الجمهوريّة الجزائريّة الدّيمقراطيّة الشّعبيّة

وزارة التّعليم العالي والبحث العلميّ

جامعة فرحات عبّاس سطيف-1-

كلّيّة العلوم الاقتصاديّة والتّجاريّة وعلوم التّسيير

قسم التعليم الأساسي

مطبوعة بعنوان:

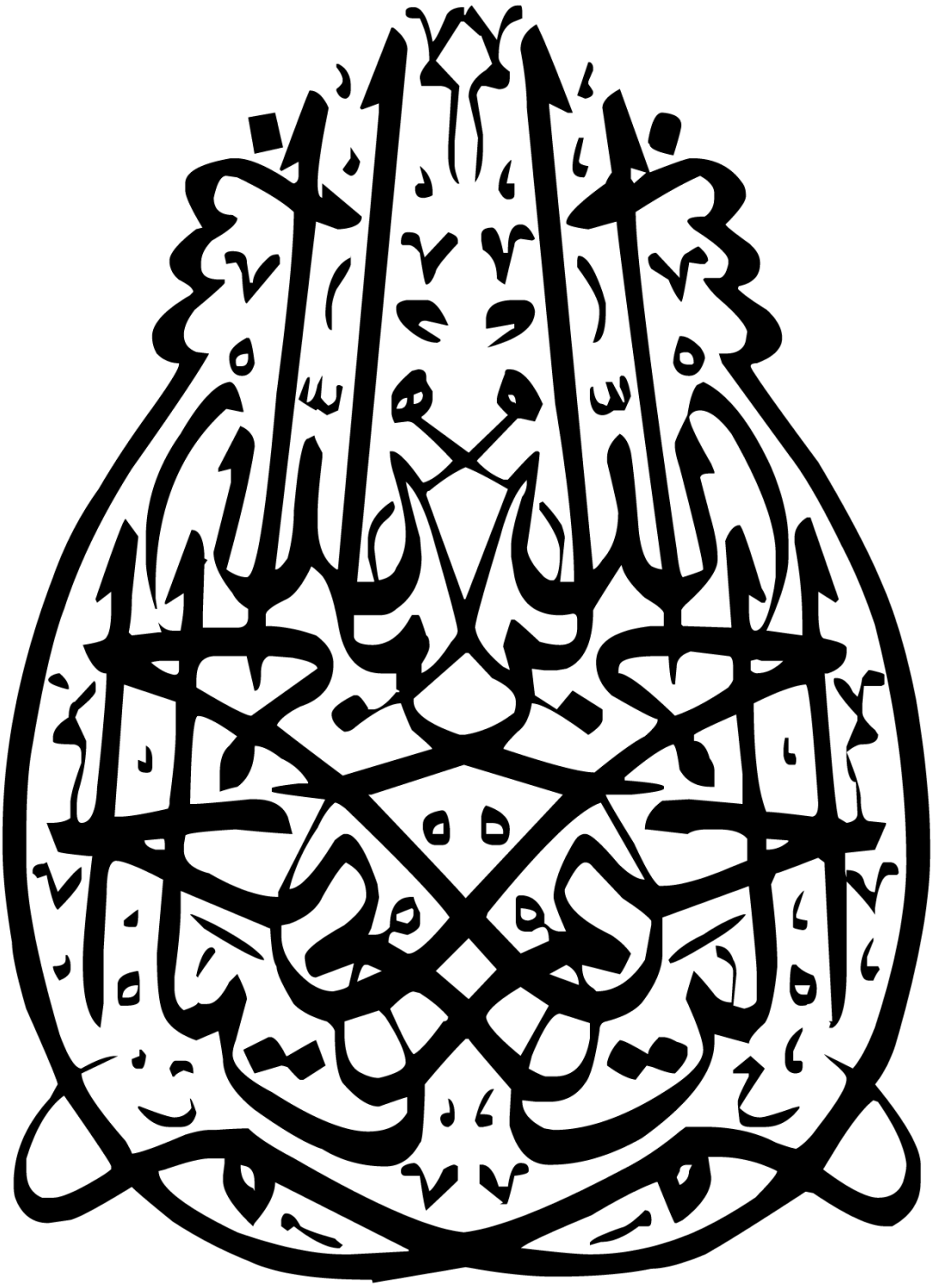
دروس ملخصة وتمارين محلولة في مقياس الإحصاء3

مطبوعة موجهة لطلبة السنة الثانية LMD "الجذع المشترك"

من إعداد:

د. شراد ياسين

السنة الجامعية: 2022- 2023



الحمد لله رب العالمين ، والصلاة والسلام على خاتم وسيد المرسلين، نبينا محمد الهادي الأمين الذي بعثه الله رحمة للعالمين، وعلى آله وأصحابه وأنصاره وأتباعه ومن أهتدى بهديه وعمل بسنته إلى يوم الدين.

وبعد:

تندرج هذه المطبوعة ضمن مقياس الإحصاء 3، وهي موجهة بالأساس إلى طلبة السنة ثانية جذع مشترك لكلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، كما يمكن أن يستفيد منها طلبة مختلف الكليات الأخرى الذين يدرسون هذا المقياس.

فالهدف من هذه المطبوعة هو تقديم المبادئ الأولية المتعلقة بالإحصاء الرياضي(الإحصاء3) ، حيث تغطي هذه المطبوعة جميع فصول مقياس الإحصاء3 حسب ما هو مقرر من طرف وزارة التعليم العالي والبحث العلمي، وكل فصل يتضمن دروس ملخصة ومدعمة بأمثلة محلولة عن كل المفاهيم المدرجة في مقياس الإحصاء3، ثم أرفقت بحلول امتحانات سابقة، حيث تم الحرص قدر المستطاع أن تكون هذه الأمثلة والامتحانات متدرجة من الأسهل إلى الأصعب، وأن تكون في مستوى الطلبة نوعا ما.

كما صممت هذه المطبوعة بشكل منهجي وفقا لأي مرجع في الإحصاء3، وقد قسمت مطبوعة مقياس الإحصاء3 إلى خمسة فصول مرتبة كالآتي:

- نظرية العينات وذلك بدراسة العلاقة بين المجتمع والعينات المسحوبة منه.
- التوزيعات الاحتمالية المتصلة من خلال دراسة التوزيع الطبيعي، التوزيع الطبيعي المعياري، توزيع كاي تربيع، توزيع ستيودنت، توزيع فيشر.
- توزيعات المعاينة من خلال دراسة توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $(\bar{x})$ ، توزيع المعاينة لنسبة العينة (f)، توزيع المعاينة للتباين (S^2).
- التقدير من خلال دراسة التقدير بمجال للمتوسط الحسابي للمجتمع μ، التقدير بمجال للنسبة P في المجتمع، التقدير بمجال لتباين المجتمع σ^2.
- اختبار الفرضيات من خلال دراسة اختبار الطرفين أو ذو جانبين، اختبار الطرف الأيسر، اختبار الطرف الأيمن لكل معالم المجتمع.

الفصل الأول:

نظرية العينات

تمهيد:

ارتبطت كلمة الاحصاء في استخداماتنا اليومية بالبيانات الرقمية والكمية وتستخدم ضمن نطاق واسع في الحياة اليومية حيث يستخدمها معظم الناس في حديثهم العادي ، ويستعينون بها في توضيح مثلا ما يعرضون ويكتبون.

والإحصاء بهذا المعنى فكرة قديمة في تاريخ الحضارة الإنسانية، فمعنى كلمة الإحصاء بالإنجليزية "statistics" مشتقة من الكلمة اللاتينية "status" التي تعني الدولة أو من الكلمة الإيطالية "statista" أو قد يكون من الكلمة الألمانية "Statistik" وتعني الدولة أيضا ، وقد دخلت قاموس المفردات الإنجليزية في القرن الثامن عشر.

أولا:ماهية علم الإحصاء

1- تعريف علم الإحصاء (Definition of Statistics Science):

هناك تعاريف كثيرة لعلم الإحصاء وذلك لسعة إستخدامه في العلوم الأخرى حيث تطبق النظريات والأساليب الإحصائية في الكثير من العلوم الأخرى بإعتباره الطريقة الصحيحة والأسلوب الأمثل لإتباعه في البحوث العلمية، حيث من التعريفات الشائعة والمألوفة في الماضي والممتدة إلى ما هو حديث وحاضر وجامع وأقرب إلى البحث العلمي:

فقديما كان يعرف علم الإحصاء بأنه:" هو العلم الذي يهتم بأساليب جمع البيانات وتنظيمها في جداول إحصائية ثم عرضها بيانيا".

من خلال هذا التعريف يتضح لنا أن علم الإحصاء قديما كان يهتم بجمع البيانات وترتيبها في جداول وإبرازها في رسوم بيانية أو أشكال تصويرية.

فقد تطور مفهوم علم الإحصاء بتطور الأساليب العلمية والطرق الإحصائية المستخدمة فى كل من البحث العلمي والتطبيقات العلمية والعملية على حد سواء، فلم يعد الإحصاء مقصورا على عدد من الأشياء، وأيضا لم يعد كما يعتقد البعض أن علم الإحصاء ما هو إلا عملية العرض أو الوصف الرقمي لمجموعة معينة من البيانات.

أي حديثا عرف علم الإحصاء بأنه:" العلم الذي يهتم أو يبحث في جمع البيانات وتنظيمها وعرضها وتحليلها واستقراء النتائج وإتخاذ القرارات بناء عليها في ظل ظروف عدم التأكد".

من خلال هذا التعريف يتضح لنا أن علم الإحصاء حديثا أصبح يهتم بطرق جمع البيانات وتبويبها وتلخيصها بشكل يمكن الاستفادة منها في وصف البيانات وتحليلها للوصول إلى قرارات سليمة في ظل ظروف عدم التأكد من خلال تفسير الظاهرة التي هي محل البحث والوقوف على سلوك تطورها وإمكانية التنبؤ الدقيق بما ستكون عليه فى المستقبل.

2- أهمية علم الإحصاء:

يمكن إيجاز أهمية علم الإحصاء فى النقاط التالية:

- يساعد على وصف الظواهر وصفا دقيقا.

– يقدم طريقة منظمة في تلخيص البيانات وعرضها بطرق محددة مما يسهل المقارنات فيما بينها واستخلاص الاستنتاجات منها.

– يساعد على التنبؤ بالظواهر المختلفة وعلى معرفة إمكانية حدوث مثل هذه الظواهر ومقدار وشروط حدوثها.

3- إستخدامات علم الإحصاء:

يستخدم علم الإحصاء في جميع المجالات والعلوم (الاقتصادية، الاجتماعية، الفيزيائية، الطبيعية، الطبية...الخ) فمثلا في الاقتصاد يستخدم الإحصاء في حساب معدلات النمو، دراسة السوق، كمية الإنتاج في القطاعات المختلفة، أما في الطب فيستخدم الإحصاء في جمع تحليل المشاهدات الإكلينيكية، أما في علوم الاجتماع يستخدم الإحصاء في معرفة عدد السكان لتحديد الاحتياجات.

ثانيا: أقسام علم الإحصاء

ينقسم علم الإحصاء إلى قسمين أساسيين هما:

1- الإحصاء الوصفي (Descriptive Statistics):

عبارة من مجموعة الأساليب الإحصائية التي تعنى بجمع البيانات وتنظيمها وتصنيفها وتلخيصها وعرضها بطريقة واضحة في صورة جداول أو أشكال بيانية وحساب المقاييس الإحصائية المختلفة لوصف متغير ما (أو أكثر من متغير) في مجتمع ما أو عينه منه.

2- الإحصاء الاستدلالي (Inferential Statistics):

عبارة عن مجموعة من الأساليب الإحصائية التي تستخدم بغرض تحليل بيانات ظاهرة (أو أكثر) في مجتمع ما على أساس بيانات عينة احتمالية تسحب منه وتفسيرها للتوصل إلى التنبؤ واتخاذ القرارات المناسبة.

ثالثا: التعريف بالمصطلحات الإحصائية

1- المجتمع الإحصائي: هو مجموع الوحدات الإحصائية المراد دراستها والمعرفة بشكل دقيق والتي تشترك فيما بينها في الصفة الأساسية محل اهتمام الباحث، مثل: مجتمع من الطلبة، مجتمع من الأسر، مجتمع من المؤسسات.

2- الوحدة الإحصائية: هي الكائن الواحد أو الخلية الأساسية التي تجرى عليه الدراسة الإحصائية، أي أن أسئلة الاستمارة تدور حوله، سواء أكان هذا الكائن إنسانا أو حيوانا أو شيئا، مثل: إنسان، بقرة، سيارة،.....إلخ.

3- المتغير الإحصائي: هو العنصر المشترك لكل الوحدات الإحصائية التي تشكل المجتمع الإحصائي، مثل: الطول، السن، مستوى التأهيل العلمي، الإنتاج، ....إلخ.

4- العينة: هي جزء من المجتمع الإحصائي يتم استخراجها بطرق إحصائية معينة حتى تكون ممثلة للمجتمع الإحصائي أحسن تمثيل، ويتم الاعتماد عليها في الدراسة بدل المجتمع نظرا لكبر حجم المجتمع، ربحا للوقت والجهد والمال، الفحص قد يكون مؤذيا أو متلفا للوحدات.

رابعا: الخطوات العريضة لمنهج البحث الإحصائي

1- التحديد الدقيق للهدف الإحصائي: ونعني بذلك تحديد نوع المعلومات المراد جمعها، والتي تترجم إلى أسئلة تدرج في وثيقة خاصة تسمى استمارة، ويشترط في ذلك التنظيم الجيد والوضوح الكامل للأسئلة، ويستنبط الهدف الإحصائي من الهدف العام من الدراسة الإحصائية.

مثال: نريد إجراء دراسة إحصائية حول مستوى المعيشة للأسرة في الجزائر (الهدف العام).

تحديد الهدف الإحصائي: دخل الأسرة – عدد الأفراد في الأسرة – نوع السكن– حجم السكن (عدد الغرف).

2- جمع البيانات الإحصائية: يتم جمع البيانات الإحصائية بطرق مختلفة، وذلك حسب الهدف من الدراسة وأسلوب التحليل المتبع، ومن بين الطرق المتبعة في جمع البيانات نذكر ما يلي:

أ- الطريقة المباشرة والطريقة غير المباشرة:

– الطريقة المباشرة: يقصد بهذه الطريقة قيام الباحث بجمع المعلومات الإحصائية بنفسه، من مصادرها الأولية، كأن يقوم بطرح الأسئلة مباشرة على الأسر.

– الطريقة غير المباشرة: وتسمى أيضا طريقة البيانات الثانوية، وهي تشمل جميع البيانات والمعلومات الإحصائية المتوفرة من وثائق ومطبوعات ونشرات إحصائية التي تصدرها الهيئات والدواوين المختلفة، وكذلك الهيئات الدولية ومنظماتها المختلفة.

ب- طريقة الحصر الشامل وطريقة العينة:

– طريقة الحصر الشامل: حيث يتم حصر جميع الوحدات الإحصائية المكونة للمجتمع الإحصائي الخاضع للدراسة، ومن مزايا هذا الأسلوب أنه يعطينا صورة كاملة عن المجتمع الإحصائي، يتميز بالدقة المطلوبة، غير أن هذه الطريقة صعبة التنفيذ وتحتاج إلى تكاليف باهظة وجهاز إحصائي كبير ومتخصص.

– طريقة العينة الإحصائية: حيث يتم دراسة جزء من المجتمع الإحصائي فقط، وذلك بأخذ عينة عشوائية من المجتمع ودراسة خواصها واستخلاص المعلومات اللازمة منها، ثم تعميم نتائجها على المجتمع الذي سحبت منه.

3- عرض البيانات الإحصائية: بعد جمع البيانات الإحصائية لا بد من عرضها وتصنيفها بشكل يظهر العلاقة بينها، ويتم عرض البيانات بعدة طرق أهمها: العرض الكتابي، العرض الجدولي والعرض البياني.

4- تحليل البيانات الإحصائية: وتتضمن هذه المرحلة دراسة المعلومات الإحصائية وترتيبها وتحليلها إلى عناصرها الأولية وإظهار العلاقة بينها، ويتم تحليل المعلومات بإجراء الخطوات التالية:

- ترتيب الإحصاءات وتصنيفها، ويمكن أن يكون الترتيب حسب النوع أو الكمية، كتصنيف السكان ما بين أعزب ومتزوج ومطلق وأرمل، كما يمكن أن يكون الترتيب جغرافيا، كأن نوزع السكان في الجزائر حسب الولايات والدوائر والبلديات.
- حساب القيم المركزية لمجموعة البيانات ودراسة التشتت والالتواء فيها.
- دراسة علاقات الارتباط بين عوامل المجتمع الإحصائي.
- استنباط التقديرات أو التنبؤات التي تدل عليها الدراسة.

5- تفسير البيانات الإحصائية: من المعروف أن الدراسات الإحصائية تتخذ أساسا في إعداد السياسات واتخاذ القرارات المتعلقة بالمواضيع الاقتصادية والاجتماعية وغير ذلك، وعليها تبنى اتجاهات الدولة أو الشركات أو المؤسسات العامة والخاصة، من هنا كان لزاما على الإحصائي باعتباره أكثر الناس دراية وخبرة في فهم مضمون الأعداد أن يفسر النتائج المتوصل إليها وأن يوضح بصراحة ما تعنيه.

خامسا: أنواع المتغيرات الإحصائية:

تنقسم المتغيرات الإحصائية إلى قسمين:

1- متغيرات كيفية: هي تلك المتغيرات التي لا يمكن قياسها، والتي تنقسم بدورها إلى قسمين:

أ- متغيرات كيفية قابلة للترتيب: مثل مستوى التأهيل العلمي، ...إلخ.

ب- متغيرات كيفية غير قابلة للترتيب: مثل الجنسية، الجنس، الحالة العائلية، اللون،.....إلخ.

2- متغيرات كمية: هي تلك المتغيرات التي يمكن قياسها، وهي أكثر المتغيرات انتشارا واستعمالا لأن لغة الإحصاء هي لغة الأرقام، والمتغيرات الكمية تنقسم بدورها إلى قسمين:

أ- متغيرات كمية منقطعة: هي تلك المتغيرات التي تأخذ قيما صحيحة لا يمكن تجزئتها، مثل عدد الأطفال في الأسرة الواحدة، عدد قطع الغيار المنتجة....إلخ.

ب- متغيرات كمية مستمرة: هي تلك المتغيرات التي تأخذ كل القيم الممكنة لمجال الدراسة، ونظرا للعدد غير المتناهي لهذه القيم نقسم مجال الدراسة إلى مجالات جزئية تسمى الفئات، مثال الطول، السن، الوزن،....إلخ.

سادسا: أنواع العينات

تنقسم العينات عادة إلى قسمين رئيسين وهما عينات عشوائية وعينات غير عشوائية، وفيما يلي تفصيل لكل قسم منها.

1- العينات العشوائية

هي تلك العينات التي يتم اختيار مفرداتها حسب خطه إحصائية لا يكون فيها للباحث أو لمفردات العينة دخل في اختيار أي مفرده فيها ، حيث يتم الاختيار باستخدام أساليب معينة تلعب الصدفة خلالها الدور الأول في اختيار المفردة ولكن بشرط أن يتحقق لجميع المفردات احتمال ثابت ومحدد للاختيار. والعينات العشوائية إذا ما تم اختيارها بالطريقة العلمية السليمة والمناسبة يمكن أن تكفل درجه عالية من دقة التمثيل للمجتمعات المسحوبة منها لذلك فهي الوسيلة الأساسية في حالة البحوث العلمية الدقيقة .. من أهم أنواع العينات العشوائية مايلي.

أ- العينة العشوائية البسيطة:

ويلجأ إليها الباحث في حالة ما إذا كان مجتمع الدراسة ليس كبيرا ويحمل قدرا من التجانس بين المفردات للصفة أو الصفات موضع الدراسة، والعينة العشوائية البسيطة تستغل فرص متكافئة لمفردات المجتمع للدخول في العينة ولكن المفردات التي تدخل في العينة تكون عن طريق الصدفة البحتة، والاختيار العشوائي يتم يدويا عن طريق بطاقات متماثلة في الحجم واللون أو عن طريق جداول الأعداد العشوائية أو عن طريق الحاسب الآلي، ولكي يتحقق ذلك فإن الأمر يتطلب تحديد مفردات المجتمع تحديدا كاملا ويكون هذا التحديد على شكل قائمة (أو خريطة) تضم كل مفردات المجتمع وهذه القائمة تسمى الإطار ولا يجوز الاختيار العشوائي إلا من المفردات التي يضمها الإطار.

ب- العينة المنتظمة:

إن اختيار هذه العينة يتطلب وجود إطار للمجتمع كما في حالة العينة العشوائية البسيطة بحيث يعطى لكل مفرده من مفردات المجتمع رقماً متسلسلا داخل الإطار ، ثم نختار مفردات العينة من الإطار بحيث يكون الرقم المتسلسل لكل مفردة يبعد بعدا ثابتا منتظما عن رقم المفردة السابقة لها وكذلك رقم المفردة اللاحقة لها. فمثلاً إذا كان لدينا مجتمعاً حجمه **2000** مفرده ونريد اختيار عينه منتظمة حجمها **100** مفرده فإننا نقسم الإطار إلى فترات منتظمة طول كل فترة = $20=\frac{2000}{100}$ مفردة ومن داخل مفردات الفترة الأولى (**1 – 20**) يختار مفرده واحدة عشوائيا ولتكن رقم **14** مثلا وبناء على رقم تلك المفردة يتحدد باقي مفردات العينة المنتظمة فتكون هي المفردات ذات الأرقام **34**، **54**، **....**، **1974**،**1994**.

والعينة المنتظمة كثيرة الاستعمال في التطبيقات العملية لقلة تكاليفها وقلة الأخطاء التي ترتكب في اختيار مفردات العينة فضلاً عن سهولة إجرائها. ولكن أهم عيوب المعاينة المنتظمة هو عدم صلاحيتها إذا ما وجدت علاقة دورية مع ترتيب العناصر في القائمة وكان طول الفترة بين عناصر العينة مساوياً لطول الدورة أو إحدى مضاعفاتها.

ج- العينة العشوائية الطبقية:

ويلجأ إليها الباحث في حالة ما إذا كان مجتمع الدراسة واضحاً به فئات (طبقات) بحيث أن التجانس أو التقارب داخل كل طبقة من طبقات مجتمع الدراسة أكبر من التجانس داخل المجتمع ككل (أي أن التشتت داخل المجتمع ككل أكبر من التشتت داخل كل فئة من فئاته على حده)، في هذه الحالة يجب على الباحث مراعاة أن الطبقة داخل العينة بنفس نسبة وجودها داخل المجتمع (وأحيانا يوضع في الاعتبار عناصر أخرى مثل التشتت داخل الطبقة أو عنصر التكلفة لجمع البيانات عن الطبقة)، بعد أن يتم تحديد عدد المفردات التي يجب سحبها من كل طبقة للدخول في العينة فإن هذه المفردات يتم سحبها عشوائيا من داخل الطبقة ومجموع هذه المفردات تكون العينة الطبقية العشوائية.

د- العينة متعددة المراحل أو العنقودية:

يلجأ إليها الباحث عندما يكون مجتمع الدراسة كبير جداً ومتناثرا على مساحات شاسعة تكلف الكثير من الوقت والجهد في التنقل بينها عند جمع البيانات، أيضا في حالة عدم وجود إطار يضم جميع مفردات المجتمع فيستحيل الاختيار العشوائي مباشر من المجتمع. لهذا يلجأ الباحث إلى أخذ العينة على مراحل متعددة متتالية. في المرحلة الأولى يتم تقسيم المجتمع إلى عدد محدد من وحدات المعاينة الكبيرة الحجم ومنها يختار بعضها عشوائياً ثم يتلو ذلك كمرحلة ثانية تقسيم الوحدات المختارة عشوائياً من المرحلة الأولى إلى وحدات أقل منها في الحجم ثم يختار بعضها عشوائياً.. وهكذا تتابع مراحل التقسيم والاختيار العشوائي ، وعدد هذه المراحل ليس ثابت بل يتوقف على طبيعة مجتمع الدراسة وإمكانيات الباحث،و في المرحلة الأخيرة يصل الباحث إلى وحدات المعاينة التي سيجمع عنها بيانات البحث ويطلق عليها وحدات المعاينة الأولية.

2- العينات غير العشوائية:

هي تلك العينات التي لا تكفل لجميع مفردات المجتمع احتمال ثابت ومحدد للاختيار، وغالبا يتدخل الباحث في عملية الاختيار بصورة أو بأخرى ، ومن أهم أنواع العينات غير العشوائية:

أ- العينة العمدية أو المقصودة:

يلجأ الباحث إلى هذه الطريقة فيما إذا كان مجتمع الدراسة كبير جداً وكانت إمكانياته لا تسمح له إلا بدراسة عينة حجمها صغير جدا بالنسبة لمجتمع الدراسة، في هذه الحالة يتعمد الباحث اختيار مفردات معينة كعينة لمجتمع الدراسة يرى بخبرته السابقة أن هذه العينة يمكن أن تعطي تمثيلاً مقبولاً لمجتمع الدراسة.

مثلا إذا أراد باحث دراسة خصائص اقتصادية أو اجتماعية معينه عن ريف دولة ما ، وكانت إمكانياته المالية والإدارية لا تسمح له بعينة سوى سكان قرية واحدة ، فإنه في هذه الحالة إذا ما تم اختيار القرية عشوائياً من بين آلاف القرى بتلك

الدولة فإن الصدفة قد تأتي بقرية بعيدة في خصائصها (من حيث الظاهرة موضوع الدراسة) عن خصائص معظم قرى تلك الدولة ،كأن تأتي بالصدفة قرية ساحلية معظم سكانها من الصيادين أو قرية قريبة من مشروع صناعي ضخم يستوعب في قواه العاملة معظم سكانها، هذه القرية أو تلك قد يأخذ النمط المعيشي لسكناها طابعاً خاصاً – نابعا عن ظروفها الخاصة – بعيداً عن النمط المعيشي المعتاد لبقية القرى، لذلك فأي منها لا يمكن أن يعطي تمثيلاً مقبولا لريف تلك الدولة. لهذا فإن الباحث وعلى ضوء خبراته السابقة يتعمد اختيار قرية معينة يرى أنها – من وجهة نظره الشخصية– يمكن أن تمثل الريف. وهذه الطريقة غير علميه وغالبا يتم اللجوء إليها في حالة البحوث التمهيدية.

ب– العينة الحصصيه:

وهي نوع خاص من العينات غير العشوائية وتستخدم كثيرا في معاينة الرأي العام (على سبيل المثال عمليات استطلاعية الرأي العام التي يقوم بها معهد جالوب قبل إجراء انتخابات الرئاسة في الولايات المتحدة الأمريكية)، في هذه الطريقة يقسم المجتمع موضوع الدراسة إلى طبقات بالنسبة إلى صفات أو خصائص معينة ويتم العمل على تمثيل كل طبقة منها في العينة بنسبة وجودها في المجتمع الأصلي (وعلى سبيل المثال في حالة دراسة الدخل لمنطقة ما ورؤى أن يكون حجم العينة المطلوبة 100 فرد مثلاً عندما يريد الباحث أن يقوم جامعوا البيانات بالحصول على البيانات من 20 موظفا، 45 من العمال الحرفيين ، 35 من ذوي الأعمال الحرة ، وتترك الحرية لجامعي البيانات في اختيار الأفراد المطلوبة فيها حدود المواصفات الموضوعة لكل طبقة من الطبقات المذكورة، فبالرغم أن هذه الطريقة في ظاهرها مماثلة للعينة الطبقية العشوائية، إلا أنه في الحالة الأخيرة (العينة الطبقية العشوائية) يكون اختيار المفردات عشوائياً من داخل كل طبقة ولا يترك لجامع البيانات حرية اختيار المفردات من كل طبقة والذي قد يترتب عليه تميزا كبيرا، عموما يلجأ الباحث إلى العينة الحصصيه إذا كان من المرغوب فيها اظهار النتائج في وقت قصير مع التغاضي عن توافر درجة دقة عالية بتلك النتائج.

سابعا: أخطاء البيانات الإحصائية

تتعرض البيانات الإحصائية التي يتم جمعها إلى نوعين من الأخطاء:

1– خطأ التميز

وهو ينتج عن مصادر متعددة، منها أخطاء في تصميم البحث أو التجربة أو أخطاء فنيه أثناء جمع البيانات أو خلال العمليات الحسابية التي تتم على البيانات المتجمعة. أخطاء التميز تزداد بازدياد الفروق بين الإمكانيات (المادية والفنية) اللازم توافرها لضمان أقصى درجة دقة ممكنه وبين الإمكانيات الفعلية المتاحة للباحث.

أخطاء التميز قد توجد في البيانات التي يتم جمعها بأسلوب الحصر الشامل وقد توجد أيضاً في البيانات التي يتم جمعها بأسلوب المعاينة، ولكنها إن وجدت فهي غالباً أكبر في الحالة الأولى (الحصر الشامل) مما هي عليه في الحالة الثانية (المعاينة) باعتبار أن حجم العمل في تلك الحالة يكون أقل وبالتالي قد يسهل توفير الإمكانيات اللازمة وتجنب الأخطاء الفنية.

2- خطأ المعاينة العشوائية أو خطأ الصدفة

وهو الخطأ الناتج عن فروق الصدفة بين مفردات المجتمع التي دخلت العينة وبين تلك المفردات التي لم تشأ الصدفة أن تدخل العينة.. وخطأ الصدفة يمكن تقليل قيمته إذا ما تم اختيار العينة بالطريقة المناسبة وإذا ما كان حجم العينة مناسباً لحجم المجتمع وخصائصه.

تمارين محلولة

التمرين الأول:

1- ما المقصود بالمجتمع الاحصائي، العينة، المعاينة، الإحصاء الاستدلالي؟

2- ما هي الخطوات الأساسية لتصميم العينة؟

3- ما هي مصادر الأخطاء؟

4- ما هي أنواع المعاينة وشروطها؟

التمرين الثاني:

بغرض المساهمة في التخفيف من معاناة أطفال القمر، قامت مديرة مدرسة "**إلرام زياني**" الخاصة بحملة لجمع السدادات البلاستيكية وبيعها لإعادة تدويرها وهذا بكافة بلديات ولاية ميلة البالغ عددها 32 بلدية. وبعد خمسة أشهر من انطلاق الحملة تريد السيدة زياني أخذ عينة منتظمة من 8 بلديات وذلك للوقوف على وزن السدادات المجمعة بها، إذا علمت أن:

b=3:

المطلوب: حدد عناصر هذه العينة المنتظمة موضحا كل الخطوات اللازمة لذلك بالتفصيل؟

التمرين الثالث:

يتكون مجتمع من أربع فئات اجتماعية – مهنية، حجمه $N = 10000$، وحجم كل فئة هو كالتالي:

$$N_1 = 2000\ ,\ N_2 = 3600\ ,N_3 = 3200\ ,\ N_4 = 1200$$

نريد سحب عينة حجمها $n = 180$:

1- ما هي طبيعة المجتمع المدروس؟ ما اسم هذه العينة؟

2- حدد عدد الوحدات الإحصائية التي يمكن سحبها من كل فئة؟

التمرين الرابع:

إذا أردنا أن نأخذ عينة منتظمة من طلاب جامعة سطيف الذين يستعملون النقل الجامعي من أجل التعرف على أسباب استعمال هذا النوع للنقل ومدى رضا الطلبة عن وسائل النقل الممنوحة لهم، إذا كان حجم المجتمع بسطيف هو 40.000 طالب، و نرغب في اختيار عينة حجمها 100 طالب

المطلوب: كيف يتم ذلك ؟

التمرين الخامس:

3 – لنفرض الآن أن عدد سكان القرى الخمس معلوما ويساوي على الترتيب :

600 625 550 500 700

المطلوب: أحسب عدد العينات الممكن سحبها بدوت إعادة والمؤلفة من 3 قرى.

التمرين السادس:

بفرض أن أحد المجتمعات يتكون من 4 أفراد حسب العمر { 16 , 18 , 32 ,54}، عند سحب عنصرين من المجتمع.

المطلوب: أوجد العينات الطبقية الممثلة لذلك.

الحلول

حل التمرين الأول:

1-المفاهيم الإحصائية المتعلقة بنظرية العينات: المجتمع، العينة والمعاينة، الإحصاء الاستدلالي:

تعتمد الدراسات الإحصائية أساسا على جمع البيانات من جميع أفراد المجتمع دون استثناء عن طريق الدراسة الشاملة أين يتناول الباحث فيها جميع عناصر وحدات الموضوع المدروس بدون استثناء، و ذلك بهدف الحصول على معلومات شاملة من أجل التعرف على خصائص المجتمع و كيفية توزيع هذه المفردات و حساب معالمه.

يقصد **بالمجتمع** في الدراسات الإحصائية كل الوحدات التي تتصف بواحدة أو أكثر من الصفات المميزة والمشتركة {مجتمع من المؤسسات، مجتمع من الطلبة...}، إلاّ أنه قد يكون من المستحيل أو من غير المعقول استعمال طريقة المسح الشامل لارتفاع التكلفة أو الحاجة للجهد أو الزمن أو لطبيعة المجتمع المدروس.، لذا فإنه يتم اللجوء إلى دراسة جزء من المجتمع الإحصائي يسمّى **العينة**، و عملية اختيار هذا الجزء من المجتمع من أجل تعميم نتائجه على مجتمع الدراسة يسمى **المعاينة**، تسمى بالمعاينة اعتمادا على **نظرية العينات** و التي تعرف بأنها مجموعة الطرق الرياضية والتنظيمية التي تساعدنا على إجراء البحوث الإحصائية غير الشاملة وذلك بهدف إيجاد الخصائص العامة لهذا الموضوع عن طريق تعميم النتائج المستخلصة من هذه البحوث، أما عملية التعميم من العينة للمجتمع فيسمى **بالإحصاء الاستدلالي** و الذي يعتبر محور علم الإحصاء بمفهومه الحديث، و له مجالان هما التقدير و اختبار الفروض.

2- الخطوات الأساسية لتصميم العينة:

قبل القيام بإجراء أية معاينة علينا مسبقا أن نتبع الخطوات الأساسية العامة المستخدمة في تصميم العينات و هي:

- تحديد المشكلة والهدف: تحديد المشكلة المراد دراستها ومعرفة إذا كان لها طابعا إحصائيا أم لا ومن ثم تحديد هدف الدراسة

- تعريف وتحديد المجتمع المراد معاينته: تعريف المجتمع المراد دراسته تعريفا دقيقا مع تحديد عناصره وتسمية وحدة المعاينة التي سيتناولها البحث، كما يجب تحديد الفترة الزمنية المراد فيها إجراء هده الدراسة. والتأكد من المجتمع إذا كان خاضعا لشروط المعاينة خاصة التجانس.

