

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement supérieur et de la

Recherche scientifique

UNIVERSITÉ FERHAT ABBAS DE SETIF-1-

THÈSE

Présentée à la faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Option: Mathématiques Appliquées

Par

AISSAOUI ADEL

Thème

**Analyse variationnelle de quelques problèmes aux limites
de contact avec adhésion et endommagement**

soutenu publiquement le: 29 /10/ 2014

devant le jury composé de:

Président	Mr.	DJAB	Seddik	Prof	UFA Sétif 1
Encadreur	Mr.	HEMICI	Nacerdine	MCA	UFA Sétif 1
Examineur	Mr.	NADIR	Mostefa	Prof	UMB M'sila
Examineur	Mr.	MEROUANI	Abdelbaki	MCA	UBB B.B.A

Remerciements

Je tiens à remercier très particulièrement Monsieur Nacerdine HEMICI Maître de conférences classe -A- à l'université Ferhat Abbas Sétif 1, qui m'a proposé le sujet et diriger mon travail. Je lui exprime ma profonde gratitude et ma reconnaissance pour tous les efforts déployés à l'accomplissement de ce travail.

Je remercie très vivement le Professeur Seddik DJABI pour son abnégation, et son acceptation de présider ce jury.

Comme j'ai le grand plaisir à remercier tout autant Messieurs le Professeur Mostefa NADIR, le Docteur Abdelbaki MEROUANI d'avoir bien voulu examiner cette thèse et d'avoir accepté de participer au jury.

A cette occasion je remercie l'ensemble de mes camarades et collègues qui auront, de par leur serviabilité, et leur encouragement, contribué de près ou de loin à la concrétisation de ce travail.

Je remercie l'ensemble de ma famille qui a tant sacrifié pour que je puisse mener à bien ce travail.

Adel AISSAOUI

Dédicaces

A ceux qui ont fait de moi ce que je suis et qui sont toujours présents
pour me soutenir à tout moment. A tout ceux qui m'ont toujours porté
dans leurs cœurs.

A mon père. Monsieur "Aissaoui Bachir" pour son orientation

A ma mère pour ça tendresse

A mes frères et sœurs chacun en son nom :

Hanane, Tayeb, Ayyoub, Assia, Hadjer, Youcef, Amel et Abdelhay
en témoignage de leur amour, compréhension et de leurs encouragements continus.

A toute mes amies

Toute ma famille, tous les professeurs de l'université Ferhat Abbas Sétif 1 et l'université

Gasdi Merbah Ouaegla

Mes amis et collègues et tous ceux qui m'encourageaient.

Adel AISSAOUI

Table des matières

Introduction	v
Notations	ix
1 Formulation mathématique des problèmes de contact et rappels d'analyse	1
1.1 Rappels de la mécanique des milieux continus	1
1.2 Cadre physique	2
1.3 Lois de comportement	4
1.4 Conditions aux limites de contact avec adhésion	7
1.5 Lois de contact avec frottement et adhésion	9
1.6 Conditions électriques à la surface de contact	12
1.7 Formulation mathématique des problèmes de contact	14
1.8 Rappels d'analyse	19
1.8.1 Cadre fonctionnel vectoriel	19
1.8.2 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles	22
1.8.3 Eléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert	23
1.8.4 Equations et inéquations variationnelles d'évolution	28
1.8.5 Lemme de Gronwall	30
2 Problème viscoélastique de contact avec adhésion et endommagement	31
2.1 Problème de contact avec compliance normale en viscoélasticité	32
2.1.1 Formulation du problème mécanique-Hypothèses	32
2.1.2 Formulation variationnelle	38

2.1.3	Existence et unicité de la solution	40
2.2	Problème de contact bilatéral en viscoélasticité	50
2.2.1	Formulation du problème mécanique-Hypothèses	50
2.2.2	Formulation variationnelle	54
2.2.3	Existence et unicité de la solution	55
3	Problèmes piézoélectriques de contact avec frottement et adhésion et en-	
	dommagement	63
3.1	Problème électro élasto-viscoplastique avec frottement et adhésion et endom-	
	magement	64
3.1.1	Formulation mécanique du problème	64
3.1.2	Formulation variationnelle	66
3.1.3	Existence et unicité de la solution	71
3.2	Problème de contact avec frottement en électro-viscoélasticité avec mémoire	
	longue	84
3.2.1	Formulation mécanique du problème et les hypothèses	84
3.2.2	Formulation variationnelle et le résultat principal	89
3.2.3	Existence et unicité de la solution	92
	Conclusion	101
	Bibliographie	102

Introduction

Les mathématiques et la mécanique ont été des partenaires complémentaires depuis le temps de Newton, et l'histoire des sciences montre beaucoup de preuves de l'influence bénéfique de ces domaines l'un sur l'autre.

Le contact entre corps déformables abonde dans l'industrie et la vie quotidienne.

En raison de l'importance industrielle des procédés physiques qui ont lieu lors d'un contact, un effort considérable a été fait dans leur modélisation, l'analyse, analyse numérique et simulations numériques, et par conséquent, la théorie mathématique de la mécanique de contact a fait des progrès impressionnants ces derniers temps.

En raison de leur complexité inhérente, les phénomènes de contact conduisent à des modèles mathématiques exprimés en termes de problèmes d'évolution fortement non linéaires.

Les processus d'adhésion sont importants dans de nombreux montages industriels où les éléments habituellement non-métalliques sont collés ensemble. Récemment des matériaux composites faits de couches de matériaux simples prennent un grand intérêt car ils sont très résistants et légers, et ainsi d'une grande importance en aviation, en exploration spatiale et dans l'industrie automobile. Cependant, sous les contraintes, les matériaux composites des différentes couches se décolle et se déplacent l'une par rapport à l'autre. C'est l'une des raisons de l'importance des processus d'adhésion dans les applications industrielles.

L'endommagement est un phénomène très important en ingénierie, car il affecte directement la structure des machines. Il existe une littérature abondante sur ce sujet. Des modèles introduisant l'influence de l'endommagement interne du matériau ont été investis mathématiquement. Des modèles de l'endommagement ont été développés dans [20, 21] à partir du principe de la puissance virtuelle.

La fonction d'endommagement α varie entre 0 et 1. Quand $\alpha = 1$ il n'y a pas d'endommagement dans le matériau, quand $\alpha = 0$ le matériau est complètement endommagé, quand $0 < \alpha < 1$ l'endommagement est partiel. Les problèmes de contact quasistatique avec endommagement ont été investis dans [22, 23, 24, 39]. Dans cette thèse la relation utilisée pour modéliser l'évolution du champ d'endommagement est la suivante

$$\frac{d\alpha}{dt} - k\Delta\alpha + \partial\varphi_K(\alpha) \ni S(\varepsilon(u), \alpha) \text{ ou } S(\sigma, \varepsilon(u), \alpha) ,$$

où K est l'ensemble des fonctions test admissibles d'endommagement, S étant la fonction source de l'endommagement.

Les matériaux piézoélectriques ont été découverts au début du siècle par les époux Curie. Ce sont des diélectriques particuliers qui permettent de transformer l'énergie de déformation élastique en énergie électrique, et inversement. Plus précisément, la piézoélectricité est la capacité de certains matériaux à se polariser lorsqu'ils sont contraints mécaniquement, la charge apparaissant à leur surface étant proportionnelle à la déformation engendrée. L'effet piézoélectrique inverse est l'obtention d'une déformation par application d'un champ électrique.

Les matériaux piézoélectriques sont très nombreux. Le plus connu est sans doute le quartz, toujours utilisé dans les montres pour générer des impulsions d'horloge. Mais ce sont des céramiques synthétiques, les PZT (plomb, zirconite, titanite) qui sont le plus largement utilisées aujourd'hui dans l'industrie.

De manière plus générale, l'effet direct peut être mis à profit dans la réalisation de capteurs (capteur de pression etc.) tandis que l'effet inverse permet de réaliser des actionneurs (injecteurs à commande piézoélectrique en automobile, nano manipulateur).

L'utilisation de la piézoélectricité a explosé ces dernières années et, elle est en pleine expansion. La capacité de ces matériaux à convertir l'énergie mécanique en énergie électrique et vice versa est une valeur inestimable pour les transducteurs acoustiques, l'échographie médicale, et pour la haute précision des pompes et des moteurs. Des performances piézoélectriques élevées ont également ouvert de nouvelles possibilités de "récupération d'énergie", en utilisant le mouvement ambiant et les vibrations pour produire de l'électricité où les piles ou autres sources d'énergie sont impraticables ou indispensables [4, 13].

Une partie de ces progrès a été motivée par de nouveaux modèles qui se posent dans la mécanique du contact.

L'objectif de cette thèse est de proposer une contribution à l'étude de quelques problèmes aux limites en mécanique de contact avec adhésion et endommagement. En effet nous considérons des lois de comportement non linéaires pour des matériaux viscoélastiques, et électro-viscoélastiques dans le processus quasistatique et dynamique; les conditions de contact sont avec compliance normale. Divers lois de frottement sont envisagées, elles sont définies par chacun des problèmes est étudié selon le formalisme général suivant: nous commençons par décrire le problème mécanique de départ et, après avoir précisé les hypothèses sur les données, nous présentons une formulation variationnelle du problème mécanique pour laquelle nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution faible du problème étudié.

Le manuscrit se compose de trois chapitres que nous décrivons brièvement.

Dans le premier chapitre, on commence par définir le cadre physique, les lois de comportement des différents matériaux, les conditions aux limites ainsi que la formulation mécanique des problèmes à étudier. Ensuite, nous passons en revue quelques résultats concernant les espaces fonctionnels, les équations et inéquations variationnelles, le lemme de Gronwall et quelques théorèmes qui seront d'une grande utilité pour les démonstrations.

Dans le deuxième chapitre de cette thèse nous étudions deux problèmes de contact impliquant l'adhésion et l'endommagement, entre un corps viscoélastique et une fondation.

La première section est consacrée à l'analyse d'un problème viscoélastique de contact avec adhésion et endommagement. Nous dérivons une formulation variationnelle du problème mécanique, pour lequel nous démontrons qu'il existe une solution faible unique en utilisant des techniques de point fixe et de monotonie.

Tandis que dans la deuxième section, nous considérons un problème viscoélastique de contact bilatéral avec adhésion et endommagement, pour lequel nous dérivons une formulation variationnelle et établissons un résultat d'existence et d'unicité d'une solution faible. La démonstration est basée sur des arguments d'équations variationnelles, un résultat classique concernant les inéquations paraboliques et des arguments de point fixe.

Enfin, le dernier chapitre de cette thèse est consacré à l'étude d'un problème de contact avec frottement pour des matériaux électro-viscoélastiques avec mémoire longue et

endommagement dans un processus dynamique. Le problème se formule par un système qui comporte une équation variationnelle par rapport au champ de déplacement, une inéquation variationnelle de type parabolique par rapport au champ d'endommagement, une équation variationnelle par rapport au champ électrique et une équation différentielle d'ordre un par rapport au champ d'adhésion. On établit un résultat d'existence et d'unicité de la solution. La démonstration est basée sur des arguments d'équations variationnelles, un résultat classique concernant les inéquations paraboliques et des arguments de point fixe.

Notations

Si Ω est un domaine de $\mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$), on note par

$\overline{\Omega}$	l'adhérence de Ω .
Γ	la frontière de Ω supposée souvent régulière.
Γ_i ($i = \overline{1, 3}, a, b$)	une partie de la frontière Γ .
$mes \Gamma_1$	la mesure de Lebesgue (d-1) dimensionnelle de Γ_1 .
ν	la normale unitaire sortante à Γ .
v_ν, v_τ	les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel v définies sur $\overline{\Omega}$.
$\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$	l'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur $\overline{\Omega}$.
$\mathcal{D}(\Omega)$	l'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables et à support compact contenu dans Ω .
$\mathcal{D}'(\Omega)$	l'espace des distributions sur Ω .
$H = L^2(\Omega)^d$.	
$\mathcal{H} = L^2(\Omega)_s^{d \times d}$.	
$H_1 = H^1(\Omega)^d$.	
$\mathcal{H}_1 = \{\sigma \in \mathcal{H} \mid Div \sigma \in H\}$.	
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ .
$H_\Gamma = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$	
$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.
H'_Γ	l'espace dual de $H_\Gamma = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$.
$\gamma : H_1 \rightarrow H_\Gamma$	l'application trace pour les fonctions vectorielles.

Si H est un espace de Hilbert réel et $d \in \mathbb{N}^*$, on utilise les notations suivantes

$H^d = \{x = (x_i) \mid x_i \in H, i = \overline{1, d}\}$.	
$H_s^{d \times d} = \{x = (x_{ij}) \mid x_{ij} = x_{ji} \in H, i, j = \overline{1, d}\}$.	
$(\cdot, \cdot)_H$	le produit scalaire de H .
$\ \cdot\ _H$	la norme de H .
2^H	l'ensemble de toutes les parties de H .
H'	l'espace dual de H .

$(\cdot, \cdot)_{H' \times H}$	le produit de dualité entre H' et H .
Ψ_K	la fonction indicatrice de $K \subset H$.
$x_n \rightarrow x$	la convergence forte de la suite (x_n) vers l'élément x dans H .
$x_n \rightharpoonup x$	la convergence faible de la suite (x_n) vers l'élément x dans H .
$\mathcal{L}(H)$	l'espace des applications linéaires et continues de H dans H .

Si de plus $[0, T]$ un intervalle de temps, $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$, on note par

$C(0, T; H)$	l'espace des fonctions continues sur $[0, T]$ dans H .
$C^1(0, T; H)$	l'espace des fonctions continûment dérivables sur $[0, T]$ dans H .
$L^p(0, T; H)$	l'espace des fonctions u mesurables de $(0, T)$ dans H telles que $\int_0^T u(t) _H^p dt < +\infty$ avec les modifications usuelles si $p = +\infty$.
$W^{k,p}(0, T; H)$	l'espace de Sobolev de paramètres k et p .

Pour une fonction u , on note par

$\dot{u}, \ddot{u}$	les dérivées première et seconde de u par rapport au temps.
$\partial_i u$	la dérivée partielle de u par rapport à la i ème composante x_i .
∇u	le gradient de u .
$\varepsilon(u)$	la partie symétrique du gradient de $u = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla^T u)$.
$Div u$	la divergence de u .
∂u	le sous-différentiel (classique) de u .

Si H^1 et H^2 sont deux espaces de Hilbert réels, on note par

$\mathcal{L}(H^1, H^2)$	l'espace des applications linéaires et continues de H^1 dans H^2 .
$\ \cdot\ _{\mathcal{L}(H^1, H^2)}$	la norme de $\mathcal{L}(H^1, H^2)$.

Autres notations

$\liminf$	la limite inférieure.
$\mathbb{S}^d$	l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}_s^{d \times d}$.
I_d	le tenseur identité du second ordre sur $\mathbb{R}^d$.
0_d	le zéro de $\mathbb{R}^d$ et celui de S^d .
c	une constante générique strictement positive.
p.p.	presque partout.

Chapitre 1

Formulation mathématique des problèmes de contact et rappels d'analyse

Ce chapitre représente un bref rappel de la mécanique des milieux continus où nous allons introduire les cadres physiques utilisés dans cette thèse, les lois de comportement des différents matériaux, les conditions aux limites de contact avec adhésion. Par ailleurs, nous précisons dans ce chapitre les conditions aux limites de contact avec frottement, et adhésion, ainsi que la formulation mécanique des quatre problèmes à étudier. Ensuite, nous passons en revue quelques résultats concernant les espaces fonctionnels, les équations et inéquations variationnelles, le lemme de Gronwall et quelques théorèmes qui seront d'une grande utilité pour les démonstrations.

1.1 Rappels de la mécanique des milieux continus

Dans cette partie, après quelques rappels de mécanique des milieux continus, en partant de la modélisation du problème physique, nous présentons le formalisme des lois de comportement viscoélastiques et électro élasto-viscoplastiques et électro viscélastique avec mémoire longue terme . Ensuite, nous rappelons le système d'équations aux dérivées partielles qui sera l'objet

de notre étude. Pour compléter le modèle, on présente quelques considérations physiques sur les conditions aux limites de contact sans frottement avec adhésion.

1.2 Cadre physique

Cadre physique n°.1 : Problème mécanique

Soit un corps matériel qui occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$), avec une surface frontière régulière Γ , partitionnée en trois parties mesurables Γ_1, Γ_2 et Γ_3 , telles que $mes\Gamma_1 > 0$. Nous notons par ν la normale unitaire sortante à Γ . Le corps est encastré sur Γ_1 dans une structure fixe. Sur Γ_2 agissent des tractions surfaciques de densité f_2 et dans Ω agissent des forces volumiques de densité f_0 . Nous supposons que f_2 et f_0 varient très lentement par rapport au temps et par conséquent le processus est quasistatique. Soit $T > 0$ et soit $[0, T]$ l'intervalle de temps en question. Le corps est en contact avec frottement avec ou sans adhésion avec un obstacle sur la partie Γ_3 . Nous prenons en considération les propriétés mécaniques du corps. Notre objectif sera d'étudier l'évolution de ces propriétés dans le temps, sous l'hypothèse des petites transformations.

Nous utiliserons ce cadre physique dans le second chapitre de ce mémoire.

Cadre physique n°.2 : Problème électro-mécanique

Soit un corps matériel qui occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$), avec une surface frontière régulière, partitionnée en trois parties mesurables Γ_1, Γ_2 et Γ_3 , telles que $mes\Gamma_1 > 0$. On note par ν la normale unitaire sortante à Γ . Le corps est encastré sur Γ_1 dans une structure fixe. Sur Γ_2 agissent des tractions surfaciques de densité f_2 et dans Ω agissent des forces volumiques de densité f_0 . Nous supposons que f_2 et f_0 varient très lentement par rapport au temps. Soit $T > 0$ et soit $[0, T]$ l'intervalle de temps en question. En plus de l'action des forces et des tractions, le corps est soumis à l'action des charges électriques de densité volumique q_0 et des charges électriques de surface. Pour les décrire, nous considérons une deuxième partition de la frontière Γ en trois parties mesurables Γ_a, Γ_b et Γ_3 telles que $mes(\Gamma_a) > 0$. Nous supposons que le corps est en contact frottant avec ou sans adhésion avec une fondation isolatrice (ou conductive) sur Γ_3 , le potentiel électrique s'annule sur Γ_a et une charge électrique superficielle de densité q_2 est prescrite sur Γ_b . La différence

par rapport au cadre physique précédent résulte du fait que maintenant nous prenons en considération les propriétés mécaniques et aussi les propriétés électriques du corps matériel. Nous étudions l'évolution de ces propriétés dans l'intervalle de temps $[0, T]$ en admettant que le processus est quasistatique, dans l'hypothèse des petites transformations.

Nous utiliserons ce cadre physique dans le dernier chapitre de ce mémoire.

Nous désignons par $\mathbb{S}^d$ l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur $\mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$), “.” et $\|\cdot\|$ représentent respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{S}^d$. Ainsi,

$$\begin{aligned} u.v &= u_i v_i, & \|v\| &= (v.v)^{\frac{1}{2}}, & \forall u, v \in \mathbb{R}^d, \\ \sigma.\tau &= \sigma_{ij} \tau_{ij}, & \|\tau\| &= (\tau.\tau)^{\frac{1}{2}}, & \forall \sigma, \tau \in \mathbb{S}^d, \end{aligned}$$

avec la convention de l'indice muet.

On note par $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ le champ des déplacements, $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$ le champ des contraintes, $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ le champ potentiel électrique, $D : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ le champ des déplacements électriques, $\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ le champ d'adhésion et $\alpha : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ le champ d'endommagement, $\varepsilon(u)$ et $E(\varphi)$ le champ des déformations linéarisées et le champ électrique.

Pour un vecteur u , nous désignons par u_ν et u_τ les composantes normale et tangentielle

$$u_\nu = u.\nu, \quad u_\tau = u - u_\nu \nu. \quad (1.1.1)$$

Pour le champ des contraintes σ , nous notons par σ_ν et σ_τ les composantes normale et tangentielle du tenseur des contraintes de Cauchy $\sigma\nu$

$$\sigma_\nu = (\sigma\nu)_\nu, \quad \sigma_\tau = (\sigma\nu)_\tau,$$

donc

$$\sigma_\nu = (\sigma\nu).\nu, \quad \sigma_\tau = \sigma\nu - \sigma_\nu \nu. \quad (1.1.2)$$

En utilisant (1.1.1) et (1.1.2), on a la relation

$$(\sigma\nu).u = \sigma_\nu u_\nu + \sigma_\tau .u_\tau, \quad (1.1.3)$$

qui va intervenir tout au long de ce mémoire pour établir les formulations variationnelles des problèmes mécaniques.

En outre, $\dot{u}$ désigne le champ des vitesses et $\ddot{u}$ désigne le champ des accélérations.

Nous rappelons que les opérateurs de déformation et de divergence sont donnés par

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \text{Div} \sigma = (\sigma_{ij,j}) \quad 1 \leq i, j \leq d. \quad (1.1.4)$$

Dans ce mémoire, le champ électrique est donné par

$$E(\varphi) = -\nabla \varphi,$$

soit encore

$$E(\varphi) = (E_i(\varphi)), \quad E_i(\varphi) = -\varphi_{,i}, \quad 1 \leq i \leq d.$$

1.3 Lois de comportement

Nous commençons avec le modèle mathématique qui décrit l'évolution du corps dans le cadre physique. La loi fondamentale de la mécanique des milieux continus exprimant l'équivalence entre des efforts extérieurs et le tenseur des accélérations pour un système quelconque conduit à l'équation de mouvement de Cauchy

$$\text{Div} \sigma + f_0 = \rho \ddot{u} \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T), \quad (1.1.5)$$

où $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ désigne la densité de masse. Les processus d'évolution définis par (1.1.5) s'appellent processus dynamiques. Dans certaines situations, cette équation peut encore se simplifier. Par exemple, dans le cas où $\dot{u} = 0$, il s'agit d'un processus statique. Dans le cas où le champ des vitesses varie lentement par rapport au temps, c'est-à-dire que le terme $\rho \ddot{u}$ peut être négligé, on est en présence d'un processus quasistatique. Dans ces deux cas l'équation (1.1.5) devient

$$\text{Div} \sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T). \quad (1.1.6)$$

Dans le cas d'un matériau piézoélectrique, la loi de comportement contient une nouvelle inconnue, le champ électrique E , d'où la nécessité d'introduire une autre équation d'équilibre pour la gérer. C'est l'équation de Maxwell-Gauss ou équation de conservation de la charge

$$\text{div} D = q_0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T), \quad (1.1.7)$$

Les équations précédentes sont insuffisantes à elles seules pour décrire le mouvement du corps matériel considéré. Il est nécessaire de décrire ce qui est propre au matériau lui même; c'est l'objet des lois de comportement.

Loi de comportement des matériaux viscoélastiques.

L'investigation des propriétés mécaniques des matériaux tels que les pâtes, les huiles et les cires a mis en évidence les insuffisances de la théorie de l'élasticité. En effet, certains phénomènes, tels que le fluage ou la relaxation ne peuvent être décrits par les lois de comportement élastiques. C'est pourquoi les modèles viscoélastiques furent introduits. Ils sont utilisés aussi pour décrire le comportement de différents matériaux comme les métaux, les polymères, les caoutchoucs et les roches.

Ce sont donc des matériaux viscoélastiques. Dans le cas multidimensionnel la loi viscoélastique de Kelvin-Voigt s'écrit

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{G}\varepsilon(u(t)) \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T), \quad (1.1.8)$$

où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{G}$ sont des fonctions constitutives non linéaires. $\mathcal{A}$ représente l'opérateur de *viscosité* et $\mathcal{G}$ désigne l'opérateur d'*élasticité*.

Et pour un corps élastique lorsque $\mathcal{A} = 0$, la loi se réduit à

$$\sigma = \mathcal{G}\varepsilon(u).$$

Nous rappelons qu'en viscoélasticité linéaire, le tenseur de contraintes $\sigma = (\sigma_{ij})$ est donné par

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\dot{u}) + g_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u).$$

$\mathcal{A} = (a_{ijkl})$ est le tenseur de *viscosité* et $\mathcal{G} = (g_{ijkl})$ le tenseur d'*élasticité*, pour $i, j, k, l = 1, \dots, d$.

La loi de comportement (1.1.8) est une loi viscoélastique du type Kelvin-Voigt.

Si nous prenons en considération l'effet de l'endommagement du matériau durant le contact, nous arrivons à une généralisation de la loi précédente qui est la loi de comportement viscoélastique avec endommagement ayant la forme

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{G}\varepsilon(u(t), \alpha(t)) \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T), \quad (1.1.9)$$

La fonction α représente l'endommagement dont l'évolution est décrite par l'inclusion différentielle suivante

$$\dot{\alpha} - k\Delta\alpha + \partial\varphi_K(\alpha) \ni S(\varepsilon(u), \alpha), \quad (1.1.10)$$

L'ensemble des fonctions d'endommagement admissibles K défini par

$$K = \{\zeta \in H^1(\Omega) : 0 \leq \zeta \leq 1 \quad \text{p.p. dans } \Omega \} \quad (1.1.11)$$

k est un coefficient positif, $\partial\varphi_K$ représente le sous-différentiel de la fonction indicatrice φ_K . S est une fonction constitutive donnée qui représente la source d'endommagement dans le système.

Nous utiliserons la loi viscoélastique dans le première chapitre de ce mémoire.

Lois de comportement des matériaux électro élasto-viscoplastiques avec endommagement.

Un matériau est dit électro élasto-viscoplastique si sa loi de comportement est de la forme

$$\begin{cases} \sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{B}\varepsilon(u(t)) - \mathcal{E}^* E(\varphi(t)) \\ \quad + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(s)) + \mathcal{E} E(\varphi(s)), \varepsilon(u(s)), \alpha(s)) ds. \\ \mathbf{D}(t) = \mathcal{E}\varepsilon(u(t)) + BE(\varphi(t)) \end{cases} \quad (1.1.12)$$

$\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des opérateurs non linéaires décrivant le purement visqueux et les propriétés élastiques de la matière, respectivement, $E(\varphi) = -\nabla\varphi$ est le champ électrique, $E = (e_{ijk})$ représente la troisième commande piézoélectrique tenseur $\mathcal{E}^*$ est sa transposée et B désigne le tenseur de permittivité électrique, et $\mathcal{G}$ est une fonction constitutive non linéaire qui décrit la viscoplastique le comportement de la matière, où α représente le champ d'endommagement, l'évolution du champ d'endommagement est décrite par

$$\dot{\alpha} - k\Delta\alpha + \partial\varphi_K(\alpha) \ni S(\sigma - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{E} E(\varphi)\varepsilon(u), \alpha), \quad (1.1.13)$$

où $k > 0$, $\partial\varphi_K$ est le sous-différentiel de la fonction indicatrice sur K défini précédemment.

Loi de comportement des matériaux électro-viscoélastiques avec mémoire longue et endommagement.

Dans ce cas la loi de comportement est donnée par

$$\begin{cases} \sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}(\varepsilon(u), \alpha) + \int_0^t M(t-s) \varepsilon(u(s)) ds - \mathcal{E}^* E(\varphi), \\ D = \mathcal{E}\varepsilon(u) + BE(\varphi), \end{cases} \quad (1.1.14)$$

où $M = (M_{ij})$ est un tenseur de relaxation. Si $M = 0$, on retrouve la loi électro-viscoélastique.

Nous passons maintenant aux conditions aux limites utilisées dans les chapitres 2 et 3.

1.4 Conditions aux limites de contact avec adhésion

On définit maintenant les conditions aux limites mécaniques et électriques sur chaque partie de Γ .

La condition aux limites de déplacement. Le corps est encastré dans une position fixe sur la partie Γ_1 , le champ des déplacements u est par conséquent nul

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times (0, T). \quad (1.1.15)$$

La condition aux limites de traction. Une traction surfacique de densité f_2 agit sur Γ_2 et par conséquent le vecteur des contraintes de Cauchy $\sigma\nu$ satisfait

$$\sigma\nu = f_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \times (0, T), \quad (1.1.16)$$

La condition aux limites de bilatéral. le contact entre le corps et la fondation est bilatéral si le contact est maintenu pendant le mouvement. Cette propriété se traduit mathématiquement par

$$u_\nu = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times (0, T). \quad (1.1.17)$$

Les conditions aux limites électriques. Ces conditions sont déterminées à partir des deux équations

$$\varphi = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_a \times (0, T), \quad (1.1.18)$$

$$D \cdot \nu = q_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_b \times (0, T), \quad (1.1.19)$$

Les conditions de contact avec compliance normale et adhésion. On va décrire les conditions de contact avec compliance normale et adhésion sur $\Gamma_3 \times (0, T)$, on introduit

une variable interne d'état β définie sur $\Gamma_3 \times (0, T)$ qui représente l'intensité d'adhésion sur la surface de contact, telle que $0 \leq \beta \leq 1$. Quand $\beta = 1$ l'adhésion est complète et tous les liens sont actifs, quand $\beta = 0$ tous les liens sont désactivés et il n'y a pas d'adhésion; quand $0 < \beta < 1$ c'est le cas d'une adhésion partielle. Pour plus détails sur ce paragraphe, on renvoie par exemple [17] et [18].

On suppose que la contrainte normale satisfait la condition de *compliance normale et adhésion*

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu) - \gamma_\nu \beta^2 (-R(u_\nu))_+ \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T). \quad (1.1.20)$$

On suppose que la résistance au mouvement tangentiel est générée par la colle en comparaison à ce que la traction tangentielle soit négligeable. Ainsi, elle dépend seulement de l'intensité d'adhésion et du déplacement tangentiel.

$$-\sigma_\tau = p_\tau(\beta, u_\tau) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T). \quad (1.1.21)$$

En particulier, on doit considérer le cas:

$$p_\tau(\beta, r) = \begin{cases} q_\tau(\beta) r & \text{si } \|r\| < L_0 \\ q_\tau(\beta) \frac{r}{\|r\|} L_0 & \text{si } \|r\| > L_0 \end{cases} \quad (1.1.22)$$

où $L_0 > 0$ est la longueur limite liée, et q_τ est une fonction de raideur tangentielle non négative. Le processus est supposé être gouverné par l'équation différentielle

$$\dot{\beta} = H_{ad}(\beta, \zeta_\beta, R(|u_\tau|)) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T). \quad (1.1.23)$$

H_{ad} est une fonction générale qui s'annule quand le premier de ses variables s'annule.

La fonction $R : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une troncature définie par

$$R(s) = \begin{cases} L & \text{si } s \geq L \\ s & \text{si } |s| \leq L \\ -L & \text{si } s \leq -L. \end{cases} \quad (1.1.24)$$

où $L > 0$ est la longueur caractéristique des liens.

On considère la possibilité d'une diminution de l'efficacité de collage quand les cycles de collage et de décollage continuent. Par conséquent, le processus est supposé dépendre de

l'histoire d'adhésion qu'on note par

$$\zeta_\beta(x, t) = \int_0^t \beta(x, s) ds. \quad (1.1.25)$$

On donne quelques exemples de ce genre de fonctions

$$H_{ad}(\beta, r) = -\gamma_\nu \beta_+ r^2.$$

où γ_ν est la constante de l'énergie de collage.

Un autre exemple, dans lequel H_{ad} dépend de ses trois variables, est

$$H_{ad}(\beta, \zeta, r) = -\gamma_\nu^- \beta_+ r^2 + \frac{\gamma_\nu^+ \beta_+ (1 - \beta)_+}{1 + \zeta^2}. \quad (1.1.26)$$

où r_+ représente la partie positive de r .

1.5 Lois de contact avec frottement et adhésion

Par condition de contact nous comprenons une relation impliquant les composantes normales du champ des déplacements, des vitesses ou des contraintes. Par loi de frottement nous comprenons une relation entre la contrainte tangentielle σ_τ et le déplacement tangentiel u_τ ou la vitesse tangentielle $\dot{u}_\tau$. Notons ici que σ_τ s'appelle aussi force de frottement.

Nous commençons par présenter les conditions aux limites de contact utilisées tout au long de ce mémoire. Dans ce cas, nous nous plaçons dans le cadre physique n°.1. Les égalités et les inégalités qui suivent sont considérées vraies presque partout sur $\Gamma_3 \times (0, T)$.

Contact avec compliance normale

Dans ce cas, la fondation est supposée déformable et la zone de contact n'est pas connue à priori. La contrainte normale σ_ν satisfait la condition dite de compliance normale

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - g) \quad (1.1.27)$$

où u_ν est le déplacement normal, g représente l'interstice entre le corps et la fondation et p_ν est une fonction positive donnée, appelée fonction de compliance normale.

Cette condition indique que la fondation exerce une action sur le corps en fonction de sa pénétration $u_\nu - g$. Précisons que dans les chapitres 5 et 6 du mémoire nous considérons

le cas où le corps se repose sur la fondation, c'est-à-dire, l'interstice est nul, $g = 0$. Comme exemple de la fonction u_ν nous pouvons considérer

$$p_\nu(r) = c_\nu r_+ \quad (1.1.28)$$

où c_ν est une constante positive et $r_+ = \max\{0, r\}$. Un deuxième exemple est donné par

$$p_\nu(r) \begin{cases} c_\nu r_+ & \text{si } r \leq \delta \\ c_\nu \alpha & \text{si } r > \delta \end{cases} \quad (1.1.29)$$

où δ est un coecient positif relatif à la dureté de la surface. Dans ce cas, la condition de contact (1.1.27) signifie que lorsque la pénétration est trop profonde, i.e. quand elle dépasse α , la fondation se désintègre et n'offre plus de résistance à la pénétration.

Maintenant, nous présentons les lois de frottement intervenant dans ce mémoire.

Loi de frottement de type Coulomb

C'est une des lois de frottement les plus répandues dans la littérature mathématique. Elle se caractérise par l'intervention de la contrainte normale dans le seuil de frottement et elle peut s'énoncer comme suit

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq \mu |\sigma_\nu| \\ \|\sigma_\tau\| < \mu |\sigma_\nu| \Rightarrow u_\tau = 0 \\ \|\sigma_\tau\| = \mu |\sigma_\nu| \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda u_\tau \end{cases} \quad (1.1.30)$$

où $\mu \geq 0$ est le coefficient de frottement. C'est une version statique de la loi de Coulomb qui intervient dans la description du contact frottant des problèmes étudiés dans la deuxième partie du mémoire.

