion γ_v, γ_τ et ε_a satisfont les conditions

$$\gamma_v, \gamma_\tau, \varepsilon_a \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \gamma_v, \gamma_\tau, \varepsilon_a \geq 0, \text{ p.p. sur } \Gamma_3. \quad (3.29)$$

Finalement, le champ d'adhésion initial satisfait

$$\beta_0 \in L^\infty(\Gamma_3) \text{ et } 0 \leq \beta_0 \leq 1 \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \quad (3.30)$$

Dans l'étude du problème **P** on introduit l'ensemble

$$\mathcal{Z} = \{\theta \in L^\infty(\Gamma_3); 0 \leq \theta \leq 1 \text{ p.p. sur } \Gamma_3\}.$$

Le théorème de représentation de *Riesz*, entraîne l'existence de $f : [0, T] \rightarrow V$ et $q : [0, T] \rightarrow W$ telles que :

$$(f(t), v)_V = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell(t) \cdot v^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2} f_2^\ell(t) \cdot v^\ell da \quad \forall v \in V, \quad (3.31)$$

$$(q(t), \zeta)_W = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell(t) \zeta^\ell dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell(t) \zeta^\ell da \quad \forall \zeta \in W. \quad (3.32)$$

On définit la fonctionnelle d'adhésion comme suit $j_{ad} : L^\infty(\Gamma_3) \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$j_{ad}(\beta, u, v) = \int_{\Gamma_3} \left(-\gamma_v \beta^2 R_v([u_v])[v_v] + p_\tau(\beta) R_\tau([u_\tau])[v_\tau] \right) da. \quad (3.33)$$

En plus de la fonctionnelle (3.33), nous avons besoin de la fonctionnelle de compliance normale $j_{vc} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$j_{vc}(u, v) = \int_{\Gamma_3} p_v([u_v])[v_v] da. \quad (3.34)$$

Les conditions (3.27) entraîne que les intégrales (3.31) et (3.32) sont bien définies. On note que les conditions (3.27), (3.31) et (3.32) impliquent

$$f \in W^{1,\infty}(0, T; V), \quad q \in W^{1,\infty}(0, T; W). \quad (3.35)$$

A l'aide des formules de *Green* on voit directement que si u, σ et β sont des fonctions suffisamment régulières qui satisfont (3.3), (3.5), (3.7) et (3.8) avec (3.33), (3.34) pour tout $t \in [0, T]$ on déduit que

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \varepsilon(v^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} + j_{ad}(\beta(t), u(t), v) + j_{vc}(u(t), v) = (f(t), v)_V \quad \forall v \in V, t \in (0, T). \quad (3.36)$$

En moyennant de (3.1), (3.36), on a alors

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(u^\ell(t)), \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell(t), \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + j_{ad}(\beta(t), u(t), v) \\ + j_{vc}(u(t), v) = (f(t), v)_V \quad \forall v \in V, t \in (0, T). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Maintenant, nous utilisons la formule de *Green* pour les inconnues électriques du problème ainsi que les conditions (3.4), (3.10), (3.11) et la définition (3.32). Il en résulte

$$(D^\ell, \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} + (q^\ell, \phi)_{W^\ell} = 0, \quad \forall \phi^\ell \in W^\ell, \quad (3.38)$$

et, compte tenu de (3.2), et par sommation sur ℓ , nous obtenons

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell \nabla \varphi^\ell(t), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(u^\ell(t)), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} = (q(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W, t \in (0, T). \quad (3.39)$$

De (3.37) et (3.39), nous obtenons la formulation variationnelle du problème électro-élastique **P**.

Problème P^V . Trouver les champs des déplacements $\mathbf{u} = (\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2) : [0, T] \rightarrow V$, les potentiels électriques $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2) : [0, T] \rightarrow W$, un champ d'adhésion $\beta : [0, T] \rightarrow L^\infty(\Gamma_3)$ tels que :

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell(t), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) + j_{vc}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_V \quad \forall \mathbf{v} \in V, t \in (0, T), \quad (3.40)$$

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell \nabla \varphi^\ell(t), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} = (q(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W, t \in (0, T), \quad (3.41)$$

$$\dot{\beta}(t) = -\left(\beta(t) \left(\gamma_\nu(R_\nu([u_\nu(t)]))^2 + \gamma_\tau(R_\tau([u_\tau(t)]))^2 \right) - \varepsilon_a \right)_+ \text{ a.e. } (0, T), \quad (3.42)$$

$$\beta(0) = \beta_0. \quad (3.43)$$

Remarque 3.1: On note que, dans le problème variationnel P^V nous n'avons pas besoin d'imposer explicitement la restriction $0 \leq \beta \leq 1$. De l'équation (3.42) et (3.43) on obtient que $\beta(x, t) \leq \beta_0(x)$ et c'est pourquoi l'hypothèse (3.30) montre que $\beta(x, t) \leq 1$ pour $t > 0$, p.p. $x \in \Gamma_3$. D'autre part, si $\beta(x, t_0) = 0$ à l'instant t_0 , alors il s'ensuit de (3.42) et (3.43) que $\dot{\beta}(x, t_0) = 0$ pour tout $t > t_0$ et ainsi $\beta(x, t_0) = 0$ pour tout $t > t_0$, p.p. $x \in \Gamma_3$. Nous concluons que $0 \leq \beta(x, t) \leq 1$ pour tout $t \in [0, T]$, p.p. $x \in \Gamma_3$.

Dans le reste de cette section, nous présentons quelques inégalités comprenant les fonctionnelles j_{ad} et j_{vc} qui seront utilisées dans les sections suivantes. Ci-dessous dans cette section β, β_1, β_2 dénotent les éléments de $L^2(\Gamma_3)$ tel que $0 \leq \beta, \beta_1, \beta_2 \leq 1$ p.p. $x \in \Gamma_3$, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ et $\mathbf{v}$ représentent des éléments de V et $C > 0$ est une constante positive générique qui peut dépendre de $\Omega^\ell, \Gamma_3, p_\nu, p_\tau, \gamma_\nu, \gamma_\tau$ et L , dont sa valeur peut changer d'un endroit à l'autre. Pour la raison de simplicité, nous supprimons dans ce qui suit la dépendance explicite des diverses fonctions sur $x \in \Omega^1 \cup \Omega^2 \cup \Gamma_3$.

D'abord, nous faisons remarquer que les fonctionnelles j_{ad} et j_{vc} , sont linéaires par rapport au dernier argument et donc

$$\begin{aligned} j_{ad}(\beta, \mathbf{u}, -\mathbf{v}) &= -j_{ad}(\beta, \mathbf{u}, \mathbf{v}), \\ j_{vc}(\mathbf{u}, -\mathbf{v}) &= -j_{vc}(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Ensuite, en utilisant (3.33), les propriétés des opérateurs R_ν et R_τ et les hypothèses (3.24) et (3.25) des fonctions p_τ , nous déduisons que

$$j_{ad}(\beta_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) + j_{ad}(\beta_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \leq C \int_{\Gamma_3} |\beta_1 - \beta_2| |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2| da,$$

D'après le théorème de tr  ce et quelques manipulations algébriques, nous obtenons

$$j_{ad}(\beta_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) + j_{ad}(\beta_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \leq C |\beta_1 - \beta_2|_{L^2(\Gamma_3)} |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|_V. \quad (3.45)$$

Des manipulations semblables, basées sur la Lipschitzialit   des opérateurs R_ν, R_τ et p_τ montrent que :

$$|j_{ad}(\beta, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}) - j_{ad}(\beta, \mathbf{u}_2, \mathbf{v})| \leq C \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V. \quad (3.46)$$

En choisissant $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ dans (3.45), nous trouvons :

$$j_{ad}(\beta_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) + j_{ad}(\beta_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \leq 0. \quad (3.47)$$

Aussi, nous prenons $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}$ et $\mathbf{u}_2 = 0$ dans (3.47) pour obtenir

$$j_{ad}(\beta, \mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0. \quad (3.48)$$

Maintenant, nous utilisons (3.34) pour voir que

$$|j_{vc}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) + j_{vc}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v})| \leq \int_{\Gamma_3} |p_v([u_{1v}]) - p_v([u_{2v}])| |v_v| da,$$

ensuite (3.24.b) impliquent

$$|j_{vc}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) + j_{vc}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v})| \leq C \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V. \quad (3.49)$$

Nous utilisons encore une fois (3.34), pour obtenir

$$j_{vc}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) + j_{vc}(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = - \int_{\Gamma_3} (p_v([u_{1v}]) - p_v([u_{2v}])) ([u_{1v}] - [u_{2v}]) da,$$

et alors, (3.24)(c) implique

$$j_{vc}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) + j_{vc}(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \leq 0. \quad (3.50)$$

Aussi, nous prenons $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}$ et $\mathbf{u}_2 = 0$ dans l'inégalité (3.24)(b) et (3.50) pour obtenir

$$j_{vc}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0. \quad (3.51)$$

Nous énonçons maintenant notre résultat principal concernant l'unique solvabilité du Problème $\mathbf{P}^V$ dont la démonstration sera détaillée dans la section suivante :

3.1.3 Résultats d'existence et d'unicité

Notre intérêt principal dans cette section est d'obtenir un résultat d'existence et d'unicité pour le problème variationnel $\mathbf{P}^V$.

Théorème 3.1: Sous les hypothèses (3.22)–(3.30). Le problème variationnel $\mathbf{P}^V$ admet une solution unique $\{\mathbf{u}, \varphi, \beta\}$ ayant la régularité suivante :

$$\mathbf{u} \in W^{1,\infty}(0, T; V), \quad (3.52)$$

$$\varphi \in W^{1,\infty}(0, T; W), \quad (3.53)$$

$$\beta \in W^{1,\infty}(0, T; L^\infty(\Gamma_3)). \quad (3.54)$$

Un "quintuple" de fonction $\{\mathbf{u}, \varphi, \beta, \sigma, D\}$ qui satisfait (3.1), (3.2), (3.40)–(3.43) est appelé *solution faible* du Problème $\mathbf{P}$. Nous concluons par le Théorème 3.1 que, sous les hypothèses (3.21)–(3.30), le problème $\mathbf{P}$ possède une solution unique faible qui satisfait (3.52)–(3.54). Pour préciser la régularité de la solution faible, nous notons que les relations constitutives (3.1) et (3.2), les hypothèses (3.21)–(3.30) et les régularités (3.52)–(3.54), montrent que $\sigma^\ell \in W^{1,\infty}(0, T; \mathcal{H}^\ell)$, $D^\ell \in W^{1,\infty}(0, T; \mathcal{W}^\ell)$; il s'ensuit maintenant des régularités (3.27), (3.31) et (3.32) que $\text{Div } \sigma^\ell(t) + f_0^\ell(t) = 0$, $\text{div } D^\ell(t) - q_0^\ell(t) = 0$, $\forall t \in [0, T]$, qui montre que :

$$\sigma \in W^{1,\infty}(0, T; \mathcal{H}_1), \quad (3.55)$$

$$D \in W^{1,\infty}(0, T; \mathcal{W}_1). \quad (3.56)$$

Nous concluons que la solution faible $\{\mathbf{u}, \varphi, \beta, \sigma, D\}$ du problème piézoélectrique de contact avec adhésion $\mathbf{P}$ possède la régularité (3.52)–(3.56).

3.1.4 Démonstration du Théorème 3.1

La démonstration du Théorème 3.1 sera effectuée en plusieurs étapes. A cet effet, nous assumons dans la suite que (3.21)–(3.30) sont satisfaites ; ci-après, C est une constante positive générique qui peut dépendre de Ω^ℓ , Γ_1^ℓ , Γ_3 , p_v , p_τ , γ_v , γ_τ , L et T , dont la valeur peut changer d'un endroit à l'autre. Pour la simplicité, nous supprimons dans ce qui suit la dépendance explicite des diverses fonctions sur $x \in \Omega^1 \cup \Omega^2 \cup \Gamma_3$.

Soit Θ l'ensemble fermé de l'espace $C(0, T; L^2(\Gamma_3))$ défini par

$$\Theta = \{\theta \in C(0, T; L^2(\Gamma_3)); \theta(t) \in \mathcal{Z} \quad \forall t \in [0, T], \theta(0) = \beta_0\}. \quad (3.57)$$

et soit $\beta \in \Theta$ donné.

Dans la première étape, nous considérons le problème intermédiaire suivant :

Problem P_β^V . Trouver les champs des déplacements $\mathbf{u}_\beta : [0, T] \rightarrow V$, et les potentiels électriques $\varphi_\beta : [0, T] \rightarrow W$ tels que :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_\beta^\ell(t)), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_\beta^\ell(t), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{v}) \\ + j_{vc}(\mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{v}) = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_V \quad \forall \mathbf{v} \in V, t \in [0, T], \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell \nabla \varphi_\beta^\ell(t), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_\beta^\ell(t)), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} = (q(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W, t \in [0, T]. \quad (3.59)$$

Pour étudier le problème variationnel P_β^V , nous considérons l'espace produit $X = V \times W$ muni du produit scalaire

$$(x, y)_X = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_V + (\varphi, \phi)_W \quad \forall x = (\mathbf{u}, \varphi), y = (\mathbf{v}, \phi) \in X, \quad (3.60)$$

et la norme associée $|\cdot|_X$. Pour $t \in [0, T]$, nous définissons l'opérateur $A_t : X \rightarrow X$ et l'élément $F \in X$ par les égalités :

$$\begin{aligned} (A_t x, y)_X = \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell \nabla \varphi^\ell(t), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} \\ + \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell(t), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} \\ + j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}, \mathbf{v}) + j_{vc}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \forall x = (\mathbf{u}, \varphi), y = (\mathbf{v}, \phi) \in X, \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$F = (\mathbf{f}, q) \in X. \quad (3.62)$$

Commençons par prouver le résultat d'équivalence suivant :

Lemme 3.1: Le couple $(\mathbf{u}_\beta, \varphi_\beta) : [0, T] \rightarrow V \times W$ est une solution du problème P_β^V si et seulement si

$$(A_t x_\beta, y)_X = (F(t), y)_X \quad \forall y \in X, t \in [0, T]. \quad (3.63)$$

Démonstration. Soit $x_\beta = (\mathbf{u}_\beta, \varphi_\beta) \in X$ une solution du Problème $\mathbf{P}_\beta^\mathcal{V}$ et soit $y = (v, \phi) \in X$, par sommation les deux égalités (3.58), (3.59) et utilisons (3.60)–(3.62) pour trouver (3.63).

Réciproquement, nous supposons $x_\beta = (\mathbf{u}_\beta, \varphi_\beta) \in X$ une solution de l'égalité (3.63) et soit $t \in [0, T]$. Nous prenons $y = (v, 0) \in X$ dans (3.63) où v est un élément arbitraire de V et on obtient (3.58). Alors nous prenons $y = (0, \phi)$ dans (3.63), où ϕ est un élément arbitraire de W , on obtient ainsi (3.59).

Nous utilisant le Lemme 3.1 pour obtenir le résultat d'existence et d'unicité suivant :

Lemme 3.2: Le problème $\mathbf{P}_\beta^\mathcal{V}$ admet une solution unique $(\mathbf{u}_\beta, \varphi_\beta)$ qui satisfait

$$(\mathbf{u}_\beta, \varphi_\beta) \in C(0, T; V) \times C(0, T; W).$$

Démonstration. Soit $t \in [0, T]$, nous utilisons (3.15), (3.19), (3.21)–(3.23), (3.46), (3.48), (3.49) et (3.51) de voir que A_t est fortement monotone et de Lipschitz dans X , par des résultats standards des inéquations variationnelles elliptiques, on conclut qu'il existe un élément unique $(\mathbf{u}_\beta(t), \varphi_\beta(t)) \in X$ qui satisfait (3.58)–(3.59).

Pour $t_1, t_2 \in [0, T]$, et notons par $\mathbf{u}_\beta(t_i) = \mathbf{u}_i, \beta(t_i) = \beta_i, \varphi_\beta(t_i) = \varphi_i, f(t_i) = f_i, q(t_i) = q_i$ et $x_\beta(t_i) = (\mathbf{u}_\beta(t_i), \varphi_\beta(t_i)) = x_i, i = 1, 2$, en utilisant des arguments basés sur (3.58) et (3.59) nous trouvons

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_1^\ell - \mathbf{u}_2^\ell), \varepsilon(\mathbf{u}_1^\ell - \mathbf{u}_2^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla(\varphi_1^\ell - \varphi_2^\ell), \varepsilon(\mathbf{u}_1^\ell - \mathbf{u}_2^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \\ &= (f_1 - f_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)_V + j_{vc}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) + j_{vc}(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \\ & \quad + j_{ad}(\beta_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) + j_{ad}(\beta_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2), \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell \nabla(\varphi_1^\ell - \varphi_2^\ell), \nabla(\varphi_1^\ell - \varphi_2^\ell))_{H^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_1^\ell - \mathbf{u}_2^\ell), \nabla(\varphi_1^\ell - \varphi_2^\ell))_{H^\ell} \\ &= (q_1 - q_2, \varphi_1 - \varphi_2)_W, \end{aligned} \quad (3.65)$$

et, en utilisant les hypothèses (3.21)–(3.23) des opérateurs $\mathcal{A}^\ell, \mathcal{B}^\ell$ et $\mathcal{E}^\ell$, les propriétés (3.45), (3.49) des fonctionnelles j_{ad}, j_{vc} , nous trouvons les inégalités suivante

$$\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \leq C(\|f_1 - f_2\|_V + \|q_1 - q_2\|_W + \|\beta_1 - \beta_2\|_{L^2(\Gamma_3)}), \quad (3.66)$$

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \leq C(\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V + \|q_1 - q_2\|_W). \quad (3.67)$$

Rappelons que $f \in W^{1,\infty}(0, T; V)$, $q \in W^{1,\infty}(0, T; W)$ et $\beta \in \Theta$. Il s'ensuit maintenant, d'après (3.66) que l'application $t \mapsto \mathbf{u}_\beta(t)$ appartient à $C(0, T; V)$. Notons aussi que $q \in W^{1,\infty}(0, T; W)$ et $\mathbf{u}_\beta \in C(0, T; V)$, nous concluons de (3.67), que $\varphi_\beta \in C(0, T; W)$.

Dans la deuxième étape nous utilisons le champ de déplacement $\mathbf{u}_\beta$ obtenu dans le Lemme 3.2, nous considérons le problème suivant :

Problème $\mathbf{Q}_\beta^\mathcal{V}$. Trouver un champ d'adhésion $\theta_\beta : [0, T] \rightarrow L^\infty(\Gamma_3)$ tel que :

$$\dot{\theta}_\beta(t) = -\left(\theta_\beta(t)\left(\gamma_\nu(R_\nu([u_{\beta\nu}(t)]))^2 + \gamma_\tau(R_\tau([u_{\beta\tau}(t)]))^2\right) - \varepsilon_a\right)_+ \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \quad (3.68)$$

$$\theta_\beta(0) = \beta_0. \quad (3.69)$$

Nous avons le résultat suivant d'existence et d'unicité.

Lemme 3.3: Il existe une solution unique du problème $\mathbf{Q}_\beta^\mathcal{V}$ et cela satisfait

$$\theta_\beta \in W^{1,\infty}(0, T; L^\infty(\Gamma_3) \cap \mathcal{Z}).$$

Démonstration. Considérons la fonction de trace $F_\beta : [0, T] \times L^\infty(\Gamma_3) \rightarrow L^\infty(\Gamma_3)$ définie par

$$F_\beta(t, \theta) = -\left(\theta\left(\gamma_\nu(R_\nu([u_{\beta\nu}(t)]))^2 + \gamma_\tau(R_\tau([u_{\beta\tau}(t)]))^2\right) - \varepsilon_a\right)_+, \quad (3.70)$$

pour $t \in [0, T]$ et $\theta \in L^\infty(\Gamma_3)$. D'après les propriétés des opérateurs de troncation R_ν et R_τ il résulte que F_β est Lipschitz continue par rapport au deuxième argument, et cela uniformément dans le temps. D'ailleurs, pour n'importe quel $\theta \in L^\infty(\Gamma_3)$, la trace $t \rightarrow F_\beta(t, \theta)$ appartient à $L^\infty(0, T; L^\infty(\Gamma_3))$. Ainsi, en utilisant le Théorème du *Cauchy-Lipschitz* (voir, [83, p.48]), nous constatons qu'il existe une fonction unique $\theta_\beta \in W^{1,\infty}(0, T; L^\infty(\Gamma_3))$ solution du Problème $\mathbf{Q}_\beta^\mathcal{V}$. Aussi, d'après les arguments utilisés dans la Remarque 3.1 nous déduisons que $0 \leq \theta_\beta(t) \leq 1$ pour tout $t \in [0, T]$, p.p. sur Γ_3 . Par conséquent, à partir de la définition de l'ensemble $\mathcal{Z}$, nous montrons que $\theta_\beta(t) \in \mathcal{Z}$, ce qui donne la preuve du lemme.

Il découle de Lemme 3.3 que pour tout $\beta \in \Theta$ la solution θ_β du Problème $\mathbf{Q}_\beta^\mathcal{V}$ appartient à Θ , voir (3.57). Nous considérons maintenant l'opérateur $\Lambda : \Theta \rightarrow \Theta$ défini par

$$\Lambda\beta = \theta_\beta, \quad (3.71)$$

et nous prouvons qu'il admet un point fixe unique.

Lemme 3.4: Il existe un élément unique $\beta^* \in \Theta$ tel que $\Lambda\beta^* = \beta^*$.

Démonstration. Nous montrons que pour un nombre entier positif m , la puissance m ième de l'opérateur Λ , notée Λ^m , est une contraction dans Θ . Soient β_1 et β_2 deux fonctions dans Θ et notons par $\mathbf{u}_{\beta_i} = \mathbf{u}_i$, et $\theta_{\beta_i} = \theta_i$ les fonctions obtenues dans les Lemmes 3.2 et 3.3, respectivement, pour $\beta = \beta_i$, $i = 1, 2$. Soit $t \in [0, T]$. On utilise (3.58) et (3.59) et des arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve de (3.66) pour déduire que

$$\|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_V \leq C\|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}, \quad (3.72)$$

ce qui implique

$$\int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V ds \leq C \int_0^t \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds. \quad (3.73)$$

D'autre part d'après, le problème de Cauchy (3.68)–(3.69), on trouve

$$\theta_i(t) = \beta_0 - \int_0^t \left(\theta_i(s) \left(\gamma_\nu(R_\nu([u_{i\nu}(s)]))^2 + \gamma_\tau(R_\tau([u_{i\tau}(s)]))^2 \right) - \varepsilon_a \right)_+ ds \quad (3.74)$$

et puis

$$\begin{aligned} \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} &\leq C \int_0^t \left\| \theta_1(s) \left((R_\nu([u_{1\nu}(s)]))^2 - \theta_2(s) \left((R_\nu([u_{2\nu}(s)]))^2 \right) \right\|_{L^2(\Gamma_3)} ds \right. \\ &\quad \left. + C \int_0^t \left\| \theta_1(s) \left((R_\tau([u_{1\tau}(s)]))^2 - \theta_2(s) \left((R_\tau([u_{2\tau}(s)]))^2 \right) \right\|_{L^2(\Gamma_3)} ds. \right. \end{aligned}$$

Utilisant la définition de R_v et R_τ et en écrivant $\theta_1 = \theta_1 - \theta_2 + \theta_2$, nous obtenons

$$\|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq C \left(\int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds + \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)^d} ds \right). \quad (3.75)$$

Maintenant, d'après l'inégalité de Gronwall, il s'ensuit que

$$\|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq C \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)^d} ds. \quad (3.76)$$

En utilisant (3.71) et de l'estimation (3.76), ainsi que (3.16), on obtient

$$\|\Lambda\beta_1(t) - \Lambda\beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq C \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V ds. \quad (3.77)$$

Combinant maintenant (3.73) et (3.77), on voit que

$$\|\Lambda\beta_1(t) - \Lambda\beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq C \int_0^t \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds. \quad (3.78)$$

Réitérant cette inégalité m fois conduit à

$$\|\Lambda^m \beta_1 - \Lambda^m \beta_2\|_{C(0,T;L^2(\Gamma_3))} \leq \frac{C^m T^m}{m!} \|\beta_1 - \beta_2\|_{C(0,T;L^2(\Gamma_3))}. \quad (3.79)$$

Comme $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{C^m T^m}{m!} = 0$, cela implique pour m assez grand, que l'opérateur $\Lambda^m : \Theta \rightarrow \Theta$ est une contraction sur $C(0, T; L^2(\Gamma_3))$. Il existe donc un unique $\beta^* \in \Theta$ tel que $\Lambda^m \beta^* = \beta^*$ et β^* est aussi l'unique point fixe de Λ .

Nous avons maintenant tout ce qui est nécessaire pour prouver le Théorème 3.1.

Démonstration du Théorème 3.1.

Existence. Soit $\beta^* \in \Theta$ le point fixe de Λ et soit $(\mathbf{u}^*, \varphi^*)$ une solution du problème $\mathbf{P}_\beta^\mathcal{V}$ pour $\beta = \beta^*$, i.e. $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_{\beta^*}$, $\varphi^* = \varphi_{\beta^*}$. En utilisant des arguments similaires à ceux de la démonstration du (3.66) on obtient

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^*(t_1) - \mathbf{u}^*(t_2)\|_V &\leq C(\|q(t_1) - q(t_2)\|_W \\ &+ \|f(t_1) - f(t_2)\|_V + \|\beta^*(t_1) - \beta^*(t_2)\|_{L^2(\Gamma_3)}), \quad \forall t_1, t_2 \in [0, T] \end{aligned} \quad (3.80)$$

et

$$\|\varphi^*(t_1) - \varphi^*(t_2)\|_W \leq C(\|\mathbf{u}^*(t_1) - \mathbf{u}^*(t_2)\|_V + \|q(t_1) - q(t_2)\|_W), \quad \forall t_1, t_2 \in [0, T]. \quad (3.81)$$

Comme $\beta^* = \theta_{\beta^*}$, nous concluons par (3.58), (3.59), (3.68) et (3.69) que $(\mathbf{u}^*, \varphi^*, \beta^*)$ est une solution du problème $\mathbf{P}^\mathcal{V}$, par ailleurs, $\beta^* \in W^{1,\infty}(0, T; L^\infty(\Gamma_3))$. Il découle maintenant de régularité (3.35), et des estimations (3.80)–(3.81) il s'ensuit que $\mathbf{u}^* \in W^{1,\infty}(0, T; V)$ et $\varphi^* \in W^{1,\infty}(0, T; W)$. Ce qui montre que les fonctions $(\mathbf{u}^*, \varphi^*, \beta^*)$ ont la régularité exprimée dans (3.52)–(3.54).

Unicité. C'est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ donné par (3.71). En effet, soit (u, φ, β) une solution du problème $\mathbf{P}^V$ qui satisfait (3.52)–(3.54). Il s'ensuit de (3.40) et (3.41) que (u, φ) est une solution du problème $\mathbf{P}_\beta^V$. Et par Lemme 3.2 ce problème admet une solution unique (u_β, φ_β) . On obtient

$$u = u_\beta \quad \text{et} \quad \varphi = \varphi_\beta. \quad (3.82)$$

On remplace u par u_β dans (3.42) et on utilise la condition initiale (3.43) pour voir que β est une solution du problème $\mathbf{Q}_\beta^V$. Comme d'après le Lemme 3.3 ce dernier problème possède une solution unique θ_β , nous trouvons

$$\beta = \theta_\beta. \quad (3.83)$$

Maintenant, on utilise (3.71) et (3.83) pour voir que $\Lambda\beta = \beta$, i.e. β est un point fixe de l'opérateur Λ . En utilisant le Lemme 3.4 on déduit que

$$\beta = \beta^*. \quad (3.84)$$

L'unicité du Théorème est maintenant une conséquence de (3.82), (3.83) et (3.84).

3.2 Approximation numérique d'un problème électro-élastique avec adhésion.

Dans notre étude on considère l'approximation numérique d'un problème quasistatiques de contact avec compliance normale et adhésion entre deux corps électro-élastique. Nous utilisons une méthode d'approximation variationnelle. Dans cette section on va présenter le problème approché, ensuite donner et estimer l'erreur de la discrétisation complète du problème approché et puis on donne un résultat de convergence pour le schéma numérique. Le schéma de discrétisation complète est analysé à l'aide de la méthode des éléments finis. En fait cette méthode est utilisée pour discrétiser l'espace et le temps. La convergence forte dans ce cas est établie sous une régularité minimale de la solution.

3.2.1 La discrétisation complète

Nous introduisons maintenant une approximation complète du problème variationnel $\mathbf{P}^V$ par la méthode des éléments finis et nous donnons une estimation d'erreur de ce problème. La discrétisation du problème (4.45)–(4.50) est donnée comme suit. Pour chaque paramètre $h_\ell > 0$, destiné à tendre vers 0, on associe la *triangulation* $\mathcal{T}_h^\ell$ de Ω^ℓ en triangles de taille maximale h_ℓ . Ensuite, les dérivations de temps sont discrétisées par l'utilisation d'une partition uniforme de $[0, T]$, notée par $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$. Soit k un pas de temps, $k = T/N$, et pour une fonction continue $f(t)$ soit $f_n = f(t_n)$. Finalement, pour une suite $\{\omega_n\}_{n=0}^N$, nous notons par $\delta\omega_n = (\omega_n - \omega_{n-1})/k$ la différence finie. Dans cette section, aucune addition n'est assumée sur un indice répété, et c dénote une constante positive qui dépend des données du problème, mais indépendante des paramètres de discrétisation h et k . Nous considérons une position générale des espaces arbitraires de dimension finie $V^h \subset V$, $W^h \subset W$ et $B^h \subset L^\infty(\Gamma_3)$, pour approcher les espaces V , W et $L^\infty(\Gamma_3)$, respectivement.