- تحديد المعلومات المطلوبة: تحديد المعلومات اللازمة لإجراء الدراسة لاستخراج النتائج الهادفة اعتمادا على جميع المصادر التي تتضمن هذه المعلومات للاستفادة منها في تحديد بعض المؤشرات الإحصائية وبالإضافة إلى ذلك على الباحث أن يعد الاستمارات الإحصائية المناسبة المتضمنة للمؤشرات الإحصائية الضرورية لهذه الدراسة.

– **تحديد طريقة جمع البيانات:** يجب على الباحث أن يحدد الطريقة الأنجع التي تستخدم لجمع المعلومات ومن أهمها:

أ– القياس المباشر: حيث يقوم الباحث بإجراء القياسات اللازمة لتحديد الخاصة المراد دراستها في وحدات العينة.

ب– الاتصال المباشر: كالمقابلة الشخصية وتوجيه أسئلة مباشرة للوحدات المختارة في العينة.

ج– الاتصال غير المباشر: مع وحدات العينة بواسطة توجيه الأسئلة عن الهاتف الفاكس البريد الإلكتروني الخ.

***ملاحظة:** يمكن استخدام جملة هذه الطرق مع بعض ولكن طريقتي القياس والاتصال المباشر هما أضمن الطرق من حيث الحصول على معلومات مقبولة، مع العلم أنها أكثر تكاليفها من طريقة الاتصال غير المباشر.

– **تحديد الإطار:** تحديد العينة وتكاليفها يساعدا على حصر وتغطية جميع وحدات المجتمع وبالتالي اختبار العينة المرغوبة.

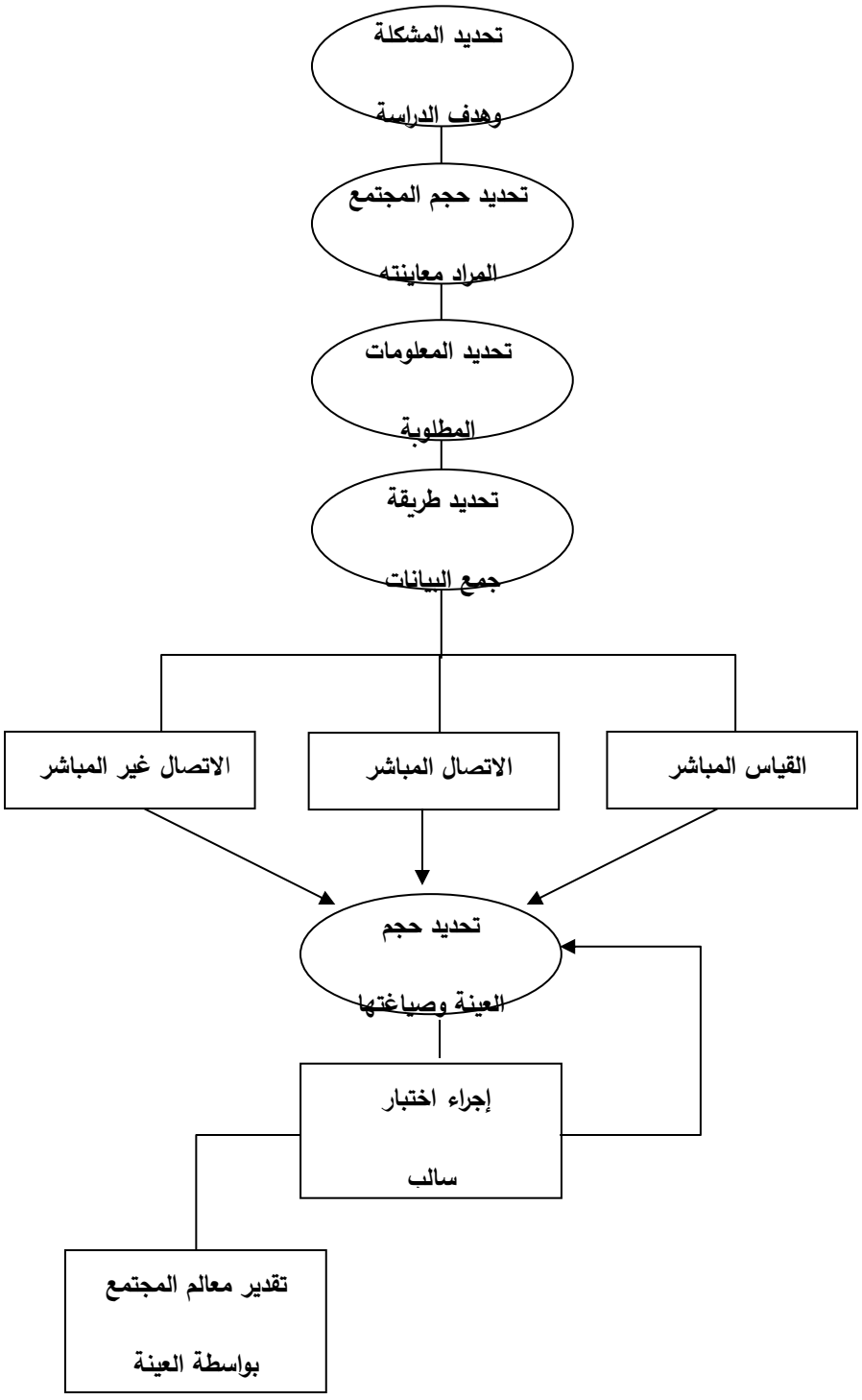
– **تحديد حجم العينة وتكاليفها:** قبل إجراء عمليات السحب يجب تحديد حجم العينة اللازم للحصول على الدقة المطلوبة و كذا تكاليف هذه المعاينة. ويجرى تحديد حجم العينة بناء على الدقة المطلوبة وعلى تباين المجتمع الذي يحدد بالرجوع إلى الدراسات السابقة أو إجراء اختبار سابق على ذلك المجتمع.

– **إجراء اختبار مسبق:** يفضل إجراء اختبار أولي على بعض النواحي التي قد تكون غامضة لإدخالها في موضوع الدراسة وتعديل الاستمارات الإحصائية عند الضرورة ويفيد هذا الاختبار المسبق في تقييم القيمة العملية للاستمارة.

– **تلخيص وتحليل المعلومات:** إجراء مراجعة كاملة لجميع المعلومات التي حصل عليها وتصحيح الأخطاء ومن ثم تبويب هذه البيانات ومن ثم دراستها وتحليلها.

– **تقدير معالم المجتمع بواسطة العينة:** الهدف الأساسي من إجراء بحوث العينات هو تقدير المعالم الرئيسية للمجتمع بواسطة هذه العينة. علما بأن التقديرات التي نحصل عليها هي قيم تقريبية لمعالم المجتمع الحقيقية التي نبحث عنها.

ويمكن تلخيص الخطوات الأساسية لتصميم العينة في الشكل التالي:



***ملاحظة:** إن تقدير معالم المجتمع يعتبر مشكلة من أعقد مشاكل بحوث العينات نظرا لأن العديد من العوامل تؤثر على صحة هذه المعلومات كتجانس المجتمع و حجم العينة المسحوبة و طريقة سحبها وينجم عن هذا بعض الخطأ في تقدير هذه المعالم.

3– مصادر الأخطاء: هناك نوعان من الأخطاء:

أ– أخطاء المعاينة العشوائية (الناتج من جزئية المعلومات):

تلعب الصدفة دورا كبيرا عند اختيار مفردات العينة ومن ثم يكون هناك اختلاف بين ما نحصل عليه من نتائج العينة و بين القيم الحقيقية للمجتمع وهذا الاختلاف هو ما يطلق عليه أخطاء المعاينة العشوائية ويرجع إلى:

– **حجم العينة:** هناك علاقة بين حجم العينة و أخطاء المعاينة العشوائية.

– **تباين المجتمع:** تزداد أخطاء المعاينة كلما كان تباين المجتمع كبيرا لذا يكون من الضروري اختيار أسلوب المعاينة الذي يتناسب مع المجتمع.

– **طريقة اختيار العينة:** يجب اختيار أسلوب المعاينة الذي يساعد على التحكم في مقدار أخطاء العينة.

ب– أخطاء التحيز (الناتج من الطريقة المعتمدة في جمع البيانات):

قد يحدث هذا النوع من الأخطاء حتى عند دراسة جميع مفردات المجتمع، حيث أنه قد يرجع:

– التحيز الذي يحدث عند إجابة الأفراد على الأسئلة؛

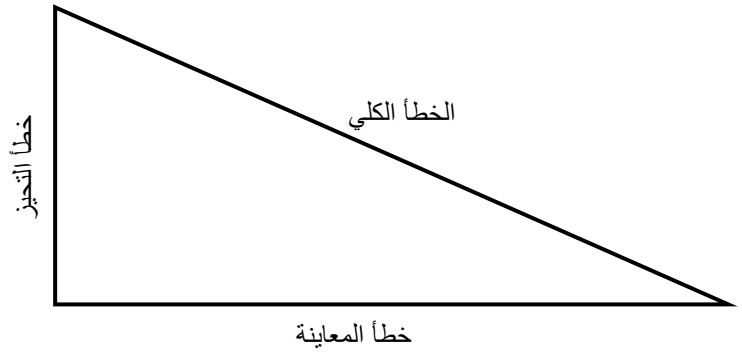
– التحيز الذي يحدث من جامعي البيانات؛

– التحيز الذي يحدث بسبب صياغة أسئلة البحث؛

– الأخطاء التي تحدث عن تبويب البيانات أو عند تحليلها.

يمكن العمل على تقليل أخطاء التحيز ببذل الجهد اللازم في كافة مراحل الدراسة وفي كافة خطواتها والعمل على مراجعة وتقييم كل خطوة يتم إنجازها حتى يمكن اكتشاف التحيز بصورة سريعة.

ويمكن تلخيص مصادر الأخطاء في الشكل التالي:



4- أنواع المعاينة و شروطها: للمعاينة نوعان هما:

أ- المعاينة العمدية:

المعاينة العمدية لا تعتمد على مبادئ الاحتمالات، حيث يتم اختيار الوحدات المكونة للعينة بطريقة شخصية على اعتبار أنها تمثل المجتمع المدروس أفضل تمثيل.

ب- المعاينة العشوائية:

هي الأكثر استعمالا نظرا لموضوعيتها و دقة نتائجها و تعتمد هذه المعاينة على نظرية الاحتمالات سواء في التقنيات المستخدمة في اختيار مفردات العينة أو في تعميم النتائج المتحصل عليها من هذه العينات على المجتمعات التي أخذت منها أو في تحديد درجة الثقة بالنتائج و حساب الأخطاء، عند استعمال طريقة المعاينة العشوائية يجب مراعاة ما يلي:

- أن يكون مجتمع الدراسة معرّف و محدّد؛
- أن تكون وحدات المجتمع مستقلة عن بعضها البعض؛
- أن يكون اختيار عناصر العينة من المجتمع الكلي بدون تحيز.

للمعاينة العشوائية عدة أنواع منها:

*** المعاينة العشوائية البسيطة:**

تعد هذه الطريقة من أكثر الطرق المستخدمة لاختيار العينات، حيث تكون لكل مفردة من مفردات المجتمع نفس الفرصة أو الاحتمال في أن تكون ضمن العينة و يمكن تحقيق ذلك بطريقتين هما:

- السحب بالإرجاع (ESAR): وتسمى في هذه الحالة بالمعاينة العشوائية البسيطة مع الإعادة، حيث يمكن للعنصر الواحد أن يظهر في العينة أكثر من مرة، و بذلك نحصل على عينة مستقلة؛

- السحب بدون إرجاع (ESSR): وتسمى في هذه الحالة بالمعاينة العشوائية البسيطة بدون إعادة، إذ لا يمكن للعنصر الواحد أن يظهر في العينة أكثر من مرة و نحصل بذلك على عينة غير مستقلة.

*** المعاينة الطبقية:**

يمكن استعمال المعاينة الطبقية كبديل لطريقة المعاينة العشوائية لزيادة الدقة في التقديرات في حالة عدم تجانس المجتمع الأصلي للدراسة حيث يتم تقسيم المجتمع إلى طبقات حسب خصائص معينة لها علاقة بموضوع الدراسة، و بالتالي يتم الحصول على طبقات متجانسة و غير متقاطعة مع بعضها البعض (يشترط أن يكون عدد الطبقات صغير لتفادي الحسابات المتعددة و الطويلة من جهة و التوصل إلى درجة دقة معقولة من جهة أخرى)، ثم يتم إجراء عملية المعاينة على كل طبقة و من ثم حساب المؤشرات الإحصائية لكل طبقة، و أخيرا تعميم النتائج على كامل المجتمع. من أهم خصائص هذه المعاينة نذكر:

- الحصول على درجة دقة جيدة للمؤشرات الإحصائية؛
- الإلمام بالمزيد من الصفات حول الميزات الأساسية لمختلف هذه الطبقات؛

– التخلص من عدم التجانس في المجتمع.

*** المعاينة المنتظمة:**

تعتبر المعاينة المنتظمة أحد البدائل المستخدمة في اختيار مفردات العينة و هي ليست عشوائية بشكل تام لأن فيها نوع من الانتظام في تشكيل العينة و تتميز بالسهولة و البساطة حيث تتكون العينة من مجموعة من الوحدات يشكل أعدادها متتالية حسابية، نقوم بطريقة عشوائية باختيار العنصر الأول للعينة و ليكن b و الذي يكون محصورا بين 1 وr حيث ($r = \frac{N \text{حجم المجتمع}}{n \text{ حجم العينة}}$) و بذلك يكون العنصر الثاني هو b+r و هكذا إلى غاية آخر عنصرb+(n−1)r. يتم استخدام هذه الطريقة في حالة تجانس مجتمع الدراسة الأصلي.

ملاحظات هامة:

– المجتمع الإحصائي يكون محدودا إذا أمكن تحديد العدد الكلي لمفرداته، و يكون غير محدود إذا لم نتمكن من حصر العدد الكلي لمفرداته، و عمليا يمكن اعتبار المعاينة من مجتمع محدود و لكنه كبير مثل المعاينة من مجتمع غير محدود.

– في المجتمع المحدود إذا كانت المعاينة مع الإرجاع فيمكن اعتباره من الناحية النظرية مجتمع غير محدود.

حل التمرين الثاني:

لتشكيل عينة منتظمة من 8 بلديات من مجتمع حجمه 32 بلدية نتبع الخطوات التالية:

1.نحسب الأساس r حيث:

$$r = \frac{N}{n} = \frac{32}{8} = 4$$

2.نقسم المجتمع إلى مجموعات متساوية في كل منها 4 عناصر (بلديات) ثم نرقم عناصر المجموعة الاولى من 1 إلى 4 والمجموعة الثانية من 5 إلى 8 وهكذا حتى المجموعة الأخيرة من 29 إلى 32.

3. نختار عنصر b بطريقة عشوائية من المجموعة الأولى وهنا تم تحديده بـ 3 أي أن **العنصر الأول** في هذه العينة هو البلدية التي تحمل الرقم 3.

4. بناءا على العنصر b يتحدد باقي عناصر العينة تلقائيا حيث تمثل أرقام هذه العناصر حدود متتالية حسابية حدها الأول b وأساسها r وذلك كما يلي:

– **العنصر الثاني** هو البلدية التي تحمل الرقم b + r أي: $\mathbf{b + r = 3 + 4 = 7}$ أي البلدية التي تحمل الرقم 7.

– **العنصر الثالث** هو البلدية التي تحمل الرقم b + 2r أي: $\mathbf{b + 2r = 3 + (2 \times 4) = 11}$ أي البلدية التي تحمل الرقم 11.

– **العنصر الرابع** هو البلدية التي تحمل الرقم b + 3r أي: $\mathbf{b + 3r = 3 + (3 \times 4) = 15}$ أي البلدية التي تحمل الرقم 15.

– **العنصر الخامس** هو البلدية التي تحمل الرقم b + 4r أي: $\mathbf{b + 4r = 3 + (4 \times 4) = 19}$ أي البلدية التي تحمل الرقم 19.

– **العنصر السادس** هو البلدية التي تحمل الرقم b + 5r أي: $\mathbf{b + 5r = 3 + (5 \times 4) = 23}$ أي البلدية التي تحمل الرقم 23.

– **العنصر السابع** هو البلدية التي تحمل الرقم b + 6r أي: $\mathbf{b + 6r = 3 + (6 \times 4) = 27}$ أي البلدية التي تحمل الرقم 27.

– **العنصر الثامن** هو البلدية التي تحمل الرقم b + 7r أي: $\mathbf{b + 7r = 3 + (7 \times 4) = 31}$ أي البلدية التي تحمل الرقم 31.

وبذلك فإن عناصر هذه العينة المنتظمة هي البلديات التي تحمل الأرقام التالية: {3; 7; 11; 15; 19; 23; 27; 31}

حل التمرين الثالث:

1- طبيعة المجتمع المدروس: مجتمع طبقي أي غير متجانس لأنه يتكون من فئات اجتماعية متباينة.

– **نوع العينة:** العينة الطبقية.

2- عدد الوحدات الإحصائية التي يمكن سحبها من كل فئة: لكي تكون العينة ممثلة للمجتمع (تمثل مختلف الفئات) لا بد من توزيع عدد أفرادها (حجم العينة) حسب نسبة كل فئة في المجتمع (يسمى نظام الحصص) بتطبيق القاعدة الثلاثية:

$$N \rightarrow n$$

$$N_i \rightarrow n_i \quad \Rightarrow \quad n_i = \frac{N_i}{N} \times n$$

$$n_1 = \frac{N_1}{N} \times n = \frac{2000}{10000} \times 180 = 36$$

$$n_2 = \frac{N_2}{N} \times n = \frac{3600}{10000} \times 180 = 64{,}8 \approx 65$$

$$n_3 = \frac{N_3}{N} \times n = \frac{3200}{10000} \times 180 = 57{,}6 \approx 58$$

$$n_4 = \frac{N_4}{N} \times n = \frac{1200}{10000} \times 180 = 21{,}6 \approx 21$$

حل التمرين الرابع:

نحسب $r = \frac{N}{n} = \frac{40.000}{100} = 400$

فنقسم المجتمع N إلى مجموعات متساوية حيث كل منها يساوي 400 طالب. ترقم المجموعة الأولى من 1 إلى 400، أما المجموعة الثانية من 401 إلى 800، وهكذا حتى المجموعة الأخيرة.

ولنفرض أن الطالب الذي تم عليه الاختيار بطريقة عشوائية يحمل الرقم 250 أي (b=250). بناء عليه يتم اختيار جميع الطلبة الذين يشكلون العينة المنتظمة تلقائيا:

الطالب الأول: $b = 250$

الطالب الثاني: $b + r = 250 + 400 = 650$

الطالب الثالث: $b + 2r = 250 + 2(400) = 1050$

وتتم العملية حتى الطالب الأخير

$b+(n-1)r = 250+(100- 1) 400$

$250+ 99 \times 400$

$=250+ 39600$

$= 39850$

وأخيرا تكون وحدات العينة على النحو التالي:

{ 250, 650, 1050 , 1450 ,1850..... 39850 }

حل التمرين الخامس:

عدد العينات الممكن سحبها بدون إعادة والمؤلفة من 3 قرى:

$$\subset_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

i	x_1 x_2 x_3
1	700 500 550
2	700 500 625
3	700 500 600
4	700 550 625
5	700 550 600
6	700 625 600
7	500 550 625
8	500 550 600

9	500 625 600
10	550 625 600

حل التمرين السادس:

تقسيم المجتمع إلى طبقتين:

الطبقة الأولى : N_1

54	**32**

الطبقة الثانية : N_2

18	**16**

العينات الممكنة هي: $\Omega: \{(16,32)(16,54)(18,32)(18,54)\}$

الفصل الثاني:

التوزيعات الاحتمالية المتصلة

تمهيد:

في كثير من النواحي التطبيقية، تتبع بعض الظواهر قوانين احتمالية خاصة، وفي هذا الصدد فلقد قام علماء الإحصاء بإشتقاق بعض التوزيعات الاحتمالية التي تصلح للتعبير عن الكثير من هذه الظواهر الإحصائية، وذلك تحت شروط معينة، وبذلك يسهل دراسة سلوك هذه الظاهرة واتخاذ القرار بشأنها أو التنبؤ بسلوكها المستقبلي، وهذه التوزيع منها ما هو متقطع مثل توزيع برنولي، توزيع ثنائي الحدين، توزيع فوق الهندسي وتوزيع بواسون ، ومنها ما هو متصل، فالتوزيعات الاحتمالية المتصلة هي القوانين الاحتمالية المتعلقة بالمتغيرات العشوائية المتصلة، حيث تستخدم بكثرة في الإحصاء الاستدلالي مثل: التوزيع الطبيعي، توزيع كاي تربيع، توزيع ستيودنت، توزيع فيشر..الخ.

أولا: التوزيع الطبيعي: Normal Distribution

1- تعريف التوزيع الطبيعي:

لقد كان أول من اكتشف هذا القانون العالم دي موافر De Moiver عام 1733 ومن بعده العالم Gauss عام 1809 ويعرف هذا القانون أيضا باسمه أي توزيع غوس Gauss Distribution ، فيعتبر التوزيع الطبيعي أهم هذه القوانين، وذلك لأن أغلب الظواهر تتبع القانون الطبيعي، حيث أنه يحتل موضع الصدارة في الاحتمالات والإحصاء لأنه أكثر استخداما في النواحي التطبيقية مثل :الوزن، الطول، الدخل،...الخ،كما نجده يستخدم في مجال الاستدلال الإحصائي الشامل كتوزيعات المعاينة والتقدير، واختبار الفرضيات، بالإضافة إلى أن معظم القوانين الاحتمالية الأخرى يمكن تقريبها إلى هذا القانون عندما تتوفر شروط معينة، وعليه نعبر عن ذلك بالصيغة التالية: $X \rightsquigarrow N(\mu;\sigma)$.

2- دالة الكثافة الاحتمالية للقانون الطبيعي:

إن دالة الكثافة الاحتمالية لمتغير عشوائي يتبع القانون الطبيعي تعرف بالعلاقة الرياضية التالية:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} \quad ; x \in \mathbb{R} ; \mu \in \mathbb{R} ; \sigma \in \mathbb{R}^+$$

حيث:

$\pi = \frac{22}{7} = ... 3,142857$.

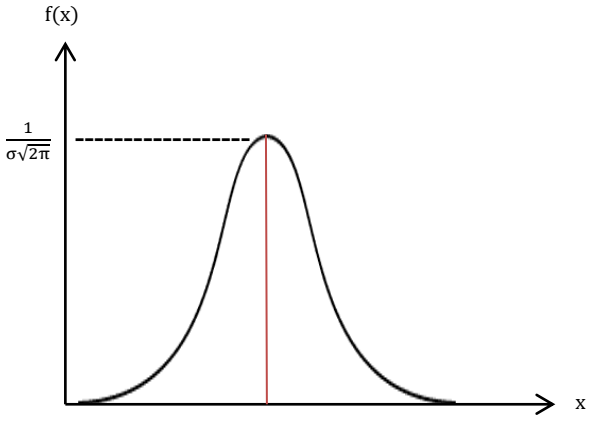
μ :يمثل المتوسط الحسابي.

σ :يمثل الانحراف المعياري.

e:يمثل أساس نظام اللوغاريتم الطبيعي، ويساوي ....2,71828.

3- التمثيل البياني للتوزيع الاحتمالي للقانون الطبيعي:

التمثيل البياني للقانون الطبيعي يكون متماثل (متناظر) ويأخذ شكل جرس، ويمكن توضيح ذلك كالآتي:



$$Me = \mu = Mo$$

وعليه يتبين لنا من خلال هذا المنحنى يتميز بعدة خصائص لعل أهمها:

– التوزيع المتماثل هو أن قيمة المنوال Mo تكون مقابلة لذروة المنحنى، وتكون نفسها تمثل قيمة المتوسط الحسابي μ والوسيط Me، أي أن قيمة المتوسط الحسابي هي التي تكون مكررة أكثر من باقي قيم المتغير العشوائي.

– إن المساحة الكلية المحصورة تحت المنحنى الطبيعي تساوي 100%، أي:

$$F(X) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = 1$$

– عند إسقاط خطين على بعد ثلثي انحراف معياري إلى يمين ويسار متوسط التوزيع فإن المساحة التي يحصرها هذين الخطين تمثل 50%، في حين عند إسقاط خطين على بعد انحراف معياري واحد إلى يمين ويسار متوسط التوزيع فإن المساحة التي يحصرها هذين الخطين تمثل 68,26% تقريبا من المساحة الكلية تحت المنحنى، كذلك نجد أن المساحة التي يحصرها الخطان عند 2 انحراف معياري على جانبي متوسط التوزيع تمثل 95,44% تقريبا من المساحة الكلية تحت المنحنى، أما المساحة التي يحصرها الخطان عند 3 انحراف معياري على جانبي متوسط التوزيع تمثل 99,72% تقريبا من المساحة الكلية تحت المنحنى ، أي أن:

$$P(\mu - \frac{2}{3}\sigma(X) < X < \mu + \frac{2}{3}\sigma(X)) = 0,5$$
$$P(\mu - \sigma(X) < X < \mu + \sigma(X)) = 0,6826$$
$$P(\mu - 2\sigma(X) < X < \mu + 2\sigma(X)) = 0,9544$$
$$P(\mu - 3\sigma(X) < X < \mu + 3\sigma(X)) = 0,9972$$

4- الخواص العددية للقانون الطبيعي:

تجدر الإشارة أن التوزيع الطبيعي يعتمد على معلمتين هما المتوسط الحسابي μ والانحراف المعياري σ، وعليه تتمثل الخواص العددية لهذا التوزيع في:

*** الأمل الرياضي:**

إذا كان: $X \rightsquigarrow N(\mu;\sigma)$، فإن:

$$E(X) = \mu$$

*** التباين والانحراف المعياري:**

إذا كان: $X \rightsquigarrow N(\mu;\sigma)$، فإن:

$$V(X) = \sigma(X)^2$$

إذن:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

كما تجدر الإشارة أن لما يكون X متغير عشوائي يتبع قانون طبيعي، فإن احتمال قيمة معينة يساوي صفر كما رأيناها سابقا أي:$P(X = a) = 0$،و عند حساب الاحتمال في مجال معين، فإنه لا يهم أن يكون المجال مغلق أو مفتوح من أحد الطرفين أو كلاهما، لأن النتيجة ستكون نفسها أي:

$$P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b)$$

ثانيا: التوزيع الطبيعي المعياري Normal curve:

1- تعريف التوزيع الطبيعي المعياري:

يعتبر هذا التوزيع كحالة خاصة بالنسبة للقانون الطبيعي العام، فنظرا لصعوبة حساب التكامل من أجل إيجاد الاحتمال في حالة القانون الطبيعي، فإنه يتم تحويل القانون الطبيعي إلى القانون الطبيعي المعياري (القياسي،النمطي) ، حيث مهما كان المتغير العشوائي الذي يتبع القانون الطبيعي، فإنه يتم تحويله إلى متغير عشوائي آخر نسميهZ ، يتبع القانون الطبيعي المعياري، وتتم عملية التحويل من خلال الصيغة التالية:

$$Z = (\frac{x-\mu}{\sigma})$$

حيث إذا كان عندنا $X \rightsquigarrow N(\mu;\sigma)$ فإنه يصبح لدينا: $Z \rightsquigarrow N(0;1)$.

2- دالة الكثافة الاحتمالية للقانون الطبيعي المعياري:

إن دالة الكثافة الاحتمالية لمتغير عشوائي يتبع القانون الطبيعي المعياري تعرف بالعلاقة الرياضية التالية:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2} \quad ; \quad z \in]-\infty, +\infty[$$

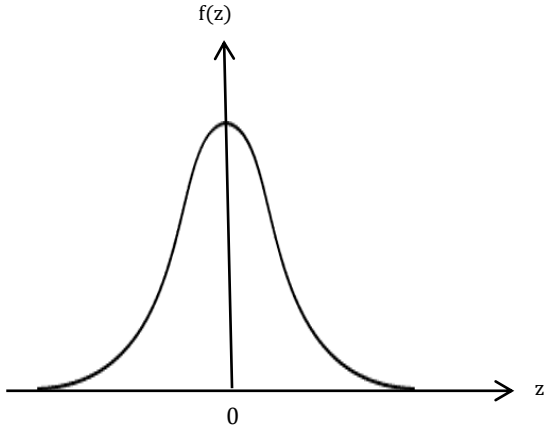
حيث:

$\pi = \frac{22}{7} = \ldots.3,142857$.

e:يمثل أساس نظام اللوغاريتم الطبيعي، ويساوي ....2,71828.

3- التمثيل البياني للتوزيع الاحتمالي للقانون الطبيعي المعياري:

التمثيل البياني للقانون الطبيعي المعياري يكون متماثل(متناظر) ويأخذ شكل جرس، ويمكن توضيح ذلك كالآتي:



وعليه يتبين لنا من خلال هذا المنحنى يتميز بعدة خصائص لعل أهمها:

- التوزيع متناظر حول نقطة الصفر أي: $P(-\infty < Z < 0) = P(0 < Z < +\infty) = 0,5$

- إن المساحة الكلية المحصورة تحت المنحنى الطبيعي المعياري تساوي 100% أي:

$$F(Z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} f(z)dx = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 1$$

4- الخواص العددية للقانون الطبيعي المعياري:

تجدر الإشارة أن التوزيع الطبيعي المعياري يعتمد على معلمتين هما المتوسط الحسابي μ والانحراف المعياري σ، وعليه تتمثل الخواص العددية لهذا التوزيع في:

*** الأمل الرياضي:**

إذا كان: $Z \backsim N(0;1)$، فإن:

$$E(Z) = 0$$

*** التباين والانحراف المعياري:**

إذا كان: $Z \backsim N(0;1)$، فإن:

$$V(Z) = 1$$

إذن:

$$\sigma(Z) = \sqrt{V(Z)} = 1$$

ملاحظة:

القانون الطبيعي المعياري له جدول خاص ، حيث يسهل حساب الاحتمالات بصيغة معينة فقط: $P(Z \leq z) = F(Z)$ خاصة إذا كانت $z \geq 0$ ، ومن خلال استخدام خاصية التناظر للقانون الطبيعي المعياري، يمكن حساب مختلف الاحتمالات، حيث يمكن توضيح ذلك من خلال الصيغ الآتية:

$\mathbf{P(Z > +z) = 1 - P(Z < +z) = 1 - F(Z)}$
$\mathbf{P(Z < -z) = P(Z > +z) = 1 - P(Z < +z) = 1 - F(Z)}$
$\mathbf{P(+z_1 < Z < +z_2) = P(Z < +z_2) - P(Z < +z_1) = F(Z_2) - F(Z_1)}$
$\mathbf{P(Z < 0)} = F(0) = 0{,}5$
$\mathbf{P(Z > 0)} = 1 - P(Z < 0) = 1 - F(0) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$
$\mathbf{P(Z < -\infty)} = F(-\infty) = 0$
$\mathbf{P(Z < +\infty)} = F(+\infty) = 1$
$\mathbf{P(Z > -\infty)} = 1 - P(Z < -\infty) = 1 - F(-\infty) = 1 - 0 = 1$
$\mathbf{P(Z > +\infty)} = 1 - P(Z < +\infty) = 1 - F(+\infty) = 1 - 1 = 0$
$\mathbf{P(Z > -z)} = 1 - P(Z < -z) = 1 - [1 - P(Z < +z)] = P(Z < +z) = F(Z)$
$\mathbf{P(-z_2 < Z < -z_1)} = P(Z < -z_1) - P(Z < -z_2)$
$= [1 - P(Z < +z_1)] - [1 - P(Z < +z_2)]$
$= -P(Z < +z_1) - P(Z < +z_2)$
$= P(Z < +z_2) - P(Z < +z_1) = F(Z_2) - F(Z_1)$
$\mathbf{P(-z_1 < Z < +z_2)} = P(Z < +z_2) - P(Z < -z_1)$
$= P(Z < +z_2) - [1 - P(Z < +z_1)]$
$= P(Z < +z_2) + P(Z < +z_1) - 1$
$= F(Z_2) + F(Z_1) - 1$
$\mathbf{P(-z < Z < 0)} = P(Z < 0) - P(Z < -z)$
$= P(Z < 0) - [1 - P(Z < +z)] = F(0) - 1 + F(Z)$
$= 0{,}5 - 1 + F(Z)$
$= F(Z) - 0{,}5$
$\mathbf{P(0 < Z < +z)} = P(Z < +z) - P(Z < 0) = F(Z) - F(0) = F(Z) - 0.5$
$\mathbf{P(-z < Z < +z)} = P(Z < +z) - P(Z < -z)$
$= P(Z < +z) - [1 - P(Z < +z)]$
$= P(Z < +z) + P(Z < +z) - 1$
$= 2.F(Z) - 1$

***طريقة استخدام الجدول الطبيعي المعياري:** نوضح الطريقة من خلال المثال التالي:

مثال: ليكن لدينا X متغير عشوائي معرف كما يلي: $X \rightsquigarrow N(3{,}6; 0{,}6)$

- أحسب $P(X \leq 4)$ ؟

الحل:

لدينا: $P(X \leq 4) \rightarrow P\left(Z \leq \frac{4-3{,}6}{0{,}6}\right) = P(Z \leq 0{,}67) = F(0{,}67) =$

***كيفية قراءة $\mathbf{F(0,67)}$ من الجدول الطبيعي المعياري:**

فمثلا عندما نريد حساب $P(Z \leq 0{,}67)$ نقوم بتجزئة هذا العدد $(0{,}67)$ إلى قيمتين، حيث لدينا العمود الأول من جدول الطبيعي المعياري يحتوي على الأرقام من 0,0 إلى 2,9 وهو يمثل القيم المطلوب حساب احتمالها برقم واحد بعد الفاصلة في مثالنا هو: 0,6.

بينما يحتوي السطر الأول من جدول الطبيعي المعياري على الأعداد من 0,00 إلى 0,09 وهي تمثل الرقم الثاني بعد الفاصلة أو القيمة الواجب إضافتها لإكتمال القيمة المطلوبة في مثالنا هو: 0,07 أي: $0,07 + 0,6 = 0,67$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0,0								0,5279
0,1								0,5675
0,2								0,6064
0,3								0,6443
0,4								0,6808
0,5								0,7157
0,6								0,7486

ومنه: $P(X \leq 4) = 0,7486 = 74,86\%$

ملاحظة:

في بعض المسائل الإحصائية تكون قيمة z مجهولة بينما الاحتمال P الذي يوافق هذه القيمة يكون معلوم ، فإذا كان الاحتمال المعطى لنا أكبر من 0,5 فهذا يعني أن قيمة z موجبة فتقرأ مباشرة من الجدول ، أما إذا الاحتمال المعطى لنا أصغر من 0,5 فهذا يعني أن قيمة z سالبة،وتحسب بدلالة القيمة الموجبة المناظرة لها لكن لا ننس أن نكتبها سالبة.

مثال: إذا كان لدينا X متغير عشوائي يتمثل في معامل الذكاء للطلبة المسجلين في إحدى الجامعات الجزائرية والذي يخضع للتوزيع الطبيعي،حيث متوسطه الحسابي يقدر بـ: 80، أما انحرافه المعياري يقدر بـ: 0,3.