Maintenant, nous remplaçons le seuil de frottement σ_ν de la loi (1.1.30), par la condition de compliance normale (1.1.27), de façon à obtenir les conditions suivantes.

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq \mu p_\nu(u_\nu - g) \\ \|\sigma_\tau\| < \mu p_\nu(u_\nu - g) \Rightarrow u_\tau = 0 \\ \|\sigma_\tau\| = \mu p_\nu(u_\nu - g) \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda u_\tau \end{cases} \quad (1.1.31)$$

Une version quasistatique de la loi de frottement de Coulomb utilisée en littérature est donnée par

$$\begin{cases} -\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - g) \\ \|\sigma_\tau\| \leq p_\tau(u_\nu - g) \end{cases} \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T). \quad (1.1.32)$$

où p_τ est une fonction positive. Dans (1.1.35), la contrainte tangentielle ne peut pas excéder le seuil de frottement $p_\nu(u_\nu - g)$. De plus, quand le seuil de frottement est atteint, le corps se met à glisser et la contrainte tangentielle tend à s'opposer au mouvement. Cette condition de frottement a été utilisée dans différents papiers, par exemple \cite{So2,Ro1}.

Pour compléter le modèle, nous supposons que l'évolution du champ d'adhésion est gouvernée par une équation différentielle ordinaire

$$\dot{\beta} = - \left(\beta \left[\gamma_\nu (R_\nu(u_\nu))^2 + \gamma_\tau \|\mathbf{R}_\tau(u_\tau)\|^2 \right] - \epsilon_a \right)_+ \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (1.1.33)$$

A celle-ci, nous rajoutons la condition initiale

$$\beta(0) = \beta_0 \quad \text{sur } \Gamma_3, \quad (1.1.34)$$

Ici γ_ν, γ_τ et ϵ_a sont des coefficients d'adhésion positifs et $r_+ = \max\{0, r\}$ et R_ν est un opérateur de troncation défini par

$$R_\nu(s) = \begin{cases} L & \text{si } s < -L, \\ -s & \text{si } -L \leq s \leq 0, \\ 0 & \text{si } s > 0, \end{cases}$$

où $L > 0$ est la longueur caractéristique de la liaison, voir [38]. Et $\mathbf{R}_\tau : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est un opérateur de tronqueur défini par

$$\mathbf{R}_\tau(v) = \begin{cases} v & \text{si } \|v\| \leq L, \\ L \frac{v}{\|v\|} & \text{si } \|v\| > L. \end{cases}$$

Cette condition montre que la contrainte tangentielle adhésive sur la surface de contact est proportionnelle au déplacement tangentiel, mais tant qu'il n'excède pas la longueur du lien L .

Est β_0 l'adhésion initiale tel que

$$0 \leq \beta_0 \leq 1, \quad \text{p.p. } x \in \Gamma_3. \quad (1.1.35)$$

Remarque 1.3.1. Nous remarquons que sous les trois conditions précédentes le champ d'adhésion vérifie la restriction $0 \leq \beta \leq 1$. En effet, puisque $\dot{\beta} \leq 0$ donc $\beta \leq \beta_0 \leq 1$. En

outre, si $\beta = 0$ quand $t = t_0$ donc $\dot{\beta} = 0$ pour tout $t \geq t_0$, et d'où $\beta = 0$ pour tout $t \geq t_0$, p.p. $x \in \Gamma_3$. Alors, nous concluons que $0 \leq \beta \leq 1$ pour tout $t \in [0, T]$ p.p. $x \in \Gamma_3$.

Pour plus de détails concernant la modélisation du contact adhésif, nous référons aux livres [45, 48,].

1.6 Conditions électriques à la surface de contact

Dans ce paragraphe nous allons énoncer les conditions de contact électrique, associées aux problèmes électro-mécaniques, sur la partie Γ_3 de la surface. Nous supposons que la fondation est électriquement conductive et son potentiel est maintenu à φ_0 . La condition électrique sur Γ_3 est donnée par

$$\mathbf{D} \cdot \nu = \psi(u_\nu - g)\phi(\varphi - \varphi_0) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T). \quad (1.1.36)$$

où ψ et ϕ sont des fonctions données qui seront décrites ultérieurement. Cette condition représente une condition régularisée qui peut être obtenue à partir des considérations suivantes.

Lorsqu'il n'y a pas de contact en un point sur la surface (i.e. $u_\nu < g$), l'interstice entre le corps et la base est supposé être isolant (disons qu'il est rempli d'air) et la composante normale du champ de déplacement électrique s'annule pour qu'il n'y ait aucune charge électrique libre sur la surface. Ainsi,

$$u_\nu < g \Rightarrow \mathbf{D} \cdot \nu = 0 \quad (1.1.37)$$

Durant le processus de contact, (i.e. quand $u_\nu \geq g$) la composante normale du champ de déplacement électrique ou la charge électrique libre est supposé être proportionnelle à la différence de potentiel entre la surface du corps et la fondation, avec une constante positive k comme facteur de proportionnalité. Ainsi,

$$u_\nu \geq g \Rightarrow \mathbf{D} \cdot \nu = k(\varphi - \varphi_0) \quad (1.1.38)$$

Combinons (1.1.37), (1.1.38) pour obtenir

$$\mathbf{D} \cdot \nu = k_{\chi_{[0, \infty)}}(u_\nu - g)(\varphi - \varphi_0) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T). \quad (1.1.39)$$

où $\chi_{[0,\infty)}$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[0, \infty)$, qui est donnée par

$$\chi_{[0,\infty)}(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < 0 \\ 1 & \text{si } r \geq 0 \end{cases}$$

La condition (1.1.39) décrit le contact électrique parfait et elle est en quelque sorte semblable à la condition bien connue de contact de Signorini. Les deux conditions peuvent être considérées comme des sur-idéalisations dans plusieurs applications.

Pour la rendre plus réaliste, nous régularisons la condition (1.1.39) par la condition (1.1.36) dans laquelle ψ est une fonction régulière qui va être décrite ci-dessous et ψ est une fonction de troncation,

$$\phi_L(s) = \begin{cases} -L_\phi & \text{si } s < -L_\phi \\ s & \text{si } -L_\phi \leq s \leq L_\phi \\ L_\phi & \text{si } s > L_\phi \end{cases} \quad (1.1.40)$$

où L_ϕ est une constante positive très grande. De cette façon, la différence $\varphi - \varphi_0$ est remplacé par $\psi(\varphi - \varphi_0)$. Notons que cette troncation ne pose aucune limitation pratique sur l'applicabilité du modèle puisque L_ϕ peut être arbitrairement grand et donc dans les applications $\psi(\varphi - \varphi_0) = \varphi - \varphi_0$.

Les raisons de la régularisation (1.1.36) de (1.1.39) sont mathématiques.

Premièrement, nous avons besoin d'éviter les discontinuités dans les charges électriques lorsque le contact est établi et donc nous régularisons la fonction $k\chi_{[0,\infty)}$ dans (1.1.39) par une fonction Lipschitzienne ψ . Un choix possible est l'exemple suivant :

$$\psi(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < 0, \\ k\delta r & \text{si } 0 \leq r \leq \frac{1}{\delta}, \\ k & \text{si } r > \delta, \end{cases} \quad (1.1.41)$$

où δ est un paramètre assez grand. Ce choix veut dire que durant le processus du contact, la conductivité électrique augmente avec le contact à travers les aspérités de la surface, et se stabilise quand la pénétration $u_\nu - g$ atteint la valeur $\frac{1}{\delta}$.

Deuxièmement, nous avons besoin du terme $\psi(\varphi - \varphi_0)$ pour rendre le terme $\varphi - \varphi_0$ borné.

Notons que lorsque $\psi = 0$ dans (1.1.36), nous obtenons

$$\mathbf{D}.\nu = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times (0, T). \quad (1.1.42)$$

ce qui découple les problèmes électriques et mécaniques sur la surface de contact. La condition (1.1.42) modélise le cas où l'obstacle est un isolant parfait et a été utilisée dans [6, 35, 49, 50]. La condition (1.1.36) à la place de (1.1.42), introduit un couplage fort entre les conditions aux limites mécaniques et électriques et mène vers un nouveau modèle mathématique, non standard. Elle sera utilisée dans les chapitres 3 du mémoire. Par ailleurs, la condition (1.1.36) va être utilisée dans le cinquième chapitre du mémoire où nous avons supposé que la base est isolatrice (i.e. $\psi \equiv 0$).

1.7 Formulation mathématique des problèmes de contact

L'évolution d'un corps déformable sous l'action des efforts extérieurs est modélisée mathématiquement par un système d'équations aux dérivées partielles contenant l'équation de mouvement (ou d'équilibre) du corps, la loi de comportement du matériau ainsi que les conditions initiales et aux limites auxquelles il est soumis. On considère dans les chapitres 2 et 3 des matériaux ayant des lois de comportement viscoélastiques avec endommagement soumis à des conditions aux limites de contact avec adhésion citées dans les paragraphes précédents, dans le cas dynamique. Plus précisément, les problèmes mécaniques qu'on va étudier sont les suivants

Problèmes dynamiques

Problème 1 : Problème de contact avec compliance normale et adhésion en viscoélasticité avec endommagement

Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ et le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{S}^d$, le champ d'endommagement $\alpha : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$, et

le champ d'adhésion $\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \longrightarrow [0, 1]$ tels que

$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{G}\varepsilon(u(t), \alpha(t))$	dans	$\Omega \times (0, T)$,
$\dot{\alpha} - k\Delta\alpha + \partial\varphi_K(\alpha) \ni S(\varepsilon(u), \alpha)$	dans	$\Omega \times (0, T)$,
$\rho \ddot{u} = \text{Div}\sigma + f_0$	dans	$\Omega \times (0, T)$,
$u = 0$	sur	$\Gamma_1 \times (0, T)$,
$\sigma\nu = f_2$	sur	$\Gamma_2 \times (0, T)$,
$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu) - \gamma_\nu\beta^2(-R(u_\nu))_+$	sur	$\Gamma_3 \times (0, T)$,
$-\sigma_\tau = p_\tau(\beta, u_\tau)$	sur	$\Gamma_3 \times (0, T)$,
$\dot{\beta} = H_{ad}(\beta, \zeta_\beta, R(\ u\))$	sur	$\Gamma_3 \times (0, T)$,
$\frac{\partial\alpha}{\partial\nu} = 0$	sur	$\Gamma \times (0, T)$,
$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = v_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0$	dans	Ω
$\beta(0) = \beta_0$	sur	Γ_3

Problème 2 : Problème viscoélastique de contact bilatéral avec adhésion et endommagement

Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ et le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{S}^d$, le champ d'endommagement $\alpha : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$, et le champ d'adhésion $\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \longrightarrow [0, 1]$ tels que

$$\begin{array}{lll}
 \sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{G}\varepsilon(u(t), \alpha(t)) & \text{dans} & \Omega \times (0, T), \\
 \dot{\alpha} - k\Delta\alpha + \partial\varphi_K(\alpha) \ni S(\varepsilon(u), \alpha) & \text{dans} & \Omega \times (0, T), \\
 \rho \ddot{u} = \text{Div}\sigma + f_0 & \text{dans} & \Omega \times (0, T), \\
 u = 0 & \text{sur} & \Gamma_1 \times (0, T), \\
 \sigma\nu = f_2 & \text{sur} & \Gamma_2 \times (0, T), \\
 u_\nu = 0 & \text{sur} & \Gamma_3 \times (0, T), \\
 -\sigma_\tau = p_\tau(\beta, u_\tau) & \text{sur} & \Gamma_3 \times (0, T), \\
 \dot{\beta} = H_{ad}(\beta, R(\|u_\tau\|)) & \text{sur} & \Gamma_3 \times (0, T), \\
 \frac{\partial\alpha}{\partial\nu} = 0 & \text{sur} & \Gamma \times (0, T), \\
 u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = v_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0 & \text{dans} & \Omega \\
 \beta(0) = \beta_0 & \text{sur} & \Gamma_3
 \end{array}$$

Problèmes quasistatiques

Problème 3 : Problème électro élasto-viscoplastique avec endommagement de contact avec frottement et adhésion .

Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ et le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{S}^d$, le champ potentiel électrique $\varphi : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$, le champ déplacement électrique $\mathbf{D} : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$, le champ de endommagement $\alpha : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$, et le champ d'adhésion $\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \longrightarrow [0, 1]$ tel que

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{B}\varepsilon(u(t)) + \mathcal{E}^* \nabla \varphi(t) && \text{dans} && \Omega \times (0, T), \\
 &+ \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(s)) - \mathcal{E}^* \nabla \varphi(s), \varepsilon(u(s)), \alpha(s)) ds \\
 D &= \mathcal{E}\varepsilon(u(t)) - B\nabla \varphi(t) && \text{dans} && \Omega \times (0, T), \\
 \dot{\alpha} - k\Delta\alpha + \partial\varphi_K(\alpha) &\ni S(\sigma(-\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) - \mathcal{E}^* \nabla \varphi, \varepsilon(u), \alpha) && \text{dans} && \Omega \times (0, T), \\
 \text{Div}\sigma + f_0 &= 0 && \text{dans} && \Omega \times (0, T), \\
 \text{div } \mathbf{D} - q_0 &= 0 && \text{sur} && \Gamma_1 \times (0, T), \\
 u &= 0 && \text{sur} && \Gamma_2 \times (0, T), \\
 \sigma\nu &= f_2 && \text{sur} && \Gamma_3 \times (0, T), \\
 \begin{cases} -\sigma_\nu &= p_\nu(u_\nu - g), \\ \|\sigma_\tau\| &\leq p_\tau(u_\nu - g), \end{cases} && \text{sur} && \Gamma_3 \times (0, T), \\
 \dot{u}_\tau \neq 0 \Rightarrow \sigma_\tau &= -p_\tau(u_\nu - g) \frac{\dot{u}_\tau}{\|\dot{u}_\tau\|}, && \text{sur} && \Gamma_3 \times (0, T), \\
 \dot{\beta} &= -(\beta(\gamma_\nu R_\nu(u_\nu))^2 + \gamma_\tau \|\mathbf{R}_\tau(u_\tau)\|^2) - \epsilon_+ && \text{sur} && \Gamma_3 \times (0, T), \\
 \frac{\partial \alpha}{\partial \nu} &= 0 && \text{sur} && \Gamma \times (0, T), \\
 \varphi &= 0 && \text{sur} && \Gamma_a \times (0, T), \\
 \mathbf{D} \cdot \nu &= q_2 && \text{sur} && \Gamma_b \times (0, T), \\
 \mathbf{D} \cdot \nu &= \psi(u_\nu - g)\phi(\varphi - \varphi_0) && \text{sur} && \Gamma_3 \times (0, T), \\
 u(0) &= u_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0 && \text{dans} && \Omega \\
 \beta(0) &= \beta_0 && \text{sur} && \Gamma_3
 \end{aligned}$$

Problème 4 : Problème électro viscoélastique avec mémoire à long terme avec endommagement de contact avec frottement et adhésion.

Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ et le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{S}^d$, le champ potentiel électrique $\varphi : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$, le champ déplacement électrique $\mathbf{D} : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$, le champ de endommagement $\alpha : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$, et le champ d'adhésion $\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \longrightarrow [0, 1]$ tel que

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{G}\varepsilon(u(t), \alpha(t)) + \int_0^t \mathcal{M}(t-s)\varepsilon(u(s))ds + \mathcal{E}^* \nabla \varphi(t) & \text{dans} & \quad \Omega \times (0, T), \\
 D &= \mathcal{E}\varepsilon(u(t)) - B\nabla \varphi(t) & \text{dans} & \quad \Omega \times (0, T), \\
 \dot{\alpha} - k\Delta\alpha + \partial\varphi_K(\alpha) &\ni S(\sigma(-\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) - \mathcal{E}^* \nabla \varphi, \varepsilon(u), \alpha) & \text{dans} & \quad \Omega \times (0, T), \\
 \text{Div}\sigma + f_0 &= 0 & \text{dans} & \quad \Omega \times (0, T), \\
 \text{div } \mathbf{D} - q_0 &= 0 & \text{sur} & \quad \Gamma_1 \times (0, T), \\
 u &= 0 & \text{sur} & \quad \Gamma_2 \times (0, T), \\
 \sigma\nu &= f_2 & \text{sur} & \quad \Gamma_3 \times (0, T), \\
 \begin{cases} -\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - g), \\ \|\sigma_\tau\| \leq p_\tau(u_\nu - g), \end{cases} & & \text{sur} & \quad \Gamma_3 \times (0, T), \\
 \dot{u}_\tau \neq 0 \Rightarrow \sigma_\tau &= -p_\tau(u_\nu - g) \frac{\dot{u}_\tau}{\|\dot{u}_\tau\|}, & \text{sur} & \quad \Gamma_3 \times (0, T), \\
 \dot{\beta} &= -(\beta(\gamma_\nu R_\nu(u_\nu))^2 + \gamma_\tau \|\mathbf{R}_\tau(u_\tau)\|^2) - \epsilon_+ & \text{sur} & \quad \Gamma_3 \times (0, T), \\
 \frac{\partial\alpha}{\partial\nu} &= 0 & \text{sur} & \quad \Gamma \times (0, T), \\
 \varphi &= 0 & \text{sur} & \quad \Gamma_a \times (0, T), \\
 \mathbf{D}.\nu &= q_2 & \text{sur} & \quad \Gamma_b \times (0, T), \\
 \mathbf{D}.\nu &= \psi(u_\nu - g)\phi(\varphi - \varphi_0) & \text{sur} & \quad \Gamma_3 \times (0, T), \\
 u(0) &= u_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0 & \text{dans} & \quad \Omega \\
 \beta(0) &= \beta_0 & \text{sur} & \quad \Gamma_3
 \end{aligned}$$

1.8 Rappels d'analyse

Dans cette section, nous rappelons quelques résultats concernant les espaces fonctionnels, les équations et inéquations variationnelles, le lemme de Gronwall et quelques théorèmes qui seront d'une grande utilité pour les démonstrations.

1.8.1 Cadre fonctionnel vectoriel

La modélisation de problèmes de mécanique nécessite la plupart du temps l'introduction d'espaces de fonctions spécifiques. Nous donnons dans ce paragraphe les espaces ainsi que quelques unes de leurs propriétés.

On introduit les espaces suivants:

$$\left\{ \begin{array}{l} H = \{u = (u_i) \mid u_i \in L^2(\Omega)\}, \\ \mathcal{H} = \{\sigma = (\sigma_{ij}) \mid \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega)\}, \\ H_1 = \{u = (u_i) \mid u_i \in H^1(\Omega)\}, \\ \mathcal{H}_1 = \{\sigma \in \mathcal{H} \mid \sigma_{ij,j} \in H\}. \end{array} \right.$$

Les espaces H , $\mathcal{H}$, H_1 et $\mathcal{H}_1$ sont des espaces de Hilbert réels munis des produits scalaires donnés par

$$\left\{ \begin{array}{l} (u, v)_H = \int_{\Omega} u_i v_i dx, \\ (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} dx, \\ (u, v)_{H_1} = (u, v)_H + (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}, \\ (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}_1} = (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}} + (Div \sigma, Div \tau)_H, \end{array} \right.$$

respectivement, où $\varepsilon : H_1 \rightarrow \mathcal{H}$ et $Div : \mathcal{H}_1 \rightarrow H$ sont les opérateurs de déformation et de divergence, définis par

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad Div \sigma = (\sigma_{ij,j}).$$

Les normes sur les espaces H , $\mathcal{H}$, H_1 et $\mathcal{H}_1$ sont notées par $\|\cdot\|_H$, $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, $\|\cdot\|_{H_1}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_1}$, respectivement. Puisque la frontière Γ est Lipschitzienne, le vecteur normal extérieur ν à la frontière est défini p.p. Pour tout champ de vecteur $v \in H_1$ nous utilisons la notation v pour désigner la trace γv de v sur Γ .

Nous rappelons que l'application de trace $\gamma : H_1 \rightarrow L^2(\Gamma)^d$ est linéaire et continue, mais n'est pas surjective. L'image de H_1 par cette application est notée par $H_\Gamma = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$; ce sous-espace s'injecte continûment dans $L^2(\Gamma)^d$.

Nous introduisons à présent un sous-espace fermé de H_1 , dont la définition est donnée ci-après

$$V = \{v \in H_1 \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}.$$

l'inégalité de Korn. Soit $\text{mes } \Gamma_1 > 0$. Alors il existe une constante $c_k > 0$ dépendant uniquement de Ω et Γ_1 telle que

$$\|\varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}} \geq c_k \|v\|_{H_1} \quad \forall v \in V. \quad (1.1.43)$$

sur V nous considérons le produit scalaire donné par

$$(u, v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in V, \quad (1.1.44)$$

et soit $\|\cdot\|_V$ la norme associée; c'est-à-dire

$$\|v\|_V = \|\varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}} \quad \forall v \in V. \quad (1.1.45)$$

Par l'inégalité de Korn, il vient que $\|\cdot\|_{H_1}$ et $\|\cdot\|_V$ sont des normes équivalentes sur V et ainsi $(V, (\cdot, \cdot)_V)$ est un espace de Hilbert.

En outre, d'après (1.1.46), (1.1.47) et le théorème de trace de Sobolev, trouvons qu'il existe une constante $c_0 > 0$ dépendant uniquement de Ω, Γ_1 et Γ_3 telle que

$$\|v\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq c_0 \|v\|_V \quad \forall v \in V. \quad (1.1.46)$$

Il résulte par l'inégalité de Korn que $(V, \|\cdot\|_V)$ est un espace de Hilbert réel.

Pour une fonction scalaire, qui représente le champ d'adhésion sur la surface Γ_3 du contact, nous définissons l'ensemble

$$\mathcal{Z} = \{\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \mid 0 \leq \beta(t) \leq 1 \text{ sur } \Gamma_3\}.$$

Dans ce qui suit, nous définissons les espaces de Sobolev associés aux inconnues électriques (champ du déplacement électrique $\mathbf{D}$ et le potentiel électrique.) des problèmes électro-mécaniques qui vont être introduits dans la chapitre 3 de la thèse. Soit les espaces

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \{\mathbf{D} = (D_i), \quad D_i \in L^2(\Omega)\} \\ \mathcal{W}_1 &= \{\mathbf{D} = (D_i), \quad D_i \in L^2(\Omega)^d, \quad \text{div } \mathbf{D} = (D_{ii}) \in L^2(\Omega)\} \end{aligned}$$

munis des produits scalaires

$$(\mathbf{D}, \mathbf{E})_{\mathcal{W}} = \int_{\Omega} D_i E_i dx \quad (\mathbf{D}, \mathbf{E})_{\mathcal{W}_1} = (\mathbf{D}, \mathbf{E})_{\mathcal{W}} + (\operatorname{div} \mathbf{D}, \operatorname{div} \mathbf{E})_{L^2(\Omega)}.$$

et leurs normes associées $\|\cdot\|_{\mathcal{W}}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{W}_1}$, respectivement. Le champ du potentiel électrique va être trouvé dans l'espace

$$W = \{\zeta \in H^1(\Omega) \quad \zeta = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_a\}.$$

respectivement. Puisque $\operatorname{mes}(\Gamma_a) > 0$, l'inégalité de Friedrichs-Poincaré montre qu'il existe une constante $c_F > 0$ dépendant uniquement de Γ_a telle que

$$\|\nabla \zeta\|_{\mathcal{W}} \geq c_F \|\zeta\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall \zeta \in W \quad (1.1.47)$$

Ici et ci-dessous nous écrivons ζ pour la trace d'un élément $\zeta \in H^1(\Omega)$, sur Γ , $E(\varphi) = -\nabla \varphi$, tandis que ∇ est l'opérateur de gradient

$$\nabla \zeta = (\zeta_{,i}), \quad \forall \zeta \in W \quad (1.1.48)$$

Sur l'espace W nous considérons le produit scalaire donné par

$$(\varphi, \zeta)_W = (\nabla \varphi, \nabla \zeta)_W,$$

et soit $\|\cdot\|_W$ la norme associée. En utilisant (1.1.47) on peut vérifier que $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ et $\|\cdot\|_W$ sont des normes équivalentes sur W . Il en résulte que $(W, \|\cdot\|_W)$ est un espace réel de Hilbert réel. De plus, par le théorème de trace de Sobolev, il existe une constante $\tilde{c}_0$ dépendant uniquement de Ω , Γ_a et Γ_3 , telle que

$$\|\zeta\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \tilde{c}_0 \|\zeta\|_W, \quad \forall \zeta \in W \quad (1.1.49)$$

Aussi, rappelons que lorsque $D \in \mathcal{W}_1$ est une fonction régulière, la formule de Green est satisfaite

$$(\mathbf{D}, \nabla \zeta)_{\mathcal{W}} + (\operatorname{div} \mathbf{D}, \zeta)_{\mathcal{W}} = \int_{\Gamma} \mathbf{D} \cdot \nu \zeta da, \quad \forall \zeta \in H^1(\Omega). \quad (1.1.50)$$

Pour des détails supplémentaires sur les espaces de Sobolev nous renvoyons le lecteur par exemple à [1, 13].

1.8.2 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles

Ce paragraphe est destiné à rappeler les principaux résultats sur les fonctions définies sur un interval de temps et à valeurs dans un espace de Banach réel.

Soit $0 < T < +\infty$ et soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach réel.

Nous notons par $C_c(0, T; X)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact dans $(0, T)$ à valeurs dans X .

Définition 1.8.1. Une fonction $u : [0, T] \rightarrow X$ est dite mesurable s'il existe un sous-ensemble $E \subset [0, T]$ de mesure nulle et une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $C_c(0, T; X)$ telle que $|u_n(t) - u(t)|_X \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$, pour tout $t \in [0, T] \setminus E$.

Définition 1.8.2. Une fonction $u : [0, T] \rightarrow X$ est dite fortement dérivable dans $t_0 \in (0, T)$ s'il existe un élément $\frac{du}{dt}(t_0) \in X$ appelé la dérivée forte de u dans t_0 , tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{h} (u(t_0 + h) - u(t_0)) - \frac{du}{dt}(t_0) \right\|_X = 0.$$

Définition 1.8.3. Une fonction $u : [0, T] \rightarrow X$ est dite intégrable s'il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $C_c(0, T; X)$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T \|u_n(t) - u(t)\|_X dt = 0.$$

Théorème 1.8.4. (Bochner) Une fonction $u : [0, T] \rightarrow X$ mesurable et intégrable si et seulement si $t \mapsto \|u(t)\|_X : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable. Dans ce cas

$$\left\| \int_0^T u(t) dt \right\|_X \leq \int_0^T \|u(t)\|_X dt.$$

Soit $1 \leq p \leq +\infty$. L'espace de Lebesgue $L^p(0, T; X)$ est l'ensemble des classes de fonctions $u : (0, T) \rightarrow X$ mesurables, telles que l'application $t \mapsto \|u(t)\|_X$ appartient à $L^p(0, T)$. On sait que $L^p(0, T; X)$ est un espace vectoriel normé avec la norme

$$\|u\|_{0,p,X} = \begin{cases} \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < +\infty, \\ \inf \{c > 0 \mid \|u(t)\|_X < c \text{ p.p. } t \in (0, T)\} & \text{si } p = +\infty. \end{cases}$$

Proposition 1.8.5. (1) $L^p(0, T; X)$ ($1 \leq p \leq +\infty$) est un espace de Banach.

(2) Si X est un espace de Hilbert avec le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$, alors $L^2(0, T; X)$ est aussi un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt.$$

Définition 1.8.6. Soit $1 \leq p \leq +\infty$. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(0, T; X)$ est l'espace des fonction $u : [0, T] \rightarrow X$ telles que $u \in L^p(0, T; X)$ et $\dot{u} \in L^p(0, T; X)$. $W^{1,p}(0, T; X)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{1,p,X} = \|u\|_{0,p,X} + \|\dot{u}\|_{0,p,X}.$$

En particulier, $W^{1,2}(0, T; X)$ est un espace de Hilbert pour la norme précédente.

Définition 1.8.7. Une fonction $u : [0, T] \rightarrow X$ est dite absolument continue si quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon)$ tel que pour toute suite d'intervalles (a_i, b_i) disjoints, inclus dans $[0, T]$, tels que $\sum_i (b_i - a_i) < \delta$ on a $\sum_i |u(b_i) - u(a_i)|_X \leq \varepsilon$.

Théorème 1.8.8. Soit $1 \leq p \leq +\infty$, X un espace de Banach réflexif et soit $u \in L^p(0, T; X)$. Les propriétés suivantes sont équivalente:

- (1) $u \in W^{1,p}(0, T; X)$.
- (2) u admet un représentant absolument continu presque partout dérivable, ayant la dérivée forte dans $L^p(0, T; X)$.
- (3) Il existe $u_0 \in X$ et $g \in L^p(0, T; X)$, telles que

$$u(t) = u_0 + \int_0^t g(s) ds \quad \forall t \in [0, T].$$

L'espace $W^{k,p}(0, T; X)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{k,p,X} = \|u\|_{0,p,X} + \sum_{\alpha=1}^k \|u^{(\alpha)}\|_{0,p,X}.$$

1.8.3 Éléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert

Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques éléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert et quelques résultats concernant les équations et les inéquations variationnelles d'évolution qui interviennent dans l'étude des problèmes mécaniques.

Opérateurs fortement monotones

Nous commençons ici par un bref rappel sur les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz. Pour cela, on considère un espace de Hilbert X munit du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et de la norme associée $\|\cdot\|_X$. Soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur non linéaire.

Définition 1.8.9. L'opérateur A est dit:

(1) monotone si

$$(Au - Av, u - v)_X \geq 0 \quad \forall u, v \in X;$$

(2) fortement monotone s'il existe $m > 0$ tel que

$$(Au - Av, u - v)_X \geq m \|u - v\|_X^2 \quad \forall u, v \in X;$$

(3) de Lipschitz s'il existe $M > 0$ tel que

$$\|Au - Av\|_X \leq M \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X.$$

Théorème 1.8.10. (Théorème du point fixe) Soit X un espace de Banach, $A : X \rightarrow X$ un opérateur satisfait 1.8.9 (3) avec $0 < M < 1$. Alors l'opérateur A admet un point fixe unique $x \in X$, c'est-à-dire $Ax = x$ et nous appelons A un opérateur contractant.

Proposition 1.8.11. Soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur fortement monotone et de Lipschitz. Alors pour tout $f \in X$ il existe un élément unique $u \in X$ tel que $Au = f$.

Le résultat précédent est un cas particulier du théorème de Minty-Browder (voir par exemple [6] p.88).

Définition 1.8.12. Soit $A : X \rightarrow X'$ un opérateur défini sur X . L'opérateur A est dit:

(1) monotone si

$$(Au - Av, u - v)_{X' \times X} \geq 0 \quad \forall u, v \in X;$$

(2) hémicontinu si

$$\forall u, v \in X, \text{ l'application } t \rightarrow A(u + tv) : \mathbb{R} \rightarrow X' \text{ est continue.}$$

Définition 1.8.13. Une forme bilinéaire $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ est continue s'il existe un réel $M > 0$ tel que

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_X \|v\|_X \quad \forall u, v \in X.$$

Définition 1.8.14. Une forme bilinéaire $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ est dite coercive s'il existe une constante $m > 0$ telle que

$$a(u, u) \geq m \|u\|_X^2 \quad \forall u \in X.$$

Théorème. (Théorème de Lax-Milgram). Soit X un espace de Hilbert, $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercive. Soit $l : X \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue.

Alors, il existe une solution unique $u \in X$ qui satisfait

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in X.$$

Sous différentiabilité

Nous considérons dans tout ce paragraphe que X est un espace de Hilbert et K un sous-ensemble de l'espace X .

Définition 1.8.15. On appelle fonction indicatrice de K , la fonction φ_K définie par

$$\varphi_K(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in K, \\ +\infty & \text{si } u \notin K. \end{cases} \quad (1.1.51)$$

Définition 1.8.16. Soit une fonction $j : X \rightarrow \mathbb{R}$ et u un élément de l'espace X tel que $j(u) \neq \pm\infty$. Le sous-différentiel de la fonction j en u , noté $\partial j(u)$ est l'ensemble défini par

$$\partial j(u) = \{u' \in X' \mid j(v) \geq j(u) + (u', v - u) \quad \forall v \in X\}. \quad (1.1.52)$$

Le crochet $(\cdot, \cdot)$ désignant la dualité entre X' et X .

Tout élément u' de l'ensemble $\partial j(u)$ est appelé sous-gradient de la fonction j en u . La fonction j est dite sous-différentiable en u si $\partial j(u) \neq \emptyset$. Elle est dite sous-différentiable si elle l'est en tout point u de l'espace X .

Nous pouvons caractériser le sous-différentiel $\partial\varphi_K$ d'une fonction indicatrice φ_K d'un ensemble convexe non vide

$$\partial\varphi_K(u) = \{u' \in X' \mid (u', v - u) \leq 0 \quad \forall v \in K\}. \quad (1.1.53)$$

Inéquations variationnelles elliptiques d'évolution

Comme précédemment, soit H un espace de Hilbert doté du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_H$ et la norme associé $\|\cdot\|_H$. Soit maintenant un opérateur $A : H \rightarrow H$, $K \subset H$, $j : H \rightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction propre et $f \in H$.

Plusieurs problèmes aux limites des équations aux dérivées partielles en mécanique des milieux continus conduisent à des problèmes mathématiques ayant les formes suivantes

Problème I Trouver u tel que :

$$u \in X \quad (Au, v - u)_H \geq (f, v - u)_H \quad \forall v \in X. \quad (1.1.54)$$

Ce problème est appelé inéquation variationnelle elliptique de première espèce sur H .

En ce qui concerne le Problème **I** on a les résultats d'existence et d'unicité suivants.

Théorème 1.8.17. Soit $A : H \rightarrow H$ un opérateur fortement monotone et de Lipschitz, X un convexe fermé non-vide de H et $f \in H$. Alors l'inéquation variationnelle elliptique de première espèce admet une solution unique.

Problème II Trouver u tel que :

$$u \in X \quad (Au, v - u)_H + j(v) - j(u) \geq (f, v - u)_H \quad \forall v \in X. \quad (1.1.55)$$

Ce problème est appelé inéquation variationnelle elliptique de seconde espèce sur H .

En ce qui concerne le Problème **II** on a les résultats d'existence et d'unicité suivants.

Théorème 1.8.18. Soit $A : H \rightarrow H$ un opérateur monotone et de Lipschitz et j une fonction convexe, propre et semi-continue inférieurement et $f \in H$. Alors l'inéquation variationnelle elliptique de seconde espèce admet une solution unique.