3.2.2 Formulation variationnelle approchée

La discrétisation complète du problème $\mathbf{P}^V$ est basée sur un schéma progressif d'Euler et elle est donnée sous la forme suivante :

Problème $\mathbf{P}^{\mathcal{V},hk}$. Trouver une discrétisation du champ des déplacements $\mathbf{u}^{hk} = \{(\mathbf{u}_n^{1,hk}, \mathbf{u}_n^{2,hk})\}_{n=1}^N \subset \mathbf{V}^h$, une discrétisation du potentiel électrique $\varphi^{hk} = \{(\varphi_n^{1,hk}, \varphi_n^{2,hk})\}_{n=1}^N \subset W^h$ et une discrétisation du champ d'adhésion $\beta^{hk} = \{\beta_n^{hk}\}_{n=1}^N \subset B^h$ tels que $\beta_0^{hk} = \beta_0^h$ et pour tout $n = 1, \dots, N$

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_n^{\ell,hk}), \varepsilon(\mathbf{v}^{\ell,h}))_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_n^{\ell,hk}, \varepsilon(\mathbf{v}^{\ell,h}))_{\mathcal{H}^\ell} + j_{ad}(\beta_n^{hk}, \mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{v}^h) + j_{vc}(\mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{v}^h) = (\mathbf{f}_n, \mathbf{v}^h)_V \quad \forall \mathbf{v}^h \in \mathbf{V}^h, \quad (3.85)$$

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell \nabla \varphi_n^{\ell,hk}, \nabla \phi^{\ell,h})_{H^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_n^{\ell,hk}), \nabla \phi^{\ell,h})_{H^\ell} = (q_n, \phi^h)_W \quad \forall \phi^h \in W^h, \quad (3.86)$$

$$\delta \beta_n^{hk} = -(\beta_{n-1}^{hk} (\gamma_v(R_v([u_{(n-1)v}^{hk}]])^2 + \gamma_\tau(R_\tau([u_{(n-1)\tau}^{hk}]])^2) - \varepsilon_a)_+, \quad (3.87)$$

et β_0^h approche la condition initiale β_0 . Nous remarquons que la discrétisation complète du Problème $\mathbf{P}^{\mathcal{V},hk}$ peut être vue comme un système d'une inéquation variationnelle, d'une équation variationnelle et d'une équation différentielle. Utilisant des résultats classiques des problèmes variationnels non linéaire (voir [54]), nous obtenons que le Problème $\mathbf{P}^{\mathcal{V},hk}$ admet une solution unique dans $\mathbf{V}^h \times W^h \times B^h$.

3.2.3 L'estimation d'erreur du problème approché

Notre intérêt dans cette section est de trouver l'estimation d'erreur $\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V$, $\|\varphi_n - \varphi_n^{hk}\|_W$ et $\|\beta_n - \beta_n^{hk}\|_{L^\infty(\Gamma_3)}$. Nous avons le résultat d'estimation d'erreur suivant :

Lemme 3.5: Sous les hypothèses (3.22)–(3.30). Soit $\{\mathbf{u}, \varphi, \beta\}$ et $\{\mathbf{u}_n^{hk}, \varphi_n^{hk}, \beta_n^{hk}\}$ les solutions des Problèmes $\mathbf{P}^{\mathcal{V}}$ et $\mathbf{P}^{\mathcal{V},hk}$, respectivement. Alors, on a l'estimation d'erreur suivante : pour tout, $\mathbf{v}^h = \{\mathbf{v}_j^h\}_{j=1}^N \subset \mathbf{V}^h$ et $\phi^h = \{\phi_j^h\}_{j=1}^N \subset W^h$,

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq n \leq N} \left\{ \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V^2 + \|\varphi_n - \varphi_n^{hk}\|_W^2 + \|\beta_n - \beta_n^{hk}\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \right\} \\ & \leq c \left(\begin{aligned} & \max_{1 \leq n \leq N} \|\mathbf{u}_n - \mathbf{v}_n^h\|_V^2 + \max_{1 \leq n \leq N} \|\varphi_n - \phi_n^h\|_W^2 \\ & + \|\beta_0 - \beta_0^h\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 + \sum_{j=1}^N k \|\beta_{j-1} - \beta_{j-1}^{hk}\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \\ & + k (\|\mathbf{u}\|_{H^2(0,T;V)} + \|\varphi\|_{H^2(0,T;W)} + \|\beta\|_{H^2(0,T;L^2(\Gamma_3))}) \end{aligned} \right). \end{aligned} \quad (3.88)$$

Démonstration. D'abord, on commence par l'obtention de l'estimation d'erreur pour le potentiel électrique. On prend (3.43) en temps $t = t_n$ for $\phi = \phi^h \in W^h$ et on la soustrayant de (3.86), il s'ensuit que :

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell \nabla (\varphi_n^\ell - \varphi_n^{\ell,hk}), \nabla \phi^{\ell,h})_{H^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_n^\ell - \mathbf{u}_n^{\ell,hk}), \nabla \phi^{\ell,h})_{H^\ell} = 0 \quad \forall \phi^h \in W^h.$$

Donc, nous avons

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell \nabla (\varphi_n^\ell - \varphi_n^{\ell,hk}), \nabla (\varphi_n^\ell - \varphi_n^{\ell,hk}))_{H^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_n^\ell - \mathbf{u}_n^{\ell,hk}), \nabla (\varphi_n^\ell - \varphi_n^{\ell,hk}))_{H^\ell} \\ & = \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell \nabla (\varphi_n^\ell - \varphi_n^{\ell,hk}), \nabla (\varphi_n^\ell - \phi^{\ell,h}))_{H^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_n^\ell - \mathbf{u}_n^{\ell,hk}), \nabla (\varphi_n^\ell - \phi^{\ell,h}))_{H^\ell} \quad \phi^h \in W^h. \end{aligned}$$

Nous combinons maintenant (3.22.b) et (3.23), on voit que

$$\begin{aligned} \|\varphi_n - \varphi_n^{hk}\|_W^2 &\leq c(\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V \|\varphi_n - \varphi_n^{hk}\|_W + \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V \|\varphi_n - \phi^h\|_W \\ &\quad + \|\varphi_n - \varphi_n^{hk}\|_W \|\varphi_n - \phi^h\|_W) \quad \forall \phi^h \in W^h. \end{aligned}$$

Nous appliquons l'inégalité élémentaire suivante :

$$a.b \leq \alpha a^2 + \frac{1}{4\alpha} b^2, \quad a, b, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0. \quad (3.89)$$

Alors, nous trouvons

$$\|\varphi_n - \varphi_n^{hk}\|_W^2 \leq c(\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V^2 + \|\varphi_n - \phi^h\|_W^2) \quad \forall \phi^h \in W^h. \quad (3.90)$$

Puis, nous présentons l'estimation d'erreur pour le champ des déplacements. Nous récrivons l'équation variationnelle (3.40) en temps $t = t_n$ pour $\mathbf{v} = \mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk} \in V$ pour obtenir

$$\begin{cases} \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_n^\ell), \varepsilon(\mathbf{u}_n^\ell - \mathbf{u}_n^{\ell,hk}))_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_n^{\ell,hk}, \varepsilon(\mathbf{u}_n^\ell - \mathbf{u}_n^{\ell,hk}))_{\mathcal{H}^\ell} \\ + j_{ad}(\beta_n, \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}) + j_{vc}(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}) = (\mathbf{f}_n, \mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk})_V. \end{cases} \quad (3.91)$$

Ensuite, après quelques manipulations algébriques, on aura

$$\begin{aligned} &\sum_{\ell=1}^2 (-\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_n^{\ell,hk}), \varepsilon(\mathbf{u}_n^\ell - \mathbf{u}_n^{\ell,hk}))_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 ((-\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_n^{\ell,hk}, \varepsilon(\mathbf{u}_n^\ell - \mathbf{u}_n^{\ell,hk}))_{\mathcal{H}^\ell} \\ &\quad - j_{ad}(\beta_n^{hk}, \mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}) - j_{vc}(\mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}) \\ &\leq \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_n^{\ell,hk}), \varepsilon(\mathbf{v}^{\ell,h} - \mathbf{u}_n^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_n^{\ell,hk}, \varepsilon(\mathbf{v}^{\ell,h} - \mathbf{u}_n^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \\ &\quad + j_{ad}(\beta_n^{hk}, \mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}) + j_{vc}(\mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}), \quad \forall \mathbf{v}^h \in V^h. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Nous additionnons (3.91) et (3.92) nous obtenons

$$\begin{aligned} &\sum_{\ell=1}^2 (-\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_n^{\ell,hk}), \varepsilon(\mathbf{u}_n^\ell - \mathbf{u}_n^{\ell,hk}))_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 ((-\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_n^{\ell,hk}, \varepsilon(\mathbf{u}_n^\ell - \mathbf{u}_n^{\ell,hk}))_{\mathcal{H}^\ell} \\ &\quad - j_{ad}(\beta_n^{hk}, \mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}) - j_{vc}(\mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}) \\ &\leq \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_n^{\ell,hk}), \varepsilon(\mathbf{v}^{\ell,h} - \mathbf{u}_n^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_n^{\ell,hk}, \varepsilon(\mathbf{v}^{\ell,h} - \mathbf{u}_n^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \\ &\quad + j_{ad}(\beta_n^{hk}, \mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}_n) + j_{vc}(\mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}_n) + (\mathbf{f}_n, -\mathbf{v}^h + \mathbf{u}_n^{hk})_V, \quad \forall \mathbf{v}^h \in V^h. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Moyennant (3.91)–(3.93), on a alors

$$\begin{aligned} &\sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_n^\ell - \mathbf{u}_n^{\ell,hk}), \varepsilon(\mathbf{u}_n^\ell - \mathbf{u}_n^{\ell,hk}))_{\mathcal{H}^\ell} + j_{ad}(\beta_n - \beta_n^{hk}, \mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}) \\ &\quad + \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla (\varphi_n^\ell - \varphi_n^{\ell,hk}), \varepsilon(\mathbf{u}_n^\ell - \mathbf{u}_n^{\ell,hk}))_{\mathcal{H}^\ell} + j_{vc}(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}) \\ &\leq \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_n^{\ell,hk}), \varepsilon(\mathbf{v}^{\ell,h} - \mathbf{u}_n^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_n^{\ell,hk}, \varepsilon(\mathbf{v}^{\ell,h} - \mathbf{u}_n^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \\ &\quad + j_{ad}(\beta_n^{hk}, \mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}_n) + j_{vc}(\mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}_n) - (\mathbf{f}_n, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}_n^{hk})_V \quad \forall \mathbf{v}^h \in V^h. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Donc, nous avons

$$\begin{aligned}
& \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_n^\ell - \mathbf{u}_n^{\ell,hk}), \varepsilon(\mathbf{u}_n^\ell - \mathbf{u}_n^{\ell,hk}))_{\mathcal{H}^\ell} + j_{ad}(\beta_n - \beta_n^{hk}, \mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}) \\
& + \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla(\varphi_n^\ell - \varphi_n^{\ell,hk}), \varepsilon(\mathbf{u}_n^\ell - \mathbf{u}_n^{\ell,hk}))_{\mathcal{H}^\ell} + j_{vc}(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}) \\
& \leq \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_n^{\ell,hk} - \mathbf{u}_n^\ell), \varepsilon(\mathbf{v}^{\ell,h} - \mathbf{u}_n^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + j_{ad}(\beta_n - \beta_n^{hk}, \mathbf{u}_n^{hk} - \mathbf{u}_n, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}_n) \\
& + \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla(\varphi_n^{\ell,hk} - \varphi_n^\ell), \varepsilon(\mathbf{v}^{\ell,h} - \mathbf{u}_n^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + j_{vc}(\mathbf{u}_n^{hk} - \mathbf{u}_n, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}_n) \\
& + Z(\mathbf{u}_n, \varphi_n, \beta_n, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}_n) \quad \forall \mathbf{v}^h \in V^h,
\end{aligned} \tag{3.95}$$

où Z est le résiduel défini par

$$\begin{aligned}
Z(\mathbf{u}_n, \varphi_n, \beta_n, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}_n) &= \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_n^\ell), \varepsilon(\mathbf{v}^{\ell,h} - \mathbf{u}_n^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + j_{vc}(\mathbf{u}_n, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}_n) \\
&+ \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_n^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^{\ell,h} - \mathbf{u}_n^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + j_{ad}(\beta_n, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}_n) - (\mathbf{f}_n, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}_n)_V.
\end{aligned}$$

D'après les propriétés (3.45)–(3.50), nous avons

$$\begin{cases} j_{ad}(\beta_n - \beta_n^{hk}, \mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}) \leq c \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V^2 \|\beta_n - \beta_n^{hk}\|_{L^2(\Gamma_3)}, \\ j_{vc}(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}) \leq c \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V^2 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} j_{ad}(\beta_n - \beta_n^{hk}, \mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{v}_n - \mathbf{u}_n^{hk}) \leq c \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V \|\mathbf{v}^h - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V \|\beta_n - \beta_n^{hk}\|_{L^2(\Gamma_3)}, \\ j_{vc}(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{v}_n - \mathbf{u}_n^{hk}) \leq c \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V \|\mathbf{v}^h - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V. \end{cases}$$

Utilisant l'inégalité (3.95) et les propriétés (3.21) et (3.89), après des calculs simples, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V^2 &\leq c \left(\|\varphi_n - \varphi_n^{hk}\|_W^2 + \|\beta_n - \beta_n^{hk}\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 + \|\mathbf{v}^h - \mathbf{u}_n\|_V^2 \right. \\
&\quad \left. + Z(\mathbf{u}_n, \varphi_n, \beta_n, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}_n) \right) \quad \forall \mathbf{v}^h \in V^h.
\end{aligned}$$

Finalement, on fait l'estimation d'erreur pour le champ d'adhésion, on a

$$\delta\beta_n = (\beta_n - \beta_{n-1})/k.$$

Rappelons que

$$\beta_n^{hk} = - \sum_{j=1}^n k \left(\beta_{j-1}^{hk} \left(\gamma_\eta(R_\nu([u_{(j-1)\nu}])^2 + \gamma_\tau(R_\tau([u_{(j-1)\tau}])^2) - \varepsilon_a \right)_+, \right.$$

en soustrayant (3.87), on obtient

$$\|\beta_n - \beta_n^{hk}\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \leq c \left(\|\beta_0 - \beta_0^h\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 + \sum_{j=1}^n k \|\beta_{j-1} - \beta_{j-1}^{hk}\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 + d_n \right) \quad (3.96)$$

où

$$\begin{aligned} d_n = & \int_0^{t_n} \left(\beta(s) \left(\gamma_\nu(R_\nu([u_\nu(s)]))^2 + \gamma_\tau(R_\tau([u_\tau(s)]))^2 \right) - \varepsilon_a \right)_+ ds \\ & - \sum_{j=1}^n k \left(\beta_{j-1} \left(\gamma_\nu(R_\nu([u_{(j-1)\nu}]))^2 + \gamma_\tau(R_\tau([u_{(j-1)\tau}]))^2 \right) - \varepsilon_a \right)_+. \end{aligned}$$

Alors, combinant (3.90), (3.95) et (3.96), nous trouvons

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V^2 + \|\varphi_n - \varphi_n^{hk}\|_W^2 + \|\beta_n - \beta_n^{hk}\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 & \leq \|\mathbf{v}_n^h - \mathbf{u}_n\|_V^2 \\ & + \|\varphi_n - \varphi^h\|_W^2 + \|\beta_0 - \beta_0^h\| + \sum_{j=1}^n k \|\beta_{j-1} - \beta_{j-1}^{hk}\| + d_n \\ & + Z(\mathbf{u}_n, \varphi_n, \beta_n, \mathbf{v}_n^h - \mathbf{u}_n). \end{aligned} \quad (3.97)$$

D'après le Théorème 3.1, nous avons $\mathbf{u} \in H^2(0, T; V)$ et de plus, on peut trouver simplement

$$d_n \leq k \left(\|\mathbf{u}\|_{H^2(0, T; V)} + \|\beta\|_{H^2(0, T; L^2(\Gamma_3))} \right).$$

En appliquant une version de l'inégalité de *Gronwall* (voir [83]) pour plus de détails, alors nous obtenons (3.88).

Soit les espaces de dimension finie $V_h(\Omega^\ell)$, $W_h(\Omega^\ell)$ et B_h^ℓ composés de fonctions continues et affines par morceaux ; qui sont alors définis par

$$\begin{aligned} V_h(\Omega^\ell) &= \{v_h^\ell \in [C(\overline{\Omega^\ell})]^d; v_h^\ell|_K \in [P_1(K)]^d, \forall K \in \mathcal{T}_h^\ell; v_h^\ell|_{\Gamma_1^\ell} \equiv 0\}, \\ W_h(\Omega^\ell) &= \{\varphi_h^\ell \in C(\overline{\Omega^\ell}); \varphi_h^\ell|_K \in P_1(K), \forall K \in \mathcal{T}_h^\ell; \varphi_h^\ell|_{\Gamma_a^\ell} \equiv 0\}, \\ B_h^\ell &= \{\beta_h \in C(\overline{\Gamma_3}); \beta_h|_{[x_i^\ell, x_{i+1}^\ell]} \in P_1([x_i^\ell, x_{i+1}^\ell]), \forall i = 0, \dots, N^\ell - 1\}, \end{aligned}$$

où $P_1(K)$ désigne l'ensemble des polynômes de degré total inférieur ou égal à 1 sur K . Et on considère les espaces de produit, définis par :

$$\begin{aligned} V^h &= V_h(\Omega^1) \times V_h(\Omega^2), \quad W^h = W_h(\Omega^1) \times W_h(\Omega^2), \\ H^p &= H^p(\Omega^1) \times H^p(\Omega^2), \quad B^h = B_h^\ell, \ell = 1 \text{ or } 2. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Supposons que la condition initiale discrétisée β_0^h est obtenue par

$$\beta_0^h = i_h^\ell \beta_0 \quad (3.99)$$

où i_h^ℓ est l'opérateur d'interpolation du *Lagrange* sur Γ_3 associé aux segments $\mathcal{T}_h^\ell$ (voir [17]). Alors, nous avons le théorème suivant qui donne la convergence linéaire de l'algorithme sous les conditions de la régularité.

Théorème 3.2: Sous les hypothèses (3.22)–(3.30). Soit $\{\mathbf{u}, \varphi, \beta\}$ et $\{\mathbf{u}_n^{hk}, \varphi_n^{hk}, \beta_n^{hk}\}$ les solutions des problèmes $\mathbf{P}^V$ et $\mathbf{P}^{V,hk}$, respectivement, et soit la discrétisation de la condition aux limites donnée par (3.99). Sous les régularités suivantes :

$$\mathbf{u} \in C(0, T; [H^{\frac{3}{2}+\eta}]^d), \varphi \in C(0, T; H^{\frac{3}{2}+\eta}), \beta \in C^1(0, T; H^{\frac{1}{2}+\eta}(\Gamma_3)),$$

où $0 < \eta \leq \frac{3}{2}$. De plus il existe une constante positive $C > 0$, indépendante des paramètres de discrétisation h et k , telle que

$$\max_{1 \leq n \leq N} \left\{ \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V + \|\varphi_n - \varphi_n^{hk}\|_W + \|\beta_n - \beta_n^{hk}\|_{L^2(\Gamma_3)} \right\} \leq C(h^{\frac{1}{2}+\eta} + k). \quad (3.100)$$

Démonstration. Nous avons les propriétés suivantes des espaces des éléments finis V^h et W^h (voir [17] ou [44]),

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq n \leq N} \inf_{\mathbf{v}_n^h \in V^h} \|\mathbf{u}_n - \mathbf{v}_n^h\|_V &\leq ch^{\frac{1}{2}+\eta} \|\mathbf{u}\|_{C(0, T; [H^{\frac{3}{2}+\eta}]^d)}, \\ \max_{1 \leq n \leq N} \inf_{\phi_n^h \in W^h} \|\varphi_n - \phi_n^h\|_W &\leq ch^{\frac{1}{2}+\eta} \|\varphi_n\|_{C(0, T; H^{\frac{3}{2}+\eta})}. \end{aligned}$$

De plus, d'après la définition de l'opérateur d'interpolation d'éléments finis i_h^ℓ , nous trouvons ([17] ou [44])

$$\|\beta_0 - \beta_0^h\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq ch^{\frac{1}{2}+\eta} \|\beta\|_{C^1(0, T; H^{\frac{1}{2}+\eta}(\Gamma_3))}, \quad (3.101)$$

en combinant les dernières estimations, (3.88) et (3.96), on déduit (3.100).

4. ETUDE VARIATIONNELLE D'UN PROBLÈME ÉLECTRO-ÉLASTO-VISCOPLASTIQUE AVEC ADHÉSION.

Résumé :

Dans ce chapitre, nous considérons un modèle mathématique dans un processus dynamique d'un problème de contact avec compliance normale et adhésion entre deux corps électro-élasto-viscoplastiques, où les inconnues dans ce cas, sont les champs des déplacements $\boldsymbol{u}^\ell$, les champs des contraintes $\boldsymbol{\sigma}^\ell$, les potentiels électriques φ^ℓ , un champ d'adhésion β et les champs des déplacements électriques $\boldsymbol{D}^\ell$ avec la loi de comportement électro-élasto-viscoplastique non linéaire. Pour ce problème le contact est modélisé par l'adhésion dont l'évolution est décrite par une équation différentielle ordinaire du premier ordre. En utilisant la formule de *Green*, on propose une formulation variationnelle au problème mécanique puis nous présentons un résultat d'existence et d'unicité de la solution. Les démonstrations sont basées sur des arguments d'inéquations variationnelles dépendant du temps du type parabolique, ainsi la théorie des équations d'évolutions du premier ordre avec des opérateurs non linéaires, et de point fixe. L'analyse de ce problème a fait l'objet de la publication [39].

Contenu :

1. Formulation du problème ;
2. Formulation variationnelle ;
3. Résultats d'existence et d'unicité ;
4. Démonstration du Théorème 4.1.

4.1 Formulation du problème

Les deux corps sont supposés électro-élasto-viscoplastiques, le contact est modélisé par les conditions de compliance normale couplées avec l'adhésion. Sous ces considérations, le modèle mécanique que l'on étudie peut se formuler de la manière suivante :

Problème P. Pour $\ell = 1, 2$, trouver les champs des déplacements $\mathbf{u}^\ell : \Omega^\ell \times (0, T) \longrightarrow \mathbb{R}^d$, les champs des contraintes $\boldsymbol{\sigma}^\ell : \Omega^\ell \times (0, T) \longrightarrow \mathbb{S}^d$, les potentiels électriques $\varphi^\ell : \Omega^\ell \times (0, T) \longrightarrow \mathbb{R}$, un champ d'adhésion $\beta : \Gamma_3 \times (0, T) \longrightarrow \mathbb{R}$ et les champs des déplacements électriques $\mathbf{D}^\ell : \Omega^\ell \times (0, T) \longrightarrow \mathbb{R}^d$, tels que :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^\ell &= \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell) + \mathcal{G}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell) + (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell + \\ &\int_0^t \mathcal{F}^\ell \left(\boldsymbol{\sigma}^\ell(s) - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell(s)) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell(s)) \right) ds \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{D}^\ell = \mathcal{E}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell) - \mathcal{B}^\ell \nabla \varphi^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \quad (4.2)$$

$$\rho^\ell \ddot{\mathbf{u}}^\ell = \text{Div } \boldsymbol{\sigma}^\ell + \mathbf{f}_0^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \quad (4.3)$$

$$\text{div } \mathbf{D}^\ell - q_0^\ell = 0 \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \quad (4.4)$$

$$\mathbf{u}^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\ell \times (0, T), \quad (4.5)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^\ell \mathbf{v}^\ell = \mathbf{f}_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_2^\ell \times (0, T), \quad (4.6)$$

$$\begin{cases} \sigma_v^1 = \sigma_v^2 \equiv \sigma_v, \\ \sigma_v = -p_v([u_v]) + \gamma_v \beta^2 R_v([u_v]) \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (4.7)$$

$$\begin{cases} \sigma_\tau^1 = -\sigma_\tau^2 \equiv \sigma_\tau, \\ \sigma_\tau = p_\tau(\beta) R_\tau([u_\tau]) \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (4.8)$$

$$\dot{\beta} = -\left(\beta \left(\gamma_v (R_v([u_v]))^2 + \gamma_\tau |R_\tau([u_\tau])|^2 \right) - \varepsilon_a \right)_+ \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (4.9)$$

$$\varphi^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a^\ell \times (0, T), \quad (4.10)$$

$$\mathbf{D}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell = q_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_b^\ell \times (0, T), \quad (4.11)$$

$$\mathbf{u}^\ell(0) = \mathbf{u}_0^\ell, \quad \dot{\mathbf{u}}^\ell(0) = \mathbf{v}_0^\ell \quad \text{sur } \Omega^\ell, \quad (4.12)$$

$$\beta(0) = \beta_0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (4.13)$$

Dans ce qui suit, nous fournissons quelques commentaires sur les égalités et les conditions aux limites (4.1)–(4.13) et renvoyons à [76, 81] pour plus de détails sur les conditions (4.7)–(4.9) qui décrivent le contact sans frottement avec adhésion.

Les équations (4.1) et (4.2) représentent la loi constitutive électro-élasto-viscoplastique dans laquelle $\varepsilon(u^\ell)$ représente le tenseur linéarisé de contrainte, $E(\varphi^\ell) = -\nabla\varphi^\ell$ est le champ électrique, $\mathcal{A}^\ell$ et $\mathcal{G}^\ell$ sont respectivement les opérateurs de viscosité et d'élasticité non linéaire, respectivement, $\mathcal{F}^\ell$ représente le tenseur de viscoplasticité, $\mathcal{E}^\ell$ représente le tenseur piézoélectrique du troisième ordre, $(\mathcal{E}^\ell)^*$ est son transposé et $\mathcal{B}^\ell$ représente le tenseur de permittivité électrique. Ensuite, les équations (4.3) et (4.4) sont les équations de mouvement pour le champ de contrainte et les équations d'équilibre pour le champ de déplacement électrique, respectivement. Les conditions (4.5) et (4.6) sont les conditions aux limites classiques de déplacement-traction tandis que (4.10) et (4.11) représentent les conditions aux limites pour les variables électriques. L'équation (4.7) représente la condition de compliance normale avec adhésion sur la surface de contact Γ_3 , dans laquelle γ_v est le coefficient d'adhésion et R_v est un opérateur de troncation défini par :

$$R_v(s) = \begin{cases} L & \text{si } s < -L, \\ -s & \text{si } -L \leq s \leq 0, \\ 0 & \text{si } s > 0, \end{cases}$$

où $L > 0$ est la longueur caractéristique de la liaison, voir [13, 76]. La condition (4.8) représente la condition de contact avec adhésion sur le plan tangentiel, dans lequel p_τ est une fonction donnée et R_τ l'opérateur de troncation donné par :

$$R_\tau(v) = \begin{cases} v & \text{if } |v| \leq L, \\ L \frac{v}{|v|} & \text{if } |v| > L. \end{cases}$$

L'équation (4.9) décrit l'évolution du champ d'adhésion avec les paramètres physiques positifs donnés γ_v , γ_τ et ε_a , et en effet, $r_+ = \max\{r, 0\}$. Nous notons que le processus adhésif est irréversible ; une fois que la "déliaison" se produit l'adhésion ne peut pas être rétablie, car $\dot{\beta} \leq 0$. En outre, il est facile de voir que si $0 \leq \beta_0 \leq 1$ p.p. sur Γ_3 , alors $0 \leq \beta \leq 1$ p.p. sur Γ_3 pendant le processus. Enfin, (4.12) et (4.13) représente les conditions initiales.

4.2 Formulation variationnelle

Pour l'étude du problème $\mathbb{P}$. on considère le sous espace fermé V^ℓ de H_1^ℓ défini par :

$$V(\Omega^\ell) = \left\{ v^\ell \in H_1^\ell / v^\ell = 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_1^\ell \right\}. \quad (4.14)$$

Et on considère l'espace V défini par :

$$V = V(\Omega^1) \times V(\Omega^2). \quad (4.15)$$

L'espace V muni du produit scalaire et de la norme associée donnée par (voir Lemme 1.1, page 6) :

$$\langle v, \omega \rangle_V = \sum_{\ell=1}^2 \langle \varepsilon(v^\ell), \varepsilon(\omega^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell}, \quad \|v\|_V = \left(\sum_{\ell=1}^2 \|\varepsilon(v^\ell)\|_{\mathcal{H}^\ell}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.16)$$

Par l'inégalité de Korn, il vient que $\|\cdot\|_{H_1}$ et $\|\cdot\|_V$ sont des normes équivalentes sur V et ainsi $(V, \|\cdot\|_V)$ est un espace de Hilbert réel. En outre, par le théorème de trace de Sobolev, il existe une constante $c_0 > 0$, dépendant uniquement de Ω^ℓ , Γ_1^ℓ et Γ_3 telle que

$$\|v^\ell\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq c_0 \|v^\ell\|_{V(\Omega^\ell)} \quad \forall v^\ell \in V(\Omega^\ell). \quad (4.17)$$

De plus, pour le potentiel électrique et le champ de déplacement électrique nous utilisons les espaces

$$W^\ell = \{\psi^\ell \in H^1(\Omega^\ell); \psi^\ell = 0 \text{ sur } \Gamma_a^\ell\}, \quad (4.18)$$

$$\mathcal{W}_1^\ell = \{D^\ell = (D_i^\ell); D_i^\ell \in L^2(\Omega^\ell), \operatorname{div} D^\ell \in L^2(\Omega^\ell)\} \quad (4.19)$$

respectivement. Puisque $\operatorname{meas} \Gamma_a^\ell > 0$, l'inégalité de Friedrichs-Poincaré montre qu'il existe une constante $c_F^\ell > 0$ dépendant uniquement de Ω^ℓ et Γ_a^ℓ telle que

$$\|\nabla \psi^\ell\|_{L^2(\Omega^\ell)^d} \geq c_F^\ell \|\psi^\ell\|_{H^1(\Omega^\ell)} \quad \forall \psi^\ell \in W^\ell, \quad (4.20)$$

Sur l'espace W^ℓ nous considérons le produit scalaire donné par

$$(\varphi^\ell, \psi^\ell)_{W^\ell} = \int_{\Omega^\ell} \nabla \varphi^\ell \cdot \nabla \psi^\ell dx$$

et soit $\|\cdot\|_{W^\ell}$ la norme associée. En utilisant (4.20) on peut vérifier que $\|\cdot\|_{H^1(\Omega^\ell)}$ et $\|\cdot\|_{W^\ell}$ sont deux normes équivalentes sur W^ℓ . Il en résulte que $(W^\ell, \|\cdot\|_{W^\ell})$ est un espace de Hilbert réel. Aussi l'espace $\mathcal{W}_1^\ell$ est un espace de Hilbert réel avec le produit scalaire

$$(D^\ell, E^\ell)_{\mathcal{W}_1^\ell} = \int_{\Omega^\ell} D^\ell \cdot E^\ell dx + \int_{\Omega^\ell} \operatorname{div} D^\ell \cdot \operatorname{div} E^\ell dx,$$

et la norme associée $\|\cdot\|_{\mathcal{W}_1^\ell}$. Et on considère les espaces de produit, définis par :

$$W = W^1 \times W^2, \quad \mathcal{W}_1 = \mathcal{W}_1^1 \times \mathcal{W}_1^2. \quad (4.21)$$

Les espaces W et $\mathcal{W}_1$ sont des espaces de Hilbert réels pour les produits scalaires

$$(\varphi, \psi)_W = \sum_{\ell=1}^2 (\varphi^\ell, \psi^\ell)_{W^\ell}, \quad (D, E)_{\mathcal{W}_1} = \sum_{\ell=1}^2 (D^\ell, E^\ell)_{\mathcal{W}_1^\ell}$$

et leurs normes associées $\|\cdot\|_W$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{W}_1}$, respectivement,

Pour l'étude du problème **P**, on considère les hypothèses suivantes.