1– أكتب صيغة دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير العشوائي؟

2– أحسب الوسيط والمنوال؟

3– أحسب النسب التالية:

أ– نسبة الطلبة الذين معامل ذكائهم أقل أو يساوي 80,36؟

ب– نسبة الطلبة الذين معامل ذكائهم أكبر من 80,75؟

ج– نسبة الطلبة الذين معامل ذكائهم أقل من 79,16؟

د– نسبة الطلبة الذين معامل ذكائهم محصورا ما بين 80,3 و80,87 ؟

هـ– نسبة الطلبة الذين معامل ذكائهم محصورا ما بين 71,9 و79,4 ؟

و– نسبة الطلبة الذين معامل ذكائهم أكبر من 79,76؟

ز– نسبة الطلبة الذين معامل ذكائهم محصورا ما بين 79,73 و80,12 ؟

ح– نسبة الطلبة الذين معامل ذكائهم محصورا ما بين 79,97 و80 ؟

ط– نسبة الطلبة الذين معامل ذكائهم محصورا ما بين 80 و80,21 ؟

ي– نسبة الطلبة الذين معامل ذكائهم محصورا ما بين 79,58 و80,42 ؟

ك– نسبة الطلبة الذين معامل ذكائهم أقل أو يساوي 75,05؟

ل– نسبة الطلبة الذين معامل ذكائهم أكبر أو يساوي 76,4؟

م– نسبة الطلبة الذين معامل ذكائهم أقل من 83,15؟

ن– نسبة الطلبة الذين معامل ذكائهم أكبر من 82,1؟

4– أوجد العدد C إذا كان: **أ–** $P(X \leq c) = 0,95$ ؟ **ب–** $P(X > c) = 0,65$ ؟

الحل:

1– كتابة صيغة دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير العشوائي:

لدينا: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$

وعليه: $f(x) = \frac{1}{0,3\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-80}{0,3})^2}$

2- حساب الوسيط والمنوال:

بما أن التوزيع طبيعي فإن: $\mu = Me = Mo = 80$

3- حساب النسب التالية:

3- أ– نسبة الطلبة الذين معامل ذكائهم أقل أو يساوي 80,36:

$$P(X \leq 80,36) \rightarrow P\left(Z \leq \frac{80,36-80}{0,3}\right) = P(Z \leq 1,2) = F(1,2) = 0,8849$$
$$P(X \leq 80,36) = 88,49\%$$

3- ب– نسبة الطلبة الذين معامل ذكائهم أكبر من 80,75:

$$P(X>80,75) \rightarrow P\left(Z > \frac{80,75-80}{0,3}\right) = P(Z > 2,5) = 1 - P(Z \leq 2,5)$$
$$= 1 - F(2,5) = 1 - 0,9938 = 0,0062$$
$$P(X>80,75) = 00,62\%$$

3- ج– نسبة الطلبة الذين معامل ذكائهم أقل من 79,16:

$$P(X < 79,16) \rightarrow P\left(Z < \frac{79,16-80}{0,3}\right) = P(Z < -2,8) = P(Z > 2,8)$$
$$= 1 - P(Z \leq 2,8) = 1 - F(2,8) = 1 - 0,9974 = 0,0026$$
$$P(X < 79,16) = 00,26\%$$

3- د- نسبة الطلبة الذين معامل ذكائهم محصورا ما بين 80,3 و80,87 :

$$P(80,3 \leq X \leq 80,87) \rightarrow P\left(\frac{80,3-80}{0,3} \leq Z \leq \frac{80,87-80}{0,3}\right) = P(1 \leq Z \leq 2,9)$$
$$= P(Z \leq 2,9) - P(Z \leq 1) = F(2,9) - F(1) = 0,9981 - 0,8413 = 0,1568$$
$$P(80,3 \leq X \leq 80,87) = 15,68\%$$

3- هـ- نسبة الطلبة الذين معامل ذكائهم محصورا ما بين 71,9 و79,4 :

$$P(71,9 \leq X \leq 79,4) \rightarrow P\left(\frac{71,9-80}{0,3} \leq Z \leq \frac{79,4-80}{0,3}\right) = P(-2,7 \leq Z \leq -2)$$
$$= P(Z \leq -2) - P(Z \leq -2,7)$$
$$= [1 - P(Z \leq 2)] - [1 - P(Z \leq 2,7)]$$
$$= -P(Z \leq 2) + P(Z \leq 2,7)$$
$$= P(Z \leq 2,7) - P(Z \leq 2) = F(2,7) - F(2) = 0,9965 - 0,9772 = 0,0193$$
$$P(71,9 \leq X \leq 79,4) = 1,93\%$$

3- و- نسبة الطلبة الذين معامل ذكائهم أكبر من 79,76:

$$P(X>79,76) \rightarrow P\left(Z > \frac{79,76-80}{0,3}\right) = P(Z > -0,8)$$
$$= 1 - P(Z \leq -0,8) = 1 - [1 - P(Z \leq 0,8)] = P(Z \leq 0,8) = F(0,8) = 0,7881$$
$$P(X > 79,76) = 78,81\%$$

3- ز- نسبة الطلبة الذين معامل ذكائهم محصورا ما بين 79,73 و80,12 :

$$P(79,73 \leq X \leq 80,12) \rightarrow P\left(\frac{79,73-80}{0,3} \leq Z \leq \frac{80,12-80}{0,3}\right) = P(-0,9 \leq Z \leq 0,4)$$
$$= P(Z \leq 0,4) - P(Z \leq -0,9)$$
$$= P(Z \leq 0,4) + P(Z \leq 0,9) - 1$$
$$= F(0,4) + F(0,9) - 1 = 0,6554 + 0,8159 - 1 = 0,4713$$
$$P(79,73 \leq X \leq 80,12) = 47,13\%$$

3- ح- نسبة الطلبة الذين معامل ذكائهم محصورا ما بين 79,97 و80 :

$$P(79,97 \leq X \leq 80) \rightarrow P\left(\frac{79,97-80}{0,3} \leq Z \leq \frac{80-80}{0,3}\right) = P(-0,1 \leq Z \leq 0)$$
$$= P(Z \leq 0) - P(Z \leq -0,1)$$
$$= P(Z \leq 0) - [1 - P(Z \leq 0,1)] = F(0) - 1 + F(0,1)$$
$$= 0,5 - 1 + F(0,1) = F(0,1) - 0,5 = 0,5398 - 0,5 = 0,0398$$
$$P(79,97 \leq X \leq 80) = 3,98\%$$

3- ط- نسبة الطلبة الذين معامل ذكائهم محصورا ما بين 80 و80,21 :

$$P(80 \leq X \leq 80,21) \rightarrow P\left(\frac{80-80}{0,3} \leq Z \leq \frac{80,21-80}{0,3}\right) = P(0 \leq Z \leq 0,7)$$
$$= P(Z \leq 0,7) - P(Z \leq 0) = F(0,7) - F(0) = 0,7580 - 0,5 = 0,258$$
$$P(80 \leq X \leq 80,21) = 25,8\%$$

3- ي- نسبة الطلبة الذين معامل ذكائهم محصورا ما بين 79,58 و80,42 :

$$P(79,58 \leq X \leq 80,42) \rightarrow P\left(\frac{79,58-80}{0,3} \leq Z \leq \frac{80,42-80}{0,3}\right) = P(-1,4 \leq Z \leq 1,4)$$
$$= P(Z \leq 1,4) - P(Z \leq -1,4) = P(Z \leq 1,4) - [1 - P(Z \leq 1,4)]$$
$$= P(Z \leq 1,4) + P(Z \leq 1,4) - 1 = 2.F(1,4) - 1 = 2.(0,9198) - 1 = 0,8396$$
$$P(79,58 \leq X \leq 80,42) = 83,96\%$$

3- ك- نسبة الطلبة الذين معامل ذكائهم أقل أو يساوي 75,05:

$$P(X \leq 75{,}05) \rightarrow P\left(Z \leq \frac{75{,}05-80}{0{,}3}\right) = P(Z \leq -16{,}5) = P(Z \leq -\infty) = F(-\infty) = 0$$
$$P(X \leq 75{,}05) = 00\%$$

3- ل- نسبة الطلبة الذين معامل ذكائهم أكبر أو يساوي 76,4:

$$P(X \geq 76{,}4) \rightarrow P\left(Z \geq \frac{76{,}4-80}{0{,}3}\right) = P(Z \geq -12) = P(Z \geq -\infty)$$
$$= 1 - P(Z \leq -\infty) = 1 - F(-\infty) = 1 - 0 = 1$$
$$P(X \geq 76{,}4) = 100\%$$

3- م- نسبة الطلبة الذين معامل ذكائهم أقل من 83,15:

$$P(X < 83{,}15) \rightarrow P\left(Z < \frac{83{,}15-80}{0{,}3}\right) = P(Z \leq 10{,}5) = F(+\infty) = 1$$
$$P(X < 83{,}15) = 100\%$$

3- ن- نسبة الطلبة الذين معامل ذكائهم أكبر من 82,1:

$$P(X>82{,}1) \rightarrow P\left(Z > \frac{82{,}1-80}{0{,}3}\right) = P(Z > 7) = 1 - P(Z \leq 7) = 1 - F(+\infty) = 1 - 1 = 0$$
$$P(X>82{,}1) = 00\%$$

4- أ- إيجاد العدد c بحيث: $P(X \leq c) = 0,95$:

$$P(X \leq c) \rightarrow P(Z \leq z) = 0{,}95$$

بما أن الاحتمال أكبر من 50% أي قيمة z موجبة أي:

$$+z_{0,95} = \frac{c-80}{0{,}3} \rightarrow c = 80 + (z_{0,95} \times 0{,}3)$$
$$z_{0,95} = 1{,}6449$$

إذن: $c = 80 + (1,6449 \times 0,3) = 80,49$

4- ب- إيجاد العدد c بحيث: $P(X > c) = 0,65$:

$$P(X > c) = 0{,}65 \Rightarrow 1 - P(X \leq c) = 0{,}65$$
$$\Rightarrow P(X \leq c) = 1 - 0{,}65 = 0{,}35$$
$$P(X \leq c) \rightarrow P(Z \leq z) = 0{,}35$$

بما أن الاحتمال أقل من 50% أي قيمة z سالبة أي:

$$z_{0,35} = \frac{c - 80}{0{,}3} \rightarrow c = 80 + (z_{0,35} \times 0{,}3)$$
$$z_{0,35} = -0{,}3853$$

إذن: $c = 80 + (-0,3853 \times 0,3) = 79,88$

ثالثا: توزيع كاي تربيع Chi - Square Distribution:

1- تعريف توزيع كاي تربيع:

يرجع الفضل في اكتشاف هذا التوزيع إلى هلمرت (F. Helmert, 1876) وكارل بيرسون (Karl Pearson, 1900) حيث يعد من أكثر التوزيعات استخداما في مجال اختبار الفرضيات بأنواعها، ويمكن تعريفه كما يلي: إذا كانت لدينا سلسلة من متغيرات عشوائية مستقلة تتبع القانون الطبيعي المعياري أي: $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \rightsquigarrow N(0;1)$ ، وكان لدينا متغير عشوائي جديد X والذي يساوي مجموع مربعات قيم هذه السلسلة العشوائية أي: $X = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ وعليه نقول عن هذا المتغير العشوائي X أنه يتبع قانون كاي تربيع بدرجة حرية n أي: $X \rightsquigarrow X_n^2$.

2- دالة الكثافة الاحتمالية لقانون كاي تربيع:

إن دالة الكثافة الاحتمالية لمتغير عشوائي يتبع قانون كاي تربيع تعرف بالعلاقة الرياضية التالية:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2^{\left(\frac{n}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} . x^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} . e^{\left(\frac{-x}{2}\right)} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}$$

أي أن توزيع كاي تربيع هو توزيع موجب معرف في المجال: $X \in [0; +\infty[$.

حيث: n يمثل عدد صحيح موجب ويمثل عدد درجات الحرية لهذا التوزيع، فهي بإختصار تعبر عن عدد المتغيرات العشوائية التي تدخل في تحديد المتغير الأصلي X.

e:يمثل أساس نظام اللوغاريتم الطبيعي، ويساوي ....2,71828.

$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$: هذه الصيغة الرياضية عبارة عن صيغة متعلقة بقانون قاما $X \rightsquigarrow \Gamma(\alpha, \beta)$ ، لذلك يعتبر توزيع كاي تربيع حالة خاصة من توزيع قاما بشرط أن تكون $(\alpha = \frac{n}{2})$ و $(\beta = 2)$.

* تجدر الإشارة إلى أن: $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{(\alpha-1)} . e^{(-x)}\, dx$ ، فلقد تم حسابها بالطريقة التالية:

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$$

حيث أن:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(4{,}5) = (4{,}5 - 1)\Gamma(4{,}5 - 1) = 3{,}5 \times 2{,}5\,\Gamma(2{,}5)$$
$$= 3{,}5 \times 2{,}5 \times 1{,}5\,\Gamma(1{,}5)$$
$$= 3{,}5 \times 2{,}5 \times 1{,}5 \times 0{,}5\,\Gamma(0{,}5)$$
$$= 3{,}5 \times 2{,}5 \times 1{,}5 \times 0{,}5\sqrt{\pi}$$

حالات خاصة:

$$\alpha \in \mathbb{N} \Rightarrow \Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$$

مثال:

$$\Gamma(1) = (1 - 1)! = 0! = 1$$

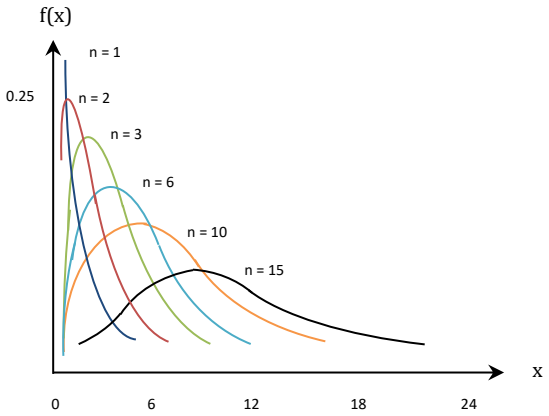
$\Gamma(5) = (5-1)! = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

- إذا كانت قيمة $n = 2$ فتكون دالة الكثافة الاحتمالية لقانون كاي تربيع على الشكل التالي:

$$\left\{ \begin{array}{ll} f(x) = \frac{1}{2}.e^{\left(\frac{-x}{2}\right)} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{array} \right\}$$

3- التمثيل البياني للتوزيع الاحتمالي لقانون كاي تربيع:

التمثيل البياني لتوزيع كاي تربيع مرتبط بقيمة درجة الحرية n ، فكلما كانت n صغيرة كلما كان المنحنى ملتوي نحو اليمين ويقل هذا الالتواء شيئا فشيئا كلما كبرت قيمة درجة الحرية n واقترب بذلك توزيع كاي تربيع من التوزيع الطبيعي المعياري، وعليه الأشكال التي يأخذها منحنى توزيع كاي تربيع يمكن ايضاحها في الشكل التالي:



وعليه يتبين لنا من خلال هذا المنحنى يتميز بعدة خصائص لعل أهمها:

- إن توزيع كاي تربيع هو توزيع غير متناظر أي ملتوي نحو اليمين.
- يأخذ المنحنى التكراري لهذا التوزيع أشكالا مختلفة حسب قيمة درجة الحرية n .
- إن المنحنى التكراري لهذا التوزيع يبتعد شيئا فشيئا عن المحور العمودي ويأخذ شكل الجرس كلما زادت قيمة n.
- إن المساحة الكلية المحصورة تحت منحنى كاي تربيع تساوي 100%، أي:

$$F(X) = P(X \leq x) = \int_0^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{2^{\left(\frac{n}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.\int_0^{+\infty} x^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}.e^{\left(\frac{-x}{2}\right)}dx = 1$$

4- الخواص العددية لقانون كاي تربيع:

تجدر الإشارة أن توزيع كاي تربيع يعتمد على معلمة واحدة ألا وهي درجة الحرية n ، وعليه تتمثل الخواص العددية لهذا التوزيع في:

*** الأمل الرياضي:**

إذا كان: $X \rightsquigarrow X_n^2$، فإن:

$$E(X) = n$$

*** التباين والانحراف المعياري:**

إذا كان: $X_n^2 \backsim X$، فإن:

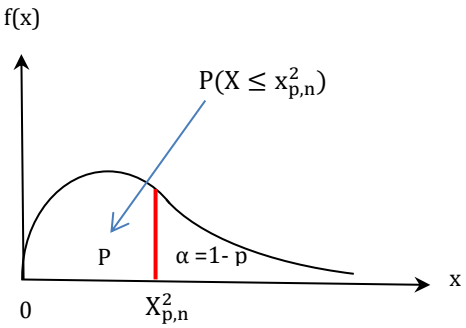
$$V(X) = 2n$$

إذن:

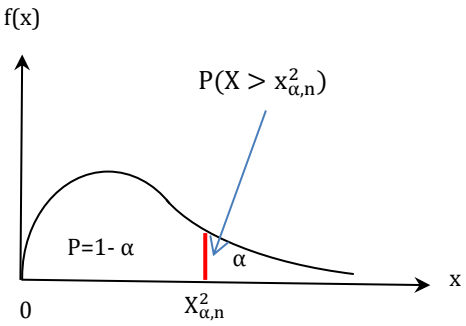
$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2n}$$

***طريقة استخدام جدول كاي تربيع:**

إن جدول كاي تربيع مصمم خصيصا من أجل تحديد قيم معينة لـ X في مجال تعريفه، فالقيم الموجودة داخل هذا الجدول تسمى **القيم الجدولية** يرمز لها بـ: $X_{p,n}^2$ (أو باختصار X_p^2 عندما تكون درجة الحرية معروفة) وهي ترتبط بكل من درجة الحرية n وبقيم احتمال معلوم P والتي هي من الشكل: $P(X \leq X_{p,n}^2)$ ، حيث تتمثل قيم هذا الاحتمال في المساحة أسفل منحنى التوزيع على يسار القيمة $X_{p,n}^2$.



ملاحظة: توجد في بعض الكتب جداول احصائية تحدد القيم الجدولية فيها بدلالة المساحة α تحت المنحنى على يمين القيمة $X_{\alpha,n}^2$ لذلك يجب الانتباه.



مثال: ليكن لدينا X متغير عشوائي يتبع توزيع كاي تربيع بدرجة حرية n تساوي 8 أي: $X_8^2 \backsim X$.

المطلوب: حدد القيم الجدولية التي تحقق ما يلي:

$$(X \leq X_{p,n}^2) = 0{,}95$$
$$(X > X_{p,n}^2) = 0{,}025$$

الحل:

بالاعتماد على جدول توزيع كاي تربيع وعند درجة حرية قدرها 8 نجد:

$\mathbf{P(X \leq x^2_{p,n}) = 0,95} \Rightarrow X^2_{0,95;8} = 15,5$

$\mathbf{P(X \leq 15,5) = 0,95}$

بمعنى أن: احتمال أن تقل قيمة المتغير العشوائي X عن القيمة 15.5 بـ 8 درجات حرية هو 0,95.

$\mathbf{P(X > x^2_{p,n}) = 0,025} \Rightarrow 1 - P(X \leq x^2_{p,n}) = 0,025$

$\Rightarrow P(X \leq x^2_{p,n}) = 1 - 0,025 = 0,975$

$P(X \leq x^2_{p,n}) = 0,975 \Rightarrow X^2_{0,975;8} = 17,5$

$\mathbf{P(X > 17,5) = 0,025}$

بمعنى أن: احتمال أن تفوق قيمة المتغير العشوائي X عن القيمة 17.5 بـ 8 درجات حرية هو 0,025.

ملاحظات:

* إذا كان X_1 يتبع توزيع كاي تربيع بدرجة حرية n_1 أي: $X_1 \backsim X^2_{n_1}$، و إذا كان X_2 يتبع توزيع كاي تربيع بدرجة حرية n_2 أي: $X_2 \backsim X^2_{n_2}$، وكان X_1 وX_2 متغيرين عشوائين مستقلين فإن المجموع $(X_1 + X_2)$ في هذه الحالة يتبع توزيع كاي تربيع بدرجة حرية $(n_1 + n_2)$ أي: $X_1 + X_2 \backsim X^2_{n_1+n_2}$.

ويمكن تعميم هذه النتيجة على عدة متغيرات عشوائية مستقلة عددها n.

* من أجل $n \geq 30$ فإن توزيع كاي تربيع يقترب من التوزيع الطبيعي المعياري أي: $\sqrt{2X^2_n} - \sqrt{2n-1} \underset{n\to+\infty}{\backsim} N(0;1)$.

* إذا كانت لدينا سلسلة من متغيرات عشوائية $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ تتبع القانون الطبيعي العام ومتوسطها وتباينها يساويان علي التوالي: $E(X_i) = 0 \; ; \sigma^2(X_i) = \sigma^2$ فيمكن أن نستنتج أن المتغير: $\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^2}{\sigma_i^2}$ يخضع لتوزيع كاي مربع بدرجة حرية n أي نعبر عليه رياضيا بالصيغة التالية: $\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^2}{\sigma_i^2} = X^2_n$.

* إذا كانت لدينا سلسلة من متغيرات عشوائية $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ تتبع القانون الطبيعي العام أي $N(\mu;\sigma)$ ، وكان S^2 يمثل تباين العينة الذي يحسب وفق المعادلة التالية: $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$.

فعندئذ يمكن أن نعتبر: $\frac{n\,S^2}{\sigma^2} = \frac{n}{\sigma^2} . \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1} = X^2_n$

مع العلم أن:

$E(\mu) = E\left(\frac{n\,S^2}{\sigma^2}\right) = \frac{n}{\sigma^2} E(S^2) = n$

$V(\mu) = V\left(\frac{n\,S^2}{\sigma^2}\right) = \frac{n^2}{\sigma^4} V(S^2) = 2n$

حيث أن: $V(S) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2n}}$

رابعا: توزيع ستيودنت Student Distribution:

1- تعريف توزيع ستيودنت:

يرجع الفضل في إيجاد هذا القانون إلى ويليام سيلي قوسي (William Sealy Gosset) (1876-1937) الذي نشر مقالاته كلها باسم ستيودنت، ونشر مقالته حول هذا القانون عام 1908 بعنوان: "The probable error of a mean" حيث يعد من أكثر التوزيعات استخداما في حالة العينات الصغيرة أي: $n < 30$ ، ويمكن تعريفه كما يلي: إذا كان لدينا Z و Y متغيرين عشوائين مستقلين عن بعضهما البعض، حيث أن: Z يتبع القانون الطبيعي المعياري أي: $Z \rightsquigarrow N(0;1)$ و Y يتبع توزيع كاي تربيع بدرجة حرية n أي: $Y \rightsquigarrow X_n^2$، وكان لدينا متغير عشوائي جديد T معرف حسب الصيغة التالية: $T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} = \frac{Z\sqrt{n}}{\sqrt{Y}}$ ، وعليه نقول عن هذا المتغير العشوائي T أنه يتبع قانون ستيودنت بدرجة حرية n أي: $T \rightsquigarrow T_n$.

2- دالة الكثافة الاحتمالية لقانون ستيودنت:

إن دالة الكثافة الاحتمالية لمتغير عشوائي يتبع قانون ستيودنت تعرف بالعلاقة الرياضية التالية:

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}.\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.(1+\frac{t^2}{n})^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)} \qquad ; t \in \mathbb{R}$$

أي أن توزيع ستيودنت هو توزيع معرف في المجال: $t \in]-\infty;+\infty[$.

حيث: n يمثل عدد صحيح موجب ويمثل عدد درجات الحرية لهذا التوزيع.

* تجدر الإشارة إلى أن: $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{(\alpha-1)}.e^{(-x)}\,dx$ ، فلقد تم حسابها بالطريقة التالية:

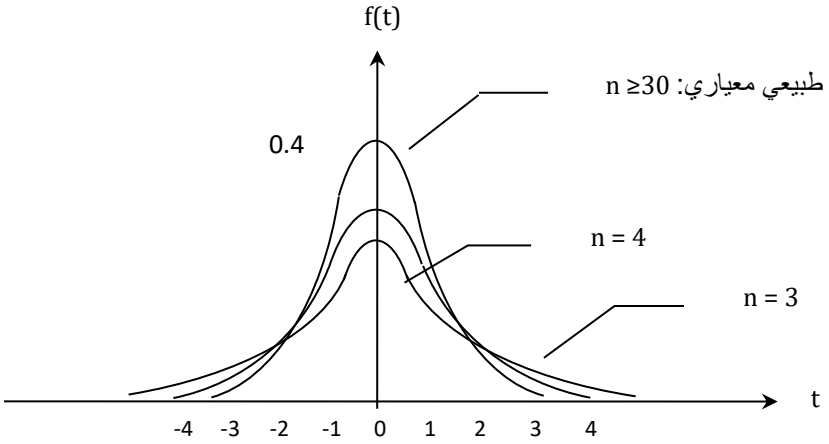
$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$$

- إذا كانت قيمة $n = 1$ فإننا نحصل على التوزيع التالي الذي يمثل توزيع كوشي حسب الصيغة التالية:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.\frac{1}{1+x^2}$$

3- التمثيل البياني للتوزيع الاحتمالي لقانون ستيودنت:

التمثيل البياني لتوزيع ستيودنت هو توزيع متناظر حول الصفر، وشكله العام يشبه إلى حد كبير شكل التوزيع الطبيعي المعياري إلا أنه أكثر تشتتا منه، ويقترب شيئا فشيئا من التوزيع الطبيعي المعياري كلما زادت قيمة درجة الحرية n ، وعموما يعتبر الإحصائيون أن المنحنيان يتطابقان تقريبا عند: $n \geq 30$ ، وعليه الأشكال التي يأخذها منحنى توزيع ستيودنت يمكن ايضاحها في الشكل التالي:



وعليه يتبين لنا من خلال هذا المنحنى يتميز بعدة خصائص لعل أهمها:

– إن توزيع ستيودنت هو توزيع متناظر حول المتوسط الحسابي والذي يساوي الصفر مما يعني أن لكل نقطة موجبة t نقطة مناظرة لها سالبة ، حيث المساحة تحت المنحنى على يمين t تساوي المساحة تحت المنحنى على يسار t أي: $f(t) = f(-t)$.

– إن المنحنى التكراري لهذا التوزيع يأخذ شكل الجرس ويقترب شيئا فشيئا من التمثيل البياني للتوزيع الطبيعي المعياري كلما زادت قيمة n.

– إن المساحة الكلية المحصورة تحت منحنى ستيودنت تساوي 100%، أي:

$$F(T) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}.\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.\int_{-\infty}^{+\infty}(1+\frac{t^2}{n})^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)}dt = 1$$

4– الخواص العددية لقانون ستيودنت:

تتمثل الخواص العددية لهذا التوزيع في:

*** الأمل الرياضي:**

إذا كان: $T \rightsquigarrow T_n$، فإن:

$$E(T) = 0$$

*** التباين والانحراف المعياري:**

إذا كان: $T \rightsquigarrow T_n$، فإن:

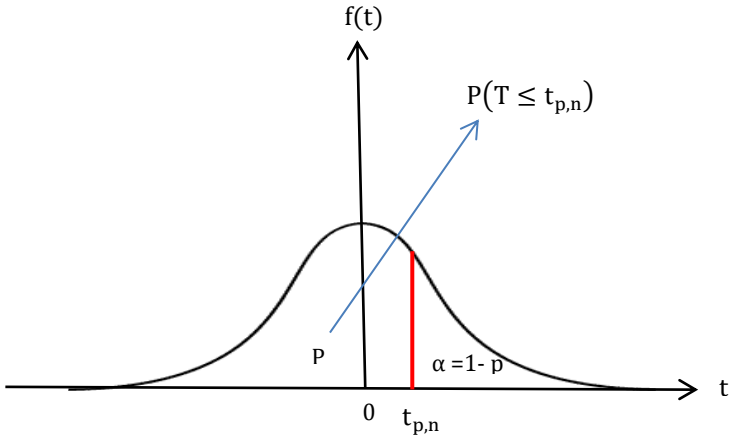
$$V(T) = \frac{n}{n-2} \quad ; si \quad n > 2$$

إذن:

$$\sigma(T) = \sqrt{V(T)} = \sqrt{\frac{n}{n-2}} \; ; si \quad n > 2$$

***طريقة استخدام جدول ستيودنت:**

إن جدول ستيودنت مصمم خصيصا من أجل تحديد قيم معينة لـ T، فالقيم الموجودة داخل هذا الجدول تسمى **القيم الجدولية** يرمز لها بـ: $t_{p,n}$ وهي ترتبط بمعلومتين أي بكل من درجة الحرية n وبقيم احتمال معلوم P والتي هي من الشكل: $P(T \leq t_{p,n})$ ، حيث تتمثل قيم هذا الاحتمال في المساحة أسفل منحنى التوزيع على يسار القيمة $t_{p,n}$.



ملاحظات:

* نلاحظ أن جدول توزيع ستيودنت يحتوي على قيم $t_{p,n}$ من أجل $(P \geq 0{,}55)$، لذلك فمن أجل بعض الاحتمالات الصغيرة التي لا توجد في الجدول أي لما: $(P < 0{,}55)$ نستخدم خاصية التناظر حسب العلاقة التالية: $t_{p,n} = -t_{1-p,n}$.

$$t_{0{,}40;25} = -\,t_{1-0.40\,;\,25} = -\,t_{0{,}60;25} = -\,0{,}256$$

* إن جدول توزيع ستيودنت يسمح بحساب الاحتمال الذي هو على الشكل التالي: $P(T \leq t)$ ضمن مجال تعريفه، وبالتالي يمكن حساب الاحتمال الذي هو على الشكل: $P(T > t)$ وفق العلاقة التالية: $P(T > t) = 1 - P(T \leq t)$.

* $\lim_{n\to+\infty} V(T) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n-2} = 1$ نلاحظ من هذه العبارة الرياضية أنه كلما كبرت درجة الحرية n عند قانون ستيودنت كلما آل التباين إلى قيمة الواحد أي إلى تباين القانون الطبيعي المعياري، كما نعلم أن: $E(T) = E(Z) = 0$ وبالتالي إذا كانت n كبيرة (أي من أجل $n \geq 30$) فإن توزيع ستيودنت يقترب من التوزيع الطبيعي المعياري أي: $T_n \rightsquigarrow N(0;1)$، ومنه في هذه الحالة يمكن الاعتماد على جدول القانون الطبيعي المعياري.

مثال: ليكن لدينا X متغير عشوائي يتبع توزيع ستيودنت بدرجة حرية n تساوي 22 أي: $T \rightsquigarrow T_{22}$.

المطلوب: حدد القيم الجدولية التي تحقق ما يلي:

$(T \leq t_{p,n}) = 0{,}99$
$(T \leq t_{p,n}) = 0{,}25$
$(T > t_{p,n}) = 0{,}20$
$(T > t_{p,n}) = 0{,}70$

الحل:

بالاعتماد على جدول توزيع ستيودنت وعند درجة حرية قدرها 22 نجد:

$\mathbf{P(T \leq t_{p,n}) = 0,99} \Rightarrow t_{0,99;22} = 2,51$

$\mathbf{(T \leq 2,51) = 0,99}$

$\mathbf{P(T \leq t_{p,n}) = 0,25} \Rightarrow t_{0,25;22} = -t_{1-0.25\,;\,22} = -t_{0,75;22} = -0,686$

$\mathbf{(T \leq -0,686) = 0,25}$

$\mathbf{P(T > t_{p,n}) = 0,20} \Rightarrow 1 - P(T \leq t_{p,n}) = 0,20$

$\Rightarrow P(T \leq t_{p,n}) = 1 - 0,20 = 0,80$

$P(T \leq t_{p,n}) = 0,80 \Rightarrow t_{0,80;22} = 0,858$

$\mathbf{(T > 0,858) = 0,20}$

$\mathbf{P(T > t_{p,n}) = 0,70} \Rightarrow 1 - P(T \leq t_{p,n}) = 0,70$

$\Rightarrow P(T \leq t_{p,n}) = 1 - 0,70 = 0,30$

$P(T \leq t_{p,n}) = 0,30 \Rightarrow t_{0,30;22} = -t_{1-0.30\,;\,22} = -t_{0,70;22} = -0,532$

$\mathbf{(T > -0,532) = 0,70}$

خامسا: توزيع فيشر Fisher Distribution:

1- تعريف توزيع فيشر:

يرجع الفضل في اكتشاف هذا التوزيع إلى البريطاني رونالد آيلمر فيشر (Ronald Aylmer Fisher, 1924) الذي يعتبر مؤسس نظرية التقدير وقد قام الأمريكي جورج وادل سنيديكور (George Waddel Snédecor) بوضع الجداول الخاصة بهذا التوزيع سنة 1934، لذلك نجد في بعض الكتب يطلقون على هذا التوزيع بتوزيع (فيشر- سنيديكور)، ويمكن تعريفه كما يلي: إذا كان X_1 و X_2 متغيرين عشوائين مستقلين بحيث: X_1 يتبع توزيع كاي تربيع بدرجة حرية n_1 أي: $X_1 \backsim X^2_{n_1}$، و X_2 يتبع توزيع كاي تربيع بدرجة حرية n_2 أي: $X_2 \backsim X^2_{n_2}$، وكان لدينا متغير عشوائي جديد F معرف حسب الصيغة التالية: $F = \frac{\frac{X_1}{n_1}}{\frac{X_2}{n_2}}$ ، وعليه نقول عن هذا المتغير العشوائي F أنه يتبع قانون فيشر بدرجة حرية n_1،n_2، أي: $F \backsim F_{n_1;n_2}$.

2- دالة الكثافة الاحتمالية لقانون فيشر:

إن دالة الكثافة الاحتمالية لمتغير عشوائي يتبع قانون فيشر تعرف بالعلاقة الرياضية التالية:

$$\left\{ \begin{array}{ll} f(x) = \frac{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\left(\frac{n_1}{n_2}-1\right)} \cdot \Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \cdot \frac{x^{\left(\frac{n_1}{2}-1\right)-1}}{\left(1+\frac{n_1}{n_2}x\right)^{\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{array} \right\}$$

كما يمكن كتابة هذه الدالة بواسطة توزيع بيطا (β) حسب الصيغة التالية:

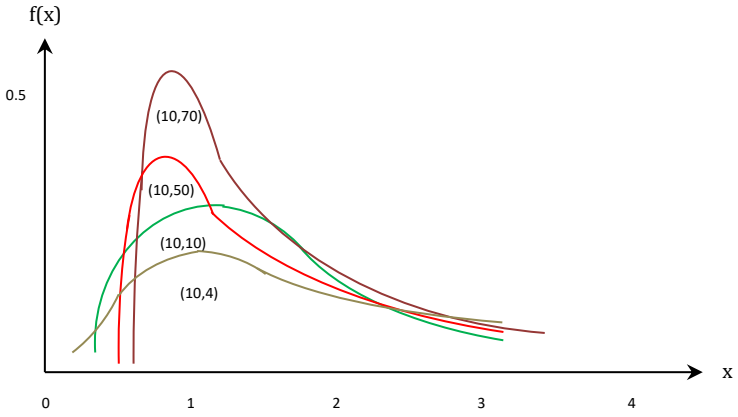
$$\left\{ \begin{array}{ll} f(x) = \frac{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\left(\frac{n_1}{2}-1\right)}}{\beta\left(\frac{n_1}{2},\frac{n_2}{2}\right)} \cdot x^{\left(\frac{n_1}{2}-1\right)} \cdot \left(1+\frac{n_1}{n_2}x\right)^{-\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{array} \right\}$$

أي أن توزيع فيشر هو توزيع موجب معرف في المجال: $X \in [0;+\infty[$.