Les démonstrations de ces deux théorèmes peuvent être trouvées par exemple dans [26].

Pour les besoins du Chapitre 2 et 3, nous allons préciser le cadre fonctionnel qui nous intéresse. Dans la suite, V et H désignent les espaces de Hilbert tels que V est dense dans H et l'injection de V dans H est continue, H est identifié à son propre dual et à un sous-espace du dual V' de V , i.e. $V \subset H \subset V'$ algébriquement et topologiquement.

Les notations $\|\cdot\|_V$, $\|\cdot\|_{V'}$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V' \times V}$ représentent les normes sur les espaces V et V' et la dualité entre V' et V , respectivement.

Définition 1.8.19. Soit $A : V \rightarrow V'$ un opérateur défini sur V .

(a) A est dit monotone si

$$\langle Av - Au, v - u \rangle_{V' \times V} \geq 0, \quad \forall v \in H.$$

(b) A est hémicontinu si pour tout $u, v \in V$, l'application $t \mapsto A(u + tv) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

Inéquations quasi-variationnelles elliptiques d'évolution

La modélisation de plusieurs classes de problèmes physiques conduit aux inégalités variationnelles elliptiques ou d'évolution, dans lesquelles la fonctionnelle non différentiable

dépend de la solution elle-même. Nous donnons par la suite un résultat d'existence et d'unicité pour ce type de problèmes.

Pour cela, nous considérons un espace de Hilbert H muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_H$ et de la norme associée $\|\cdot\|_H$.

Pour résoudre cette inéquation, nous supposons que A est fortement monotone et de Lipschitz, c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{(a) il existe } m > 0 \text{ tel que} \\ \quad (Au_1 - Au_2, u_1 - u_2)_X \geq m \|u_1 - u_2\|_X^2, & \forall u_1, u_2 \in X. \\ \text{(b) il existe } L > 0 \text{ tel que} \\ \quad \|Au_1 - Au_2\|_X \leq L \|u_1 - u_2\|_X, & \forall u_1, u_2 \in X \end{array} \right. \quad (1.1.56)$$

et la fonctionnelle $j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{(a) pour tout } j(u, \cdot) \text{ est convexe et s.c.i. sur } X \\ \text{(b) il existe } m > 0 \text{ tel que} \\ \quad j(u_1, v_2) - j(u_1, v_1) + j(u_2, v_1) - j(u_2, v_2) \\ \quad \leq m \|u_1 - u_2\|_X \|v_1 - v_2\|_X, & \forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in X. \end{array} \right. \quad (1.1.57)$$

Problème III : Trouver u tel que :

$$u \in X \quad (Au, v - u)_H + j(u, v) - j(u, u) \geq (f(t), v - u)_H \quad \forall v \in X. \quad (1.1.58)$$

Ce problème est appelé inéquation quasi-variationnelle elliptique de première espèce sur H .

En ce qui concerne le Problème **III** on a les résultats d'existence et d'unicité suivants.

Théorème 1.8.20 Supposons que les hypothèses (1.1.56) et (1.1.67) sont satisfaites. Alors, si $\alpha < m$, pour tout $f \in H$, il existe une solution unique $u \in H$ au problème (1.1.58).

Une démonstration du Théorème se trouve par exemple dans [51] p.83.

Dans la troisième chapitre du mémoire, nous utiliserons un résultat abstrait sur les inéquations quasi-variationnelles d'évolution. Ce résultat concerne les problèmes du type suivant.

Problème IV: Trouver u tel que :

$$(A\dot{u}(t), v - \dot{u}(t))_H + (Bu(t), v - u(t))_H + j(u(t), v) - j(u(t), \dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_H, \quad (1.1.59)$$

$$u(0) = u_0 \quad (1.160)$$

La différence entre le problème **III** et le problème **IV** consiste dans le fait que le dernier problème est évolutif. En effet, f et u dépendent maintenant du temps, la dérivée $\dot{u}$ apparaît

dans la formulation du problème et par conséquent, une condition initiale (1.2.28), est rajoutée.

Pour étudier le problème (1.2.28) – (1.2.29), en plus des hypothèses (1.2.25) et (1.2.26), nous avons besoin des hypothèses suivantes.

$$\exists L_B > 0 \text{ tel que } \|Bu_1 - Bu_2\|_X \leq L_B \|u_1 - u_2\|_H, \quad \forall u_1, u_2 \in H. \quad (1.1.61)$$

Aussi, nous supposons que

$$f \in C([0, T]; H), \quad (1.1.62)$$

$$u_0 \in H. \quad (1.1.63)$$

Dans l'étude du problème (1.1.59) – (1.1.60), nous avons le résultat suivant.

Théorème 1.8.21. Soient (1.1.56), (1.1.57) et (1.1.61) – (1.1.63) satisfaites. Alors

- 1) Il existe une unique solution $u \in C^1([0, T]; X)$ au problème (1.1.59) – (1.1.60).
- 2) Si u_1 et u_2 sont deux solutions du problème (1.1.59) – (1.1.60) correspondant aux données $f_1, f_2 \in C([0, T]; X)$, alors il existe $c > 0$ tel que

$$\|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|_H \leq c(\|f_1(t) - f_2(t)\|_H + \|u_1(t) - u_2(t)\|_H), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (1.1.64)$$

- 3) Si en plus $f \in W^{1,p}(0, T; X)$ pour $p \in [1, \infty)$, alors la solution satisfait $u \in W^{2,p}(0, T; X)$.

Ce résultat d'existence, d'unicité et de régularité a été prouvé dans [25] et peut être aussi trouvé dans [33] p.232-236.

1.8.4 Equations et inéquations variationnelles d'évolution

Nous allons rappeler dans ce paragraphe deux résultats sur les équations d'évolution et un résultat sur les inéquations variationnelles d'évolution.

Équation différentielle ordinaire

Théorème 1.8.22. (Cauchy-Lipschitz) Soit $(X, |\cdot|_X)$ un espace de Banach réel et soit $F(t, \cdot) : X \rightarrow X$ un opérateur défini p.p. sur $(0, T)$, qui satisfait les propriétés suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{il existe } L_F > 0 \text{ tel que} \\ |F(t, x_1) - F(t, x_2)|_X \leq L_F |x_1 - x_2|_X \quad \forall x_1, x_2 \in X, \text{ p.p. } t \in (0, T); \end{array} \right. \quad (1.1.65)$$

$$\text{il existe } 1 \leq p < +\infty \text{ tel que } F(\cdot, x) \in L^p(0, T; X) \quad \forall x \in X. \quad (1.1.66)$$

Alors pour tout $x_0 \in X$, il existe une fonction unique $x \in W^{1,p}(0, T; X)$ telle que

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)) \quad \text{p.p. } t \in (0, T),$$

$$x(0) = x_0.$$

Maintenant nous considérons V et H deux espaces de Hilbert réels tels que l'application d'inclusion de $(V, |\cdot|_V)$ dans $(H, |\cdot|_H)$ est continue et dense. Identifiant le dual de H avec lui-même, c'est-à-dire nous pouvons écrire le triplet de Gelfand $V \subset H \subset V'$. Les notations $|\cdot|_V, |\cdot|_{V'}$ et $(\cdot, \cdot)_{V' \times V}$ représentent les normes sur V, V' et le produit de dualité entre V' et V , respectivement.

Équation aux dérivées partielles d'évolution

Théorème 1.8.23. Soit $V \subset H \subset V'$ satisfaisant les hypothèses décrites ci-dessus et soit $A : V \rightarrow V'$ est un opérateur hémicontinu et monotone qui satisfait

$$\text{il existe } \lambda > 0 \text{ et } \alpha \in \mathbb{R} \quad (Av, v)_{V' \times V} \geq \lambda |v|_V^2 + \alpha \quad \forall v \in V, \quad (1.1.67)$$

$$\exists c > 0, \quad |Av|_{V'} \leq c(|v|_V + 1) \quad \forall v \in V. \quad (1.1.68)$$

Alors, pour tout $u_0 \in H$ et $f \in L^2(0, T; V')$, il existe une fonction unique u qui satisfait

$$u \in L^2(0, T; V) \cap C(0, T; H), \quad \dot{u} \in L^2(0, T; V'), \quad (1.1.69)$$

$$\dot{u}(t) + Au(t) = f(t) \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \quad (1.1.70)$$

$$u(0) = u_0. \quad (1.1.71)$$

Inéquation variationnelle d'évolution

Théorème 1.8.24. Soit $V \subset H \subset V'$ est un triplet de Gelfand, K est un sous-ensemble fermé non vide et convexe de V , et soit $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire symétrique et continue qui satisfait

$$\text{il existe } c_1 > 0 \text{ et } c_0 \quad a(v, v) + c_0 |v|_H^2 \geq c_1 |v|_V^2 \quad \forall v \in V. \quad (1.1.72)$$

Alors, pour tout $u_0 \in K$ et $f \in L^2(0, T; H)$, il existe une unique fonction u qui satisfait

$$u \in H^1(0, T; H) \cap L^2(0, T; V), \quad (1.1.73)$$

$$u(t) \in K \quad \forall t \in [0, T], \quad (1.1.74)$$

$$\begin{aligned} & (\dot{u}(t), v - u(t))_{V' \times V} + a(u(t), v - u(t)) \\ & \geq (f(t), v - u(t))_H \quad \forall v \in K, \text{ p.p. } t \in (0, T), \end{aligned} \quad (1.1.75)$$

$$u(0) = u_0. \quad (1.1.76)$$

Pour les démonstrations de ces trois théorèmes on peut regarder dans [39].

1.8.5 Lemme de Gronwall

Nous rappelons ici le lemme du type Gronwall qui intervient dans de nombreux problèmes de contact, en particulier pour établir l'unicité de la solution.

Lemme 1.8.25. Soient $m, n \in C(0, T; \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$, $a \geq 0$ une constante et $\phi \in C(0, T; \mathbb{R})$

(1) Si

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t m(s) ds + \int_0^t n(s) \phi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\phi(t) \leq \left(a + \int_0^t m(s) ds \right) \exp \left(\int_0^t n(s) ds \right) \quad \forall t \in [0, T].$$

(2) Si

$$\phi(t) \leq m(t) + a \int_0^t \phi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\int_0^t \phi(s) ds \leq e^{at} \int_0^t m(s) ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Dans le cas particulier $a = 0$, $n = 1$, la partie (1) de ce lemme devient.

Corollaire 1.8.26. Soit $m \in C(0, T; \mathbb{R})$ telle que $m(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$. Si $\phi \in C(0, T; \mathbb{R})$ est une fonction telle que

$$\phi(t) \leq \int_0^t m(s) ds + \int_0^t \phi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors, il existe $c > 0$ tel que

$$\phi(t) \leq c \int_0^t m(s) ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Chapitre 2

Problème viscoélastique de contact avec adhésion et endommagement

Ce chapitre est composé de deux sections. Dans la première section, on considère un problème dynamique de contact sans frottement avec compliance normale et adhésion entre un corps viscoélastique avec endommagement suivant une loi constitutive non linéaire de Kelvin-Voigt, et une fondation déformable. L'objectif est de donner la formulation variationnelle du problème mécanique pour lesquels nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution.

Dans la deuxième section, on propose d'étudier un problème dynamique de contact bilatéral avec adhésion entre un corps viscoélastique avec endommagement, et une fondation. Le processus d'adhésion est modélisé par un champ d'adhésion sur la surface de contact. Le contact est bilatéral, la contrainte tangentielle, due à l'adhésion étant incluse. Le problème est formulé comme un système couplé en déplacement, en contrainte, et en champ d'adhésion. La nouveauté est que les opérateurs viscoélastiques sont fortement non linéaires, obéissant à une condition faible de croissance, qui remplace l'hypothèse de Lipschitz. Pour ce problème nous démontrons essentiellement un résultat d'existence et d'unicité des solutions faibles.

2.1 Problème de contact avec compliance normale en viscoélasticité

Nous considérons ici un problème de contact sans frottement avec compliance normale et adhésion entre un corps viscoélastique avec endommagement et une fondation déformable dans un processus dynamique. Le processus d'adhésion sur la surface de contact est modélisé par une variable interne de surface, du champ d'adhésion. L'endommagement causé par les déformations élastiques du matériau est modélisé par une variable interne du corps appelée champ d'endommagement.

Le problème est formulé comme un système qui comporte une équation variationnelle par rapport au champ de déplacement, une équation intégrale différentielle pour le champ d'adhésion et une inéquation variationnelle du type parabolique par rapport au champ d'endommagement.

Cette section est divisée en trois paragraphes. Dans le premier paragraphe, nous commençons par formuler le problème mécanique, puis nous indiquons les hypothèses sur les données. Ensuite, dans le deuxième paragraphe nous donnons la formulation variationnelle du problème mécanique. Enfin, dans le troisième paragraphe, nous énonçons et démontrons un théorème d'existence et d'unicité de la solution faible relatif au problème.

Les techniques employées sont basées sur la théorie des opérateurs monotones, suivi par des arguments de points fixes.

2.1.1 Formulation du problème mécanique-Hypothèses

Nous considérons un corps viscoélastique qui à l'instant $t = 0$ occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = (2, 3)$ de frontière régulière, constitué de trois parties disjointes Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 tel que $mes\Gamma_1 > 0$. Soit $T > 0$ et soit $[0, T]$, l'intervalle de temps en question.

Ce corps est encastré sur $\Gamma_1 \times (0, T)$, soumis à une densité de forces volumiques f_0 sur $\Omega \times [0, T]$, et des forces surfaciques de densité f_2 sur Γ_1 et en contact avec une fondation déformable le long de Γ_3 . De plus le contact, avec cette fondation, est supposée avec adhésion et endommagement.

Sous considérations, le problème mécanique qu'on étudie est le problème 1.

Problème P1. Trouver le champ des déplacements $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, et le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, le champ d'endommagement $\alpha : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, et le champ d'adhésion $\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow [0, 1]$, tels que

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{G}(\varepsilon(\mathbf{u}(t)), \alpha), \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.1.1)$$

$$\dot{\alpha} - k\Delta\alpha + \partial\varphi_K(\alpha) \ni S(\varepsilon(\mathbf{u}), \alpha), \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.1.2)$$

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \text{Div}\sigma + \mathbf{f}_0, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.1.3)$$

$$\mathbf{u} = 0, \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (2.1.4)$$

$$\sigma\nu = \mathbf{f}_2, \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (2.1.5)$$

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu) - \gamma_\nu\beta^2(-R(u_\nu))_+, \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T) \quad (2.1.6)$$

$$-\sigma_\tau = p_\tau(\beta, u_\tau), \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (2.1.7)$$

$$\dot{\beta} = H_{ad}(\beta, \zeta_\beta, R(\|\mathbf{u}\|)), \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (2.1.8)$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\nu} = 0, \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T), \quad (2.1.9)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0, \quad \text{dans } \Omega \quad (2.1.10)$$

$$\beta(0) = \beta_0, \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (2.1.11)$$

L'équation (2.1.1) représente la loi de comportement viscoélastique non linéaire avec endommagement. L'évolution du champ d'endommagement est modélisée par l'inclusion du type parabolique donnée par relation (2.1.2) où S est la fonction source de l'endommagement. L'équation (2.1.3) représente l'équation du mouvement où ρ désigne la masse volumique matériau, (2.1.4) – (2.1.5) sont le déplacement et des conditions aux limites de traction, respectivement. Les conditions (2.1.6) – (2.1.8) représentent les conditions de contact avec compliance normale et adhésion sur la partie Γ_3 de la frontière Ω . La relation (2.1.9) représente une condition aux limites de Neumann homogène où $\frac{\partial\alpha}{\partial\nu}$ représente la dérivée normale de α . Dans (2.1.10) nous considérons les conditions initiales où $\mathbf{u}_0$ est le déplacement initial, $\mathbf{v}_0$ la vitesse initiale et α_0 l'endommagement initial. Enfin, dans (2.1.11) on a la condition initiale dans laquelle β_0 représente le champ initial d'adhésion.

Pour l'étude du problème mécanique (2.1.1) – (2.1.11) on considère les hypothèses suivantes:

Nous supposons que l'opérateur de viscosité $\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_{\mathcal{A}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad \|\mathcal{A}(x, \xi_1) - \mathcal{A}(x, \xi_2)\| \leq L_{\mathcal{A}} \|\xi_1 - \xi_2\| \\ \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ \text{(b) Il existe } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad (\mathcal{A}(x, \xi_1) - \mathcal{A}(x, \xi_2)) \cdot (\xi_1 - \xi_2) \geq m_{\mathcal{A}} \|\xi_1 - \xi_2\|^2 \\ \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ \text{(c) L'application } x \longrightarrow \mathcal{A}(x, \xi) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega. \\ \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(d) L'application } x \longrightarrow \mathcal{A}(x, 0) \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (2.1.12)$$

L'opérateur d'élasticité $\mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } M_{\mathcal{G}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad \|\mathcal{G}(x, \xi_1, \alpha_1) - \mathcal{G}(x, \xi_2, \alpha_2)\| \leq M_{\mathcal{G}} (\|\xi_1 - \xi_2\| + \|\alpha_1 - \alpha_2\|) \\ \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}^d, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ \text{(b) L'application } x \longrightarrow \mathcal{G}(x, \xi) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega. \\ \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{S}^d, \alpha \in \mathbb{R}. \\ \text{(c) L'application } x \longrightarrow \mathcal{G}(x, 0, 0) \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (2.1.13)$$

La fonction de la source d'endommagement $S : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } M_S > 0 \text{ telle que} \\ \quad \|S(x, \xi_1, \alpha_1) - S(x, \xi_2, \alpha_2)\| \leq M_S (\|\xi_1 - \xi_2\| + \|\alpha_1 - \alpha_2\|) \\ \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}^d, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ \text{(b) L'application } x \longrightarrow S(x, \xi, \alpha) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega. \\ \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{S}^d, \alpha \in \mathbb{R}. \\ \text{(c) L'application } x \longrightarrow S(x, 0, 0) \in L^2(\Omega).. \end{array} \right. \quad (2.1.14)$$

La fonction de contact normale $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_\nu > 0 \text{ telle que} \\ \quad \|p_\nu(x, r_1) - p_\nu(x, r_2)\| \leq L_\nu \|r_1 - r_2\| \\ \quad r_1, r_2 \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3; \\ \text{(b) L'application } x \longrightarrow p_\nu(x, r) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3 \\ \quad r \in \mathbb{R}^d; \\ \text{(c) L'application } x \longrightarrow p_\nu(x, 0) \in L^\infty(\Gamma_3)^d; \end{array} \right. \quad (2.1.15)$$

La fonction de contact tangentiel $p_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ satisfait les propriétés suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_\tau > 0 \text{ telle que} \\ \quad \|p_\tau(x, \beta_1, r_1) - p_\tau(x, \beta_2, r_2)\| \leq L_\tau (\|\beta_1 - \beta_2\| + \|r_1 - r_2\|) \\ \quad \forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}, r_1, r_2 \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3; \\ \text{(b) L'application } x \longrightarrow p_\tau(x, \beta, r) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3 \\ \quad \forall \beta \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}^d; \\ \text{(c) L'application } x \longrightarrow p_\tau(x, 0, 0) \in L^\infty(\Gamma_3)^d; \\ \text{(d) } p_\tau(x, \beta, r) \cdot \nu(x) = 0 \text{ } \forall r \in \mathbb{R}^d \text{ tel que } r \cdot \nu(x) = 0, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (2.1.16)$$

De même, nous supposons que la *fonction d'adhésion* $H_{ad} : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [-L, L] \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfait les propriétés suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_{ad} > 0 \text{ telle que} \\ \quad |H_{ad}(x, b_1, z, r) - H_{ad}(x, b_2, z, r)| \leq L_{ad} |b_1 - b_2| \\ \quad \forall b_1, b_2 \in \mathbb{R}, \quad z \in \mathbb{R}, \quad r \in [-L, L], \quad p.p. \quad x \in \Gamma_3 \quad \text{et} \\ \quad |H_{ad}(x, b_1, z_1, r_1) - H_{ad}(x, b_2, z_2, r_2)| \\ \quad \leq L_{ad} (|b_1 - b_2| + |z_1 - z_2| + |r_1 - r_2|) \\ \quad \forall b_1, b_2 \in [0, 1], \quad z_1, z_2 \in \mathbb{R}, \quad r_1, r_2 \in [-L, L], \quad p.p. \quad x \in \Gamma_3; \\ \text{(b) L'application } x \longrightarrow H_{ad}(x, b, z, r) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3 \\ \quad \forall b, z \in \mathbb{R}, \quad r \in [-L, L]; \\ \text{(c) L'application } (b, z, r) \longrightarrow H_{ad}(x, b, z, r) \text{ est continue sur} \\ \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [-L, L], \quad p.p. \quad x \in \Gamma_3; \\ \text{(d) } H_{ad}(x, 0, z, r) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}, \quad r \in [-L, L], \quad p.p. \quad x \in \Gamma_3; \\ \text{(e) } H_{ad}(x, b, z, r) \geq 0 \quad \forall b \leq 0, \quad z \in \mathbb{R}, \quad r \in [-L, L], \quad p.p. \quad x \in \Gamma_3 \text{ et} \\ \quad H_{ad}(x, b, z, r) \leq 0 \quad \forall b \geq 1, \quad z \in \mathbb{R}, \quad r \in [-L, L], \quad p.p. \quad x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (2.1.17)$$

On note que si $\beta \in L^\infty(\Gamma_3)$, $z \in L^\infty(\Gamma_3)$ et $r : \Gamma_3 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction mesurable, alors les conditions (2.1.17) impliquent que $x \rightarrow H_{ad}(x, \beta(x), z(x), Rr(x)) \in L^\infty(\Gamma_3)$.

Nous supposons que la masse volumique, les forces volumiques et surfaciques satisfont

$$\rho \in L^\infty(\Omega), \text{ et il existe } \rho^* > 0, \text{ tel que } \rho(x) \geq \rho^*, \quad p.p. \quad x \in \Omega. \quad (2.1.18)$$

$$f_0 \in L^2(0, T; H), \quad f_2 \in L^2(0, T; L^\infty(\Gamma_2)^d). \quad (2.1.19)$$

Finalement, les conditions initiales satisfait

$$u_0 \in V, \quad v_0 \in H, \quad (2.1.20)$$

$$\alpha_0 \in K, \quad (2.1.21)$$

$$\beta_0 \in L^\infty(\Gamma_3) \quad \text{et} \quad 0 \leq \beta_0 \leq 1 \quad p.p. \quad x \in \Gamma_3. \quad (2.1.22)$$

Nous définissons la forme bilinéaire $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$a(\zeta, \varphi) = k \int_{\Omega} \nabla \zeta \cdot \nabla \varphi dx. \quad (2.1.23)$$

Nous allons utiliser un produit intérieur modifié sur $H = L^2(\Omega)^d$, proposé par

$$((u, v))_H = (\rho u, v)_H, \quad \forall u, v \in H, \quad (2.1.24)$$

autrement dit, pondérée avec ρ , et nous laissons $\|\cdot\|_H$ la norme associée, c'est-à-dire

$$|v|_H = (\rho v, v)_H^{\frac{1}{2}}, \quad \forall v \in H, \quad (2.1.25)$$

En utilisant hypothèse (2.1.18), il s'ensuit que $\|\cdot\|_V$ and $\|\cdot\|_H$ sont les normes équivalentes sur H . De plus, la cartographie par inclusion de $(V, \|\cdot\|_V)$ dans $(H, \|\cdot\|_H)$ est continue et dense. On note V' l'espace dual de V . Identifier H avec son propre double, nous pouvons écrire le Gelfand triple

$$V \subset H \subset V'$$

Nous utilisons la notation $(\cdot, \cdot)_{V' \times V}$ pour représenter l'appariement de dualité entre V' et V . Nous avons

$$(u, v)_{V' \times V} = ((u, v))_H \quad \forall u \in H, \quad \forall v \in V. \quad (2.1.26)$$

Enfin, on note $\|\cdot\|_{V'}$ la norme sur l'espace dual V' . Le théorème de représentation de Riesz entraîne l'existence d'un élément $f \in V'$, tel que

$$(f(t), v)_{V' \times V} = (f_0(t), v)_H + (f_2(t), v)_{L^\infty(\Gamma_2)^d} \quad \forall v \in V, \quad p.p. \quad t \in (0, T). \quad (2.1.27)$$

On remarque que la condition (2.1.19) impliquent que

$$f \in L^2(0, T; V'), \quad (2.1.28)$$

Soit $j : L^\infty(\Gamma_3) \times V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonctionnelle

$$j(\beta, u, v) = \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu) \cdot v_\nu da - \int_{\Gamma_3} \gamma_\nu \beta^2 (-R(u_\nu))_+ \cdot v_\nu da + \int_{\Gamma_3} p_\tau(\beta, u_\tau) \cdot v_\tau da \quad (2.1.29)$$

$$\forall \beta \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \forall u, v \in V.$$

Pour l'étude du problème **P1**, on définit le sous-espace fermé V de H_1 par:

$$V = \{v \in H_1, \quad v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\} \quad (2.1.30)$$

et on le munit du produit scalaire défini par (1.1.44), et de la norme définie par (1.1.45). On note par v_ν, v_τ les composantes normale et tangentielle de v sur la frontière Γ données par

$$v_\nu = v \cdot \nu, \quad v_\tau = v - v_\nu \nu \quad (2.1.30)$$

Similairement, on définit les composantes normale et tangentielle du tenseur des contraintes par

$$\sigma_\nu = (\sigma \nu) \cdot \nu, \quad \sigma_\tau = \sigma \nu - \sigma_\nu \nu \quad (2.1.31)$$

Moyennant l'inégalité de Korn (1.1.43), on peut aisément vérifier que la norme sur V notée $\|\cdot\|_V$ et la norme $\|\cdot\|_{H_1}$ sont équivalentes. On déduit alors que V muni du produit scalaire défini par (1.1.44) est un espace de Hilbert réel.

2.1.2 Formulation variationnelle

Dans cette section, on va donner la formulation variationnelle du problème **P1**. En utilisant la formule de Green

$$(\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (Div \sigma, v)_H = \int_{\Gamma} \sigma_\nu \cdot v \, da \quad \forall v \in H_1,$$

on trouve

$$(\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (Div \sigma, v)_H = \int_{\Gamma_1} \sigma_\nu \cdot v \, da + \int_{\Gamma_2} \sigma_\nu \cdot v \, da + \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu \cdot v \, da \quad \forall v \in V,$$

en utilisant la définition de l'espace V avec (2.1.3), (2.1.4) et (2.1.5), on obtient

$$(\rho \ddot{u}, v)_{V' \times V} + (\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} f_0 \cdot v \, dx + \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu \cdot v \, da + \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau \cdot v \, da \quad \forall v \in V.$$

Puisque

$$\sigma_\nu \cdot v = \sigma_\nu \cdot v_\nu + \sigma_\tau \cdot v_\tau = -p_\nu(u_\nu) v_\nu + \gamma_\nu \beta^2 (-R(u_\nu))_+ v_\nu - p_\tau(\beta, u_\tau) \cdot v_\tau$$

il vient que

$$\begin{aligned} (\rho \ddot{u}, v)_{V' \times V} + (\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} &= \int_{\Omega} f_0 \cdot v \, dx + \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu \cdot v \, da - \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu) \cdot v_\nu \, da + \\ &+ \int_{\Gamma_3} \gamma_\nu \beta^2 (-R(u_\nu))_+ \cdot v_\nu \, da - \int_{\Gamma_3} p_\tau(\beta, u_\tau) \cdot v_\tau \, da, \quad \forall v \in V, \end{aligned}$$

d'après (2.1.27) – (2.1.29) nous obtenons

$$\begin{aligned} (\rho \ddot{u}(t), v)_{V' \times V} + (\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(\beta(t), u(t), v) &= (f(t), v)_V \\ \forall v \in V \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \end{aligned} \quad (2.1.32)$$

Enfin, soit $\alpha(t) \in K$ et pour tout $t \in [0, T]$. De la définition (1.8.13) de $\partial\varphi_K(\alpha)$ et de (2.1.2), on obtient

$$\begin{aligned} (\dot{\alpha}(t), \xi - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} &- k(\Delta\alpha(t), \xi - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} \\ &\geq (S(\varepsilon(u(t)), \alpha(t)), \xi - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi \in K, \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green avec (2.1.9) et (2.1.23), on trouve

$$\begin{aligned} (\dot{\alpha}(t), \xi - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} &+ a(\alpha(t), \xi - \alpha(t)) \\ &\geq (S(\varepsilon(u(t)), \alpha(t)), \xi - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi \in K. \end{aligned} \quad (2.1.33)$$

De (2.1.1), (2.1.8), (2.1.10), (2.1.11), (2.1.32) et (2.1.33) on obtient la formulation variationnelle du problème **P1**.

Problème $\mathbf{P}_V$: Trouver le champ de déplacement $u : [0, T] \longrightarrow V$, et le champ de contrainte $\sigma : [0, T] \longrightarrow \mathcal{H}$, et le champ endommagement $\alpha : [0, T] \longrightarrow H^1(\Omega)$, et le champ d'adhésion $\beta : [0, T] \longrightarrow L^\infty(\Gamma_3)$ tels que

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{G}\varepsilon(u(t), \alpha(t)) \quad \text{p.p. } t \in (0, T) \quad (2.1.34)$$

$$\begin{aligned} \alpha(t) \in K, \quad (\dot{\alpha}(t), \zeta - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} + a(\alpha(t), \zeta - \alpha(t)) \\ \geq (S\varepsilon(u(t)), \alpha(t)), \zeta - \alpha(t))_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \zeta \in K, \quad \text{p.p. } t \in (0, T) \end{aligned} \quad (2.1.35)$$

$$\begin{aligned} (\rho \ddot{u}(t), v)_{V' \times V} + (\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(\beta(t), u(t), v) &= (f(t), v)_V \\ \forall v \in V \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \end{aligned} \quad (2.1.36)$$

$$\dot{\beta}(t) = H_{ad}(\beta(t), \zeta_\beta(t), R(\|u(t)\|)), \quad 0 \leq \beta(t) \leq 1 \quad \text{p.p. } t \in (0, T) \quad (2.1.37)$$

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = v_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0, \quad \beta(0) = \beta_0 \quad (2.1.38)$$

Nous remarquons que le problème variationnel $\mathbf{P}_V$ est formulé en termes de déplacement, champ de contrainte, terrain d'endommagement et champ d'adhésion. L'existence d'une solution unique de problème $\mathbf{P}_V$ est déclaré et prouvé dans la section suivante.

2.1.3 Existence et unicité de la solution

Notre résultat principal concernant le bien posé du problème $\mathbf{P}_V$ est la suivante.

Théorème 2.1.1. *Supposons que (2.1.12) – (2.1.22) sont satisfaites. Alors il existe une solution unique $\{u, \sigma, \alpha, \beta\}$ du problème $\mathbf{P}_V$. En plus cette solution vérifie*

$$u \in H^1(0, T; V) \cap C^1(0, T; H), \quad \ddot{u} \in L^2(0, T; V'), \quad (2.1.39)$$

$$\sigma \in L^2(0, T; \mathcal{H}), \quad \text{Div } \sigma \in L^2(0, T; V'), \quad (2.1.40)$$

$$\alpha \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad (2.1.41)$$

$$\beta \in W^{1,\infty}(0, T; L^\infty(\Gamma_3)). \quad (2.1.42)$$

Un quadruplet $\{u, \sigma, \alpha, \beta\}$ qui satisfait (2.1.34) – (2.1.38) est appelé solution faible pour le problème $\mathbf{P1}$. Nous concluons que, dans les hypothèses énoncées, le problème (2.1.1) – (2.1.11) a une satisfait unique solution (2.1.39) – (2.1.42).

Démonstration du théorème 2.1.1

La démonstration du théorème 2.1.1 sera conduite en plusieurs étapes. Elle est basée sur les résultats des équations d'évolutions avec les opérateurs monotones et les arguments du point fixe, similaires à ceux utilisés dans [38], mais avec un choix différent des opérateurs. Nous supposons dans la suite que (2.1.12) – (2.1.22) sont vérifiés.

Soit $\eta \in L^\infty(0, T; V)$ donnée. Dans cette première étape on construit le problème suivant:

Problème P_V^η . *Trouver le champ de déplacement $u_\eta : [0, T] \longrightarrow V$ tel que*

$$(\ddot{u}_\eta(t), v)_{V' \times V} + (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_\eta(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\eta(t), v)_{V' \times V} = (f(t), v)_{V' \times V} \quad (2.1.43)$$

$$\forall v \in V \text{ p.p. } t \in (0, T).$$

$$u_\eta(0) = u_0, \quad \dot{u}_\eta(0) = v_0, \quad (2.1.44)$$

Pour résoudre le problème P_V^η nous utilisons le théorème 1.8.23 d'existence et d'unicité. Nous avons le résultat suivant:

Lemme 2.1.1 *Il existe une solution unique du problème P_V^η , ayant la régularité exprimé dans (2.1.39).*

Démonstration du lemme 2.1.1

Nous définissons l'opérateur $A : V \rightarrow V'$ par

$$(Au, v)_{V' \times V} = (\mathcal{A}\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in V. \quad (2.1.45)$$

il résulte de (2.1.45) et (2.1.12)(a) que

$$\|Au - Av\|_{V'} \leq L_{\mathcal{A}} \|u - v\|_V, \quad \forall u, v \in V \quad (2.1.46)$$

ce qui montre que $A : V \rightarrow V'$ est continu, et ainsi de semicontinuous. Maintenant, par (2.1.45) et (2.1.12)(b), nous trouvons

$$(Au - Av, u - v)_{V' \times V} \geq m_{\mathcal{A}} \|u - v\|_V^2, \quad \forall u, v \in V \quad (2.1.47)$$

c'est à dire, $A : V \rightarrow V'$ est un opérateur monotone. Choisir $\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$ dans (2.1.47) on obtient

$$\begin{aligned} (Au, u)_{V' \times V} &\geq m_{\mathcal{A}} \|u\|_V^2 - \|A\mathbf{0}_V\|_{V'} \|u\|_V, \quad \forall u \in V. \\ &\geq \frac{1}{2} m_{\mathcal{A}} \|u\|_V^2 - \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}} \|A\mathbf{0}_V\|_{V'}^2 \end{aligned} \quad (2.1.48)$$

Ainsi, A satisfait la condition (1.1.67) avec $\omega = \frac{1}{2} m_{\mathcal{A}}$ et $\lambda = \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}} \|A\mathbf{0}_V\|_{V''}$.