L'opérateur de viscosité $\mathcal{A}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_{\mathcal{A}^\ell} > 0 \text{ tel que} \\ \quad |\mathcal{A}^\ell(x, \xi_1) - \mathcal{A}^\ell(x, \xi_2)| \leq L_{\mathcal{A}^\ell} |\xi_1 - \xi_2| \\ \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell. \\ \text{(b) il existe } m_{\mathcal{A}^\ell} > 0 \text{ tel que} \\ \quad (\mathcal{A}^\ell(x, \xi_1) - \mathcal{A}^\ell(x, \xi_2)) \cdot (\xi_1 - \xi_2) \geq m_{\mathcal{A}^\ell} |\xi_1 - \xi_2|^2 \\ \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell. \\ \text{(c) L'application } x \mapsto \mathcal{A}^\ell(x, \xi) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega^\ell, \\ \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(d) L'application } x \mapsto \mathcal{A}^\ell(x, 0) \text{ est continue sur } \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell. \end{array} \right. \quad (4.22)$$

L'opérateur d'élasticité $\mathcal{G}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_{\mathcal{G}^\ell} > 0 \text{ tel que} \\ \quad |\mathcal{G}^\ell(x, \xi_1) - \mathcal{G}^\ell(x, \xi_2)| \leq L_{\mathcal{G}^\ell} |\xi_1 - \xi_2| \\ \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell. \\ \text{(b) L'application } x \mapsto \mathcal{G}^\ell(x, \xi) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega^\ell, \\ \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(c) L'application } x \mapsto \mathcal{G}^\ell(x, 0) \text{ belongs to } \mathcal{H}^\ell. \end{array} \right. \quad (4.23)$$

L'opérateur viscoplastique $\mathcal{F}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_{\mathcal{F}^\ell} > 0 \text{ tel que} \\ \quad |\mathcal{F}^\ell(x, \eta_1, \xi_1) - \mathcal{F}^\ell(x, \eta_2, \xi_2)| \leq L_{\mathcal{F}^\ell} (|\eta_1 - \eta_2| + |\xi_1 - \xi_2|) \\ \quad \forall \eta_1, \eta_2, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell. \\ \text{(b) L'application } x \mapsto \mathcal{F}^\ell(x, \eta, \xi) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega^\ell, \\ \quad \text{pour tout } \eta, \xi \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(c) L'application } x \mapsto \mathcal{F}^\ell(x, 0, 0) \text{ appartient } \mathcal{H}^\ell. \end{array} \right. \quad (4.24)$$

Le tenseur piézoélectrique $\mathcal{E}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{E}^\ell(x, \tau) = (e_{ijk}^\ell(x) \tau_{jk}), \quad \forall \tau = (\tau_{ij}) \in \mathbb{S}^d \text{ a.e. } x \in \Omega^\ell. \\ \text{(b) } e_{ijk}^\ell = e_{ikj}^\ell \in L^\infty(\Omega^\ell), \quad 1 \leq i, j, k \leq d. \end{array} \right. \quad (4.25)$$

Rappelons aussi que le tenseur transpose $\mathcal{E}^\ell$ est donné par $(\mathcal{E}^\ell)^* = (e_{ijk}^{\ell,*})$ où $e_{ijk}^{\ell,*} = e_{kij}^\ell$ et l'égalité suivante est satisfaite :

$$\mathcal{E}^\ell \sigma \cdot v = \sigma \cdot (\mathcal{E}^\ell)^* v \quad \forall \sigma \in \mathbb{S}^d, \quad \forall v \in \mathbb{R}^d.$$

Le tenseur de permittivité électrique $\mathcal{B}^\ell = (b_{ij}^\ell) : \Omega^\ell \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ satisfait les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{B}^\ell(x, E) = (b_{ij}^\ell(x) E_j) \quad \forall E = (E_i) \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell. \\ \text{(b) } b_{ij}^\ell = b_{ji}^\ell, \quad b_{ij}^\ell \in L^\infty(\Omega^\ell), \quad 1 \leq i, j \leq d. \\ \text{(c) Il existe } m_{\mathcal{B}^\ell} > 0 \text{ telle que } \mathcal{B}^\ell E \cdot E \geq m_{\mathcal{B}^\ell} |E|^2 \\ \quad \forall E = (E_i) \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell. \end{array} \right. \quad (4.26)$$

La fonction de compliance normale $p_v : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \exists L_v > 0 \text{ telle que } |p_v(x, r_1) - p_v(x, r_2)| \leq L_v |r_1 - r_2| \\ \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ \text{(b) L'application } x \mapsto p_v(x, r) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3, \quad \forall r \in \mathbb{R}. \\ \text{(c) } p_v(x, r) = 0, \text{ pour tout } r \leq 0, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (4.27)$$

La fonction de compliance tangentielle $p_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \exists L_\tau > 0 \text{ tel que} \\ \quad |p_\tau(x, d_1) - p_\tau(x, d_2)| \leq L_\tau |d_1 - d_2| \\ \quad \forall d_1, d_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ \text{(b) } \exists M_\tau > 0 \text{ tel que } |p_\tau(x, d)| \leq M_\tau \quad \forall d \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ \text{(c) L'application } x \mapsto p_\tau(x, d) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3, \quad \forall d \in \mathbb{R}. \\ \text{(d) L'application } x \mapsto p_\tau(x, 0) \in L^2(\Gamma_3). \end{array} \right. \quad (4.28)$$

Nous supposons que la masse volumique ρ^ℓ satisfait :

$$\rho^\ell \in L^\infty(\Omega^\ell) \text{ et existe } \rho_0 > 0 \text{ tels que } \rho^\ell(x) \geq \rho_0 \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell, \ell = 1, 2. \quad (4.29)$$

Dans ce paragraphe, nous supposons que les forces volumiques f_0^ℓ , les tractions f_2^ℓ , et les charges électriques volumiques q_0^ℓ et surfaciques q_2^ℓ ont les régularités

$$\begin{aligned} f_0^\ell &\in L^2(0, T; L^2(\Omega^\ell)^d), \quad f_2^\ell \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2^\ell)^d), \\ q_0^\ell &\in C(0, T; L^2(\Omega^\ell)), \quad q_2^\ell \in C(0, T; L^2(\Gamma_b^\ell)), \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$q_2^\ell(t) = 0 \text{ sur } \Gamma_3 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.31)$$

Les coefficients d'adhésion γ_ν , γ_τ et la borne limite ε_a satisfont les conditions

$$\gamma_\nu, \gamma_\tau \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \varepsilon_a \in L^2(\Gamma_3), \quad \gamma_\nu, \gamma_\tau, \varepsilon_a \geq 0, \text{ p.p. sur } \Gamma_3, \quad (4.32)$$

Finalement, les conditions initiales satisfont

$$u_0 \in V, \quad v_0 \in H, \quad \beta_0 \in L^2(\Gamma_3), \quad 0 \leq \beta_0 \leq 1, \text{ p.p. sur } \Gamma_3. \quad (4.33)$$

On considère sur H le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_H$ défini par

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_H = \sum_{\ell=1}^2 (\rho^\ell \mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{H^\ell}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H. \quad (4.34)$$

Soit $\|\cdot\|_H$ une norme associée, i.e.

$$\|\mathbf{v}\|_H = (\mathbf{v}, \mathbf{v})_H^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \mathbf{v} \in H.$$

En utilisant l'hypothèse (4.29) il vient que $\|\cdot\|_H$ et $\|\cdot\|_H$ sont des normes équivalentes sur H . De plus l'inclusion de la trace de $(V, \|\cdot\|_V)$ dans $(H, \|\cdot\|_H)$ est continue et dense. Nous notons par V' l'espace dual de V . En identifiant H avec son propre dual nous pouvons écrire le triplet de Gelfand

$$V \subset H \subset V'.$$

Nous utilisons la notation $(\cdot, \cdot)_{V' \times V}$ pour la dualité entre V' et V . On a

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{V' \times V} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_H, \quad \forall \mathbf{u} \in H, \forall \mathbf{v} \in V. \quad (4.35)$$

On note également par $\|\cdot\|_{V'}$ la norme du dual sur l'espace V' . Le théorème de représentation de Riesz entraîne l'existence de deux fonctions $\mathbf{f} : [0, T] \rightarrow V'$ et $q : [0, T] \rightarrow W$ telles que

$$(\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_{V' \times V} = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \mathbf{f}_0^\ell(t) \cdot \mathbf{v}^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2^\ell(t) \cdot \mathbf{v}^\ell da \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad (4.36)$$

$$(q(t), \zeta)_W = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell(t) \zeta^\ell dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell(t) \zeta^\ell da \quad \forall \zeta \in W. \quad (4.37)$$

Nous définissons la fonctionnelle d'adhésion $j_{ad} : L^\infty(\Gamma_3) \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$j_{ad}(\beta, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} \left(-\gamma_v \beta^2 R_v([u_v])[v_v] + p_\tau(\beta) R_\tau([u_\tau])[v_\tau] \right) da, \quad (4.38)$$

et, la fonctionnelle de compliance normale $j_{vc} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$j_{vc}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} p_v([u_v])[v_v] da. \quad (4.39)$$

Compte tenu de l'hypothèse (4.27)–(4.28) et les définitions des opérateurs R_v et R_τ , il résulte que les intégrales figurant dans (4.38) et (4.39) sont bien définies. On remarque que les conditions (4.30) impliquent que

$$f \in L^2(0, T; V'), \quad q \in C(0, T; W). \quad (4.40)$$

Soit $\mathcal{Z}$ un sous-ensemble fermé de l'espace $L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_3))$ défini par

$$\mathcal{Z} = \left\{ \theta \in L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_3)); 0 \leq \theta(t) \leq 1 \quad \forall t \in [0, T], \text{ a.e. on } \Gamma_3 \right\},$$

A l'aide des formules de *Green* on voit directement que si $\mathbf{u}, \sigma$ et β sont des fonctions suffisamment régulières qui satisfont (4.3), (4.5), (4.7) et (4.8) avec (4.38), (4.39) pour tout $t \in [0, T]$ on déduit que

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 (\rho^\ell \ddot{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{H^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 (\sigma^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) + j_{vc}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) \\ = (f(t), \mathbf{v})_{V' \times V} \quad \forall \mathbf{v} \in V, \end{aligned} \quad (4.41)$$

En moyennant de (4.34), (4.35) et (4.41), on a alors

$$\begin{aligned} (\ddot{u}, \mathbf{v})_{V' \times V} + \sum_{\ell=1}^2 (\sigma^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) + j_{vc}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) \\ = (f(t), \mathbf{v})_{V' \times V} \quad \forall \mathbf{v} \in V, \end{aligned} \quad (4.42)$$

Maintenant, nous utilisons la formule de *Green* pour les inconnues électriques du problème ainsi que les conditions (4.4), (4.11) et la définition (4.37), Il en résulte

$$(\mathbf{D}^\ell, \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} + (q^\ell, \phi^\ell)_{W^\ell} = 0, \quad \forall \phi^\ell \in W^\ell, \quad (4.43)$$

et, compte tenu de (4.2), et par sommation sur ℓ , nous obtenons

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell \nabla \varphi^\ell(t), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} = (q(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W, t \in (0, T). \quad (4.44)$$

De (4.1), (4.2), (4.42) et (4.44), nous obtenons la formulation variationnelle du problème électro-élastique P.

Problème PV. Trouver les champs des déplacements $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow V$, les champs des contraintes $\sigma : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$, les potentiels électriques $\phi : [0, T] \rightarrow W$, un champ d'adhésion $\beta : [0, T] \rightarrow L^\infty(\Gamma_3)$ et les champs des déplacements électriques $D : [0, T] \rightarrow \mathcal{W}$ tels que :

$$\begin{aligned} \sigma^\ell &= \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell) + \mathcal{G}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell) + (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \phi^\ell + \\ &\int_0^t \mathcal{F}^\ell(\sigma^\ell(s) - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell(s)) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \phi^\ell, \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(s))) ds \quad \text{sur } \Omega^\ell \times (0, T), \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$D^\ell = \mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell) - \mathcal{B}^\ell \nabla \phi^\ell \quad \text{sur } \Omega^\ell \times (0, T), \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} (\ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{v})_{V' \times V} + \sum_{\ell=1}^2 (\sigma^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) + j_{vc}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) \\ = (f(t), \mathbf{v})_{V' \times V} \quad \forall \mathbf{v} \in V, t \in (0, T), \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell \nabla \phi^\ell(t), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} = (q(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W, t \in (0, T), \quad (4.48)$$

$$\dot{\beta}(t) = -\left(\beta(t) \left(\gamma_\nu(R_\nu([u_\nu(t)]))^2 + \gamma_\tau |\mathbf{R}_\tau([u_\tau(t)])|^2\right) - \varepsilon_a\right)_+ \text{ p.p. } (0, T), \quad (4.49)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_0, \quad \beta(0) = \beta_0. \quad (4.50)$$

Remarque 4.1: On note que, dans le problème variationnel **PV** nous n'avons pas besoin d'imposer explicitement la restriction $0 \leq \beta \leq 1$. De l'équation (4.49) on obtient que $\beta(x, t) \leq \beta_0(x)$ et c'est pourquoi l'hypothèse (4.33) montre que $\beta(x, t) \leq 1$ pour $t > 0$, p.p. $x \in \Gamma_3$. D'autre part, si $\beta(x, t_0) = 0$ à l'instant t_0 , alors il s'ensuit de (4.49) que $\dot{\beta}(x, t) = 0$ pour tout $t > t_0$ et ainsi $\beta(x, t) = 0$ pour tout $t \geq t_0$, p.p. $x \in \Gamma_3$. Nous concluons que $0 \leq \beta(x, t) \leq 1$ pour tout $t \in [0, T]$, p.p. $x \in \Gamma_3$.

Dans le reste de cette section, nous présentons quelques inégalités comprenant les fonctionnelles j_{ad} et j_{vc} qui seront utilisées dans les sections suivantes. Ci-dessous dans cette section β, β_1, β_2 dénotent les éléments de $L^2(\Gamma_3)$ tels que $0 \leq \beta, \beta_1, \beta_2 \leq 1$ p.p. $x \in \Gamma_3$, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ et $\mathbf{v}$ représentent des éléments de V et $C > 0$ est une constante positive générique qui peut dépendre de $\Omega^\ell, \Gamma_3, p_\nu, p_\tau, \gamma_\nu, \gamma_\tau$ et L , dont sa valeur peut changer d'un endroit à l'autre. Pour la raison de simplicité, nous supprimons dans ce qui suit la dépendance explicite des diverses fonctions sur $x \in \Omega^1 \cup \Omega^2 \cup \Gamma_3$.

D'abord, nous faisons remarquer que les fonctionnelles j_{ad} et j_{vc} , sont linéaires par rapport au dernier argument et donc

$$\begin{aligned} j_{ad}(\beta, \mathbf{u}, -\mathbf{v}) &= -j_{ad}(\beta, \mathbf{u}, \mathbf{v}), \\ j_{vc}(\mathbf{u}, -\mathbf{v}) &= -j_{vc}(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Ensuite, en utilisant (4.38), les propriétés des opérateurs R_ν et $\mathbf{R}_\tau$ et les hypothèse (4.28) des fonctions p_τ , nous déduisons que

$$j_{ad}(\beta_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) + j_{ad}(\beta_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \leq C \int_{\Gamma_3} |\beta_1 - \beta_2| |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2| da,$$

D'après le théorème de tr  ce et quelques manipulations algébriques, nous obtenons

$$j_{ad}(\beta_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) + j_{ad}(\beta_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \leq C|\beta_1 - \beta_2|_{L^2(\Gamma_3)} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V. \quad (4.52)$$

Des manipulations semblables, basées sur la Lipschitzialit   des opérateurs R_ν , R_τ et p_τ montrent que :

$$|j_{ad}(\beta, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}) - j_{ad}(\beta, \mathbf{u}_2, \mathbf{v})| \leq C\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V. \quad (4.53)$$

En choisissant $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ dans (4.52), nous trouvons :

$$j_{ad}(\beta_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) + j_{ad}(\beta_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \leq 0. \quad (4.54)$$

Aussi, nous prenons $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}$ et $\mathbf{u}_2 = 0$ dans (4.53) pour obtenir

$$j_{ad}(\beta, \mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0. \quad (4.55)$$

Maintenant, nous utilisons (4.39) pour voir que

$$j_{vc}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) + j_{vc}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}) \leq \int_{\Gamma_3} |p_\nu([u_{1\nu}]) - p_\nu([u_{2\nu}])| \|\mathbf{v}\|_V da,$$

ensuite (4.27.b) et (4.17) impliquent

$$|j_{vc}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) + j_{vc}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v})| \leq C\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V. \quad (4.56)$$

Nous utilisons encore une fois (4.39), pour obtenir

$$j_{vc}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) + j_{vc}(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = - \int_{\Gamma_3} (p_\nu([u_{1\nu}]) - p_\nu([u_{2\nu}])) ([u_{1\nu} - u_{2\nu}]) da$$

et alors, (4.27)(c) implique

$$j_{vc}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) + j_{vc}(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \leq 0. \quad (4.57)$$

Aussi, nous prenons $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}$ et $\mathbf{u}_2 = 0$ dans l'inégalité (4.27)(e) et (4.57) pour obtenir

$$j_{vc}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0. \quad (4.58)$$

Nous énonçons maintenant notre résultat principal concernant l'unique solvabilité du Problème PV dont la démonstration sera détaillée dans la section suivante.

4.2.1 Résultats d'existence et d'unicité

Notre intérêt principal dans cette section est d'obtenir un résultat d'existence et d'unicité pour le problème variationnel **PV**.

Théorème 4.1: Sous les hypothèses (4.23)–(4.33), le problème variationnel **PV** admet une solution unique $\{u, \sigma, \varphi, \beta, D\}$ ayant la régularité suivante :

$$u \in H^1(0, T; V) \cap C^1(0, T; H), \quad \ddot{u} \in L^2(0, T; V'), \quad (4.59)$$

$$\varphi \in C(0, T; W), \quad (4.60)$$

$$\beta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Z}. \quad (4.61)$$

Un "quintuple" de fonction $\{u, \varphi, \beta, \sigma, D\}$ qui satisfait (4.45)–(4.50) est appelé *solution faible* du Problème **P**. Sous les hypothèses (4.22)–(4.33), le problème (4.1)–(4.13) a une unique solution faible. Pour préciser la régularité de la solution faible nous notons que les relations constitutives (4.1) et (4.2), les hypothèses (4.22)–(4.26) et les régularités (4.59)–(4.61), montrent que

$$\sigma \in L^2(0, T; \mathcal{H}), \quad D \in C(0, T; \mathcal{W}).$$

Il s'ensuit maintenant des régularités (4.30) et (4.59) que $\text{Div } \sigma^\ell(t) + f_0^\ell(t) = \rho^\ell \ddot{u}^\ell(t)$, $\text{div } D^\ell(t) - q_0^\ell(t) = 0$, $\forall t \in [0, T]$, ce qui montre que :

$$\sigma \in L^2(0, T; \mathcal{H}_1), \quad (4.62)$$

$$D \in C(0, T; \mathcal{W}_1). \quad (4.63)$$

Nous concluons que la solution faible $\{u, \varphi, \beta, \sigma, D\}$ du problème piézoélectrique de contact avec adhésion **P** possède la régularité (4.59)–(4.63).

4.3 Démonstration du Théorème 4.1

Nous nous occupons maintenant de la preuve du Théorème 4.1 qui est basée sur des résultats classiques d'équations non linéaires avec opérateurs monotones et équations différentielles ordinaires, combinées avec un argument de point fixe. Cela est réalisé en plusieurs étapes. Nous supposons dans la suite que les hypothèses (4.22)–(4.33) sont vérifiées. En outre, partout dans cette section, C représentera une constante strictement positive générique qui peut dépendre de Ω^ℓ , Γ_1^ℓ , Γ_3 , p_v , p_τ , γ_v , γ_τ et L , dont la valeur peut changer d'un endroit à l'autre.

Dans la première étape nous considérons le problème auxiliaire suivant pour le champ de déplacement, dans lequel $\eta \in L^2(0, T; V')$ est donné.

Problème PV_η^u . Trouver les champs des déplacements $u_\eta : [0, T] \rightarrow V$ tels que :

$$\begin{aligned} (\ddot{u}_\eta(t), v)_{V' \times V} + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}_\eta^\ell(t)), \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + (\eta(t), v)_{V' \times V} \\ = (f(t), v)_{V' \times V} \quad \forall v \in V, p.p. t \in (0, T), \end{aligned} \quad (4.64)$$

$$u_\eta^\ell(0) = u_0^\ell, \quad \dot{u}_\eta^\ell(0) = v_0^\ell \quad \text{sur } \Omega^\ell, \quad (4.65)$$

Nous avons le résultat suivant d'existence et d'unicité.

Lemme 4.1: Il existe une solution unique du problème $\mathbf{PV}_\eta^u$ qui satisfait (4.59).

Démonstration. On définit l'opérateur $A : V \rightarrow V'$ par

$$(Au, v)_{V' \times V} = \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(u^\ell), \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \quad \forall u, v \in V. \quad (4.66)$$

En utilisant maintenant (4.66) et (4.22)(a), il s'ensuit que

$$\|Au - Av\|_{V'}^2 \leq \sum_{\ell=1}^2 \|\mathcal{A}^\ell \varepsilon(u^\ell) - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(v^\ell)\|_{\mathcal{H}^\ell}^2 \leq C \|u - v\|_V^2 \quad (4.67)$$

ce qui implique que $A : V \rightarrow V'$ est continu. Maintenant, par (4.66) et (4.22)(b), on obtient

$$(Au - Av, u - v)_{V' \times V} \geq m \|u - v\|_V^2 \quad \forall u, v \in V, \quad (4.68)$$

où $m = \min\{m_{\mathcal{A}^1}, m_{\mathcal{A}^2}\}$, i.e. $A : V \rightarrow V'$ est un opérateur monotone. On prend $v = 0$ dans (4.68) et on obtient

$$\begin{aligned} (Au, u)_{V' \times V} &\geq m \|u\|_V^2 - \|A0\|_{V'}^2 \|u\|_V \\ &\geq \frac{1}{2} m \|u\|_V^2 - \frac{1}{2m} \|A0\|_{V'}^2 \quad \forall u \in V, \end{aligned}$$

Ainsi A satisfait la condition (B.21) avec $\omega = \frac{m}{2}$ et $\lambda = -\frac{1}{2m} \|A0\|_{V'}^2$. De plus à l'aide de (4.67) nous déduisons que

$$\|Au\|_{V'} \leq C^1 \|u\|_V + C^2 \quad \forall u \in V.$$

Cette inégalité implique que l'opérateur A satisfait la condition (B.22). Finalement, nous rappelons que par (4.30) et (4.33) nous avons $f - \eta \in L^2(0, T; V')$ et $v_0 \in H$.

Il vient du Théorème B.18 qu'il existe une unique fonction v_η qui satisfait

$$v_\eta \in L^2(0, T; V) \cap C(0, T; H), \quad \dot{v}_\eta \in L^2(0, T; V'), \quad (4.69)$$

$$\dot{v}_\eta(t) + Av_\eta(t) + \eta(t) = f(t), \quad p.p. \ t \in [0, T] \quad (4.70)$$

$$v_\eta(0) = v_0. \quad (4.71)$$

Soit $u_\eta : [0, T] \rightarrow V$ une fonction définie par

$$u_\eta(t) = \int_0^t v_\eta(s) ds + u_0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.72)$$

On déduit de (4.66) et (4.69)–(4.72) que u_η est la solution unique du problème $\mathbf{PV}_\eta^u$ tel que (4.59) est vérifiée. Ceci conclut la partie d'existence du Lemme 4.1. La partie unicité découle de l'unicité de la solution du problème (4.69)–(4.71), garantie par le Théorème B.18.

Dans la deuxième étape nous utilisons le champ de déplacement u_η obtenu dans le Lemme 4.1 pour construire le problème de Cauchy associé au champ du tenseur des contraintes suivant.

Problem $\mathbf{PV}_\eta^\sigma$. Trouver un champ des contraintes $\sigma_\eta = (\sigma_\eta^1, \sigma_\eta^2) : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$ tels que :

$$\sigma_\eta^\ell(t) = \mathcal{G}^\ell \varepsilon(u_\eta^\ell(t)) + \int_0^t \mathcal{F}^\ell(\sigma_\eta^\ell(s), \varepsilon(u_\eta^\ell(s))) ds, \quad \ell = 1, 2, \quad t \in [0, T]. \quad (4.73)$$

Pour résoudre le Problème $\mathbf{PV}_\eta^\sigma$, nous avons le résultat suivant.

Lemme 4.2: Il existe une solution unique du Problème $\mathbf{PV}_\eta^\sigma$ qui satisfait

$$\sigma_\eta \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{H}).$$

De plus, si σ_i et u_i représentent les solutions des problèmes $\mathbf{PV}_\eta^\sigma$ et $\mathbf{PV}_\eta^u$, respectivement, pour $\eta_i \in L^2(0, T; V')$, $i = 1, 2$, alors il existe $c > 0$ telle que

$$\|\sigma_1(t) - \sigma_2(t)\|_{\mathcal{H}} \leq c \left(\|u_1(t) - u_2(t)\|_V + \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V ds \right), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.74)$$

Démonstration. Soit $\Lambda_\eta = (\Lambda_\eta^1, \Lambda_\eta^2) : L^2(0, T; \mathcal{H}) \rightarrow L^2(0, T; \mathcal{H})$ est un opérateur définie par

$$\Lambda_\eta^\ell \sigma(t) = \mathcal{G}^\ell \varepsilon(u_\eta^\ell(t)) + \int_0^t \mathcal{F}^\ell(\sigma^\ell(s), \varepsilon(u_\eta^\ell(s))) ds, \quad \ell = 1, 2, \quad t \in [0, T]. \quad (4.75)$$

Pour $\sigma_1, \sigma_2 \in L^2(0, T; \mathcal{H})$ en utilisant (4.75) et (4.24), nous obtenons

$$\|\Lambda_\eta \sigma_1(t) - \Lambda_\eta \sigma_2(t)\|_{\mathcal{H}} \leq \max(L_{\mathcal{F}^1}, L_{\mathcal{F}^2}) \int_0^t \|\sigma_1(s) - \sigma_2(s)\|_{\mathcal{H}} ds$$

Il résulte de cette inégalité que pour p assez grand, l'opérateur Λ_η^p est une contraction sur l'espace de Banach $L^2(0, T; V)$ et, par conséquent, il existe un élément unique $\sigma_\eta \in L^2(0, T; \mathcal{H})$ tel que $\Lambda_\eta \sigma_\eta = \sigma_\eta$. Aussi, σ_η est l'unique solution du problème $\mathbf{PV}_\eta^\sigma$, et en utilisant (4.73), la régularité de u_η et les propriétés des opérateurs $\mathcal{G}^\ell$ et $\mathcal{F}^\ell$, nous obtenons $\sigma_\eta \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{H})$. Nous considérons $\eta_1, \eta_2 \in L^2(0, T; V')$, pour $i = 1, 2$, et notons par $u_{\eta_i} = u_i$, $\sigma_{\eta_i} = \sigma_i$. Nous avons

$$\sigma_i^\ell(t) = \mathcal{G}^\ell \varepsilon(u_i^\ell(t)) + \int_0^t \mathcal{F}^\ell(\sigma_i^\ell(s), \varepsilon(u_i^\ell(s))) ds, \quad \ell = 1, 2, \quad t \in [0, T],$$

et, en utilisant les propriétés (4.23) et (4.24) de $\mathcal{G}^\ell$ et $\mathcal{F}^\ell$, nous trouvons

$$\begin{aligned} \|\sigma_1(t) - \sigma_2(t)\|_{\mathcal{H}} &\leq c \left(\|u_1(t) - u_2(t)\|_V + \int_0^t \|\sigma_1(s) - \sigma_2(s)\|_{\mathcal{H}} ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V ds \right) \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Nous utilisons le lemme de *Gronwall*, nous trouvons (4.74), ce qui achève la preuve du lemme.

Dans la troisième étape, nous utilisons aussi le champ de déplacement u_η obtenu dans le lemme 4.1 pour construire le problème variationnel suivant :

Problème $\mathbf{PV}_\eta^\varphi$. Trouver le potentiel électrique $\varphi_\eta : [0, T] \rightarrow W$ tel que :

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell \nabla \varphi_\eta^\ell(t), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_\eta^\ell(t)), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} = (q(t), \phi)_W, \quad \forall \phi \in W, \quad t \in [0, T]. \quad (4.76)$$

Nous avons le résultat suivant.

Lemme 4.3: Le problème $\mathbf{PV}_\eta^\varphi$ possède une solution unique qui satisfait la régularité (4.60).

Démonstration. Soit $b(.,.) : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ la forme bilinéaire donnée par

$$b(\varphi, \phi) = \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell \nabla \varphi^\ell, \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} \quad \forall \varphi, \phi \in W. \quad (4.77)$$

Nous utilisons (4.77), (4.20) et (4.26) pour déduire que $b(.,.)$ est continue, symétrique et coercive. En outre, nous appliquons le théorème de représentation de *Riesz* pour définir la fonction $q_\eta : [0, T] \rightarrow W$ tel que

$$(q_\eta(t), \phi)_W = \sum_{\ell=1}^2 (q^\ell(t), \phi^\ell)_{W^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_\eta^\ell(t)), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} \quad \forall \phi \in W, t \in (0, T).$$

En appliquant le théorème de *Lax-Milgram* on obtient l'existence et l'unicité $\varphi_\eta(t) \in W$ tel que

$$b(\varphi_\eta(t), \phi) = (q_\eta(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W. \quad (4.78)$$

Nous concluons que $\varphi_\eta(t)$ est une solution du Problème $\mathbf{P}_\eta^\varphi$. Pour $t_1, t_2 \in [0, T]$, en utilisant des arguments basés sur (4.76) nous trouvons

$$\|\varphi_\eta(t_1) - \varphi_\eta(t_2)\|_W \leq C(\|\mathbf{u}_\eta(t_1) - \mathbf{u}_\eta(t_2)\|_V + \|q(t_1) - q(t_2)\|_W). \quad (4.79)$$

Comme $\mathbf{u}_\eta \in C^1(0, T; H)$ et $q \in C(0, T; W)$ nous déduisons de l'inégalité (4.79) que $\varphi_\eta \in C(0, T; W)$.

Dans la prochaine étape, nous utilisons encore la solution $\mathbf{u}_\eta$ obtenue dans le Lemme 4.1 ; notons par $\mathbf{u}_{\eta\nu}$ et $\mathbf{u}_{\eta\tau}$ ses composantes normales et tangentielles, respectivement, et construisons le problème de Cauchy suivant pour le champ d'adhésion.