حيث: n_1 ، n_2 عددين موجبين يمثلان درجات الحرية للتوزيع.

3- التمثيل البياني للتوزيع الاحتمالي لقانون فيشر:

التمثيل البياني لتوزيع فيشر غير متناظر، يتحدد شكله حسب قيم درجات الحرية n_1،n_2، ففي حالة $n_1 \leq 2$ معناه المنوال يساوي الصفر $(M_o = 0)$ ، أما في حالة: $n_1, n_2 > 2$ فللتوزيع منوال واحد (أحادي المنوال)، ويكون ملتوي قليلا نحو اليمين، حيث كلما إزدادت قيم n_1،n_2 كلما اقترب توزيع فيشر من التوزيع الطبيعي المعياري، وعليه الأشكال التي يأخذها منحنى توزيع فيشر يمكن ايضاحها في الشكل التالي:



وعليه يتبين لنا من خلال هذا المنحنى يتميز بعدة خصائص لعل أهمها:

- إن توزيع فيشر هو توزيع غير متناظر أي ملتوي نحو اليمين.
- يأخذ المنحنى التكراري لهذا التوزيع أشكالا مختلفة حسب قيم درجات الحرية n_1 وn_2.
- إن المنحنى التكراري لهذا التوزيع يبتعد شيئا فشيئا عن المحور العمودي ويأخذ شكل الجرس كلما زادت قيم درجات الحرية n_1 وn_2.
- إن المساحة الكلية المحصورة تحت منحنى فيشر تساوي 100%، أي:

$$F(X) = P(X \leq x) = \int_0^{+\infty} f(x)dx = \frac{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\left(\frac{n_1}{n_2}-1\right)} \cdot \Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{x^{\left(\frac{n_1}{2}-1\right)-1}}{\left(1+\frac{n_1}{n_2}x\right)^{\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}} dx = 1$$

4- الخواص العددية لقانون فيشر:

تتمثل الخواص العددية لهذا التوزيع في:

*** الأمل الرياضي:**

إذا كان: $F \backsim F_{n_1;n_2}$، فإن:

$$E(X) = \frac{n_2}{n_2-2} \quad ; si \quad n_2 > 2$$

*** التباين والانحراف المعياري:**

إذا كان: $F \rightsquigarrow F_{n_1;n_2}$، فإن:

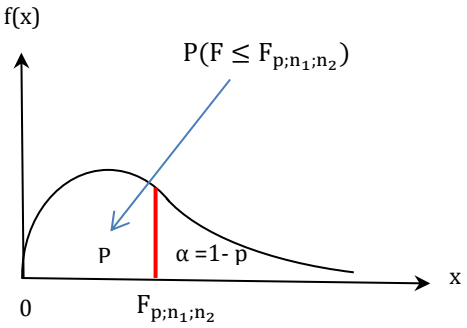
$$V(X) = \frac{2n_2^2(n_1+n_2-2)}{n_1(n_2-4)(n_2-2)^2} \qquad ; si \quad n_2 > 4$$

إذن:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{2n_2^2(n_1+n_2-2)}{n_1(n_2-4)(n_2-2)^2}} \qquad ; si \quad n_2 > 4$$

***طريقة استخدام جدول فيشر:**

إن جدول فيشر مصمم خصيصا من أجل تحديد قيم معينة لـ F في مجال تعريفه، فالقيم الموجودة داخل هذا الجدول تسمى **القيم الجدولية** يرمز لها بـ: $F_{p;n_1;n_2}$ وهي ترتبط بثلاثة معالم هي: درجتي حرية n_1 وn_2 على التوالي وقيم احتمال معلوم P والتي هي من الشكل: $P(F \leq F_{p;n_1;n_2})$ ، حيث تتمثل قيم هذا الاحتمال في المساحة أسفل منحنى التوزيع على يسار القيمة $F_{p;n_1;n_2}$.



ملاحظات:

* في الغالب تعطي الجداول الإحصائية قيم F عند $\mathbf{P = 0,95}$ و$\mathbf{P = 0,99}$ فقط.

* قصد إيجاد القيم الجدولية المقابلة للإحتمالات الصغيرة $(\mathbf{P < 0,95}$ و$\mathbf{P < 0,99})$ نستخدم العلاقة التالية:

$$\mathbf{F_{p;n_1;n_2} = \frac{1}{F_{1-p;n_2;n_1}}}$$

* $\mathbf{F_{1-p;1;n} = t^2_{1-(\frac{p}{2});n}}$

* $\mathbf{F_{p;n;\infty} = \frac{X^2_{p;n}}{n}}$

* إذا كان: $n_1, n_2 > 2$ ، فإن المنوال يحسب وفق العلاقة التالية: $M_o = \frac{n_2}{n_1}.\frac{(n_1-2)}{(n_2+2)}$.

مثال1: ليكن لدينا X متغير عشوائي يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية 8 و20 على التوالي، أي: $F \rightsquigarrow F_{8;20}$.

المطلوب: حدد القيم الجدولية التي تحقق ما يلي:

$F_{0,99;8;20}$

$F_{0,05;8;20}$

الحل:

1. بالاعتماد على جدول توزيع فيشر وعند احتمال قدره **0.99** ودرجتي حرية **8** و**20** على التوالي نجد:

$F_{0,99;8;20} = 3,66$

بمعنى أن: $P(F_{8;20} \leq 3,66) = 0,99$

$F_{0,05;8;20} = ?$

2.بما أن الاحتمال هنا هو 0.05 غير موجود في جدول توزيع فيشر نستخدم العلاقة التالية:

$$F_{0,05;8;20} = \frac{1}{F_{1-0,05;20;8}} = \frac{1}{F_{0,95;20;8}}$$

وبالاعتماد على جدول توزيع فيشر عند احتمال قدره **0.95** ودرجتي حرية **20** و**8** على التوالي نجد: $F_{0,95;20;8} = 3,15$.

وعليه: $\frac{1}{F_{0,95;20;8}} = \frac{1}{3,15} = 0,32$

مثال2: ليكن لدينا X متغير عشوائي يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية 1 و11 على التوالي، أي: $F \rightsquigarrow F_{1;11}$.

المطلوب: تأكد من نتائج المعادلة أو النظرية التالية عند احتمال قدره 0.05؟

$$F_{1-p;1;n} = t^2_{1-(\frac{p}{2});n}$$

الحل: التأكد من نتائج المعادلة أو النظرية التالية عند احتمال قدره 0.05:

$$F_{1-p;1;n} = F_{1-0,05;1;11} = F_{0,95;1;11} = 4,84$$
$$t^2_{1-(\frac{p}{2});n} = t^2_{1-(\frac{0,05}{2});11} = t^2_{1-0,025;11} = t^2_{0,975;11} = (2,20)^2 = 4,84$$

مثال3: ليكن لدينا X متغير عشوائي يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية 30 و∞ على التوالي، أي: $F \rightsquigarrow F_{30;\infty}$.

المطلوب: تأكد من نتائج المعادلة أو النظرية التالية عند احتمال قدره 0.99؟

$$F_{p;n;\infty} = \frac{X^2_{p;n}}{n}$$

الحل: التأكد من نتائج المعادلة أو النظرية التالية عند احتمال قدره 0.99:

$$F_{p;n;\infty} = F_{0,99;30;\infty} = 1,70$$
$$\frac{X^2_{p;n}}{n} = \frac{X^2_{0,99;30}}{30} = \frac{50,9}{30} = 1,696 \simeq 1,70$$

مثال4: ليكن لدينا X متغير عشوائي يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية 10 و20 على التوالي، أي: $F \rightsquigarrow F_{10;20}$.

المطلوب: أحسب المنوال لهذا التوزيع؟

الحل:

حساب المنوال لهذا التوزيع: بما أن: $n_1, n_2 > 2$ ، فإن المنوال يحسب وفق العلاقة التالية:

$$M_o = \frac{n_2}{n_1}.\frac{(n_1 - 2)}{(n_2 + 2)} = \frac{20}{10}.\frac{(10 - 2)}{(20 + 2)} = 0,7272 \simeq 0,73$$

تمارين محلولة

التمرين الأول:

تخضع أوزان عبوات إحدى أنواع الحلوى لتوزيع طبيعي وسطه الحسابي: 85غ وانحرافه المعياري: 2.5غ، أخذت عشوائيا عبوة من بين العبوات المنتجة للاختبار.

المطلوب:

1. ما هي معالم التوزيع الاحتمالي لأوزان العبوات؟

2.أحسب احتمال أن يكون وزنها أقل من 90غ؟

3. أحسب احتمال أن يكون وزنها أكبر من 82غ؟

4. أحسب احتمال أن يقع وزن العبوة بين القيمتين 83 و87غ؟

التمرين الثاني:

ليكن χ متغير عشوائي يتبع قانون كاي تربيع.

المطلوب:

1. إذا كانت n=9 ، أحسب الاحتمالات التالية:

$* p(\chi > 7.5)$ $* p(\chi < 21.7)$

2. إذا كانت n=8 ، أحسب الاحتمال التالي:

$*p(3.49 < \chi < 5.67)$

3. أوجد القيمة الجدولية $\chi^2_{p,n}$ التي تحقق الاحتمالات التالية وذلك عند n=50 :

$* p(\chi > \chi^2_{p,n}) = 0.05$ $* p(\chi < \chi^2_{p,n}) = 0.95$

التمرين الثالث:

ليكن لدينا المتغير العشوائي T يتبع توزيع ستيودنت بدرجة حرية n.

المطلوب:

1. أوجد قيمة t التي تحقق:

$* p(T < t) = 0.9$

حيث n يساوي: 10، 20، 120 على الترتيب.

2. أوجد القيمة الجدولية t التي تحقق: حيث n تساوي: 7، 8، 10 على التوالي.

$* p(T < t) = 0.025$ $* p(T < t) = 0.01$ $* p(T > t) = 0.05$

3. أحسب الاحتمالات التالية:

$* p(T < 0.765)/ n = 10$ $* p(T < 4.03)/ n = 5$ $* p(T < 2.90)/n = 8$ $* p(T < 1.37)/n = 10$

التمرين الخامس:

نفترض $f(x)=\frac{35}{64\sqrt{2}}\left(1+\frac{x^2}{8}\right)^{-9/2}$ $x\in R$

المطلوب:

أ– ما هو نوع القانون الذي يخضع إليه المتغير X ؟

ب– حساب كل من التوقع الرياضي والتباين لهذا التوزيع ؟

ج– أرسم منحني لهذا التوزيع ؟

التمرين السادس:

نفترض متغير عشوائي خاضع للتوزيع كاي مربع مع 10 درجات حرية

المطلوب :

أ– كتابة دالة الكثافة لهذا التوزيع.

ب– حساب كل من التوقع الرياضي والتباين.

ج– الرسم البياني لـ : $f(x)$

الحلول

حل التمرين الأول:

1. تحديد معالم التوزيع الاحتمالي لأوزان العبوات:

X: متغير عشوائي يمثل أوزان العبوات.

نعلم أن التوزيع الاحتمالي لأوزان العبوات حسب ما جاء في المعطيات هو التوزيع الطبيعي، ولدينا: أي :$\mu = 85$ و $\sigma(x) = 2.5$ ومنه نكتب:

$$x \to N(85; 2.5)$$

2. حساب احتمال أن يكون وزنها أقل من 90 غ:

$p(x < 90) = p\left(\frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{90-85}{2.5}\right) = p(z < 2) = F(2)$.

ومن جدول التوزيع الطبيعي(1) نستخرج قيمة $F(2)$ والمساوية لـ: 0.9772 ومنه:

$$\boldsymbol{p(x < 90) = 0.9772}$$

3. حساب احتمال أن يكون وزنها أكبر من 82 غ:

$$p(x > 82) = 1 - p(x < 82) = 1 - p\left(\frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{82-85}{2.5}\right) = 1 - p(z < -1.2) = 1 - F(-1.2)$$

نعلم أن: $F(-z) = 1 - F(z)$ ومنه فإن:

$1 - F(-1.2) = 1 - [1 - F(1.2)] = F(1.2) = 0.8849$

أي: $\boldsymbol{p(x > 82) = 0.8849}$

4. حساب احتمال أن يقع وزن العبوة بين القيمتين 83 و87 غ:

$$p(83 < x < 87) = p\left(\frac{83-85}{2.5} < \frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{87-85}{2.5}\right) = p(-0.8 < z < 0.8) \quad = F(0.8) - F(-0.8)$$

$$= F(0.8) - [1 - F(0.8)] = 2F(0.8) - 1 = 2(0.7881) - 1 = 0.5762.$$

أي: $\boldsymbol{p(83 < x < 87) = 0.5762}$

حل التمرين الثاني:

1. حساب الاحتمالات التالية، إذا كانت n=9:

$* \boldsymbol{p(\chi < 21.7)} = ?$

باستخدام جدول توزيع كاي تربيع بالقراءة في سطر درجة الحرية التي قدرها $n = 9$ وعند القيمة الجدولية 21.7 نجد أن الاحتمال المقابل لها هو 0.99، ونكتب:

$$p(\chi < 21.7) = \mathbf{0.99}$$

$* \boldsymbol{p(x > 7.5)} = ?$

بتطبيق قواعد الاحتمالات نجد: $\boldsymbol{p(x > 7.5) = 1 - p(x < 7.5)}$

وبالنظر إلى جدول توزيع كاي تربيع دائما نجد أنه في السطر الخاص بنفس درجة الحرية السابقة 9 القيمة 7.5 غير موجودة وإنما هي محصورة بين القيمتين المتتاليتين 5.9 و8.34 والمقابلتين للاحتمالين 0.25 و0.5 على التوالي ومنه نستنتج مبدئيا أن الاحتمال المطلوب هنا وليكن p_0 محصور بين 0.25 و0.5 . ويمكن ايجاده بطريقة الحصر كما يلي: **(المقصود هنا هو $\boldsymbol{p(x < 7.5)}$** فقط **)**

$$0.25 \rightarrow 5.9$$

$$p_0 \rightarrow 7.5$$

$$0.5 \rightarrow 8.34$$

ومنه:

$$(0.5 - 0.25) \rightarrow (8.34 - 5.9)$$

$$(p_0 - 0.25) \rightarrow (7.5 - 5.9)$$

أي: $\boldsymbol{p_0 - 0.25 = \frac{(0.5-0.25)(7.5-5.9)}{(8.34-5.9)}}$

وبذلك يكون: $p_0 = \frac{0.4}{2.44} + 0.25 = \mathbf{0.4139}$

وبالرجوع إلى المطلوب نجد: $p(x > 7.5) = 1 - p(x < 7.5) = 1 - 0.4139 = \mathbf{0.5861}$

2. حساب الاحتمال التالي، إذا كانت n=8:

$* \boldsymbol{p(3.49 < \chi < 5.67)} = ?$

لدينا:

$$p(3.49 < X < 5.67) = p(x < 5.67) - p(x < 3.49)$$

وهذا حسب قواعد الاحتمالات، وبالنظر إلى جدول توزيع كاي تربيع في سطر درجة الحرية المقدرة بـ 8 نجد أن الاحتمال المقابل للقيمة الجدولية 5.67 هو 0.25 والاحتمال المقابل للقيمة الجدولية 3.49 هو 0.10 ومنه:

$$p\ (3.49 < X < 5.67) = p(x < 5.67) - p(x < 3.49) = 0.25 - 0.10 = 0.15$$

أي: $p(3.49 < X < 5.67) = \mathbf{0.15}$

3. إيجاد القيمة الجدولية $\boldsymbol{\chi^2_{p,n}}$ التي تحقق الاحتمالات التالية، وذلك عند n=50 :

$* p(\chi < \boldsymbol{\chi^2_{p,n}}) = 0.95$

أي: $\boldsymbol{X^2_{0.95;50}} = ?$

بالقراءة في جدول توزيع كاي تربيع عند درجة حرية قدرها 50 واحتمال قدره 95.0 نجد أن القيمة الجدولية الموافقة لهذه القيم هي: 67.5، أي:

$$X^2_{0.95;50} = \mathbf{67.5}$$

$* p(\chi > \boldsymbol{\chi^2_{p,n}}) = 0.05$

أي: $\boldsymbol{X^2_{0.05;50}} = ?$

تطبيقا لقواعد الاحتمالات دائما نجد أن:

$$p(\chi > \boldsymbol{\chi^2_{p,n}}) = 0.05 \Rightarrow 1 - p(x < \chi^2_{p,n}) = 0.05$$
$$\Rightarrow\ p(x < \chi^2_{p,n}) = 1 - 0.05 = 0.95$$

وهنا نلاحظ أننا تحصلنا على نفس الحالة السابقة وبذلك تكون القيمة الجدولية الموافقة لهذا الاحتمال عند درجة حرية قدرها 50 هي أيضا 67.5.

حل التمرين الثالث:

1. إيجاد قيمة t التي تحقق:

$* \boldsymbol{p(T < t_{p;n})} = \mathbf{0.9}$

عند n=10: $t_{0.9;10} = ?$

بالنظر إلى جدول توزيع ستيودنت عند درجة حرية قدرها 10 واحتمال قدره 0.9 نجد أن القيمة الجدولية المقابلة لهذه القيم هي 1.37، أي:

$$\boldsymbol{t_{0.9;10} = 1.37}$$

عند n=20: $t_{0.9;20} = ?$

بالنظر إلى جدول توزيع ستيودنت عند درجة حرية قدرها 20 واحتمال قدره 0.9 نجد أن القيمة الجدولية المقابلة لهذه القيم هي 1.32، أي:

$$t_{0.9;20} = 1.32$$

عند n=120: $t_{0.9;120} = ?$

بالنظر إلى جدول توزيع ستيودنت عند درجة حرية قدرها 120 واحتمال قدره 0.9 نجد أن القيمة الجدولية المقابلة لهذه القيم هي **1.29**، أي:

$$t_{0.9;120} = 1.29$$

2. إيجاد القيمة الجدولية t عند n تساوي: 7، 8، 10 على التوالي، والتي تحقق:

$* p(T > t) = 0.05$

$p(T > t) = 0.05 \Rightarrow 1 - p(T < t) = 0.05 \Rightarrow p(T < t) = 1 - 0.05 = 0.95$

أي أن المطلوب هنا هو: $t_{0.95;n} = ?$

عند n=7 : $t_{0.95;7} = ?$ ، من جدول توزيع ستيودنت وعند درجة حرية قدرها 7 واحتمال قدره 0.95 نجد أن القيمة الجدولية المقابلة لهذه القيم هي: 1.90 أي: $t_{0.95;7} = 1.90$

عند n=8 : $t_{0.95;8} = ?$ ، من جدول توزيع ستيودنت وعند درجة حرية قدرها 8 واحتمال قدره 0.95 نجد أن القيمة الجدولية المقابلة لهذه القيم هي: 1.86 أي: $t_{0.95;8} = 1.86$

عند n=10 : $t_{0.95;10} = ?$ ، من جدول توزيع ستيودنت وعند درجة حرية قدرها 10 واحتمال قدره 0.95 نجد أن القيمة الجدولية المقابلة لهذه القيم هي: 1.81 أي: $t_{0.95;10} = 1.81$

$* p(T < t_{p;n}) = 0.01$

نلاحظ هنا أن الاحتمال المقدر بـ 0.01 غير موجود في جدول توزيع ستيودنت الذي هو بين أيدينا (أقل من 0.55) ونعلم أن توزيع ستيودنت متناظر بالنسبة للصفر وعليه فإن القيمة الجدولية في هذه الحالة تكون سالبة وتستخرج بتطبيق خاصية التناظر كما يلي: $t_{p;n} = -t_{1-p;n}$

أي عند n=7 : $t_{0.01;7} = -t_{1-0.01;7} = -t_{0.99;7} = -3$

أي عند n=8 : $t_{0.01;8} = -t_{1-0.01;8} = -t_{0.99;8} = -2.90$

أي عند n=10 : $t_{0.01;10} = -t_{1-0.01;10} = -t_{0.99;10} = -2.76$

$* p(T < t_{p;n}) = 0.025$

هنا أيضا نستخدم خاصية التناظر لاستخراج القيم الجدولية المقابلة للاحتمال 0.025 لنفس الأسباب السابقة.

أي عند n=7 : $t_{0.025;7} = -t_{1-0.025;7} = -t_{0.975;7} = -2.36$

أي عند : n=8 $t_{0.025;8} = -t_{1-0.025;8} = -t_{0.975;8} = \mathbf{-2.31}$

أي عند : n=10 $t_{0.025;10} = -t_{1-0.025;10} = -t_{0.975;10} = \mathbf{-2.23}$

3.حساب الاحتمالات التالية:

$* \boldsymbol{p(T < 4.03)} = ?$

عند n=5: نبحث في جدول توزيع ستيودت عند درجة حرية قدرها 5 عن القيمة الجدولية 4.03 نجد أنها تقابل الاحتمال المقدر بـ 0.995، ومنه:

$$p(T < 4.03) = \mathbf{0.995}$$

$* \boldsymbol{p(T < 2.90)} = ?$

عند n=8: نبحث في جدول توزيع ستيودت عند درجة حرية قدرها 8 عن القيمة الجدولية 2.90 نجد أنها تقابل الاحتمال المقدر بـ 0.99، ومنه:

$$p(T < 2.90) = \mathbf{0.99}$$

$* \boldsymbol{p(T < 1.37)} = ?$

عند n=10: نبحث في جدول توزيع ستيودت عند درجة حرية قدرها 10 عن القيمة الجدولية 1.37 نجد أنها تقابل الاحتمال المقدر بـ 0.90، ومنه: $p(T < 1.37) = \mathbf{0.90}$

$* \boldsymbol{p(T < 0.765)} = ?$

عند n=10: نبحث في جدول توزيع ستيودت عند درجة حرية قدرها **10** عن القيمة الجدولية **0.765** نجد أنها محصورة بين القيمتين **0.7** و**0.879** والمقابلة للاحتمالين **0.75** و**0.8** على التوالي وعليه فإن الاحتمال المقابل لها محصور بين القيمتين **0.75** و**0.8** والذي يستخرج بطريقة الحصر كما يلي:

$$0.75 \rightarrow 0.7$$

$$p_0 \rightarrow 0.765$$

$$0.8 \rightarrow 0.879$$

ومنه:

$$(0.8 - 0.75) \rightarrow (0.879 - 0.7)$$

$$(p_0 - 0.75) \rightarrow (0.765 - 0.7)$$

أي:

$$p_0 - 0.75 = \frac{(0.8 - 0.75)(0.765 - 0.7)}{(0.879 - 0.7)}$$

وبذلك يكون: $p_0 = \frac{0.00325}{0.179} + 0.75 = \mathbf{0.7682}$

حل التمرين الخامس:

أ- هذه الدالة تمثل قانون t مع n يساوي 8 درجات حرية.

نقارن $f(x)$ مع العلاقة التالية لقانون t

$$f(x;n)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

ب : التوقع الرياضي: $E(X)$

$$E(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,dx=\frac{35}{64\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}x\left(1+\frac{x^2}{8}\right)^{-9/2}dx$$

$$g_1(x)=x\left(1+\frac{x^2}{8}\right)^{-9/2}$$

$$g_1(x)=-x\left(1+\frac{x^2}{8}\right)^{-9/2}=-g_1(x)$$

هذه الدالة زوجية وبالتالي الدالة تساوي الصفر

$$E(X)=0$$

حساب التباين $V(x)$

قبل كل شيء يجب حساب العزم الابتدائي من الدرجة 2

$$m_2(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\left(1+\frac{x^2}{8}\right)^{-9/2}dx$$

$$=\frac{35}{32\sqrt{2}}\int_{0}^{+\infty}\left(1+\frac{x^2}{8}\right)^{-7/2}dx$$

نقوم بتعويض $1+\frac{x^2}{8}=1/y$ (راجع الطريقة الثانية لإيجاد الثابت)

فنحصل على:

$$=\frac{-35}{32\sqrt{2}}8\sqrt{2}\int_1^0(1-y)y^{-1}y^{9/2}y^{-1/2}(1-y)^{-1/2}dy$$

$$=\frac{35}{4}\underbrace{\int_0^1 y^{3-1}(1-y)^{3/2-1}dy}_{\beta(3,3/2)}$$

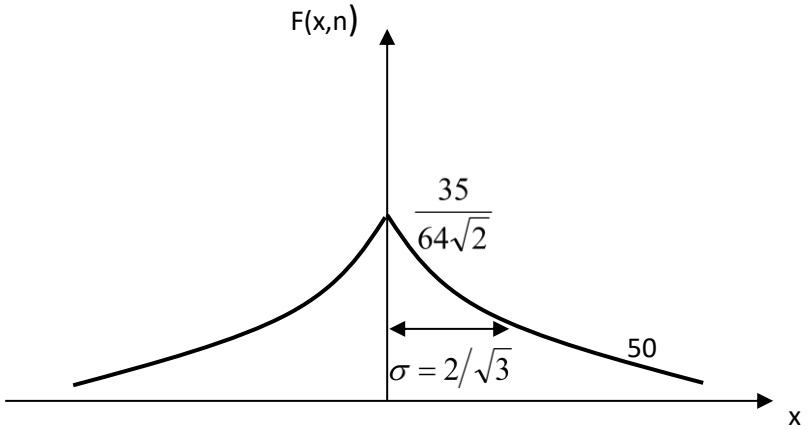
$$=\frac{35}{4}\frac{\Gamma(3)\Gamma(3/2)}{\Gamma(3/2)}=\frac{35}{4}\frac{2\Gamma(3/2)}{7/2\,5/2\,3/2\,\Gamma(3/2)}=4/3$$

في الأخير

$$V(x)=m_2(x)=4/3$$

لأن التوقع الرياضي كما نعلم يساوي 0

ج- الرسم البياني لهذا التوزيع



حل التمرين السادس:

أ- **صيغة دالة الكثافة تكون على النحو التالي:**

$$f(x;10):\begin{cases}\frac{1}{2^5 4!}x^4.e^{-\frac{x}{2}} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

$$f(x;10):\begin{cases}\frac{1}{2^5\Gamma(5)}x^4\,e^{-\frac{x}{2}} & x\geq 0\\ 0 & \end{cases}$$

ب- حساب كل من التوقع الرياضي و التباين

التوقع الرياضي: $E(X)$ يساوي :

$$E(X)=m_1(X)=n=10$$

$$V(X)=m_2(X)-\left[m_1(X)\right]^2=2n^2=20$$

ونستنتج أن:

$$E(X)=n=10$$
$$V(X)=2n=2(10)=20$$

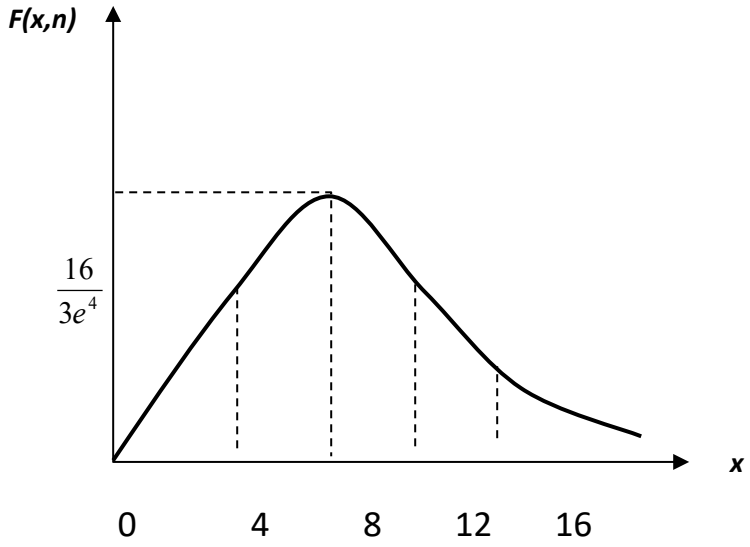
ج- الرسم البياني لـ: $f(x)$

لإيجاد قيمة M_o المنوال يجب اشتقاق $f(x,n)$

$$f(x,n)' = \frac{1}{2^5 4!}\left(4x^3 e^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}x^4 e^{-x/2}\right)$$

$$= \frac{x^3 e^{-x/2}}{2^5 4!2}(8-x) \Rightarrow M_0 = 8$$

$$X = 8 \Rightarrow f(8) = \frac{16}{3e^4}$$



$f(x,n)$ تكون دالة متناظرة عند: $x = 8$

الفصل الثالث:

توزيعات المعاينة

تمهيد:

نفرض أننا أخذنا عينه حجمها n من مجتمع ما، ثم سحبنا منها بعض المقاييس الإحصائية مثل المتوسط الحسابي، التباين، ... الخ، فإن كل مقياس من هذه المقاييس يعتبر متغير عشوائي في ذاته يختلف من عينه إلى أخرى، فهذا المتغير العشوائي يخضع لتوزيع معين ، فهذا التوزيع يسمى بتوزيع العينة، فمثلاانقول أن توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي وهو عبارة عن توزيع جميع المتوسطات الحسابية للعينات المأخوذة من نفس هذا المجتمع ذات الحجم n، وكذلك فإن توزيع المعاينة للتباين هو توزيع جميع التباينات المحسوبة من عينات لها نفس الحجم n ومأخوذة من نفس المجتمع، وهكذا .... الخ.

أولا: تعريف توزيع المعاينة:

غالبا ماتكون معالم المجتمع مجهولة حيث يتم تقديرها من بيانات العينة، وبما أنه يمكن سحب أكثر من عينة من نفس المجتمع فإن قيمة المقدر المحسوبة من بيانات العينة تكون عبارة عن متغير، ومادام السحب يتم عشوائيا فإن هذا المقدر هو متغير عشوائي أيضا والذي يمكن أن يكون له توزيع إحتمالي يسمى توزيع المعاينة وهو التوزيع الاحتمالي لأي مقدر نحسب قيمته من كل العينات العشوائية ذات الحجم المتساوي والممكن سحبها من هذا المجتمع.

ثانيا: توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة ($\bar{x}$):

يعتمد شكل ومعالم توزيع المعاينة على طبيعة المجتمع وحجمه وعلى طريقة سحب العينات (بإرجاع أو بدون إرجاع) هذا من جهة، ومن جهة أخرى نجد أنه في معظم البحوث الإحصائية يكون حجم المجتمع مجهول (مجتمع غير محدود) بالإضافة إلى أن حجم العينة يكون صغير جدا أمام حجم المجتمع (حجم العينة يمثل أقل من5% من حجم المجتمع أي: $\frac{n}{N} \leq 0,05$) ، وكما هو معلوم أنه إذا كان السحب بدون إرجاع ففي الحالتين يهمل معامل الإرجاع المعبر عنه بـ: $\frac{N-n}{N-1}$ ، وعليه سنكتفي بدراسة حالة السحب مع الإرجاع فقط.

1- إذا كان حجم العينة كبير ($n \geq 30$):

في هذه الحالة فإنه بغض النظر عن توزيع المجتمع فإن $\bar{x}$ يتبع تقريبا التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي قدره: $E(\bar{x})$ أو$\mu_{\bar{x}}$ وانحراف معياري قدره: $\sigma_{\bar{x}}$، أي:$\bar{X} \rightsquigarrow N(\mu_{\bar{x}}; \sigma_{\bar{x}})$.

وبذلك يكون: $Z = (\frac{\bar{x}-\mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}}) \rightsquigarrow N(0;1)$

* إذا كان تباين المجتمع σ^2 معلوم، فإن: $E(\bar{x}) = \mu_{\bar{x}} = \mu$، في حين $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ لأن: $V(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$.

* إذا كان تباين المجتمع σ^2 مجهول، فإن: $E(\bar{x}) = \mu_{\bar{x}} = \mu$، في حين $\sigma_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n-1}}$ لأن: $V(\bar{x}) = \frac{S^2}{n-1}$، حيث نلاحظ في هذه الحالة أنه يتم الاعتماد على تباين العينة بدلا من تباين المجتمع والذي يعطى بالعلاقة التالية:$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}$.

مثال:

مجتمع طبيعي متوسطه الحسابي يقدر بـ: 120 وانحرافه المعياري يقدر بـ: 4، سحبنا منه عينة عشوائية حجمها 36 مفردة.

المطلوب:

- أحسب الاحتمالات التالية:**أ-** $P(\overline{X} \leq 125)$ ؟ ، **ب-** $P(\overline{X} > 122)$ ؟ ، **ج-** $P(118{,}5 \leq \overline{X} \leq 121)$ ؟

الحل:

بما أن توزيع المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي و$n \geq 30$ ، بالإضافة إلى تباين المجتمع معلوم: $\sigma^2 = 4^2 = 16$، فإن $\bar{x}$ يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي قدره: $\mu_{\bar{x}} = 120$ وانحراف معياري قدره: $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{36}} = \frac{4}{6} = 0{,}67$ أي:$\overline{X} \rightsquigarrow N(120; 0{,}67)$.

وبذلك يكون: $Z = (\frac{\bar{x}-120}{0{,}67}) \rightsquigarrow N(0;1)$.

- حساب الاحتمالات التالية:

أ- $P(\overline{X} \leq 125)$ ؟

$$P(\overline{X} \leq 125) \rightarrow P\left(Z \leq \frac{125-120}{0{,}67}\right) = P(Z \leq 7{,}46) = F(+\infty) = 1$$

ب- $P(\overline{X} > 122)$ ؟

$$P(\overline{X} > 122) \rightarrow P\left(Z > \frac{122-120}{0{,}67}\right) = P(Z > 2{,}99) = 1 - P(Z \leq 2{,}99)$$
$$= 1 - F(2{,}99) = 1 - 0{,}9986 = 0{,}0014$$

ج- $P(118{,}5 \leq \overline{X} \leq 121)$ ؟

$$P(118 \leq \overline{X} \leq 121) \rightarrow P\left(\frac{118{,}5-120}{0{,}67} \leq Z \leq \frac{121-120}{0{,}67}\right) = P(-2{,}24 \leq Z \leq 1{,}49)$$
$$= P(Z \leq 1{,}49) - P(Z \leq -2{,}24) = P(Z \leq 1{,}49) - [1 - P(Z \leq 2{,}24)\ ]$$
$$= P(Z \leq 1{,}49) + P(Z \leq 2{,}24) - 1$$
$$= F(1{,}49) + F(2{,}24) - 1 = 0{,}9319 + 0{,}9875 - 1 = 0{,}9194$$

2- إذا كان حجم العينة صغير ($n < 30$):

إذا كان المجتمع الذي سحبت منه العينات العشوائية ذات الحجم n ،حيث:n أقل من 30 يتبع **التوزيع الطبيعي** بمتوسط حسابي μ **وتباين مجهول** وكان السحب مع الارجاع أو بدون إرجاع من مجتمع غير محدود فإنه في هذه الحالة يصبح لدينا المتغير T حيث:$T = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} \rightsquigarrow T_{n-1}$ ، أي في هذه الحالة: $E(\bar{x}) = \mu_{\bar{x}} = \mu$، في حين $\sigma_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n-1}}$ لأن: $V(\bar{x}) = \frac{S^2}{n-1}$.