Suivant (2.1.46) et (2.1.12) on en déduit que

$$\|Au\|_{V''} \leq L_{\mathcal{A}} \|u\|_V + \|A\mathbf{0}_V\|_{V''} \quad \forall u \in V.$$

Cette inégalité implique que A satisfait la condition (1.1.68). Enfin, nous avons rappele que par (2.1.28) et (2.1.44) nous avons $f - \eta \in L^2(0, T; V')$ et $v_0 \in H$. Il résulte alors du théorème 1.8.23 qu'il existe une fonction unique v_η qui satisfait

$$v_\eta \in L^2(0, T; V) \cap C(0, T; H), \quad \frac{dv_\eta}{dt} \in L^2(0, T; V'), \quad (2.1.49)$$

$$\frac{dv_\eta}{dt} + Av_\eta(t) + \eta(t) = f(t), \quad p.p.t \in (0, T), \quad (2.1.50)$$

$$v_\eta(0) = v_0. \quad (2.1.51)$$

Soit $u_\eta : [0, T] \rightarrow V$ définir par

$$u_\eta(t) = \int_0^t v_\eta(s) ds + u_0, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.1.52)$$

Il résulte de (2.1.45) et (2.1.49) – (2.1.52) que u_η est une solution de l' problème variationnel $\mathbf{P}_V^\eta$ et il a la régularité exprimé dans (2.1.38). Ceci conclut la preuve de la partie de l'existence du lemme 2.1.1. Le caractère unique de la solution au problème (2.1.49) – (2.1.50), garanti par le théorème 1.8.23.

Dans la deuxième étape, nous utilisons le champ de déplacement u_η obtenu dans le lemme 2.1.1 et envisager le problème suivant la valeur initiale.

Problème $\mathbf{P}_V^\beta$. *Trouver le champ d'adhésion $\beta_\eta : [0, T] \longrightarrow L^\infty(\Gamma_3)$ tel que*

$$\dot{\beta}_\eta(t) = H_{ad}(\beta_\eta(t), \zeta_{\beta_\eta}(t), R(\|u_\eta(t)\|)) \quad , \quad p.p. \quad t \in (0, T), \quad (2.1.53)$$

$$\beta_\eta(0) = \beta_0. \quad (2.1.54)$$

En utilisant la version du théorème de Cauchy-Lipschitz et arguments signaler fixe de Banach. Nous avons le résultat suivant.

Lemme 2.1.2 *Il existe une solution unique du problème $\mathbf{P}_V^\beta$, et qui satisfait (2.1.42). et de plus*

$$0 \leq \beta_\eta(t) \leq 1, \quad \forall t \in [0, T] \quad p.p. \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (2.1.55)$$

Démonstration du lemme 2.1.2

Le problème (2.1.53) – (2.1.54) est un problème de Cauchy. Afin d'appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz, on considère l'opérateur suivant

Soit $\zeta \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Gamma_3))$ et soit l'application $F_{\eta\zeta}(t, \cdot) : L^\infty(\Gamma_3) \longrightarrow L^\infty(\Gamma_3)$ définie *p.p.* sur $(0, T)$ par

$$F_{\eta\zeta}(t, \beta) = H_{ad}(\beta(t), \zeta(t), R(\|u_\eta(t)\|))$$

L'opérateur $F_{\eta\zeta}$ est continu, et de Lipschitz par rapport au second argument. Comme $\beta_0 \in L^\infty(\Gamma_3)$, l'application $t \longrightarrow F_{\eta\zeta}(t, \beta)$ appartient à $L^\infty(0, T; L^\infty(\Gamma_3))$, on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz (Théorème 1.8.22), qui nous donne l'existence et l'unicité d'une fonction $\beta_{\eta\zeta} \in W^{1,\infty}(0, T; L^\infty(\Gamma_3))$ tel que

$$\dot{\beta}_{\eta\zeta}(t) = H_{ad}(\beta_{\eta\zeta}(t), \zeta(t), R(\|u_\eta(t)\|)) \quad p.p. \quad t \in (0, T) \quad (2.1.56)$$

$$\beta_{\eta\zeta}(0) = \beta_0 \quad (2.1.57)$$

On prouve que $\beta_{\eta\zeta}$ satisfait la condition (2.1.55). C'est à dire, on suppose que $\beta_{\eta\zeta}(t_0) < 0$ pour un certain $t_0 \in [0, T]$. Sous la condition (2.1.22) on a $0 \leq \beta_{\eta\zeta}(0) \leq 1$ et,

l'application $t \rightarrow \beta(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, on peut trouver $t_1 \in [0, t_0)$ tel que $\beta_{\eta\zeta}(t_1) = 0$. Maintenant, soit $t_2 = \sup\{t \in [t_1, t_0], \beta_{\eta\zeta}(t) = 0\}$, quand $t_2 < t_0$, $\beta_{\eta\zeta}(t_2) = 0$ et $\beta_{\eta\zeta}(t) < 0$ pour $t \in (t_2, t_0]$. La condition (2.1.12)(e) et (2.1.39) impliquent que $\beta_{\eta\zeta}(t) \geq 0$ pour $t \in (t_2, t_0]$ donc $\beta_{\eta\zeta}(t_0) \geq \beta_{\eta\zeta}(t_2) = 0$, ce qui est une contradiction. On conclut, que $\beta_{\eta\zeta}(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$.

Par un argument semblable, on montre que $\beta_{\eta\zeta}(t) \leq 1$ pour tout $t \in [0, T]$.

$$0 \leq \beta_{\eta\zeta}(t) \leq 1 \quad \forall t \in [0, T] \quad p.p. \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (2.1.58)$$

La propriété $0 \leq \beta_{\eta\zeta}(t) \leq 1$ nous permet donc de considérer l'opérateur Λ_η défini par

$$\begin{aligned} \Lambda_\eta : L^\infty(0, T; L^\infty(\Gamma_3)) &\longrightarrow L^\infty(0, T; L^\infty(\Gamma_3)) \\ \Lambda_\eta \zeta(t) &= \int_0^t \beta_{\eta\zeta}(s) ds \quad \forall t \in [0, T] \end{aligned} \quad (2.1.59)$$

pour lequel on prouve qu'il a un unique point fixe.

En effet, soient $\zeta_1, \zeta_2 \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Gamma_3))$, et soit $s \in [0, T]$.

De (2.1.56), (2.1.57) pour $i = 1, 2$ nous avons

$$\beta_{\eta\zeta_i}(s) = \beta_0 + \int_0^s H_{ad}(\beta_{\eta\zeta_i}(\theta), \zeta_i(\theta), (|u_{\eta\tau}(\theta)|)) d\theta,$$

et, en utilisant cette dernière égalité et (2.1.17)(a), on trouve

$$|\beta_{\eta\zeta_1}(s) - \beta_{\eta\zeta_2}(s)| \leq L_{ad} \int_0^s |\beta_{\eta\zeta_1}(\theta) - \beta_{\eta\zeta_2}(\theta)| d\theta + L_{ad} \int_0^s |\zeta_1(\theta) - \zeta_2(\theta)| d\theta.$$

Ici et dans la suite, C représente une constante positive qui dépend des données mais elle est indépendante du temps et des conditions initiales, et qui peut changer de ligne en ligne.

En appliquant le lemme Gronwall (lemme 1.8.25) on trouve

$$|\beta_{\eta\zeta_1}(s) - \beta_{\eta\zeta_2}(s)| \leq C \int_0^s |\zeta_1(\theta) - \zeta_2(\theta)| d\theta$$

et, en intégrant cette inégalité sur Γ_3 , on a

$$\|\beta_{\eta\zeta_1}(s) - \beta_{\eta\zeta_2}(s)\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \leq C \int_0^s \|\zeta_1(\theta) - \zeta_2(\theta)\|_{L^\infty(\Gamma_3)} d\theta. \quad (2.1.60)$$

De (2.1.59) et (2.1.60) on trouve

$$\|\Lambda_\eta \zeta_1(t) - \Lambda_\eta \zeta_2(t)\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \leq C \int_0^t \int_0^s \|\zeta_1(\theta) - \zeta_2(\theta)\|_{L^\infty(\Gamma_3)} d\theta \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.1.61)$$

Réitérant cette inégalité n fois il vient

$$\|\Lambda_\eta^n \zeta_1 - \Lambda_\eta^n \zeta_2\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Gamma_3))} \leq \frac{(CT)^{2n}}{(2n)!} \|\zeta_1 - \zeta_2\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Gamma_3))} .$$

On conclut que pour n suffisamment grand, un itéré Λ_η^n de Λ_η est une contraction dans l'espace de Banach $L^\infty(0,T;L^\infty(\Gamma_3))$. Alors, il existe un unique $\zeta_\eta^* \in L^\infty(0,T;L^\infty(\Gamma_3))$ tel que $\Lambda_\eta^n \zeta_\eta^* = \zeta_\eta^*$ et de plus ζ_η^* est aussi l'unique point fixe de Λ_η .

Soit $\beta_\eta = \beta_{\eta \zeta_\eta^*}$ la solution de (2.1.56), (2.1.57) pour $\zeta = \zeta_\eta^*$. Utilisant (2.1.59) et la relation (1.1.14) on obtient

$$\zeta_\eta^*(t) = \Lambda_\eta \zeta_\eta^*(t) = \int_0^t \beta_{\eta \zeta_\eta^*}(s) ds = \int_0^t \beta_\eta(s) ds = \zeta_{\beta_\eta}(t) \quad \forall t \in [0, T],$$

et gardant en tête (2.1.56) – (2.1.58) il s'ensuit que β_η est une solution pour le problème $\mathbf{P}_V^\beta$ et qui satisfait (2.1.42) et (2.1.55). Ce qui conclut la partie d'existence du lemme 2.1.2. L'unicité s'ensuit de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ_η donné par (2.1.59).

Ce qui termine la preuve du lemme 2.1.2. □

Dans la troisième étape, soit $\theta \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$. On considère alors pour le champ d'endommagement le problème variationnel suivant.

Problème $\mathbf{P}_V^\theta$. Trouver le champ d'endommagement $\alpha_\theta : [0, T] \longrightarrow H^1(\Omega)$ tel que

$$\begin{aligned} \alpha_\theta(t) \in K, \quad & (\dot{\alpha}_\theta(t), \zeta - \alpha_\theta(t))_{L^2(\Omega)} + a(\alpha_\theta(t), \zeta - \alpha_\theta(t)) \\ & \geq (S\varepsilon(u(t)), \alpha_\theta(t), \zeta - \alpha_\theta(t))_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \zeta \in K, \text{ p.p. } t \in (0, T) \end{aligned} \quad (2.1.62)$$

$$\alpha_\theta(0) = \alpha_0 \quad (2.1.63)$$

Dans l'étude du problème de $\mathbf{P}_V^\theta$, nous avons le résultat suivant.

Lemme 2.1.3 *Il existe une solution unique du problème $\mathbf{P}_V^\theta$, et qui satisfait (2.1.41).*

Démonstration du lemme 2.1.3

L'application d'inclusion de $(H^1(\Omega), |\cdot|_{H^1(\Omega)})$ dans $(L^2(\Omega), |\cdot|_{L^2(\Omega)})$ est continue et à image dense. Notant par $(H^1(\Omega))'$ l'espace dual de $H^1(\Omega)$ et identifiant le dual de $L^2(\Omega)$ avec lui-même, nous pouvons écrire le triplet de Gelfand

$$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset (H^1(\Omega))'.$$

Nous utilisons la notation $(\cdot, \cdot)_{(H^1(\Omega))' \times H^1(\Omega)}$ pour désigner le produit de dualité entre $(H^1(\Omega))'$ et $H^1(\Omega)$, nous avons

$$(\alpha, \xi)_{(H^1(\Omega))' \times H^1(\Omega)} = (\alpha, \xi)_{L^2(\Omega)} \quad \forall \alpha \in L^2(\Omega), \xi \in H^1(\Omega).$$

On sait que l'ensemble des endommagements admissibles K est un sous-ensemble non vide, fermé et convexe dans $H^1(\Omega)$. Ainsi, le champ d'endommagement initial $\alpha_0 \in K$, dans (2.1.21). Maintenant, en utilisant la définition (2.1.23) de la forme bilinéaire a , pour tout $\varphi, \xi \in H^1(\Omega)$, on a

$$a(\varphi, \xi) = a(\xi, \varphi),$$

et

$$|a(\varphi, \xi)| \leq 3k \|\nabla \varphi\|_H \|\nabla \xi\|_H \leq c \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \|\xi\|_{H^1(\Omega)},$$

donc, a est continue et symétrique. Ainsi, pour tout $\varphi \in H^1(\Omega)$, nous avons

$$a(\varphi, \varphi) = k \|\nabla \varphi\|_H^2,$$

alors

$$a(\varphi, \varphi) + (k+1) \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq k \left(\|\nabla \varphi\|_H^2 + \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 \right),$$

et d'où

$$a(\varphi, \varphi) + c_0 \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq c_1 \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \text{avec} \quad c_0 = k+1 \quad \text{et} \quad c_1 = k.$$

Nous remarquons que toutes les conditions du théorème 1.8.24 sont vérifiées. Ce qui conclut la preuve du lemme 2.1.3. $\square$

Enfin, à la suite de ces résultats et en utilisant les propriétés de l'opérateur $\mathcal{G}$ le fonctionnelle j et la fonction S pour $t \in [0, T]$, nous considérons l'opérateur

$$\Lambda(\eta, \theta)(t) = (\Lambda^1(\eta, \theta)(t), \Lambda^2(\eta, \theta)(t)) \in V' \times L^2(\Omega) \quad (2.1.64)$$

définis par les égalités

$$(\Lambda^1(\eta, \theta)(t), v)_{V' \times V} = (\mathcal{G}\varepsilon(u_\eta(t), \alpha_\theta(t), \varepsilon(v)))_{\mathcal{H}} + j(\beta_\eta(t), u_\eta(t), v), \quad \forall v \in V. \quad (2.1.65)$$

$$\Lambda^2(\eta, \theta)(t) = S(\varepsilon(u_\eta(t)), \alpha_\theta), \quad \forall v \in V. \quad (2.1.66)$$

Nous avons le résultat suivant.

Lemme 2.1.4 *Pour $(\eta, \theta) \in L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$ l'opérateur $\Lambda(\eta, \theta) : [0, T] \rightarrow V' \times L^2(\Omega)$ admet un unique point fixe noté $(\eta^*, \theta^*) \in L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$ tel que $\Lambda(\eta^*, \theta^*) = (\eta^*, \theta^*)$*

Démonstration du lemme 2.1.4

Soie $(\eta, \theta) \in L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$ et soit $t_1, t_2 \in [0, T]$. En utilisant (1.1.57), (2.1.26) et (1.2.6), nous avons fixé, et $v \in V$

Notons, pour $i = 1, 2$ et en utilisant (1.1.25) (1.1.46) et (2.1.29)

$$\begin{aligned}
 & \|\Lambda^1(\eta, \theta)(t_1) - \Lambda^1(\eta, \theta)(t_2)\|_{V'} \leq \|\mathcal{G}\varepsilon(u_\eta(t_1), \alpha_\theta(t_1)) - \mathcal{G}\varepsilon(u_\eta(t_2), \alpha_\theta(t_2))\| \\
 & + c_0 \|p_\nu(u_{\eta\nu}(t_1) - u_{\eta\nu}(t_2))\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \\
 & + c_0 \|\gamma_\nu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\beta_\nu^2(t_1)(-R(u_{\eta\nu}(t_1))_+ - \beta_\nu^2(t_2)(-R(u_{\eta\nu}(t_2))_+)\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \\
 & + c_0 \left\| p_\tau(\beta_{\eta_1}(t_1), u_{\eta\tau}(t_1)) - p_\tau(\beta_{\eta_2}(t_2), u_{\eta\tau}(t_2)) \right\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \\
 & + \int_{\Gamma_3} \left| p_\tau(\beta_{u_{\eta_1}}(t), u_{1\tau}(t)) - p_\tau(\beta_{u_{\eta_2}}(t), u_{2\tau}(t)) \right| |v_\tau| da \\
 & \leq C(\|u_\eta(t_1) - u_\eta(t_2)\|_V + \|\alpha_\theta(t_1) - \alpha_\theta(t_2)\|_{L^2(\Omega)} + \|\beta_\eta(t_1) - \beta_\eta(t_2)\|_{L^\infty(\Gamma_3)})
 \end{aligned} \tag{2.1.67}$$

Rappelons que ci-dessus $u_{\eta\nu}$, $u_{\eta\tau}$ désignent les composantes normale et tangentielle de la fonction u_ν respectivement. Ensuite, en raison des régularités de u_η , α_θ et β_η exprimée en (2.1.39), (2.1.41) et (2.1.42) respectivement, on déduit de (2.1.67) que $\Lambda^1(\eta, \theta)(t) \in C(0, T; V')$. Par un argument similaire, de (2.1.66) et (2.1.14) il s'ensuit que

$$\|\Lambda^2(\eta, \theta)(t_1) - \Lambda^2(\eta, \theta)(t_2)\|_{L^2(\Omega)'} \leq C(\|u_\eta(t_1) - u_\eta(t_2)\|_V + \|\alpha_\theta(t_1) - \alpha_\theta(t_2)\|_{L^2(\Omega)}) \tag{2.1.68}$$

par conséquent, $\Lambda^2(\eta, \theta) \in C(0, T; L^2(\Omega))$ et $\Lambda(\eta, \theta) \in C(0, T; V' \times L^2(\Omega))$.

Soit maintenant $(\eta_1, \theta_1), (\eta_2, \theta_2) \in L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$. Nous utilisons la notation $u_{\eta_i} = u_i$, $v_{\eta_i} = v_i$, $\alpha_{\theta_i} = \alpha_i$ et $\beta_{\eta_i} = u_i$, pour $i = 1, 2$. Des arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve de (2.1.67) et (2.1.68) on a

$$\begin{aligned}
 \|\Lambda(\eta, \theta)(t_1) - \Lambda(\eta, \theta)(t_2)\|_{V' \times L^2(\Omega)} & \leq C(\|u_1(t) - u_2(t)\|_V \\
 & + \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|\beta_1(t_1) - \beta_2(t_2)\|_{L^\infty(\Gamma_3)})
 \end{aligned} \tag{2.1.69}$$

depuis $u_i(t) = \int_0^t v_i(s) ds + u_0$ pour tout $t \in [0, T]$, nous avons

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 \leq C \int_0^t \|v_1(s) - v_2(s)\|_V^2 ds, \quad \forall t \in [0, T]. \tag{2.1.70}$$

En outre, à partir de (2.1.43), nous en déduisons que p.p. sur $(0, T)$

$$(\dot{v}_1 - \dot{v}_2, v_1 - v_2)_{V' \times V} + (\mathcal{A}\varepsilon(v_1) - \mathcal{A}\varepsilon(v_2), \varepsilon(v_1 - v_2))_{\mathcal{H}} + (\eta_1 - \eta_2, v_1 - v_2)_{V' \times V} = 0$$

Nous intégrons cette égalité par rapport au temps. Nous utilisons les conditions initiales $v_1(0) + v_2(0) + v_0$ et (2.1.12) pour constater que

$$m_{\mathcal{A}} \int_0^t \|v_1(s) - v_2(s)\|_V^2 ds \leq - \int_0^t (\eta_1(s) - \eta_2(s), v_1(s) - v_2(s))_{V' \times V} ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

Puis, en utilisant l'inégalité $2ab \leq \frac{a^2}{\gamma} + \gamma b^2$ nous obtenons

$$\int_0^t \|v_1(s) - v_2(s)\|_V^2 ds \leq C \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{V'}^2 ds, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.1.71)$$

D'autre part, le problème de l'adhérence de Cauchy nous pouvons écrire

$$\beta_i(t) = \beta_0 + \int_0^t H_{ad}(\beta_i(s), \zeta_{\beta_i}(s), R(\|u_i(s)\|)) ds, \quad i = 1, 2. \quad (2.1.72)$$

on utilise (2.1.72), (2.1.11) et (2.1.17) et la définition (1.1.24)

$$\begin{aligned} |\beta_1(t) - \beta_2(t)| &\leq L_{H_{ad}} \int_0^t |\beta_1(s) - \beta_2(s)| ds + L_{H_{ad}} \int_0^t |\zeta_{\beta_1}(s) - \zeta_{\beta_2}(s)| ds \\ &\quad + L_{H_{ad}} \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)| ds \end{aligned}$$

et en utilisant la relation (1.1.25) on a

$$\int_0^t |\zeta_{\beta_1}(s) - \zeta_{\beta_2}(s)| ds \leq C \int_0^t |\beta_1(t) - \beta_2(t)| ds. \quad (2.1.73)$$

Maintenant par (2.1.72) et (2.1.73) et l'inégalité de Gronwall on a

$$|\beta_1(t) - \beta_2(t)|^2 \leq C \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)| ds.$$

Intégrant cette inégalité sur Γ_3 et utilisons (1.1.46) on obtient

$$\|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^\infty(\Gamma_3)}^2 \leq C \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

De (2.1.62) on en déduit que

$$(\dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_2, \alpha_1 - \alpha_2)_{V' \times V} + a(\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2) \leq (\theta_1 - \theta_2, \alpha_1 - \alpha_2)_{L^2(\Omega)}, \quad \text{p.p. } t \in (0, T).$$

Intégrer l'inégalité par rapport au temps, en utilisant les conditions initiales $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = \alpha_0$ et l'inégalité $a(\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2) \geq 0$ nous trouvons

$$\frac{1}{2} \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^t (\theta_1(s) - \theta_2(s), \alpha_1(s) - \alpha_2(s))_{L^2(\Omega)} ds,$$

ce qui implique que

$$\frac{1}{2} \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^t (\|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \int_0^t \|\alpha_1(s) - \alpha_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds,$$

Cette inégalité combinée avec l'inégalité de Gronwall conduit à

$$\|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.1.74)$$

Nous remplaçons (2.1.73) dans (2.1.69) et nous utilisons (2.1.70) pour obtenir

$$\begin{aligned} \|\Lambda(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{V' \times L^2(\Omega)}^2 &\leq C(\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 + \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds \\ &\quad + \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2) \\ &\leq C \int_0^t \|v_1(s) - v_2(s)\|_V^2 ds + \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Il en résulte maintenant de ce qui précède et les estimations (2.1.71) et (2.1.74) que

$$\|\Lambda(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{V' \times L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\int_0^t \|(\eta_1, \theta_1)(s) - (\eta_2, \theta_2)(s)\|_{V' \times L^2(\Omega)}^2 ds \right).$$

Réitérant cette inégalité m temps de conduit à

$$\|\Lambda^m(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda^m(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))}^2 \leq \frac{(CT)^m}{m!} \|(\eta_1, \theta_1) - (\eta_2, \theta_2)\|_{L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))}^2.$$

Ainsi, pour m assez grand, Λ^m est une contraction sur le espace de Banach $L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$ et ainsi de Λ a un unique point fixe.

Passons maintenant à la démonstration du théorème 2.1.1

Démonstration du théorème 2.1.1

Existence.

Soit $(\eta^*, \theta^*) \in L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$ le point fixe de Λ défini par (2.1.64) et soient u_η, α_θ et β_η les solutions des problèmes $\mathbf{P}_V^\eta, \mathbf{P}_V^\theta$ et $\mathbf{P}_V^\beta$ pour $\eta = \eta^*, i.e u = u_{\eta^*}, \beta = \beta_{\eta^*}$.

Nous désignons par σ la fonction donnée par (2.1.22). Clairement (2.1.22), (2.1.24) et (2.1.25) sont vérifiées.

Puisque $\Lambda(\eta^*, \theta^*) = (\eta^*, \theta^*)$ on déduit $(\Lambda\eta^*(t), v) = (\eta^*(t), v) \quad \forall v \in V, \quad p.p. \quad t \in (0, T)$. Et, gardant en tête (2.1.29), (2.1.41), on déduit que (2.1.23) est satisfaite.

La régularité (2.1.26) s'en suit de (2.1.17), pendant que la régularité (2.1.28) et la propriété $0 \leq \beta(t) \leq 1$ sont des conséquences du lemme 2.1.2. En outre, puisque $u \in L^\infty(0, T; V)$, il s'en suit de (2.1.10) et (2.1.22) que $\sigma \in L^\infty(0, T; \mathcal{H})$.

Choissant maintenant $v = \varphi$ où $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)^d$ dans (2.1.36) et utilisant (2.1.18) et (2.1.29) on trouve

$$\rho \ddot{u} = \text{Div} \sigma(t) + f_0(t) \quad p.p. \quad t \in (0, T).$$

Maintenant (2.1.18) et (2.1.19) la régularité exprimé dans (2.1.39) et l'égalité ci dessus impliquent que $Div \sigma \in L^2(0, T; V')$ lequel à son tour implique $\sigma \in L^2(0, T; \mathcal{H})$.

Unicité. La partie de l'unicité est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ , et de l'unicité des problèmes $\mathbf{P}_V^\eta, \mathbf{P}_V^\theta$ et $\mathbf{P}_V^\beta$. A cet effet, soit $\{u, \sigma, \alpha, \beta\}$ la solution du problème (2.1.34) – (2.1.38) ayant la régularité (2.1.49) – (2.1.42), et on considère un élément $(\eta^*, \theta^*) \in L^2(0, T; V \times L^2(\Omega))$ défini par

$$(\eta(t), v)_V = (\mathcal{G}\varepsilon(u(t), \alpha(t), \varepsilon(v)))_{\mathcal{H}} + j(\beta(t), u(t), v), \quad \forall v \in V, \quad t \in [0, T] \quad (2.1.75)$$

$$\theta(t) = S(\varepsilon(u(t)), \alpha(t)). \quad (2.1.76)$$

L'équation (2.1.71), (2.1.73) et (2.1.74) qui la condition initiale $u(0) = u_0$ signifie que u est une solution de $\mathbf{P}_V^\eta$ et comme il résulte du lemme 2.1.1 que ce problème a une solution unique, notée u_η nous concluons que

$$u = u_\eta. \quad (2.1.77)$$

Ensuite, (3.1.32), (2.1.74) et (2.1.75) et la condition initiale $\beta(0) = \beta_0$ implique que β est un solution de $\mathbf{P}_V^\beta$ depuis le lemme 2.1.3 montre que le problème a une solution unique, notée β_η , nous obtenons

$$\beta = \beta_\eta. \quad (2.1.78)$$

L'équation (2.1.30), (2.1.74) et la condition initiale $\alpha(0) = \alpha_0$ impliquent maintenant que α est une solution de $\mathbf{P}_V^\theta$ du lemme 2.1.4 problème $\mathbf{P}_V^\theta$ a une solution unique, notée α_θ et il s'ensuit que

$$\alpha = \alpha_\theta. \quad (2.1.79)$$

En utilisant (2.1.64) et (2.1.75) – (2.1.79), nous concluons que $\Lambda(\eta, \theta) = (\eta, \theta)$ et par l'unicité du point de Λ fixe, il s'ensuit que

$$\eta = \eta^*, \quad \theta = \theta^*. \quad (2.1.80)$$

L'unicité de la solution est maintenant une conséquence de (2.1.77) – (2.1.79) avec l'équation $\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}(\varepsilon(u), \alpha)$.

2.2 Problème de contact bilatéral en viscoélasticité

Dans de nombreuses situations de la physique et de la mécanique, les processus quasi-statiques sont insuffisants à décrire les phénomènes, on rencontre alors des processus dynamiques de contact. Dans cette partie de cette thèse on propose d'étudier un problème dynamique de contact bilatéral sans frottement avec adhésion et endommagement entre un corps viscoélastique et une fondation. Le processus d'adhésion sur la surface de contact est modélisé par une variable interne de surface appelée champ d'adhésion. L'endommagement causé par les déformations viscoélastiques du matériau est modélisé par une variable interne du corps appelée champ d'endommagement. Le contact est bilatéral et la contrainte tangentielle due à l'adhésion, est incluse.

Le problème est formulé par un système d'équations et d'inéquations aux dérivées partielles contenant l'équation de mouvement ou d'équilibre du corps, la loi de comportement du matériau avec endommagement, une inclusion du type parabolique modélisant le champ d'endommagement, une équation différentielle modélisant le champ d'adhésion et les conditions aux limites auxquelles il est soumis.

Cette section est divisée en trois paragraphes. Dans le premier paragraphe, nous commençons par formuler le problème mécanique, puis nous indiquons les hypothèses sur les données. Ensuite, dans le deuxième paragraphe, nous décrivons la formulation variationnelle du problème. Enfin, dans le troisième paragraphe, nous énonçons et démontrons un théorème d'existence et d'unicité de la solution faible relative au problème.

Les techniques employées sont basées sur la théorie des équations variationnelles, des opérateurs monotones et des arguments du point fixe.

Les résultats de cette partie ont fait l'objet de la publication [53]

2.2.1 Formulation du problème mécanique-Hypothèses

Nous considérons un corps viscoélastique qui à l'instant $t = 0$ occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d (d = 2, 3)$ de frontière régulière, constitué de trois parties disjointes Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 tels que $mes\Gamma_1 > 0$. Soit $T > 0$ et soit $[0, T]$ l'intervalle de temps en question. Ce corps est encastré sur $\Gamma_1 \times (0, T)$, dans une structure fixe. Sur $\Gamma_2 \times (0, T)$ agissent des tractions

surfaciques de densité f_2 , et dans $\Omega \times (0, T)$ agissent des forces volumiques de densité f_0 et en adhésion avec une base sur la partie Γ_3 de sa frontière. Avec ces considérations, on peut formuler

Le problème mécanique qu'on étudie qui est le problème 2 du chapitre 1.

Problème P2 : *Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ et le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{S}^d$, le champ d'endommagement $\alpha : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$, et le champ d'adhésion $\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \longrightarrow [0, 1]$ tels que*

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{G}\varepsilon(u(t), \alpha(t)) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.2.1)$$

$$\dot{\alpha} - k\Delta\alpha + \partial\varphi_K(\alpha) \ni S(\varepsilon(u), \alpha) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.2.2)$$

$$\rho \ddot{u} = \text{Div}\sigma + f_0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.2.3)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (2.2.4)$$

$$\sigma\nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (2.2.5)$$

$$u_\nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (2.2.6)$$

$$-\sigma_\tau = p_\tau(\beta, u_\tau) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (2.2.7)$$

$$\dot{\beta} = H_{ad}(\beta, R(\|u_\tau\|)) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (2.2.8)$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T), \quad (2.2.9)$$

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = v_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0 \quad \text{dans } \Omega \quad (2.2.10)$$

$$\beta(0) = \beta_0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (2.2.11)$$

L'équation (2.1.1) représente la loi de comportement viscoélastique non linéaire avec endommagement. L'évolution du champ d'endommagement est modélisée par l'inclusion du type parabolique donnée par relation (2.1.2) où S est la fonction source de l'endommagement. L'équation (2.2.3) représente l'équation du mouvement où ρ désigne la masse volumique matériau. Les conditions (2.2.4) – (2.2.5) sont les conditions déplacement-traction. Les conditions (2.2.6) – (2.2.8) représentent les conditions de contact avec adhésion sur la partie Γ_3 de la frontière Ω . L'équation (2.2.9) représente une homogène condition limite Neumann où $\frac{\partial\alpha}{\partial\nu}$ représente la normale dérivé de α . Dans (2.2.10) nous considérons les conditions initiales où u_0 est le déplacement initial, v_0 la vitesse initiale et α_0 l'endommagement initial.

Enfin, dans (2.2.11) on a la condition initiale, dans laquelle β_0 représente le champ initial d'adhésion.

Pour l'étude du problème **P2**, on considère les hypothèses suivantes:

L'opérateur de viscosité $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d \text{ satisfait la condition (2.1.12)} \quad (2.2.12)$$

L'opérateur d'élasticité $\mathcal{G}$

$$\mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d \text{ satisfait la condition (2.1.13)} \quad (2.2.13)$$

La fonction de la source d'endommagement S

$$S : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ satisfait la condition (2.1.14)} \quad (2.2.14)$$

La fonction de contact tangentiel p_τ

$$p_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ satisfait la condition (2.1.15)} \quad (2.2.15)$$

La fonction d'adhésion $H_{ad} : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_{Had} > 0 \text{ tel que} \\ \quad |H_{ad}(x, b_1, r) - H_{ad}(x, b_2, r)| \leq L_{Had} |b_1 - b_2| \\ \quad \forall b_1, b_2 \in \mathbb{R}, \quad r \in [0, L], \quad p.p.x \in \Gamma_3 \quad \text{et} \\ \quad |H_{ad}(x, b_1, r_1) - H_{ad}(x, b_2, r_2)| \leq L_{Had} (|b_1 - b_2| + |r_1 - r_2|) \\ \quad \forall b_1, b_2 \in [0, 1], \quad r_1, r_2 \in [0, L], \quad p.p.x \in \Gamma_3; \\ \text{(b) l'application } x \rightarrow H_{ad}(x, b, r) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3 \\ \quad \forall b \in \mathbb{R}, \quad r \in [0, L]; \\ \text{(c) l'application } (b, r) \rightarrow H_{ad}(x, b, r) \text{ est continue sur } \mathbb{R} \times [0, L], \\ \quad p.p.x \in \Gamma_3; \\ \text{(d) } H_{ad}(x, 0, r) = 0 \quad \forall r \in [0, L], \quad p.p.x \in \Gamma_3; \\ \text{(e) } H_{ad}(x, b, r) \geq 0 \quad \forall b \leq 0, \quad r \in [0, L], \quad p.p.x \in \Gamma_3 \text{ et} \\ \quad H_{ad}(x, b, r) \leq 0 \quad \forall b \geq 1, \quad r \in [0, L], \quad p.p.x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (2.2.16)$$

On note que si $\beta \in L^\infty(\Gamma_3)$ et $r : \Gamma_3 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction mesurable, alors les conditions (3.2.16) impliquent que $x \rightarrow H_{ad}(x, \beta(x), Rr(x)) \in L^\infty(\Gamma_3)$.