Problem $\mathbf{PV}_\eta^\beta$. Trouver le champ d'adhésion $\beta_\eta : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ tel que

$$\dot{\beta}_\eta(t) = -\left(\beta_\eta(t)\left(\gamma_\nu(R_\nu([u_{\eta\nu}(t)]))^2 + \gamma_\tau |R_\tau([u_{\eta\tau}(t)])|^2\right) - \varepsilon_a\right)_+, \quad p.p. \quad t \in (0, T), \quad (4.80)$$

$$\beta_\eta(0) = \beta_0. \quad (4.81)$$

Nous avons le résultat suivant d'existence et d'unicité.

Lemme 4.4: Il existe une solution unique du Problème $\mathbf{PV}_\eta^\beta$ et cela satisfait

$$\beta_\eta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3) \cap \mathcal{Z}).$$

La démonstration du Lemme 4.4 est similaire à celle du Lemme 3.3. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à voir la preuve (page 52).

Maintenant, pour chaque $\eta \in L^2(0, T; V')$, nous notons par $\mathbf{u}_\eta$ la solution du problème $\mathbf{PV}_\eta^u$ fournie dans le Lemme 4.1, par σ_η , la solution du problème $\mathbf{PV}_\eta^\sigma$ fournie dans le Lemme 4.2, par φ_η la solution du problème $\mathbf{PV}_\eta^\varphi$ fournie dans le Lemme 4.3 et par β_η la solution du problème $\mathbf{PV}_\eta^\beta$ fournie dans le Lemme 4.4. En outre, nous appliquons le théorème de représentation de *Riesz* pour définir la fonction $\Lambda : L^2(0, T; V') \longrightarrow L^2(0, T; V')$ par

$$\begin{aligned} (\Lambda(\eta)(t), v)_{V' \times V} &= \sum_{\ell=1}^2 \left(\mathcal{G}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_\eta^\ell(t)), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) \right)_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 \left((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_\eta^\ell \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) \right)_{\mathcal{H}^\ell} \\ &+ \sum_{\ell=1}^2 \left(\int_0^t \mathcal{F}^\ell(\sigma_\eta^\ell, \varepsilon(\mathbf{u}_\eta^\ell(s))) ds, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) \right)_{\mathcal{H}^\ell} + j_{ad}(\beta_\eta(t), \mathbf{u}_\eta(t), v) \\ &+ j_{vc}(\mathbf{u}_\eta(t), v), \quad \forall v \in V. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Pour tout $\eta \in L^2(0, T; V')$, $\mathbf{u}_\eta$, σ_η , φ_η et β_η représentent le champ de déplacement, le champ du tenseur des contraintes, le potentiel électrique et le champ d'endommagement obtenus les lemmes 4.1, 4.2, 4.3 et 4.4 respectivement. Nous avons le résultat suivant.

Lemme 4.5: L'opérateur Λ a un point fixe unique $\eta^* \in L^2(0, T; V')$.

Démonstration. Nous montrons que pour un nombre entier positif m , la puissance m ième de l'opérateur Λ , notée Λ^m , est une contraction dans $L^2(0, T; V')$. Soient $\eta_1, \eta_2 \in L^2(0, T; V')$ et par simplicité, nous utilisons les notations $\mathbf{u}_{\eta_i} = \mathbf{u}_i$, $\dot{\mathbf{u}}_{\eta_i} = \mathbf{v}_i$, $\sigma_{\eta_i} = \sigma_i$, $\varphi_{\eta_i} = \varphi_i$ et $\beta_{\eta_i} = \beta_i$ pour $i = 1, 2$. En utilisant (4.23), (4.25), (4.27), (4.28) et (4.24), nous obtenons

$$\begin{aligned} \|\Lambda(\eta_1)(t) - \Lambda(\eta_2)(t)\|_{V'}^2 &\leq \sum_{\ell=1}^2 \|\mathcal{G}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_1^\ell(t)) - \mathcal{G}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_2^\ell(t))\|_{\mathcal{H}^\ell}^2 \\ &+ \sum_{\ell=1}^2 \int_0^t \left\| \mathcal{F}^\ell(\sigma_1^\ell(s), \varepsilon(\mathbf{u}_1^\ell(s))) - \mathcal{F}^\ell(\sigma_2^\ell(s), \varepsilon(\mathbf{u}_2^\ell(s))) \right\|_{\mathcal{H}^\ell}^2 ds \\ &+ \sum_{\ell=1}^2 \|(\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_1^\ell(t) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_2^\ell(t)\|_{\mathcal{H}^\ell}^2 \\ &+ C \|p_v([u_{1v}(t)]) - p_v([u_{2v}(t)])\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \\ &+ C \|\beta_1^2(t) R_v([u_{1v}(t)]) - \beta_2^2(t) R_v([u_{2v}(t)])\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \\ &+ C \|p_\tau(\beta_1(t)) R_\tau([u_{1\tau}(t)]) - p_\tau(\beta_2(t)) R_\tau([u_{2\tau}(t)])\|_{L^2(\Gamma_3)}^2. \end{aligned}$$

et en utilisant la définition de R_v et R_τ , on a

$$\begin{aligned} \|\Lambda(\eta_1)(t) - \Lambda(\eta_2)(t)\|_{V'}^2 &\leq C \left(\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 + \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \|\sigma_1(s) - \sigma_2(s)\|_{\mathcal{H}}^2 ds + \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W^2 + \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \right) \end{aligned} \quad (4.83)$$

Et de (4.74), on tire

$$\begin{aligned} \|\Lambda(\eta_1)(t) - \Lambda(\eta_2)(t)\|_{V'}^2 &\leq C \left(\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds + \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W^2 + \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \right). \end{aligned} \quad (4.84)$$

Moyennant (4.64), on a

$$\begin{aligned} (\dot{v}_1 - \dot{v}_2, v_1 - v_2)_{V' \times V} + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(v_1^\ell) - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(v_2^\ell), \varepsilon(v_1^\ell - v_2^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \\ + (\eta_1 - \eta_2, v_1 - v_2)_{V' \times V} = 0. \end{aligned}$$

Nous intégrons par rapport au temps cette relation et, en utilisant les conditions initiales, $v_1(0) = v_2(0) = v_0$ et de (4.22), nous trouvons

$$m \int_0^t \|v_1(s) - v_2(s)\|_V^2 ds \leq - \int_0^t (\eta_1(s) - \eta_2(s), v_1(s) - v_2(s))_{V' \times V} ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

En utilisant l'inégalité $2ab \leq \frac{a^2}{m} + mb^2$, il en découle

$$\int_0^t \|v_1(s) - v_2(s)\|_V^2 ds \leq C \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{V'}^2 ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.85)$$

Nous intégrons maintenant (4.80) avec l'état initial (4.81) pour obtenir

$$\beta_i(t) = \beta_0 - \int_0^t \left(\beta_i(s) \left(\gamma_v (R_v([u_{iv}(s)]))^2 + \gamma_\tau |R_\tau([u_{i\tau}(s)])|^2 \right) - \varepsilon_a \right) ds.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} &\leq C \int_0^t \left\| \beta_1(s) R_v([u_{1v}(s)])^2 - \beta_2(s) R_v([u_{2v}(s)])^2 \right\|_{L^2(\Gamma_3)} ds \\ &\quad + C \int_0^t \left\| \beta_1(s) |R_\tau([u_{1\tau}(s)])|^2 - \beta_2(s) |R_\tau([u_{2\tau}(s)])|^2 \right\|_{L^2(\Gamma_3)} ds. \end{aligned}$$

En utilisant la définition des opérateurs de troncature R_v et R_τ et en écrivant que $\beta_1 = \beta_1 - \beta_2 + \beta_2$, après quelques calculs élémentaires nous trouvons

$$\|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq C \left(\int_0^t \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds + \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)^d} ds \right). \quad (4.86)$$

Il s'ensuit maintenant d'un argument de type *Gronwall* que

$$\|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq C \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds.$$

et, en utilisant (4.17), nous obtenons

$$\|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \leq C \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V^2 ds. \quad (4.87)$$

En utilisant maintenant (4.76), (4.20), (4.25) et (4.26), il en découle

$$\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W^2 \leq C \|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_V^2. \quad (4.88)$$

En substituant (4.87) et (4.88) dans (4.84) il vient

$$\begin{aligned} \|\Lambda(\eta_1)(t) - \Lambda(\eta_2)(t)\|_{V'}^2 &\leq C \left(\|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_V^2 + \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V^2 ds \right) \\ &\leq C \int_0^t \|\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)\|_V^2 ds. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Nous combinons les inégalités (4.85) et (4.89) pour obtenir

$$\|\Lambda(\eta_1)(t) - \Lambda(\eta_2)(t)\|_{V'}^2 \leq C \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{V'}^2 ds.$$

En réitérant m fois l'inégalité on obtient

$$\|\Lambda^m(\eta_1) - \Lambda^m(\eta_2)\|_{L^2(0,T;V')}^2 \leq \frac{C^m T^m}{m!} \|\eta_1 - \eta_2\|_{L^2(0,T;V')}^2. \quad (4.90)$$

Comme $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{C^m T^m}{m!} = 0$, cela implique pour m assez grand, l'opérateur Λ^m est une contraction sur l'espace de Banach $L^2(0, T; V')$. Il existe donc un unique $\eta^* \in L^2(0, T; V')$ tel que $\Lambda^m \eta^* = \eta^*$ et η^* est aussi l'unique point fixe de Λ .

Nous avons maintenant tout ce qui est nécessaire pour prouver le Théorème 3.1.

Démonstration du Théorème 4.1.

Existence. Soit $\eta^* \in L^2(0, T; V')$ est un point fixe de Λ , et soit $\mathbf{u}_{\eta^*}$, σ_{η^*} , φ_{η^*} et β_{η^*} les solutions des problèmes $\mathbf{PV}_{\eta^*}^u$, $\mathbf{PV}_{\eta^*}^\sigma$, $\mathbf{PV}_{\eta^*}^\varphi$ et $\mathbf{PV}_{\eta^*}^\beta$, respectivement pour $\eta = \eta^*$. Nous utilisons les notations suivantes :

$$\mathbf{u}_* = \mathbf{u}_{\eta^*}, \quad \varphi_* = \varphi_{\eta^*}, \quad \beta_* = \beta_{\eta^*}, \quad (4.91)$$

$$\sigma_*^\ell = \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_*^\ell) + (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_*^\ell + \sigma_{\eta^*}^\ell \quad \forall t \in [0, T], \quad (4.92)$$

$$D_*^\ell = \mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_*^\ell) - \mathcal{B}^\ell \nabla \varphi_*^\ell, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.93)$$

En utilisant (4.64) pour $\eta = \eta^*$, ainsi que (4.91), on obtient

$$\begin{aligned} (\ddot{u}_*(t), v)_{V' \times V} + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}_*^\ell(t)), \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + (\eta^*(t), v)_{V' \times V} \\ = (f(t), v)_{V' \times V} \quad \forall v \in V, t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (4.94)$$

Par ailleurs, comme $\Lambda \eta^* = \eta^*$, on a

$$\begin{aligned} (\eta^*(t), v)_{V' \times V} &= \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{G}^\ell \varepsilon(u_*^\ell(t)), \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_*^\ell, \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \\ &+ \sum_{\ell=1}^2 \left(\int_0^t \mathcal{F}^\ell(\sigma_*^\ell(s) - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}_*^\ell(s)) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_*^\ell, \varepsilon(u_*^\ell(s))) ds, \varepsilon(v^\ell) \right)_{\mathcal{H}^\ell} \\ &+ j_{ad}(\beta_*(t), u_*(t), v) + j_{vc}(u_*(t), v), \quad \forall v \in V. \end{aligned} \quad (4.95)$$

En utilisant (4.95) dans (4.94), on déduit

$$\begin{aligned} (\ddot{u}_*(t), v)_{V' \times V} + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}_*^\ell(t)), \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{G}^\ell \varepsilon(u_*^\ell(t)), \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \\ + \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_*^\ell, \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \\ + \sum_{\ell=1}^2 \left(\int_0^t \mathcal{F}^\ell(\sigma_*^\ell(s) - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}_*^\ell(s)) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_*^\ell, \varepsilon(u_*^\ell(s))) ds, \varepsilon(v^\ell) \right)_{\mathcal{H}^\ell} \\ + j_{ad}(\beta_*(t), u_*(t), v) + j_{vc}(u_*(t), v) = (f(t), v)_{V' \times V}, \quad \forall v \in V. \end{aligned} \quad (4.96)$$

En utilisant maintenant (4.76) pour $u_\eta = u_*$, et $\varphi_\eta = \varphi_*$, on tire

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell \nabla \varphi_*^\ell(t), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(u_*^\ell(t)), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} = (q(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W, \forall t \in [0, T]. \quad (4.97)$$

D'autre part d'après (4.80), pour $u_\eta = u_*$, et $\beta_\eta = \beta_*$, on trouve

$$\dot{\beta}_*(t) = -\left(\beta_*(t) \left(\gamma_\nu (R_\nu([u_{*v}(t)])^2 + \gamma_\tau |R_\tau([u_{*\tau}(t)])|^2 \right) - \varepsilon_a \right)_+, \quad p.p. t \in (0, T). \quad (4.98)$$

Nous concluons par (4.91), (4.92), (4.96), (4.97) et (4.98) que $(u_*, \sigma_*, \varphi_*, \beta_*, D_*)$ est une solution du problème (4.45)–(4.50). Et d'après les lemmes 4.1, 4.3 et 4.4 on a les régularités (4.59)–(4.61). D'après (4.59)–(4.61), (4.92) et lemme 4.2 pour $\sigma_\eta = \sigma_{\eta^*}$ on a le régularité

$$\sigma_* \in L^2(0, T; \mathcal{H}). \quad (4.99)$$

Pour tout $v^\ell \in D(\Omega^\ell)^d$, on pose $v = (v^1, v^2)$ avec $v^{3-\ell} = 0$ dans (4.96), ainsi que (4.91) et (4.36), on obtient

$$\rho^\ell \ddot{u}_*^\ell = \text{Div } \sigma_*^\ell + f_0^\ell, \quad \forall t \in [0, T], \quad \ell = 1, 2.$$

En utilisant maintenant (4.29), (4.30) et (4.99), on a alors

$$(\text{Div } \sigma_*^1, \text{Div } \sigma_*^2) \in L^2(0, T; V')$$

Pour $t_1, t_2 \in [0, T]$, et de (4.25), (4.26), (4.20) et (4.93), on tire

$$\|D_*(t_1) - D_*(t_2)\|_H \leq C(\|\varphi_*(t_1) - \varphi_*(t_2)\|_W + \|u_*(t_1) - u_*(t_2)\|_V).$$

En rappelant les régularités pour u_* et φ_* dans (4.59) et (4.60), on a

$$D_* \in C(0, T; \mathcal{H}). \quad (4.100)$$

En prenant $\phi = (\phi^1, \phi^2)$ où $\phi^\ell \in D(\Omega^\ell)^d$ et $\phi^{3-\ell} = 0$ dans (4.97) et de (4.37) il vient

$$\text{div} D_*^\ell(t) = q_0^\ell(t) \quad \forall t \in [0, T], \quad \ell = 1, 2.$$

Et de (4.30), (4.100), on tire

$$D_* \in C(0, T; \mathcal{W}).$$

Nous concluons que $(u_*, \sigma_*, \varphi_*, \beta_*, D_*)$ est une solution du Problème **PV** qui satisfait les régularités (4.59)–(4.63).

Unicité. L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ donné par (4.82).

ANNEXE

Annexe

Résumé :

Afin de rendre aisée la lecture de ce manuscrit, il nous est paru utile de rappeler des notations générales de la mécanique nécessaires pour une bonne compréhension de la suite des problèmes traités, puis nous rappelons les espaces fonctionnels et les principales notations utilisées. Ensuite nous passons en revue quelques résultats fondamentaux d'analyse non linéaire, concernant les inéquations variationnelles, les équations d'évolution, les lemmes de Gronwall. C'est l'objet de cette annexe qui est divisée en deux sections : La première section représente un bref rappel de la mécanique des milieux continus où nous allons introduire les cadres physiques utilisés dans cette thèse ; il est destiné à rappeler l'équation de mouvement de Cauchy, à décrire les lois de comportement élastiques, électro-élastiques et électro-élasto-viscoplastique. Par ailleurs, nous précisons dans cette section les conditions aux limites de contact de *Signorini* ou de contact avec compliance normale et adhésion. La seconde section est consacrée à des rappels sur les espaces de *Hilbert* de plus à quelques éléments d'analyse non linéaire et particulièrement des résultats d'existence et d'unicité concernant les inéquations variationnelles elliptiques. Nous commençons par présenter les espaces fonctionnels. On y introduit des espaces de type distributions et de type *Sobolev* associés à l'opérateur déformation et à l'opérateur divergence et on présente leurs principales propriétés, et particulièrement des résultats d'injections continues et d'injection compactes, notamment les théorèmes de trace, puis nous rappelons les espaces des fonctions à valeurs vectorielles.

Contenu :

A. Modélisation :

- A.1. Cadre physique ;
- A.2. Lois de comportement ;
- A.3. Conditions aux limites de contact.

B. Outils Mathématiques :

- B.1. Rappels sur les espaces de Hilbert ;
- B.2. Inéquations variationnelles elliptiques ;
- B.3. Espaces fonctionnels.

A. MODÉLISATION

Ce chapitre représente un bref rappel de la mécanique des milieux continus où nous allons introduire les cadres physiques utilisés dans cette thèse ; il est destiné à rappeler l'équation de mouvement de Cauchy, à décrire les lois de comportement élastiques, électro-élastiques et électro-élasto-viscoplastique. Par ailleurs, nous précisons dans ce chapitre les conditions aux limites de contact sans frottement, avec ou sans adhésion.

A.1 Cadre physique

Les phénomènes de contact considérés dans ce mémoire sont décrits par les deux cadres physiques suivants :

Cadre physique n° 1. (*Problème mécanique*). Soit deux corps matériels qui occupent des domaines bornés $\Omega^\ell \subset \mathbb{R}^d$, $\ell = 1, 2$ ($d = 2, 3$) avec des surfaces frontières régulières $\Gamma^\ell = \partial\Omega^\ell$, subdivisées en trois parties mesurables Γ_1^ℓ , Γ_2^ℓ et Γ_3^ℓ telles que $\text{mes}(\Gamma_1^\ell) > 0$. Nous notons par ν^ℓ la normale unitaire sortante à Γ^ℓ . Le corps Ω^ℓ est encastré sur Γ_1^ℓ dans une structure fixe, sur Γ_2^ℓ agissent des tractions surfaciques de densité f_2^ℓ et agissent des forces volumiques de densité f_0^ℓ (voir figure. 1.1). Nous supposons que f_2^ℓ et f_0^ℓ indépendantes de temps et par conséquent le processus est statique. Soit le contact sans frottement sans adhésion entre deux corps sur la partie $\Gamma_3^1 = \Gamma_3^2 = \Gamma_3$. Nous prenons en considération les propriétés mécaniques des corps sous l'hypothèse des petites transformations.

Cadre physique n° 2. (*Problème électro-mécanique avec adhésion*). Soit deux corps matériels qui occupent des domaines bornés $\Omega^\ell \subset \mathbb{R}^d$, $\ell = 1, 2$ ($d = 2, 3$), avec une surface frontière régulière $\Gamma^\ell = \partial\Omega^\ell$, subdivisée en trois parties mesurables Γ_1^ℓ , Γ_2^ℓ et Γ_3^ℓ d'une part et de deux parties mesurables Γ_a^ℓ et Γ_b^ℓ d'autre part telles que $\text{mes}(\Gamma_1^\ell) > 0$ et $\text{mes}(\Gamma_a^\ell) > 0$. Nous notons par ν^ℓ la normale unitaire sortante à Γ^ℓ , le corps Ω^ℓ est encastré sur Γ_1^ℓ dans une structure fixe. Sur Γ_2^ℓ agissent des tractions surfaciques de densité f_2^ℓ et dans agissent des forces volumiques de densité f_0^ℓ . Soit $T > 0$ et soit $[0, T]$ l'intervalle de temps en question. Nous supposons également que le potentiel électrique s'annule sur Γ_a^ℓ et une charge électrique de surface de densité q_2^ℓ est imposée sur Γ_b^ℓ . Les conditions sur la surface potentielle de contact Γ_3 peuvent être très diverses et donner lieu à une variété de modèles de contact avec adhésion. Nous prenons en considération les propriétés mécaniques des corps. Notre objectif sera d'étudier l'évolution de ces propriétés dans le temps, sous l'hypothèse des petites transformations.

Avant d'obtenir les modèles mathématiques qui correspondent au cadre physique présenté, voici quelques notations et conventions que nous utiliserons tout au long de cette thèse. Nous désignons par $\mathbb{S}^d$ ($d = 2, 3$) l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur $\mathbb{R}$; $(\cdot, \cdot)$ et $\|\cdot\|$ représentent respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{S}^d$. Ainsi, nous

avons

$$\begin{aligned} u^\ell \cdot v^\ell &= u_i^\ell v_i^\ell, & \|v^\ell\| &= (v^\ell \cdot v^\ell)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u^\ell, v^\ell \in \mathbb{R}^d, \\ \sigma \cdot \tau &= \sigma_{ij} \tau_{ij}, & \|\tau\| &= (\tau \cdot \tau)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \sigma, \tau \in \mathbb{S}^d, \end{aligned}$$

avec la convention de l'indice muet. Pour un vecteur v , nous utilisons la notation v pour désigner la trace γv de v sur Γ . Nous notons par v_ν et v_τ les composantes normale et tangentielle de v sur la frontière données par

$$v_\nu^\ell = v^\ell \cdot \nu^\ell, \quad v_\tau^\ell = v^\ell - v_\nu^\ell \nu^\ell.$$

Nous désignons par $\sigma^\ell = \sigma^\ell(x, t)$ le champ des contraintes, par $u^\ell = u^\ell(x, t)$ le champ des déplacements sur Ω^ℓ et par $\varepsilon(u^\ell)$ le champ des déformations infinitésimales. Pour simplifier les notations, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance des fonctions par rapport à $x \in \overline{\Omega^\ell}$ et $t \in [0, T]$. Pour un champ des contraintes σ nous dénotons par σ_ν^ℓ et σ_τ^ℓ les composantes normale et tangentielle à la frontière données par

$$\sigma_\nu^\ell = \sigma^\ell \nu^\ell \cdot \nu^\ell, \quad \sigma_\tau^\ell = \sigma^\ell \nu^\ell - \sigma_\nu^\ell \nu^\ell.$$

En outre, les points au-dessus d'une fonction représentent la dérivation par rapport au temps, par exemple

$$\dot{u}^\ell = \frac{du^\ell}{dt} \quad \ddot{u}^\ell = \frac{d^2 u^\ell}{dt^2}$$

où $\dot{u}^\ell$ désigne le champ des vitesses et $\ddot{u}^\ell$ désigne le champ des accélérations. Pour le champ des vitesses $\dot{u}^\ell$ les notations $\dot{u}_\nu^\ell$ et $\dot{u}_\tau^\ell$ représentent respectivement les vitesses normale et tangentielle à la frontière, c'est à dire

$$\dot{v}_\nu^\ell = \dot{v}^\ell \cdot \nu^\ell, \quad \dot{v}_\tau^\ell = \dot{v}^\ell - \dot{v}_\nu^\ell \nu^\ell.$$

Rappelons maintenant la relation déformation-déplacement dans l'hypothèse des petites transformations

$$\varepsilon^\ell = (\varepsilon_{ij}^\ell), \quad \varepsilon_{ij}^\ell = \frac{1}{2}(\partial_j u_i^\ell + \partial_i u_j^\ell).$$

Notons qu'ici et tout au long de la thèse, un indice qui suit une virgule indique une dérivation partielle par rapport à la composante correspondante à la variable spatiale.

Passons maintenant à la description des modèles mathématiques associées aux cadres physiques ci-dessus.

Modèle mathématique n°1. Le premier modèle mathématique étudié dans ce mémoire, décrit l'évolution du corps dans le cadre physique °1. Les fonctions inconnues du problème sont le champ des déplacements $u^\ell : \Omega^\ell \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d$ et les champs des contraintes $\sigma^\ell : \Omega^\ell \times (0, T) \rightarrow \mathbb{S}^d$, $\ell = 1, 2$. On sait qu'en général, l'évolution d'un corps matériel est décrite par l'équation de mouvement de Cauchy.

$$\rho^\ell \ddot{u}^\ell = \text{Div } \sigma^\ell + f_0^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \quad (\text{A.1})$$

où $\rho^\ell : \Omega^\ell \rightarrow \mathbb{R}_+$ désigne la densité de masse ; ici "Div" représente l'opérateur divergence pour les tenseurs, $\text{Div } \sigma^\ell = (\sigma_{ij,j}^\ell)$. Le processus d'évolution défini par (A.1) s'appelle *processus dynamique*. Dans certaines situations, cette équation peut encore se simplifier : par exemple, dans le cas où le champ des vitesses nulle ($\dot{u}^\ell = 0$), il s'agit d'un problème d'équilibre, le processus d'évolution défini par (A.1) s'appelle *processus statiques* et l'équation du mouvement devient

$$\text{Div } \sigma^\ell + f_0^\ell = 0 \quad \text{dans } \Omega^\ell. \quad (\text{A.2})$$

Nous utiliserons l'équation de mouvement de Cauchy (A.2) dans les chapitres 1 et 2 de cette thèse. Dans le cas où le champ des accélérations nulle ($\ddot{u}^\ell = 0$), le processus d'évolution définie par (A.1) s'appelle *processus quasistatiques* et l'équation du mouvement devient

$$\text{Div } \sigma^\ell + f_0^\ell = 0 \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T). \quad (\text{A.3})$$

Nous utiliserons l'équation de mouvement de Cauchy (A.3) dans les chapitres 3 et utilise l'équation de mouvement de Cauchy général (A.1) dans les chapitres 4 de cette thèse.

Puisque le corps Ω^ℓ est encastré sur Γ_1^ℓ , le champ des déplacements s'annule

$$u^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\ell \times (0, T), \quad (\text{A.4})$$

La condition aux limites en tractions est

$$\sigma^\ell \nu^\ell = f_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_2^\ell \times (0, T). \quad (\text{A.5})$$

Nous allons compléter ultérieurement le modèle mathématique (A.1)-(A.5) par les conditions de contact sur la partie Γ_3 de la frontière.

Modèle mathématique n°2. Ce modèle mathématique décrit l'évolution du corps dans le cadre physique n°2. C'est un modèle électro-mécanique. Les inconnues mécaniques du problème sont les champs des déplacements u^ℓ et les champs des contraintes σ^ℓ satisfaisant les égalités (A.4) - (A.5). A celles-ci se rajoutent les inconnues électriques du problème, à savoir le champ de déplacement électrique les potentiels électriques $\varphi^\ell : \Omega^\ell \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ et les champs des déplacements électriques $D^\ell : \Omega^\ell \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d$. L'évolution du corps piézoélectrique est décrite par l'équation d'équilibre pour le champ de déplacements électriques.

$$\text{div } D^\ell - q_0^\ell = 0 \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \quad (\text{A.6})$$

où "div" est l'opérateur de divergence pour les vecteurs, $\text{div } D^\ell = (D_{i,i}^\ell)$, et q_0^ℓ représente la densité des charges électriques volumiques sur Ω^ℓ . Rappelons que dans les cadres physiques, le potentiel électrique s'annule sur la partie Γ_a^ℓ de la frontière

$$\varphi^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a^\ell \times (0, T), \quad (\text{A.7})$$

tandis que sur Γ_b^ℓ , une charge électrique de densité q_2^ℓ est prescrite,

$$D^\ell \cdot \nu^\ell = q_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_b^\ell \times (0, T). \quad (\text{A.8})$$

Ce modèle piézoélectrique (A.1)-(A.8) sera complété ultérieurement par les conditions aux limites sur la surface de contact Γ_3 .

Les équations précédentes sont insuffisantes à elles seules pour décrire le mouvement du corps matériel considéré. Il est nécessaire de décrire ce qui est propre au matériau lui même, c'est l'objet des lois de comportement que nous décrirons dans le deuxième paragraphe de ce chapitre.

A.2 Lois de comportement

Les lois de comportement sont des relations entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations et leurs dérivées. C'est toute une série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement. Les expériences physiques pour les matériaux unidimensionnels

constituent le point de départ dans l'établissement des lois de comportement. Voici quatre exemples classiques d'essais sur les solides : essais de chargement monotone, essais de charge-décharge, essais de fluage et essais de relaxation.

Dans la description des phénomènes purement mécanique, par loi de comportement (ou loi constitutive) nous comprenons dans la suite une relation entre le tenseur des contraintes σ^ℓ , le tenseur des déformations infinitésimales ε^ℓ et leurs dérivées temporelles $\dot{\sigma}^\ell$ et $\dot{\varepsilon}^\ell$. Cette définition se modifie légèrement dans la description des phénomènes électro-mécaniques, car ici nous devons aussi prendre en considération le champ de déplacement électrique $D^\ell = (D_i^\ell)$ ainsi que le champ électrique $E^\ell = -\nabla\varphi^\ell = -(\varphi_{,i}^\ell)$. Nous présentons par la suite les lois de comportement de matériau : matériaux élastiques, matériaux électro-élastiques et matériaux électro-élasto-viscoplastique.

Dans le cas unidimensionnel, on dit qu'un matériau est *élastique* si, lors des essais de charge-décharge les courbes $\sigma^\ell = \sigma^\ell(\varepsilon^\ell)$ coïncident ; dans le cas contraire il est *plastique* (*anéplastique*) et après décharge complète il subsiste une déformation résiduelle. Enfin, on dit qu'un matériau est *viscoélastique* s'il peut décrire le phénomène de relaxation ou de fluage. En conclusion, l'analyse des données expérimentales permet d'établir ce qui est propre au matériau lui même et conduit à l'établissement de la forme des lois de comportement.

Lois de comportement des matériaux élastiques.

Nous considérons ici une catégorie de matériau pour lesquels la loi de comportement s'écrit sous la forme suivante

$$\sigma^\ell = \mathcal{F}^\ell(\varepsilon(u^\ell)) \quad \text{dans } \Omega^\ell. \quad (\text{A.9})$$

Ici le tenseur des contraintes est une fonction (linéaire ou non linéaire) du tenseur des déformation infinitésimales $\varepsilon^\ell = \varepsilon(u^\ell)$; ceci correspond aux matériaux élastiques et la loi de comportement (A.9) s'appelle loi de comportement élastique. Dans le cas unidimensionnel la loi (A.9) peut modéliser certaines propriétés mises en évidence par les expériences de chargement monotones : la linéarité de la courbe $\sigma^\ell = \sigma^\ell(\varepsilon^\ell)$ (selon $\mathcal{F}^\ell$ est linéaire ou non linéaire), le durcissement ou l'adoucissement de la courbe $\sigma^\ell = \sigma^\ell(\varepsilon^\ell)$ (selon $\mathcal{F}^\ell$ est monotone ou non monotone).