مثال:

إذا إفترضنا أنّ عدد طلبة السنة الأولى بكلية الاقتصاد في إحدى الجامعات الجزائرية كبير جدّا، و علمنا أن علاماتهم في مقياس الإحصاء 2 تخضع لتوزيع طبيعي، حيث متوسطها الحسابي يقدر بـ: 12، قمنا بسحب عينة عشوائية مكونة من 17 طالب، فوجدنا أنّ تباين العينة يقدّر بـ: 225.

المطلوب:

1– أحسب احتمال أن يكون متوسط علامات مقياس الإحصاء 2 في هذه العينة أقل من أو يساوي 14؟

2– أحسب احتمال أن يكون متوسط علامات مقياس الإحصاء 2 في هذه العينة أكبر من 12,48؟

الحل:

بما أن مجتمع غير محدود وتوزيع المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي و $n < 30$ ، بالإضافة إلى تباين المجتمع مجهول، فإن $\bar{x}$ يتبع ستيودنت بمتوسط حسابي قدره: $\mu_{\bar{x}} = 12$ وانحراف معياري قدره: $\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{S^2}{n-1}} = \frac{S}{\sqrt{n-1}} = \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{17-1}} = 3,75$

أي: $T = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} \rightsquigarrow T_{17-1}$ ، وبذلك يكون: $T = \frac{\bar{x}-12}{3,75} \rightsquigarrow T_{16}$.

1– حساب احتمال أن يكون متوسط علامات مقياس الإحصاء 2 في هذه العينة أقل من أو يساوي 14:

T يتبع توزيع ستيودنت بدرجة حرية $n-1$، أي: $T \rightsquigarrow T_{16}$.

$$P(\bar{X} \leq 14) \rightarrow P\left(\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} \leq \frac{\bar{x}-\mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}}\right) = P\left(T \leq \frac{14-12}{3,75}\right) = P(T \leq 0,533)$$

نبحث في جدول توزيع ستيودت عند درجة حرية قدرها 16 عن القيمة الجدولية 0,533 نجد أنها محصورة بين القيمتين 0,258 و0,535 والمقابلة للاحتمالين 0,6 و0,7 على التوالي وعليه فإن الاحتمال المقابل لها محصور بين القيمتين 0,6 و0,7 والذي يستخرج بطريقة الحصر كما يلي:

$$0,6 \rightarrow 0,258$$
$$p_0 \rightarrow 0,533$$
$$0,7 \rightarrow 0,535$$

ومنه:
$$(0,7-0,6) \rightarrow (0,535-0,258)$$
$$(p_0-0,6) \rightarrow (0,533-0,258)$$

أي:

$$p_0 - 0,6 = \frac{(0,7-0,6).(0,533-0,258)}{(0,535-0,258)}$$

وبذلك يكون:
$$p_0 = \frac{0,0275}{0,277} + 0,6 = 0,6993$$

2– حساب احتمال أن يكون متوسط علامات مقياس الإحصاء 2 في هذه العينة أكبر من 12,48:

$$P(\bar{X} > 12,48) \rightarrow P\left(\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} > \frac{\bar{x}-\mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}}\right) = P\left(T > \frac{12,48-12}{3,75}\right) = P(T > 0,128) = 1 - P(T \leq 0,128)$$

من جدول توزيع ستيودنت عند درجة حرية $n = 16$ فإن القيمة الجدولية 0,128 تقابل الاحتمال 0,55 وبذلك يكون:

$$P(T > 0,128) = 1 - P(T \leq 0,128) = 1 - 0,55 = 0,45$$

ثالثا: توزيع المعاينة لمجموع أو فرق بين متوسطين:

أما إذا كان المجتمع غير طبيعي فإن $\overline{X}$ لا تخضع للتوزيع الطبيعي ولكنها تتوزع توزيع يكون قريباً من التوزيع الطبيعي لقيم n الكبيرة $(n \geq 30)$ حيث أن:

$$z = \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu)}{\sigma} \xrightarrow[n \to \infty]{as} N(0,1)$$

وتعتبر النتيجة السابقة الهامة جداً في الإحصاء وخاصة في التطبيقات العلمية وتسمى نظرية النهاية المركزية Central Limit Theorem والتي تنص على أنه في حالة العينات الكبيرة الحجم فإن المتوسط الحسابي $\overline{X}$ يخضع للتوزيع الطبيعي بالمعاملات μ و $\frac{\sigma^2}{n}$ ، حيث أن σ^2, μ هما متوسط وتباين المجتمع الأصلي بغض النظر عن شكل توزيع المجتمع الأصلي. ومن ثم فإنه لقيم n الكبيرة تتحقق العلاقة بصرف النظر عن توزيع المجتمع الأصلي.

كذلك فإنه إذا كان $\overline{X}_1$ هو المتوسط الحسابي لعينه عشوائية مسحوبة من مجتمع لانهائي متوسطه هو μ_1 وانحرافه المعياري هو σ_1، وكان $\overline{X}_2$ هو المتوسط الحسابي لعينة عشوائية مسحوبة من مجتمع لانهائي آخر متوسط μ_2 وانحرافه المعياري σ_2 وكانت العينتين مستقلتين فإن المجموع الجبري لمتوسط العينتين يخضع لتوزيع المعاينة بالمعاملات:

$$\mu_{(\bar{x} \pm \bar{x}_2)} = \mu_1 \pm \mu_2 \quad \text{and} \quad \sigma^2_{(\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2)} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

حيث n_1, n_2 هما حجم العينة الأولى والثانية.

وإذا كان المجتمعين الأصليين طبيعيين فإن $(\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2)$ يخضع لتوزيع طبيعي أيضاً بالبارامترات المعطاة وعليه فإنه في هذه الحالة:

$$z = \frac{(\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2) - (\mu_1 \pm \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

أما إذا كان أحد المجتمعين أو كليهما لا يتوزع توزيعاً طبيعياً فإن $(\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2)$ لا يتوزع توزيعاً طبيعياً كذلك ، ولكن لقيم n_1, n_2 الكبيرة فإنه طبقاً لنظرية النهاية المركزية السابقة فإن $(\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2)$ يتوزع توزيعاً قريباً من التوزيع الطبيعي وبذلك يمكننا استخدام نفس العلاقة في حالة العينات الكبيرة.

رابعا: توزيع المعاينة لنسبة العينة (f):

إذا كان إهتمامنا منصبا على نسبة صفة أو خاصية معينة في المجتمع (تعبر لنا هذه النسبة عن احتمال النجاح p) كنسبة الأمية في الجزائر، نسبة الأفراد العاطلين عن العمل في منطقة ما ، نسبة الأفراد الناجحين في شهادة البكالوريا في ولاية ما...الخ وسحبنا عينات ذات الحجم n من هذا المجتمع وقمنا بحساب نسبة هذه الصفة في كل عينة سنجد أن f تتغير من عينة إلى أخرى وبالتالي فهي متغير عشوائي له توزيع احتمالي يطلق عليه اسم توزيع المعاينة للنسبة.

ملاحظة: حساب نسبة هذه الصفة في العينة حسب العلاقة التالية: $\mathbf{f} = \frac{\text{عدد المفردات التي تحمل هذه الصفة في العينة}}{\text{حجم العينة}} = \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{n}}$

أ.إذا كان حجم العينة كبير ($\mathbf{n \geq 30}$):

في هذه الحالة فإنه بغض النظر عن توزيع المجتمع فإن f تتبع تقريبا التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي قدره: $E(f)$ أو μ_f وانحراف معياري قدره: σ_f، أي: $f \rightsquigarrow N(\mu_f; \sigma_f)$.

وبذلك يكون: $Z = (\frac{f-\mu_f}{\sigma_f}) \rightsquigarrow N(0;1)$

حيث أن: $E(f) = \mu_f = p$، في حين $\sigma_f = \sqrt{\frac{p.q}{n}}$ لأن: $V(f) = \frac{p.q}{n}$، وتجدر الإشارة أن: $q = 1 - p$.

ومنه تصبح كالتالي: $Z = \frac{f-p}{\sqrt{\frac{p.q}{n}}} \rightsquigarrow N(0;1)$

ملاحظة :عندما نكون بصدد تقدير النسبة لابد أن يكون حجم العينة كبير، وإذا كان المجتمع لا يتوزع طبيعيا هنا لابد من أخذ عينة كبيرة.

مثال:

إذا كانت نسبة الأفراد ذوي الدخل المحدود في أحد المجتمعات تقدر بـ: 10%، وقمنا بسحب عينة عشوائية حجمها 150 فرد من هذا المجتمع ، لتكن f نسبة الأفراد ذوي الدخل المحدود في هذه العينة.

المطلوب:

1– أحسب احتمال أن تكون نسبة الأفراد ذوي الدخل المحدود في هذه العينة تقل عن 8%؟

2– أحسب احتمال أن تكون نسبة الأفراد ذوي الدخل المحدود في هذه العينة تفوق 15%؟

3– أحسب احتمال أن تكون نسبة الأفراد ذوي الدخل المحدود في هذه العينة محصورة بين 10% و17%؟

الحل:

بما أن توزيع المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي لأن $n \geq 30$ ، فإن f تتبع تقريبا التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي قدره: μ_f وانحراف معياري قدره: σ_f، أي: $f \rightsquigarrow N(\mu_f; \sigma_f)$.

وبذلك يكون: $Z = (\frac{f-\mu_f}{\sigma_f}) \rightsquigarrow N(0;1)$

حيث أن: $\mu_f = p = 10\% = 0,1$ ، في حين $\sigma_f = \sqrt{\frac{p.q}{n}} = \sqrt{\frac{0,1\times0,9}{150}} = \sqrt{0,0006} = 0,024$.

1- حساب احتمال أن تكون نسبة الأفراد ذوي الدخل المحدود في هذه العينة تقل عن 8%:

$$P(f < 0,08) \rightarrow P\left(Z < \frac{0,08-0,1}{0,024}\right) = P(Z < -0,83)$$
$$P(Z < -0,83) = 1 - P(Z \leq 0,83) = 1 - F(0,83) = 1 - 0,7967 = 0,2033$$

2- حساب احتمال أن تكون نسبة الأفراد ذوي الدخل المحدود في هذه العينة تفوق 15%:

$$P(f > 0,15) \rightarrow P\left(Z > \frac{0,15-0,1}{0,024}\right) = P(Z > 2,08) = 1 - P(Z \leq 2,08)$$
$$= 1 - F(2,08) = 1 - 0,9812 = 0,0188$$

3- حساب احتمال أن تكون نسبة الأفراد ذوي الدخل المحدود في هذه العينة محصورة بين10%و17%:

$$P(0,1 \leq f \leq 0,17) \rightarrow P\left(\frac{0,1-0,1}{0,024} \leq Z \leq \frac{0,17-0,1}{0,024}\right) = P(0 \leq Z \leq 2,92)$$
$$= P(Z \leq 2,92) - P(Z \leq 0) = F(2,92) - F(0) = 0,9982 - 0,5 = 0,4982$$

خامسا: توزيع المعاينة لمجموع أو فرق بين نسبتين:

نفترض أن العينات العشوائية المسحوبة من المجتمعين مستقلة عن بعضها البعض، وإذا حسبنا كل الفروق أو المجاميع بين نسب عينات المجتمع الأول ونسب عينات المجتمع الثاني، فسنحصل على توزيع المعاينة للفرق أو مجموع بين نسبتي العينتين $(f_2 \mp f_1)$ وإذا حسبنا المتوسط الحسابي $(\mu_{f_2 \mp f_1})$ والتباين $(V_{f_2 \mp f_1})$ لهذا التوزيع، فنجد أن هناك علاقات تربط بين هذين المقياسين مع نسبة المجتمع الأول ونسبة المجتمع الثاني، وذلك كما يلي: $\mu_{f_2 \mp f_1} = p_2 \mp p_1$

فإذا كان السحب بالإرجاع أي المجتمع غير منتم يكون التباين للفرق بين نسبتي العينتين كما يلي:

$$V(f_2 \mp f_1) = \frac{p_1 \cdot q_1}{n_1} + \frac{p_2 \cdot q_2}{n_2}$$

وعلى هذا الأساس فإنم إذا كان سحبنا عينتين عشوائيتين مستقلتان من مجتمعين، وطبقا لنظرية النهاية المركزية يكون توزيع المعاينة للفرق أو مجموع بين نسبتي العينتين $(f_2 \mp f_1)$ توزيعا قريبا من التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي وتباين، ومن ثم فإن المتغير العشوائي الطبيعي المعياري **Z** يعطى بالعلاقة الرياضية التالية:

$$Z = (\frac{f_2 \mp f_1 - \mu_{f_2 \mp f_1}}{\sigma_{f_2 \mp f_1}}) \rightsquigarrow N(0;1)$$

سادسا: توزيع المعاينة للتباين (S^2):

نعلم أنه إذا قمنا بسحب عينة متكونة من n عنصر من مجتمع ما فإن تباين العينة هو: $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$.

نظرية :إذا تم سحب عينات عشوائية حجمها n عنصر من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي μ وانحراف معياري σ فإن المتغير العشوائي المعرف كما يلي: $\frac{n S^2}{\sigma^2} = \frac{n}{\sigma^2}.\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\sigma^2}$ يتبع توزيع كاي تربيع بدرجة حرية $n-1$، أي: $\frac{n S^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow X^2_{n-1}$.

مثال:

مجتمع طبيعي يقدر انحرافه المعياري بـ: 3، سحبنا منه عينة عشوائية حجمها 24 مفردة.

المطلوب:

1– أحسب احتمال أن يكون تباين العينة يقل أو يساوي 12؟

2– أحسب احتمال أن يكون تباين العينة يفوق 15,6؟

الحل:

نعلم أن إذا كان لدينا مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي وسحبت منه عينات عشوائية حجمها n عنصر فإن المتغير العشوائي المعرف كما يلي: $\frac{n S^2}{\sigma^2}$ يتبع توزيع كاي تربيع بدرجة حرية $n-1$، أي: $\frac{n S^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow X^2_{n-1}$.

1– حساب احتمال أن يكون تباين العينة يقل أو يساوي 12:

$$P(S^2 \leq 12) \rightarrow P\left(\frac{n S^2}{\sigma^2} \leq \frac{24\times 12}{9}\right) = P(X^2_{24-1} \leq 32) = P(X^2_{23} \leq 32)$$

نبحث في جدول توزيع كاي تربيع عند درجة حرية قدرها 23 عن القيمة الجدولية 32 نجد أنها تقابل الاحتمال قدره: 0,9. ، أي أن: $P(S^2 \leq 12) = 0,9$.

2– حساب احتمال أن يكون تباين العينة يفوق15,6:

$$P(S^2 > 15,6) \rightarrow P\left(\frac{n S^2}{\sigma^2} > \frac{24\times 15,6}{9}\right) = P(X^2_{24-1} > 41,6) = 1 - P(X^2_{23} \leq 41,6)$$

نبحث في جدول توزيع كاي تربيع عند درجة حرية قدرها 23 عن القيمة الجدولية 41,6 نجد أنها تقابل الاحتمال قدره: 0,99، أي أن: $P(X^2_{23} \leq 41,6) = 0,99$ ، ومنه:

$$P(S^2 > 15,6) = 1 - P(X^2_{23} \leq 41,6) = 1 - 0,99 = 0,01$$

سابعا: توزيع المعاينة لمجموع أو فرق بين تباينين:

إذا كان $s^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$ هو تباين عينه عشوائية حجمها n مأخوذة من مجتمع متوسطه μ وتباينه σ^2 وعزمه الرابع حول المتوسط هو μ_4 فإن:

$$\mu_{S^2} = \sigma^2 \qquad \text{and} \qquad \sigma^2{}_{S^2} = \frac{\mu_4 - \sigma^2}{n-1}$$

وإذا كان المجتمع طبيعي فإن $\mu_4 = 3\sigma^2$ وبالتالي فإن:

$$\sigma^2_{s^2} = \left(\frac{2}{n-1}\right)\sigma^2$$

نلاحظ هنا أن S^2 لا تتوزع طبيعي حتى ولو كان المجتمع طبيعي ، ولكنه يتوزع توزيع قريب من التوزيع الطبيعي وذلك لقيم nالكبيرة $(n \geq 100)$. أما إن كان المجتمع الأصلي يخضع للتوزيع الطبيعي فإن المتغير $(n-1)s^2/\sigma^2$ يخضع لتوزيع **يسمى** توزيع مربع كاي χ^2 بعدد درجات حرية يساوي $n-1$. أي أن:

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \quad \sim \quad \chi^2(n-1)$$

ويعتبر توزيع مربع كاي من التوزيعات الهامة في الإحصاء التطبيقي ودالة كثافته هي

$$f(y) = y^{\frac{v-1}{2}} e^{-y/2} \quad , \quad y > 0$$

حيث v هي عدد درجات الحريه للتوزيع وتعتبر هي المعامل الوحيد له ويتضح من شكل الدالة أنها داله متصلة وتقع بأكملها فوق النصف الموجب لمحور السينات ، منحنى هذه الداله غير متماثل ويعتبر من المنحنيات موجبة الالتواء ويقل التواؤه (وبالتالي يقترب من التماثل) كما زادت درجات الحريه v. وتكون القيمة المتوقعة لهذا التوزيع هي v و تباينه هو $2v$ أي بمعنى أن:

$$E(y) = \mu_y = v$$

$$V(y)=\sigma^2=2v$$

$$\frac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2} \quad \sim \quad F(n_1-1,n_2-1)$$

حيث أن $F(n_1-1,n_2-1)$ تسمى بتوزيع F بدرجتي الحريه n_1-1 و n_2-1 و دالة الكثافة الإحتماليه للمتغير y الذي يخضع لتوزيع F بدرجتي الحريه v_1,v_2 تعطى بالصورة:

$$f(y) = \frac{y^{\frac{v_1}{2}-1}}{(v_1y+v_2)^{\frac{v_1+v_2}{2}}} \quad , \quad y>0$$

وكما يتضح من الداله أن المنحنى يقع بالكامل في النصف الموجب لمحور السينات كما في حالة توزيع χ^2 ، وهو أيضاً غير متماثل وموجب الالتواء ولكن يقترب من التماثل كلما زادت درجات الحريه v_1,v_2.

ذكرنا سابقاً أنه إذا كان $\overline{X}$ هو المتوسط الحسابي لعينه حجمها n مأخوذة من مجتمع طبيعي بالمعاملات μ,σ^2 فإن

$$z=\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{\sigma} \quad \sim \quad N(0,1)$$

هذا إذا كانت σ معلومة ، ولكن في حالة ما إذا كانت قيمة σ غير معلومة فإننا نستخدم بدلا منها الانحراف المعياري للعينة S ولكن في هذه الحالة يصبح المتغير $\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{S}$ يخضع لتوزيع يعرف بتوزيع t ستيودنت $t-\text{student}$ بدرجات حريه $n-1$ ، أي أن

$$t=\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{s} \quad \sim \quad t(n-1)$$

دالة الكثافة لتوزيع t بدرجات حريه v تعطي بالصورة:

$$f(t)= \quad (1+\frac{t^2}{v})^{-\frac{v+1}{2}}$$

وهو توزيع متماثل حول محور y وهو يشبه في ذلك المنحنى الطبيعي القياسي $N(0,1)$ ولكنه أقل تحدباً من التوزيع الطبيعي القياسي ولكنه يقترب من التوزيع الطبيعي كلما زادت درجات الحريه.

وإذا كان $\overline{X}_2$ و S_1^2 هما المتوسط الحسابي والتباين لعينه حجمها n_1 مأخوذة من مجتمع طبيعي متوسط هو μ_1 وكان $\overline{X}_2$ و S_2^2 هما المتوسط الحسابي والتباين لعينه أخرى حجمها n_2 ومأخوذة من مجتمع طبيعي آخر له المتوسط μ_2 وكانت العينتان مستقلتان فإن المتغير

$$t=\frac{(\overline{X}_2 \pm \overline{X}_2)-(\mu_1 \pm \mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \quad \sim \quad t(n_1+n_2-2)$$

حيث أن $S_p^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$ يسمى بالتباين المشترك للعينتين.The Pooled Variance

ان s_1^2 هو تباين عينه عشوائية حجمها n_1 مسحوبة من مجتمع طبيعي $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ ، وكان s_2^2 هو تباين عينه عشوائية أخرى حجمها n_2 ومسحوبة من مجتمع طبيعي آخر $N(\mu_2,\sigma_2^2)$

تمارين محلولة

التمرين الأول:

بغرض المساهمة في حماية الأطقم الطبية والشبه طبية من فيروس كورونا في الجزائر، تبنت العديد من المؤسسات المصغرة صناعة المآزر الطبية ذات الاستخدام الواحد **"disposable médical aprons"** والتي تنقسم إلى ثلاثة أنواع حسب نوع المادة الأولية المستعملة في إنتاجها، حيث تطلبت عملية الرقابة على جودة إنتاج أحد هذه المؤسسات اختيار عينة بنسبة 30% من الانتاج الاجمالي لها وكان التوزيع كما يلي: 40 ألف مئزر من النوع أ، 35 ألف مئزر من النوع ب و25 ألف مئزر من النوع ج.

المطلوب:

1. حدد حجوم العينات المطلوب اختيارها؟

2. أحسب كلا من $E(\overline{x})$ و$V(\overline{x})$، إذا علمنا أن العينات الممكن تشكيلها في هذه الدراسة هو4 عينات وكان متوسط عدد المآزر التالفة في كل عينة من هذه العينات هو على التوالي: 33، 35، 34، 36؟

التمرين الثاني:

نفترض أن أحد المجتمعات الإحصائية يتكون من 4 أفراد حسب العمر كما يلي: 16، 18، 50، 54.

المطلوب:

1. أحسب وسط وتباين هذا المجتمع؟

2. أحسب كلا من $E(\overline{x})$ و$V(\overline{x})$ عندما نسحب عنصرين من هذا المجتمع، في الحالات التالية:

أ.عينة عشوائية بسيطة مع الإعادة؟

ب. عينة عشوائية بسيطة بدون إعادة؟

ج. عينة عشوائية طبقية؟

3. قارن بين هذه النتائج الثلاث؟

التمرين الثالث:

صمّمت آلة صناعية لإنتاج قطع غيار من نوع معين بوزن متوسط مقداره 20غ بانحراف معياري قدره 1غ، بغرض مراقبة هذه الآلة تمّ سحب عينة عشوائية من 100 وحدة من إنتاج هذه الآلة، ليكن $\overline{X}$ متوسط وزن قطع الغيار في هذه العينة.

المطلوب:

1. ما هو القانون الاحتمالي لـ $\overline{X}$؟

2. أحسب الاحتمالات التالية:$P(\overline{X} \leq 20,1)$ ، $P(20,1 \leq \overline{X} \leq 20,3)$؟

التمرين الرابع:

إذا علمت أنّ متوسط المبالغ المودعة في الحسابات الجارية في مصرف ما هو 1560 **و.ن** وكان عدد الحسابات الجارية في هذا المصرف كبير جدّا، قمنا بسحب عينة عشوائية مكونة من 20 حساب فوجدنا أنّ تباين العينة مقدّر بـ: 600 **و.ن**، نفترض أنّ توزيع المبالغ المودعة في الحسابات الجارية هو التوزيع الطبيعي.

المطلوب:

1. أحسب احتمال أن يكون متوسط المبالغ المودعة في الحسابات الجارية في هذه العينة أكبر من 1567,5 **و.ن؟**

التمرين الخامس:

إذا كانت نسبة المتعلمين من الإناث في قرية ما هي 20% وسحبنا عينة عشوائية من 100 أنثى من هذه القرية، لتكن f نسبة المتعلمين من الإناث في هذه العينة.

المطلوب:

1. ما هو القانون الإحتمالي لـ f؟ ثم أحسب μ_f و σ_f ؟

2. أحسب احتمال أن تكون نسبة المتعلمين من الإناث في هذه العينة محصورة بين 18% و 20%؟

التمرين السادس

مجتمع طبيعي تباينه مقدّر بـ: 15، إذا سحبنا مع الإرجاع عينة حجمها: n=5 .

المطلوب:

1. أحسب احتمال أن يكون تباين العينة أقل من أو يساوي 10,5؟

الحلول

حل التمرين الأول:

1. بما أن المجتمع هنا غير متجانس فإن العينة المختارة هنا هي **عينة طبقية**، وعليه نقوم أولا بحساب حجم العينة n حيث:

$$n = 0.3 \times (40.000 + 35.000 + 25.000) = 0.3 \times (100.000) = 30.000$$

علما أن: $n = n_1 + n_2 + n_3$

حيث: n_1 هو حجم العينة الذي ينبغي سحبه من الطبقة الأولى أي من مجموع المآزر من النوع أ، وn_2 هو حجم العينة الذي ينبغي سحبه من الطبقة الثانية أي من مجموع المآزر من النوع ب، وn_3 هو حجم العينة الذي ينبغي سحبه من الطبقة الثالثة أي من مجموع المآزر من النوع ج، والتي تُكوِن في مجموعها العينة **الطبقية** المطلوب سحبها من هذا المجتمع، حيث أن عملية السحب هذه تكون حسب وزن كل طبقة في المجتمع كما يلي:

$$n_1 = 30.000 \times \frac{40.000}{100.000} = 12.000$$

$$n_2 = 30.000 \times \frac{35.000}{100.000} = 10.500$$

$$n_3 = 30.000 \times \frac{25.000}{100.000} = 75.00$$

2. حساب كل من $E(\bar{x})$ و$V(\bar{x})$ حيث أن: عدد العينات الممكن تشكيلها هو4 عينات ومتوسط عدد المآزر التالفة في كل عينة من هذه العينات هو على التوالي: 33، 35، 34، 36:

$$E(\bar{x}) = \mu_{\bar{x}} = \frac{\sum \bar{x}_i}{4} = \frac{33+35+34+36}{4} = \frac{138}{4} = \mathbf{34.5}$$

$$v(\bar{x}) = \sigma^2_{\bar{x}} = \sum_{i=1}^{4} \frac{(\bar{x}_i - E(\bar{x}))^2}{4} = \sum_{i=1}^{4} \frac{(\bar{x}_i - 34.5)^2}{4} = \frac{(33-34.5)^2+(35-34.5)^2+(34-34.5)^2+(36-34.5)^2}{4} = \frac{2.25+0.25+0.25+2.25}{4} = \frac{5}{4} = \mathbf{1.25}$$

حل التمرين الثاني:

بفرض أن أحد المجتمعات الإحصائية يتكون من 4 أفراد حسب العمر كما يلي: 16، 18، 50، 54.

1. حساب وسط وتباين هذا المجتمع:

– الوسط الحسابي للمجتمع هو μ حيث:

$$\mu = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{16+18+50+54}{4} = 34,5$$

– تباين المجتمع هو σ^2 حيث:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{4} \frac{(x_i-\mu)^2}{N} = \frac{(16-34.5)^2+(18-34.5)^2+(50-34.5)^2+(54-34.5)^2}{4} = \frac{342.25+272.25+240.25+380.25}{4} = \mathbf{308.75}$$

2.أ. حساب كلا من $E(\bar{x})$ و$V(\bar{x})$ عندما نسحب عنصرين من هذا المجتمع، في حالة عينة عشوائية بسيطة مع الإعادة(ESAR):

هنا نعتبر أن الترتيب مهم، ففي هذه الحالة فإن عدد العينات الممكن سحبها في هذه الحالة هو 16 عينة وهي تمثل ترتيبة مع تكرار (قائمة):

$N^2 = 4^2 = 16$.

العينة	$\bar{x}$	العينة	$\bar{x}$	العينة	$\bar{x}$	العينة	$\bar{x}$
(16،18)	17	(18،16)	17	(50،16)	33	(54،16)	35
(16،50)	33	(18،50)	34	(50،18)	34	(54،18)	36
(16،54)	35	(18،54)	36	(50،54)	52	(54،50)	52
(16،16)	16	(18،18)	18	(50،50)	50	(54،54)	54

$$E(\bar{x}) = \mu_{\bar{x}} = \frac{\sum \bar{x}_i}{16} = \frac{17+33+35+16+17+34+36+18+33+34+52+50+35+36+52+54}{16} = \frac{552}{16} = \mathbf{34.5 = \mu}$$

$$v(\bar{x}) = \sigma^2{}_{\bar{x}} = \sum_{i=1}^{16} \frac{(\bar{x}_i-E(\bar{x}))^2}{16} = \sum_{i=1}^{16} \frac{(\bar{x}_i-34.5)^2}{16} = \frac{(17-34.5)^2+(33-34.5)^2+(35-34.5)^2+\cdots+(54-34.5)^2}{16} = \frac{306.25+2.25+0.25+\cdots+380.25}{16} = \frac{2470}{16} = \mathbf{154.375} = \frac{\mathbf{308.75}}{\mathbf{2}} = \frac{\boldsymbol{\sigma^2}}{\boldsymbol{n}}$$

2.ب. حساب كلا من $E(\bar{x})$ و$V(\bar{x})$ عندما نسحب عنصرين من هذا المجتمع،في حالة عينة عشوائية بسيطة بدون إعادة(ESSR):

هنا نعتبر أن الترتيب غير مهم ، ففي هذه الحالة فإن العينات المتشابهة العناصر تكون مستحيلة الظهور ويكون عدد العينات الممكنة هو 6 عينات بدل 16 عينة وهي تمثل توفيقة بدون تكرار: $C_N^n = C_4^2 = \frac{4.3.2!}{2!.(2.1)} = 6$.

العينة	$\bar{x}$	العينة	$\bar{x}$
(16،18)	17	(18،50)	34
(16،50)	33	(18،54)	36
(16،54)	35	(50،54)	52

$$E(\bar{x}) = \mu_{\bar{x}} = \frac{\sum \bar{x}_i}{6} = \frac{17+33+35+34+36+52}{6} = \frac{207}{6} = \mathbf{34.5 = \mu}$$

$$v(\bar{x}) = \sigma^2{}_{\bar{x}} = \sum_{i=1}^{6} \frac{(\bar{x}_i-E(\bar{x}))^2}{6} = \sum_{i=1}^{6} \frac{(\bar{x}_i-34.5)^2}{6} = \frac{(17-34.5)^2+(33-34.5)^2+(35-34.5)^2+(34-34.5)^2+(36-34.5)^2+(52-34.5)^2}{6} = \frac{306.25+2.25+0.25+0.25+2.25+306.25}{6} = \frac{617.5}{6} = 102.916667 = \frac{\boldsymbol{\sigma^2}}{\boldsymbol{n}}.\frac{\mathbf{N-n}}{\mathbf{N-1}} = \frac{\mathbf{308.75}}{\mathbf{2}}.\frac{\mathbf{4-2}}{\mathbf{4-1}}$$

2.ج. حساب كلا من $E(\bar{x})$ و$V(\bar{x})$ عندما نسحب عنصرين من هذا المجتمع، في حالة عينة عشوائية طبقية:

هنا يمكن تقسيم هذا المجتمع الى طبقتين فقط هما:$N_1 = \{16; 18\}$، $N_2 = \{50; 54\}$، والعينات الممكن تشكيلها هي:

العينة	(16،50)	(16،54)	(18،50)	(18،54)
$\bar{x}$	33	35	34	36

$$E(\bar{x}) = \mu_{\bar{x}} = \frac{\sum \bar{x}_i}{4} = \frac{33+35+34+36}{4} = \frac{138}{4} = \mathbf{34.5 = \mu}$$

$$v(\bar{x}) = \sigma^2{}_{\bar{x}} = \sum_{i=1}^{4} \frac{(\bar{x}_i-E(\bar{x}))^2}{4} = \sum_{i=1}^{4} \frac{(\bar{x}_i-34.5)^2}{4} = \frac{(33-34.5)^2+(35-34.5)^2+(34-34.5)^2+(36-34.5)^2}{4} = \frac{2.25+0.25+0.25+2.25}{4} = \frac{5}{4} = \mathbf{1.25}$$

3.المقارنة بين هذه النتائج الثلاث:

أ- $\mathbf{E(\bar{x})}_{\text{لعينة طبقية}} = \mathbf{E(\bar{x})}_{\text{لعينة عشوائية بسيطة بدون إعادة}} = \mathbf{E(\bar{x})}_{\text{لعينة عشوائية بسيطة مع الاعادة}} = \boldsymbol{\mu}$

ب- $\mathbf{v(\bar{x})}_{\text{لعينة طبقية}} < \mathbf{v(\bar{x})}_{\text{لعينة عشوائية بسيطة بدون إعادة}} < \mathbf{v(\bar{x})}_{\text{لعينة عشوائية بسيطة مع الاعادة}}$

ومنه فإن $\bar{X}$ في حالة العينة الطبقية أكثر فعالية منه في حالة العينة العشوائية البسيطة مع وبدون إعادة.

ج- نلاحظ أن عدد العينات الممكن تشكيلها (أو الممكن سحبها) يكون صغير جدا في حالة العينة الطبقية (4) مقانة بالعدد الممكن تشكيله في حالة العينة العشوائية بدون إعادة (6) وحالة العينة العشوائية مع الإعادة (16).

ومنه فإن المعاينة الطبقية تعطي نتائج أكثر دقة مقارنة بالمعاينة العشوائية البسيطة مع وبدون إعادة في حالة ما إذا كان تباين المجتمع كبير.

حل التمرين الثالث:

1. القانون الاحتمالي لـ $\bar{X}$:

بما أن توزيع المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي و$n = 100 \geq 30$ ، بالإضافة إلى تباين المجتمع معلوم: $\sigma^2 = 1^2 = 1$، فإن $\bar{x}$ يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي قدره: $\mu_{\bar{x}} = E(\bar{x}) = 20$ وانحراف معياري قدره: $\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{100}} = \frac{1}{10} = 0{,}1$

أي: $\bar{X} \rightsquigarrow N(20; 0{,}1)$.

وبذلك يكون: $Z = (\frac{\bar{x}-20}{0{,}1}) \rightsquigarrow N(0; 1)$.