On suppose que la *densité de masse* satisfait

$$\rho \in L^\infty(\Omega) \quad \text{et qu'il existe } \rho^* > 0 \quad \text{tel que } \rho(x) \geq \rho^* \quad p.p.x \in \Omega \quad (2.2.17)$$

et que les forces volumiques et de traction surfacique ont la régularité

$$f_0 \in L^2(0, T; H), \quad f_2 \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2)^d). \quad (2.2.18)$$

Finalement, les conditions initiales satisfait

$$u_0 \in V, \quad v_0 \in H, \quad (2.2.19)$$

$$\alpha_0 \in K, \quad (2.2.20)$$

$$\beta_0 \in L^\infty(\Gamma_3) \quad \text{et} \quad 0 \leq \beta_0 \leq 1 \quad p.p.x \in \Gamma_3. \quad (2.2.21)$$

Pour l'étude du problème **P2**, on définit le sous-espace fermé V de H_1 par

$$\mathbb{V} = \{v \in H_1 / v = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \quad \nu_\nu = 0 \text{ sur } \Gamma_3\} \quad (2.2.22)$$

Dans la suite nous définissons sur l'espace H un nouveau produit scalaire donné par

$$((u, v))_H = (\rho u, v)_H \quad \forall u, v \in H. \quad (2.2.23)$$

et soit $\|\cdot\|_H$ la norme associée, *i.e.*

$$\|v\|_H = (\rho v, v)_H^{\frac{1}{2}} \quad \forall v \in H. \quad (2.2.24)$$

En utilisant l'hypothèse (2.2.17), il s'ensuit que $\|\cdot\|_H$ et $|\cdot|_H$ des normes équivalentes sur H . En outre, l'inclusion de $(V, |\cdot|_V)$ dans $(H, \|\cdot\|_H)$ est continue et dense. Nous notons dans la suite par V' l'espace dual de V . Identifiant H avec son propre dual, nous pouvons écrire

$$V \subset H \subset V'.$$

Nous utilisons la notation $(\cdot, \cdot)_{V' \times V}$ pour représenter la dualité entre V' et V . Nous avons

$$(u, v)_{V' \times V} = ((u, v))_H \quad \forall u \in H, \quad v \in V. \quad (2.2.25)$$

Finalement, nous noterons par $\|\cdot\|_{V'}$ la norme sur l'espace dual V' .

Le théorème de représentation de Riesz, entraîne l'existence d'un élément

$f(t) \in V'$ tel que

$$(f(t), v)_{V' \times V} = (f_0(t), v)_H + (f_2(t), v)_{L^2(\Gamma_2)^d} \quad \forall v \in V, \text{ p.p. } t \in (0, T). \quad (2.2.26)$$

Soit $j : L^\infty(\Gamma_3) \times V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonctionnelle

$$j(\beta, u, v) = \int_{\Gamma_3} p_\tau(\beta, u_\tau) \cdot v_\tau d\Gamma \quad \forall \beta \in L^\infty(\Gamma_3), \forall u, v \in V. \quad (2.2.27)$$

Gardant à l'esprit (2.2.15), on observe que l'intégrale (2.2.27) est bien définie et on note que la condition (2.2.18) implique

$$f \in L^2(0, T; V'). \quad (2.2.28)$$

2.2.2 Formulation variationnelle

Retournons maintenant à la formulation variationnelle du problème mécanique **P2**. Pour cela, nous supposons dans la suite que $\{u, \sigma, \alpha, \beta\}$ sont des fonctions régulières satisfaisant (2.2.1) – (2.2.11) et soit $v \in V, t \in (0, T)$.

En utilisant la formule de Green et (2.2.1) nous avons

$$(\rho \ddot{u}(t), v)_H + (\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} f_0(t) \cdot v dx + \int_{\Gamma} \sigma(t) \nu \cdot v d\Gamma.$$

Ensuite, par (2.2.4), (2.2.5), (2.2.23), (2.2.25) et (2.2.26) nous trouvons

$$(\ddot{u}(t), v)_{V' \times V} + (\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} = (f(t), v)_{V' \times V} + \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot v d\Gamma \quad \forall v \in H_1 \quad (2.2.29)$$

Il s'ensuit maintenant de (2.2.6) et (2.2.7) que

$$\sigma \nu \cdot v = \sigma_\nu \cdot v_\nu + \sigma_\tau \cdot v_\tau = 0 - p_\tau(\beta, u_\tau) v_\tau \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T),$$

et par conséquent, de (2.2.27) et de (2.2.29) nous trouvons

$$(\ddot{u}(t), v)_{V' \times V} + (\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(\beta(t), u(t), v) = (f(t), v)_{V' \times V}. \quad (2.2.30)$$

Pour conclure, de (2.2.2), (2.2.8) – (2.2.11), (2.2.30) et (2.1.33) nous obtenons la formulation variationnelle suivante du problème mécanique **P2**.

Problème $\mathbf{P}_V$: Trouver le champ des déplacements $u : [0, T] \longrightarrow \mathbb{V}$, et le champ des contraintes $\sigma : [0, T] \longrightarrow \mathcal{H}$, et le champ endommagement $\alpha : [0, T] \longrightarrow H^1(\Omega)$, et le champ d'adhésion $\beta : [0, T] \longrightarrow L^\infty(\Gamma_3)$ tels que

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{G}\varepsilon(u(t), \alpha) \quad p.p. \ t \in (0, T), \quad (2.2.31)$$

$$\begin{aligned} \alpha(t) \in K, \quad & (\dot{\alpha}(t), \zeta - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} + a(\alpha(t), \zeta - \alpha(t)) \\ & \geq (S\varepsilon(u(t)), \alpha(t)), \zeta - \alpha(t))_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \zeta \in K, \quad p.p. \ t \in (0, T) \end{aligned} \quad (2.2.32)$$

$$\begin{aligned} (\ddot{u}(t), v)_{V' \times V} + (\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(\beta(t), u(t), v) &= (f(t), v)_{V' \times V} \\ \forall v \in V, \quad p.p. \ t \in (0, T), \end{aligned} \quad (2.2.33)$$

$$\dot{\beta}(t) = H_{ad}(\beta(t), R(\|u_\tau(t)\|)), \quad 0 \leq \beta(t) \leq 1 \quad p.p. \ t \in [0, T], \quad (2.2.34)$$

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = \dot{u}_0, \quad \beta(0) = \beta_0. \quad (2.2.35)$$

L'étude du problème $\mathbf{P}_V$ va faire l'objet du paragraphe 2.2.3

2.2.3 Existence et unicité de la solution

Notre resultat principal d'existence et d'unicité est le suivant

Théorème 2.2.1 *Sous les hypothèses (2.2.12)–(2.2.21), le problème variationnel $\mathbf{P}_V$ admet une solution unique $\{u, \sigma, \alpha, \beta\}$ ayant la régularité suivante*

$$u \in W^{1,2}(0, T; V) \cap C^1([0, T]; H), \quad \ddot{u} \in L^2(0, T; V'), \quad (2.2.36)$$

$$\sigma \in L^2(0, T; \mathcal{H}), \quad \text{Div } \sigma \in L^2(0, T; V'), \quad (2.2.37)$$

$$\alpha \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)) \quad (2.2.38)$$

$$\beta \in W^{1,\infty}(0, T; L^\infty(\Gamma_3)). \quad (2.2.39)$$

On conclut que, sous les hypothèses (3.2.12) – (3.2.21), le problème $\mathbf{P}_2$ a une unique solution faible qui satisfait (3.2.36) – (3.2.39).

Démonstration du théorème 2.2.1

La démonstration du théorème 2.2.1 sera conduite en plusieurs étapes. Elle est basée sur les résultats des équations d'évolutions avec les opérateurs monotones et les arguments du

point fixe, mais avec un choix différent des opérateurs. Nous supposons dans la suite que (2.2.12) – (3.2.21) sont vérifiés.

Soit $\eta \in L^2(0, T; V')$ donné, Nous considérons le problème variationnel suivant

Problème P_V^η . *Trouver le champ de déplacement $u_\eta : [0, T] \longrightarrow V$ tel que*

$$\begin{aligned} (\ddot{u}_\eta(t), v)_{V' \times V} + (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_\eta(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\eta(t), v)_{V' \times V} &= (f(t), v)_{V' \times V} \\ \forall v \in V, \text{ p.p. } t \in (0, T), \end{aligned} \quad (2.2.40)$$

$$u_\eta(0) = u_0, \quad \dot{u}_\eta(0) = v_0, \quad (2.2.41)$$

Pour résoudre le problème $\mathbf{P}_V^\eta$, nous utilisons le théorème 1.8.23 d'existence et d'unicité cité ci-dessous pour plus de détails voir théorème de Krasnoselski (voir par exemple [38] page 60).

Lemme 2.2.2: *Il existe une unique solution du problème $\mathbf{P}_V^\eta$, et qui satisfait (2.2.36).*

Démonstration du lemme 2.2.2

Nous définissons l'opérateur $A : V \rightarrow V'$ par

$$(Au, v)_{V' \times V} = (\mathcal{A}\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in V. \quad (2.2.42)$$

Utilisant (2.2.42), (2.2.12) et (1.1.19)(1.1.20). Il s'en suit que

$$\|Au - Av\|_{V'} \leq C \|\mathcal{A}\varepsilon(u) - \mathcal{A}\varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in V.$$

et, gardant à l'esprit (2.2.12) et le théorème de Krasnoselski (voir par exemple[38], p.60), nous déduisons que $A : V \rightarrow V'$ est un opérateur continu.

Maintenant, par (2.2.42), (2.2.12), et(1.1.44), (1.1.45) nous trouvons

$$(Au - Av, u - v)_{V' \times V} \geq m_{\mathcal{A}} \|u - v\|^2 \quad \forall u, v \in V \quad (2.2.43)$$

i.e $A : V \rightarrow V'$ est un opérateur monotone.

On choisit $v = 0_V$ dans (3.2.43) on a

$$\begin{aligned} (Au, u)_{V' \times V} &\geq m_{\mathcal{A}} \|u\|_V^2 - \|A0_V\|_{V'} \|u\|_V \\ &\geq \frac{3}{2}m_{\mathcal{A}} \|u\|_V^2 - \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}} \|A0_V\|_{V'}^2, \quad \forall u \in V, \end{aligned}$$

ce qui implique que A satisfait la condition(1.2.41) avec le choix de $\lambda = \frac{3}{2}m_{\mathcal{A}}$ et $\alpha = \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}} \|A0_V\|_{V'}^2$.

En outre, par (2.2.42), (2.2.12) on trouve

$$\|A u\|_{V'} \leq \|\mathcal{A}\varepsilon(u)\|_{\mathcal{H}} \leq \mathcal{C}_1^{\mathcal{A}} \|\varepsilon(u)\|_{\mathcal{H}} + \mathcal{C}_2^{\mathcal{A}} \quad \forall u \in V$$

De cette inégalité et de (2.2.41) et de l'égalité (1.1.44), (1.1.45) implique que l'opérateur A satisfait la condition (1.2.42) du théorème 1.8.23. Finalement, nous rappelons que $f - \eta \in L^2(0, T; V')$ et $v_0 \in H$ voir (2.2.28) et (2.2.21). Il s'en suit maintenant du théorème 1.8.23 qu'il existe une unique fonction v_η qui satisfait:

$$\begin{aligned} v_\eta &\in L^2(0, T; V) \cap C([0, T]; H), & \frac{dv_\eta}{dt} &\in L^2(0, T; V'), \\ \frac{dv_\eta}{dt} + A v_\eta(t) + \eta(t) &= f(t), & p.p. \quad t &\in (0, T) \end{aligned} \quad (2.2.45)$$

$$v_\eta(0) = v_0. \quad (2.2.46)$$

Soit $u_\eta : [0, T] \rightarrow V$ la fonction définie par

$$u_\eta(t) = \int_0^t v_\eta(s) ds + u_0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.2.47)$$

Il s'en suit de (2.2.42), (2.2.44) – (3.2.47) que u_η est une solution du problème variationnel $\mathbf{P}_V^\eta$ ayant la régularité (2.2.36), ce qui conclut la partie d'existence du lemme 2.2.1. La partie d'unicité résulte de l'unicité du problème (3.2.44) – (3.2.46), et est garanti par le théorème 1.8.23.

Dans la deuxième étape, nous utilisons le champ de déplacement u_η obtenu dans le lemme 2.1.1 et envisager le problème suivant la valeur initiale.

Problème $\mathbf{P}_V^\beta$. *Trouver le champ d'adhésion $\beta_\eta : [0, T] \longrightarrow L^\infty(\Gamma_3)$ tel que*

$$\dot{\beta}_\eta(t) = H_{ad}(\beta_\eta(t), R(|u_{\eta\tau}(t)|)) \quad p.p. \quad t \in (0, T) \quad (2.2.48)$$

$$\beta_\eta(0) = \beta_0 \quad (2.2.49)$$

En utilisant la version du théorème de Cauchy-Lipschitz et arguments signaler fixe de Banach. Nous avons le résultat suivant.

Lemme 2.2.2 *Il existe une solution unique du problème $\mathbf{P}_V^\beta$, ayant la régularité $\beta \in W^{1,\infty}(0, T; L^\infty(\Gamma_3))$. et vérifie de plus,*

$$0 \leq \beta_\eta(t) \leq 1 \quad \forall t \in [0, T] \quad p.p. \text{ sur } \Gamma_3. \quad (2.2.50)$$

et il existe une constante positive C telle que pour $\eta_1, \eta_2 \in C([0, T]; V)$, on a

$$\|\beta_{\eta_1}(t) - \beta_{\eta_2}(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \leq C \int_0^t \|u_{\eta_1}(s) - u_{\eta_2}(s)\|_V^2 ds \quad \forall t \in [0, T] \quad p.p. \text{ sur } \Gamma_3 \quad (2.2.51)$$

Démonstration du lemme 2.2.2

Soit $\eta \in C([0, T]; V)$ fixé, et pour la simplicité nous supprimons la dépendance de diverses fonctions de $x \in \Gamma_3$. Notons que les égalités et les inégalités ci-dessous restent valable *p.p.* sur Γ_3 .

Considérons l'application $F : [0, T] \times L^\infty(\Gamma_3) \rightarrow L^\infty(\Gamma_3)$ défini par

$$F(t, \beta) = H_{ad}(\beta, R(\|u_\tau(t)\|)),$$

pour $t \in [0, T]$ et $\beta \in L^\infty(\Gamma_3)$.

Il est facile de vérifier que F est de Lipschitz continue par rapport à la deuxième variable, uniformément en temps; en outre, pour tout $\beta \in L^\infty(\Gamma_3)$, l'application $t \rightarrow F(t, \beta)$ appartient à $L^\infty(0; T; L^\infty(\Gamma_3))$. Ainsi, l'existence et l'unicité de la solution β_η de (3.2.33) s'ensuit d'une version du théorème Cauchy-Lipschitz, théorème 1.1.22.

Pour vérifier (3.2.34) supposons, que $\beta_\eta(t_0) < 0$ pour un certain $t_0 \in [0, T]$.

Sous la condition (3.2.16) on a $0 \leq \beta_\eta(0) \leq 1$ et, l'application $t \rightarrow \beta(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, on peut trouver $t_1 \in [0, t_0]$ tel que $\beta_\eta(t_1) = 0$.

Maintenant, soit $t_2 = \sup\{t \in [t_1, t_0], \beta_\eta(t) = 0\}$ quand $t_2 < t_0$, $\beta_\eta(t_2) = 0$ et $\beta_\eta(t) < 0$ pour $t \in (t_2, t_0]$.

La condition (3.2.13)(e) implique que $\dot{\beta}_\eta(t) \geq 0$ pour $t \in (t_2, t_0]$, donc $\beta_\eta(t_0) \geq \beta_\eta(t_2) = 0$, ce qui est une contradiction.

Par un argument semblable on montre que $\beta_\eta(t) \leq 1$ pour tout $t \in [0, T]$.

Soit $t \in [0, T]$ fixé et soit $\eta_i \in C([0, T]; V)$ pour $i = 1, 2$. Alors,

$$\beta_{\eta_i}(t) = \beta_0 + \int_0^t H_{ad}(\beta_{\eta_i}(s), R(\|u_{i\tau}(s)\|)) ds; \quad i = 1, 2 \quad (2.2.52)$$

En utilisant (3.2.36) et (3.1.14)(a) et la définition de l'opérateur R dans (1.1.13) on obtient

$$\begin{aligned}
 |\beta_{\eta_1}(t) - \beta_{\eta_2}(t)| &\leq \int_0^t |H_{ad}(\beta_{\eta_1}(s), R(\|u_{1\tau}(s)\|) - H_{ad}(\beta_{\eta_2}(s), R(\|u_{2\tau}(s)\|))| ds \\
 |\beta_{\eta_1}(t) - \beta_{\eta_2}(t)| &\leq L_{Had} \int_0^t |\beta_{\eta_1}(s) - \beta_{\eta_2}(s)| ds + L_{Had} \int_0^t |u_{1\tau}(s) - u_{2\tau}(s)| ds
 \end{aligned}$$

Maintenant par (3.1.45) et (3.1.46) et l'inégalité de Gronwall on a

$$|\beta_{\eta_1}(t) - \beta_{\eta_2}(t)|^2 \leq C \int_0^t |u_{1\tau}(s) - u_{2\tau}(s)|^2 ds$$

Intégrant cette inégalité sur Γ_3 et utilisons (1.1.43) on obtient

$$\|\beta_{\eta_1}(t) - \beta_{\eta_2}(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \leq C \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds, \quad \forall t \in [0, T], \quad (2.2.53)$$

Dans la troisième étape, nous laissons $\theta \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ accordée et considérer le problème variationnel suivant pour le champ de dommage

Problème $\mathbf{P}_V^\theta$. Trouver le champ d'endommagement $\alpha_\theta : [0, T] \longrightarrow H^1(\Omega)$ tel que

$$\begin{aligned}
 \alpha_\theta(t) &\in K, \quad (\dot{\alpha}_\theta(t), \zeta - \alpha_\theta(t))_{L^2(\Omega)} + a(\alpha_\theta(t), \zeta - \alpha_\theta(t)) \\
 \forall \zeta \in K, \quad &\geq (S\varepsilon(u(t)), \alpha_\theta(t), \zeta - \alpha_\theta(t))_{L^2(\Omega)}, \quad \text{p.p. } t \in (0, T)
 \end{aligned} \quad (2.2.54)$$

$$\alpha_\theta(0) = \alpha_0 \quad (2.2.55)$$

Dans l'étude du problème de $\mathbf{P}_V^\theta$, nous avons le résultat suivant.

Lemme 2.2.3 *Il existe une solution unique du problème $\mathbf{P}_V^\theta$, ayant la régularité $\alpha \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$.*

Démonstration du lemme 2.2.3

Démonstration du lemme 2.2.3, en utilisant les memes argument du lemme 2.1.3.

On note par α_θ la solution de problème $\mathbf{P}_V^\theta$ obtenue dans le lemme 2.2.3.

Maintenant, pour $t \in [0; T]$, nous considérons l'opérateur

$$\Lambda(\eta, \theta) : L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega)) \rightarrow L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$$

défini par: pour chaque $(\eta, \theta) \in L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$

$$\Lambda(\eta, \theta)(t) = (\Lambda^1(\eta, \theta)(t), \Lambda^2(\eta, \theta)(t)) \in V' \times L^2(\Omega) \quad (2.2.56)$$

avec

$$(\Lambda^1(\eta, \theta)(t), v)_{V' \times V} = (\mathcal{G}\varepsilon(u_\eta(t), \alpha_\theta(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(\beta_\eta(t), u_\eta(t), v), \quad (2.2.57)$$

$$\forall v \in V, t \in [0, T]$$

$$\Lambda^2(\eta, \theta)(t) = S(\varepsilon(u_\eta(t)), \alpha_\theta), \quad \forall v \in V. \quad (2.2.58)$$

Ici, pour tout $(\eta, \theta) \in L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$, u_η, β_η et α_θ représentent le champ des déplacements, le champ d'endommagement et le champ d'adhésion obtenus dans les lemmes 2.2.1, 2.2.2 et 2.2.3 respectivement. Nous avons le résultat suivant.

Lemme 2.2.4 Il existe un élément unique $(\eta^*, \theta^*) \in L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$ tel que

$$\Lambda(\eta^*, \theta^*) = (\eta^*, \theta^*).$$

Démonstration du lemme 2.2.4

Soit $(\eta, \theta) \in L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$ et soit $t_1, t_2 \in [0, T]$. Utilisant (2.2.57), (2.2.12), (1.1.44) et (1.1.45)

$$(\Lambda^1(\eta, \theta)(t_1) - \Lambda^1(\eta, \theta)(t_2), v)_{V' \times V} = (\mathcal{G}\varepsilon(u_\eta(t_1), \alpha(t_1)) - \mathcal{G}\varepsilon(u_\eta(t_2), \alpha(t_2)), \varepsilon(v), \alpha(t_2))$$

$$+ j(\beta_\eta(t_1) - \beta_\eta(t_2), u_\eta(t_1) - u_\eta(t_2), v), \quad \forall v \in V, t \in [0, T]$$

Nous obtenons

$$\|\Lambda^1(\eta, \theta)(t_1) - \Lambda^1(\eta, \theta)(t_2)\|_{V'} \leq \|\mathcal{G}\varepsilon(u_\eta(t_1), \alpha(t_1)) - \mathcal{G}\varepsilon(u_\eta(t_2), \alpha(t_2))\|_{\mathcal{H}}$$

$$+ C_0 \left\| p_\tau(\beta_\eta(t_1), u_{\eta\tau}(t_1)) - p_\tau(\beta_\eta(t_2), u_{\eta\tau}(t_2)) \right\|_{L^2(\Gamma_3)}$$

et gardant à l'esprit (2.2.13) et (2.2.15), nous trouvons

$$\|\Lambda^1(\eta, \theta)(t_1) - \Lambda^1(\eta, \theta)(t_2)\|_{V'} \leq C \|u_\eta(t_1) - u_\eta(t_2)\|_V + \|\alpha(t_1) - \alpha(t_2)\|_{L^2(\Omega)}$$

$$+ C \left\| \beta_\eta(t_1) - \beta_\eta(t_2) \right\|_{L^2(\Gamma_3)} \quad (2.2.59)$$

Ensuite, en raison des régularités de u_η , α_θ et β_η exprimée dans (2.2.36), (2.2.38) et (2.2.39) respectivement, on déduit de (2.2.57) que $\Lambda^1(\eta, \theta) \in C(0, T; V')$. Par un argument de similaire, à partir de (2.2.58) et (2.2.14) il s'ensuit que

$$\|\Lambda^2(\eta, \theta)(t_1) - \Lambda^2(\eta, \theta)(t_2)\|_{L^2(\Omega)} \leq C (\|u_\eta(t_1) - u_\eta(t_2)\|_V + \|\alpha_\theta(t_1) - \alpha_\theta(t_2)\|_{L^2(\Omega)}) \quad (2.2.60)$$

On déduit des inégalités (2.2.60) que $\Lambda_\eta^2 \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ et $\Lambda_\eta \in C([0, T]; V' \times L^2(\Omega))$.

Soit maintenant $t \in [0, T]$ fixé, et soit (η_1, θ_1) et $(\eta_2, \theta_2) \in L^2([0, T]; V' \times L^2(\Omega))$ et notons par $u_{\eta_i} = u_i$, $\dot{u}_{\eta_i} = v_{\eta_i} = v_i$, $\alpha_{\theta_i} = \alpha_i$ et $\beta_{\eta_i} = \beta_i$ pour $i = 1, 2$.

Utilisant les arguments similaires à ceux dans la preuve de l'inégalité (2.2.59) et (2.2.60), il vient

$$\begin{aligned} \|\Lambda(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{V' \times L^2(\Omega)}^2 &\leq C \|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 + C \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \\ &\quad + \|\alpha_\theta(t_1) - \alpha_\theta(t_2)\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned} \quad (2.2.61)$$

Nous remplaçons (2.1.53) dans (2.1.61) et nous utilisons (2.1.61) pour obtenir

$$\begin{aligned} \|\Lambda(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{V'}^2 &\leq C(\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 + \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds \\ &\quad + \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2) \\ &\leq C \int_0^t \|v_1(s) - v_2(s)\|_V^2 ds + \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \end{aligned}$$

Il en résulte maintenant de ce qui précède et les estimations (2.1.62) et (2.1.67) que

$$\|\Lambda(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{V' \times L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\int_0^t \|(\eta_1, \theta_1)(s) - (\eta_2, \theta_2)(s)\|_{V' \times L^2(\Omega)}^2 ds \right)$$

Réitérant cette inégalité m temps de conduit à

$$\|\Lambda^m(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda^m(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{L^2(0,T;V' \times L^2(\Omega))}^2 \leq \frac{(CT)^m}{m!} \|(\eta_1, \theta_1) - (\eta_2, \theta_2)\|_{L^2(0,T;V' \times L^2(\Omega))}^2.$$

Ainsi, pour m assez grand, Λ^m est une contraction sur le Banach espace $L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$ et ainsi de Λ a un unique point fixe.

Passons maintenant à la démonstration du théorème 2.2.1

Démonstration du théorème 2.2.1

Existence. Soit $(\eta^*, \theta^*) \in L^2(0, T; V \times L^2(\Omega))$ le point fixe de Λ défini par (3.1.56) – (3.1.58). On note par u_{η^*} la solution du problème $\mathbf{P}_V^\eta$ pour $\eta = \eta^*$ et soit α_{θ^*} la solution du problème $\mathbf{P}_V^\theta$ pour $\theta = \theta^*$. Soit β_{η^*} la solution du problème $\mathbf{P}_V^\beta$ pour $\eta = \eta^*$.

Nous désignons par σ_{η^*} la fonction donnée par

$$\sigma_{\eta^*}(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_{\eta^*}(t)) + \mathcal{G}\varepsilon(u_{\eta^*}(t), \alpha_{\eta^*}(t))$$

En utilisant (2.2.57), (2.2.58) en gradant à l'esprit que $\Lambda^1(\eta^*, \theta^*) = \eta^*$, $\Lambda^2(\eta^*, \theta^*) = \theta^*$ on trouve que le quadruplet $\{u_{\eta^*}, \sigma_{\eta^*}, \alpha_{\theta^*}, \beta_{\eta^*}\}$ est une solution du problème $\mathbf{P}_V$. Cette solution a la régularité exprimés en (2.2.36) – (2.2.39) cela résulte de la régularités des solutions aux problèmes $\mathbf{P}_V^\eta$, $\mathbf{P}_V^\theta$ et $\mathbf{P}_V^\beta$. De plus, il résulte de (2.2.36), (2.2.12) and (2.2.13)

qui $\sigma_{\eta^*} \in L^2(0, T; \mathcal{H})$. Choisisant maintenant $v = \varphi$ où $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)^d$ et utilisant (2.2.17) et (2.2.27) on trouve

$$\rho \ddot{u} = \text{Div} \sigma(t) + f_0(t) \quad p.p. \quad t \in (0, T).$$

Les hypothèses (2.2.17) et (2.2.18) la régularité exprimé dans (2.2.36) et l'égalité ci dessus impliquent que $\text{Div} \sigma \in L^2(0, T; V')$ dont il résulte que $\sigma \in L^2(0, T; \mathcal{H})$.

Unicité. Soit $\{u_{\eta^*}, \sigma_{\eta^*}, \alpha_{\theta^*}, \beta_{\eta^*}\}$ est une solution du problème P_V . obtenu ci-dessus et soit $\{u_\eta, \sigma_\eta, \alpha_\theta, \beta_\eta\}$ une autre solution qui satisfait (2.2.36) – (2.2.39). On note $\eta \in L^2(0, T; V')$ and $\theta \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ les fonctions

$$(\eta(t), v)_V = (\mathcal{G}\varepsilon(u(t), \alpha(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(\beta(t), u(t), v), \quad \forall v \in V, \quad t \in [0, T] \quad (2.2.62)$$

$$\theta(t) = S(\varepsilon(u(t)), \alpha(t)). \quad (2.2.63)$$

L'équations (2.2.31), (2.2.33) et (2.2.62) qui la condition initiale $u(0) = u_0$ signifie que u est une solution de $\mathbf{P}_V^\eta$ et comme il résulte du lemme 2.2.1 que ce problème a une solution unique, notée u_η nous concluons que

$$u = u_\eta. \quad (2.2.64)$$

Ensuite, (3.1.32), (2.2.64) et (2.2.34) et la condition initiale $\beta(0) = \beta_0$ implique que β est un solution de $\mathbf{P}_V^\beta$ depuis le lemme 2.2.2 montre que le problème a une solution unique, notée β_η , nous obtenons

$$\beta = \beta_\eta. \quad (2.2.65)$$

L'équations (2.2.32), (2.2.63) et la condition initiale $\alpha(0) = \alpha_0$ impliquent maintenant que α est une solution de $\mathbf{P}_V^\theta$ du lemme 2.2.3 problème $\mathbf{P}_V^\theta$ a une solution unique, notée α_θ et il s'ensuit que

$$\alpha = \alpha_\theta. \quad (2.2.66)$$

En utilisant (2.2.56) et (2.2.62) – (2.2.66), nous concluons que $\Lambda(\eta, \theta) = (\eta, \theta)$ et par l'unicité du point de Λ fixe, il s'ensuit que

$$\eta = \eta^*, \quad \theta = \theta^*. \quad (2.2.67)$$

L'unicité de la solution est maintenant une conséquence de (2.1.64) – (2.1.67) avec l'égalité $\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}(\varepsilon(u), \alpha)$.

Chapitre 3

Problèmes piézoélectriques de contact avec frottement et adhésion et endommagement

Le deuxième chapitre dans cette thèse est consacré à l'étude de certains problèmes de contact impliquant l'adhésion et endommagement avec le frottement, entre un corps ayant une loi de comportement électro élasto-viscoplastique ou électro viscoélastique avec mémoire longue et une fondation. Elle est composée de deux sections.

Dans la première section, nous étudions un problème de contact avec frottement et adhésion en électro élasto-viscoplastique avec endommagement. Nous allons dériver une formulation variationnelle du problème mécanique originaire, pour lequel nous démontrons qu'il existe une solution faible unique en utilisant des techniques de point fixe pour des opérateurs construits dans des espaces de Banach appropriés.

Dans la deuxième section, nous analysons un problème de contact avec frottement et adhésion en électro-viscoélasticité avec mémoire longue et endommagement, pour lequel nous dérivons une formulation variationnelle. Nous établissons un résultat d'existence et d'unicité d'une solution au problème variationnel.

3.1 Problème électro élasto-viscoplastique avec frottement et adhésion et endommagement

Dans cette section, on considère un problème de contact avec frottement et compliance normale dans un processus quasistatique. Le matériau est électro élasto-viscoplastique et endommagement. Le processus d'adhésion sur la surface de contact est modélisé par une variable interne de surface appelée champ d'adhésion. L'endommagement causé par les déformations élastiques du matériau est modélisé par une variable interne du corps appelée champ d'endommagement. Le frottement est formulé par une version de la loi de Coulomb.

Le problème est formulé par un système d'équations et d'inéquations aux dérivées partielles contenant l'équation de mouvement ou d'équilibre du corps, la loi de comportement du matériau avec endommagement, une inclusion du type parabolique modélisant le champ d'endommagement, une équation différentielle modélisant le champ d'adhésion et les conditions aux limites auxquelles il est soumis.

Cette section est divisé en trois paragraphes. Dans le premier paragraphe, nous présentons le problème mécanique, puis nous indiquons les hypothèses sur les données. Dans le deuxième paragraphe, nous décrivons la formulation variationnelle du problème mécanique. Enfin, dans le troisième paragraphe, nous étudions l'existence et l'unicité d'une solution faible du problème mécanique. Les résultats de cette partie ont fait l'objet de la publication [54].

3.1.1 Formulation mécanique du problème

Le problème étudié dans cette section entre dans le cadre physique n°. 2, présenté dans le première chapitre du mémoire et par conséquent nous utilisons le deuxième modèle mathématique. Pour que le modèle soit complet, précisons que la loi de comportement est électro élasto-viscoplastique du type (1.1.12) et la condition de contact avec compliance normale est prescrite dans (1.1.27). Nous considérons les conditions de frottement du type Coulomb (1.1.32).

Alors, le modèle classique pour ce processus est le suivant

Problème P3. Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, le champ potentiel électrique $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, le champ des déplacements électriques $D : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ d'endommagement $\alpha : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ et le champ d'adhésion $\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{B}(\varepsilon(u)) + \mathcal{E}^*\nabla\varphi + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) - \mathcal{E}^*\nabla\varphi, \varepsilon(u), \alpha) ds, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.1.1)$$

$$D = \mathcal{E}\varepsilon(u) - \mathbf{B}\nabla\varphi \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.1.2)$$

$$\dot{\alpha} - k \triangle \alpha + \partial\varphi_K(\alpha) \ni S(\sigma - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) - \mathcal{E}^*\nabla\varphi, \varepsilon(u), \alpha), \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.1.3)$$

$$0 = \text{Div}\sigma + f_0, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.1.4)$$

$$0 = \text{Div}\sigma + f_0, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.1.5)$$

$$u = 0, \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (3.1.6)$$

$$\sigma\nu = f_2, \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (3.1.7)$$

$$\begin{cases} -\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - g), \\ \|\sigma_\tau\| \leq p_\tau(u_\nu - g), \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.1.8)$$

$$\dot{u}_\tau \neq 0 \Rightarrow \sigma_\tau = -p_\tau(u_\nu - g) \frac{\dot{u}_\tau}{\|\dot{u}_\tau\|}, \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.1.9)$$

$$\dot{\beta} = -\beta [\gamma_\nu (R_\nu(u_\nu))^2 + \gamma_\tau |R_\tau(u_\tau)|^2] - \epsilon_a, \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.1.10)$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\nu} = 0, \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T), \quad (3.1.11)$$

$$\varphi = 0, \quad \text{sur } \Gamma_a \times (0, T), \quad (3.1.12)$$

$$\mathbf{D}.\nu = q_2, \quad \text{sur } \Gamma_b \times (0, T), \quad (3.1.13)$$

$$\mathbf{D}.\nu = \psi(u_\nu - g) \phi(\varphi - \varphi_0), \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.1.14)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0, \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.1.15)$$

$$\beta(0) = \beta_0, \quad \text{sur } \Gamma. \quad (3.1.16)$$

Nous décrivons maintenant les notations dans (3.1.1) – (3.1.16) et fournissons quelques commentaires sur les égalités et les conditions aux limites. D'abord, les équations (3.1.1) et (3.1.2) représentent loi de comportement électro élasto-viscoplastique avec d'endommagement, l'évolution du champ d'endommagement est modelisée par l'inclusion de type parabolique

3.1. Problème électro élasto-viscoplastique avec frottement et adhésion et endommagement

donné par la relation (3.1.3) où S est la fonction source d'endommagement; φ_K est le sous-différentiel de la fonction indicatrice de l'ensemble des fonctions d'endommagement admissibles K .