Nous donnons maintenant un exemple de la loi de comportement linéaires, c'est à dire $\mathcal{F}^\ell$ est une fonction linéaire de ε , alors les lois des comportements élastiques, donnée par :

$$\sigma^\ell = \mathcal{F}^\ell \varepsilon(u^\ell) \quad (\sigma_{ij}^\ell = \mathcal{F}_{ijpq}^\ell \varepsilon_{pq}(u^\ell)),$$

où $\mathcal{F}^\ell = (\mathcal{F}_{ijpq}^\ell)$ est un tenseur d'ordre quatre. Ses composantes $\mathcal{F}_{ijpq}^\ell$ s'appellent coefficients d'élasticité et sont indépendants du tenseur des déformations. Dans le cas non-homogène les composantes $\mathcal{F}_{ijpq}^\ell$ dépendents des poits $x \in \Omega^\ell$, et dans les cas homogène les composantes $\mathcal{F}_{ijpq}^\ell$ sont des constantes, si $\mathcal{F}^\ell$ est un tenseur symétrique et elliptique, la condition de symétrie est équivalente aux égalités $\mathcal{F}_{ijpq}^\ell = \mathcal{F}_{pqij}^\ell = \mathcal{F}_{ijqp}^\ell$, et elle réduit à 21 le nombre de coefficients d'élasticité indépendants qui définissent le tenseur $\mathcal{F}^\ell$ en chaque point $x \in \Omega^\ell$, la condition d'ellipticité entraîne l'inversibilité du tenseur $\mathcal{F}^\ell$ donc la loi de comportement $\sigma^\ell = \mathcal{F}^\ell \varepsilon(u^\ell)$, équivaut à :

$$\varepsilon(u^\ell) = (\mathcal{F}^\ell)^{-1} \sigma^\ell,$$

où $(\mathcal{F}^\ell)^{-1}$ est l'inverse du tenseur $\mathcal{F}^\ell$, pour plus de détails sur le cas linéaire, on peut se référer [60]. De plus, le cas *homogène* et *isotrope* (c'est à dire toutes les directions autour d'un point sont matériellement équivalents) on trouve la loi de *Hook* suivante :

$$\sigma^\ell = \mathcal{F}^\ell \varepsilon(u^\ell) = \tilde{\lambda}^\ell \text{tr}(\varepsilon(u^\ell)) I_d + 2\tilde{\mu}^\ell \varepsilon(u^\ell) \quad (\text{A.10})$$

ou encore les composantes, donnée par :

$$\mathcal{F}_{ijpq}^\ell = \tilde{\lambda}^\ell \delta_{ij} \delta_{pq} + \tilde{\mu}^\ell (\delta_{jp} \delta_{iq} + \delta_{ip} \delta_{jq})$$

où $\tilde{\lambda}^\ell, \tilde{\mu}^\ell$ sont les coefficients de Lamé et δ_{ij} est les symboles de Kronecker.

En utilisant les composantes σ_{ij}^ℓ du tenseur des contraintes, il vient

$$\sigma_{ij}^\ell = \tilde{\lambda}^\ell \delta_{ij} \varepsilon_{pp}(u^\ell) + 2\tilde{\mu}^\ell \varepsilon_{ij}(u^\ell), \quad \sigma_{pp}^\ell = (3\tilde{\lambda}^\ell + 2\tilde{\mu}^\ell) \varepsilon_{pp}(u^\ell)$$

de sorte que les relations inverses, sont

$$\varepsilon_{ij}^\ell = \frac{1}{2\tilde{\mu}^\ell} \sigma_{ij}^\ell - \frac{\tilde{\lambda}^\ell}{2\tilde{\mu}^\ell (3\tilde{\lambda}^\ell + 2\tilde{\mu}^\ell)} \sigma_{pp}^\ell \delta_{ij},$$

on pose fréquemment

$$\kappa^\ell = \frac{3\tilde{\lambda}^\ell + 2\tilde{\mu}^\ell}{3}, \quad E^\ell = \frac{\tilde{\mu}^\ell (3\tilde{\lambda}^\ell + 2\tilde{\mu}^\ell)}{\tilde{\lambda}^\ell + \tilde{\mu}^\ell}, \quad \nu^\ell = \frac{\tilde{\lambda}^\ell}{2(\tilde{\lambda}^\ell + \tilde{\mu}^\ell)}$$

les nombres κ^ℓ, E^ℓ et ν^ℓ s'appellent respectivement le module de compressibilité, le module de Young et le coefficient de Poisson, on obtient

$$\frac{1 + \nu^\ell}{E^\ell} = \frac{1}{2\tilde{\mu}^\ell}, \quad \frac{\nu^\ell}{E^\ell} = \frac{\tilde{\lambda}^\ell}{2\tilde{\mu}^\ell (3\tilde{\lambda}^\ell + 2\tilde{\mu}^\ell)}$$

donc les déformations ε_{ij}^ℓ devient :

$$\varepsilon_{ij}^\ell = \frac{1 + \nu^\ell}{E^\ell} \sigma_{ij}^\ell - \frac{\nu^\ell}{E^\ell} \sigma_{pp}^\ell \delta_{ij} \quad \left(\varepsilon^\ell = \frac{1 + \nu^\ell}{E^\ell} \sigma^\ell - \frac{\nu^\ell}{E^\ell} (\text{tr} \sigma^\ell) I_d \right).$$

On peut "limiter" les valeurs possibles pour les constantes de Lamé de tout matériau élastique homogène isotrope "réel". Ainsi en imaginant trois expériences "idéales" on peut prouver que $\tilde{\lambda}^\ell > 0$, et $\tilde{\mu}^\ell > 0$ et d'après l'inégalité précédent, il vient $\kappa^\ell > 0$, $E^\ell > 0$ et $\frac{1}{2} > \nu^\ell > 0$.

Pour plus de détails sur les lois de comportement (A.10), nous renvoyons le lecteur à voir par exemple [16].

Nous utiliserons les lois des comportements (A.9) et (A.10) dans les chapitres 1 et 2 de cette thèse.

Lois de comportement des matériaux électro-élastiques.

Les matériaux piézoélectrique sont caractérisés par le couplage des propriétés mécaniques et électriques. Nous considérons ici une catégorie de matériaux où le tenseur des contraintes σ^ℓ et le vecteur des déplacements électriques D^ℓ sont reliés par la loi de comportement

$$\begin{aligned} \sigma^\ell &= \mathcal{A}^\ell \varepsilon(u^\ell) + (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell, \\ D^\ell &= \mathcal{E}^\ell \varepsilon(u^\ell) - \mathcal{B}^\ell \nabla \varphi^\ell, \end{aligned} \tag{A.11}$$

où $\mathcal{A}^\ell$ est l'opérateur d'élasticité, non forcément linéaire, à champ électrique nul, $\mathcal{E}^\ell = (e_{ijk}^\ell)$ est le tenseur piézoélectrique qui traduit la proportionnalité entre la charge et la déformation à champ constant ou nul ; $\mathcal{B}^\ell = (b_{ij}^\ell)$ est le tenseur de la permittivité électrique à déformation nulle qui

constitue un tenseur symétrique défini positif et $E^\ell(\varphi^\ell) = -\varphi^\ell$ représente le champ électrique. Par ailleurs $(\mathcal{E}^\ell)^* = (e_{ijk}^{\ell,*})$ dénote le transposé du tenseur $\mathcal{E}^\ell$, tel que

$$\mathcal{E}^\ell \sigma \cdot v = \sigma \cdot (\mathcal{E}^\ell)^* v \quad \forall \sigma \in \mathbb{S}^d, v \in \mathbb{R}^d. \quad (\text{A.12})$$

Pour plus de détails sur les lois de comportement (A.11), nous renvoyons le lecteur à voir par exemple [7, 8].

Nous utiliserons le loi de comportement (A.11) dans le chapitre 3 de cette thèse.

Lois de comportement des matériaux électro-élasto-viscoplastique.

Une loi de comportement d'un matériau élasto-viscoplastique peut être écrite sous la forme

$$\sigma^\ell(t) = \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}^\ell(t)) + \mathcal{G}^\ell \varepsilon(u^\ell(t)) + \int_0^t \mathcal{F}^\ell(\sigma^\ell(s) - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}^\ell(s)), \varepsilon(u^\ell(s))) ds, \quad (\text{A.13})$$

où les opérateurs $\mathcal{A}^\ell$ et $\mathcal{G}^\ell$ sont des tenseur d'ordre quatre et non linéaires ; leurs composantes a_{ijkl}^ℓ et g_{ijkl}^ℓ s'appellent coefficients de viscosité et élasticité respectivement et $\mathcal{F}^\ell$ représente une fonction constitutive non linéaire qui décrit le comportement viscoplastique du matériau.

Un matériau piézoélectrique dont les propriétés mécaniques sont élasto-viscoplastique est appelé matériau électro-élasto-viscoplastique et pour la contrainte on a $\sigma^\ell = \sigma^{\ell, evp} + \sigma^{\ell, el}$, où $\sigma^{\ell, evp}$ et $\sigma^{\ell, el}$ sont respectivement les parties élasto-viscoplastique et électrique de la contrainte, telles que $\sigma^{\ell, evp}$ définie par (A.13) et $\sigma^{\ell, el} = (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell$. A partir de la loi (A.13), nous obtenons une loi de comportement électro-élasto-viscoplastique comme suit

$$\begin{cases} \sigma^\ell(t) = \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}^\ell(t)) + \mathcal{G}^\ell \varepsilon(u^\ell(t)) + (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell(t) + \\ \int_0^t \mathcal{F}^\ell(\sigma^\ell(s) - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}^\ell(s)) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell(s), \varepsilon(u^\ell(s))) ds, \\ D^\ell = \mathcal{E}^\ell \varepsilon(u^\ell) - \mathcal{B}^\ell \nabla \varphi^\ell. \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

Nous utiliserons la loi de comportement (A.14) dans le chapitre 4 de cette thèse.

Lorsque $\mathcal{F}^\ell = 0$, (A.14) se réduit à une loi de comportement de matériau électro-viscoélastique

$$\begin{aligned} \sigma^\ell(t) &= \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}^\ell(t)) + \mathcal{G}^\ell \varepsilon(u^\ell(t)) + (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell(t), \\ D^\ell &= \mathcal{E}^\ell \varepsilon(u^\ell) - \mathcal{B}^\ell \nabla \varphi^\ell. \end{aligned}$$

Finalement, afin de compléter le modèle mathématique qui décrit l'évolution du corps, il faut préciser les conditions aux limites sur Γ_3 , c'est l'objet des conditions de contact et lois sans frottement que nous décrirons dans la section suivant.

A.3 Conditions aux limites de contact

Les conditions aux limites sur la surface de contact sont décrites à la fois en direction de la normale et dans le plan tangent, ces dernières étant appelées condition de frottement. En direction de la normale nous pouvons distinguer le contact unilatéral (lorsqu'il ne peut y'avoir d'interpénétration entre les deux corps), bilatéral (lorsqu'il n'y a pas de séparation entre les deux corps), de compliance normale (lorsque surface de contact est déformable) ou bien de réponse normale instantanée (lorsque la surface de contact est lubrifiée). A part le cas limite lorsque la contrainte tangentielle est nulle (le cas sans frottement), le frottement peut être à seuil (quand le glissement

se produit que lorsque la force de frottement atteint une valeur critique) ou sans seuil (lorsque le glissement se produit pour n'importe quelle force de frottement). Parmi les lois de frottement à seuil, les plus utilisées dans la littérature sont celles de Coulomb et de Tresca ; elles modélisent un frottement sec, alors que les lois de frottement sans seuil modélisent un frottement lubrifié.

A.3.1 Conditions aux limites de contact de Signorini.

On définit le déplacement normal relatif d'un corps par rapport à l'autre sur la zone de contact Γ_3 par $[u_\nu] = u_\nu^1 + u_\nu^2$, où ν^ℓ est la normale unitaire extérieure à Ω^ℓ .

La continuité des contraintes sur l'interfaces Γ_3 se traduit par :

$$\sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2 \equiv \sigma_\nu, \quad \sigma_\tau^1 = -\sigma_\tau^2 \equiv \sigma_\tau \text{ sur } \Gamma_3. \quad (\text{A.15})$$

La condition de contact *non-pénétration* entre les deux corps est exprimée par la relation suivante :

$$[u_\nu] \leq 0 \text{ sur } \Gamma_3. \quad (\text{A.16})$$

Aux point de Γ_3 tels que $[u_\nu] < 0$, il y a séparation entre les deux corps. Les contraintes normales y sont alors nulles. Par conséquent, on a :

$$[u_\nu] < 0 \Rightarrow \sigma_\nu = 0 \text{ sur } \Gamma_3. \quad (\text{A.17})$$

Aux point de Γ_3 tels que $[u_\nu] = 0$, le contact est maintenu et chaque corps exerce une réaction normale orienté vers l'autre corps et donc nous pouvons écrire

$$[u_\nu] = 0 \Rightarrow \sigma_\nu \leq 0 \text{ sur } \Gamma_3. \quad (\text{A.18})$$

On dit que le contact entre les deux corps sans frottement si les mouvements tangentiels sont libres, ce qui traduit par :

$$\sigma_\tau^1 = \sigma_\tau^2 = 0 \text{ sur } \Gamma_3. \quad (\text{A.19})$$

Pour résumer, les conditions de contact (A.15)-(A.19) s'écrivent d'une manière combinée de la façon suivante : suivante :

$$\begin{cases} (a) : \sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2 \equiv \sigma_\nu \\ (b) : [u_\nu] \leq 0, \sigma_\nu \leq 0, [u_\nu]\sigma_\nu = 0 \\ (c) : \sigma_\tau^1 = \sigma_\tau^2 = 0 \end{cases} \text{ sur } \Gamma_3. \quad (\text{A.20})$$

Les conditions aux limites de la forme (A.20) sont aussi appelés "*conditions de contact unilatéral*" ou bien "*conditions de contact de Signorini*".

Nous utiliserons les conditions aux limites de contact (A.20) dans les chapitres 1 et 2 de cette thèse.

A.3.2 Condition de contact avec compliance normale et adhésion.

On va décrire la condition de contact avec compliance normale et adhésion sur $\Gamma_3 \times (0, T)$, on introduit une variable interne d'état β définie sur $\Gamma_3 \times (0, T)$, qui représente l'intensité d'adhésion sur la surface de contact, telle que $0 \leq \beta \leq 1$. Quand $\beta = 1$ à un point $x \in \Gamma_3$, l'adhésion est complète et tous les liens sont actifs, quand $\beta = 0$ tous les liens sont désactivés et il n'y a pas d'adhésion ; et quand $0 < \beta < 1$ c'est le cas d'une adhésion partielle et mesure la fraction des liens. Pour plus

détails sur ce section, on renvoie par exemple [35]. On suppose que la contrainte normale satisfait la condition de compliance normale avec adhésion

$$\sigma_v = -p_v([u_v]) + \gamma_v \beta^2 R_v([u_v]) \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times (0, T), \quad (\text{A.21})$$

où σ_v est le déplacement normal, γ_v est un coefficient positif, $p_v : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction donnée appelée fonction de compliance normale, et la fonction $R_v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est l'opérateur de troncature donné par

$$R_v(s) = \begin{cases} L & \text{si } s < -L, \\ -s & \text{si } -L \leq s \leq 0, \\ 0 & \text{si } 0 < s. \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

Ici $L > 0$ est longueur caractéristique des liens (voir figure A.1).

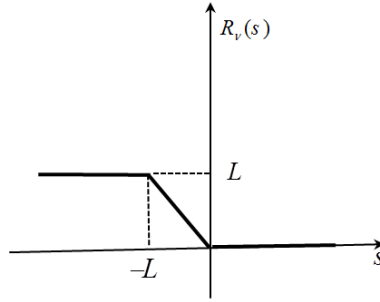


Fig. A.1: Représentation graphique de l'opérateur de troncature R_v

La condition (A.21) indique que chaque corps exerce une action sur l'autre corps en fonction de sa pénétration $[u_v]$, où le deuxième terme de l'égalité est la contribution de l'adhésion β à la tension de surface. Notons que la condition de compliance normale avec adhésion (A.21) a été déjà utilisée dans [33, 83, 93].

Quand le champ d'adhésion β est nul, (A.21) devient

$$-\sigma_v = p_v([u_v]) \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times (0, T), \quad (\text{A.23})$$

ce qui représente la condition de compliance normale sans adhésion. Des expressions générales de la forme (A.23) ont été utilisées dans [54, 56, 60, 66].

Comme exemple de fonction de compliance normale, nous pouvons considérer

$$p_v(r) = c_v r_+,$$

où c_v est une constante positive et $r_+ = \max\{0, r\}$.

La diversité des matériaux a conduit les chercheurs à utiliser le collage des composites comme étant un moyen universel d'assemblage de matériaux de natures différentes. Pour modéliser les phénomènes d'adhésion, il est nécessaire d'ajouter le processus d'adhésion à la description du contact.

L'évolution du champ d'adhésion est décrite par une équation différentielle de la forme

$$\dot{\beta} = -\left(\beta\left(\gamma_v(R_v([u_v]))^2 + \gamma_\tau(R_\tau([u_\tau]))^2\right) - \varepsilon_a\right)_+ \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times (0, T), \quad (\text{A.24})$$

$$\beta(0) = \beta_0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_3, \quad (\text{A.25})$$

où γ_ν, γ_τ et ε_a sont coefficients d'adhérence positifs, et $[\mathbf{u}_\tau] = \mathbf{u}_\tau^1 - \mathbf{u}_\tau^2$ le déplacement tangent relatif de corps Ω^1 par rapport l'autre corps Ω^2 sur la zone de contact, et β_0 l'adhésion initiale, tel que

$$0 \leq \beta_0 \leq 1, \quad \text{p.p. } x \in \Gamma_3, \quad (\text{A.26})$$

et la fonction $\mathbf{R}_\tau : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est l'opérateur de troncation donné par

$$\mathbf{R}_\tau(v) = \begin{cases} v & \text{si } \|v\| \leq L, \\ L \frac{v}{\|v\|} & \text{si } \|v\| > L. \end{cases} \quad (\text{A.27})$$

Sous les conditions (A.24)–(A.26), on a la remarque suivante :

Remarque A.1: Nous remarquons que le champ d'adhésion vérifie la restriction $0 \leq \beta \leq 1$. En effet, puisque $\dot{\beta} \leq 0$ donc $\beta \leq \beta_0 \leq 1$. En outre, si $\beta = 0$ quand $t = t_0$ donc $\dot{\beta} = 0$ pour tout $t \geq t_0$, et d'où $\beta = 0$ pour tout $t \geq t_0$, p.p. $x \in \Gamma_3$. Alors nous concluons que $0 \leq \beta \leq 1$ pour tout $t \in [0, T]$, p.p. $x \in \Gamma_3$.

Condition dans le plan tangent.

Aux points de Γ_3 , la rigidité tangentielle générée par la colle est supposée dépendante de l'adhésion β et des déplacements tangentiels,

$$-\sigma_\tau = p_\tau(\beta) \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T) \quad (\text{A.28})$$

où $p_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction de contact tangentielle, $\mathbf{R}_\tau$ est un opérateur de troncation défini par la relation (A.27). Alors, $p_\tau(\beta)$ agit comme une constante de ressort, qui croît avec β ; la traction est en direction opposé au déplacement. Le module maximum de la traction tangentielle dans (A.28) est $p_\tau(1)L$. La traction de frottement tangentielle est supposée être beaucoup plus petite que l'adhésion et donc elle est omise. Quand elle n'est pas négligeable on doit ajouter la traction de frottement comme cela a été fait en [68].

B. OUTILS MATHÉMATIQUES

Dans ce chapitre, nous introduisons quelques préliminaires mathématiques qui seront utilisés partout dans cette thèse, il nous est paru utile de rappeler des espaces de *Hilbert* de plus à quelques éléments d'analyse non linéaire et particulièrement des résultats d'existence et d'unicité concernant les inéquations variationnelles elliptiques. Nous commençons par présenter les espaces fonctionnels, on y introduit des espaces de type distributions et de type *Sobolev* associés à l'opérateur déformation et à l'opérateur divergence et on présente leurs principales propriétés, et particulièrement des résultats d'injections continue et d'injection compact, notamment les théorèmes de trace, puis nous rappelons les espaces des fonctions à valeurs vectorielles.

B.1 *Rappels sur les espaces de Hilbert*

Soit H un espace vectoriel réel et $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ un *produit scalaire* sur H c'est à dire $\langle \cdot, \cdot \rangle_H : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application bilinéaire symétrique et définie positive. On note par $\|\cdot\|_H$ l'application de H dans $\mathbb{R}_+$ définie par :

$$\|u\|_H = \sqrt{\langle u, u \rangle_H} \quad (\text{B.1})$$

et on rappelle que $\|\cdot\|_H$ est une *norme* sur H qui vérifie l'inégalité de *Cauchy-Schwarz*

$$\langle u, v \rangle_H \leq \|u\|_H \|v\|_H \quad \forall u, v \in H. \quad (\text{B.2})$$

On dit que H est un *espace de Hilbert* si H est *complet* pour la norme définie par (B.1). Soit H' l'espace dual de H c'est à dire l'espace des fonctionnelles linéaires et continues sur H muni de la norme

$$\|\zeta\|_{H'} = \sup_{v \in H - \{0\}} \frac{\langle \zeta, v \rangle_{H' \times H}}{\|v\|_H} \quad (\text{B.3})$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H' \times H}$ représente la dualité entre H' et H .

Définition B.1 (Hyperplan): Soit H un espace de Hilbert, un hyperplan (affine) de H est un ensemble de la forme $K = \{x \in H; f(x) = \alpha\}$ où f est une forme linéaire sur H , non identiquement nulle et $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que H est l'hyperplan d'équation $[f = \alpha]$.

Définition B.2 (Hyperplan sépare): Soit H un espace de Hilbert, $f \in H - \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et soient A, B deux ensembles non vide d'un espace de Hilbert H .

1. On dit que l'hyperplan K d'équation $[f = \alpha]$ sépare A et B au sens large si l'on a

$$f(x) \leq \alpha \leq f(y) \quad \forall x \in A, \quad \forall y \in B.$$

2. On dit que l'hyperplan K d'équation $[f = \alpha]$ sépare A et B au sens strict s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$f(x) \leq \alpha - \varepsilon \quad \forall x \in A, \quad \text{et} \quad \alpha + \varepsilon \leq f(y) \quad \forall y \in B.$$

Théorème B.1 (Hahn-Banach, forme analytique): Soient H est un espaces de Hilbert, G un sous-espace vectoriel de H et soit $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire et continue. Alors il existe $f \in H'$ qui prolonge g et tel que $\|f\| = \|g\|$.

Théorème B.2 (Hahn-Banach, première forme géométrique): Soient H est un espaces de Hilbert, soient $A \subset H$ et $B \subset H$ deux ensembles convexes, non vides et disjoints, on suppose que A est ouvert. Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens large.

Théorème B.3 (Hahn-Banach, deuxième forme géométrique): Soient H est un espaces de Hilbert, soient $A \subset H$ et $B \subset H$ deux ensembles convexes, non vides et disjoints, on suppose que A est fermé et que B est compact. Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens strict.

Théorème B.4 (Théorème de représentation de Riesz-Fréchet): Soit H un espace de Hilbert et soit H' son espace dual. Alors, pour tout $\phi \in H'$ il existe $f \in H$ unique tel que

$$\langle \phi, v \rangle_{H' \times H} = (f, v)_H \quad \forall v \in H.$$

De plus

$$\|\phi\|_{H'} = \|f\|_H$$

L'importance de ce théorème est que toute forme linéaire continue sur H peut se représenter à l'aide du produit scalaire. L'application $\phi \mapsto f$ est un isomorphisme isométrique qui permet d'identifier H et H' .

Soit maintenant V et H des espaces de Hilbert réel tels que V est dense dans H et l'injection $V \subset H$ est continue. On identifie H et H' . Soit V' le dual de V . On peut alors prolonger H dans V' grâce au procédé suivant : étant donné $f \in H$, l'application $v \in V \mapsto (f, v)_H$ est une forme linéaire continue sur H et a fortiori sur V ; on la note $Tf \in V'$ de sorte que

$$\langle Tf, v \rangle_{V' \times V} = (f, v), \quad \forall f \in H, \quad \forall v \in V.$$

On vérifie que $T : H \rightarrow V'$ possède les propriétés suivantes :

1. $\|Tf\|_{V'} \leq C\|f\|_H \quad \forall f \in H$,
2. T est injective,
3. $T(H)$ est dense dans V' .

En général T n'est pas surjective de H sur V' . A l'aide de T on prolonge H dans V' et on a le schéma

$$V \subset H = H' \subset V' \tag{B.4}$$

où les injections canoniques sont continues et denses. Ce triplet est appelé *Triplet de Gelfand*, on dit que H est l'espace pivots.

Définition B.3 (converge faible): On dit que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ dans H est *faiblement convergente* vers l'élément $u \in H$ et on note $u_n \rightharpoonup u$ si

$$\langle u_n, v \rangle_H \longrightarrow \langle u, v \rangle_H \quad \forall v \in H.$$

Dans ce cas, u s'appelle *limite faible* de (u_n) .

En utilisant l'inégalité de *Cauchy-Schwartz*, il résulte que si $u_n \rightarrow u$ dans H alors $u_n \rightharpoonup u$ dans H .

Théorème B.5: Soit (u_n) une suite bornée de H . Alors il existe un élément $u \in H$ et une sous-suite de (u_n) encore notée par (u_n) telle que $u_n \rightharpoonup u$.

Un élément $u \in H$ qui est la limite faible d'une sous-suite de la suite (u_n) s'appelle *point faiblement adhérent* de la suite (u_n) . On prouve que :

Théorème B.6: Si la suite $(u_n) \subset H$ faiblement convergente vers l'élément $u \in H$, alors la suite $(\|u_n\|_H)$ est bornée, de plus $\|u\|_H \leq \liminf \|u_n\|_H$.

Théorème B.7: Si la suite $(u_n) \subset H$ possède un unique point faiblement adhérent $u \in H$, alors $u_n \rightharpoonup u$.

Autrement dit, le théorème précédent affirme que si toutes les sous-suites faiblement convergentes d'une suite (u_n) ont la même limite faible u , alors la suite (u_n) converge faiblement vers u .

Définition B.4: On dit que deux éléments $u, v \in H$ sont *orthogonaux* et on note $u \perp v$ si $\langle u, v \rangle_H = 0$. Soit M un sous-espace vectoriel de H , on pose

$$M^\perp = \{ u \in H / v \perp u; \quad \forall v \in M \}$$

On dit que $M^\perp$ est l'orthogonal de M dans H .

Théorème B.8: Soit M un sous-espace fermé de H . Alors $M^\perp$ est un supplémentaire topologique de M c'est à dire

1. $M^\perp$ est un sous-espace fermé de H ;
2. $M \cap M^\perp = \{0\}$ et $M + M^\perp = H$.

Théorème B.9 (Théorème de projection): Soit $K \subset H$ est un convexe fermé non vide. Alors pour tout $u \in H$ il existe unique $u^* \in K$ tel que :

$$\|u - u^*\|_H = \inf_{v \in K} \|u - v\|_H. \quad (\text{B.5})$$

De plus, u^* est caractérisé par la propriété

$$u^* \in K \quad \langle u^*, v - u^* \rangle_H \geq \langle u, v - u^* \rangle_H \quad \forall v \in K. \quad (\text{B.6})$$

Etant donné K un convexe fermé non vide, le théorème précédent nous permet d'associer à chaque élément $u \in H$ l'élément u^* défini par (B.5), on note par $u^* = P_K u$.

On a mis ainsi en évidence l'opérateur $P_K : H \rightarrow K$ qui s'appelle *opérateur de projection* sur K . En utilisant (B.6), il résulte :

Théorème B.10: Soit $K \subset H$ un convexe fermé, non vide. Alors

$$\|P_K u - P_K v\|_H \leq \|u - v\|_H \quad \forall u, v \in H; \quad (\text{B.7})$$

$$\langle u - P_K u, v - P_K u \rangle_H \leq 0 \quad \forall u \in H \quad \forall v \in K; \quad (\text{B.8})$$

$$\langle u - v, P_K u - v \rangle_H \leq 0 \quad \forall u \in H \quad \forall v \in K. \quad (\text{B.9})$$

Remarque B.1: Si K sous-espace vectorielle de H , on a

$$\langle u - P_K u, v \rangle_H = 0 \quad \forall u \in H \quad \forall v \in K.$$

B.2 Inéquations variationnelles elliptiques

Soient $A : H \longrightarrow H$ un opérateur non linéaire, dite que :

1. l'opérateur A *monotone* si :

$$\langle Au - Av, u - v \rangle_H \geq 0 \quad \forall u, v \in H.$$

2. l'opérateur A *fortement monotone* s'il existe un réel $m > 0$ tel que :

$$\langle Au - Av, u - v \rangle_H \geq m \|u - v\|_H^2 \quad \forall u, v \in H.$$

3. l'opérateur A *hemicontinu* si pour toute suite numérique (μ_n) tel que $\mu_n \rightarrow \mu$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ on a :

$$\langle A(u + \mu_n v), w \rangle_H \rightarrow \langle A(u + \mu v), w \rangle_H, \quad n \rightarrow +\infty \quad \forall u, v, w \in H.$$

4. l'opérateur A *Lipschitzienne* s'il existe un réel $M > 0$ tel que :

$$\|Au - Av\|_H \leq M \|u - v\|_H \quad \forall u, v \in H.$$

5. Posons que l'opérateur A est linéaire : l'opérateur A est dit *continue* s'il existe un réel $C > 0$ tel que :

$$\|Au\|_H \leq C \|u\|_H \quad \forall u \in H.$$

6. Posons aussi que l'opérateur A est linéaire : l'opérateur A est dit *positivement défini* s'il existe un réel $m > 0$ tel que :

$$\langle Au, u \rangle_H \geq m \|u\|_H^2 \quad \forall u \in H.$$

Soit maintenant $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, dite que :

1. le forme $a(.,.)$ *symétrique* si :

$$a(u, v) = a(v, u) ; \quad \forall u, v \in H.$$

2. le forme $a(.,.)$ *continue* s'il existe un réel $M > 0$ tel que :

$$a(u, v) \leq M \|u\|_H \|v\|_H \quad \forall u, v \in H.$$

3. le forme $a(.,.)$ est dit *H-elliptique* s'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que :

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_H^2 \quad \forall u \in H.$$

Remarque B.2: Soient $A : H \longrightarrow H$ un opérateur et $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme définie par : $a(u, v) = \langle Au, v \rangle_H$. On a :

1. $a(.,.)$ est bilinéaire si et seulement si A linéaire .
2. $a(.,.)$ est continue si et seulement si A continue.
3. $a(.,.)$ est *H-elliptique* si et seulement si A est défini positif.

On considère maintenant une fonction $\varphi : H \longrightarrow]-\infty, +\infty]$. On a :

1. le fonction φ est dite *propre* si $\varphi \neq +\infty$, c'est à dire s'il existe $u \in H$ tel que $\varphi(u) < +\infty$.