2. حساب الاحتمالات التالية: $\mathbf{P(\bar{X} \leq 20,1)}$ ، $\mathbf{P(20,1 \leq \bar{X} \leq 20,3)}$:

$$\mathbf{P(\bar{X} \leq 20,1)} \rightarrow P\left(Z \leq \frac{20,1-20}{0,1}\right) = P(Z \leq 1) = F(1) = 0{,}8413$$

$$\mathbf{P(20,1 \leq \bar{X} \leq 20,3)} \rightarrow P\left(\frac{20,1-20}{0,1} \leq Z \leq \frac{20,3-20}{0,1}\right) = P(1 \leq Z \leq 3)$$

$$= P(Z \leq 3) - P(Z \leq 1) = F(3) - F(1)$$

$$= 0{,}99865 - 0{,}8413 = 0{,}15735$$

حل التمرين الرابع:

بما أن المبالغ المودعة في الحسابات الجارية للمصرف تتبع التوزيع الطبيعي و $n = 20 < 30$ ، بالإضافة إلى تباين المجتمع مجهول،فإن $\bar{x}$ يتبع ستيودنت بمتوسط حسابي قدره: $\mu_{\bar{x}} = E(\bar{x}) = 1560$ وانحراف معياري قدره: $\sigma_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n-1}} = \sqrt{\frac{S^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{600}{20-1}} = 5{,}62$

أي: $T = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} \rightsquigarrow T_{20-1}$.

وبذلك يكون: $T = \frac{\bar{x}-1560}{5{,}62} \rightsquigarrow T_{19}$.

1. حساب احتمال أن يكون متوسط المبالغ المودعة في الحسابات الجارية في هذه العينة أكبر من 1567,5 و.ن:

$$\mathbf{P(\bar{X} > 1567,5)} \rightarrow P\left(\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} > \frac{\bar{x}-\mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}}\right) = P\left(T > \frac{1567,5-1560}{5,62}\right) = P(T > 1,33) = 1 - P(T \leq 1,33)$$

من جدول توزيع ستيودنت عند درجة حرية $n = 19$ فإن القيمة الجدولية 1,33 تقابل الاحتمال 0,9 وبذلك يكون:

$$P(T > 1,33) = 1 - P(T \leq 1,33) = 1 - 0,9 = 0,1$$

ومنه:

$$P(\bar{X} > 1567,5) = 0,1$$

حل التمرين الخامس:

1. القانون الإحتمالي لـ f، ثم حساب μ_f و σ_f :

بما أن توزيع المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي لأن $n \geq 30$ ، فإن f تتبع تقريبا التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي قدره: μ_f وانحراف معياري قدره: σ_f، أي: $f \rightsquigarrow N(\mu_f; \sigma_f)$.

وبذلك يكون: $Z = \frac{f-\mu_f}{\sigma_f} \rightsquigarrow N(0;1)$

حيث أن: $\mu_f = E(f) = p = 20\% = 0,2$ ، في حين $\sigma_f = \sqrt{\sigma^2_f} = \sqrt{\frac{p.q}{n}} = \sqrt{\frac{0,2\times(1-0,2)}{100}} = \sqrt{0,0016} = 0,04$.

2. حساب احتمال أن تكون نسبة المتعلمين من الإناث في هذه العينة محصورة بين 18% و 20%:

$$P(0{,}18 \leq f \leq 0{,}2) \rightarrow P\left(\frac{0{,}18-0{,}2}{0{,}04} \leq Z \leq \frac{0{,}2-0{,}2}{0{,}04}\right) = P(-0{,}5 \leq Z \leq 0)$$

$$= P(Z \leq 0) - P(Z \leq -0{,}5)$$

$$= P(Z \leq 0) - [1 - P(Z \leq 0{,}5)]$$

$$= P(Z \leq 0) + P(Z \leq 0{,}5) - 1$$

$$= F(0) + F(0{,}5) - 1 = 0{,}5 + 0{,}6915 - 1 = 0{,}1915$$

حل التمرين السادس:

نعلم أن إذا كان لدينا مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي وسحبت منه عينات عشوائية حجمها n عنصر فإن المتغير العشوائي المعرف كما يلي: $\frac{n S^2}{\sigma^2}$ يتبع توزيع كاي تربيع بدرجة حرية $n-1$، أي: $\frac{n S^2}{\sigma^2} \backsim X^2_{n-1}$.

1. حساب احتمال أن يكون تباين العينة أقل من أو يساوي 10,5:

$$\mathbf{P(S^2 \leq 10,5)} \rightarrow P\left(\frac{n S^2}{\sigma^2} \leq \frac{5 \times 10{,}5}{15}\right) = P(X^2_{5-1} \leq 3{,}5) = P(X^2_4 \leq 3{,}5)$$

نبحث في جدول توزيع كاي تربيع عند درجة حرية قدرها 4 عن القيمة الجدولية 3,5 نجد أنها محصورة بين القيمتين 3,36 و5,39 والمقابلة للاحتمالين 0,5 و0,75 على التوالي وعليه فإن الاحتمال المقابل لها محصور بين القيمتين 0,5 و0,75 والذي يستخرج بطريقة الحصر كما يلي:

$$0{,}5 \rightarrow 3{,}36$$

$$p_0 \rightarrow 3{,}5$$

$$0{,}75 \rightarrow 5{,}39$$

ومنه: $$(0{,}75 - 0{,}5) \rightarrow (5{,}39 - 3{,}36)$$

$$(p_0 - 0{,}5) \rightarrow (3{,}5 - 3{,}36)$$

أي: $$p_0 - 0{,}5 = \frac{(0{,}75-0{,}5).(3{,}5-3{,}36)}{(5{,}39-3{,}36)}$$

وبذلك يكون: $$p_0 = \frac{0{,}035}{2{,}03} + 0{,}5 = 0{,}5172$$

أي: $$\mathbf{P(S^2 \leq 10,5) = 0,5172}$$

الفصل الرابع:

التقدير

تمهيد:

نقصد بمعالم المجتمع مجموعة من خصائصه كالمتوسط والتباين والنسبة، ويتم حساب هذه المعالم عند استخدام الحصر الشامل بشكل دقيق، لكن غالبا ما تكون هذه المعالم مجهولة حيث نقوم بتقديرها من بيانات العينة حيث يتم:

- تقدير المتوسط الحسابي للمجتمع μ انطلاقا من متوسط العينة $\bar{x}$.
- تقدير الانحراف المعياري للمجتمع σ انطلاقا من الانحراف المعياري للعينة S .
- تقدير النسبة للمجتمع P انطلاقا من نسبة العينة f .

أولا: خصائص المقدر الجيد

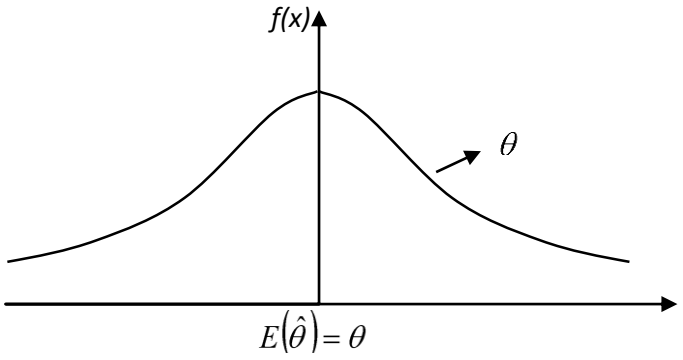
فغالبا ما نجد أ كثر من مقدّر يمكن استخدام قيمته كتقدير لمعلمة المجتمع المجهولة، لذلك نحتاج إلى معايير يمكن الاستعانة بها لاختيار المقدر الذي يعتبر أفضل من غيره لتقدير لمعلمة المجتمع وهي تتلخص في ثلاث معايير أساسية هي:

1- معيار عدم التحيز:

نقول عن المقدر $\hat{\theta}$ أنه غير متحيز للمعلمة θ إذا كان التوقع الرياضي لـ $\hat{\theta}$ يساوي المقدار نفسه ويكتب رياضيا على النحو التالي: $E(\hat{\theta}) = \theta$، أما إذا كان: $E(\hat{\theta}) \neq \theta$ فإننا نقول عن $\hat{\theta}$ أنه مقدر متحيز للمقدار (المعلمة) θ ، أي أنه لا يمثل المعلمة تمثيلا صحيحا والتحيز يكون حسب ما يلي: $E(\hat{\theta}) - \theta = b$ ،حيث b: يمثل قيمة التحيز.

وعليه يكون $\bar{x}$ غير متحيز لـ μ إذا كان: $E(\bar{x}) = \mu$.

ويمكن تمثيل التقدير غير المتحيز على ما يلي:



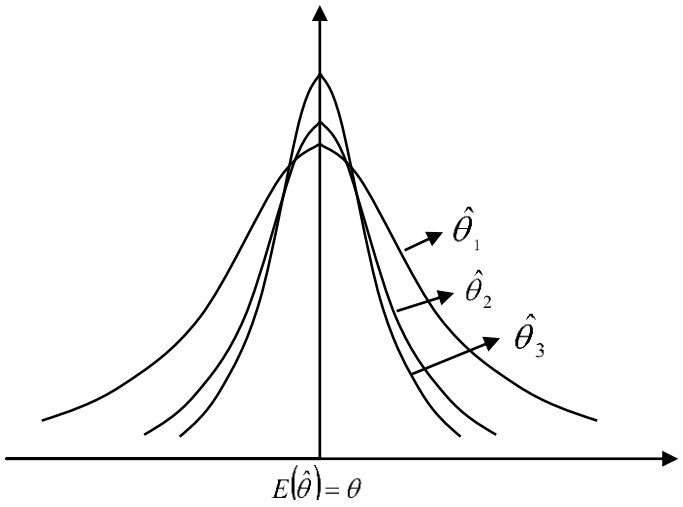
2- معيار التقارب (التماسك)

نقول عن المقدر $\hat{\theta}$ أنه متقارب(متماسك) إذا كانت قيمته تؤول الى قيمة المعلمة θ كلما زاد حجم العينة أي: $\hat{\theta} \xrightarrow[n\to\infty(N)]{} \theta$، أو لما يكون تباينه يؤول الى الصفر عندما تؤول n إلى مالا نهاية أو إلى N الحجم الذي يمثل حجم المجتمع، أي: $V(\hat{\theta}) \xrightarrow[n\to\infty(N)]{} 0$.

وعليه يكون $\bar{x}$ متقارب (متماسك) لـ μ إذا كان: $\bar{x} \xrightarrow[n\to\infty(N)]{} \mu$ ، أو إذا كان: $V(\bar{x}) \xrightarrow[n\to\infty(N)]{} 0$.

ويكتب تلخيص هذا التعريف في الشكل التالي:

$$\lim_{n\to N}\left(\hat{\theta}\to\theta\right)=1$$



على هذا الرسم البياني، نلاحظ كلما أزداد حجم العينة كلما كان التقدير أحسن. التقدير $\hat{\theta}_3$ هو أفضل تقدير لأنه يحتوي على أدنى انحراف بالنسبة للوسط مقارنة بالتقديرات الأخرى $\hat{\theta}_1$ و $\hat{\theta}_2$.

3- معيار الفعالية:

إذا كان $\hat{\theta}_1$ و $\hat{\theta}_2$ مقدرين غير متحيزين لـ θ وكان تباين $\hat{\theta}_1$ أقل من تباين $\hat{\theta}_2$، أي: $V(\hat{\theta}_1) < V(\hat{\theta}_2)$، فإننا نقول أن المقدر $\hat{\theta}_1$ أكثر فعالية من المقدر $\hat{\theta}_2$، وعليه المقدر الفعال هو المقدر الذي يكون ذو تباين أصغر، أي:

$V(\hat{\theta}) = \frac{\sum(\hat{\theta}-\theta)^2}{n} \min$.

سنرى لاحقا عند تقدير المتوسط الحسابي للمجتمع بدلالة المتوسط الحسابي للعينة $\bar{x}$ أو الوسيط M_e، فكلا المقدرين يعتبران غير متحيزين ومتماسكين ولكن تباينهما يساويان على التوالي: $\frac{\sigma^2}{n}$ ، $\frac{\pi}{2}.\frac{\sigma^2}{n}$.

بما أن : $E(\bar{x}) = E(M_e) = \mu$ و $V(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n} < V(M_e) = \frac{\pi}{2}.\frac{\sigma^2}{n}$ ، فإن المقدر $\bar{x}$ أكثر فعالية من المقدرM_e.

ثانيا: أنواع التقدير

يوجد نوعان من التقدير الاحصائي هما :التقدير النقطي(التقدير بقيمة) والتقدير بمجال.

1- التقدير النقطي:

عندما نقدر معلمة المجتمع برقم واحد يحسب من بيانات العينة فإن هذا الرقم يسمى تقدير نقطي لهذه المعلمة والذي يحسب اعتمادا على المقدر النقطي لهذه المعلمة، أي أن المقدر هو الصيغة الرياضية(الإحصائية) التي نقدر بها معلمة المجتمع بينما التقدير هو القيمة العددية لهذه الإحصائية.

2- التقدير بمجال " بناء مجالات الثقة "

بما أننا لا نتوقع أن تكون قيمة المقدر مساوية للمعلمة المجهولة مهما كان المقدر جيد فيتم اللجوء إلى تحديد مجال يحتوي على مجموعة من القيم تتضمن فيما بينها قيمة معلمة المجتمع المجهولة θ يسمى هذا المجال **بمجال الثقة أو فترة الثقة،** حيث نسبة الحظوظ أو احتمال أن تقع معلمة المجتمع θ في هذا المجال تسمى درجة الثقة أو مستوى الثقة وبذلك نكون قد **قدرنا معلمة المجتمع بمجال** ونكتب: $IC(\theta)_{1-\alpha} = [T_1; T_2]$ أي: $p(\theta \epsilon [T_1; T_2]) = 1 - \alpha$.

حيث:

$\mathbf{T_1}$،$\mathbf{T_2}$: هما على التوالي الحد الأدنى والحد الأقصى لمجال الثقة مع: $\mathbf{T_1 < T_2}$.

$\mathbf{1 - \alpha}$: مستوى الثقة أو درجة الثقة.

$\boldsymbol{\alpha}$: احتمال الخطأ أو مستوى المعنوية أو درجة المخاطرة والذي يعبر عن احتمال عدم احتواء مجال الثقة على القيمة الحقيقية لـ θ والتي عادة ما تكون من اختيار الباحث حسب درجة الدقة التي يبحث عنها.

ثالثا: مجال الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع μ :

1- إذا كان حجم العينة كبير $(n \geq 30)$:

نعلم أنه في هذه الحالة $\bar{x}$ يتبع تقريبا التوزيع الطبيعي،حيث: $Z = \frac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}} \rightsquigarrow N(0; 1)$، لبناء مجال الثقة لـ μ ممكن أن ننطلق من مفهوم مجال الثقة كما يلي:

$$p(\mu \epsilon IC) = 1 - \alpha$$
$$\Leftrightarrow p(\mu \epsilon [T_1; T_2]) = 1 - \alpha$$
$$\Leftrightarrow p(T_1 \leq \mu \leq T_2) = 1 - \alpha$$

إذن ينبغي تحديد حدود مجال الثقة T_1 و T_2 إنطلاقا من حصر Z بين قيمتين، حيث: $Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$ لأن:$\mu_{\bar{x}} = \mu$ في كل الحالات، ويمكن توضيح ذلك كما يلي:

$$p(Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

ومن خاصية التناظر نستنتج أن: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

ومنه يصبح لدينا:

$$p(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$$

وبتعويض قيمة Z بما تساويه نجد:

$$p(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma_{\bar{x}}} \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$$

وبضرب أطراف المتراجحة في $\sigma_{\bar{x}}$ نجد:

$$p(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{x}} \leq \bar{x}-\mu \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{x}}) = 1-\alpha$$

ثم بطرح قيمة $\bar{x}$ من أطراف المتراجحة نجد:

$$p(-\bar{x}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{x}} \leq -\mu \leq -\bar{x}+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{x}}) = 1-\alpha$$

نضرب الآن أطراف المتراجحة في (-1) فيتغير اتجاهها وتصبح كما يلي:

$$p(\bar{x}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{x}} \leq \mu \leq \bar{x}+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{x}}) = 1-\alpha$$

ومنه مجال الثقة لـ μ هو كما يلي:

$$\mathbf{IC(\mu)_{(1-\alpha)\%}} = \left[\bar{x}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{x}}; \bar{x}+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{x}}\right]$$

حيث:

أ- إذا كان تباين المجتمع σ^2 معلوم، فإن:

$$\mathbf{IC(\mu)_{(1-\alpha)\%}} = \left[\bar{x}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x}+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

ب- إذا كان تباين المجتمع σ^2 معلوم، فإن:

$$\mathbf{IC(\mu)_{(1-\alpha)\%}} = \left[\bar{x}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{S}{\sqrt{n-1}}; \bar{x}+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{S}{\sqrt{n-1}}\right]$$

ويبين الجدول الموالي درجات الثقة الشائعة واحتمالات الخطأ وقيم $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ الموافقة لها:

مستوى الثقة $(1-\alpha)$	$90\% = 0,90$	$95\% = 0,95$	$99\% = 0,99$
مستوى المعنوية (α)	$10\% = 0,10$	$05\% = 0,05$	$01\% = 0,01$
$Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	1,645	1,96	2,58
أي	$Z_{0,95} = 1,645$	$Z_{0,975} = 1,96$	$Z_{0,995} = 2,58$

2- إذا كان حجم العينة صغير $(n < 30)$:

نعلم أن في حالة إذا ما كان توزيع المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي و $n < 30$ ، بالإضافة إلى تباين المجتمع مجهول، فإن $\bar{x}$ يتبع ستيودنت، أي: $T = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} \rightsquigarrow T_{n-1}$.

ومنه مجال الثقة لـ μ في هذه الحالة هو كما يلي:

$$\mathbf{IC(\mu)_{(1-\alpha)\%} = \left[\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{S}{\sqrt{n-1}}; \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{S}{\sqrt{n-1}}\right]}$$

3- خطأ المعاينة في تقدير μ وحجم العينة اللازم لعدم تجاوز خطأ معين:

إن تقدير المتوسط الحسابي للمجتمع μ بواسطة المتوسط الحسابي للعينة $\bar{x}$ يترتب عليه خطأ يدعى خطأ المعاينة وسببه إجراء الدراسة الإحصائية على عينة بدلا من أن تكون شاملة، ورياضيا يمثل خطأ المعاينة لتقدير μ في القيمة المطلقة للفرق بين قيمة المقدر $\bar{x}$ والقيمة الحقيقية للمعلمة μ ويرمز له بالرمز: E، أي: $E = |\bar{x} - \mu|$.

أ- خطأ المعاينة في تقدير μ وحجم العينة اللازم لعدم تجاوز خطأ معين في حالة $n \geq 30$ و σ^2 معلوم:

نعلم أن مجال الثقة لـ μ عند مستوى الثقة $(1-\alpha)\%$ في حالة حجم العينة كبير وتباين المجتمع σ^2 معلوم هو كما يلي:

$$IC(\mu)_{(1-\alpha)\%} = \left[\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

أي أن:

$$(\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

ومنه:

$$(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} - \mu \leq +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

وبذلك يكون خطأ المعاينة في تقدير μ باستخدام $\bar{x}$ هو كما يلي:

$$E = |\bar{x} - \mu| = \mp Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

حيث نسمي هذا المقدار $\mathbf{-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ بالحد الأدنى لخطأ المعاينة في تقدير μ أو خطأ المعاينة بالنقصان، في حين نسمي هذا المقدار $\mathbf{+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ بالحد الأقصى لخطأ المعاينة في تقدير μ أو خطأ المعاينة بالزيادة.

وانطلاقا من صيغة E يمكن حساب حجم العينة n ، حيث نقوم بتربيع الطرفين فنجد:

$$E^2 = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2.\frac{\sigma^2}{n}$$

ومنه حجم العينة اللازم (المطلوب) لعدم تجاوز خطأ معين في هذه الحالة هو كما يلي:

$$n = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2.\frac{\sigma^2}{E^2}$$

ب- خطأ المعاينة في تقدير μ وحجم العينة اللازم لعدم تجاوز خطأ معين في حالة $n \geq 30$ و σ^2 مجهول:

نعلم أن مجال الثقة لـ μ عند مستوى الثقة $(1-\alpha)\%$ في حالة حجم العينة كبير وتباين المجتمع σ^2 مجهول هو كما يلي:

$$IC(\mu)_{(1-\alpha)\%} = \left[\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{S}{\sqrt{n-1}}; \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{S}{\sqrt{n-1}}\right]$$

وعليه في هذه الحالة يكون خطأ المعاينة في تقدير μ باستخدام $\bar{x}$ هو كما يلي:

$$E = |\bar{x} - \mu| = \mp Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{S}{\sqrt{n-1}}$$

حيث نسمي هذا المقدار $-\mathbf{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{S}{\sqrt{n-1}}}$ بالحد الأدنى لخطأ المعاينة في تقدير μ أو خطأ المعاينة بالنقصان، في حين نسمي هذا المقدار $+\mathbf{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{S}{\sqrt{n-1}}}$ بالحد الأقصى لخطأ المعاينة في تقدير μ أو خطأ المعاينة بالزيادة.

وانطلاقا من صيغة E يمكن حساب حجم العينة n ، حيث نقوم بتربيع الطرفين فنجد:

$$E^2 = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2.\frac{S^2}{n-1}$$

ومنه حجم العينة اللازم (المطلوب) لعدم تجاوز خطأ معين في هذه الحالة هو كما يلي:

$$n = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2.\frac{S^2}{E^2} + 1$$

ج- خطأ المعاينة في تقدير μ وحجم العينة اللازم لعدم تجاوز خطأ معين في حالة $n < 30$ و σ^2 مجهول:

نعلم أن مجال الثقة لـ μ عند مستوى الثقة $(1-\alpha)\%$ في حالة حجم العينة صغير وتباين المجتمع σ^2 مجهول هو كما يلي:

$$IC(\mu)_{(1-\alpha)\%} = \left[\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{S}{\sqrt{n-1}}; \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{S}{\sqrt{n-1}}\right]$$

وعليه في هذه الحالة يكون خطأ المعاينة في تقدير μ باستخدام $\bar{x}$ هو كما يلي:

$$E = |\bar{x} - \mu| = \mp t_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{S}{\sqrt{n-1}}$$

حيث نسمي هذا المقدار $-\mathbf{t_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{S}{\sqrt{n-1}}}$ بالحد الأدنى لخطأ المعاينة في تقدير μ أو خطأ المعاينة بالنقصان، في حين نسمي هذا المقدار $+\mathbf{t_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{S}{\sqrt{n-1}}}$ بالحد الأقصى لخطأ المعاينة في تقدير μ أو خطأ المعاينة بالزيادة.

وانطلاقا من صيغة E يمكن حساب حجم العينة n ، حيث نقوم بتربيع الطرفين فنجد:

$$E^2 = t_{1-\frac{\alpha}{2}}^2.\frac{S^2}{n-1}$$

ومنه حجم العينة اللازم (المطلوب) لعدم تجاوز خطأ معين في هذه الحالة هو كما يلي:

$$n = t_{1-\frac{\alpha}{2}}^2.\frac{S^2}{E^2} + 1$$

مثال:

في دراسة إحصائية حول الأجر الشهري للعامل في إحدى المؤسسات على عينة من العمال حجمها 100 عامل، بعد جمع البيانات من هذه العينة تبين أن الأجر المتوسط الشهري للعامل يقدر بـ: 12500 دج، إذا علمت أن الانحراف المعياري للأجر الشهري للعامل في هذه المؤسسة هو 140 دج.

المطلوب:

1. قدر بمجال متوسط أجر العامل في هذه المؤسسة بدرجة ثقة 95% واشرح النتيجة؟

2. ماهو خطأ المعاينة المحتمل ارتكابه في تقدير الأجر المتوسط في هذه المؤسسة بدرجة ثقة 95%، مع شرح النتيجة؟

3. نريد تحسين دقة النتائج بنسبة 50%، فماهو حجم العينة اللازم لتحقيق هذا الهدف؟

4. لنفترض أن العينة التي تمت عليها الدراسة كان حجمها 26 عامل وأنه بعد جمع البيانات من هذه العينة تبين أن الأجر المتوسط الشهري للعامل يقدر بـ: 12500 دج والانحراف المعياري للأجر الشهري للعامل بالعينة يقدر بـ: 140 دج، أوجد مجال الثقة لمتوسط أجر العامل في هذه المؤسسة بدرجة ثقة 95% واشرح النتيجة؟

الحل:

1. التقدير بمجال لمتوسط أجر العامل في هذه المؤسسة (بناء مجال الثقة للوسط الحسابي للمجتمع) بدرجة ثقة 95% مع شرح النتيجة:

بما أن حجم العينة كبير $(n = 100 \geq 30)$ وتباين المجتمع σ^2 معلوم $(\sigma^2 = 140^2 = 19600)$ وعليه مجال الثقة لـ μ عند مستوى الثقة $(1-\alpha)\%$ في هذه الحالة هو كما يلي:

$$IC(\mu)_{(1-\alpha)\%} = \left[\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

$$(1-\alpha)\% = 95\% \Rightarrow \alpha = 05\% = 0{,}05$$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0{,}05}{2}} = Z_{1-0{,}025} = Z_{0{,}975} = 1{,}96$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{140}{\sqrt{100}} = \frac{140}{10} = 14$$

وعليه مجال الثقة لـ μ عند مستوى الثقة 95% هو كما يلي:

$$IC(\mu)_{95\%} = [12500 - (1{,}96 \times 14); 12500 + (1{,}96 \times 14)] = [\mathbf{12472{,}56; 12527{,}44}]$$

الشرح: نحن واثقون بنسبة 95% أن القيمة الحقيقية للأجر المتوسط للعامل في هذه المؤسسة يتراوح بين 12472,56 دج و12527,44 دج.

2. خطأ المعاينة المحتمل ارتكابه في تقدير الأجر المتوسط في هذه المؤسسة بدرجة ثقة 95%، مع شرح النتيجة:

من مجال الثقة لـ μ نستنتج أن:

$$E = |\bar{x} - \mu| = \mp Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mp 1{,}96 \times 14 = \mp 27{,}44$$

الشرح: لدينا 95% من الثقة أن لا يتجاوز خطأ المعاينة في تقدير الأجر المتوسط للعامل في هذه المؤسسة المقدار 27,44 بالزيادة أو بالنقصان.

3. حجم العينة اللازم عندما نريد تحسين دقة النتائج بنسبة 50%:

لتحسين دقة النتائج بـ 50% يعني تخفيض خطأ المعاينة بـ 50%، وهذا يعني أن خطأ المعاينة الجديد يكون يلي:

$$E_1 = E_0 - (E_0 \times 0{,}5) = 27{,}44 - (27{,}44 \times 0{,}5) = 27{,}44 - 13{,}72 = 13{,}72$$

انطلاقا من صيغة E يمكن حساب حجم العينة n ، حيث نقوم بتربيع الطرفين فنجد:

$$E^2 = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2.\frac{\sigma^2}{n} \Rightarrow n = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2.\frac{\sigma^2}{E^2} = (1{,}96^2) \times \frac{140^2}{13{,}72^2} = 400$$

ومنه حجم العينة اللازم (المطلوب) لتحسين دقة النتائج بنسبة 50% أي لتحسين دقة النتائج بنسبة 50% يجب رفع حجم العينة من 100 إلى 400 عامل.

4. إيجاد مجال الثقة لمتوسط أجر العامل في هذه المؤسسة بدرجة ثقة 95% مع شرح النتيجة:

بما أن حجم العينة صغير $(n = 26 < 30)$ وتباين المجتمع σ^2 مجهول وعليه مجال الثقة لـ μ عند مستوى الثقة $(1 - \alpha)\%$ في هذه الحالة هو كما يلي:

$$IC(\mu)_{(1-\alpha)\%} = \left[\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{S}{\sqrt{n-1}}; \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{S}{\sqrt{n-1}}\right]$$

$$(1-\alpha)\% = 95\% \Rightarrow \alpha = 05\% = 0{,}05$$

$$t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1} = t_{1-\frac{0{,}05}{2};26-1} = t_{1-0{,}025;25} = t_{0{,}975;25} = 2{,}06$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n-1}} = \frac{140}{\sqrt{26-1}} = \frac{140}{5} = 28$$

وعليه مجال الثقة لـ μ عند مستوى الثقة 95% هو كما يلي:

$$IC(\mu)_{95\%} = [12500 - (2{,}06 \times 28); 12500 + (2{,}06 \times 28)] = [\mathbf{12442{,}32; 12557{,}68}]$$

الشرح: نحن واثقون بنسبة 95% أن القيمة الحقيقية للأجر المتوسط للعامل في هذه المؤسسة يتراوح بين 12442,32 دج و12557,68 دج.

رابعا: مجال الثقة للنسبة P في المجتمع:

نعلم أن من أجل القيم الكبيرة لـ n $(n \geq 30)$ فإن f تتبع تقريبا التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي قدره: μ_f وانحراف معياري قدره: σ_f، أي: $f \rightsquigarrow N(\mu_f; \sigma_f)$.

وعليه فإن مجال الثقة لـ P يتحدد بتعويض μ بـ P و بتعويض $\sigma_{\bar{x}}$ بـ σ_f في مجال الثقة لـ μ ليصبح كما يلي:

$$\mathbf{IC(P)_{(1-\alpha)\%} = \left[f - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sigma_f; f + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sigma_f\right]}$$

حيث: $\sigma_f = \sqrt{\frac{f.(1-f)}{n}}$ عوض $\sqrt{\frac{p.q}{n}}$ لأن P مجهولة.

ومنه مجال الثقة لـ P هو كما يلي:

$$IC(P)_{(1-\alpha)\%} = \left[f - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{f.(1-f)}{n}}; f + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{f.(1-f)}{n}}\right]$$

1- خطأ المعاينة في تقدير P

إن تقدير النسبة P في المجتمع بواسطة النسبة f في العينة يترتب عليه خطأ يدعى خطأ المعاينة وسببه إجراء الدراسة الإحصائية على عينة بدلا من أن تكون شاملة، ورياضيا يمثل خطأ المعاينة لتقدير P في القيمة المطلقة للفرق بين قيمة المقدر f والقيمة الحقيقية للمعلمة P ويرمز له بالرمز: E، أي: $E = |f - P|$.

ونعلم أن مجال الثقة لـ P عند مستوى الثقة $(1 - \alpha)\%$ هو كما يلي:

$$IC(P)_{(1-\alpha)\%} = \left[f - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{f.(1-f)}{n}}; f + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{f.(1-f)}{n}}\right]$$

وعليه يكون خطأ المعاينة في تقدير P باستخدام f هو كما يلي:

$$E = |f - P| = \mp Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{f.(1-f)}{n}}$$

حيث نسمي هذا المقدار $-\mathbf{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}.\sqrt{\frac{\mathbf{f.(1-f)}}{\mathbf{n}}}$ بالحد الأدنى لخطأ المعاينة في تقدير P أو خطأ المعاينة بالنقصان، في حين نسمي هذا المقدار $+\mathbf{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}.\sqrt{\frac{\mathbf{f.(1-f)}}{\mathbf{n}}}$ بالحد الأقصى لخطأ المعاينة في تقدير P أو خطأ المعاينة بالزيادة.

2- حجم العينة اللازم لعدم تجاوز خطأ معين في تقدير P :

انطلاقا من صيغة E يمكن حساب حجم العينة n ، حيث نقوم بتربيع الطرفين فنجد:

$$E^2 = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}{}^2.\frac{f.(1-f)}{n}$$

ومنه حجم العينة اللازم (المطلوب) لعدم تجاوز خطأ معين في هذه الحالة هو كما يلي:

$$n = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}{}^2.\frac{f.(1-f)}{E^2}$$

مثال:

بغرض تقدير نسبة الأفراد الذين يفضلون مطالعة جريدة ما في بلد ما أجريت دراسة إحصائية على عينة حجمها 1000 فرد، فمن خلال هذه الدراسة تبين أن 300 فرد من أفراد هذه العينة يفضلون مطالعة هذه الجريدة.

المطلوب:

1. قدر بمجال نسبة الأفراد الذين يفضلون مطالعة هذه الجريدة في هذا البلد وذلك بمستوى دلالة 1% واشرح النتيجة؟

2. ماهو خطأ المعاينة المحتمل ارتكابه في تقدير نسبة الأفراد الذين يفضلون مطالعة هذه الجريدة في هذا البلد عند مستوى دلالة 1% مع الشرح؟

3. ماهو حجم العينة اللازم إذا أردنا تحسين دقة النتائج في دراسة مقبلة بنسبة 25% مقارنة بالدراسة الحالية؟

الحل:

1. التقدير بمجال لنسبة الأفراد الذين يفضلون مطالعة هذه الجريدة في هذا البلد وذلك بمستوى دلالة 1% مع شرح النتيجة:

مجال الثقة لـ P هو كما يلي:

$$IC(P)_{(1-\alpha)\%} = \left[f - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{f.(1-f)}{n}}; f + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{f.(1-f)}{n}}\right]$$

$$\alpha = 01\% = 0{,}01 \Rightarrow (1-\alpha)\% = 99\%$$

$$f = \frac{x}{n} = \frac{300}{1000} = 0{,}3$$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0{,}01}{2}} = Z_{1-0{,}005} = Z_{0{,}995} = 2{,}58$$

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{f.(1-f)}{n}} = \sqrt{\frac{0,3.(1-0,3)}{1000}} = \sqrt{0,00021} = 0,0145$$

وعليه مجال الثقة لـ P عند مستوى الثقة 99% هو كما يلي:

$$IC(P)_{99\%} = [0,3 - (2,58 \times 0,0145); 0,3 + (2,58 \times 0,0145)] = [0,2626; 0,3374]$$
$$IC(P)_{99\%} = [\mathbf{26,26\%; 33,74\%}]$$

الشرح: نحن واثقون بنسبة 99% أن نسبة الأفراد الذين يطالعون هذه الجريدة في هذا البلد هي محصورة مابين 26,26% و33,74% .

2. خطأ المعاينة المحتمل ارتكابه في تقدير نسبة الأفراد الذين يفضلون مطالعة هذه الجريدة في هذا البلد عند مستوى دلالة 1% مع الشرح:

من مجال الثقة لـ P نستنتج أن:

$$E = |f - P| = \mp Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{f.(1-f)}{n}} = \mp 2,58 \times 0,0145 = \mp 0,0374$$

الشرح: لدينا 99% من الثقة أن خطأ المعاينة في تقدير نسبة الأفراد الذين يطالعون هذه الجريدة في هذا البلد لا يتجاوز 3,74% بالزيادة أو بالنقصان.

3. حجم العينة اللازم إذا أردنا تحسين دقة النتائج في دراسة مقبلة بنسبة 25% مقارنة بالدراسة الحالية:

لتحسين دقة النتائج في دراسة مقبلة بنسبة 25% يعني تخفيض خطأ المعاينة بـ 25%، وهذا يعني أن خطأ المعاينة الجديد يكون كما يلي:

$$E_1 = E_0 - (E_0 \times 0,25) = 0,0374 - (0,0374 \times 0,25) = 0,0374 - 0,00935 = 0,02805 \simeq 0,0281$$

انطلاقا من صيغة E يمكن حساب حجم العينة n ، حيث نقوم بتربيع الطرفين فنجد:

$$E^2 = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}{}^2.\frac{f.(1-f)}{n} \Rightarrow n = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}{}^2.\frac{f.(1-f)}{E^2} = (2,58^2) \times \frac{0,3 \times 0,7}{0,0281^2} = 1770,30 \simeq 1770$$

الشرح: حجم العينة اللازم (المطلوب) لتحسين دقة النتائج بنسبة 25% أي لتحسين دقة النتائج بنسبة 25% عن الدراسة السابقة يجب رفع حجم العينة من 1000 فرد إلى 1770 فرد.