Ensuite, les équations (3.1.4) et (3.1.5) sont les équations d'équilibre des champs de contrainte et du déplacement électrique, que nous avons déjà vu dans (1.1.6) et (1.1.7). Conditions (3.1.6) et (3.1.7) sont les conditions aux limites de déplacement-traction, tandis que (3.1.12) et (3.1.14) représentent les conditions aux limites électriques que nous avons définis (3.1.13), (3.1.14) et (3.1.36). Rappelons par ailleurs que ϕ est la fonction de troncation définie par (3.1.42). Le contact avec compliance normale et adhésion sur le partie Γ_3 de la frontière Ω . est modélisé par les conditions (3.1.8) et (3.1.10) qui figure dans (1.1.27) et le frottement est décrit par la relation (3.1.9) qui peut être écrite sous la forme (1.1.32). La relation (3.1.11) décrit une condition aux limites de Neumann homogène où $\frac{\partial \alpha}{\partial \nu}$ est la dérivée normale de α . Finalement, (3.1.15) et (3.1.15) représentent les conditions initiales.

Pour obtenir la formulation variationnelle du problème (3.1.1) – (3.1.16) nous introduisons. D'autre part, pour le champ d'adhésion, nous définissons l'ensemble $\mathcal{Z}$

$$\mathcal{Z} = \left\{ \theta \in L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_3)) \mid 0 \leq \theta(t) \leq 1 \quad \forall t \in [0, T], \text{ p.p. sur } \Gamma_3 \right\}.$$

3.1.2 Formulation variationnelle

Pour obtenir une formulation variationnelle du problème mécanique **P3**. On considère maintenant les hypothèses suivantes

Nous supposons que l'opérateur de viscosité

$$\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d \text{ satisfait la condition (2.1.12).} \quad (3.1.17)$$

L'opérateur d'élasticité $\mathcal{B} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ doit satisfaire aux condition

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_{\mathcal{B}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad \|\mathcal{B}(x, \xi_1) - \mathcal{B}(x, \xi_2)\| \leq L_{\mathcal{B}} \|\xi_1 - \xi_2\| \\ \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ \text{(b) L'application } x \mapsto \mathcal{B}(x, \xi) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega, \\ \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(c) L'application } x \mapsto \mathcal{B}(x, 0) \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (3.1.18)$$

3.1. Problème électro élasto-viscoplastique avec frottement et adhésion et endommagement

Un exemple d'une fonction de conformité normale p_ν qui satisfait conditions (3.1.23) est de $p_\nu(u) = c_\nu u_+$ où $c_\nu \in L^\infty(\Gamma_3)$ est une rigidité de surface positive coefficient, et $u_+ = \max\{0, u\}$. Le choix $p_\tau = \mu p_\nu$ et $p_\tau = \mu p_\nu(1 - \delta p_\nu)_+$ en (3.1.9), où $\mu \in L^\infty(\Gamma_3)$ et $\delta \in L^\infty(\Gamma_3)$ sont des fonctions positives, conduire à l'habitude ou la loi de Coulomb modifié de frottement, respectivement, voir [26, 40, 52] pour plus de détails. Ici, μ représente la coefficient de frottement et δ est un petit matériel positif constante liée à l'usure et la dureté de la surface. nous notons que si p_ν satisfait la condition (3.1.23) alors p_τ satisfait aussi, dans les deux exemples. Par conséquent, nous concluons que les résultats ci-dessous sont valables pour le correspondant modèles de contact frottant piézoélectriques.

Le surface conductivité électrique fonction $\psi : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_\psi > 0 \text{ telle que} \\ \quad \|\psi(x, \xi_1) - \psi(x, \xi_2)\| \leq M_\psi \|\xi_1 - \xi_2\| \\ \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ \text{(b) Il existe } M_\psi > 0 \text{ telle que } \psi(x, \xi) \leq M_\psi \\ \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ \text{(c) L'application } x \mapsto p_r(x, \xi) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3, \\ \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}. \\ \text{(d) L'application } x \mapsto p_r(x, \xi) = 0, \text{ pour tout } \xi \leq 0, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (3.1.24)$$

Un exemple d'une fonction de la conductivité, qui remplit la condition (3.1.24) est donnée par (1.1.51), auquel cas $M_\psi = k$. Un autre exemple est fourni par $\psi \equiv 0$, les modèles les contact avec une fondation isolée, comme indiqué à la section 2. Nous concluons que nos résultats ci-dessous sont valables pour le modèle de contact piézoélectriques correspondant.

Les coefficients d'adhésion γ_ν, γ_τ et ε_a vérifient

$$\gamma_\nu, \gamma_\tau \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \varepsilon_a \in L^2(\Gamma_3), \quad \gamma_\nu, \gamma_\tau, \varepsilon_a \geq 0, \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3. \quad (3.1.25)$$

et le champ initial d'adhésion satisfait

$$\beta_0 \in L^2(\Gamma_3), \quad 0 \leq \beta_0 \leq 1, \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3. \quad (3.1.26)$$

Enfin, le champ initial d'endommagement vérifie

$$\alpha_0 \in K. \quad (3.1.27)$$

3.1. Problème électro élasto-viscoplastique avec frottement et adhésion et endommagement

Les forces, les tractions, les densités des charges volumiques et surfaciques vérifient

$$f_0 \in W^{1,p}(0, T; \mathcal{W}), \quad f_2 \in W^{1,p}(0, T; L^2(\Gamma_2)^d), \quad (3.1.28)$$

$$q_0 \in W^{1,p}(0, T; L^2(\Omega)), \quad q_2 \in W^{1,p}(0, T; L^2(\Gamma_b)), \quad (3.1.29)$$

Finalement, nous assumons que l'interstice g , le potentiel donné et le déplacement initial satisfont

$$g \in L^2(\Gamma_3), \quad g \geq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3, \quad (3.1.30)$$

$$\varphi_0 \in L^2(\Gamma_3), \quad (3.1.31)$$

$$u_0 \in V, \quad (3.1.32)$$

Pour étudier le problème $PV3$, nous posons une hypothèse de petitesse

$$M_\psi < \frac{m_B}{\tilde{c}_0^2} \quad (3.1.33)$$

où les constantes positives M_ψ , m_B et $\tilde{c}_0$ sont définies dans (3.1.24), (1.1.49) et (3.1.20), respectivement.

Maintenant, soit $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $h : V \times W \rightarrow W$, $f : [0, T] \rightarrow V$ et $q : [0, T] \rightarrow W$, les applications définies par

$$j(u, v) = \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu - g)v_\nu da + \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_\nu - g) \|v_\tau\| da, \quad (3.1.34)$$

$$(h(u, \varphi), \zeta)_W = \int_{\Gamma_3} \psi(u_\nu - g)\phi(\varphi - \varphi_0)\zeta da, \quad (3.1.35)$$

$$(f(t), v)_V = \int_{\Omega} f_0(t) \cdot v dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t) \cdot v da, \quad (3.1.36)$$

$$(q(t), \zeta)_W = \int_{\Omega} q_0(t)\xi dx - \int_{\Gamma_b} q_2(t)\zeta da, \quad (3.1.37)$$

pour tout $u, v \in V$ et $\varphi, \xi \in W$ et $t \in [0, T]$. Notons que les définitions de h , f et q sont basées sur le Théorème de représentation de Riesz-Fréchet; de plus, compte tenu des hypothèses (3.1.17) – (3.1.34), il s'ensuit que les intégrales que nous venons de voir dans (3.1.34) – (3.1.37) sont bien définies.

3.1. Problème électro élasto-viscoplastique avec frottement et adhésion et endommagement

En utilisant les formules de Green (1.2.1) et (1.1.50), il résulte que si $\{u, \sigma, \varphi, D\}$ sont des fonctions suffisamment régulières qui satisfont (3.1.4) – (3.1.9) et (3.1.12) – (3.1.14), alors

$$(\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} + j(u(t), v) - j(u(t), \dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V \quad (3.1.38)$$

$$(D(t), \nabla \zeta)_W + (q(t), \zeta)_W = (h(u(t), \varphi(t)), \zeta)_W, \quad (3.1.39)$$

pour tout $v \in V$, $\zeta \in W$ et $t \in [0, T]$. Nous remplaçons (3.1.2) dans (3.1.38), (3.1.2) dans (3.1.39), et utilisons la notation $E(\varphi) = -\nabla \varphi$ et la condition initiale (3.1.15) pour dériver la formulation variationnelle du problème P3, en terme des champs de déplacement et du potentiel électrique

Problème PV. Trouver le champ des déplacements $u : [0, T] \rightarrow V$, et le champ contrainte $\sigma : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$, le champ potentiel électrique $\varphi : [0, T] \rightarrow W$, le champ d'endommagement $\alpha : [0, T] \rightarrow H^1(\Omega)$ et le champ d'adhésion $\beta : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ tels que

$$\begin{aligned} \sigma(t) = & \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{B}(\varepsilon(u(t))) + \mathcal{E}^* \nabla \varphi(t) \\ & + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(s)) - \mathcal{E}^* \nabla \varphi(s), \varepsilon(u(s)), \alpha(s)) ds, \end{aligned} \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.1.40)$$

$$(\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} + j(u(t), v) - j(u(t), \dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V \quad (3.1.41)$$

pour tout $v \in V$ et $t \in [0, T]$,

$$(\mathbf{B} \nabla \varphi(t), \nabla \zeta)_W - (\mathcal{E} \varepsilon(u(t)), \nabla \zeta)_W + (h(u(t)) \varphi(t), \zeta)_W = (q(t), \xi)_W, \quad (3.1.42)$$

pour tout $\xi \in W$ et $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} \alpha(t) \in K, \quad & (\dot{\alpha}(t), \xi - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} + a(\alpha(t), \xi - \alpha(t)) \\ & \geq (S(\varepsilon(u(t)), \beta(t)), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi \in K, \quad \forall t \in [0, T] \end{aligned} \quad (3.1.43)$$

$$\dot{\beta}(t) = -(\beta(t) [\gamma_\nu (R_\nu(u_\nu(t)))^2 + \gamma_\tau |R_\tau(u_\tau(t))|^2] - \epsilon_a)_+ \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \quad (3.1.44)$$

$$u(0) = u_0, \quad \beta(0) = \beta_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0. \quad (3.1.45)$$

L'intérêt principal dans cette section est le résultat d'existence et d'unicité suivant.

Théorème 3.1.1. Sous les hypothèses (3.1.17) – (3.1.34), le problème PV admet une solution unique $\{u, \sigma, \varphi, \alpha, \beta\}$ ayant la régularité

$$u \in W^{2,p}(0, T; V) \cap C^1(0, T; V), \quad (3.1.46)$$

$$\varphi \in W^{1,p}(0, T; W), \quad (3.1.47)$$

$$\sigma \in W^{1,p}(0, T; \mathcal{H}), \quad \text{Div } \sigma \in W^{1,p}(0, T; \mathcal{W}), \quad (3.1.48)$$

$$\alpha \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad (3.1.49)$$

$$\beta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap Z. \quad (3.1.50)$$

Les fonctions $u, \sigma, \varphi, D, \beta$ et α qui satisfont (3.1.40) – (3.1.45) sont appelés une solution faible du problème de contact **P3**. Nous concluons que, sous les hypothèses (3.1.17)–(3.1.34) et (3.1.35), le problème mécanique (3.1.1) – (3.1.17) a une unique solution faible satisfaisant (3.1.46) – (3.1.50)

La régularité de la solution faible est donnée par (3.1.46) – (3.1.50) et, en terme de déplacement électrique

$$D \in W^{1,p}(0, T; \mathcal{W}). \quad (3.1.51)$$

En effet, il résulte de (3.1.42) que $\text{div} D(t) - q_0(t) = 0$ pour tout $t \in [0, T]$, et donc la régularité (3.1.47) de φ , combiné avec (3.1.11), (3.1.12), (3.1.30) et (3.1.31) implique (3.1.53).

Dans cette section, nous supposons que les hypothèses du théorème 3.1.1 tenir, et nous considérons que C est une constante positive générique qui dépend de $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, p_\nu, p_\tau, \gamma_\nu, \gamma_\tau$ et L et peuvent changer d'un endroit à l'autre. Soit $\eta \in C(0, T; V)$ être donnée. Dans la première étape on considère le problème variationnel suivant. Notre existence et la conséquence unique que nous disons maintenant et prouver dans la section suivante est le suivant.

3.1.3 Existence et unicité de la solution

Notre objectif principal dans ce paragraphe, est d'établir la démonstration du théorème d'existence et d'unicité pour le problème variationnel P_V . A cette fin, nous supposons

3.1. Problème électro élasto-viscoplastique avec frottement et adhésion et endommagement

dans ce qui suit que (3.1.17) – (3.1.32) et (3.1.33) sont satisfaites et, partout ci-dessous, nous dénotons par c une constante positive indépendante du temps et dont sa valeur peut changer d'une ligne à l'autre. Soit $\eta \in C(0, T; \mathcal{H})$ une fonction donnée.

Dans la première étape, nous considérons le problème intermédiaire suivant.

Problème $\mathbf{PV}_\eta^1$. Trouver le champ des déplacements $u_\eta : [0, T] \rightarrow V$ tel que

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} + \mathcal{B}(\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} \\ & + (\eta(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} + j(u_\eta(t), v) - j(u_\eta(t), \dot{u}_\eta(t)) \\ & \geq (f(t), v - \dot{u}_\eta(t))_V, \quad \forall v \in V, \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (3.1.52)$$

$$u_\eta(0) = u_0. \quad (3.1.53)$$

Dans l'étude du problème variationnel $\mathbf{PV}_\eta^1$ nous avons le résultat suivant

Lemme 3.1.2. Il existe une solution unique $u_\eta \in C^1([0, T]; V)$ au problème (3.1.52) et (3.1.53). De plus, si u_1 et u_2 sont deux solutions du problème (3.1.52) et (3.1.53) correspondant aux données η_1 et $\eta_2 \in C([0, T]; \mathcal{H})$, alors il existe $c > 0$ telle que

$$\|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|_V \leq c(\|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_{\mathcal{H}} + \|u_1(t) - u_2(t)\|_V), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.1.54)$$

Démonstration du lemme 3.1.2. Nous allons appliquer le Théorème 1.8.21 dans le cas de l'espace de Hilbert $X = V$ muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_V$ et de la norme associée $\|\cdot\|_V$ définies par (1.1.44) et (1.1.45) dans le deuxième chapitre de la première partie. Nous utilisons le Théorème de représentation de Riesz-Fréchet pour définir les opérateurs $A : V \rightarrow V$,

$B : V \rightarrow V$ et la fonction $f_\eta : [0, T] \rightarrow V$ par les égalités

$$(Au, v)_V = (\mathcal{A}\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}, \quad (3.1.55)$$

$$(Bu, v)_V = (\mathcal{B}\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}, \quad (3.1.56)$$

$$(f_\eta(t), v)_V = (f(t), v)_V - (\eta(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}, \quad (3.1.57)$$

pour tout $u, v \in V$ et $t \in [0, T]$. Il s'ensuit des hypothèses (3.1.17) et (3.1.18) que les opérateurs A et B satisfont les conditions (1.1.56) et (1.1.61), respectivement.

Nous utilisons (1.1.46) pour voir que la fonctionnelle j définie dans (3.1.34) satisfait la condition (1.1.57)(a). Moyennant (3.1.23) et (1.1.46) encore une fois nous obtenons

$$j(u_1, v_2) - j(u_1, v_1) + j(u_2, v_1) - j(u_2, v_2) \leq \tilde{c}_0^2(L_\nu + L_\tau) \|u_1(t) - u_2(t)\|_V \|v_1(t) - v_2(t)\|_V$$

3.1. Problème électro élasto-viscoplastique avec frottement et adhésion et endommagement

Pour tout u_1, u_2, v_1 et $v_2 \in V$, ce qui montre que la fonctionnelle j vérifie la condition (1.1.57)(b) sur $X = V$. De plus, en utilisant (3.1.28) et (3.1.29) il est facile de voir que f défini par (3.1.38) satisfait $f \in W^{1,p}(0, T; V)$ et, prenant en considération que $\eta \in C([0, T]; \mathcal{H})$, nous concluons de (3.1.59) que $f_\eta \in C([0, T]; V)$. Finalement, notons que (3.1.34) montre que la condition (1.1.63) est satisfaite aussi.

En utilisant maintenant (3.1.55) – (3.1.57) nous remarquons que le Lemme 3.1.2 est une conséquence directe du Théorème 1.8.21(1), (2), ce qui achève la preuve. $\square$

Ensuite, nous utilisons (3.1.57) pour voir que si $\eta \in W^{1,p}(0, T; H)$ alors $f_\eta \in W^{1,p}([0, T]; V)$, donc, en utilisant le Théorème 1.8.21. (3), nous notons que le Lemme 3.1.2 peut être complété le résultat de régularité suivant.

$$\eta \in W^{1,p}([0, T]; \mathcal{H}) \Rightarrow u_\eta \in W^{2,p}([0, T]; V)$$

Dans l'étape suivante nous utilisons la solution $u_\eta \in C^1([0, T]; V)$ obtenue dans le Lemme 3.1.2 pour construire le problème variationnel suivant.

Problème $\mathbf{PV}_\eta^2$. Trouver un potentiel électrique $\varphi_\eta : [0, T] \rightarrow W$ tel que

$$(\mathbf{B}\nabla\varphi_\eta(t), \nabla\xi)_W - (\mathcal{E}\varepsilon(u_\eta(t)), \nabla\xi)_W + (h(u_\eta(t)), \varphi_\eta(t), \xi)_W = (q(t), \xi)_W, \quad (3.1.58)$$

pour tout $\xi \in W$, $t \in [0, T]$. Pour que le problème $\mathbf{PV}_\eta^2$ soit bien posé on a le résultat suivant.

Lemme 3.1.3. Il existe une unique solution $\varphi_\eta \in W^{1,p}(0, T; W)$ qui satisfait (3.1.58). De plus, si φ_{η_1} et φ_{η_2} sont deux solutions de (3.1.58) correspondants à $\varphi_{\eta_1}, \varphi_{\eta_2} \in C([0, T]; \mathcal{H})$ alors il existe $c > 0$ tel que

$$\|\varphi_{\eta_1}(t) - \varphi_{\eta_2}(t)\|_W \leq c \|u_{\eta_1}(t) - u_{\eta_2}(t)\|_V, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.1.59)$$

Démonstration du lemme 3.1.3. Soit $t \in [0, T]$. Nous utilisons le Théorème de représentation de Riesz pour définir l'opérateur $A_\eta(t) : W \rightarrow W$ par

$$(A_\eta(t)\varphi, \xi)_W = (\mathbf{B}\nabla\varphi_\eta(t), \nabla\xi)_W - (\mathcal{E}\varepsilon(u_\eta(t)), \nabla\xi)_W + (h(u_\eta(t)), \varphi_\eta(t), \xi)_W \quad (3.1.60)$$

Pour tout $\varphi, \xi \in W$. Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in W$, nous utilisons les hypothèses (3.1.20) et (3.1.35) pour trouver

$$\begin{aligned} (A_\eta(t)\varphi_1 - A_\eta(t)\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2)_W &\geq m_{\mathbf{B}} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W^2 \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} \psi(u_{\eta\nu}(t) - g)(\phi(\varphi_1 - \varphi_0) - \phi(\varphi_2 - \varphi_0))(\varphi_1 - \varphi_2) da \end{aligned}$$

3.1. Problème électro élasto-viscoplastique avec frottement et adhésion et endommagement

et, par la condition (3.1.24)(a) combinée avec la monotonie de la fonction ϕ , définie par (1.1.40), nous obtenons

$$(A_\eta(t)\varphi_1 - A_\eta(t)\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2)_W \geq m_{\mathbf{B}} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W^2 \quad (3.1.61)$$

D'un autre côté, en utilisant de nouveau (3.1.20), (3.1.21)(3.1.24) et (3.1.35) nous avons

$$(A_\eta(t)\varphi_1 - A_\eta(t)\varphi_2, \xi)_W \leq c_\varepsilon \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W + \int_{\Gamma_3} M_\psi |\varphi_1 - \varphi_2| |\xi| da, \quad \forall \xi \in W, \quad (3.1.62)$$

où c_ε représente une constante positive qui dépend du tenseur piézoélectrique $\mathcal{E}$. Il s'ensuit de (3.1.62) et (1.1.49) que

$$(A_\eta(t)\varphi_1 - A_\eta(t)\varphi_2, \xi)_W \leq (c_\varepsilon + M_\psi \tilde{c}_0^2) \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \|\xi\|_W,$$

ce qui implique que

$$(A_\eta(t)\varphi_1 - A_\eta(t)\varphi_2, \xi)_W \leq (c_\varepsilon + M_\psi \tilde{c}_0^2) \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W, \quad (3.1.63)$$

Les inégalités (3.1.61) et (3.1.63) montrent que l'opérateur $A_\eta(t)$ est fortement monotone et de Lipschitz sur W et, par conséquent, il existe un élément unique $\varphi_\eta(t) \in W$ tel que

$$A_\eta(t)\varphi_\eta(t) = q(t). \quad (3.1.64)$$

Nous combinons maintenant (3.1.60) et (3.1.64) pour déduire que $\varphi_\eta(t) \in W$ solution de l'équation variationnelle (3.1.58).

Nous prouvons maintenant que $\varphi_\eta(t) \in W^{1,p}(0, T; W)$. A cette fin, considérons $t_1, t_2 \in [0, T]$ et, pour raison de simplicité, nous écrivons $\varphi_\eta(t_i) = \varphi_i, u_{\eta\nu}(t_i) = u_i, q_b(t_i) = q_i$, pour $i = 1, 2$.

Moyennant (3.1.58), (3.1.20), (3.1.21) et (3.1.35) nous dérivons l'inégalité

$$\begin{aligned} m_{\mathbf{B}} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W^2 &\leq c_\varepsilon \|u_1 - u_2\|_V \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W + \|q_1 - q_2\|_W \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} |\psi(u_1 - g)\phi(\varphi_1 - \varphi_0) - \psi(u_2 - g)\phi(\varphi_2 - \varphi_0)| |\varphi_1 - \varphi_2| da, \end{aligned} \quad (3.1.65)$$

Nous utilisons les limites $|\psi(u_i - g)| \leq M_\psi, |\phi_L(\varphi_i - \varphi_0)| \leq L$, la continuité de Lipschitz des fonctions ψ et ϕ_L , et l'inégalité (1.1.49) à obtenir

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma_3} |\psi(u_1 - g)\phi_L(\varphi_1 - \varphi_0) - \psi(u_2 - g)\phi_L(\varphi_2 - \varphi_0)| |\varphi_1 - \varphi_2| da \\ &\leq M_\psi \int_{\Gamma_3} |\varphi_1 - \varphi_2|^2 da + L_\psi L \int_{\Gamma_3} |u_1 - u_2| |\varphi_1 - \varphi_2| da \\ &\leq M_\psi \tilde{c}_0^2 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W^2 + L_\psi L c_0 \tilde{c}_0 \|u_1 - u_2\|_V \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W da \end{aligned}$$

Nous remplaçons cette dernière inégalité dans (3.1.65) et trouver

$$m_{\mathbf{B}} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W^2 \leq (c_\varepsilon + L_\psi L_\phi c_0 \tilde{c}_0) \|u_1 - u_2\|_V + \|q_1 - q_2\|_W + M_\psi \tilde{c}_0^2 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W, \quad (3.1.66)$$

Il s'ensuit maintenant de l'inégalité (3.1.66) et l'hypothèse de petitesse (3.1.33) que

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \leq c(\|u_1 - u_2\|_V + \|q_1 - q_2\|_W), \quad (3.1.67)$$

où c est une constante positive. Notons aussi que les hypothèses (3.1.29) combinées avec la définition (3.1.36) impliquent que $q \in W^{1,p}(0, T; W)$. Donc, puisque $u_\eta \in C^1([0, T]; V)$. L'inégalité (3.1.67) implique que $\varphi_\eta \in W^{1,p}(0, T; W)$. Soit maintenant $\eta_1, \eta_2 \in C([0, T]; \mathcal{H})$ et, pour simplicité, notons $\varphi_{\eta_i} = \varphi_i, u_{\eta_i} = u_i$ pour $i = 1, 2$. Nous utilisons (3.1.58) et moyennant des arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve de (3.1.66) pour obtenir que

$$m_{\mathbf{B}} \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W^2 \leq (c_\varepsilon + L_\psi L_\phi c_0 \tilde{c}_0) \|u_1(t) - u_2(t)\|_V + M_\psi \tilde{c}_0^2 \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W,$$

Cette dernière inégalité combinée avec l'hypothèse de petitesse sur la fonction ψ (3.1.33) mènent à (3.1.59), ce qui achève la preuve. $\square$

Dans la troisième étape, soit $\theta \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$. On considère alors pour le champ d'endommagement le problème variationnel suivant.

Problème $\mathbf{PV}_\theta$. Trouver le champ d'endommagement $\alpha_\theta : [0, T] \rightarrow H^1(\Omega)$ tel que

$$\begin{aligned} \alpha_\theta(t) &\in K, \quad (\dot{\alpha}_\theta(t), \xi - \alpha_\theta(t))_{L^2(\Omega)} + a(\alpha_\theta(t), \xi - \alpha_\theta(t)) \\ &\geq (\theta(t), \xi - \alpha_\theta(t))_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi \in K, \text{ p.p. } t \in (0, T), \end{aligned} \quad (3.1.68)$$

$$\alpha_\theta(0) = \alpha_0. \quad (3.1.69)$$

On a le résultat suivant.

Lemme 3.1.4. Le problème $\mathbf{PV}_\theta$ admet une solution unique α_θ telle que

$$\alpha_\theta \in H^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)). \quad (3.1.70)$$

Démonstration du lemme 3.1.4. L'application d'inclusion de $(H^1(\Omega), |\cdot|_{H^1(\Omega)})$ dans $(L^2(\Omega), |\cdot|_{L^2(\Omega)})$ est continue et à image dense. Notant par $(H^1(\Omega))'$ l'espace dual de $H^1(\Omega)$ et identifiant le dual de $L^2(\Omega)$ avec lui-même, nous pouvons écrire le triplet de Gelfand

$$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset (H^1(\Omega))'.$$

3.1. Problème électro élasto-viscoplastique avec frottement et adhésion et endommagement

Nous utilisons la notation $(\cdot, \cdot)_{(H^1(\Omega))' \times H^1(\Omega)}$ pour désigner le produit de dualité entre $(H^1(\Omega))'$ et $H^1(\Omega)$, nous avons

$$(\alpha, \xi)_{(H^1(\Omega))' \times H^1(\Omega)} = (\alpha, \xi)_{L^2(\Omega)} \quad \forall \alpha \in L^2(\Omega), \xi \in H^1(\Omega).$$

On sait que l'ensemble des endommagements admissibles K est un sous-ensemble non vide, fermé et convexe dans $H^1(\Omega)$. Ainsi, le champ d'endommagement initial $\alpha_0 \in K$. Maintenant, en utilisant la définition (3.1.32) de la forme bilinéaire a , pour tout $\varphi, \xi \in H^1(\Omega)$, on a

$$a(\varphi, \xi) = a(\xi, \varphi),$$

et

$$\begin{aligned} \|a(\varphi, \xi)\| &\leq 3k \|\nabla \varphi\|_H \|\nabla \xi\|_H \\ &\leq c \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \|\xi\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

donc, a est continue et symétrique. Ainsi, pour tout $\varphi \in H^1(\Omega)$, nous avons

$$a(\varphi, \varphi) = k \|\nabla \varphi\|_H^2,$$

alors

$$a(\varphi, \varphi) + (k+1) \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq k \|\nabla \varphi\|_H^2 + \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

et d'où

$$a(\varphi, \varphi) + c_0 \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq c_1 \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \text{avec } c_0 = k+1 \text{ et } c_1 = k.$$

Nous remarquons que toutes les conditions du théorème 1.8.24 sont vérifiées. Ce qui conclut la preuve du lemme 3.1.4. $\square$

Dans la quatrième étape, nous utilisons le champ des déplacements u_η obtenu dans le lemme 3.1.2 et on considère le problème suivant.

Problème $\mathbf{PV}_\beta$. Trouver le champ d'adhésion $\beta_\eta : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ tel que

$$\dot{\beta}_\eta(t) = -(\beta_\eta(t) [\gamma_\nu(R_\nu(u_{\eta\nu}))^2 + \gamma_\tau \|R_\tau(u_{\eta\tau})\|^2] - \epsilon_a)_+, \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \quad (3.1.71)$$

$$\beta_\eta(0) = \beta_0. \quad (3.1.72)$$

On a le résultat suivant.

Lemme 3.1.5. Le problème PV_β admet une solution unique β_η qui satisfait

$$\beta_\eta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap Z.$$

Démonstration du lemme 3.1.5. On considère l'application $F_\eta : [0, T] \times L^2(\Gamma_3) \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ définie par

$$F_\eta(t, \beta) = -(\beta [\gamma_\nu(R_\nu(u_{\eta\nu}(t)))^2 + \gamma_\tau \|R_\tau(u_{\eta\tau}(t))\|^2] - \epsilon_a)_+ \quad \forall t \in [0, T], \beta \in L^\infty(\Gamma_3).$$

On a d'après (3.1.28) et les propriétés de l'opérateur R , F_η est de Lipschitz par rapport à β , uniformément dans le temps. Cependant, pour tout $\beta \in L^2(\Gamma_3)$, l'application $t \rightarrow F_\eta(t, \beta)$ appartient à $L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_3))$. Donc, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz (théorème 1.5.17), il existe $\beta_\eta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3))$ solution unique du problème PV_β . En utilisant des arguments similaires à la remarque 1.3.1 et (3.1.30), il vient que $0 \leq \beta_\eta(t) \leq 1 \quad \forall t \in [0, T]$ p.p. sur Γ_3 et donc $\beta_\eta \in Z$, ce qui conclut la preuve du lemme 3.1.5. $\square$

Dans la cinquième étape, nous utilisons u_η , φ_η , α_θ et β_η obtenu en lemmes 3.1.2, 3.1.3, 3.1.4 et 3.1.5, respectivement pour construire le problème de Cauchy suivant pour le champ de contrainte.

Problème $PV_{\eta\theta}$. Trouver le champ de contrainte $\sigma_{\eta,\theta} : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$ tel que

$$\sigma_{\eta,\theta}(t) = \mathcal{B}(\varepsilon(u_\eta(t))) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma_{\eta,\theta}(s), \varepsilon(u_\eta(s)), \alpha_\theta(s)) ds \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \quad (3.1.73)$$

On a le résultat suivant.

Lemme 3.1.6. Il existe une unique solution de problème $PV_{\eta\theta}$ et elle satisfait (3.1.48). De plus, si u_{η_i} , β_{η_i} et $\sigma_{\eta_i, \theta_i}$ représenter les solutions aux problèmes $PV_{\eta_i}^1$, PV_{β_i} et $PV_{\eta\theta}$, respectivement, pour $(\eta_i, \theta_i) \in W^{1,p}(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$, $i = 1, 2$, alors il existe $C > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \|\sigma_{\eta_1, \theta_1}(t) - \sigma_{\eta_2, \theta_2}(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq & C(\|u_{\eta_1}(t) - u_{\eta_2}(t)\|_V^2 + \int_0^t \|u_{\eta_1}(s) - u_{\eta_2}(s)\|_V^2 ds + \\ & + \int_0^t \|\alpha_{\theta_1}(s) - \alpha_{\theta_2}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \end{aligned} \quad (3.1.74)$$

Démonstration du lemme 3.1.6.

Soit $\Sigma_{\eta,\theta} : W^{1,p}(0, T; \mathcal{H}) \rightarrow W^{1,p}(0, T; \mathcal{H})$ l'application proposée par

$$\Sigma_{\eta,\theta}\sigma_{\eta,\theta}(t) = \mathcal{B}(\varepsilon(u_\eta(t))) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma_{\eta,\theta}(s), \varepsilon(u_\eta(s)), \alpha_\theta(s)) ds. \quad (3.1.75)$$

3.1. Problème électro élasto-viscoplastique avec frottement et adhésion et endommagement

Pour tout $\sigma_{\eta,\theta} \in W^{1,p}(0, T; \mathcal{H})$ et $t \in (0, T)$. Pour $\sigma_{\eta_1, \theta_1}(t), \sigma_{\eta_2, \theta_2}(t) \in W^{1,p}(0, T; \mathcal{H})$ nous utilisons (3.1.19) et (3.1.75) à obtenir pour tous $t \in (0, T)$,

$$\|\Sigma_{\eta,\theta}\sigma_{\eta_1,\theta_1}(t) - \Sigma_{\eta,\theta}\sigma_{\eta_2,\theta_2}(t)\|_{\mathcal{H}} \leq L_{\mathcal{G}} \int_0^t \|\sigma_{\eta_1,\theta_1}(s) - \sigma_{\eta_2,\theta_2}(s)\|_{\mathcal{H}} ds. \quad (3.1.76)$$

Il résulte de cette inégalité que pour n assez grand, un pouvoir $\Sigma_{\eta,\theta}^n$ de la cartographie $\Sigma_{\eta,\theta}$ est une contraction de l'espace de Banach $W^{1,p}(0, T; \mathcal{H})$ et, par conséquent existe un élément unique $\sigma_{\eta,\theta} \in W^{1,p}(0, T; \mathcal{H})$ tel que $\Sigma_{\eta,\theta}\sigma_{\eta,\theta}(t) = \sigma_{\eta,\theta}(t)$. En outre, $\sigma_{\eta,\theta}$ est l'unique solution au problème de $\mathbf{PV}_{\eta,\theta}$, et en utilisant (3.1.73), la régularité de u_{η} , α_{θ} et les propriétés des opérateurs $\mathcal{B}$ et $\mathcal{G}$, il s'ensuit que $\sigma_{\eta_i, \theta_i} \in W^{1,p}(0, T; \mathcal{H})$.