2. le fonction φ est dite *convexe* si

$$\varphi(tu + (1-t)v) \leq t\varphi(u) + (1-t)\varphi(v) \quad \forall u, v \in H, \forall t \in]0, 1[.$$

3. le fonction φ est dite *strictement convexe* si

$$\varphi(tu + (1-t)v) < t\varphi(u) + (1-t)\varphi(v) \quad \forall u \neq v \in H, \forall t \in]0, 1[.$$

4. le fonction φ est dite *semi-continue inférieurement* (s.c.i) en u_0 si

$$\liminf_{u \rightarrow u_0} \varphi(u) \geq \varphi(u_0).$$

5. le fonction φ est dite s.c.i sur H si s.c.i pour tout point de H .

6. le fonction φ est dite *Gâteaux-différentiable* en u s'il existe un élément $\nabla u \in H$ tel que :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(u + tv) - \varphi(u)}{t} = \langle \nabla u, v \rangle_H \quad \forall v \in H \quad (\text{B.10})$$

l'élément ∇u s'appelle la *différentielle au sens de Gateaux* de φ en u .

7. le fonction φ est dite *Gâteaux-différentiable*, si elle Gâteaux-différentiable en tout point de H ; l'opérateur $u \mapsto \nabla \varphi : H \rightarrow H$ s'appelle le gradient de φ .

8. le fonction φ est dite *sous-différentiable* en point u s'il existe $f \in H$ tel que :

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle f, v - u \rangle_H \quad \forall v \in H, \quad (\text{B.11})$$

l'élément f s'appelle la *sous-gradient* de φ en u .

9. l'ensemble des sous-gradients de fonction φ en point u est appelé *sous-différentiable* de φ en point u et est noté $\partial\varphi(u)$:

$$\partial\varphi(u) = \{ f \in H / \varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle f, v - u \rangle_H \quad \forall v \in H \}. \quad (\text{B.12})$$

Lemme B.1: Soit $\varphi : H \rightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction Gâteaux-différentiable. φ est alors une fonction convexe si seulement si

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle \nabla \varphi(u), v - u \rangle_H \quad \forall v \in H. \quad (\text{B.13})$$

Lemme B.2: Soit $\varphi : H \rightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction sous-différentiable . Alors φ est une fonction convexe, propre , s.c.i.

Lemme B.3: Soit $\varphi : H \rightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe Gâteaux-différentiable. φ est alors une fonction sous-différentiable et $\partial\varphi(u) = \{\nabla\varphi(u)\}$ pour tout $u \in H$.

Lemme B.4: Tout opérateur de Lipschitz est hemicontinu.

Lemme B.5: Soit $A : H \rightarrow H$ est un opérateur *fortement monotone* et *Lipchitz*, alors A est inversible, de plus l'opérateur A^{-1} est également fortement monotone et Lipschitz.

Théorème B.11 (Théorème du *point fixe de Banach*): Soit K une partie non vide et fermé de l'espace de Banach X et soit $\Lambda : K \rightarrow K$ une contractante, i.e, $\exists k \in]0, 1[$ tel que

$$\|\Lambda(u) - \Lambda(v)\|_X \leq k\|u - v\|_X \quad \forall u, v \in K.$$

Alors il existe un unique élément $u \in K$ tel que $\Lambda(u) = u$, i.e, Λ possède un point fixe unique dans K .

Nous allons ainsi utiliser une version du théorème de point fixe de Banach que nous présentons ci-dessus.

Pour cela, nous rappelons que les puissances de l'opérateur Λ sont définies récursivement par

$$\Lambda^n = \Lambda(\Lambda^{n-1}) \text{ pour } n \geq 2.$$

Théorème B.12: . Sous les mêmes conditions du Théorème B.11, on suppose que Λ^n est une contractante pour un certain entier $n \geq 2$. Alors Λ admet un point fixe unique dans K .

Théorème B.13 (Théorème du *point fixe de Brower*): Toute application continue d'un convexe compact de $\mathbb{R}^d$ dans lui-même admet au moins un point fixe.

Théorème B.14 (Théorème du *Lax-Milgram*): Soit $a(.,.)$ une forme *bilinéaire continue* et *elliptique*, Alors pour tout $f \in H$, il existe $u \in H$ unique tel que :

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle_H \quad \forall v \in H. \quad (\text{B.14})$$

De plus, si $a(.,.)$ est *symétrique*, alors u est caractérisé par la propriété

$$\frac{1}{2}a(u, u) - \langle u, u \rangle_H \leq \frac{1}{2}a(v, v) - \langle v, v \rangle_H \quad \forall v \in H. \quad (\text{B.15})$$

Théorème B.15 (Théorème du *Stampachia*): Soit $a(.,.)$ une forme *bilinéaire continue* et *elliptique*. Soit $K \subset H$ un convexe fermé et non vide. Alors pour tout $f \in H$, il existe $u \in K$ unique tel que :

$$u \in K \quad a(u, v - u) \geq \langle f, v - u \rangle_H \quad \forall v \in K. \quad (\text{B.16})$$

De plus, si $a(.,.)$ est *symétrique*, alors u est caractérisé par la propriété :

$$u \in K \quad \frac{1}{2}a(u, u) - \langle u, u \rangle_H \leq \frac{1}{2}a(v, v) - \langle v, v \rangle_H \quad \forall v \in K. \quad (\text{B.17})$$

Soit maintenant $A : H \rightarrow H$ est un opérateur non linéaire $\varphi : H \rightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction propre ($\varphi \not\equiv +\infty$) et $f \in H$. Un nombre de problèmes aux limites en équations aux dérivées partielles ainsi qu'en mécanique des milieux continus ont un rapport avec des problèmes mathématiques de la forme suivante : Trouver u tel que

$$u \in H \quad \langle Au, v - u \rangle_H + \varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle f, v - u \rangle_H \quad \forall v \in H. \quad (\text{B.18})$$

Le problème (B.18) est appelé *inéquation variationnelle elliptique de seconde espèce* sur H . D'autre problème rencontrés en mécanique ont un rapport avec des problèmes mathématiques similaires de la forme suivantes : Trouver u tel que

$$u \in K \quad \langle Au, v - u \rangle_H \geq \langle f, v - u \rangle_H \quad \forall v \in K \quad (\text{B.19})$$

où K est un sous-ensemble non vide de H . Le problème (B.19) est appelé *inéquation variationnelle elliptique de première espèce* sur H .

Remarquons que si $\varphi \equiv 0$ (resp. $K = H$), alors (B.18) (resp. (B.19)) est équivalente au problème suivant :

Trouver u tel que

$$u \in H \quad \langle Au, v \rangle_H = \langle f, v \rangle_H \quad \forall v \in H. \quad (\text{B.20})$$

Théorème B.16: Si A est un opérateur *fortement monotone* et de *Lipschitz* et K est un *convexe fermé non vide* de l'espace H , alors l'inéquation variationnelle elliptique (B.19) admet une solution unique.

Théorème B.17: Si A est un opérateur *fortement monotone* et de *Lipschitz* et φ est un fonction *propre convexe et semi-continue inférieurement*, alors l'inéquation variationnelle elliptique (B.18) admet une solution unique.

Théorème B.18: Soit $V \subset H \subset V'$ un *triplet de Gelfand*. Soit $A : V \rightarrow V'$ un opérateur *hemicontinu et monotone* qui satisfait :

$$(Av, v)_{V' \times V} \geq w \|v\|_V^2 + \lambda \quad \forall v \in V, \quad (\text{B.21})$$

$$\|Av\|_{V'} \leq C(\|v\|_V + 1) \quad \forall v \in V. \quad (\text{B.22})$$

Pour des constantes $w > 0$, $C > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Etant donnée $u_0 \in H$ et $f \in L^2(0, T; V')$, alors il existe une fonction unique u satisfait

$$\begin{aligned} u &\in L^2(0, T; V) \cap C^1(0, T; H), \quad \dot{u} \in L^2(0, T; V'), \\ \dot{u}(t) + Au(t) &= f(t) \text{ p.p. } t \in (0, T), \\ u(0) &= u_0. \end{aligned}$$

Théorème B.19 (Théorème de Cauchy- Lipschitz): Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ est un véritable espace de Banach et soit $F(t, \cdot) : X \rightarrow X$ un opérateur défini p.p. sur $(0, T)$ qui satisfait les propriétés suivantes :

- (i) il existe $L_F > 0$ tel que $\|F(t, x) - F(t, y)\|_X \leq L_F \|x - y\|_X$, $\forall x, y \in X$, p.p. $t \in (0, T)$,
- (ii) il existe $1 \leq p \leq \infty$ tel que $F(\cdot, x) \in L^p(0, T; X)$, $\forall x \in X$.

Alors, pour tout $x_0 \in X$, il existe une fonction unique, $x \in W^{1,p}(0, T; X)$ tel que

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= F(t, x(t)) \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \\ x(0) &= x_0. \end{aligned}$$

Le Théorème B.19 sera utilisé pour prouver la solvabilité unique du problème intermédiaire impliquant le champ d'adhésion.

B.3 Espaces fonctionnels

On introduit dans cette section des espaces du type Sobolev utilisés en mécanique et associés aux opérateurs divergence et déformation. On présente de plus leurs principales propriétés, notamment les théorèmes de trace. On adopte ici la convention de l'indice muet et on précise aussi que toutes les notations ainsi que les espaces fonctionnels utilisés dans cette thèse sont introduits dans cette section. En outre, dans la rédaction de cette section nous avons suivi [15, 24]. Pour plus de détails sur les espaces de Sobolev et les espaces de distributions, on renvoi par exemple à [5, 26, 52].

B.3.1 Espaces de distributions

Soit Ω^1, Ω^2 des ouverts bornés de $\mathbb{R}^d$ de frontières Γ^1, Γ^2 respectivement. Nous supposons que Ω^1, Ω^2 sont des domaines lipschitziens. On note par $\mathcal{D}(\Omega^\ell)$, ($\ell = 1, 2$) l'espace des fonctions réelles définie sur Ω^ℓ , indéfiniment dérivables et à support compact inclus dans Ω^ℓ , et note par $\mathcal{D}'(\Omega^\ell)$ l'espace des formes linéaire continue sur $\mathcal{D}(\Omega^\ell)$ (on a $\mathcal{D}'(\Omega^\ell)$ l'espace dual de l'espace $\mathcal{D}(\Omega^\ell)$). Le

produit de dualité entre $\mathcal{D}'(\Omega^\ell)$ et $\mathcal{D}(\Omega^\ell)$ sera noté par $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Nous introduisons également les espaces suivantes :

$$D^\ell = \left\{ \phi^\ell = (\phi_i^\ell)_{i=1,d} / \phi_i^\ell \in \mathcal{D}(\Omega^\ell) \quad i = \overline{1,d} \right\} = \mathcal{D}(\Omega^\ell)^d \quad (\text{B.23})$$

$$D = \left\{ \phi = (\phi^1, \phi^2) / \phi^\ell \in D^\ell ; \ell = 1, 2 \right\} = D^1 \times D^2 \quad (\text{B.24})$$

$$\mathcal{D}^\ell = \left\{ \theta^\ell = (\theta_{ij}^\ell)_{i,j=1,d} / \theta_{ij}^\ell = \theta_{ji}^\ell \in \mathcal{D}(\Omega^\ell) \quad i, j = \overline{1,d} \right\} = \mathcal{D}(\Omega^\ell)_S^{d \times d} \quad (\text{B.25})$$

$$\mathcal{D} = \left\{ \theta = (\theta^1, \theta^2) / \theta^\ell \in \mathcal{D}^\ell ; \ell = 1, 2 \right\} = \mathcal{D}^1 \times \mathcal{D}^2 \quad (\text{B.26})$$

$$D'^\ell = \left\{ \psi^\ell = (\psi_i^\ell)_{i=1,d} / \psi_i^\ell \in \mathcal{D}'(\Omega^\ell) ; i = \overline{1,d} \right\} = \mathcal{D}'(\Omega^\ell)^d \quad (\text{B.27})$$

$$D' = \left\{ \psi = (\psi^1, \psi^2) / \psi^\ell \in D'^\ell \quad \ell = 1, 2 \right\} = D'^1 \times D'^2 \quad (\text{B.28})$$

$$\mathcal{D}'^\ell = \left\{ \varepsilon^\ell = (\varepsilon_{ij}^\ell)_{i,j=1,d} / \varepsilon_{ij}^\ell = \varepsilon_{ji}^\ell \in \mathcal{D}'(\Omega^\ell) ; i, j = \overline{1,d} \right\} = \mathcal{D}'(\Omega^\ell)_S^{d \times d} \quad (\text{B.29})$$

$$\mathcal{D}' = \left\{ \varepsilon = (\varepsilon^1, \varepsilon^2) / \varepsilon^\ell \in \mathcal{D}'^\ell ; \ell = 1, 2 \right\} = \mathcal{D}'^1 \times \mathcal{D}'^2. \quad (\text{B.30})$$

Les dualités entre les espaces D' et D , $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}$ seront notées respectivement par $\langle \cdot, \cdot \rangle_{D', D}$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}$. Plus précisément on a :

$$\langle \psi, \phi \rangle_{D', D} = \sum_{\ell=1}^2 \sum_{i=1}^d \int_{\Omega^\ell} \psi_i^\ell \phi_i^\ell d\Omega^\ell \quad (\text{B.31})$$

$$\langle \varepsilon, \theta \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \sum_{\ell=1}^2 \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega^\ell} \varepsilon_{ij}^\ell \theta_{ij}^\ell d\Omega^\ell. \quad (\text{B.32})$$

Considérons maintenant l'opérateur défini pour les fonctions et pour les distributions $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = \overline{1,d}$. On a

$$\langle \partial_i \theta^\ell, \psi^\ell \rangle = - \langle \theta^\ell, \partial_i \psi^\ell \rangle ; \forall \theta^\ell \in \mathcal{D}'(\Omega^\ell) \quad \forall \psi^\ell \in \mathcal{D}(\Omega^\ell) \quad (\text{B.33})$$

généralement pour multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$ de dérivation, on a

$$\langle D^\alpha \theta^\ell, \psi^\ell \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle \theta^\ell, D^\alpha \psi^\ell \rangle \quad \forall \theta^\ell \in \mathcal{D}'(\Omega^\ell) \quad \forall \psi^\ell \in \mathcal{D}(\Omega^\ell) \quad (\text{B.34})$$

avec la notation $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$.

On introduit également les opérateurs différentiels du premier ordre définis par :

$$\begin{cases} \epsilon : D^\ell \longrightarrow \mathcal{D}^\ell \\ u^\ell \mapsto (\epsilon_{ij}(u^\ell))_{i,j=\overline{1,d}} \end{cases} \quad (\text{B.35})$$

$$\text{où } \epsilon_{ij}(u^\ell) = \frac{1}{2} \left(\partial_i u_j^\ell + \partial_j u_i^\ell \right)$$

$$\begin{cases} \text{Div} : \mathcal{D}^\ell \longrightarrow D^\ell \\ \sigma^\ell \mapsto \text{Div} \sigma^\ell = \left(\partial_i \sigma_{ij}^\ell \right)_{i=\overline{1,d}} \end{cases} \quad (\text{B.36})$$

on va utiliser les mêmes notations pour les opérateurs correspondants définis sur les espaces des distributions :

$$\begin{cases} \epsilon : D'^\ell \longrightarrow \mathcal{D}'^\ell \\ T^\ell \mapsto (\epsilon_{ij}(T^\ell))_{i,j=\overline{1,d}} \end{cases} \quad (\text{B.37})$$

$$\text{où } \epsilon_{ij}(T^\ell) = \frac{1}{2} \left(\partial_i T_j^\ell + \partial_j T_i^\ell \right)$$

$$\begin{cases} \text{Div} : \mathcal{D}'^\ell \longrightarrow D'^\ell \\ \Theta^\ell \mapsto \text{Div} \Theta^\ell = \left(\partial_i \Theta_{ij}^\ell \right)_{i=\overline{1,d}} \end{cases} \quad (\text{B.38})$$

En utilisant (B.33), on obtient facilement

$$\left\langle \epsilon(\psi^\ell), \theta^\ell \right\rangle_{\mathcal{D}'^\ell, \mathcal{D}^\ell} = - \left\langle \psi^\ell, \text{Div} \theta^\ell \right\rangle_{\mathcal{D}'^\ell, \mathcal{D}^\ell} \quad \forall \psi^\ell \in D'^\ell \quad \forall \theta^\ell \in \mathcal{D}^\ell \quad (\text{B.39})$$

$$\left\langle \text{Div}(\sigma^\ell), \phi^\ell \right\rangle_{\mathcal{D}'^\ell, \mathcal{D}^\ell} = - \left\langle \sigma^\ell, \epsilon(\phi^\ell) \right\rangle_{\mathcal{D}'^\ell, \mathcal{D}^\ell} \quad \forall \sigma^\ell \in \mathcal{D}'^\ell \quad \forall \phi^\ell \in D^\ell. \quad (\text{B.40})$$

L'opérateur ϵ défini par (B.35) pour les fonctions et par (B.37) pour les distributions s'appelle opérateur *déformation*, l'opérateur Div défini par (B.36) pour les fonctions et par (B.38) pour les distributions s'appelle opérateur *divergence*.

Lemme B.6: Soit Ω^ℓ est un ouvert borné dans $\mathbb{R}^d$, et soit $\psi^\ell \in \mathcal{D}'(\Omega^\ell)$ tel que :

$$\int_{\Omega^\ell} \psi^\ell \phi^\ell d\Omega^\ell = 0 \quad \forall \phi^\ell \in \mathcal{D}(\Omega^\ell)$$

on a $\psi^\ell = 0$ p.p sur Ω^ℓ .

B.3.2 Espaces de Sobolev

Dans tout ce paragraphe, Soient Ω^ℓ un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ de frontière Γ^ℓ , nous supposons que Ω^ℓ est un domaine *lipschitziens*, c'est à dire Γ^ℓ est représentable localement comme le graphe d'une fonction lipschitzienne sur un ouvert de $\mathbb{R}^{d-1}$, Ω^ℓ étant situé localement d'un seul côté de Γ^ℓ (pour la définition explicite d'un domaine lipschitzien voir par exemple [77]). On va utiliser les espaces suivant :

1. l'espace $L^2(\Omega^\ell)$:

On désigne par $L^2(\Omega^\ell)$ l'espace des (classes de) fonctions réelles u^ℓ de carré sommable sur Ω^ℓ , i.e, mesurables et telles que

$$\|u^\ell\|_{L^2(\Omega^\ell)} = \left(\int_{\Omega^\ell} |u^\ell|^2 d\Omega^\ell \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty. \quad (\text{B.41})$$

On posera souvent $L^2(\Omega^\ell) = H^0(\Omega^\ell)$.

Comme il est classique, $L^2(\Omega^\ell)$ est un espace de *Hilbert* pour le produit scalaire

$$\langle u^\ell, v^\ell \rangle_{L^2(\Omega^\ell)} = \int_{\Omega^\ell} u^\ell \cdot v^\ell d\Omega^\ell. \quad (\text{B.42})$$

2. l'espace $H^m(\Omega^\ell)$ où $m \in \mathbb{N}$: En bref, l'espace de *Sobolev* $H^m(\Omega^\ell)$ d'ordre m sur Ω^ℓ est défini par

$$H^m(\Omega^\ell) = \{u^\ell \in L^2(\Omega^\ell) / D^\alpha u^\ell \in L^2(\Omega^\ell) \quad \forall \alpha, |\alpha| \leq m\}. \quad (\text{B.43})$$

Où si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, on a $D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}$,

les dérivées $D^\alpha u^\ell$ sont prises au sens des distributions sur Ω^ℓ . On munit $H^m(\Omega^\ell)$ de la norme

$$\|u^\ell\|_{H^m(\Omega^\ell)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u^\ell\|_{L^2(\Omega^\ell)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.44})$$

et l'on a le

Théorème B.20: L'espace $H^m(\Omega^\ell)$ est un espace de *Hilbert*, pour le produit scalaire étant donné par :

$$\langle u^\ell, v^\ell \rangle_{H^m(\Omega^\ell)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega^\ell} D^\alpha u^\ell D^\alpha v^\ell d\Omega^\ell. \quad (\text{B.45})$$

Et (B.44) la norme associée.

Remarque B.3: L'application suivante :

$$\begin{cases} |\cdot|_{H^m(\Omega^\ell)} : H^m(\Omega^\ell) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ u^\ell \mapsto |u^\ell|_{H^m(\Omega^\ell)} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u^\ell\|_{L^2(\Omega^\ell)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (\text{B.46})$$

Est un semi-norme sur l'espace $H^m(\Omega^\ell)$.

Théorème B.21: L'espace $\mathcal{D}(\overline{\Omega}^\ell)$ est dense dans $H^m(\Omega^\ell)$.

Où

$$\mathcal{D}(\overline{\Omega}^\ell) = \{u^\ell|_{\Omega^\ell} / u^\ell \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)\}. \quad (\text{B.47})$$

Théorème B.22: Posons que la domaine Ω^ℓ est un ouvert convexe dans $\mathbb{R}^d$, et soit $v^\ell \in H^{m+1}(\Omega^\ell)$ tel que : $D^\alpha v^\ell = 0$ sur Ω^ℓ pour tout multi-indice α tel que $|\alpha| = m+1$, on a $v^\ell \in P_m(\Omega^\ell)$.

3. **l'espace** $H^s(\Omega^\ell)$ où $s > 0$: Soit maintenant $s = m + \theta$ avec $m \in \mathbb{N}$ et $0 < \theta < 1$ l'espace de Sobolev $H^s(\Omega^\ell)$ d'ordre s sur Ω^ℓ est défini par :

$$H^s(\Omega^\ell) = \left\{ u^\ell \in H^m(\Omega^\ell) / \iint_{\Omega^\ell \times \Omega^\ell} \frac{|D^\alpha u^\ell(x) - D^\alpha u^\ell(y)|^2}{\|x - y\|^{d+2\theta}} dx dy < +\infty \quad \forall \alpha, |\alpha| \leq m \right\}. \quad (\text{B.48})$$

Théorème B.23: L'espace $H^s(\Omega^\ell)$ est un espace de Hilbert, pour le produit scalaire suivant :

$$\begin{aligned} \langle u^\ell, v^\ell \rangle_{H^s(\Omega^\ell)} &= \langle u^\ell, v^\ell \rangle_{H^m(\Omega^\ell)} + \\ &\sum_{|\alpha|=m} \iint_{\Omega^\ell \times \Omega^\ell} \frac{(D^\alpha u^\ell(x) - D^\alpha u^\ell(y))(D^\alpha v^\ell(x) - D^\alpha v^\ell(y))}{\|x - y\|^{d+2\theta}} dx dy. \end{aligned} \quad (\text{B.49})$$

La norme associée est :

$$\|u^\ell\|_{H^s(\Omega^\ell)} = \left(\|u^\ell\|_{H^m(\Omega^\ell)}^2 + \sum_{|\alpha|=m} \iint_{\Omega^\ell \times \Omega^\ell} \frac{|D^\alpha u^\ell(x) - D^\alpha u^\ell(y)|^2}{\|x - y\|^{d+2\theta}} dx dy \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{B.50})$$

Remarque B.4: L'application suivante :

$$\begin{cases} |\cdot|_{H^s(\Omega^\ell)} : H^s(\Omega^\ell) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ |u^\ell|_{H^s(\Omega^\ell)} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \iint_{\Omega^\ell \times \Omega^\ell} \frac{|D^\alpha u^\ell(x) - D^\alpha u^\ell(y)|^2}{\|x - y\|^{d+2\theta}} dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (\text{B.51})$$

est un semi-norme sur l'espace $H^s(\Omega^\ell)$.

Théorème B.24: L'espace $\mathcal{D}(\overline{\Omega}^\ell)$ dense de $H^s(\Omega^\ell)$.

4. **l'espace** $H_0^s(\Omega^\ell)$:

L'espace de Sobolev $H_0^s(\Omega^\ell)$ est l'adhérence de l'espace $\mathcal{D}(\Omega^\ell)$ dans l'espace $H^s(\Omega^\ell)$.

Théorème B.25: Soit $s > \frac{1}{2}$, alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

$$u^\ell \in H_0^s(\Omega^\ell) \quad (\text{B.52})$$

$$\begin{cases} u^\ell \in H^s(\Omega^\ell) \\ \frac{\partial_i u^\ell}{\partial \eta_i} = 0 \quad 0 \leq i \leq s - \frac{1}{2} \end{cases} \quad (\text{B.53})$$

où $\frac{\partial_i u^\ell}{\partial \eta_i}$ = dérivée normale d'ordre i sur Γ^ℓ -orientée vers l'intérieur de Ω^ℓ . On a :

$$H_0^s(\Omega^\ell) = \left\{ u^\ell \in H^s(\Omega^\ell) / \frac{\partial_i u^\ell}{\partial \eta_i} = 0, \quad 0 \leq i \leq s - \frac{1}{2} \right\}. \quad (\text{B.54})$$

Théorème B.26: L'application $|\cdot|_{H^s(\Omega^\ell)}$ définie par (B.51) est une norme sur l'espace $H_0^s(\Omega^\ell)$ équivalente la norme $\|\cdot\|_{H^s(\Omega^\ell)}$.

Théorème B.27: Si $s \leq \frac{1}{2}$, on a $H_0^s(\Omega^\ell) = H^s(\Omega^\ell)$.

5. **l'espace $H^{-s}(\Omega^\ell)$** où $s > 0$: L'espace de Sobolev $H^{-s}(\Omega^\ell)$ est un dual de l'espace $H_0^s(\Omega^\ell)$. On a la définition :

$$H^{-s}(\Omega^\ell) = \left(H_0^s(\Omega^\ell) \right)' . \quad (\text{B.55})$$

On munit $H^{-s}(\Omega^\ell)$ de la norme dualité :

$$\|u^\ell\|_{H^{-s}(\Omega^\ell)} = \sup_{\psi \in H_0^s(\Omega^\ell)} \frac{\langle u^\ell, \psi^\ell \rangle}{\|\psi\|_{H^s(\Omega^\ell)}} . \quad (\text{B.56})$$

Remarque B.5: Puisque $\mathcal{D}(\Omega^\ell)$ est dense dans $H_0^s(\Omega^\ell)$ (par définition) , on a

$$H^{-s}(\Omega^\ell) \subset \mathcal{D}'(\Omega^\ell). \quad (\text{B.57})$$

Théorème B.28 (Théorème du d'injection continue de *Sobolev*) :

1. si $s \leq r$: on a $H^r(\Omega^\ell) \hookrightarrow H^s(\Omega^\ell)$;
c'est à dire qu'il existe un réel $C > 0$ tel que :

$$\|u^\ell\|_{H^s(\Omega^\ell)} \leq C \|u^\ell\|_{H^r(\Omega^\ell)} \quad \forall u^\ell \in H^r(\Omega^\ell) \quad (\text{B.58})$$

2. si $s > \frac{d}{2}$; on a $H^{s+j}(\Omega^\ell) \hookrightarrow C_b^j(\overline{\Omega}^\ell) \quad \forall j \in \mathbb{N}$;
c'est à dire qu'il existe un réel $C > 0$ tel que :

$$\|u^\ell\|_{C_b^j(\overline{\Omega}^\ell)} \leq C \|u^\ell\|_{H^{s+j}(\Omega^\ell)} \quad \forall u^\ell \in H^{s+j}(\Omega^\ell). \quad (\text{B.59})$$

Théorème B.29 (Théorème du d'injection compact de *Rellich*) :

1. si $s \leq r$; on a $H^r(\Omega^\ell) \subset\subset H^s(\Omega^\ell)$;
c'est à dire toute suite bornée de $H^r(\Omega^\ell)$ admet une sous-suite convergente dans $H^s(\Omega^\ell)$.
2. si $s > \frac{d}{2}$; on a $H^{s+j}(\Omega^\ell) \subset\subset C_b^j(\overline{\Omega}^\ell) \quad \forall j \in \mathbb{N}$;
c'est à dire toute suite bornée de $H^s(\Omega^\ell)$ admet une sous-suite convergente dans $C_b^j(\overline{\Omega}^\ell)$.

6. **Les espaces liés à l'opérateur de trace sur $H^1(\Omega^\ell)$** ; $\left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3), H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3) \right)$: On suppose que Γ^ℓ est une frontière de Ω^ℓ

Théorème B.30: (Théorème de trace) Il existe une application linéaire et continue γ^ℓ définie sur l'espace $H^1(\Omega^\ell)$ à valeurs dans l'espace $L^2(\Gamma^\ell)$ telle que :

- (a) $\forall v^\ell \in C^1(\overline{\Omega}^\ell)$ on ait : $\gamma^\ell v^\ell = v^\ell|_{\Gamma^\ell}$
(b) $\text{Ker} \gamma^\ell = H_0^1(\Omega^\ell)$
(c) l'application γ^ℓ n'est pas surjective (en général), mais son image noté par $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$, est un sous espace dense dans $L^2(\Gamma^\ell)$.

Où

$$C^1(\overline{\Omega}^\ell) = \left\{ \psi^\ell \Big|_{\Omega^\ell} \mid \psi^\ell \in C^1(\mathbb{R}^d) \right\}. \quad (\text{B.60})$$

L'application γ^ℓ s'appelle application de trace sur $H^1(\Omega^\ell)$, on a :

" γ^ℓ est définie comme le prolongement par densité de l'application $v^\ell \mapsto v^\ell \Big|_{\Gamma^\ell}$ définie pour $v^\ell \in C^1(\overline{\Omega}^\ell)$ ".

$$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell) = \left\{ \gamma^\ell v^\ell \mid v^\ell \in H^1(\Omega^\ell) \right\} = \gamma^\ell \left(H^1(\Omega^\ell) \right) \quad (\text{B.61})$$

$$\gamma^\ell : H^1(\Omega^\ell) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell) \text{ est une application linéaire continue et surjective} \quad (\text{B.62})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe une application linéaire et continue} \\ R^\ell : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell) \rightarrow H^1(\Omega^\ell) \text{ telle que } \gamma^\ell (R^\ell \mu^\ell) = \mu^\ell, \forall \mu^\ell \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell) \end{array} \right\} \quad (\text{B.63})$$

$$H_0^1(\Omega^\ell) = \left\{ u^\ell \in H^1(\Omega^\ell) \mid \gamma^\ell u^\ell = 0 \right\}. \quad (\text{B.64})$$

C'est à dire $H_0^1(\Omega^\ell)$ le noyau de l'opérateur de trace γ^ℓ .

