



Setif 1 University Ferhat Abbas
Faculty of Sciences
Department of Mathematics



جامعة سطيف 1 فرحات عباس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

Master's Thesis in Mathematics

Option : Applied Mathematics

Theme :

STUDY OF SOME PROBLEMS FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Presented by

Mr. OUSSAMA ANANE

Supervisor: **Dr. REBIHA SAFFIDINE**

Thesis defended on June 21, 2026, in front of the jury composed of:

Ms. **SIHEM SMATA**

Dr. Setif 1 University Ferhat Abbas

President

Ms. **REBIHA SAFFIDINE**

Dr. Setif 1 University Ferhat Abbas

Supervisor

Ms. **LALDJA BENZIANE**

Dr. Setif 1 University Ferhat Abbas

Examiner

2025/2026

Table of Contents

Introduction	i
1 Basic Concepts of Functional Analysis	3
1.1 Banach Spaces	3
1.2 Hilbert Spaces	4
1.3 Dual Space	5
1.4 L^p Spaces	7
1.4.1 Important Inequalities in L^p Spaces	8
1.4.2 Weak Convergence in L^p Spaces	8
1.5 Sobolev Spaces	9
1.6 Partial Differential Equations	11
1.6.1 Boundary Conditions	11
1.6.2 Critical Points of Functionals	13
2 The p- Laplace Equation	15
2.1 The p-Laplace Operator	15
2.2 Homogeneous Dirichlet problem	16
2.3 Weak Formulation	16
2.4 Existence and Uniqueness of the Solution	17
2.4.1 Minimization Technique	17
2.4.2 Generalization of Lax-Milgram Theorem	20
2.4.3 Application	23
2.4.4 Result of Existence and Uniqueness	25
3 Optimal control of Multi-Solution p- Laplace Equation	26
3.1 Formulation of the Control Problem	26
3.2 Penalization Problems and Approximation Problems	27
3.3 Optimality Conditions for Penalization Problems And Approximation Problems	34
3.4 Optimality Conditions for Multi-Solution p-Laplacian Problems	37
Conclusion	39
Bibliography	39

المخلص

تتناول هذه المذكرة دراسة معادلة p -لابلاسيان، وهي تعميم غير خطي لمعادلة لابلاس الكلاسيكية. حيث تم تقديم الصياغة الضعيفة للمسألة مع شروط ديريكليه المتجانسة، وتم إثبات وجود ووحداية الحل الضعيف باستخدام طريقتين مختلفتين: تقنية تصغير دالة الطاقة، وتعميم مبرهنة لاكس-ميلغرام. كما تمت دراسة مشكلة تحكم أمثل لمعادلة p -لابلاسيان غير محددة بشكل جيد، حيث قد تقبل معادلة الحالة عدة حلول لنفس التحكم للتغلب على هذه الصعوبة، تم اقتراح مسائل جزائية وتقريبية، وتم استنباط شروط الأمثلية اللازمة مع إثبات تقارب الحلول التقريبية إلى حل أمثل للمسألة الأصلية. يقدم هذا العمل إطارا نظريا متينا لتحليل مسائل التحكم الأمثل للأنظمة غير الخطية. الكلمات المفتاحية: المعادلات التفاضلية الجزئية، معادلة p -لابلاسيان، التحكم الأمثل، شروط الأمثلية

Abstract

In this thesis, we present a study of the p -Laplacian equation, which constitutes a nonlinear generalization of the classical Laplace equation. The weak formulation of the problem, subject to homogeneous Dirichlet boundary conditions, is presented. The existence and uniqueness of the weak solution are then demonstrated through two distinct approaches: the minimization of the energy functional and the application of the generalized Lax-Milgram theorem. Furthermore, an optimal control problem governed by an ill-posed p -Laplacian equation is also studied, a case in which the state equation may admit multiple solutions for a single control. For this reason, penalization and approximation problems are introduced, the necessary optimality conditions are established, and the convergence of the approximate solutions to an optimal solution of the initial problem is proven. This work provides a rigorous theoretical framework for the analysis of optimal control problems applied to non-linear systems.

Keywords: Partial Differential Equations, p -Laplacian Equation, Optimal Control, Optimality Conditions

Résumé

Dans ce mémoire, nous présentons une étude de l'équation du p -laplacien, qui constitue une généralisation non linéaire de l'équation de Laplace classique. La formulation faible du problème, avec des conditions aux limites de Dirichlet homogènes, y est présentée. L'existence et l'unicité de la solution faible sont ensuite démontrées par deux approches distinctes : la minimisation de la fonctionnelle d'énergie et l'application du théorème de Lax-Milgram généralisé. Par ailleurs, un problème de contrôle optimal gouverné par une équation du p -laplacien mal posée est également étudié, un cas dans lequel l'équation d'état peut admettre plusieurs solutions pour un même contrôle. Pour cela, des problèmes de pénalisation et d'approximation sont introduits, les conditions nécessaires d'optimalité sont établies, et la convergence des solutions approchées vers une solution optimale du problème initial est démontrée. Ce travail offre un cadre théorique rigoureux pour l'analyse des problèmes de contrôle optimal appliqués aux systèmes non linéaires.

Mots-clés: Équations aux dérivées partielles, Équation du p -laplacien, Contrôle optimal, Conditions d'optimalité