Considérons maintenant $(\eta_1, \theta_1), (\eta_2, \theta_2) \in W^{1,p}(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$, et pour $i = 1, 2$, désigner $u_{\eta_i} = u_i$, $\sigma_{\eta_i, \theta_i} = \sigma_i$, $\alpha_{\theta_i} = \alpha_i$, $\varphi_{\eta_i} = \varphi_i$. nous avons

$$\sigma_i(t) = \mathcal{B}(\varepsilon(u_i(t))) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma_i(s), \varepsilon(u_i(s)), \alpha_i(s)) ds \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \quad (3.1.77)$$

et en utilisant les propriétés (3.1.18) et (3.1.20) de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{G}$, nous trouver

$$\begin{aligned} \|\sigma_1(t) - \sigma_2(t)\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq C(\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 + \int_0^t \|\sigma_1(s) - \sigma_2(s)\|_{\mathcal{H}}^2 ds \\ &\quad + \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds + \int_0^t \|\alpha_1(s) - \alpha_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \end{aligned} \quad (3.1.78)$$

Nous utilisons l'argument Gronwall dans l'inégalité obtenue à déduire (3.1.73), qui conclut la preuve du lemme 3.1.6. $\square$

Enfin, à la suite de ces résultats et d'utiliser les propriétés de l'opérateur $\mathcal{G}$ l'opérateur $\mathcal{E}$, la fonction S pour $t \in (0, T)$, nous considérons l'opérateur

$$\Lambda(\eta, \theta)(t) = (\Lambda^1(\eta, \theta)(t), \Lambda^2(\eta, \theta)(t)) \in \mathcal{H} \times L^2(\Omega), \quad (3.1.79)$$

définis par les égalités

$$(\Lambda^1(\eta, \theta)(t), v)_{\mathcal{H}} = (\mathcal{E}^* \nabla \varphi_{\eta}(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + \left(\int_0^t \mathcal{G}(\sigma_{\eta,\theta}(s), \varepsilon(u_{\eta}(s)), \alpha_{\theta}(s)) ds, \varepsilon(v) \right)_{\mathcal{H}}, \quad (3.1.80)$$

pour tout $v \in V$,

$$\Lambda^2(\eta, \theta)(t) = S(\sigma_{\eta,\theta}(t), \varepsilon(u_{\eta}(t)), \alpha_{\theta}(t)) \quad (3.1.81)$$

Soit nous considérons l'application

$$\Lambda : W^{1,p}(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega)) \rightarrow W^{1,p}(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega)),$$

qui fait correspondre chaque élément $(\eta, \theta) \in W^{1,p}(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$, à l'élément

$\Lambda(\eta, \theta) \in W^{1,p}(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$. u_η , φ_η , α_θ , α_η et $\sigma_{\eta, \theta}$, représenter le champ de déplacement, le champ de potentiel, et le champ dommagement et le champ de contraintes obtenu dans lemmes 3.1.2, 3.1.3, 3.1.4, 3.1.5 et 3.1.6.

Lemme 3.1.7. L'application Λ a un point fixe $(\eta^*, \theta^*) \in W^{1,p}(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$, tel que $\Lambda(\eta^*, \theta^*) = (\eta^*, \theta^*)$.

Démonstration du lemme 3.1.7. Soit $t \in (0, T)$ et $(\eta_1, \theta_1), (\eta_2, \theta_2) \in W^{1,p}(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$. Nous utilisons la notation $u_{\eta_i} = u_i$, $\dot{u}_{\eta_i} = \dot{u}_i$, $\beta_{\eta_i} = \beta_i$, $\varphi_{\eta_i} = \varphi_i$, $\sigma_{\eta_i, \theta_i} = \sigma_i$, pour $i = 1, 2$. Commençons par l'aide (1.1.49) hypothèses (3.1.19), (3.1.21) et (3.1.22), nous avons.

$$\begin{aligned} \|\Lambda^1(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda^1(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq \|\mathcal{E}^* \nabla \varphi_1(t) - \mathcal{E}^* \nabla \varphi_2(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &+ \int_0^t \|\mathcal{G}(\sigma_1(s), \varepsilon(u_1(s)), \alpha_1(s)) - \mathcal{G}(\sigma_2(s), \varepsilon(u_2(s)), \alpha_2(s))\|_{\mathcal{H}}^2 ds \\ &\leq C(\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_{\mathcal{H}}^2 + \int_0^t \|\sigma_1(s) - \sigma_2(s)\|_{\mathcal{H}}^2 ds \\ &+ \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds + \int_0^t \|\alpha_1(s) - \alpha_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds) \end{aligned} \quad (3.1.82)$$

Nous utilisons estimation (3.1.59), (3.1.74) pour obtenir

$$\begin{aligned} \|\Lambda^1(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda^1(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq C(\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 + \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds \\ &+ \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 + \int_0^t \|\alpha_1(s) - \alpha_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds) \end{aligned} \quad (3.1.83)$$

Par des arguments similaires, de (3.1.81), (3.1.74) et (3.1.22)

$$\begin{aligned} \|\Lambda^2(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda^2(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq C(\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 + \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds \\ &+ \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\alpha_1(s) - \alpha_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds) \quad \text{p.p. } t \in (0, T) \end{aligned} \quad (3.1.84)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} & \|\Lambda(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{\mathcal{H} \times L^2(\Omega)}^2 \leq C(\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 + \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds \\ & + \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\alpha_1(s) - \alpha_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2) \quad \text{p.p. } t \in (0, T) \end{aligned} \quad (3.1.85)$$

D'autre part, étant donné que $u_i(t) = u_0 + \int_0^t \dot{u}_i(s) ds$, on sait que pour p.p. $t \in (0, T)$,

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V = \int_0^t \|\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)\|_V ds. \quad (3.1.86)$$

et l'utilisation de cette inégalité dans (3.1.54) on obtient

$$\|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|_V \leq c(\|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_{\mathcal{H}} + \int_0^t \|\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)\|_V ds). \quad (3.1.87)$$

Il suit maintenant un argument de Gronwall-type

$$\int_0^t \|\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)\|_V ds \leq c \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{\mathcal{H}} ds. \quad (3.1.88)$$

ce qui implique également, en utilisant une variante de (3.1.86), qui

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V \leq c \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{\mathcal{H}}^2 ds. \quad (3.1.89)$$

D'autre part, du problème de Cauchy (3.1.70) – (3.1.71) nous pouvons écrire

$$\beta_i(t) = \beta_0 - \int_0^t (\beta_i(s) [\gamma_\nu (R_\nu(u_{i\nu}))^2 + \gamma_\tau \|R_\tau(u_{\eta i\tau})\|^2] - \epsilon_a)_+ ds$$

et d'où

$$\begin{aligned} \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} & \leq c \left(\int_0^t \|\beta_1(s) (R_\nu(u_{1\nu}))^2 - \beta_2(s) (R_\nu(u_{2\nu}))^2\|_{L^2(\Gamma_3)} ds \right. \\ & \quad \left. + \int_0^t \|\beta_1(s) \|R_\tau(u_{1\tau}(s))\|^2 - \beta_2(s) \|R_\tau(u_{2\tau}(s))\|^2\|_{L^2(\Gamma_3)} ds \right). \end{aligned}$$

En utilisant la définition de R_ν et R_τ avec l'écriture $\beta_1 = \beta_1 - \beta_2 + \beta_2$ pour trouver

$$\begin{aligned} \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} & \leq c \left(\int_0^t \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds \right. \\ & \quad \left. + \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)^d} ds \right). \end{aligned} \quad (3.1.90)$$

3.1. Problème électro élasto-viscoplastique avec frottement et adhésion et endommagement

En combinant (3.1.90) avec le lemme de Gronwall 1.8.25, on obtient

$$\|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)^d} ds,$$

et d'après l'inégalité (1.1.49), on a

$$\|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V^2 ds. \quad (3.1.91)$$

De (3.1.68), nous déduisons que

$$(\dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_2, \alpha_1 - \alpha_2)_{L^2(\Omega)} + a(\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2) \leq (\theta_1 - \theta_2, \alpha_1 - \alpha_2)_{L^2(\Omega)} \text{ p.p. } t \in [0, T].$$

En intégrant l'inégalité précédente avec les conditions initiales

$$\alpha_1(0) = \alpha_0 \text{ et } \alpha_2(0) = \alpha_0,$$

et en utilisant l'inégalité

$$a(\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2) \geq 0,$$

on obtient

$$\frac{1}{2} \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_0^t (\theta_1(s) - \theta_2(s), \alpha_1(s) - \alpha_2(s))_{L^2(\Omega)} ds.$$

Il vient alors que

$$\|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \int_0^t \|\alpha_1(s) - \alpha_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds.$$

Nous combinons l'inégalité précédente avec le lemme de Gronwall 1.8.25, pour trouver

$$\|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds. \quad (3.1.92)$$

De l'inégalité et estimations précédente (3.1.85), (3.1.89), (3.1.91) et (3.1.92) il s'ensuit que maintenant

$$\|\Lambda(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{\mathcal{H} \times L^2(\Omega)}^2 \leq c \int_0^t \|(\eta_1, \theta_1)(s) - (\eta_2, \theta_2)(s)\|_{\mathcal{H} \times L^2(\Omega)}^2 ds.$$

En réitérant m fois l'inégalité précédente, on obtient

$$\|\Lambda^m(\eta_1, \theta_1) - \Lambda^m(\eta_2, \theta_2)\|_{L^2(0,T;\mathcal{H} \times L^2(\Omega))}^2 \leq \frac{(cT)^m}{m!} \|(\eta_1, \theta_1) - (\eta_2, \theta_2)\|_{L^2(0,T;\mathcal{H} \times L^2(\Omega))}^2.$$

3.1. Problème électro élasto-viscoplastique avec frottement et adhésion et endommagement

Ce qui implique que pour m suffisamment grand, l'opérateur Λ^m est une contraction sur l'espace de Banach $L^2(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$, donc, Λ^m possède un point fixe unique $(\eta^*, \theta^*) \in L^2(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$ et par conséquent (η^*, θ^*) est l'unique point fixe de Λ . $\square$

Maintenant, on peut établir la démonstration du théorème 3.3.1.

Démonstration du théorème 3.1.1.

Existence. Soit $(\eta^*, \theta^*) \in L^2(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$ le point fixe de Λ qui est défini par (3.1.79) – (3.1.81), nous adobtons les notations

$$u = u_{\eta^*}, \varphi = \varphi_{\eta^*}, \sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{E}^*\nabla(\varphi) + \sigma_{\eta^*\theta^*} \quad (3.1.93)$$

$$\alpha = \alpha_{\theta^*}, \beta = \beta_{\eta^*}, \quad (3.1.94)$$

Nous montrons que $(u, \varphi, \sigma, \alpha, \beta)$ satisfait (3.1.40) – (3.1.45) et (3.1.46) – (3.1.50).

En effet, nous écrivons (3.2.73) pour $\eta^* = \eta$, $\theta^* = \theta$ et l'utilisation (3.1.93), (3.1.94) pour obtenir que (3.1.40) pour obtenir que (3.1.52) pour $\eta^* = \eta$ et utiliser la première égalité dans (3.1.93) pour trouver

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} + \mathcal{B}(\varepsilon(u(t))), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} \\ & + (\eta^*(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} + j(u(t), v) - j(u(t), \dot{u}(t)) \\ & \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V, \quad \forall v \in V, \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (3.1.95)$$

Les équations $\Lambda^1(\eta^*, \theta^*) = \eta^*$ et $\Lambda^2(\eta^*, \theta^*) = \theta^*$ combiné avec (3.1.80), (3.1.81), (3.1.94) et (3.1.93) tel que

$$\begin{aligned} & (\eta^*(t), v)_{\mathcal{H} \times V} = (\mathcal{E}^*\nabla\varphi(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + \\ & + \left(\int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(s)) - \mathcal{E}^*\nabla\varphi(s), \varepsilon(u(s)), \alpha(s)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} ds, \end{aligned} \quad (3.1.96)$$

$$\theta^*(t) = S(\sigma(t) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) - \mathcal{E}^*\nabla\varphi(t), \varepsilon(u(t)), \alpha(t)) \quad (3.1.97)$$

Nous remplaçons maintenant (3.1.96) dans (3.1.97) et l'utilisation (3.1.40) de voir que (3.1.41) est satisfait. Nous écrivons (3.1.68) pour $\theta^* = \theta$ et l'utilisation (3.1.94) et (3.1.97) pour constater que (3.1.43) est satisfait.

Nous considérons maintenant (3.1.70) pour $\eta^* = \eta$ et l'utilisation (3.1.93), (3.1.94) pour obtenir que (3.1.44) est satisfait. Suivant (3.1.45), et régularités (3.1.46), (3.1.47), (3.1.51)

3.1. Problème électro-élasto-viscoplastique avec frottement et adhésion et endommagement

et (3.1.48) suivez lemmes 3.1.3, 3.1.5 et 3.1.6. la régularité $\sigma \in W^{1,p}(0, T; \mathcal{H})$ suivante de lemmes 3.1.3 et 3.1.7, la deuxième égalité dans (3.1.93) et (3.1.17).

Finalement (3.1.41) implique que

$$Div\sigma(t) + f_0(t) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{W} \quad \text{p.p. } t \in (0, T),$$

et donc par (3.1.29) nous obtenons que $Div\sigma \in W^{1,p}(0, T; \mathcal{W})$. On en déduit que la régularité (3.1.48) détient qui conclut la partie existence du théorème.

Unicité. L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ qui est défini par (3.1.79) – (3.1.81).

3.2 Problème de contact avec frottement en électro-viscoélasticité avec mémoire longue

Dans cette section, on considère un problème de contact avec frottement et compliance normale avec adhésion dans un processus quasistatique. Le matériau est électro-viscoélastique avec mémoire longue et endommagement. Le processus d'adhésion sur la surface de contact est modélisé par une variable interne de surface appelée champ d'adhésion. L'endommagement causé par les déformations élastiques du matériau est modélisé par une variable interne du corps appelée champ d'endommagement.

Le problème est formulé par un système d'équations et d'inéquations aux dérivées partielles contenant l'équation de mouvement ou d'équilibre du corps, la loi de comportement du matériau avec endommagement, une inclusion du type parabolique modélisant le champ d'endommagement, une équation différentielle modélisant le champ d'adhésion et les conditions aux limites auxquelles il est soumis.

Cette section est divisée en trois paragraphes. Dans le premier paragraphe, nous présentons le problème mécanique, puis nous indiquons les hypothèses sur les données. Dans le deuxième paragraphe, nous décrivons la formulation variationnelle du problème mécanique. Enfin, dans le troisième paragraphe, nous étudions l'existence et l'unicité d'une solution faible du problème mécanique.

Les techniques employées sont basées sur les résultats des équations variationnelles et la théorie des opérateurs monotones, suivi par les arguments du point fixe.

3.2.1 Formulation mécanique du problème et les hypothèses

Le problème étudié dans cette section entre dans le cadre physique électro-mécanique présenté dans le premier paragraphe de la thèse. Pour que le modèle soit complet, précisons que la loi de comportement est électro-viscoélastique du type (1.1.14) et la condition de contact avec compliance normale est prescrite dans (1.1.27). Nous considérons les conditions de frottement du type Coulomb (1.1.32).

Sous ces considérations, le problème électro-mécanique qu'on étudie est le problème 4 du chapitre 1.

Alors, le modèle classique pour ce processus est le suivant :

Problème P4. Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, le champ potentiel électrique $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, le champ des déplacements électriques $D : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ d'endommagement $\beta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ et le champ d'adhésion $\alpha : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}(\varepsilon(u), \beta) + \int_0^t M(t-s) \varepsilon(u(s)) ds + \mathcal{E}^* \nabla \varphi, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.2.1)$$

$$D = \mathcal{E}\varepsilon(u) - \mathbf{B} \nabla \varphi, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.2.2)$$

$$\dot{\alpha} - k \Delta \alpha + \partial \varphi_K(\alpha) \ni S(\varepsilon(u), \alpha) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.2.3)$$

$$0 = \operatorname{Div} \sigma + f_0, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.2.4)$$

$$0 = \operatorname{div} D - q_0, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.2.5)$$

$$u = 0, \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (3.2.6)$$

$$\sigma \nu = f_2, \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (3.2.7)$$

$$\begin{cases} -\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - g), \\ \|\sigma_\tau\| \leq p_\tau(u_\nu - g), \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.2.8)$$

$$\dot{u}_\tau \neq 0 \Rightarrow \sigma_\tau = -p_\tau(u_\nu - g) \frac{\dot{u}_\tau}{\|\dot{u}_\tau\|}, \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.2.9)$$

$$\dot{\beta} = -(\beta [\gamma_\nu(R_\nu(u_\nu))^2 + \gamma_\tau |R_\tau(u_\tau)|^2] - \varepsilon_a)_+, \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.2.10)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \nu} = 0, \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T), \quad (3.2.11)$$

$$\varphi = 0, \quad \text{sur } \Gamma_a \times (0, T), \quad (3.2.12)$$

$$\mathbf{D} \cdot \nu = q_2, \quad \text{sur } \Gamma_b \times (0, T), \quad (3.2.13)$$

$$\mathbf{D} \cdot \nu = \psi(u_\nu - g) \phi(\varphi - \varphi_0), \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.2.14)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0, \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.2.15)$$

$$\beta(0) = \beta_0, \quad \text{sur } \Gamma. \quad (3.2.16)$$

Nous décrivons maintenant les notations dans (3.2.1) – (3.2.16) et fournissons quelques commentaires sur les égalités et les conditions aux limites. D'abord, les équations (3.1.1) et

(3.2.2) représentent la loi de comportement du corps avec mémoire longue où $M = (M_{ij})$ est le tenseur de la relaxation. L'évolution du champ d'endommagement est modelisée par l'inclusion du type parabolique donnée par la relation (3.2.3) où S est la fonction source de l'endommagement. L'équation (3.2.4) et (3.2.5) sont les équations d'équilibre pour le stress et champ électrique déplacement, respectivement. Conditions (3.2.6) et (3.2.7) sont le déplacement et conditions aux limites de traction, alors que (3.2.12) et (3.2.13) représentent les conditions aux limites électriques, la champ de déplacement et le potentiel électrique sur s'évanouissent Γ_1 et Γ_a , respectivement, tandis que les forces et gratuit charges électriques sont prescrits sur Γ_2 et Γ_b , respectivement. La relation (3.2.11) décrit une condition aux limites de Neumann homogène où $\partial\alpha / \partial\nu$ est la dérivée normale de α . Les relations (3.2.12) et (3.2.13) représenter condititions les limites électriques. Ensuite, (3.2.14) est la condition de contact électrique sur Γ_3 qui est la principale nouveauté de ce travail. Il représente une condition régularisés qui peut être obtenu de la manière suivante. Dans l'équation (3.2.15), u_0 est le déplacement initial, et α_0 est le dommage initial. Enfin, dans l'équation (3.2.16), β_0 désigne la liaison initiale.

Pour obtenir la formulation variationnelle du problème (3.2.1) – (3.2.16) nous introduisons pour le domaine de liaison de l'ensemble

On considère maintenant les hypothèses suivantes: L'opérateur de viscosité $\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } \mathcal{C}_1^{\mathcal{A}}, \mathcal{C}_2^{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad \|\mathcal{A}(x, \zeta)\| \leq \mathcal{C}_1^{\mathcal{A}} \|\zeta\| + \mathcal{C}_2^{\mathcal{A}} \quad \forall \zeta \in S_d, p.p.x \in \Omega; \\ \text{(b) Il existe } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad (\mathcal{A}(x, \zeta_1) - \mathcal{A}(x, \zeta_2)) \cdot (\zeta_1 - \zeta_2) \geq m_{\mathcal{A}} \|\zeta_1 - \zeta_2\|^2 \\ \quad \forall \zeta_1, \zeta_2 \in S_d, p.p.x \in \Omega; \\ \text{(c) l'application } x \longrightarrow \mathcal{A}(x, \zeta) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega \\ \quad \text{pour tout } \zeta \in S_d; \\ \text{(d) l'application } \zeta \longrightarrow \mathcal{A}(x, \zeta) \text{ est continue sur } S_d, p.p.x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (3.2.17)$$

L'opérateur d'élasticité $\mathcal{G}$

$$\mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^d, \text{ satisfait la condition (2.1.13)} \quad (3.2.18)$$

Le tenseur diélectrique $\mathbf{B}$

$$\mathbf{B} = (B_{ij}) : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ satisfait la condition (3.1.20)} \quad (3.2.19)$$

Le tenseur piézoélectrique $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E} = (e_{ijk}) : \Omega \times S^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \text{ satisfait la condition (3.1.21)} \quad (3.2.20)$$

La fonction source d'endommagement $S : \Omega \times S^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait

$$S : \Omega \times S^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ satisfait la condition (2.1.14)} \quad (3.2.21)$$

La fonction de compliance normale p_r ($r = \nu$ et τ)

$$p_r : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ satisfait la condition (3.1.23)} \quad (3.2.22)$$

Le surface conductivité électrique fonction ψ

$$\psi : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ satisfait la condition (3.1.24)} \quad (3.2.23)$$

Le tenseur de la relaxation $M = (M_{ij})$ satisfait

$$M \in C(0, T; \mathcal{H}). \quad (3.2.24)$$

Les coefficients d'adhésion γ_ν, γ_τ et ϵ_a vérifient

$$\gamma_\nu, \gamma_\tau \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \epsilon_a \in L^2(\Gamma_3), \quad \gamma_\nu, \gamma_\tau, \epsilon_a \geq 0, \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3. \quad (3.2.25)$$

et le champ initial d'adhésion satisfait

$$\beta_0 \in L^2(\Gamma_3), \quad 0 \leq \beta_0 \leq 1, \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3. \quad (3.2.26)$$

Enfin, le champ initial d'endommagement vérifie

$$\alpha_0 \in K. \quad (3.2.27)$$

On suppose que les forces volumiques f_0 et les tractions surfaciques f_2 ont la régularité

$$f_0 \in C(0, T; H), \quad f_2 \in C\left(0, T; L^2(\Gamma_2)^d\right). \quad (3.2.28)$$

De même, la densité de charge volumique q_0 et surfacique q_2 satisfont

$$q_0 \in C(0, T; L^2(\Omega)), \quad q_2 \in C(0, T; L^2(\Gamma_b)). \quad (3.2.29)$$

Finalement, nous assumons que l'interstice g , le potentiel donné et le déplacement initial satisfont

$$g \in L^2(\Gamma_3), \quad g \geq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3, \quad (3.2.30)$$

$$\varphi_0 \in L^2(\Gamma_3), \quad (3.2.31)$$

$$u_0 \in V, \quad (3.2.32)$$

Pour étudier le problème $PV4$, nous posons une hypothèse de petitesse

$$M_\psi < \frac{m_{\mathbf{B}}}{\tilde{c}_0^2} \quad (3.2.33)$$

où les constantes positives M_ψ , m_B et $\tilde{c}_0$ sont définies dans (3.1.24), (1.1.49) et (3.1.20), respectivement. Nous notons que seule la constante de trace, la constante de coercivité $\mathbf{B}$ et la limite de ψ sont impliqués dans (6.1.33), par conséquent, cette hypothèse implique que la petitesse la géométrie et de la partie électrique, et ne dépend pas de la mécanique données du problème. En outre, il est satisfait lorsque l'obstacle est isolé, depuis $\psi \equiv 0$ et ainsi de $M_\psi = 0$.

Rappelons que l'espace V est donné par (1.2.2), et l'espace W est donné par (1.2.7).

Le théorème de représentation de Riesz, entraîne l'existence d'un élément $f : [0, T] \rightarrow V$ tel que

$$(f(t), v)_{V' \times V} = \int_{\Omega} f_0(t) \cdot v dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t) \cdot v da \quad \forall v \in V \text{ p.p. } t \in (0, T), \quad (3.2.34)$$

Pour tout $v \in V$, $t \in [0, T]$. Ensuite, les conditions (3.2.28) impliquent

$$f \in C(0, T; V), \quad (3.2.35)$$

De même, le théorème de représentation de Riesz entraîne l'existence d'un élément $q : [0, T] \rightarrow W$ par

$$(q(t), \zeta)_W = \int_{\Omega} q_0(t) \zeta dx - \int_{\Gamma_b} q_2(t) \zeta da \quad \forall \zeta \in W, t \in [0, T]. \quad (3.2.36)$$

Pour tout $\phi \in W$, $t \in [0, T]$. Ensuite, les conditions (3.2.29) impliquent

$$q \in C(0, T; W). \quad (3.2.37)$$

Soit $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ la fonctionnelle d'adhésion

$$j(u, v) = \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu - g) v_\nu da + \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_\nu - g) \|v_\tau\| da, \quad (3.2.38)$$

Par les hypothèses sur p_ν et p_τ , on obtient que pour $v \in V$.

$$p_\nu(u_\nu - g), p_\tau(u_\nu - g) \in L^2(\Gamma_3), \quad (3.2.39)$$

Soit l'application $h : V \times W \rightarrow W$ la fonctionnelle

$$(h(u, \varphi), \xi)_W = \int_{\Gamma_3} \psi(u_\nu - g) \phi_L(\varphi - \varphi_0) \xi da, \quad (3.2.40)$$

Il résulte de hypothèses (3.2.17) – (3.2.34) que les intégrales dans (3.2.36) – (3.2.39) sont bien définis.

3.2.2 Formulation variationnelle et le résultat principal

Retournons maintenant à établir une formulation variationnelle du problème **P4**. Nous utilisons la formule de Green (1.1.1) combinée avec les égalités (3.2.4), (3.2.6), (3.2.7)

et (3.2.34) pour trouver

$$(\sigma, \varepsilon(u) - \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (f, u - v)_H = \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu \cdot (v - v) \quad \forall v \in V,$$

et, compte tenu de la décomposition du tenseur de Cauchy (1.1.3), nous avons

$$(\sigma, \varepsilon(v) - \varepsilon(u))_{\mathcal{H}} = (f, v - u)_H + \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu(v_\nu - u_\nu) da + \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau(\nu_\tau - u_\tau) da, \quad \forall v \in V,$$

Nous utilisons les conditions (3.2.8) et (3.2.9) pour trouver

$$(\sigma, \varepsilon(v) - \varepsilon(u))_{\mathcal{H}} \geq (f, v - u)_H + \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu - g)(v_\nu - u_\nu) da + \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_\nu - g)(\|v_\tau\| - \|u_\tau\|) da, \quad \forall v \in V,$$

Combinons cette dernière inégalité avec (3.2.1) et (3.2.38) pour obtenir

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)), \varepsilon(v) - \varepsilon(u))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{G}\varepsilon(u(t), \alpha), \varepsilon(v) - \varepsilon(u)) + j(u, v) - j(u, u) \\ & + \left(\int_0^t M(t-s) \varepsilon(u(s)) ds, \varepsilon(v) - \varepsilon(u) \right)_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u))_{\mathcal{H}} \\ & \geq (f(t), u - v)_{V' \times V} \quad \forall v \in V, t \in (0, T). \end{aligned} \quad (3.2.41)$$

D'autre part, en utilisant la formule de Green

$$(D, \nabla \zeta)_H + (\operatorname{div} D, \zeta)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Gamma} D \cdot \nu \zeta da \quad \forall \zeta \in W,$$

on a

$$\int_{\Omega} D \cdot \nabla \zeta dx + \int_{\Omega} \operatorname{div} D \zeta da = \int_{\Gamma_3} D \cdot \nu \zeta da + \int_{\Gamma_a} D \cdot \nu \zeta da + \int_{\Gamma_b} D \cdot \nu \zeta da \quad \forall \zeta \in W.$$

De la définition de l'espace W avec (3.2.5) et (3.2.12) – (3.2.14), nous trouvons

$$\int_{\Omega} D \cdot \nabla \zeta dx = \int_{\Gamma_3} \psi(u_\nu - g) \phi(\varphi - \varphi_0) \zeta da + \int_{\Gamma_b} q_2 \zeta da - \int_{\Omega} q_0 \zeta dx \quad \forall \zeta \in W.$$

De (3.2.36) et (3.2.40), on obtient

$$(D(t), \nabla \zeta)_{\mathcal{W}} + (q(t), \zeta)_{\mathcal{W}} = (h(u, \varphi), \xi)_{\mathcal{W}} \quad \forall \xi \in \mathcal{W}, t \in (0, T). \quad (3.2.42)$$

Enfin, soit $\alpha(t) \in K$ et pour tout $t \in [0, T]$. De la définition (1.1.51) de $\partial \varphi_K(\alpha)$ et de (3.2.3), on obtient

$$\begin{aligned} & (\dot{\alpha}(t), \xi - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} - k(\Delta \alpha(t), \xi - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} \\ & \geq (S(\varepsilon(u(t)), \alpha(t)), \xi - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi \in K, \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green avec (3.1.11) et (2.1.23), on trouve

$$\begin{aligned} & (\dot{\alpha}(t), \xi - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} + a(\alpha(t), \xi - \alpha(t)) \\ & \geq (S(\varepsilon(u(t)), \alpha(t)), \xi - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi \in K. \end{aligned} \quad (3.2.43)$$

De (3.2.41) – (3.2.43), (3.2.10) et (3.2.14) – (3.2.16), on obtient la formulation variationnelle du problème P.

Problème PV. Trouver le champ des déplacements $u : [0, T] \rightarrow V$, le champ potentiel électrique $\varphi : [0, T] \rightarrow W$, le champ d'endommagement $\alpha : [0, T] \rightarrow H^1(\Omega)$ et le champ d'adhésion $\beta : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ tels que

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)), \varepsilon(v) - \varepsilon(u))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{G}\varepsilon(u(t), \alpha), \varepsilon(v) - \varepsilon(u)) + j(u, v) - j(u, u) \\ & + \left(\int_0^t M(t-s) \varepsilon(u(s)) ds, \varepsilon(v) - \varepsilon(u) \right)_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u))_{\mathcal{H}} \\ & \geq (f(t), u - v)_{V' \times V} \quad \forall v \in V, t \in (0, T). \end{aligned} \quad (3.2.44)$$

$$\begin{aligned} \alpha(t) \in K, \quad \forall t \in [0, T], \quad (\dot{\alpha}(t), \xi - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} + a(\alpha(t), \xi - \alpha(t)) \\ \geq (S(\varepsilon(u(t)), \alpha(t)), \xi - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi \in K, \end{aligned} \quad (3.2.45)$$

$$(\mathbf{B}\nabla\varphi(t), \nabla\zeta)_{\mathcal{W}} - (\mathcal{E}\varepsilon(u(t)), \nabla\zeta)_{\mathcal{W}} + (h(u(t), \varphi(t)), \xi)_{\mathcal{W}} = (q(t), \xi)_{\mathcal{W}} \quad \forall \zeta \in \mathcal{W}. \quad (3.2.46)$$

$$\dot{\beta}(t) = -(\beta(t) [\gamma_\nu(R_\nu(u_\nu(t)))^2 + \gamma_\tau \|R_\tau(u_\tau(t))\|^2] - \epsilon_a)_+ \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \quad (3.2.47)$$

$$u(0) = u_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0, \quad \beta(0) = \beta_0. \quad (3.2.48)$$

L'intérêt principal dans cette section est le résultat d'existence et d'unicité suivant.

Théorème 3.2.1. Sous les hypothèses (3.2.17) – (3.2.34), le problème PV admet une solution unique $\{u, \varphi, \beta, \alpha\}$ ayant la régularité

$$u \in C^1(0, T; V), \quad (3.2.49)$$

$$\sigma \in C(0, T; \mathcal{H}_1) \quad (3.2.50)$$

$$\varphi \in C(0, T; W), \quad (3.2.51)$$

$$\alpha \in H^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad (3.2.52)$$

$$\beta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap Z. \quad (3.2.53)$$

Les fonctions $u, \varphi, \sigma, D, \alpha$ et β satisfaisant (3.2.1)–(3.2.2) et (3.2.44)–(3.2.48) s'appellent une solution faible du problème **P4**. Nous concluons que sous les hypothèses (6.1.17) – (6.1.34), le problème mécanique (3.2.1) – (3.2.16) a une solution faible unique qui satisfait (3.1.49) – (3.1.53). La régularité de la solution faible est donnée par (3.2.52) – (3.2.53) et en termes de contraintes

$$D \in C(0, T; \mathcal{W}_1). \quad (3.2.54)$$

En effet, de (3.2.46), il vient que $\operatorname{div} D = q_0(t)$ pour tout $t \in [0, T]$. De la régularité (3.2.51) de φ combinée avec (3.2.2) et (3.2.17) – (3.2.29), on obtient (3.2.54).

La démonstration du théorème 3.2.1 sera faite en plusieurs étapes, elle est basée sur les résultats des inéquations variationnelles, les opérateurs monotones et les arguments du point fixe. Nous supposons dans la suite de cette section que (3.2.17) – (3.2.34) sont vérifiés, c désigne une constante positive qui dépend de $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3, p_\nu, p_\tau, L, \gamma_\nu$ et γ_τ dont la valeur peut changer d'un endroit à un autre.

Soit $\eta \in C(0, T; V)$, et $\theta \in C(0, T; L^2(\Omega))$ est donné. Dans la première étape on considère le problème variationnel suivant. Notre existence et la conséquence unique que nous disons maintenant et prouver dans la section suivante est le suivant.