De plus, on définit les espaces $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3)$ $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3)$ comme suivant :

$$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3) = \left\{ \mu^\ell \Big|_{\Gamma_3} \mid \mu^\ell \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell); \ell = 1, 2 \right\} \quad (\text{B.65})$$

$$H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3) = \left\{ \mu^\ell \Big|_{\Gamma_3} \mid \mu^\ell \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell) \text{ et } \mu^\ell = 0 \text{ sur } \Gamma^\ell - \Gamma_3, \ell = 1, 2 \right\}. \quad (\text{B.66})$$

B.3.3 Espaces H et $\mathcal{H}$

Soient Ω^1, Ω^2 deux ouvert borné lipschitziens de $\mathbb{R}^d$ de frontière Γ^1, Γ^2 respectivement, On va utiliser aussi les espaces suivant :

1. **Les espaces H^ℓ et $\mathcal{H}^\ell$** : On utilise les notations :

$$H^\ell = \left\{ u^\ell = (u_i^\ell)_{1 \leq i \leq d} \mid u_i^\ell \in L^2(\Omega^\ell) \quad \forall i = \overline{1, d} \right\} = L^2(\Omega^\ell)^d \quad (\text{B.67})$$

$$\mathcal{H}^\ell = \left\{ \sigma^\ell = (\sigma_{ij}^\ell)_{1 \leq i, j \leq d} \mid \sigma_{ij}^\ell \in L^2(\Omega^\ell) \quad \forall i, j = \overline{1, d} \right\} = L^2(\Omega^\ell)^{d \times d}. \quad (\text{B.68})$$

Les espaces H^ℓ et $\mathcal{H}^\ell$ sont des espaces de Hilbert réels munis des produits scalaires canoniques :

$$\langle u^\ell, v^\ell \rangle_{H^\ell} = \sum_{i=1}^d \int_{\Omega^\ell} u_i^\ell \cdot v_i^\ell d\Omega^\ell \quad \forall u^\ell, v^\ell \in H^\ell \quad (\text{B.69})$$

$$\langle \sigma^\ell, \tau^\ell \rangle_{\mathcal{H}^\ell} = \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega^\ell} \sigma_{ij}^\ell \cdot \tau_{ij}^\ell d\Omega^\ell \quad \forall \sigma^\ell, \tau^\ell \in \mathcal{H}^\ell. \quad (\text{B.70})$$

Les normes associées à ces produits scalaires seront notées respectivement par $\|\cdot\|_{H^\ell}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^\ell}$ définie par :

$$\|u^\ell\|_{H^\ell} = \left(\sum_{i=1}^d \int_{\Omega^\ell} |u_i^\ell|^2 d\Omega^\ell \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.71})$$

$$\|\sigma^\ell\|_{\mathcal{H}^\ell} = \left(\sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega^\ell} |\sigma_{ij}^\ell|^2 d\Omega^\ell \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{B.72})$$

2. **Les espaces H et $\mathcal{H}$** : On utilise aussi les notations :

$$H = \left\{ u = (u^1, u^2) / u^\ell \in H^\ell ; \ell = 1, 2 \right\} = H^1 \times H^2 \quad (\text{B.73})$$

$$\mathcal{H} = \left\{ \sigma = (\sigma^1, \sigma^2) / \sigma^\ell \in \mathcal{H}^\ell ; \ell = 1, 2 \right\} = \mathcal{H}^1 \times \mathcal{H}^2. \quad (\text{B.74})$$

Les espaces H et $\mathcal{H}$ sont des espaces de *Hilbert* réels munis des produits scalaires canoniques :

$$\langle u, v \rangle_{H^\ell} = \sum_{\ell=1}^2 \langle u^\ell, v^\ell \rangle_{H^\ell} = \sum_{\ell=1}^2 \sum_{i=1}^d \int_{\Omega^\ell} u_i^\ell v_i^\ell d\Omega^\ell \quad (\text{B.75})$$

$$\langle \sigma, \tau \rangle_{\mathcal{H}^\ell} = \sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \tau^\ell \rangle_{\mathcal{H}^\ell} = \sum_{\ell=1}^2 \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega^\ell} \sigma_{ij}^\ell \tau_{ij}^\ell d\Omega^\ell. \quad (\text{B.76})$$

Les normes associées à ces produits scalaires seront notées respectivement par $\|\cdot\|_H$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ définie par :

$$\|u\|_H = \left(\sum_{\ell=1}^2 \|u^\ell\|_{H^\ell}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{\ell=1}^2 \sum_{i=1}^d \int_{\Omega^\ell} |u_i^\ell|^2 d\Omega^\ell \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.77})$$

$$\|\sigma\|_{\mathcal{H}} = \left(\sum_{\ell=1}^2 \|\sigma^\ell\|_{\mathcal{H}^\ell}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{\ell=1}^2 \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega^\ell} |\sigma_{ij}^\ell|^2 d\Omega^\ell \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{B.78})$$

3. **Les espaces H_1^ℓ et $\mathcal{H}_1^\ell$** : On utilise les notations :

$$H_1^\ell = \left\{ u^\ell = (u_i^\ell)_{1 \leq i \leq d} / u_i^\ell \in H^1(\Omega^\ell) ; \forall i = \overline{1, d} \right\} = H^1(\Omega^\ell)^d \quad (\text{B.79})$$

$$\mathcal{H}_1^\ell = \left\{ \sigma^\ell = (\sigma_{ij}^\ell)_{1 \leq i, j \leq d} / \sigma_{ij}^\ell = \sigma_{ji}^\ell \in H^1(\Omega^\ell) \quad \forall i, j = \overline{1, d} \right\} = H^1(\Omega^\ell)_{s \times d}^{d \times d}. \quad (\text{B.80})$$

Les espaces H_1^ℓ et $\mathcal{H}_1^\ell$ sont des espaces de *Hilbert* réels munis des produits scalaires canoniques :

$$\langle u^\ell, v^\ell \rangle_{H_1^\ell} = \sum_{|\alpha| \leq 1} \int_{\Omega^\ell} D^\alpha u_i^\ell \cdot D^\alpha v_i^\ell d\Omega^\ell \quad \forall u^\ell, v^\ell \in H_1^\ell \quad (\text{B.81})$$

$$\langle \sigma^\ell, \tau^\ell \rangle_{\mathcal{H}_1^\ell} = \sum_{|\alpha| \leq 1} \int_{\Omega^\ell} D^\alpha \sigma_{ij}^\ell \cdot D^\alpha \tau_{ij}^\ell d\Omega^\ell \quad \forall \sigma^\ell, \tau^\ell \in \mathcal{H}_1^\ell. \quad (\text{B.82})$$

Les normes associées à ces produits scalaires seront notées respectivement par $\|\cdot\|_{H_1^\ell}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_1^\ell}$ définie par :

$$\|u^\ell\|_{H_1^\ell} = \left(\sum_{|\alpha| \leq 1} \int_{\Omega^\ell} |D^\alpha u_i^\ell|^2 d\Omega^\ell \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.83})$$

$$\|\sigma^\ell\|_{\mathcal{H}_1^\ell} = \left(\sum_{|\alpha| \leq 1} \int_{\Omega^\ell} |D^\alpha \sigma_{ij}^\ell|^2 d\Omega^\ell \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{B.84})$$

4. **Les espaces H_1 et $\mathcal{H}_1$** : On utilise aussi les notations :

$$H_1 = \left\{ u = (u^1, u^2) \mid u^\ell \in H_1^\ell \ \ell = 1, 2 \right\} = H_1^1 \times H_1^2 \quad (\text{B.85})$$

$$\mathcal{H}_1 = \left\{ \sigma = (\sigma^1, \sigma^2) \mid \sigma^\ell \in \mathcal{H}_1^\ell \ \ell = 1, 2 \right\} = \mathcal{H}_1^1 \times \mathcal{H}_1^2. \quad (\text{B.86})$$

Les espaces H_1 et $\mathcal{H}_1$ sont des espaces de *Hilbert* réels munis des produits scalaires canoniques :

$$\langle u, v \rangle_{H_1} = \sum_{\ell=1}^2 \langle u^\ell, v^\ell \rangle_{H_1^\ell} = \sum_{\ell=1}^2 \sum_{|\alpha| \leq 1} \sum_{i=1}^d \int_{\Omega^\ell} D^\alpha u_i^\ell \cdot D^\alpha v_i^\ell d\Omega^\ell \quad (\text{B.87})$$

$$\langle \sigma, \tau \rangle_{\mathcal{H}_1} = \sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \tau^\ell \rangle_{\mathcal{H}_1^\ell} = \sum_{\ell=1}^2 \sum_{|\alpha| \leq 1} \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega^\ell} D^\alpha \sigma_{ij}^\ell \cdot D^\alpha \tau_{ij}^\ell d\Omega^\ell. \quad (\text{B.88})$$

Les normes associées à ces produits scalaires seront notées respectivement par $\|\cdot\|_{H_1}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_1}$ définie par :

$$\|u\|_{H_1} = \left(\sum_{\ell=1}^2 \|u^\ell\|_{H_1^\ell}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{\ell=1}^2 \sum_{|\alpha| \leq 1} \sum_{i=1}^d \int_{\Omega^\ell} |D^\alpha u_i^\ell|^2 d\Omega^\ell \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.89})$$

$$\|\sigma\|_{\mathcal{H}} = \left(\sum_{\ell=1}^2 \|\sigma^\ell\|_{\mathcal{H}_1^\ell}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{\ell=1}^2 \sum_{|\alpha| \leq 1} \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega^\ell} |D^\alpha \sigma_{ij}^\ell|^2 d\Omega^\ell \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{B.90})$$

5. **Les espaces liés à l'opérateur déformation** : Pour l'opérateur déformation défini par (B.37), il est naturel d'introduire l'espace

$$\mathbb{H}_1^\ell = \left\{ u^\ell \in H^\ell \mid \epsilon(u^\ell) \in \mathcal{H}^\ell \right\}. \quad (\text{B.91})$$

Sur $\mathbb{H}_1^\ell$ on considère le produit scalaire :

$$\langle u^\ell, v^\ell \rangle_{\mathbb{H}_1^\ell} = \langle u^\ell, v^\ell \rangle_{H^\ell} + \langle \epsilon(u^\ell), \epsilon(v^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell}. \quad (\text{B.92})$$

Et la norme associée définie par :

$$\|u^\ell\|_{\mathbb{H}_1^\ell} = \left(\|u^\ell\|_{H^\ell}^2 + \|\epsilon(u^\ell)\|_{\mathcal{H}^\ell}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{B.93})$$

On obtient ainsi :

$$\|u^\ell\|_{H^\ell} \leq \|u^\ell\|_{\mathbb{H}_1^\ell} \quad \forall u^\ell \in \mathbb{H}_1^\ell \quad (\text{B.94})$$

$$\|\epsilon(u^\ell)\|_{\mathcal{H}^\ell} \leq \|u^\ell\|_{\mathbb{H}_1^\ell} \quad \forall u^\ell \in \mathbb{H}_1^\ell. \quad (\text{B.95})$$

Théorème B.31: On a l'égalité algébrique $\mathbb{H}_1^\ell = H_1^\ell$ et (B.83), (B.93) sont des normes équivalentes. On a

$$H_1^\ell = \left\{ u^\ell \in H^\ell \mid \epsilon(u^\ell) \in \mathcal{H}^\ell \right\}. \quad (\text{B.96})$$

De plus, il existe une constante $C > 0$ qui dépend en général de Ω^ℓ , telle que :

$$\|u^\ell\|_{H^\ell}^2 + \|\epsilon(u^\ell)\|_{\mathcal{H}^\ell}^2 \geq C \|u^\ell\|_{H_1^\ell}^2 \quad \forall u^\ell \in H_1^\ell. \quad (\text{B.97})$$

Les inégalités (B.94), (B.95) donne implique que l'opérateur d'injection $H_1^\ell \subset H^\ell$ et l'opérateur déformation $\epsilon : H_1^\ell \rightarrow \mathcal{H}^\ell$ sont des opérateurs continus.

De même, compte tenu de l'identification de H_1^ℓ et $\mathcal{H}_1^\ell$ à deux sous-espaces de D^ℓ et $\mathcal{D}^\ell$:

$$\langle \epsilon(u^\ell), \phi^\ell \rangle_{\mathcal{D}^\ell \times \mathcal{D}^\ell} + \langle u^\ell, \text{Div} \phi^\ell \rangle_{H^\ell} = 0 \quad \forall u^\ell \in H^\ell, \forall \phi^\ell \in \mathcal{D}^\ell \quad (\text{B.98})$$

$$\langle \epsilon(u^\ell), \phi^\ell \rangle_{\mathcal{H}^\ell} + \langle u^\ell, \text{Div} \phi^\ell \rangle_{H^\ell} = 0 \quad \forall u^\ell \in H^\ell, \forall \phi^\ell \in \mathcal{D}^\ell. \quad (\text{B.99})$$

Décrivait maintenant le noyau de l'opérateur déformation $\epsilon : H_1^\ell \rightarrow \mathcal{H}^\ell$. Pour cela, soit $\mathcal{R}^\ell$ le sous-ensemble de H_1^ℓ défini par :

$$\mathcal{R}^\ell = \left\{ u^\ell \in H_1^\ell / \exists a^\ell \in \mathbb{R}^d \text{ et } B^\ell \in \mathbb{S}^d, B^T = -B ; u^\ell(x) = a^\ell + B^\ell x \right\} \quad (\text{B.100})$$

où $\mathbb{S}^d$ ensemble des matrices carrées d'ordre d et B^T la transposée de matrice B . On appelle $\mathcal{R}^\ell$ l'ensemble des déplacements rigides sur Ω^ℓ .

Théorème B.32: Soit $u^\ell \in H_1^\ell$. Alors $\epsilon(u^\ell) = 0$ si et seulement si $u^\ell \in \mathcal{R}^\ell$, i.e

$$\mathcal{R}^\ell = \left\{ u^\ell \in H_1^\ell / \epsilon(u^\ell) = 0 \right\}. \quad (\text{B.101})$$

Théorème B.33 (inégalité de Korn) : Soit $\mathcal{V}^\ell$ un sous-espace fermé de H_1^ℓ tel que :

$$\mathcal{V}^\ell \cap \mathcal{R}^\ell = \{0\}, \quad (\text{B.102})$$

alors l'inégalité de Korn est vérifiée sur $\mathcal{V}^\ell$, c'est à dire existe $C > 0$ ne dépendant que Ω^ℓ et $\mathcal{V}^\ell$ tel que

$$\|\epsilon(u^\ell)\|_{\mathcal{H}^\ell} \geq C \|u^\ell\|_{H_1^\ell} \quad \forall u^\ell \in \mathcal{V}^\ell. \quad (\text{B.103})$$

Pour plus de détails sur ce théorème on peut renvoyer le lecteur par exemple à [65, p.79].

Exemple : Tout au long de la thèse, dans les parties mécaniques, la frontière Γ^ℓ est subdivisée en trois parties mesurables disjointes Γ_1^ℓ , Γ_2^ℓ , et Γ_3^ℓ , tels que $\text{mes}(\Gamma_1^\ell) > 0$. Nous aurons constamment besoin de l'espace des déplacements admissibles V^ℓ défini par

$$V = \left\{ v^\ell \in H_1^\ell / v^\ell = 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_1^\ell \right\}. \quad (\text{B.104})$$

Puisque $\text{mes}(\Gamma_1^\ell) > 0$, il vient $V \cap \mathcal{R}^\ell = \{0\}$, d'où l'inégalité de Korn s'applique sur V^ℓ ; alors, il existe une constante $C_K > 0$ dépendant uniquement de Ω^ℓ et Γ_1^ℓ telle que

$$\|\epsilon(v^\ell)\|_{\mathcal{H}^\ell} \geq C_K \|v^\ell\|_{H_1^\ell} \quad \forall v^\ell \in V^\ell. \quad (\text{B.105})$$

Nous considérons sur l'espace V^ℓ le produit scalaire donné par :

$$(u, v)_{V^\ell} = (\epsilon(u^\ell), \epsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \quad \forall u^\ell, v^\ell \in V^\ell \quad (\text{B.106})$$

et soit $\|\cdot\|_{V^\ell}$ la norme associée, i.e.

$$\|v^\ell\|_{V^\ell} = \|\epsilon(v^\ell)\|_{\mathcal{H}^\ell} \quad v^\ell \in V^\ell. \quad (\text{B.107})$$

Par l'inégalité de Korn, il vient que $\|\cdot\|_{H_1^\ell}$ et $\|\cdot\|_{V^\ell}$ sont des normes équivalentes sur V^ℓ et ainsi $(V^\ell, \|\cdot\|_{V^\ell})$ est un espace de Hilbert. En outre, par le Théorème de trace de Sobolev il existe une constante C_0 dépendant uniquement de Ω^ℓ , Γ_1^ℓ et Γ_3 telle que :

$$\|v^\ell\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq C_0 \|v\|_{V^\ell} \quad \forall v^\ell \in V^\ell. \quad (\text{B.108})$$

6. **Les espaces liés à l'opérateur divergence :** Comme dans le cas de l'opérateur déformation, il est naturel d'introduire l'espace H_1^ℓ lié à l'opérateur divergence et défini par :

$$H_1^\ell = \{\sigma^\ell \in \mathcal{H}^\ell / \text{Div}\sigma^\ell \in H^\ell\}. \quad (\text{B.109})$$

Sur lequel on considère le produit scalaire

$$\langle \sigma^\ell, \tau^\ell \rangle_{H_1^\ell} = \langle \sigma^\ell, \tau^\ell \rangle_{\mathcal{H}^\ell} + \langle \text{Div}\sigma^\ell, \text{Div}\tau^\ell \rangle_{H^\ell}. \quad (\text{B.110})$$

Et la norme associée définie par :

$$\|\sigma^\ell\|_{H_1^\ell} = \left(\|\sigma^\ell\|_{\mathcal{H}^\ell}^2 + \|\text{Div}\sigma^\ell\|_{H^\ell}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{B.111})$$

On obtient ainsi

$$\|\sigma^\ell\|_{\mathcal{H}^\ell}^2 \leq \|\sigma^\ell\|_{H_1^\ell}^2 \quad \forall \sigma^\ell \in H_1^\ell \quad (\text{B.112})$$

$$\|\text{Div}\sigma^\ell\|_{H^\ell}^2 \leq \|\sigma^\ell\|_{H_1^\ell}^2 \quad \forall \sigma^\ell \in H_1^\ell. \quad (\text{B.113})$$

Donc l'opérateur d'injection $H_1^\ell \subset \mathcal{H}^\ell$ et l'opérateur divergence $\text{Div} : H_1^\ell \longrightarrow H^\ell$ sont des opérateurs continus. De plus, compte tenu de l'identification de H^ℓ et $\mathcal{H}^\ell$ à des sous-espaces de D'^ℓ et $\mathcal{D}'^\ell$, en utilisant (B.40), il résulte :

$$\langle \text{Div}\sigma^\ell, \phi^\ell \rangle_{H^\ell} + \langle \sigma^\ell, \epsilon(\phi^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} = 0 \quad \forall \sigma^\ell \in \mathcal{H}^\ell, \phi^\ell \in D^\ell \quad (\text{B.114})$$

$$\langle \text{Div}\sigma^\ell, \phi^\ell \rangle_{D'^\ell \times D^\ell} + \langle \sigma^\ell, \epsilon(\phi^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} = 0 \quad \forall \sigma^\ell \in H_1^\ell, \phi^\ell \in D^\ell \quad (\text{B.115})$$

Théorème B.34: L'espace H_1^ℓ muni du produit scalaire (B.110) est un espace de Hilbert.

7. **Les espaces liés à l'opérateur de trace sur H_1^ℓ :** On utilise les notations :

$$H_{\Gamma^\ell} = \{\psi = (\psi_i)_{1 \leq i \leq d} / \psi_i \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell) \quad \forall i = \overline{1, d}\} = \left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell) \right)^d. \quad (\text{B.116})$$

En utilisant propriété d'espace de produit, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe une application linéaire et continue notée encore} \\ \gamma^\ell : H_1^\ell \rightarrow \left(L^2(\Gamma^\ell) \right)^d \text{ telle que } \gamma^\ell u^\ell = u^\ell|_{\Gamma^\ell} \quad \forall u^\ell \in C^1(\overline{\Omega}^\ell)^d. \end{array} \right\} \quad (\text{B.117})$$

L'application γ^ℓ s'appelle application de trace sur H_1^ℓ , on a :

" γ^ℓ est définie comme le prolongement par densité de l'application $v^\ell \mapsto v^\ell|_{\Gamma^\ell}$ définie pour $v^\ell \in \left(C^1(\overline{\Omega}^\ell) \right)^d$ ".

$$H_{\Gamma^\ell} = \{\gamma^\ell v^\ell / v^\ell \in H_1^\ell\} = \gamma^\ell(H_1^\ell) \quad (\text{B.118})$$

$$\gamma^\ell : H_1^\ell \rightarrow H_{\Gamma^\ell} \text{ est une application linéaire continue et surjective} \quad (\text{B.119})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe une application linéaire et continue} \\ \mathcal{R}^\ell : H_{\Gamma^\ell} \rightarrow H_1^\ell \text{ telle que } \gamma^\ell(\mathcal{R}^\ell \psi^\ell) = \psi^\ell, \quad \forall \psi^\ell \in H_{\Gamma^\ell} \end{array} \right\} \quad (\text{B.120})$$

De plus $H_0^1(\Omega^\ell)^d$ le noyau de l'opérateur de trace γ^ℓ , i.e

$$H_0^1(\Omega^\ell)^d = \left\{ u^\ell \in H_1^\ell \mid \gamma^\ell u^\ell = 0 \right\}. \quad (\text{B.121})$$

En notant par $\eta^\ell = (\eta_i^\ell)_{1 \leq i \leq d}$ la normale sortante unitaire à Γ^ℓ , on définit pour tout $\xi^\ell \in H_{\Gamma^\ell}$ les composantes normales et tangentielle de ξ respectivement par :

$$\xi_\eta^\ell = \xi^\ell \cdot \eta^\ell \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell) \quad \text{et} \quad \xi_\tau^\ell = \xi^\ell - \xi_\eta^\ell \eta^\ell \in H_\tau^\ell \quad (\text{B.122})$$

où H_τ^ℓ est un sous-espace fermé de H_{Γ^ℓ} définie par :

$$H_\tau^\ell = \left\{ \xi^\ell \in H_{\Gamma^\ell} \mid \xi_\eta^\ell = 0 \text{ p.p sur } \Gamma^\ell \right\}. \quad (\text{B.123})$$

On peut prouver de plus que l'application $\xi^\ell \mapsto (\xi_\eta^\ell, \xi_\tau^\ell)$ est un isomorphisme de H_{Γ^ℓ} dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell) \times H_\tau^\ell$.

Dans la section suivante on va utiliser le dual de l'espace H_{Γ^ℓ} noté H_{Γ^ℓ}' , on a

$$H_{\Gamma^\ell}' = (H_{\Gamma^\ell})' = \left(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell) \right)^d. \quad (\text{B.124})$$

La norme sur H_{Γ^ℓ}' ainsi que le produit de dualité entre H_{Γ^ℓ}' et H_{Γ^ℓ} seront notés par $\|\cdot\|_{H_{\Gamma^\ell}'}$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_{\Gamma^\ell}' \times H_{\Gamma^\ell}}$.

Pour tout $\mu^\ell \in H_{\Gamma^\ell}'$, les composantes *normale* et *tangentielle* de μ^ℓ sont respectivement définies par :

$$\langle \mu_\eta^\ell, \xi^\ell \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)} = \langle \mu^\ell, \xi^\ell \eta^\ell \rangle_{H_{\Gamma^\ell}' \times H_{\Gamma^\ell}} \quad \forall \xi^\ell \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell) \quad (\text{B.125})$$

$$\langle \mu_\tau^\ell, \xi^\ell \rangle_{H_\tau^{\ell'} \times H_\tau^\ell} = \langle \mu^\ell, \xi^\ell \rangle_{H_{\Gamma^\ell}' \times H_{\Gamma^\ell}} \quad \forall \xi^\ell \in H_\tau^{\ell'}. \quad (\text{B.126})$$

où $H_\tau^{\ell'}$ l'espace dual de l'espace H_τ^ℓ .

L'application $\mu^\ell \mapsto (\mu_\eta^\ell, \mu_\tau^\ell)$ est un isomorphisme de H_{Γ^ℓ}' dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell) \times H_\tau^{\ell'}$ et compte tenu (B.123) et (B.126), il résulte :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall \mu^\ell \in H_{\Gamma^\ell}' & \forall \xi^\ell \in H_{\Gamma^\ell} \\ \langle \mu^\ell, \xi^\ell \rangle_{H_{\Gamma^\ell}' \times H_{\Gamma^\ell}} & = \langle \mu_\eta^\ell, \xi_\eta^\ell \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)} + \langle \mu_\tau^\ell, \xi_\tau^\ell \rangle_{H_\tau^{\ell'} \times H_\tau^\ell} \end{array} \right. \quad (\text{B.127})$$

Pour tout $u^\ell \in H_1^\ell$ l'élément $\gamma^\ell u^\ell$ s'appelle la *trace de* u^ℓ sur Γ^ℓ . Parfois, par simplicité, on va noter $u^\ell|_{\Gamma^\ell}$ ou simplement u^ℓ au lieu de $\gamma^\ell u^\ell$ et les notations u_η^ℓ, u_τ^ℓ au lieu de $(\gamma^\ell u^\ell)_\eta, (\gamma^\ell u^\ell)_\tau$. La continuité de γ^ℓ donnée par (B.118) équivaut à l'existence d'une constante $C > 0$ qui dépend de Ω^ℓ telle que :

$$\|\gamma^\ell u^\ell\|_{H_{\Gamma^\ell}} \leq C \|u^\ell\|_{H_1^\ell} \quad \forall u^\ell \in H_1^\ell \quad (\text{B.128})$$

où par $\|\cdot\|_{H_{\Gamma^\ell}}$ on a noté la norme sur l'espace H_{Γ^ℓ} . L'application $\mathcal{R}^\ell$ définie par (B.120) est *un inverse à droite* pour l'application de trace sur H_1^ℓ . Sa continuité équivaut à l'existence d'une constante $C > 0$ qui également dépend de Ω^ℓ telle que :

$$\|\mathcal{R}^\ell \psi^\ell\|_{H_1^\ell} \leq C \|\psi^\ell\|_{H_{\Gamma^\ell}} \quad \forall \psi^\ell \in H_{\Gamma^\ell}. \quad (\text{B.129})$$

8. **Les espaces liés à l'opérateur de tr  ce sur $\mathcal{H}_1^\ell$** : On peut prouver que l'espace $C^1(\overline{\Omega})_s^{\ell, d \times d}$ est dense dans $\mathcal{H}_1^\ell$, où

$$C^1(\overline{\Omega})_s^{\ell, d \times d} = \left\{ \sigma^\ell = (\sigma_{ij}^\ell) / \sigma_{ij}^\ell = \sigma_{ji}^\ell \in C^1(\overline{\Omega})^\ell \ i, j = \overline{1, d} \right\} \quad (\text{B.130})$$

de plus, pour tout $\sigma^\ell \in C^1(\overline{\Omega})_s^{\ell, d \times d}$ on note par $\sigma^\ell \eta^\ell$ le vecteur de composantes $(\sigma_{ij}^\ell \eta_j^\ell)_{1 \leq i \leq d}$ où $\eta^\ell = (\eta_j^\ell)_{1 \leq j \leq d}$ est la norme extérieure unitaire à Γ^ℓ . comme dans le cas de l'espace H_1^ℓ , on peut définir une *application de trace* sur l'espace $\mathcal{H}_1^\ell$ à l'aide de résultat suivant :

Théorème B.35: Il existe une application *linéaire, continue et surjective* notée encore $\gamma^\ell : \mathcal{H}_1^\ell \rightarrow H'_{\Gamma^\ell}$ telle que :

$$\langle \gamma^\ell \sigma^\ell, \xi^\ell \rangle_{H'_{\Gamma^\ell} \times H_{\Gamma^\ell}} = \int_{\Gamma^\ell} \sigma^\ell \eta^\ell \cdot \xi^\ell d\Gamma^\ell \quad \forall \sigma^\ell \in C^1(\overline{\Omega})_s^{\ell, d \times d} \quad \forall \xi^\ell \in H_{\Gamma^\ell}. \quad (\text{B.131})$$

De plus, il existe une application linéaire et continue $\overline{R}^\ell : H'_{\Gamma^\ell} \rightarrow \mathcal{H}_1^\ell$ telle que :

$$\gamma^\ell \left(\overline{R}^\ell(\psi^\ell) \right) = \psi^\ell \quad \forall \psi^\ell \in H'_{\Gamma^\ell}. \quad (\text{B.132})$$

Compte tenu de ce résultat, on définit pour tout $\sigma^\ell \in \mathcal{H}_1^\ell$, les éléments : $\gamma_\eta^\ell \sigma^\ell \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$ et $\gamma_\tau^\ell \sigma^\ell \in H'_\tau$ par :

$$\gamma_\eta^\ell \sigma^\ell = (\gamma^\ell \sigma^\ell) \cdot \eta^\ell \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell), \quad \gamma_\tau^\ell \sigma^\ell = \gamma^\ell \sigma^\ell - \gamma_\eta^\ell \sigma^\ell \eta^\ell \in H'_\tau. \quad (\text{B.133})$$

L'application $\gamma^\ell : \mathcal{H}_1^\ell \rightarrow H'_{\Gamma^\ell}$ mise en evidence par théorème précédent s'appelle *application de trace sur l'espace $\mathcal{H}_1^\ell$* . Pour tout $\sigma^\ell \in \mathcal{H}_1^\ell$ l'élément $\gamma^\ell \sigma^\ell \in H'_{\Gamma^\ell}$ s'appelle la trace de σ^ℓ sur Γ^ℓ . Afin de simplifier les notations nous utiliseront dans la suite la notation $\sigma^\ell \eta^\ell$ au lieu de $\gamma^\ell \sigma^\ell$, donc devient la double égalité suivante :

$$\begin{cases} \langle \sigma^\ell \eta^\ell, \gamma^\ell u^\ell \rangle_{H'_{\Gamma^\ell} \times H_{\Gamma^\ell}} = \langle \sigma^\ell_\eta, u^\ell_\eta \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)} + \langle \sigma^\ell_\tau, u^\ell_\tau \rangle_{H'_\tau \times H'_\tau} \\ = \langle \sigma^\ell, \epsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} + \langle \text{Div} \sigma^\ell, u^\ell \rangle_{H^\ell} \end{cases} \quad (\text{B.134})$$

pour tout $\sigma^\ell \in \mathcal{H}_1^\ell$ et $u^\ell \in H_1^\ell$.

La seconde formule de (B.134) dite *formule de Green*.