ملاحظات:

- هناك علاقة عكسية بين n و E حيث كلما زاد حجم العينة كلما كان خطأ المعاينة ضعيف وكانت الدراسة الاحصائية أكثر دقة.
- يتأثر تحديد حجم العينة بعدة عوامل منها :حجم المجتمع المراد دراسته، مستوى الثقة، الانحراف المعياري.
- إن تحديد حجم العينة مسبقا في المعاينة الاحصائية يترتب عليه توفير الوقت اللازم والتحكم في التكاليف والحصول على نتائج جيدة وفي وقت قصير.

خامسا: مجال الثقة لتباين المجتمع σ^2 ومجال الثقة الانحراف المعياري للمجتمع σ:

1- مجال الثقة لتباين المجتمع σ^2:

نعلم أن إذا تم سحب عينات عشوائية حجمها n عنصر من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي فإن المتغير العشوائي $\frac{n\,S^2}{\sigma^2}$ يتبع توزيع كاي تربيع بدرجة حرية $n-1$، أي: $\frac{n\,S^2}{\sigma^2} \backsim X^2_{n-1}$، حيث: S^2 هو تباين العينة و σ^2 هو تباين المجتمع.

وعليه فإن مجال الثقة لـ σ^2 يعطى حسب الصيغة التالية:

$$IC(\sigma^2)_{(1-\alpha)\%} = \left[\frac{n\,S^2}{X^2_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}}; \frac{n\,S^2}{X^2_{\frac{\alpha}{2};n-1}}\right]$$

2- مجال الثقة الانحراف المعياري للمجتمع σ:

يمكن الحصول على مجال الثقة للانحراف المعياري بمستوى ثقة $(1-\alpha)\%$ وذلك بأخذ الجذور التربيعية الموجبة لحدود مجال الثقة للتباين، أي:

$$IC(\sigma)_{(1-\alpha)\%} = \left[\sqrt{\frac{n\,S^2}{X^2_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}}}; \sqrt{\frac{n\,S^2}{X^2_{\frac{\alpha}{2};n-1}}}\right]$$

مثال:

إذا كانت علامات الطلبة في امتحانات مقياس إحصاء 3 تتبع توزيعا طبيعيا، اخترنا عشوائيا عينة من 5 طلبة فكانت علاماتهم كالتالي: 11؛ 13؛ 11,5؛ 9؛ 9,5.

المطلوب:

1. أوجد مجال الثقة لتباين علامات جميع الطلبة بمستوى ثقة 99%؟

2. استنتج مجال الثقة للانحراف المعياري لعلامات جميع الطلبة بمستوى ثقة 99%؟

الحل:

1. إيجاد مجال الثقة لتباين علامات جميع الطلبة بمستوى ثقة 99%:

مجال الثقة لـ σ^2 يعطى حسب الصيغة التالية:

$$IC(\sigma^2)_{(1-\alpha)\%} = \left[\frac{n\,S^2}{X^2_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}}; \frac{n\,S^2}{X^2_{\frac{\alpha}{2};n-1}}\right]$$

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{n} = \frac{11+13+11,5+9+9,5}{5} = 10,8$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n} = \frac{(11-10,8)^2+(13-10,8)^2+(11,5-10,8)^2+(9-10,8)^2+(9,5-10,8)^2}{5} = 2,06$$

$$(1-\alpha)\% = 99\% \Rightarrow \alpha = 01\% = 0,01$$

$X^2_{1-\frac{\alpha}{2};n-1} = X^2_{1-\frac{0,01}{2};5-1} = X^2_{1-0,005;4} = X^2_{0,995;4} = 14,9$

$X^2_{\frac{\alpha}{2};n-1} = X^2_{\frac{0,01}{2};5-1} = X^2_{0,005;4} = 0,207$

وعليه مجال الثقة لـ σ^2 عند مستوى الثقة 99% هو كما يلي:

$$IC(\sigma^2)_{99\%} = \left[\frac{5\times 2,06}{14,9}; \frac{5\times 2,06}{0,207}\right] = [\mathbf{0,69; 49,76}]$$

الشرح: نحن واثقون بنسبة 99% أن تباين علامات جميع الطلبة محصور بين 0,69 و 49,76.

2.استنتاج مجال الثقة للانحراف المعياري لعلامات جميع الطلبة بمستوى ثقة 99%:

يمكن الحصول على مجال الثقة للانحراف المعياري بمستوى ثقة $(1-\alpha)\%$ وذلك بأخذ الجذور التربيعية الموجبة لحدود مجال الثقة للتباين، أي:

$$IC(\sigma)_{(1-\alpha)\%} = \left[\sqrt{\frac{n\,S^2}{X^2_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}}}; \sqrt{\frac{n\,S^2}{X^2_{\frac{\alpha}{2};n-1}}}\right]$$

$$IC(\sigma)_{99\%} = \left[\sqrt{\frac{5\times 2,06}{14,9}}; \sqrt{\frac{5\times 2,06}{0,207}}\right]$$

$$IC(\sigma)_{99\%} = [\sqrt{0,69}; \sqrt{49,76}] = [\mathbf{0,83; 7,05}]$$

الشرح: نحن واثقون بنسبة 99% أن الإنحراف المعياري لعلامات جميع الطلبة محصور بين 0,83 و 7,05.

تمارين محلولة

التمرين الأول:

ليكن مجتمع مؤلف من 100 طفلا وسحبنا عينة عشوائية بسيطة من 10 أطفال ، فكانت أطوالهم على النحو التالي:

رقم الطفل	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
الطول (سم)	60	65	70	60	70	75	65	70	75	80

المطلوب: قم بتقدير متوسط طول الطفل في هذا المجتمع و من ثم قدر إجمالي الطول في هذا المجتمع.

التمرين الثاني:

ليكن لدينا مجتمع مؤلف من 5 قرى (أ ب ج د هـ) ويراد تقدير متوسط عدد سكان القرية في ذلك المجتمع عن طريق سحب عينة عشوائية بسيطة مؤلفة من 3 قرى. ولذلك قام الباحثون بسحب 3 قرى بدون إعادة ولتكون (ج د أ) وأحصوا عدد السكان كل منها فكان كما يلي : 550 625 700 نسمة

المطلوب:

1 – إيجاد تقدير متوسط عدد سكان القرية في ذلك المجتمع وإجمالي السكان.

2 – إيجاد تقدير لتباين المجتمع

التمرين الثالث:

متغير الأسعار ذو وسط μ ، قدر اقتصادي الانحراف المعياري بـ:2 دج. إذا اعتبرنا أن هذا التقدير صحيح.

المطلوب: أعطي حجم العينة الذي يجب سحبها حتى خطأ التقدير لـ: μ لا يزيد على 0.5. أولا عند $\alpha = 5\%$ ، ثم ثانيا عند $\alpha = 1\%$ ؟

التمرين الرابع:

عند دراسة لأوزان 101 طالب بالكلية، كانت النتائج على ما يلي: $\bar{x} = 67.5$ و $s^2 = 30.25$ ، إذا اعتبرنا أن العينة من النوع ESAR أي عينة عشوائية بسيطة مع الإعادة.

المطلوب: إيجاد مجال الثقة للوزن الوسطي للمجتمع بمستوي دلالة 5% ؟ كيف يكون خطأ العينة في حالة عينة عشوائية بسيطة بدون إعادة عند حجم مجتمع $N = 2035$ ؟

التمرين الخامس:

أخذت عينة عشوائية مكونة من 10 سلع معبأة ينتجها أحد الخواص و كانت أوزانها بالكيلوغرام كما يلي : 13, 8, 7, 11, 12, 9, 10, 8, 12, 10,

المطلوب: تقدير مجال الثقة لوسط وزن السلعة من إنتاج المصنع للخاص عند مستوي دلالة 5%

التمرين السادس:

أعلنت مؤسسة أن 95 بالمائة من متوجاتها صالحة للاستعمال وفقا للمعايير المعمول بها. أتضح عند دراسة تحتوى على 200 منتوج أن 18 منها غير صالح.

المطلوب: أوجد مجال الثقة للنسبة p. أشرح النتيجة .

التمرين السابع:

أراد أحد الباحثين دراسة نسبة الطلبة الذين يتحكمون في نظام Excel وكان يرغب أن يكون الفرق بين النسبة الحقيقية والنسبة المقدرة في حدود 2%، وذلك عند مستوى دلالة $\alpha = 10\%$ ، وإذا كان معلوما من دراسات سابقة أن النسبة الحقيقية تقترب من 0.06.

المطلوب: فما هو حجم العينة اللازمة للحصول على مستوى الدقة المطلوب؟ اشرح النتيجة .

الحلول

حل التمرين الأول:

1 – تقدير متوسط طول الطفل في المجتمع

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_{10}}{n}$$

$$\overline{X} = \frac{60 + 65 + 70 + ... + 80}{10} = 69$$

2 – تقدير إجمالي الطول في المجتمع

$$\overline{X}.N$$

ومن ثم إجمالي الطول هو:

$$69.100 = 6900$$

ما يمكن ملاحظته أن طول 6900 سم في المجتمع ليس له أي دلالة هنا ولا يمكن اعتماده في التحليل

حل التمرين الثاني:

لدينا 5 قرى وهي على التوالي :

ا	ب	ج	د	هـ
700	?	550	625	?

1 – تقدير متوسط عدد سكان القرية

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3} = \frac{700 + 550 + 625}{3} = 625$$

أما إجمالي السكان بالنسبة للقرى الخمس هو:

نسمة $\overline{X}.5 = 625.5 = 3125$

2 – إيجاد تقدير تباين المجتمع

$$S^2 = \sum \frac{(X_i - \overline{X})^2}{n-1}$$

$$S^2 = \frac{(700-625)^2 + (550-625)^2 + (625-625)^2}{3-1} = 5625$$

حل التمرين الثالث:

أ- حجم العينة عند $\alpha = 5\%$

$\sigma = 2$

$e = 0,5$

$$|\overline{x} - \mu| \le Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

إذا كان :

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0,5$$

$$1,96 \frac{2}{0,5} = \sqrt{n} = 7,84$$

$n \approx 62$

ب- حجم العينة عند $\alpha = 1\%$

من الجدول

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,575$$

$$2,575 \frac{2}{0,5} = \sqrt{n} = 10,3$$

$n \approx 100$

حل التمرين الرابع:

n=101(ESAR)

$\bar{x} = 67.5$
$s^2 = 30.25$
$\alpha = 5\%$

أ- نعلم أن مجال الثقة لوسط المجتمع في حالة عينة كبيرة يكتب على الشكل التالي:

$$\mu \in \left[\bar{x} - Z\frac{\alpha}{2}\frac{s}{\sqrt{n-1}} ; \bar{x} + Z\frac{\alpha}{2}\frac{s}{\sqrt{n-1}} \right] = 1-\alpha$$

وبالتعويض تتحصل:

$$\mu \in \left[67.5 - 1.96\frac{5.5}{10} \ ; \ 67.5 - 1.96\frac{5.5}{10} \right] = 0.95$$
$$\mu \in [67.5 - 1.078 ; 67.5 + 1.078] = 0.95$$
$$\mu \in [66.422 ; 68.578] = 0.95$$

معناه إذا أخذنا $\bar{x} = 67.5$ توجد 95% من الحضوض أن وسط المجتمع μ يكون محصور بين 66.422 و 68.578

ب- خطأ العينة في حالة عينة بدون إعادة:

نعلم أن الخطأ يتم قياسه بواسطة التباين

$$V(\bar{x})_{ESSR} = \frac{s^2}{n-1}\frac{N-n}{N-1}$$
$$= \frac{30,25}{100} . \frac{3025-100}{3024} = 0.2927$$

وهو المطلوب. ويلاحظ أن خطأ العينة هنا أقل من خطأ العينة في حالة الإعادة.

حل التمرين الخامس:

الحل: بما أن حجم العينة هو 10 ، مجال الثقة لوسط المجتمع يكون:

$$\mu \in \left[\bar{x} \pm t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n-1}} \right] = 1-\alpha$$

نقوم بحساب المؤشرات الإحصائية للعينة أي $\bar{x}$ و s اعتماد على الجدول التالي:

x_i	n_i	$x_i n_i$	$\left(x_i - \bar{x}\right)$	$\left(x_i - \bar{x}\right)^2$	$n_i\left(x_i - \bar{x}\right)^2$
7	1	7	-3	9	9
8	2	16	-2	4	8
9	1	9	-1	1	1
10	2	20	0	0	0
11	1	11	1	1	1
12	2	24	2	4	8
13	1	13	3	9	9
	10	**100**	**0**		**36**

نقوم بحساب كل من الوسط الحسابي وتباين العينة اللذان يساويان على التوالي 10 و 4.

$$t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n-1}}$$

من الجدول

$$t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} = t_{9\,;\,0,975} \; 2,262$$

إذن:

$$2,262.\frac{s}{\sqrt{n-1}} = 2,262.\frac{2}{3} = 1,508$$

$$\mu \in [10-1{,}508\,;\,10+1{,}508] = 0{,}95$$
$$\mu \in [8{,}492\,;\,11{,}508] = 0{,}95$$

بمعني أننا نتوقع أن ينحصر متوسط وزن السلعة من إنتاج هذا المصنع بين 8.492 كلغ و11.508 وذلك بدرجة ثقة 95%.

حل التمرين السادس:

عند α يساوي 5% نجد من الجدول التوزيع الطبيعي1.96 . فإن مجال الثقة للنسبة p يكون على النحو التالي:

$$p \in \left[\hat{p} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{pq/n} \right] = 1-\alpha$$

وبما أن p وq غير معروفة تعوض ب: $\hat{p}$ و $\hat{q}$ حيث يكتب المجال على النحو التالي:

$$p \in \left[\hat{p} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\hat{p}\hat{q}/n} \right] = 1-\alpha$$

وبالتعويض

$$p \in \left[0{,}09 \pm 1{,}96 \sqrt{0{,}09.0{,}81/200} \right] = 0{,}95$$
$$p \in [0{,}09 \pm 0{,}037] = 0{,}95$$
$$p \in [0{,}053;0{,}127] = 0{,}95$$

ويكون الحد الأدنى:0.053

ويكون الحد الأقصى:0.127

أي أن نسبة الظاهرة في المجتمع الذي سحبت منه عينة تحتوي على200 منتوج يتراوح بين 0.053 و0.127 عند مستوي دلالة قدرة 5%.

حل التمرين السابع:

$$\alpha = 10\% \;\; ; \;\; p = 0.06 \;\; ; \;\; e = 0.02$$

نرغب أن يكون خطأ في التقدير في حدود 0.02 باحتمال 0.90 ، فهذا يعني أن $\alpha = 0{,}10$ وبالتالي من الجدول للتوزيع الطبيعي.

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,645$$

مع العلم أيضا أن

$$|\hat{p} - p| = 0,02$$

حجم العينة يكون:

$$n = (1,645)^2 \frac{0,06.0,94}{(0,02)^2}$$

$$n = 2,706.\frac{0,0564}{0,0004} \approx 381$$

يتضح لنا من هذه النتيجة أن الباحث لكي يحصل على مستوى دقة المطلوب عليه أن يختار عينة حجمها 381 طالب وذلك حتى يكون الفرق بين النسبة الحقيقية والنسبة المقدرة في حدود 0.02 وذلك عند $\alpha = 10\%$.

الفصل الخامس:

اختبار الفرضيات

تمهيد:

يعتبر موضوع اختبار الفرضيات الاحصائية Testing of Statistical Hypothesis شق أساسي للإحصاء الاستدلالي، حيث أن كافة الاجراءات التي تندرج تحت هذا الموضوع يطلق عليها أحيانا مصطلح اختبار المعنوية Test of Significance، والذي يعد من المواضيع الأساسية للتطبيقات الاحصائية في مختلف المجالات العملية، ويهتم هذا النوع من الاختبارات باتخاذ القرارات الاحصائية المناسبة.

فغالبا ما يتساءل الباحث عن مدى مطابقة التقديرات مع معالم المجتمع نذكر في هذا الصدد أنه بالإمكان استعمال أسلوب المناهج الإحصائية لإثبات عدم التناقض بينهما قد يزيد هذا الأسلوب من تدعيم صحة الدراسة، وهذا ما يعرف باختبار الفرضيات يعبر عن اتخاذ القرار الصائب بالنسبة لمجموعة من البدائل المختلفة واختيار البديل الأفضل مع تقليص الخطأ إلى أدنى مستوى ممكن.

وعلى هذا الأساس، تعد الاجراءات المتعلقة باختبارات المعنوية أداة أساسية من الأدوات التحليلية الاحصائية، ويعود الفضل الأول في إقتراح هذه الاجراءات لكل من نيمان وبيرسون سنة 1930، حيث أن الاجراء المتبع في اختبار الفرضيات ينطوي على الخطوات التالية:

- صياغة فرضية معينة؛
- اختبار الفرضية؛
- اتخاذ قرار بشأن الفرضية كنتيجة للاختبار.

وتجدر الإشارة أنه توجد علاقة وثيقة بين مجال الثقة واختبار الفرضيات فإذا أردنا مثلا المقارنة بين قيمة مؤشر لمجتمع إحصائي مع قيمة أخرى ناتجة بتجارب معينة، فالاختبار يكون بالبحث عن القيمة هل تنتمي إلى المجال أم لا، وعليه تتوقف دراستنا على استعمال عينة عشوائية بسيطة من نوع ESAR لاختبار مدى صحة الفرضية لقيمة المقدار الذي يخص معلمة من معالم المجتمع.

فأغلب الفرضيات الاحصائية تتعلق بمعلمات المجتمع الاحصائي أو التوزيعات الاحتمالية ومثال ذلك متوسط المجتمع وتباينه، والفروق بين المتوسطات والنسب، والعلاقات بين المتغيرات والظواهر المختلفة، كما أنها تتعلق بطبيعة هذه التوزيعات ونوعها.

أولا: صياغة وأنواع الفرضيات الاحصائية:

قبل الحديث عن موضوع صياغة الفرضية الاحصائية، ينبغي التعرف على مفهوم الفرضية الاحصائية بشكل عام وأنواع الفرضيات بشكل خاص.

1- صياغة الفرضية الاحصائية:

الفرضية الاحصائية هي إدعاء، تصريح أو تخمين معين قد يكون صحيحا أو خاطئا حول معلمة أو أكثر لمجتمع إحصائي أو عدد من المجتمعات الاحصائية، فمثلا لو كانت الفرضية أن متوسط علامات طلبة السنة الثانية لقسم العلوم التجارية لجامعة سطيف1 في مقياس الاحصاء3 هو 12، فيمكن أن نصيغ الفرضية التالية: $H: \mu = 12$.

2- أنواع الفرضيات الاحصائية:

تنقسم الفرضيات الاحصائية إلى نوعين هما:

أ- الفرضية المبدئية:

تصاغ عادة هذه الفرضية الاحصائية في صورة عدم وجود فروق ذات دلالة إحصائية، أو عدم وجود أثر ذو دلالة إحصائية، أو عدم وجود علاقة ذات دلالة إحصائية، حيث يطلق على هذه الفرضية مصطلح **فرضية العدم، الفرضية المبدئية** أو **الفرضية الأصلية، الفرضية الصفرية (Null hypothesis)**، يرمز لها بالرمز H_0 ، وتصاغ الفرضية المبدئية كما يلي: $\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_0: \mu \geq \mu_0 \\ H_0: \mu \leq \mu_0 \end{cases}$

ب- الفرضية البديلة:

هي فرضية مكملة لفرضية العدم يطلق عليها (**Alternative Hypothesis**)، حيث يتم قبولها عند رفض فرضيةالعدم،أو رفضها عند قبول فرضية العدم، يرمز لها بالرمز H_1 أو H_A ، حيث تصاغ عادة هذه الفرضية الاحصائية في صورة وجود فروق ذات دلالة إحصائية، أو وجود أثر ذو دلالة إحصائية، أو وجود علاقة ذات دلالة إحصائية ، وتصاغ الفرضية البديلة كما يلي: $\begin{cases} H_1: \mu \neq \mu_0 \\ H_1: \mu < \mu_0 \\ H_1: \mu > \mu_0 \end{cases}$

ثانيا: أنواع الأخطاء الاحصائية:

عند اتخاذ القرار طبقا لتحليل البيانات الإحصائية، يوجد نوعين من الأخطاء يمكن الوقوع فيها، قد يمكن أن نرفض H_0 علما أن H_0 صحيحة، ويسمى هذا النوع من الخطأ: **خطأ من الدرجة الأولى**، وقد لا نرفض(نقبل) علما أن H_0 خاطئة، ويسمى هذا النوع من الخطأ : **خطأ من الدرجة الثانية** والجدول التالي يلخص ذلك:

حالة H_0 / القرار	H_0 صحيحة	H_0 غير صحيحة (خاطئة)
رفض H_0 **(RH_0)**	خطأ من الدرجة الأولى	قرار مقبول (سليم و صحيح)
عدم رفض H_0 **($\overline{RH_0}$)**	قرار مقبول (سليم و صحيح)	خطأ من الدرجة الثانية

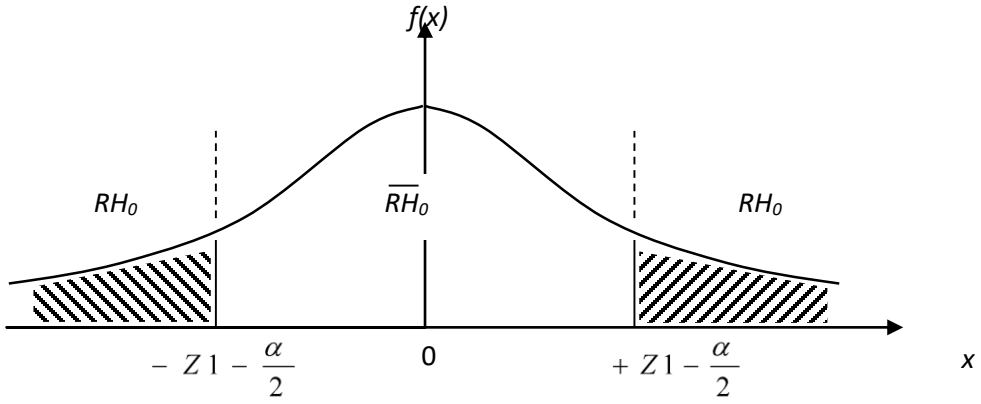
ثالثا: أنواع اختبار الفرضيات الاحصائية:

تتمثل أنواع اختبار الفرضيات الاحصائية في: اختبار الطرفين أو ذو جانبين، اختبار الطرف الأيسر ، اختبار الطرف الأيمن.

1- اختبار الطرفين أو ذو جانبين:

عند نوع هذا الاختبار تأخذ قيمة واحدة بالنسبة للفرضية المبدئية، على عكس الفرضية البديلة التي تأخذ جميع القيم التي تختلف على هذه القيمة سواء بالزيادة أو بالنقصان، فمثلا عند اختبار المتوسط الحسابي للمجتمع نصيغ المسألة على الكيفية التالية: $\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \neq \mu_0 \end{cases}$

وتكون منطقة الرفض موزعة بالتساوي على حدي التوزيع والشكل التالي يوضح ذلك:



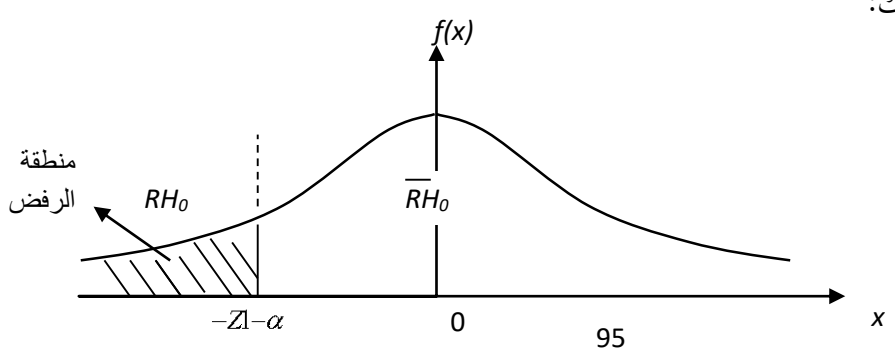
حيث تمثل $\overline{\mathbf{RH_0}}$ منطقة عدم الرفض لـ: $\mathbf{H_0}$ (منطقة قبول $\mathbf{H_0}$).

$\mathbf{RH_0}$ تمثل منطقة الرفض لـ: $\mathbf{H_0}$.

2- اختبار الطرف الأيسر:

في هذه الحالة تنقسم المساحة التي تخص التوزيع الاحتمالي إلى قسمين، حيث كل قسم يحتوى على فرضية معينة، فمثلا عند اختبار المتوسط الحسابي للمجتمع نصيغ المسألة على الكيفية التالية: $\begin{cases} H_0: \mu \geq \mu_0 \\ H_1: \mu < \mu_0 \end{cases}$

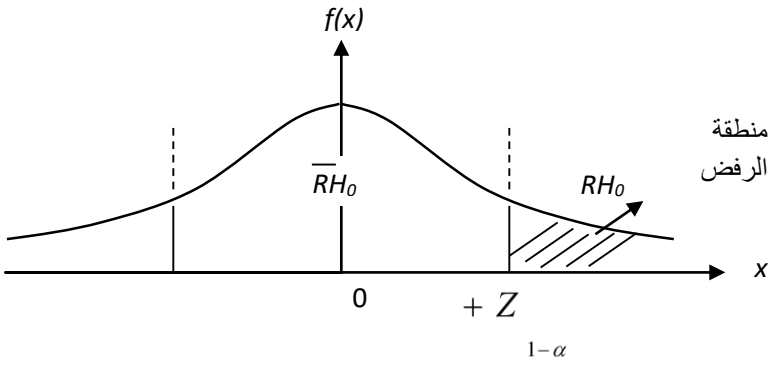
والشكل البياني التالي يوضح ذلك:



3- اختبار الطرف الأيمن:

دائما الاختبار ذو الطرف الواحد تقسم مساحة التوزيع إلى قسمين، حيث كل قسم يحتوى على فرضية معينة، فمثلا عند اختبار المتوسط الحسابي للمجتمع نصيغ المسألة على الكيفية التالية: $\begin{cases} H_0: \mu \leq \mu_0 \\ H_1: \mu > \mu_0 \end{cases}$

والشكل البياني التالي يوضح ذلك:



رابعا: اختبار المتوسط الحسابي للمجتمع U:

ستتوقف اختبار المتوسط الحسابي للمجتمع U على حالة حجم العينة وتباين المجتمع من جهة، ونوع الاختبار من جهة أخرى.

1- حالة حجم العينة كبير ($n \geq 30$) وتباين المجتمع σ^2 معلوم:

*** اختبار الطرفين أو ذو جانبين:**

في حالة حجم العينة كبير ($n \geq 30$) وتباين المجتمع σ^2 معلوم، والإختبار ذو جانبين (الطرفين)، فإن قاعدة اتخاذ القرار تكون على النحو التالي:

$$\begin{cases} \mathbf{Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \in \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \rightarrow \overline{RH_0}} \\ \mathbf{Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \notin \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \rightarrow RH_0} \end{cases}$$

*** اختبار الطرف الأيسر:**

في حالة حجم العينة كبير ($n \geq 30$) وتباين المجتمع σ^2 معلوم، والإختبار ذو الطرف الأيسر، فإن قاعدة اتخاذ القرار تكون على النحو التالي:

$$\begin{cases} \mathbf{Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq -Z_{1-\alpha} \rightarrow \overline{RH_0}} \\ \mathbf{Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < -Z_{1-\alpha} \rightarrow RH_0} \end{cases}$$

*** اختبار الطرف الأيمن:**

في حالة حجم العينة كبير ($n \geq 30$) وتباين المجتمع σ^2 معلوم، والإختبار ذو الطرف الأيمن، فإن قاعدة اتخاذ القرار تكون على النحو التالي:

$$\begin{cases} \mathbf{Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq +Z_{1-\alpha} \rightarrow \overline{RH_0}} \\ \mathbf{Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > +Z_{1-\alpha} \rightarrow RH_0} \end{cases}$$

مثال:

في دراسة إحصائية حول الأجر الشهري للعامل في إحدى المؤسسات على عينة من العمال حجمها 100 عامل، تبين لنا أن الانحراف المعياري للأجر الشهري للعامل في هذه المؤسسة هو 140 دج، فبعد جمع البيانات من هذه العينة قدر الأجر المتوسط الشهري للعامل بـ: 12500 دج.

المطلوب: اختبر الفرضيات التالية عند مستوى دلالة $\alpha = 5\%$

أ: $\begin{cases} H_0: \mu = 12520 \\ H_1: \mu \neq 12520 \end{cases}$

ب: $\begin{cases} H_0: \mu \geq 12520 \\ H_1: \mu < 12520 \end{cases}$

ج: $\begin{cases} H_0: \mu \leq 12520 \\ H_1: \mu > 12520 \end{cases}$

الحل:

حجم العينة كبير ($n = 100 \geq 30$) وتباين المجتمع σ^2 معلوم ($\sigma^2 = 140^2 = 19600$)

أ: $\begin{cases} H_0: \mu = 12520 \\ H_1: \mu \neq 12520 \end{cases}$

لدينا حجم العينة كبير ($n = 100 \geq 30$) وتباين المجتمع σ^2 معلوم ($\sigma^2 = 140^2 = 19600$)، ونعلم أنه في حالة عينة كبيرة، والإختبار ذو جانبين، فإن قاعدة اتخاذ القرار تكون على النحو التالي:

$$\begin{cases} \mathbf{Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} \in \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \rightarrow \overline{RH_0}} \\ \mathbf{Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} \notin \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \rightarrow RH_0} \end{cases}$$

$$\mathbf{\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{140}{\sqrt{100}} = \frac{140}{10} = 14}$$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0,05}{2}} = Z_{0,975} = 1,96 \Rightarrow \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] = [\mathbf{-1,96.}; \mathbf{+1,96}]$$

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{12500 - 12520}{14} = \frac{-20}{14} = \mathbf{-1,43}$$

$$\mathbf{-1,43 \in [-1,96; +1,96] \rightarrow \overline{RH_0}}$$

هذا يعني أن القرار هو **عدم رفض الفرضية المبدئية H0** عند مستوى المعنوية **α =5%** ، أي أننا نقبل أن الأجر المتوسط الشهري للعامل في هذه المؤسسة يقدر بـ: 12520 دج.

ب: $\begin{cases} H_0: \mu \geq 12520 \\ H_1: \mu < 12520 \end{cases}$

في هذه الحالة الإختبار ذو جانب أيسر و $n \leq 30$ أيضا وبذلك تكون قاعدة إتخاذ القرار على النحو التالي:

$$\begin{cases} Z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} \geq -Z_{1-\alpha} \rightarrow \boldsymbol{\overline{RH_0}} \\ Z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} < -Z_{1-\alpha} \rightarrow \boldsymbol{RH_0} \end{cases}$$

لدينا: $Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{12500 - 12520}{14} = \frac{-20}{14} = \mathbf{-1,43}$

$$-Z_{1-\alpha} = -Z_{1-0,05} = -Z_{0,95} = \mathbf{-1,6449} \simeq \mathbf{-1,645}$$

نلاحظ أن: $Z = \mathbf{-1,43} \geq -Z_{1-\alpha} = \mathbf{-1,645} \rightarrow \boldsymbol{\overline{RH_0}}$

هذا يعني أن القرار هو **عدم رفض الفرضية المبدئية H0** عند مستوى المعنوية α=5% ، أي أننا نقبل أن الأجر المتوسط الشهري للعامل في هذه المؤسسة أكبر أو يساوي من 12520 دج.

ج: $\begin{cases} H_0: \mu \leq 12520 \\ H_1: \mu > 12520 \end{cases}$

في هذه الحالة الإختبار ذو جانب أيمن و $n \leq 30$ أيضا وبذلك تكون قاعدة إتخاذ القرار على النحو التالي:

$$\begin{cases} Z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} \leq +Z_{1-\alpha} \rightarrow \boldsymbol{\overline{RH_0}} \\ Z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} > +Z_{1-\alpha} \rightarrow \boldsymbol{RH_0} \end{cases}$$

لدينا: $Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{12500 - 12520}{14} = \frac{-20}{14} = \mathbf{-1,43}$

$$+Z_{1-\alpha} = +Z_{1-0,05} = Z_{0,95} = \mathbf{1,6449} \simeq \mathbf{1,645}$$

نلاحظ أن: $Z = \mathbf{-1,43} < +Z_{1-\alpha} = \mathbf{+1,645} \rightarrow \boldsymbol{\overline{RH_0}}$

هذا يعني أن القرار هو **عدم رفض الفرضية المبدئية H0** عند مستوى المعنوية α=5% ، أي أننا نقبل أن الأجر المتوسط الشهري للعامل في هذه المؤسسة أقل أو يساوي من 12520 دج.

2- حالة حجم العينة كبير ($n \geq 30$) وتباين المجتمع σ^2 مجهول:

*** اختبار الطرفين أو ذو جانبين:**

في حالة حجم العينة كبير ($n \geq 30$) وتباين المجتمع σ^2 مجهول، والإختبار ذو جانبين (الطرفين)، فإن قاعدة اتخاذ القرار تكون على النحو التالي:

$$\begin{cases} \boldsymbol{Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}} \in \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \rightarrow \overline{RH_0}} \\ \boldsymbol{Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}} \notin \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \rightarrow RH_0} \end{cases}$$

*** اختبار الطرف الأيسر:**

في حالة حجم العينة كبير ($n \geq 30$) وتباين المجتمع σ^2 مجهول، والإختبار ذو الطرف الأيسر، فإن قاعدة اتخاذ القرار تكون على النحو التالي:

$$\begin{cases} \mathbf{Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}} \geq -Z_{1-\alpha} \rightarrow \overline{RH_0}} \\ \mathbf{Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}} < -Z_{1-\alpha} \rightarrow RH_0} \end{cases}$$

*** اختبار الطرف الأيمن:**

في حالة حجم العينة كبير $(n \geq 30)$ وتباين المجتمع σ^2 مجهول، والإختبار ذو الطرف الأيمن، فإن قاعدة اتخاذ القرار تكون على النحو التالي:

$$\begin{cases} \mathbf{Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}} \leq +Z_{1-\alpha} \rightarrow \overline{RH_0}} \\ \mathbf{Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}} > +Z_{1-\alpha} \rightarrow RH_0} \end{cases}$$

مثال:

الفترة المعيشية الوسطية لجهاز كهربائي هي 1570 ساعة مع انحراف معياري قدره 120 ساعة، إذا علمنا أن هذه النتائج تم الوصول إليها من خلال دراسة لعينة تحتوي على 101 منتوج.