3.2.3 Existence et unicité de la solution

Problème $\mathbf{PV}_\eta^u$. Trouver le champ des déplacements $u_\eta : [0, T] \rightarrow V$ tel que

$$\sigma_\eta = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_\eta) + \eta \quad (3.2.55)$$

$$(\sigma_\eta, \varepsilon(\omega - \dot{u}_\eta))_{\mathcal{H}} + j(u_\eta, \omega) - j(u_\eta, \dot{u}_\eta) \geq (f, \omega - \dot{u}_\eta)_V, \quad \forall \omega \in V \quad (3.2.56)$$

$$u_\eta(0) = u_0. \quad (3.2.57)$$

Dans l'étude du problème variationnel $\mathbf{PV}_\eta^u$ nous avons le résultat suivant

Lemme 3.2.1. Soit $\mathbf{g} \in C(0, T; V)$. Alors il existe une fonction unique $v_{\eta\mathbf{g}} \in C(0, T; V)$ tel que

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}\varepsilon(v_{\eta\mathbf{g}}), \varepsilon(\omega - v_{\eta\mathbf{g}}))_{\mathcal{H}} + j(\mathbf{g}, \omega) - j(\mathbf{g}, v_{\eta\mathbf{g}}) \geq \\ (f, \omega - v_{\eta\mathbf{g}})_V - (\eta, \varepsilon(\omega - v_{\eta\mathbf{g}}))_{\mathcal{H}}, \quad t \in [0, T], \quad \forall \omega \in V, \end{aligned} \quad (3.2.58)$$

Démonstration du lemme 3.2.1. Il résulte du théorème 1.8.20. qu'il existe une fonction unique $v_{\eta\mathbf{g}} : [0, T] \rightarrow V$, qui résout l'inégalité variationnelle elliptique (3.2.58). Pour établir sa régularité en montrant que $v_{\eta\mathbf{g}} \in C(0, T; V)$, Soit $t_1, t_2 \in [0, T]$ et désignons par $\eta_i = \eta(t_i)$, $\mathbf{g}_i = \mathbf{g}(t_i)$, $f_i = f(t_i)$ et $v_i = v_{\eta\mathbf{g}}(t_i)$, $i = 1, 2$. Nous choisissons $\omega = v_2$ dans (3.2.58) à $t = t_1$, $\omega = v_1$ dans (3.2.58) à $t = t_2$ et ajouter les deux inégalités pour obtenir

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}\varepsilon(v_1) - \mathcal{A}\varepsilon(v_2), \varepsilon(v_1 - v_2))_{\mathcal{H}} \leq (f_1 - f_2, v_1 - v_2)_V + (\eta_1 - \eta_2, \varepsilon(v_1 - v_2))_{\mathcal{H}} \\ + j(\mathbf{g}_1, v_2) - j(\mathbf{g}_1, v_1) + j(\mathbf{g}_2, v_1) - j(\mathbf{g}_2, v_2), \end{aligned}$$

Le côté gauche est minorée par (3.2.17) donc,

$$(\mathcal{A}\varepsilon(v_1) - \mathcal{A}\varepsilon(v_2), \varepsilon(v_1 - v_2))_{\mathcal{H}} \geq m_{\mathcal{A}} \|v_1 - v_2\|_V^2 \quad \forall u, v \in V \quad (3.2.60)$$

La dernière ligne de (3.2.59) est délimitée par la propriété (3.2.22) suit

$$j(\mathbf{g}_1, v_2) - j(\mathbf{g}_1, v_1) + j(\mathbf{g}_2, v_1) - j(\mathbf{g}_2, v_2) \leq c(\|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2\|_V \|v_1 - v_2\|_V). \quad (3.2.61)$$

L'utilisation de ces limites dans (3.2.59), nous obtenons

$$\|v_1 - v_2\|_V \leq c(\|f_1 - f_2\|_V + \|\eta_1 - \eta_2\|_{\mathcal{H}} + \|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2\|_V) \quad (3.2.62)$$

Ensuite, la conclusion que $v_{\eta\mathbf{g}} \in C([0, T]; V)$ résulte de la continuité de f , η , et $\mathbf{g}$ dans leurs espaces respectifs V , $\mathcal{H}$ et V . $\square$

Avec l'aide du lemme 3.2.1. nous montrons maintenant l'existence suivante et résultat d'unicité pour un problème $\mathbf{PV}_\eta^u$.

Lemme 3.2.2. Il existe une solution unique à un problème $\mathbf{PV}_\eta^u$ tels que $u_\eta \in C^1([0, T]; V)$ et $\sigma_\eta \in C(0, T; \mathcal{H}_1)$.

Démonstration du lemme 3.2.2. Nous considérons l'opérateur $\Lambda_\eta : C(0, T; V) \rightarrow C(0, T; V)$ défini par

$$\Lambda_\eta \mathbf{g}(t) = u_0 + \int_0^t v_{\eta \mathbf{g}}(s) ds, \quad g \in C(0, T; V), \quad t \in [0, T], \quad (3.2.63)$$

où $v_{\eta \mathbf{g}}$ est une solution de (3.2.58). Nous allons montrer que cet opérateur a une unique point fixe $\mathbf{g}_\eta \in C(0, T; V)$. A cette fin, soit $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \in C(0, T; V)$ et notons par $v_i = v_{\eta \mathbf{g}}, i = 1, 2$. Les solutions de (3.2.58) correspondant. En utilisant la définition (3.2.63), nous obtenons

$$\|\Lambda_\eta \mathbf{g}_1(t) - \Lambda_\eta \mathbf{g}_2(t)\|_V \leq \int_0^t \|v_1(s) - v_2(s)\|_V ds, \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.2.64)$$

En outre, en utilisant des estimations similaires à ceux menant à (3.2.62) dans la preuve de lemme 3.2.1, nous avons

$$\|v_1(s) - v_2(s)\|_V \leq c \|\mathbf{g}_1(s) - \mathbf{g}_2(s)\|_V, \quad \forall s \in [0, t],$$

Ensuite, il découle de (3.2.64) que

$$\|\Lambda_\eta \mathbf{g}_1(t) - \Lambda_\eta \mathbf{g}_2(t)\|_V \leq \int_0^t \|\mathbf{g}_1(s) - \mathbf{g}_2(s)\|_V ds, \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.2.65)$$

Réitérant cette inégalité m fois, nous obtenons

$$\|\Lambda_\eta^m \mathbf{g}_1 - \Lambda_\eta^m \mathbf{g}_2\|_{C(0, T; V)} \leq \frac{(cT)^m}{m!} \|\mathbf{g}_1(s) - \mathbf{g}_2(s)\|_{C(0, T; V)}, \quad \forall t \in [0, T],$$

Ceci montre que pour m suffisamment grande à l'opérateur Λ_η^m est une contraction de l'espace de Banach $C(0, T; V)$. Ainsi, l'opérateur Λ_η a un unique point fixe $\mathbf{g}_\eta \in C(0, T; V)$.

Ensuite, $v_\eta \in C(0, T; V)$, $u_\eta \in C^1(0, T; V)$ et $\sigma_\eta \in C(0, T; \mathcal{H})$ soient proposée par

$$v_\eta = v_{\eta \mathbf{g}_\eta}, \quad (3.2.66)$$

$$u_\eta(t) = u_0 + \int_0^t v_\eta(s) ds, \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.2.67)$$

$$\sigma_\eta = \mathcal{A}\varepsilon(v_\eta) + \eta \quad (3.2.68)$$

De (3.2.55) et (3.2.57) sont satisfaites. En outre, par (3.2.66) , (3.2.67) et (3.2.63) , il s'ensuit que $u_\eta = \mathbf{g}_\eta$ et $\dot{u}_\eta = v_\eta$. Par conséquent, si nous laissons $\mathbf{g} = \mathbf{g}_\eta$ dans

(3.2.58) on obtient (3.2.56).

Pour prouver la régularité de σ_η , nous choisissons $\omega = \dot{u}_\eta \pm \varphi$ dans (3.2.56), avec $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, obtenir

$$(\sigma_\eta, \varepsilon(-\varphi))_{\mathcal{H}} = (f, \varphi)_V, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \quad \text{sur} \quad [0, T]. \quad (3.2.69)$$

Rappelant la définition du terme $(f, \varphi)_V$ dans (3.2.34), nous trouvons

$$\text{Div} \sigma_\eta + f_0 = 0 \quad \text{sur} \quad [0, T]. \quad (3.2.70)$$

Maintenant, l'hypothèse (3.2.28) et l'équation (3.2.70) impliquent que $\sigma_\eta \in C([0, T]; \mathcal{H}_1)$.

Ceci établit l'existence dans le lemme 3.2.2. L'unicité de la solution découle directement de (3.2.55) et (3.2.57), en utilisant (3.2.17) , (3.2.23) et l'inégalité de Gronwall lemme 1.2.14.

□

Dans la prochaine étape, nous utilisons la solution $u_\eta \in C^1([0, T], V)$, obtenu dans le lemme 3.2.1, pour construire le variationnelle suivant problème pour le potentiel électrique.

Problème $\mathbf{PV}_\eta^\varphi$. Trouver le champ des déplacements $\varphi_\eta : [0, T] \rightarrow W$ tel que

$$\begin{aligned} (\mathbf{B} \nabla \varphi_\eta(t), \nabla \zeta)_{\mathcal{W}} - (\mathcal{E} \varepsilon(u_\eta(t)), \nabla \zeta)_{\mathcal{W}} \\ + (h(u_\eta(t), \varphi_\eta(t)), \xi)_{\mathcal{W}} = (q(t), \zeta)_{\mathcal{W}} \quad \forall \zeta \in \mathcal{W}, t \in (0, T). \end{aligned} \quad (3.2.71)$$

pour tout $\zeta \in W$, $t \in [0, T]$. Pour que le problème $\mathbf{PV}_\eta^\varphi$ soit bien posé on a le résultat suivant

Lemme 3.2.3. Le problème variationnel $\mathbf{PV}_\eta^\varphi$ admet une solution unique qui satisfait la régularité (3.2.51).

De plus, si φ_{η_1} et φ_{η_2} sont deux solutions (3.2.51) correspondants à $\eta_1, \eta_2 \in C([0, T]; \mathcal{H})$ alors il existe c tel que

$$\|\varphi_{\eta_1}(t) - \varphi_{\eta_2}(t)\|_W \leq c \|u_{\eta_1}(t) - u_{\eta_2}(t)\|_V, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.2.72)$$

Démonstration du lemme 3.2.3. En utilisant les memes argument du lemme 3.1.2.

On note par φ_η la solution de problème $\mathbf{PV}_\eta^\varphi$ obtenue dans le lemme 3.2.3. □

Dans la troisième étape, soit $\theta \in C(0, T; L^2(\Omega))$. On considère alors pour le champ d'endommagement le problème variationnel suivant.

Problème $\mathbf{PV}_\theta^\alpha$. Trouver le champ d'endommagement $\alpha_\theta : [0, T] \rightarrow H^1(\Omega)$ tel que

$$\begin{aligned} \alpha_\theta(t) \in K, \quad & (\dot{\alpha}_\theta(t), \xi - \alpha_\theta(t))_{L^2(\Omega)} + a(\alpha_\theta(t), \xi - \alpha_\theta(t)) \\ & \geq (\theta(t), \xi - \alpha_\theta(t))_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi \in K, \text{ p.p. } t \in (0, T), \end{aligned} \quad (3.2.73)$$

$$\alpha_\theta(0) = \alpha_0. \quad (3.2.74)$$

On a le résultat suivant.

Lemme 3.2.5. Le problème variationnel $\mathbf{PV}_\theta^\alpha$ admet une solution unique α_θ qui satisfait la régularité (3.2.52).

Démonstration 3.2.5. L'inclusion de la cartographie $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$ dans $(L^2(\Omega), \|\cdot\|_{L^2(\Omega)})$ est continue et sa gamme est dense. We désignons par $H^1(\Omega)'$ la double espace de $H^1(\Omega)$ et en identifiant le double de $L^2(\Omega)$ avec lui-même, nous pouvons écrire le Gelfand triple

$$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^1(\Omega)'$$

Nous utilisons la notation $(\cdot, \cdot)_{H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)'}$ pour représenter l'appariement de la dualité entre $H^1(\Omega)'$ et $H^1(\Omega)$. nous avons

$$(\alpha, \zeta)_{H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)'} = (\alpha, \zeta)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \alpha \in L^2(\Omega), \quad \zeta \in H^1(\Omega).$$

et nous notons que K est un ensemble convexe fermé dans $H^1(\Omega)$. Puis, en utilisant la définition (2.1.23) et le fait que $\alpha_0 \in K$, il est facile de voir que

Lemme 3.2.5 est une conséquence directement du théorème 1.8.24 . $\square$

Dans la quatrième étape, nous utilisons le champ des déplacements u_η obtenu dans le lemme 3.2.2 et on considère le problème suivant.

Problème $\mathbf{PV}_\eta^\beta$. Trouver le champ d'adhésion $\beta_\eta : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ tel que

$$\dot{\beta}_\eta(t) = -(\beta_\eta(t) [\gamma_\nu (R_\nu(u_{\eta\nu}))^2 + \gamma_\tau \|R_\tau(u_{\eta\tau})\|^2] - \epsilon_a)_+, \quad \text{p.p. } t \in (0, T) \quad (3.2.75)$$

$$\beta_\eta(0) = \beta_0. \quad (3.2.76)$$

Nous avons le résultat suivant.

Lemme 3.2.6. Le problème $\mathbf{PV}_\eta^\beta$ admet une solution unique β_η qui satisfait (3.2.53)

Démonstration du lemme 3.2.6. On considère l'application $F_\eta : [0, T] \times L^2(\Gamma_3) \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ définie par

$$F_\eta(t, \beta) = -(\beta [\gamma_\nu(R_\nu(u_{\eta\nu}(t)))^2 + \gamma_\tau \|R_\tau(u_{\eta\tau}(t))\|^2] - \epsilon_a)_+ \quad \forall t \in [0, T], \quad \beta \in L^\infty(\Gamma_3).$$

On a d'après (3.2.25) et les propriétés de l'opérateur R , F_η est de Lipschitz par rapport à β , uniformément dans le temps. Cependant, pour tout $\beta \in L^2(\Gamma_3)$, l'application $t \rightarrow F_\eta(t, \beta)$ appartient à $L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_3))$. Donc, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz voir théorème 1.8.22, il existe $\beta_\eta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3))$ solution unique du problème $\mathbf{P}\mathbf{V}_\eta^\beta$. En utilisant des arguments similaires à la remarque 1.3.1 et (3.2.26), il vient que $0 \leq \beta_\eta(t) \leq 1$ $\forall t \in [0, T]$ p.p. sur Γ_3 et donc $\beta_\eta \in Z$, ce qui conclut la preuve du lemme 3.2.6. $\square$

Maintenant, pour $t \in [0, T]$, nous considérons l'opérateur

$$\Lambda : C(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega)) \rightarrow C(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega)),$$

défini par: pour chaque $(\eta, \theta) \in C(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$

$$\Lambda(\eta, \theta)(t) = (\Lambda^1(\eta, \theta)(t), \Lambda^2(\eta, \theta)(t)) \in \mathcal{H} \times L^2(\Omega), \quad (3.2.77)$$

avec

$$\begin{aligned} (\Lambda^1(\eta, \theta)(t), v)_{\mathcal{H} \times V} = & (\mathcal{G}(\varepsilon(u_\eta(t)), \alpha_\theta(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi_\eta(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \\ & + \left(\int_0^t M(t-s) \varepsilon(u_\eta(s)) ds, \varepsilon(v) \right)_{\mathcal{H}} \end{aligned} \quad (3.2.78)$$

$$\Lambda^2(\eta, \theta)(t) = S(\varepsilon(u_\eta(t)), \alpha_\theta(t)). \quad (3.2.79)$$

Ici, pour tout $(\eta, \theta) \in C(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$; u_η, φ_η et α_θ représentent le champ des déplacements, le champ potentiel électrique, et le champ d'endommagement obtenus dans les lemmes 3.2.1, 3.2.3 et 3.2.4 respectivement. Nous avons le résultat suivant.

Lemme 3.2.7. Il existe un élément unique $(\eta^*, \theta^*) \in C(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$ tel que

$$\Lambda(\eta^*, \theta^*) = (\eta^*, \theta^*).$$

Démonstration du lemme 3.2.7. Soient (η_1, θ_1) et $(\eta_2, \theta_2) \in C(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$. Nous utilisons les notations $u_{\eta_i} = u_i, \dot{u}_{\eta_i} = \dot{u}_i, \varphi_{\eta_i} = \varphi_i$, et $\alpha_{\theta_i} = \alpha_i$ pour $i = 1, 2$.

En employant (3.2.18) et (3.2.21) – (3.2.24) avec les définitions de R_ν, R_τ, j et la remarque 1.3.1, nous avons

$$\begin{aligned} \|\Lambda^1(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda^1(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq c \left(\|\mathcal{G}(\varepsilon(u_1(t)), \alpha_1(t)) - \mathcal{G}(\varepsilon(u_2(t)), \alpha_2(t))\|_{\mathcal{H}}^2 \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \|M(t-s)\varepsilon(u_1(s) - u_2(s))\|_{\mathcal{H}}^2 ds + \|\mathcal{E}^* \nabla \varphi_1(t) - \mathcal{E}^* \nabla \varphi_2(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \right) \\ &\leq c \left(\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 + \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds \right. \\ &\quad \left. + \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W^2 \right) \end{aligned} \quad (3.2.80)$$

Maintenant, de (3.2.79) et (3.2.75), on obtient

$$\begin{aligned} \|\Lambda^2(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda^2(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \\ &c(\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 + \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2). \end{aligned} \quad (3.2.81)$$

Alors, depuis (3.2.80) et (3.2.81), on a

$$\begin{aligned} \|\Lambda(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{\mathcal{H} \times L^2(\Omega)}^2 &\leq c \left(\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 + \right. \\ &\quad \left. \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds + \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W^2 + \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.2.82)$$

Pourtout p.p. $t \in [0, T]$. Il découle de (3.2.67), que

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V \leq \int_0^t \|v_1(s) - v_2(s)\|_V ds, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.2.83)$$

En utilisant (3.2.55), (3.2.56), et des estimations comparables à celles de la preuve du lemme 3.2.1 (voir (3.2.60)), nous constatons que, pour $s \in [0, T]$,

$$\|v_1(s) - v_2(s)\|_V \leq c(\|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{\mathcal{H}} + \|u_1(s) - u_2(s)\|_V), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.2.84)$$

La combinaison de (3.2.83) et (3.2.84), et en utilisant l'inégalité de Gronwall lemme 1.2.14, page 43), nous avons

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V \leq c \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{\mathcal{H}} ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

ce qui implique que

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 \leq c \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{\mathcal{H}}^2 ds, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.2.85)$$

Nous utilisons (3.2.71), (3.2.19) – (3.2.20), (1.1.50) et l'inégalité de Friedrichs-Poincaré (1.1.47) pour obtenir

$$\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W^2 \leq c \|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2. \quad (3.2.86)$$

De (3.2.73), nous déduisons que

$$(\dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_1, \alpha_1 - \alpha_2)_{L^2(\Omega)} + a(\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2) \leq (\theta_1 - \theta_2, \alpha_1 - \alpha_2)_{L^2(\Omega)} \text{ p.p. } t \in [0, T].$$

En intégrant l'inégalité précédente avec les conditions initiales

$$\alpha_1(0) = \beta_0 \text{ et } \alpha_2(0) = \alpha_0,$$

et en utilisant l'inégalité

$$a(\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2) \geq 0,$$

on obtient

$$\frac{1}{2} \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_0^t (\theta_1(s) - \theta_2(s), \alpha_1(s) - \alpha_2(s))_{L^2(\Omega)} ds, \quad \forall t \in [0, T]$$

Il vient alors que

$$\|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \int_0^t \|\alpha_1(s) - \alpha_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds, \quad \forall t \in [0, T]$$

Nous combinons l'inégalité précédente avec le lemme de Gronwall 1.8.25, pour trouver

$$\|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds, \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.2.87)$$

De l'inégalité et estimations précédente (3.2.85), (3.2.86) et (3.2.87) il s'ensuit que maintenant

$$\|\Lambda(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{\mathcal{H} \times L^2(\Omega)}^2 \leq c \int_0^t \|(\eta_1, \theta_1)(s) - (\eta_2, \theta_2)(s)\|_{\mathcal{H} \times L^2(\Omega)}^2 ds.$$

En réitérant m fois l'inégalité précédente, on obtient

$$\|\Lambda^m(\eta_1, \theta_1) - \Lambda^m(\eta_2, \theta_2)\|_{C(0,T;\mathcal{H} \times L^2(\Omega))}^2 \leq \frac{(cT)^m}{m!} \|(\eta_1, \theta_1) - (\eta_2, \theta_2)\|_{C(0,T;\mathcal{H} \times L^2(\Omega))}^2.$$

Ce qui implique que pour m suffisamment grand, l'opérateur Λ^m est une contraction sur l'espace de Banach $C(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$, donc, Λ^m possède un point fixe unique $(\eta^*, \theta^*) \in C(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$ et par conséquent (η^*, θ^*) est l'unique point fixe de Λ . $\square$

Maintenant, on peut établir la démonstration du théorème 3.2.1.

Démonstration du théorème 3.2.1.

Existence. Soit $(u_{\eta^*}, \sigma_{\eta^*})$ la solutions du problème PV_{η}^u et $(\varphi_{\eta^*}, \beta_{\eta^*})$ sont des solutions des problèmes PV_{η}^{φ} et PV_{η}^{β} , pour $\eta = \eta^*$, et soit α_{θ^*} la solution du prnlème PV_{θ}^{α} pour $\theta = \theta^*$.

Depuis

$$\eta^*(t) = \mathcal{G}(\varepsilon(u_*(t)), \beta_*(t)) + \int_0^t M(t-s) \varepsilon(u_*(s)) ds + \mathcal{E}^* \nabla \varphi_*(t) \quad (3.2.89)$$

$$\theta^*(t) = S(\varepsilon(u_*(t)), \beta_*(t)) \quad (3.2.90)$$

nous trouvons que $(u_{\eta^*}, \sigma_{\eta^*}, \varphi_{\eta^*}, \beta_{\eta^*}, \alpha_{\theta^*})$ sont des solutions des problèmes (3.2.44) et (3.2.48) qui satisfait (3.2.49) – (3.2.53).

Unicité. Soit $(u_{\eta^*}, \sigma_{\eta^*}, \varphi_{\eta^*}, \beta_{\eta^*}, \alpha_{\theta^*})$ la solution de (3.2.44) – (3.2.48) obtenue ci-dessus, et soit $(u, \sigma, \varphi, \beta, \alpha)$ soit une autre solution du problème, qui satisfait (3.2.49) – (3.2.52). On note $\eta \in C([0, T], \mathcal{H})$ et $\theta \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ les opérateurs

$$\eta(t) = \mathcal{G}(\varepsilon(u(t)), \alpha(t)) + \int_0^t M(t-s) \varepsilon(u(s)) ds + \mathcal{E}^* \nabla \varphi(t) \quad (3.2.91)$$

$$\theta(t) = S(\varepsilon(u(t)), \alpha(t)). \quad (3.2.92)$$

Maintenant (3.2.44), (3.2.45) et (3.2.48) impliquent que (u, σ, φ) est une solution du problème $\mathbf{PV}_{\eta}^u$ et $\mathbf{PV}_{\eta}^{\varphi}$. Du lemmes 3.2.1 et 3.2.3, il s'ensuit que ce problème a une solution unique

$u_{\eta} \in C^1([0, T]; V)$, $\varphi_{\eta} \in C([0, T]; W)$ et $\sigma_{\eta} \in C([0, T]; \mathcal{H}_1)$ et si nous concluons que

$$u = u_{\eta}, \quad \sigma = \sigma_{\eta}, \quad \varphi = \varphi_{\eta}, \quad \beta = \beta_{\eta} \quad (3.2.93)$$

Ensuite (3.2.6), (3.2.8), et un des rendements similaires argument

$$\alpha = \alpha_{\theta} \quad (3.2.94)$$

En utilisant maintenant (6.3.24), (6.3.39), (6.3.40), (6.3.37) et (6.3.38) nous obtenons $\Lambda(\eta, \theta) = (\eta, \theta)$. par l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ , garanti par le lemme 3.2.6, il s'ensuit que

$$\eta = \eta^*, \quad \theta = \theta^* \quad (3.2.95)$$

3.2. Problème de contact avec frottement en électro-viscoélasticité avec mémoire longue

L'unicité de la solution est maintenant une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ qui est défini par (3.2.93) – (3.2.94). $\square$

Conclusion

Dans cette thèse, on a étudié l'existence et l'unicité de la solution de quatre problèmes aux limites de contact en mécanique ou électro mécanique (piézoélectricité), le premier problème est un problème mécanique de contact avec adhésion et endommagement entre un corps viscoélastique et une base, le deuxième problème est un problème mécanique de contact bilatéral avec adhésion et endommagement entre un corps viscoélastique et une base, le troisième problème est un problème électro mécanique de contact avec adhésion et endommagement entre un corps électro élasto-viscoplastique et une base, le quatrième problème est un problème électro mécanique de contact avec adhésion et endommagement entre un corps électro viscoélastique avec mémoire longue et une base.

On a utilisé la formule de Green pour obtenir la formulation variationnelle de ces problèmes. Comme la frontière des corps et les données des problèmes ont des bonnes régularités; donc, la solution du problème mécanique et du problème variationnelle est la même.

On a montré l'existence et l'unicité de la solution des problèmes précédents par l'utilisation des arguments suivants: équation variationnelle dépendant du temps, équation variationnelle d'évolution, inéquation variationnelle d'évolution du type parabolique, équation différentielle et point fixe.

Bibliographie

- [1] R. S. Adams, “*Sobolev spaces*”, Academic press, New York (1975).
- [2] K.T. Andrews, L. Chapman, J.R. Fisackerly, M. Shillor, L. Vanerian and T. Van Houten, “A Membrane in Adhesive Contact”, *SIAM J. Appl. Math.* 64 (2003), 152-169.
- [3] K.T. Andrews and M. Shillor, “Dynamic Adhesive Contact of a Membrane”, *Adv. Math. Sci. Appl.* 13 (2003), 343-356
- [4] R. C. Batra, J. S. Yang, “Saint Venant’s principle in linear piezoelectricity”, *Journal of Elasticity*, 38(1995), 209-218.
- [5] S. Barna, “Existence results for hemivariational inequality involving $p(x)$ -Laplacian”, *Opuscula Math.* 32 (2012), no. 3, 439-454.
- [6] P. Bisenga, F. Lebon, F. Maceri, “The unilateral frictional contact of a piezoelectric body with a rigid support, in *Contact Mechanics*”, J. A. C. Martins and Manuel D. P. Monteiro Marques (Eds), Kluwer, Dordrecht, 2002, 347-354.
- [7] M. Campo, J.R. Fernandez, W. Han, M. Sofonea, “A dynamic viscoelastic contact problem with normal compliance and damage”, *Finite Elem. Anal. Des.* 42, pp. 1-24, 2005
- [8] P. G. Ciarlet, “*Elasticité Tridimensionnelle*”, Masson, Paris (1986)
- [9] O. Chau, J. R. Fernandez, M. Shillor, M. Sofonea, “Variational and numerical analysis of a quasistatic viscoelastic contact problem with adhesion”, *J. Comput. Appl. Math.*, 159, pp. 431-465, 2003.

- [10] O. Chau, M. Shillor M. Sofonea, “ Dynamic frictionless contact with adhesion”, J. of Appl. Math. and Phys. (ZAMP), 55 (2004), 32-47.
- [11] O. Chau, M. Shillor, M. Sofonea, “ Dynamic Frictionless Contact with adhesion”, J. Appl. Meth. Phys. (ZAMP), 55 (2004), 431-465.
- [12] M. Cocu, R. Rocca, “ Existence Results for Unilateral Quasistatic Contact Problems with Friction and Adhesion”, Math. Model. and Numer. Anal. 34, (2000), 981-1001.
- [13] G. Duvaut, J. L. Lions, “ Inequalities in Mechanics and Physics”, Springer-Verlag, Berlin, (1976).
- [14] C. Eck, J. Jaru sek, M. Krbe c, “ Unilateral Contact Problems: Variational Methods and Existence Theorems”, Pure and Applied Mathematics 270, Chapman/CRC Press, New York, 2005.
- [15] J. R. Fernandez-Garc a, M. Sofonea, “ J. M. Via no; A Frictionless Contact Problem for Elastic-Viscoplastic Materials with Normal Compliance”,
- [16] J.R. Fernandez, M. Shillor and M. Sofonea, “ Analysis and numerical simulations of a dynamic contact problem with adhesion”, Math. Comput. Modelling, 37 (2003), 1317-1333.
- [17] M. Fremond, Equilibre des structures qui adhèrent à leur support, C.R. Acad. Sci. Paris, 295, Série (1982), 913-916.
- [18] [13] M. Fremond, Adhérence des solides, J. Mécanique et application, 6(3) (1987), 323-335.
- [19] M. Frémond, B. Nedjar, “ Damage in gradient of damage and principle of virrtual work ”, Int. J. Solids. Stuct.,33(8), pp. 1083-1103, 1996.
- [20] M. Frémond, B. Nedjar, “ Damage in concrete: The unilateral phenomenon”, Nucl. Eng. Des.,155, pp. 323-335, 1995.
- [21] M. Frémond, KL. Kuttler, B. Nedjar, M. Shillor, “ One-dimensional models of damage”, Adv. Math. Sci. Appl. 8(2),155, pp. 541-570, 1998.

- [22] M. Frémond, K.L. Kuttler and M. Shillor, “ Existence and uniqueness of solution for a one-dimensional damage”, *J. Math. Anal. Appl.* 229, 271-294, (1999).
- [23] W. Han, M. Shillor and M. Sofonea, “ Variational and Numerical Analysis of A Quasistatic Viscoelastic Problem with Normal Compliance, Friction and Damage”, *J. Comput. Appl. Math.* 137, 377-398. (2001).
- [24] W. Han, K.L. Kuttler, M. Shillor and M. Sofonea, “ Elasti Beam in Adhesive Contact”, *Int. J. Solids Structures* 39 (2002), 1145-1164.
- [25] W. Han, M. Sofonea, “ Evolutionary Variational inequalities arising in viscoelastic contact problems”, *SIAM Journal of Numerical Analysis* 38 (2000), 556-579.
- [26] W. Han, M. Sofonea, “ Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity”, *Studies in Advanced Mathematics* 30, American Mathematical Society, Providence, RI Intl. Press, Sommerville, MA, (2002).
- [27] W. Han, M. Sofonea, “ Numerical Analysis of a Frictionless Contact Problem for Elastic-Viscoplastic Materials”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng* 190 (2000), 179-191.
- [28] N. Hemici, B. Awbi, M. Sofonea, “ Viscoelastic problem contact with compliance normal and adhesion”, *Annals of University of Bucarest* 51 (2002) 131-142.
- [29] N. Hemici, M. Sofonea, “ Analysis of dynamic bilateral contact problem with adhesion”, *Proceedings of the Fourth International Conference on Applied Mathematics and Engineering Sciences, (CIMASI 2002), Casablanca (2002), CD-ROM.*
- [30] L. Jianu, M. Shillor, M. Sofonea, “ A viscoelastic bilateral frictionless contact problem with”, *Appl. Anal.* 80 (2001), 233–255.
- [31] T. Ikeda, “ Fundamentals of Piezoelectricity”, Oxford University Press, Oxford, 1990.
- [32] Z. Lerguet, M. Shillor, M. Sofonea, “ A frictional contact problem for an electro-viscoelastic body”, *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol. 2007(2007), No. 170, pp. 1-16.

- [33] R. D. Mindlin, “Polarisation gradient in elastic dielectrics”, *Int. J. Solids Structures* 4 (1968), 637-663.
- [34] R. D. Mindlin, “Elasticity piezoelectricity and crystal lattice dynamics”, *Journal of Elasticity* 4 (1972), 217-280.
- [35] F. Maceri, P. Bisegna, “The unilateral frictionless contact of a piezoelectric body with a rigid support”, *Math. Comp. Modelling* 28 (1998), 19-28.
- [36] S. Ntouyas, “Boundary value problems for nonlinear fractional differential equations and inclusions with nonlocal and fractional integral boundary conditions”, *Opuscula Math.* 33 (2013), no. 1, 117-138.
- [37] V. Z. Patron, B. A. Kudryavtsev, “Electromagnetoelasticity, Piezoelectrics and Electrically Conductive Solids”, Gordon Breach, London, 1988.
- [38] M. Raous, L. Cangémi, M. Cocu, “A consistent model coupling adhesion, friction, and unilateral contact”, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 177, pp. 383-399, 1999.
- [39] M. Rochdi, M. Shillor, M. Sofonea, “Analysis of a quasistatic viscoelastic problem with friction and damage”, *Adv. Math. Sci. Appl.*, 10, pp. 173-189, 2002.
- [40] M. Rochdi, M. Shillor, M. Sofonea, “Quasistatic viscoelastic contact with normal compliance and friction”, *Journal of Elasticity* 51 (1998), 105-126. *Numerische Mathematik* 90 (2002), 689-719.
- [41] J. Rojek, J.J. Telega, “Contact problems with friction, adhesion and wear in orthopaedic biomechanics. I: General developments”, *J. Theoretical and Applied Mechanics*, 39 (2001).
- [42] M. Selmani, L. Selmani, “Analysis of frictionless Contact problem for elastic-viscoplastic materials”, *Nonlinear Analysis, Modelling and control*, 2012, Vol. 17, No. 1, 99-77.
- [43] L. Selmani, L. Chouchane, “A frictionless contact problem with adhesion and damage”, *Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser.* Volume 33, pp. 94-107, 2006.

- [44] M. Selmani, L. Selmani, “ A Dynamic Frictionless Contact Problem with Adhesion and Damage”, Bull. Pol. Acad. Sci., Math., 55, pp. 17-34, 2007.
- [45] M. Shillor, M. Sofonea, J. J. Telega, “ Models and Analysis of Quasistatic Contact”, Lecture Notes in Physics 655, Springer, Berlin, 2004.
- [46] M. Sofonea and A. Matei, “ Elastic Antiplane Contact Problem with Adhesion”, J. of Appl. Math. Phys. (ZAMP) 53 (2002), 962-972.
- [47] M. Sofonea, A. D. Rodriguez-Aros and J. M. Viano, “ A Class of Integro-Differential Variational Inequalities with Applications to Viscoelastic Contact”, preprint.
- [48] M. Sofonea, W. Han, M. Shillor, “ Analysis and Approximation of Contact Problems with Adhesion or Damage”, Pure and Applied Mathematics, Vol. 276, Chapman, Hall/CRC Press, New york, 2006.
- [49] M. Sofonea, El H. Essouf , “ A Piezoelectric contact problem with slip dependent coefficient of friction”, Mathematical Modelling and Analysis 9 (2004), 229-242.
- [50] M. Sofonea, El H. Essouf , “ Quasistatic frictional contact of a viscoelastic piezoelectric body”, Adv. Math. Sci. Appl. 14 (2004), 613-631.
- [51] M. Sofonea, A. Matei, “ Variational inequalities with applications, A study of antiplane frictional contact problems”, Springer, New York (à paraître).
- [52] N. Stromberg, L. Johansson, A. Klarbring, “ Derivation and analysis of a generalized standard model for contact friction and wear”, Int. J. Solids Structures, 33 (1996), 1817-1836.
- [53] A. Aissaoui, N. Hemici, “ Bilateral contact problem with adhesion and damage”, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations No°18, 1-16, (2014).
- [54] A. Aissaoui, N. Hemici, “ A frictional contact problem with damage and adhesion for an electro elastic-viscoplastic body”, Electronic Journal of differential equations, Vol. 2014 (2014), N°11, pp. 1-19.