Remarque B.6: On suppose la partition de Γ^ℓ à la forme $\Gamma^\ell = \Gamma_A^\ell \cup \Gamma_B^\ell$ où $\Gamma_A^\ell \cap \Gamma_B^\ell = \emptyset$ et soit $\sigma^\ell \in \mathcal{H}_1^\ell$. On introduit les définitions suivantes :

$$\begin{aligned} (\sigma^\ell \eta^\ell = 0 \text{ sur } \Gamma_A^\ell) &\Leftrightarrow \left(\langle \sigma^\ell \eta^\ell, \gamma^\ell u^\ell \rangle_{H'_{\Gamma^\ell} \times H_{\Gamma^\ell}} = 0 \quad \forall u^\ell \in H_1^\ell \text{ tel que } u^\ell = 0 \text{ sur } \Gamma_B^\ell \right) \\ (\sigma^\ell_\eta = 0 \text{ sur } \Gamma_A^\ell) &\Leftrightarrow \left(\langle \sigma^\ell \eta^\ell, \gamma^\ell u^\ell \rangle_{H'_{\Gamma^\ell} \times H_{\Gamma^\ell}} = 0 \quad \forall u^\ell \in H_1^\ell \text{ tel que } \begin{cases} u^\ell_\eta = 0 \text{ sur } \Gamma_B^\ell \\ u^\ell_\tau = 0 \text{ sur } \Gamma^\ell \end{cases} \right) \\ (\sigma^\ell_\eta \leq 0 \text{ sur } \Gamma_A^\ell) &\Leftrightarrow \left(\langle \sigma^\ell \eta^\ell, \gamma^\ell u^\ell \rangle_{H'_{\Gamma^\ell} \times H_{\Gamma^\ell}} \geq 0 \quad \forall u^\ell \in H_1^\ell \text{ tel que } \begin{cases} u^\ell_\eta \leq 0 \text{ sur } \Gamma_B^\ell \\ u^\ell_\tau = 0 \text{ sur } \Gamma^\ell \end{cases} \right) \\ (\sigma^\ell_\tau = 0 \text{ sur } \Gamma_A^\ell) &\Leftrightarrow \left(\langle \sigma^\ell \eta^\ell, \gamma^\ell u^\ell \rangle_{H'_{\Gamma^\ell} \times H_{\Gamma^\ell}} = 0 \quad \forall u^\ell \in H_1^\ell \text{ tel que } \begin{cases} u^\ell_\tau = 0 \text{ sur } \Gamma_B^\ell \\ u^\ell_\eta = 0 \text{ sur } \Gamma^\ell \end{cases} \right) \end{aligned}$$

Supposons maintenant que $\Gamma^\ell = \Gamma_1^\ell \cup \Gamma_2^\ell \cup \Gamma_3^\ell$, $\Gamma_i^\ell \cap \Gamma_j^\ell = \emptyset$ si $i \neq j$ est une partition de Γ^ℓ où $\Gamma_3^1 = \Gamma_3^2 \equiv \Gamma_3$ partie de contact entre Ω^1 et Ω^2 , et soit $\sigma^\ell \in \mathcal{H}_1^\ell$. On introduit les définitions suivantes :

$$\begin{aligned} (\sigma_\eta^1 = \sigma_\eta^2 \text{ sur } \Gamma_3) &\Leftrightarrow \langle \sigma^1 \eta^1, \gamma^1 u^1 \rangle_{H_{\Gamma_1}^{\prime 1} \times H_{\Gamma_1}^1} = \langle \sigma^2 \eta^2, \gamma^2 u^2 \rangle_{H_{\Gamma_2}^{\prime 2} \times H_{\Gamma_2}^2} ; \\ \forall u = (u^1, u^2) \in H_1 \text{ tel que } &\begin{cases} u_\eta^\ell = 0 & \text{sur } \Gamma_1^\ell \cup \Gamma_2^\ell \\ u_\tau^\ell = 0 & \text{sur } \Gamma^\ell \\ [u_\eta] = 0 & \text{sur } \Gamma_3 \end{cases} \quad \forall \ell = 1, 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\sigma_\tau^1 = \sigma_\tau^2 \text{ sur } \Gamma_3) &\Leftrightarrow \langle \sigma^1 \eta^1, \gamma^1 u^1 \rangle_{H_{\Gamma_1}^{\prime 1} \times H_{\Gamma_1}^1} = \langle \sigma^2 \eta^2, \gamma^2 u^2 \rangle_{H_{\Gamma_2}^{\prime 2} \times H_{\Gamma_2}^2} ; \\ \forall u = (u^1, u^2) \in H_1 \text{ tel que } &\begin{cases} u_\eta^\ell = 0 & \text{sur } \Gamma^\ell \\ u_\tau^\ell = 0 & \text{sur } \Gamma_1^\ell \cup \Gamma_2^\ell \\ u_\tau^1 = u_\tau^2 & \text{sur } \Gamma_3. \end{cases} \quad \forall \ell = 1, 2 \end{aligned}$$

B.3.4 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles

Soit $0 < T < \infty$ et soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach réel. Nous notons par $C_c(0, T; X)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact dans $(0, T)$ à valeurs dans X .

Définition B.3.1: Une fonction $f : [0, T] \rightarrow X$ est dite *mesurable* s'il existe un sous ensemble $E \subset [0, T]$ de mesure nulle et une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $C_c(0, T; X)$ telle que $\|f_n(t) - f(t)\|_X \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, pour tout $t \in [0, T]/E$.

Définition B.3.2: Une fonction $f : [0, T] \rightarrow X$ est dite *fortement dérivable* dans $t_0 \in (0, T)$ s'il existe un élément $\frac{df}{dt}(t_0) \in X$ appelé la dérivée forte de f dans t_0 , tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{h} (f(t_0 + h) - f(t_0)) - \frac{df}{dt}(t_0) \right\|_X = 0. \quad (\text{B.135})$$

Définition B.3.3: Une fonction $f : [0, T] \rightarrow X$ est dite *intégrable* s'il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $C_c(0, T; X)$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^t \|(f_n(t) - f(t))\|_X dt = 0. \quad (\text{B.136})$$

Théorème B.36 (Bochner): Une fonction $f : [0, T] \rightarrow X$ mesurable est intégrable si et seulement si $x \rightarrow \|f(x)\|_X : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ est intégrable. Dans ce cas,

$$\left\| \int_0^T f dt \right\|_X \leq \int_0^T \|f\|_X dt. \quad (\text{B.137})$$

Soit $1 \leq p \leq \infty$ l'espace de Lebesgue $L^p(0, T; X)$ est l'ensemble des classes de fonctions $f : (0, T) \rightarrow X$ mesurables telles que l'application $t \rightarrow \|f(t)\|_X$ appartient à $L^p(0, T)$. On sait que $L^p(0, T; X)$ est un espace vectoriel normé avec la norme

$$\|f\|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{si } 1 \leq p < \infty, \quad (\text{B.138})$$

$$\|f\|_{L^\infty(0, T; X)} = \inf \{ C > 0 : \|f(t)\|_X \leq C, \text{ p.p. } t \in (0, T) \}, \quad \text{si } p = \infty. \quad (\text{B.139})$$

Par ailleurs, on a les résultats suivants.

Proposition B.1: (1) $L^p(0, T; X)$ ($1 \leq p < \infty$) est un espace de Banach.

(2) Si X est un espace de Hilbert avec le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ alors $L^2(0, T; X)$ est aussi un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(0, T; X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt.$$

(3) $L^r(0, T; X) \subset L^q(0, T; X)$ avec injection continue $1 \leq q \leq r \leq \infty$.

(4) Si X est un espace de Hilbert, alors

$$L^p(0, T; X)' \subset L^q(0, T; X) \quad \text{si } 1 < p, q < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

$$L^1(0, T; X)' \subset L^\infty(0, T; X),$$

où $L^p(0, T; X)'$ représente le dual de l'espace $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Définition B.3.4: Soit $u, v \in L^1(0, T; X)$. La fonction v s'appelle la dérivée généralisée d'ordre n de u sur $(0, T)$ si

$$\int_0^T \varphi^{(n)}(t) u(t) dt = (-1)^n \int_0^T \varphi(t) v(t) dt, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(0, T). \quad (\text{B.140})$$

$C_c^\infty(0, T)$ étant l'espace des fonctions réelles indéfiniment dérivables, à support compact dans $(0, T)$. Nous écrivons $v = \dot{u}$ pour $n = 1$ et $v = u^{(n)}$ pour $n \geq 2$.

Soit $1 \leq p \leq \infty$. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(0, T; X)$ est l'espace des fonctions $u : [0, T] \rightarrow X$ telles que $u \in L^p(0, T; X)$ et $\dot{u} \in L^p(0, T; X)$ et $W^{1,p}(0, T; X)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(0, T; X)} = \|u\|_{L^p(0, T; X)} + \|\dot{u}\|_{L^p(0, T; X)}.$$

Définition B.3.5: Une fonction $f : [0, T] \rightarrow X$ est dite absolument continue si quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que pour toute suite d'intervalles (a_j, b_j) disjoints, inclus dans $[0, T]$, tels que $\sum_j (b_j - a_j) < \delta$ on a $\sum_j \|f(b_j) - f(a_j)\|_X < \varepsilon$.

Maintenant nous rappelons le lien entre les fonctions absolument continues et les fonctions de l'espace $W^{1,p}(0, T; X)$.

Théorème B.37: Soit $1 \leq p \leq \infty$ un espace de Banach réflexif et soit $u \in L^p(0, T; X)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $u \in W^{1,p}(0, T; X)$.
2. u admet un représentant absolument continu presque partout dérivable ayant la dérivée forte dans $L^p(0, T; X)$.
3. Il existe $u_0 \in X$ et $g \in L^p(0, T; X)$ telles que $u(t) = u_0 + \int_0^t g(s) ds \quad \forall t \in [0, T]$.

Il découle de la démonstration du Théorème B.37 que, si X est un espace réflexif, alors toute fonction $u \in W^{1,p}(0, T; X)$ est fortement dérivable p.p sur $(0, T)$ et $\dot{u} = \frac{du}{dt}$ p.p sur $(0, T)$ par ailleurs $W^{1,1}(0, T; X)$ coïncide avec l'ensemble des fonctions lipschitziennes $u : [0, T] \rightarrow X$.

Étant donné un entier $k \geq 2$ et un réel $1 \leq p \leq \infty$ on définit par récurrence l'espace

$$W^{k,p}(0, T; X) = \left\{ u \in W^{k-1,p}(0, T; X) \mid \dot{u} \in W^{k-1,p}(0, T; X) \right\}$$

on vérifie aisément que $u \in W^{k,p}(0, T; X)$ si et seulement s'il existe k fonctions $g_1, \dots, g_k \in L^\infty(0, T; X)$ telles que

$$\int_0^T u(t) \varphi^{(j)}(t) dt = (-1)^j \int_0^T g_j(t) \varphi(t) dt \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(I), \forall j = 1, 2, \dots, k$$

où $\varphi^{(j)}$ désigne la dérivée d'ordre j de φ . On peut donc considérer les dérivées successives $u = g_1$

, $u^{(2)} = g_2, \dots, u^{(k)} = g_k$. L'espace $W^{k,p}(0, T; X)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{W^{k,p}(0,T;X)} = \|u\|_{L^p(0,T;X)} + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=k} \|u^{(\alpha)}\|_{L^p(0,T;X)}.$$

Nous dénotons aussi par $C([0, T]; X)$ et $C^1([0, T]; X)$ les espaces des fonctions continues et continûment différentiables sur $[0, T]$ à valeurs dans X , respectivement, avec les normes

$$\begin{aligned} \|x\|_{C([0,T];X)} &= \max_{t \in [0,T]} \|x(t)\|_X, \\ \|x\|_{C^1([0,T];X)} &= \max_{t \in [0,T]} \|x(t)\|_X + \max_{t \in [0,T]} \|\dot{x}(t)\|_X. \end{aligned} \tag{B.141}$$

Pour plus de détails sur les résultats résumés dans ce paragraphe nous renvoyons le lecteur par exemple à [10, 12].

Lemme B.7 (Lemmes de Gronwall): Soient $m, n \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$, $a \geq 0$ une constante, et $\phi \in C([0, T]; \mathbb{R})$:

(1) Si

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t m(s) ds + \int_0^t n(s) \phi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\phi(t) \leq \left(a + \int_0^t m(s) ds\right) \exp\left(\int_0^t n(s) ds\right) \quad \forall t \in [0, T].$$

(2) Si

$$\phi(t) \leq m(t) + a \int_0^t \phi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\int_0^t \phi(s) ds \leq e^{aT} \int_0^t m(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

pour le cas particulier $m = 0$ la partie (1) de ce lemme devient

Corollaire B.1: Soient $n \in C([0, T]; \mathbb{R})$ tel que $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\phi \in C([0, T]; \mathbb{R})$ est une fonction telle que

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t n(s) \phi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\phi(t) \leq a \exp\left(\int_0^t n(s) ds\right) \quad \forall t \in [0, T].$$

Le corollaire B.1 est souvent utilisé pour montrer l'unicité de la solution, de la façon suivante. On suppose deux solutions, en notant par ϕ la norme de la différence entre ces solutions, on essaie ensuite de majorer ϕ sous la forme

$$\phi(t) \leq \int_0^t n(s)\phi(s)ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

avec une certaine fonction $n \geq 0$. En appliquant corollaire B.1 donne immédiatement la nullité de ϕ .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Amassad and M. Sofonea, *Analysis of a quasistatic viscoplastic problem involving Tresca friction law*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, (1988) 55–72.
- [2] K. T. Andrews, L. Chapman, J. R. Fernandez, M. Fisackerly, M. Shillor, L. Vanerian, and T. VanHouten, *A membrane in adhesive contact*, SIAM Journal on Applied Mathematics **64** (2003), no. 1, 152–169.
- [3] K. T. Andrews and M. Shillor, *Dynamic adhesive contact of a membrane*, Advances in Mathematical Sciences and Applications **13** (2003), no. 1, 343–356.
- [4] F. Auricchio, P. Bisegna and C. Lovadina, *Finite element approximation of piezoelectric plates*, Internat. J. Numer. Methods Engrg, **50** (2001), 1469–1499.
- [5] Y. Ayyad, M. Sofonea, *Analysis of two dynamic frictionless contact problems for elastoviscoplastic materials*, Electron. J. Differ. Equ. **55** (2007), 1–17.
- [6] H.T. Banks, R.C. Smith and Y. Wang, *Smart Material Structures : Modeling, Estimation and Control*, Masson, Wiley, 1996.
- [7] R.C. Batra and J.S. Yang, *Saint-Venant's principle in linear piezoelectricity*, Journal of Elasticity, **38**(1995), 209–218.
- [8] P. Bisenga, F. Lebon and F. Maceri, *The unilateral frictional contact of a piezoelectric body with a rigid support in : Contact Mechanics*, (J.A.C. Martins and M.D.P. Monteiro Marques, eds.) Solid Mech. Appl, vol.103, Kluwer Academic, Dordrecht (2002), 47–354.
- [9] H. Br sis, * quations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité*, Ann. Inst. Fourier, **18**(1968), 115–175.
- [10] H. Br sis, *Analyse fonctionnelle théorie et applications*, Masson, Paris 1983.
- [11] W.G. Cady, *Piezoelectricity ; an Introduction to the Theory and Applications of Electromechanical Phenomena in Crystals*, Mc Graw-Hill, New York, London, 1946.
- [12] T. Cazenave, A. Haraux, *Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaires*, Ellipses, Paris, 1990.
- [13] O. Chau, J.R. Fernandez, M. Shillor and M. Sofonea, *Variational and numerical analysis of a quasistatic viscoelastic contact problem with adhesion*, Journal of Computational and Applied Mathematics, **159**(2003),431–465.
- [14] O. Chau, M. Shillor and M. Sofonea, *Dynamic frictionless contact with adhesion*, Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP) **55** (2004), no. 1, 32–47.
- [15] P.G. Ciarlet, *Basic Error Estimates for Elliptic Problem*, Dans P.G. Ciarlet and J.L. Lions, eds, Handbook of Numerical Analysis, Vol. II, pages 17-351. North Holland, Amsterdam, 1991.
- [16] P.G. Ciarlet, *Elasticit  tridimensionnelle*, Masson, Paris, 1986.
- [17] P.G. Ciarlet, *The finite element method for elliptic problems*, Studies in Mathematics and its applications, North Holland Publishing, 1978.

- [18] C. Ciulcu, D. Motreanu and M. Sofonea, *Analysis of an elastic contact problem with slip dependent coefficient of friction*, Mathematical Inequalities & Applications, **4** (2001), 465–479.
- [19] R. Dautray and J.L. Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, Vol.6. Masson, Paris, 1988.
- [20] H.B. Dhia, *Equilibre d'une plaque maice élastique avec contact unilatéral et frottement de type Coulomb*, C. R. Acad. Sci. Paris, Scr. I, 308(1989), 293–296.
- [21] S. Drabla, *Analyse Vriationnelle de Quelques Problèmes aux Limites en Elasticité et Viscoplasticité*, Thèse de doctorat, Université Ferhat Abbes–Sétif, (1999).
- [22] S. Drabla and Z. Zellagui, *Analyse OF A Eectro-Elastic Contact Problem With Friction And Adhesion*, Studia Univ. Babes–Bolyai, Mathematica, Volume LIV, **1** (2009), 75–99.
- [23] S. Drabla and Z. Zellagui, *Variational Analysis and the Convergence of the Finite Element Approximation of an Electro-Elastic Contact Problem with Adhesion*, Arab J. Sci. Eng., **36** (2011), 1501–1515.
- [24] S. Djabi, M. Sofonea and B. Teniou, *Analysis of some Frictionless Contact Problemes for Elastic Bodies*, Annales Polonici Mathematici, **1** (1998), 75–88.
- [25] G. Duvaut and J.L. Lions, *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunod, 1972.
- [26] G. Duvaut, *Mécanique des milieux continus*, Dunod, Paris, 1998.
- [27] C. Eck and J. Jarušek, *Existence results for the contact problem with Colomb friction*, Math. Models Methods Appli. Sci., **8** (1998), 445–468.
- [28] A. Ern and J.L. Guermond, *Eléments finis : théorie, application, mise en œuvre*, Springer, Paris, 2001.
- [29] G. Fichera, *Boundary value problem unilateral constraints*, Encycl of Physics, Editeur : S. Flugge, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [30] G. Fichera, *Existence theorems in elasticity*. In : Flugge (ed) *Handbuch der Physik*, vol 2. Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [31] G. Fichera, *Problemi elastostatici con vincoli unilaterali : il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno*, Mere Accad Naz Lincei8 (1964), 91–140.
- [32] M. Frémond, *Equilibre de structures qui adhèrent à leur support*, Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences, Série II **295** (1982), no. 11, 913–916.
- [33] M. Frémond, *Adhérence des solides*, J. Mécanique Théorique et Appliquée, **6** (1987), 383–407.
- [34] M. Frémond, *Contact unilatéral avec adhésion*, in *Unilateral problems in structural analysis*, (Del Piero et F. Maceri, EDS.) Springer Verlag, Heidelberg 1987.
- [35] M. Frémond. *Contact with adhesion*. Dans *Topics in nonsmooth mechanics* (Edité par J.J. Moreau, P.D. Panagiotopoulos, et G. Strang), Birkhauser Verlag, Basel (1988), 177–221.
- [36] M. Frémond, *Equilibre des structures qui adhèrent à leur support*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série II, **295** (1982), 913–916.
- [37] R. Hassani, P. Hild and I. Ionescu, *Sufficient conditions of non-uniqueness for the Coulomb friction problem*, Math .Meth. Appli. Sci, **27** (2004), 47–67.
- [38] T. Hadj ammar, S. Drabla and B. Benabderrahmane, *Analysis and approximation of frictionless contact problems between two piezoelectric bodies with adhesion*, Georgian Math. J, **44** (2014), 1–15.
- [39] T. Hadj ammar, B. Benabderrahmane and S. Drabla, *A dynamic contact problem between elasto-viscoplastic piezoelectric bodies*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, **49** (2014), 01–21.

- [40] T. Hadj ammar, B. Benabderrahmane and S. Drabla, *Frictional contact problem for electro-viscoelastic materials with long-term memory, damage, and adhesion*, Electronic Journal of Differential Equations, **222** (2014), 01–21.
- [41] T. Hadj ammar, B. Benabderrahmane and S. Drabla, *Mixed finite element approximation for a contact problem in electro-elasticity*, Kuwait J. Sci., **42** (2015), 31–54.
- [42] T. Hadj ammar and B. Benabderrahmane, *Mixed Formulation for a Signorini Problem*, Journal of Mathematics and Statistics **8** (2012), 216–220.
- [43] T. Hadj ammar and B. Benabderrahmane, *Variational analysis of a contact problem with friction between two deformable bodies*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. **57** (2012), No. 3, 427–444.
- [44] T. Hadj ammar, *Etude théorique et numérique d'un problème de contact sans frottement entre deux corps déformables*, Mémoire de Magister, Univ. Ouargla., (2006).
- [45] P. Hild, P. Labrde, *Quadratic finite element methods for unilateral contact problems*, Appl. Num. Math., **41** (2002) 401–421.
- [46] P. Hild, *Numerical implementation of two nonconforming finite element methods for unilateral contact*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **184** (2000) 99–123.
- [47] I. Hlaváček, J. Haslinger, J. Necăs et J. Lovíšek, *Solutions of Variational Inequalities in Mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [48] T. Ikeda, *Fundamentals of Piezoelectricity*, Oxford University Press, Oxford, 1990.
- [49] I.R. Ionescu and J.C. Paumier, *On the contact problem with slip displacement dependent friction in elastostatics*, Int. J. Engng. Sci., **34** (1996), 471–491.
- [50] J. Jarušek, *Contact problem with bounded friction. Coercive case* Czechoslovak Math. J., **33** (1983), 237–261.
- [51] Y. Kato, *Signorini problem with friction in linear elasticity*, Japan J. Appl. Math., **4** (1987), 237–268.
- [52] N. Kikuchi, J.T. Oden, *Contact Problems in Elasticity, A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*, SIAM, Philadelphia, PA, 1988.
- [53] N. Kikuchi, J.T. Oden, *Theory of variational inequalities with applications to problems flow through porous media*, International Journal of Engineering Sciences, **18** (1982), 1173–1184.
- [54] A. Klarbring, A. Mikelic and M. Shillor, *Frictional contact problems with normal compliance*, Int. J. Eng. Sci. **26**(1988), 811–832.
- [55] H. Khenous, J. Pommier, Y. Renard, *Hybrid discretisation of Colommb friction : Theoretical aspects and comparison of some numerical solvers*, Appl. Num. Math, **56** (2006), 163–192.
- [56] K.L. Kuttler and M. Shillor, *Set-valued pseudomonotone maps and degenerate evolution inclusions*, Comm. Contemp. Math. **1** (1999), 87–123.
- [57] J.L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Vol.1,2. Dunod, Paris, 1968.
- [58] F. Maceri and P. Bisegna, *The unilateral frictionless contact of a piezoelectric body with a rigid support*, Math. Comp. Modelling **28** (1998), 19–28.
- [59] J.A.C. Martins and M.D.P. Monteiro Marques, Eds., *Contact Mechanics*, Dordrecht, Kluwer, Dordrecht, 2002.
- [60] J.A.C. Martins and T.J. Oden, *Existence and uniqueness results for dynamic contact problems with nonlinear normal and friction interface laws*, Nonlinear Analysis **11** (1987), 407–428.
- [61] R.D. Mindlin. *Polarisation gradient in electrics*, Int. J. Solids Structures, **4**, 663, 1968.

- [62] R.D. Mindlin, *Continuum and lattice theories of influence of piezoelectric body with a rigid support*, Math comp. Modelling, **28** (1998), 19–28.
- [63] R.D. Mindlin, *Elasticity, piezoelectricity and crystal lattice dynamics*. J. of Elasticity, **2** (1972), 217–280.
- [64] J. Nečas, J. Jarušek, I. Haslinger, *On the solution of the variational inequality to the signorini problem with small friction*, Boll. U.M.I.5(17B), 1980.
- [65] J. Nečas, *Les Méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques*, Masson Paris 1981.
- [66] J.T. Oden and J.A.C. Martins, *Models and computational methods for dynamic friction phenomena*, Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. **52** (1985), 527–634.
- [67] P.D. Panagiotopoulos, *Inequality problems in Meechanical and Applications*, Birkhauser, Basel, 1985.
- [68] M. Raous, L. Cangémi and M. Cocu, *A consistent model coupling adhesion, friction, and unilateral contact*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **177** (1999), no. 3-4, 383–399.
- [69] M. Raous, M. Jean, J.J. Moreau, Eds., *Contact Mechanics*, New York, Plenum Press, 1995.
- [70] M. Rochdi, M. Sofonea, *frictionless contact between two elastic-viscoplastic bodies*, Quart. J. Mech. App. Math, **3** (1997), 481–496.
- [71] J. Rojek and J. J. Telega, *Contact problems with friction, adhesion and wear in or- thopaedic biomechanics. I : general developments*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics **39** (2001), no. 3, 655–677.
- [72] W. Rudin, *Functional Analysis*, Mc Graw-Hill, New York, 1973.
- [73] J. Sabil, *Modélisation et méthodes de décomposition de domaine pour des problèmes de contact*, Thèse de doctorat, Univ. Lyon, (2004).
- [74] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1966.
- [75] M. Selmani, *dynamic frictionless contact problems in viscoelasticity with long-term memory*, Analele Universităţii Oradea Fasc. Matematica, Ton XVI (2009), 75–92.
- [76] M. Shillor, M. Sofonea and J.J. Telega, *Models and Variational Analysis of Quasistatic Contact*, Lect. Notes Phys. **655**, Springer, Berlin Heidelberg, 2004.
- [77] J. Simon, *Equations de Navier-Stokes, introduction à la théorie*, Cours de D.E.A. de Mathématiques appliquées à l'Université Blaise Pascal (Clermont-Ferrand II), (1988).
- [78] A. Signorini, *Questioni di elasticità non linearizzata e semi-linearizzata*, Rend Mat **18** (1959), 95–139.
- [79] A. Signorini, *Sopra alcune questioni di elastostatica*, Sopra alcune questioni di elastostatica, 1933.
- [80] M. Sofonea, R. Arhab, *An Electro-viscoelastic Contact Problem with Adhesion*, Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series A : Mathematical Analysis **14** (2007), 577–591.
- [81] M. Sofonea and El H. Essoufi, *A Piezoelectric Contact Problem with Slip Dependent Coefficient of Friction*, Mathematical Modelling and Analysis **9** (2004), 229–242.
- [82] M. Sofonea and El H. Essoufi, *Quasistatic Frictional Contact of a Viscoelastic Piezoelectric Body*, Adv. Math. Sci. Appl. **14** (2004), 613–631.
- [83] M. Sofonea, W. Han, M. Shillor, *Analysis and Approximation of Contact Problems with Adhésion or Damage*, Pure and Applied Mathematics **276**, Chapman-Hall/CRC Press, New York 2006.
- [84] M. Sofonea, Z. Lerguet, *A model for adhesive frictional contact*, Machine Dynamics Problems **30**(2006), 158–168.

-
- [85] M. Sofonea and A. Matei, *A quasistatic Frictionless Contact Problem with Normal Compliance*, Ann. Univ. Caraiova, Math-Info., XXVII (2000), 43–56.
- [86] G.W. Taylor, J.J. Gagnepain, T.R. Meeker, T. Nakamura and L.A. Shuvalov, *Piezoelectricity*, 4 Gordon and Breach, New York, 1985.
- [87] B. Tengiz and G. Tengiz, *Some Dynamic Problems of the Theory of electroelasticity*, Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics **10** (1997), 1–53.
- [88] R.A. Toupin, *The elastic dielectrics*, J. Rat. Mech. Anal. **5** (1956), 849–915.
- [89] R.A. Toupin, *A dynamical theory of elastic dielectrics*, Int. J. Engrg. Sci. **1** (1963), 101–126.
- [90] R.A. Toupin, *Stress tensors in elastic dielectrics*, Arch. Rational Mech. Anal. **5** (1960), 440–452.
- [91] N. Turbé and G.A. Maugin, *On the linear piezoelectricity of composite materials*, Math. Methods Appl. Sci. **14** (1991), 403–412.
- [92] W. Voigt, *Lehrbuch der Kristall-Physik*, Teubner, Leipzig, 1910.
- [93] Z. Zellagui, *Analyse Variationnelle et Numérique de Quelques Problèmes de Contact en Mécanique des Solides Déformables*, Thèse de Doctorat, Université de Sétif 1, Sétif, 2012.
- [94] O.C. Zienkiewicz, *The Finite Element Method in Engineering Science*, McGraw-Hill, 1989.

Résumé : L'objet de cette thèse est l'étude théorique et numérique de quelques problèmes de contact avec ou sans adhésion entre deux corps déformables. La thèse se compose de deux parties et annexe. La première partie est consacrée à l'étude théorique et numérique d'un problème statique de contact unilatéral sans frottement entre deux corps élastiques. La deuxième partie est dédiée aux problèmes électromécaniques de contact. Cette partie se décompose en deux chapitres, dans le premier on s'intéresse à l'étude théorique et l'approximation numérique d'un problème quasistatiques de contact avec conditions de compliance normale et l'adhésion entre deux corps électro-élastiques. Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse à l'étude théorique d'un problème dynamique de contact avec conditions de compliance normale et l'adhésion entre deux corps électro-élasto-viscoplastiques.

Mots-Clés : Adhésion, Compliance normale, Contact unilatéral, Élastiques, Electro-élastiques, Electro-élasto-viscoplastiques, Éléments finis, Point fixe, Inéquation d'évolution.

Abstract : The purpose of this thesis is the theoretical and numerical study of some contact problems with or without adhesion between two deformable bodies. The thesis consists of two parts and annex. The first part is dedicated to the theoretical and numerical study of a static problem of unilateral frictionless contact between two elastic bodies. In the second part, we study two piezoelectric problems, first, we are interested in the theoretical study and numerical approximation of a quasistatic problem of contact with normal compliance of conditions and the adhesion between two electro-elastic bodies, the second one is interested in the theoretical study of a dynamic contact problem with normal compliance of conditions and the adhesion between two electro-elastic-viscoplastic bodies.

Key-words : Adherence, Normal compliance, Unilateral contact, Elastic, Electro-elastic, Electro-elastic-viscoplastic, Finite elements, Fixed point, Inequality of evolution.

ملخص : هدف هذه الأطروحة هو دراسة نظرية و عددية لبعض مسائل التماس مع أو بدون التصاق بين جسمين قابلين للتشوه. تتكون الرسالة من جزئين و مرفق. الجزء الأول مخصص للدراسة النظرية و العددية لمسألة تماس ساكنة و بدون احتكاك وحيد الجانب بين جسمين مرنين. أما الجزء الثاني ندرس مسألتين كهروضغطية، الأولى نهتم بالدراسة النظرية و التقريب العددي لمسألة تماس شبه ساكنة بتوافق ناظمي و التصاق بين جسمين كهرو- مرنة، و الثانية نهتم بالدراسة النظرية لمسألة تماس ديناميكية بتوافق ناظمي و التصاق بين جسمين كهرو- مرنة- فيسكوبلاستيك.

كلمات المفاتيح : التصاق، توافق ناظمي، تماس وحيد الجانب، مرونة، كهرومرنة، كهرومرنة-فيسكوبلاستيك، العناصر المنتهية، نقطة ثابتة، متباينة التطور.