المطلوب: اختبر الفرضيات التالية عند مستوى دلالة $\alpha = 5\%$

أ: $\begin{cases} H_0: \mu = 1600 \\ H_1: \mu \neq 1600 \end{cases}$

ب: $\begin{cases} H_0: \mu \geq 1600 \\ H_1: \mu < 1600 \end{cases}$

ج: $\begin{cases} H_0: \mu \leq 1600 \\ H_1: \mu > 1600 \end{cases}$

الحل:

حجم العينة كبير $(n = 101 \geq 30)$ وتباين المجتمع σ^2 مجهول.

أ: $\begin{cases} H_0: \mu = 1600 \\ H_1: \mu \neq 1600 \end{cases}$

لدينا مجتمع غير محدود و $n=101$ ، ونعلم أنه في حالة عينة كبيرة، والإختبار ذو جانبين، فإن قاعدة اتخاذ القرار تكون على النحو التالي:

$$\begin{cases} \mathbf{Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} \in \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \rightarrow \overline{RH_0}} \\ \mathbf{Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} \notin \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \rightarrow RH_0} \end{cases}$$

$n = 101$; $\bar{x} = 1570$; $s = 120$; $\alpha = 0{,}05$

حيث σ^2 مجهول وعليه: $\mathbf{\sigma_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n-1}}}$

$$\mathbf{\sigma_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n-1}} = \frac{120}{\sqrt{101-1}} = \frac{120}{\sqrt{100}} = \frac{120}{10} = 12}$$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0{,}05}{2}} = Z_{0{,}975} = 1{,}96 \Rightarrow \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] = [\mathbf{-1,96.; +1,96}]$$

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{1570 - 1600}{12} = \frac{-30}{12} = \mathbf{-2,5}$$

$$\mathbf{-2,5 \notin [-1,96.; +1,96] \rightarrow RH_0}$$

هذا يعني أن القرار هو **رفض الفرضية المبدئية H0** عند مستوى المعنوية **α =5%** ، أي أننا لا نقبل أن الفترة الوسطية المعيشية للأجهزة الكهربائية هي 1600سا.

ب: $\begin{cases} H_0: \mu \geq 1600 \\ H_1: \mu < 1600 \end{cases}$

في هذه الحالة الإختبار ذو جانب أيسر و $n \leq 30$ أيضا وبذلك تكون قاعدة إتخاذ القرار على النحو التالي:

$$\begin{cases} Z = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma_{\overline{x}}} \geq -Z_{1-\alpha} \rightarrow \mathbf{\overline{RH_0}} \\ Z = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma_{\overline{x}}} < -Z_{1-\alpha} \rightarrow \mathbf{RH_0} \end{cases}$$

لدينا: $Z = \frac{1570-1600}{12} = \mathbf{-2,5}$

$$-Z_{1-\alpha} = -Z_{1-0,05} = -Z_{0,95} = \mathbf{-1,6449 \simeq -1,645}$$

نلاحظ أن: $Z = \mathbf{-2,5} < -Z_{1-\alpha} = \mathbf{-1,645} \rightarrow \mathbf{RH_0}$

هذا يعني أن القرار هو **رفض الفرضية المبدئية H0** عند مستوى المعنوية **α =5%** ، أي أننا لا نقبل أن الفترة الوسطية المعيشية للأجهزة الكهربائية تفوق أو تساوي 1600سا.

ج: $\begin{cases} H_0: \mu \leq 1600 \\ H_1: \mu > 1600 \end{cases}$

في هذه الحالة الإختبار ذو جانب أيمن و $n \leq 30$ أيضا وبذلك تكون قاعدة إتخاذ القرار على النحو التالي:

$$\begin{cases} Z = \frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma_{\overline{x}}} \leq +Z_{1-\alpha} \rightarrow \mathbf{\overline{RH_0}} \\ Z = \frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma_{\overline{x}}} > +Z_{1-\alpha} \rightarrow \mathbf{RH_0} \end{cases}$$

لدينا: $Z = \frac{1570-1600}{12} = \mathbf{-2,5}$

$$+Z_{1-\alpha} = +Z_{1-0,05} = Z_{0,95} = \mathbf{1,6449 \simeq 1,645}$$

نلاحظ أن: $Z = \mathbf{-2,5} < +Z_{1-\alpha} = \mathbf{+1,645} \rightarrow \mathbf{\overline{RH_0}}$

هذا يعني أن القرار هو**عدم رفض الفرضية المبدئية H0** عند مستوى المعنوية **α =5%** ، أي أننا نقبل أن الفترة الوسطية المعيشية للأجهزة الكهربائية تقل أو تساوي 1600سا.

3- حالة حجم العينة صغير ($n < 30$) وتباين المجتمع σ^2 مجهول:

*** اختبار الطرفين أو ذو جانبين:**

في حالة حجم العينة صغير ($n < 30$) وتباين المجتمع σ^2 مجهول، والإختبار ذو جانبين (الطرفين)، فإن قاعدة اتخاذ القرار تكون على النحو التالي:

$$\begin{cases} \mathbf{T = \frac{\overline{x}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}} \in \left[-t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}; +t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}\right] \rightarrow \overline{RH_0}} \\ \mathbf{T = \frac{\overline{x}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}} \notin \left[-t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}; +t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}\right] \rightarrow RH_0} \end{cases}$$

*** اختبار الطرف الأيسر:**

في حالة حجم العينة صغير $(n < 30)$ وتباين المجتمع σ^2 مجهول، والإختبار ذو الطرف الأيسر، فإن قاعدة اتخاذ القرار تكون على النحو التالي:

$$\begin{cases} \mathbf{T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}} \geq -t_{1-\alpha;n-1} \rightarrow \overline{RH_0}} \\ \mathbf{T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}} < -t_{1-\alpha;n-1} \rightarrow RH_0} \end{cases}$$

*** اختبار الطرف الأيمن:**

في حالة حجم العينة صغير $(n < 30)$ وتباين المجتمع σ^2 مجهول، والإختبار ذو الطرف الأيمن، فإن قاعدة اتخاذ القرار تكون على النحو التالي:

$$\begin{cases} \mathbf{T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}} \leq +t_{1-\alpha;n-1} \rightarrow \overline{RH_0}} \\ \mathbf{T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}} > +t_{1-\alpha;n-1} \rightarrow RH_0} \end{cases}$$

مثال:

تحقق من صحة الفرضيات الموالية بالنسبة لعينة تحتوي على البيانات التالية:

8، 12، 10، 13، 8، 11، 9،12،7، 10، مع العلم أن $\alpha = 5\%$

أ: $H_0: \mu = 11$

ب: $H_0: \mu \leq 11$

ج: $H_0: \mu \geq 11$

الحل:

حجم العينة صغير $(n = 10 < 30)$ وتباين المجتمع σ^2 مجهول.

أ: $H_0: \mu = 11$

لإختبار صحة الفرضية نقوم بصياغة الفرضيات التالية:

$$\begin{cases} H_0: \mu = 11 \\ H_1: \mu \neq 11 \end{cases}$$

بما أن حجم العينة صغير $n = 10 < 30$ والإختبار ذو جانبين فإن قاعدة إتخاذ القرار تعطى بالصيغة التالية:

$$\begin{cases} \mathbf{T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} \in \left[-t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}; +t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}\right] \rightarrow \overline{RH_0}} \\ \mathbf{T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} \notin \left[-t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}; +t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}\right] \rightarrow RH_0} \end{cases}$$

حيث σ^2 مجهول وعليه: $\boldsymbol{\sigma_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n-1}}}$

لدينا: $\mu_0 = \mathbf{11}$; $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{100}{10} = \mathbf{10}$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{36}{10} = \mathbf{3,6} \Rightarrow \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sqrt{s^2}}{\sqrt{n-1}} = \sqrt{\frac{3,6}{10-1}} = \sqrt{0,4} = 0,63$$

وبذلك يكون:

$$T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sqrt{s^2}}{\sqrt{n-1}}} = \frac{10-11}{0{,}63} = \mathbf{-1{,}59}$$

لدينا أيضا: $t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1} = t_{1-\frac{0{,}05}{2};10-1} = t_{0{,}975\,;9} = \mathbf{2{,}26}$

أي أن: $\left[-t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}; +t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}\right] = [\mathbf{-2{,}26}\,;\mathbf{+2{,}26}]$

نلاحظ أن: $T = \mathbf{-1{,}59} \in \left[-t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}; +t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}\right] = [\mathbf{-2{,}26}\,;\mathbf{+2{,}26}] \rightarrow \mathbf{\overline{RH_0}}$

أي أن القرار هنا هو **عدم رفض الفرضية المبدئية $\mathbf{H_0}$** .

ب: $\begin{cases} H_0: \mu \leq 11 \\ H_1: \mu > 11 \end{cases}$

في هذه الحالة الإختبار ذو جانب أيمن و $n > 30$ أيضا وبذلك تكون قاعدة إتخاذ القرار على النحو التالي:

$$\begin{cases} T = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} \leq +t_{1-\alpha\,;n-1} \rightarrow \mathbf{\overline{RH_0}} \\ T = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} > +t_{1-\alpha\,;n-1} \rightarrow \mathbf{RH_0} \end{cases}$$

لدينا: $T = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sqrt{s^2}}{\sqrt{n-1}}} = \frac{10-11}{0{,}63} = \mathbf{-1{,}59}$

$$+t_{1-\alpha\,;n-1} = +t_{1-0{,}05\,;10-1} = +t_{0{,}95\,;9} = \mathbf{1{,}83}$$

نلاحظ أن: $T = \mathbf{-1{,}59} < +t_{1-\alpha\,;n-1} = \mathbf{+1{,}83} \rightarrow \mathbf{\overline{RH_0}}$

أي أن القرار هنا هو **عدم رفض الفرضية المبدئية $\mathbf{H_0}$** .

ج: $\begin{cases} H_0: \mu \geq 11 \\ H_1: \mu < 11 \end{cases}$

في هذه الحالة الإختبار ذو جانب أيسر و $n > 30$ أيضا وبذلك تكون قاعدة إتخاذ القرار على النحو التالي:

$$\begin{cases} T = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} \geq -t_{1-\alpha\,;n-1} \rightarrow \mathbf{\overline{RH_0}} \\ T = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} < -t_{1-\alpha\,;n-1} \rightarrow \mathbf{RH_0} \end{cases}$$

لدينا: $T = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sqrt{s^2}}{\sqrt{n-1}}} = \frac{10-11}{0{,}63} = \mathbf{-1{,}59}$

$$-t_{1-\alpha\,;n-1} = -t_{1-0{,}05\,;10-1} = -t_{0{,}95\,;9} = \mathbf{-1{,}83}$$

نلاحظ أن: $T = \mathbf{-1{,}59} \geq -t_{1-\alpha\,;n-1} = \mathbf{-1{,}83} \rightarrow \mathbf{\overline{RH_0}}$

هذا يعني أن القرار هو **عدم رفض الفرضية المبدئية H0** .

ملاحظة هامة:

عند اختبار ذو جانب واحد، سواء كان اختبار الطرف الأيمن أو اختبار الطرف الأيسر بالنسبة للمتوسط الحسابي للمجتمع μ، حيث يمكن أن نتعرض إلى الحالات التالية:

$\mathbf{H_1}$	$\mathbf{H_0}$
$\mu > \mu_0$	$\mu = \mu_0$
$\mu < \mu_0$	$\mu = \mu_0$

$\mu < \mu_0$	$\mu \geq \mu_0$
$\mu > \mu_0$	$\mu \leq \mu_0$

خامسا: اختبار نسبة صفة معينة في المجتمعP

ستتوقف اختبار نسبة صفة معينة في المجتمعP على نوع الاختبار.

1- حالة اختبار الطرفين أو ذو جانبين:

تكون قاعدة إتخاذ القرار في هذه الحالة كما يلي:

$$\begin{cases} \mathbf{Z = \frac{f - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \in \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \rightarrow \overline{RH_0}} \\ \mathbf{Z = \frac{f - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \notin \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \rightarrow RH_0} \end{cases}$$

2- حالة اختبار الطرف الأيسر:

تكون قاعدة إتخاذ القرار في هذه الحالة كما يلي:

$$\begin{cases} \mathbf{Z = \frac{f - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \geq -Z_{1-\alpha} \rightarrow \overline{RH_0}} \\ \mathbf{Z = \frac{f - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} < -Z_{1-\alpha} \rightarrow RH_0} \end{cases}$$

3- حالة اختبار الطرف الأيمن:

تكون قاعدة إتخاذ القرار في هذه الحالة كما يلي:

$$\begin{cases} \mathbf{Z = \frac{f - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \leq +Z_{1-\alpha} \rightarrow \overline{RH_0}} \\ \mathbf{Z = \frac{f - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} > +Z_{1-\alpha} \rightarrow RH_0} \end{cases}$$

مثال:

قبل تسويق المؤسسة منتوجها الجديد على مجال واسع، قامت بمعاينة 600 زبون فوجدت أن 200 منهم قد أقبلوا على شراء هذا المنتوج.

المطلوب: عند مستوى دلالة 5%، اختبر صحة الفرضيات التالية:

أ- 30% من الزبائن سوف لا يشترون هذا المنتوج الجديد.

ب- أكثر من 30% من الزبائن سوف يشترون هذا المنتوج الجديد.

ج- أكثر من أو يساوي 30% من الزبائن سوف يشترون هذا المنتوج الجديد.

الحل:

أ- 30% من الزبائن سوف لا يشترون هذا المنتوج الجديد.

يمكن صياغة الفرضيات التالية:

$$\begin{cases} H_0: p = 30\% \\ H_1: p \neq 30\% \end{cases}$$

الإختبار هنا ذو جانبين و$n = 600 \leq 30$ وعليه تكون قاعدة إتخاذ القرار في هذه الحالة كما يلي:

$$\begin{cases} \mathbf{Z = \frac{f-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \in \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \rightarrow \overline{RH_0}} \\ \mathbf{Z = \frac{f-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \notin \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \rightarrow RH_0} \end{cases}$$

لدينا: $n = 600 \quad ; \quad p_0 = 30\% = \mathbf{0,3} \quad ; \quad f = \frac{x}{n} = \frac{200}{600} = 33\% = \mathbf{0,33}$

$$\mathbf{Z = \frac{f - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0.33 - 0,3}{\sqrt{\frac{0,3(1-0,3)}{600}}} = 1,58}$$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0,05}{2}} = Z_{0,975} = \mathbf{1,96} \Rightarrow \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] = [-\mathbf{1,96} ; +\mathbf{1,96}]$$

نلاحظ أن : $\mathbf{Z = 1,58} \in \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] = [-1,96 ; +1,96] \rightarrow \overline{RH_0}$

أي أن القرار هو **عدم رفض الفرضية المبدئية** H_0 معناه أنه قد تأكد لنا من معلومات العينة المدروسة وبمستوى دلالة 5% أن نسبة 30 % من الزبائن سيشترون المنتوج الجديد .

ب- أكثر من 30% من الزبائن سوف يشترون هذا المنتوج الجديد.

يمكن صياغة الفرضيات التالية:

$$\begin{cases} H_0: p \leq 30\% \\ H_1: p > 30\% \end{cases}$$

نلاحظ أن الاختبار هنا ذو جانب أيمن و $n \leq 30$ ومنه فإن قاعدة إتخاذ القرار تكون على النحو التالي:

$$\begin{cases} Z = \frac{f-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \leq +Z_{1-\alpha} \rightarrow \overline{RH_0} \\ Z = \frac{f-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} > +Z_{1-\alpha} \rightarrow RH_0 \end{cases}$$

لدينا: $n = 600 \quad ; \quad p_0 = 30\% \quad ; \quad f = \frac{200}{600} = 33\%$

$$Z_{1-\alpha} = Z_{1-0,05} = Z_{0,95} = \mathbf{1,6449} \simeq \mathbf{1,645}$$

$$\mathbf{Z = \frac{f - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0.33 - 0,3}{\sqrt{\frac{0,3(1-0,3)}{600}}} = 1,58}$$

نلاحظ أن: $Z = \mathbf{1,58} \leq Z_{1-\alpha} = \mathbf{1,645} \rightarrow \overline{RH_0}$

أي أن القرار هو **عدم رفض الفرضية المبدئية** H_0 معناه أنه قد تأكد لنا من معلومات العينة المدروسة وبمستوى دلالة 5% أن نسبة 30 % أو أقل من الزبائن سيشترون المنتوج الجديد.

ج- أكثر من أو يساوي 30% من الزبائن سوف يشترون هذا المنتوج الجديد.

يمكن صياغة الفرضيات التالية:

$$\begin{cases} H_0: p \geq 30\% \\ H_1: p < 30\% \end{cases}$$

نلاحظ أن الاختبار هنا ذو جانب أيسر و $n \leq 30$ ومنه فإن قاعدة إتخاذ القرار تكون على النحو التالي:

$$\begin{cases} Z = \frac{f-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \geq -Z_{1-\alpha} \rightarrow \overline{\mathbf{RH_0}} \\ Z = \frac{f-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} < -Z_{1-\alpha} \rightarrow \mathbf{RH_0} \end{cases}$$

لدينا: $n = 600 \quad ; \quad p_0 = 30\% \quad ; \quad f = \frac{200}{600} = 33\%$

$$-Z_{1-\alpha} = -Z_{1-0,05} = -Z_{0,95} = \mathbf{-1,6449 \simeq -1,645}$$

$$\mathbf{Z} = \frac{f-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0.33-0,3}{\sqrt{\frac{0,3(1-0,3)}{600}}} = \mathbf{1,58}$$

نلاحظ أن: $\mathbf{Z = 1,58 \geq -Z_{1-\alpha} = -1,645 \rightarrow \overline{RH_0}}$

أي أن القرار هو **عدم رفض الفرضية المبدئية** H_0 معناه أنه قد تأكد لنا من معلومات العينة المدروسة وبمستوى دلالة 5% أن نسبة30 % أو أكثر من الزبائن سيشترون المنتوج الجديد.

سادسا: اختبار تباين المجتمعσ^2:

ستتوقف اختبار تباين المجتمعσ^2 على نوع الاختبار.

1- حالة اختبار الطرفين أو ذو جانبين:

تكون قاعدة إتخاذ القرار في هذه الحالة كما يلي:

$$\begin{cases} \frac{n S^2}{\sigma^2_0} \in \left[\mathbf{X^2_{\frac{\alpha}{2};n-1}; X^2_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}}\right] \rightarrow \overline{\mathbf{RH_0}} \\ \frac{n S^2}{\sigma^2_0} \notin \left[\mathbf{X^2_{\frac{\alpha}{2};n-1}; X^2_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}}\right] \rightarrow \mathbf{RH_0} \end{cases}$$

2- حالة اختبار الطرف الأيسر:

تكون قاعدة إتخاذ القرار في هذه الحالة كما يلي:

$$\begin{cases} \frac{n S^2}{\sigma^2_0} \in \left[\mathbf{X^2_{\alpha;n-1}; X^2_{1-\alpha;n-1}}\right] \rightarrow \overline{\mathbf{RH_0}} \\ \frac{n S^2}{\sigma^2_0} \notin \left[\mathbf{X^2_{\alpha;n-1}; X^2_{1-\alpha;n-1}}\right] \rightarrow \mathbf{RH_0} \end{cases}$$

3- حالة اختبار الطرف الأيمن:

تكون قاعدة إتخاذ القرار في هذه الحالة كما يلي:

$$\begin{cases} \frac{n S^2}{\sigma^2_0} \in \left[\mathbf{X^2_{\alpha;n-1}; X^2_{1-\alpha;n-1}}\right] \rightarrow \overline{\mathbf{RH_0}} \\ \frac{n S^2}{\sigma^2_0} \notin \left[\mathbf{X^2_{\alpha;n-1}; X^2_{1-\alpha;n-1}}\right] \rightarrow \mathbf{RH_0} \end{cases}$$

مثال:

ينتج مصنع للأغذية نوع من المعلبات، قام المصنع بمراقبة دورية لعينة تحتوي على 16 نوع من الأغذية ووجد أن الانحراف المعياري يساوي 5,5 .

المطلوب: اختبر الفرضيات التالية عند مستوى دلالة $\alpha = 5\%$

أ: $\begin{cases} H_0: \sigma^2 = 20 \\ H_1: \sigma^2 \neq 20 \end{cases}$

ب: $\begin{cases} H_0: \sigma^2 \geq 40 \\ H_1: \sigma^2 < 40 \end{cases}$

ج: $\begin{cases} H_0: \sigma^2 \leq 30 \\ H_1: \sigma^2 > 30 \end{cases}$

الحل:

أ: $\begin{cases} H_0: \sigma^2 = 20 \\ H_1: \sigma^2 \neq 20 \end{cases}$

حسب هذه الصيغة نفهم أن الاختبار ذو طرفين، ومنه فإن قاعدة إتخاذ القرار تكون على النحو التالي:

$$\begin{cases} \frac{n S^2}{\sigma^2_0} \in \left[X^2_{\frac{\alpha}{2};n-1}; X^2_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}\right] \rightarrow \overline{RH_0} \\ \frac{n S^2}{\sigma^2_0} \notin \left[X^2_{\frac{\alpha}{2};n-1}; X^2_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}\right] \rightarrow RH_0 \end{cases}$$

$$\frac{n S^2}{\sigma^2_0} = \frac{16 \times 5{,}5^2}{20} = 24{,}2$$

$$X^2_{\frac{\alpha}{2};n-1} = X^2_{\frac{0{,}05}{2};16-1} = X^2_{0{,}025;15} = 6{,}26$$

$$X^2_{1-\frac{\alpha}{2};n-1} = X^2_{1-\frac{0{,}05}{2};16-1} = X^2_{0{,}975;15} = 27{,}5$$

نلاحظ أن: $\frac{n S^2}{\sigma^2_0} = \frac{16 \times 5{,}5^2}{20} = 24{,}2 \in [6{,}26; 27{,}5] \rightarrow \overline{RH_0}$ أي أن القرار هو **عدم رفض الفرضية المبدئية** H_0 .

ب: $\begin{cases} H_0: \sigma^2 \geq 40 \\ H_1: \sigma^2 < 40 \end{cases}$

حسب هذه الصيغة نلاحظ هنا أن نوع الاختبار هو اختبار ذو جانب واحد (الطرف الأيسر) ، ومنه فإن قاعدة إتخاذ القرار تكون على النحو التالي:

$$\begin{cases} \frac{n S^2}{\sigma^2_0} \in \left[X^2_{\alpha;n-1}; X^2_{1-\alpha;n-1}\right] \rightarrow \overline{RH_0} \\ \frac{n S^2}{\sigma^2_0} \notin \left[X^2_{\alpha;n-1}; X^2_{1-\alpha;n-1}\right] \rightarrow RH_0 \end{cases}$$

$$\frac{n S^2}{\sigma^2_0} = \frac{16 \times 5{,}5^2}{40} = 12{,}1$$

$$X^2_{\alpha;n-1} = X^2_{0{,}05;16-1} = X^2_{0{,}05;15} = 7{,}26$$

$$X^2_{1-\alpha;n-1} = X^2_{1-0{,}05;16-1} = X^2_{0{,}95;15} = 25$$

نلاحظ أن: $\frac{n S^2}{\sigma^2_0} = \frac{16 \times 5{,}5^2}{40} = 12{,}1 \in [7{,}26; 25] \rightarrow \overline{RH_0}$ أي أن القرار هو **عدم رفض الفرضية المبدئية** H_0 .

ج: $\begin{cases} H_0: \sigma^2 \leq 30 \\ H_1: \sigma^2 > 30 \end{cases}$

حسب هذه الصيغة نلاحظ هنا أن نوع الاختبار هو اختبار ذو جانب واحد (الطرف الأيمن) ، ومنه فإن قاعدة إتخاذ القرار تكون على النحو التالي:

$$\begin{cases} \frac{n S^2}{\sigma^2_0} \in \left[X^2_{\alpha;n-1}; X^2_{1-\alpha;n-1}\right] \rightarrow \overline{RH_0} \\ \frac{n S^2}{\sigma^2_0} \notin \left[X^2_{\alpha;n-1}; X^2_{1-\alpha;n-1}\right] \rightarrow RH_0 \end{cases}$$

$$\frac{n S^2}{\sigma^2_0} = \frac{16 \times 5{,}5^2}{30} = 16{,}13$$

$$X^2_{\alpha;n-1} = X^2_{0{,}05;16-1} = X^2_{0{,}05;15} = 7{,}26$$

$$X^2_{1-\alpha;n-1} = X^2_{1-0{,}05;16-1} = X^2_{0{,}95;15} = 25$$

نلاحظ أن: $\frac{n S^2}{\sigma^2_0} = \frac{16 \times 5{,}5^2}{30} = 16{,}13 \in [7{,}26; 25] \rightarrow \overline{RH_0}$ أي أن القرار هو **عدم رفض الفرضية المبدئية** H_0 .

تمارين محلولة

التمرين الأول:

في دراسة حول أسباب هجرة الأطباء بالجزائر اجريت دراسة استطلاعية لآراء عينة من الأطباء بكل من القطاع الخاص والعمومي حول الموضوع حجمها 900 طبيب، فوجد أن متوسط عدد الأطباء الذين يرجعون أسباب الهجرة إلى ظروف العمل الصعبة في هذه العينة هو 400 طبيب، علما أن متغير الدراسة هنا يتبع التوزيع الطبيعي بإنحراف معياري قدره 50.

المطلوب:

1. هل متوسط عدد الأطباء الذين يرجعون أسباب الهجرة إلى ظروف العمل الصعبة يفوق 500 طبيب عند مستوى دلالة 1%؟

2. هل متوسط عدد الأطباء الذين يرجعون أسباب الهجرة إلى ظروف العمل الصعبة يقل عن 500 طبيب عند مستوى دلالة 5%؟

التمرين الثاني:

صرحت الجهات الرسمية أن نسبة المتخرجين من الجامعة الذين يحصلون على عمل في السنة الأولى التي تلي تخرجهم هي 70%، للتأكد من صحة هذا التصريح تم سحب عينة حجمها 900 طالب متخرج، فوجد أن نسبة الحصول على عمل في السنة الأولى التي تلي تخرجهم هي 67%.

المطلوب: اختبر صحة هذا التصريح عند مستوى معنوية 1%؟

التمرين الثالث:

تدعي إحدى القنوات الإخبارية بالجزائر أن نسبة الأطفال المصابين بالتوحد لا تتجاوز 5%، وبغرض متابعة الموضوع تم أخذ عينة من 80 طفل فوجد أن 6 أطفال منهم مصابين بهذا المرض.

المطلوب: اختبر صحة ادعاء هذه القناة الاخبارية عند مستوى دلالة 1%؟

التمرين الرابع:

تدعي إدارة أحد المصانع لصناعة نوع معين من الأنابيب المعدنية بأن الوسط الحسابي لطول قطر الأنابيب المصنعة في هذا المصنع مطابق للمواصفات ويساوي 2سم، وللتأكد من صحة قوله سحبت عينة عشوائية من الانتاج الكلي تحتوي على 35 أنبوب معدني، فكانت أطوال أقطارها كما يلي:

1.89	1.94	1.97	1.99	1.95	1.85	1.84	1.9	2
2.04	2.05	1.9	1.95	1.96	1.97	2	2.11	2.1
2.12	2.09	2.07	2.06	1.98	1.94	1.93	1.9	2.02
_	2.03	1.98	1.92	2.1	2.08	1.9	1.9	1.89

إذا علمت أن أطوال أقطار الأنابيب تتوزع طبيعيا، و $\sum_{i=1}^{35}(x_i - \bar{x})^2 = 2.7335$.

المطلوب: اختبر صحة إدعاء إدارة هذا المصنع عند مستوى معنوية 5%؟

التمرين الخامس:

قامت إحدى الشركات باستيراد شحنة كبيرة من الأجهزة الكهرومنزلية وقد تعهدت الشركة المصدرة لهذه الأجهزة بأن لا تزيد نسبة الأجهزة المعيبة في الشحنة عن 3%، تم اختيار عينة عشوائية من 50 جهاز من هذه الشحنة، فتبين وجود 2 جهاز معيب.

المطلوب: هل يمكن القول عند مستوى معنوية 1% أن الشركة المصدرة للأجهزة الكهرومنزلية قد إلتزمت بتعهدها؟

التمرين السادس:

تلقت مؤسسة شحنة من الإطارات المطاطية للسيارات وترغب في تقدير متوسط مدة حياة هذه الإطارات، لأجل ذلك تم سحب عينة مكونة من 25 إطار مطاطي، فتم التوصل إلى أن مدة حياتها مجتمعة تساوي 987000 كلم، علما أن مدة حياة هذه الإطارات عبارة عن متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي، بالإضافة إلى أن: $\sum_{i=1}^{25}(x_i - \bar{x})^2 = 153600$ ، وفي هذا الصياغ تدعي المؤسسة المصنعة لهذه الإطارات أن متوسط مدة حياة الإطارات المطاطية في الشحنة هي 42000 كلم.

المطلوب: اختبر مدى صحة هذا الإدعاء عند مستوى ثقة 95%؟

الحلول

حل التمرين الأول:

1. هل متوسط عدد الأطباء الذين يرجعون أسباب الهجرة إلى ظروف العمل الصعبة يفوق 500 طبيب عند مستوى دلالة 1% ؟:

أي أنه هنا يُراد اختبار الفرضية التالية:

$$\begin{cases} H_0: \mu \leq 500 \\ H_1: \mu > 500 \end{cases}$$

نلاحظ أن الاختبار هنا ذو جانب أيمن و $n \leq 30$ ، ومنه فإن قاعدة إتخاذ القرار تكون على النحو التالي:

$$\begin{cases} Z = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma_{\overline{x}}} \leq +Z_{1-\alpha} \rightarrow \mathbf{\overline{RH_0}} \\ Z = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma_{\overline{x}}} > +Z_{1-\alpha} \rightarrow \mathbf{RH_0} \end{cases}$$

لدينا: $n = 900$; $\mu_0 = 500$; $\sigma = 50$; $\overline{x} = 400$

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{50}{\sqrt{900}} = \frac{50}{30} = \mathbf{1,6667} \simeq \mathbf{1,67}$$

$$Z_{1-\alpha} = Z_{1-0,01} = Z_{0,99} = \mathbf{2,3263}$$

$$Z = \frac{400 - 500}{1,6667} = \mathbf{-59,9988}$$

نلاحظ أن: $Z = \mathbf{-59,9988} \leq Z_{1-\alpha} = \mathbf{2,3263} \rightarrow \mathbf{\overline{RH_0}}$

أي أن القرار هو **عدم رفض H_0** بمعنى أن متوسط عدد الأطباء الذين يرجعون أسباب الهجرة إلى ظروف العمل الصعبة لا يفوق 500 طبيب.

2.هل متوسط عدد الأطباء الذين يرجعون أسباب الهجرة إلى ظروف العمل الصعبة يقل عن 500 طبيب عند مستوى دلالة 5%؟

في هذه الحالة يراد إختبار الفرضيات التالية:

$$\begin{cases} H_0: \mu \geq 500 \\ H_1: \mu < 500 \end{cases}$$

ويصبح الإختبار هنا ذو جانب أيسر و $n \leq 30$ أيضا وبذلك تكون قاعدة إتخاذ القرار على النحو التالي:

$$\begin{cases} Z = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma_{\overline{x}}} \geq -Z_{1-\alpha} \rightarrow \overline{\mathbf{RH_0}} \\ Z = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma_{\overline{x}}} < -Z_{1-\alpha} \rightarrow \mathbf{RH_0} \end{cases}$$

لدينا: $Z = \frac{400-500}{1,6667} = \mathbf{-59,9988}$

$$-Z_{1-\alpha} = -Z_{1-0,05} = -Z_{0,95} = \mathbf{-1,6449} \simeq \mathbf{-1,645}$$

نلاحظ أن: $Z = \mathbf{-59,9988} < -Z_{1-\alpha} = \mathbf{-1,645} \rightarrow \mathbf{RH_0}$

أي أن القرار هو **رفض الفرضية المبدئية** H_0 بمعنى أن متوسط عدد الأطباء الذين يرجعون أسباب الهجرة إلى ظروف العمل الصعبة يقل تماما عن 500 طبيب.

حل التمرين الثاني:

يمكن صياغة الفرضيات التالية:

$$\begin{cases} H_0: p = 70\% \\ H_1: p \neq 70\% \end{cases}$$

الإختبار هنا ذو جانبين و$n = 900 \geq 30$ وعليه تكون قاعدة إتخاذ القرار في هذه الحالة كما يلي:

$$\begin{cases} \mathbf{Z = \frac{f - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \in \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \rightarrow \overline{RH_0}} \\ \mathbf{Z = \frac{f - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \notin \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \rightarrow RH_0} \end{cases}$$

لدينا: $n = 900 \quad ; \quad p_0 = 70\% = \mathbf{0,7} \quad ; \quad f = 67\% = \mathbf{0,67}$

$$\mathbf{Z} = \frac{f - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0.67 - 0,7}{\sqrt{\frac{0,7(1-0,7)}{900}}} = \mathbf{-1,9736}$$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0,01}{2}} = Z_{0,995} = \mathbf{2,5758} \simeq \mathbf{2,58} \Rightarrow \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] = [\mathbf{-2,58}\,;\mathbf{+2,58}]$$

نلاحظ أن : $\mathbf{Z = -1,9736} \in \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] = [-2,58\,;+2,58] \rightarrow \overline{\mathbf{RH_0}}$

أي أن القرار هو **عدم رفض الفرضية المبدئية** H_0 بمعنى أن تصريح الجهات الرسمية صحيح والذي ينص على أن نسبة المتخرجين من الجامعة الذين يحصلون على عمل في السنة الأولى التي تلي تخرجهم هي 70%.

حل التمرين الثالث:

نريد اختبار الفرضية التالية:

$$\begin{cases} H_0: p \leq 5\% \\ H_1: p > 5\% \end{cases}$$

نلاحظ أن الاختبار هنا ذو جانب أيمن و $n \leq 30$ ومنه فإن قاعدة إتخاذ القرار تكون على النحو التالي:

$$\begin{cases} Z = \dfrac{f - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} \leq +Z_{1-\alpha} \rightarrow \mathbf{\overline{RH_0}} \\ Z = \dfrac{f - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} > +Z_{1-\alpha} \rightarrow \mathbf{RH_0} \end{cases}$$

لدينا: $n = 80 \quad ; \quad p_0 = 5\% \quad ; \quad f = \frac{6}{80} = 75\%$

$$Z_{1-\alpha} = Z_{1-0,01} = Z_{0,99} = \mathbf{2,3263}$$

$$Z = \frac{0.075 - 0.05}{\sqrt{\dfrac{0,05(1-0,05)}{80}}} = \mathbf{1,026}$$

نلاحظ أن: $Z = \mathbf{1,026} \leq Z_{1-\alpha} = \mathbf{2,3263} \rightarrow \mathbf{\overline{RH_0}}$

أي أن القرار هو **عدم رفض الفرضية المبدئية** H_0 بمعنى أن إدعاء هذه القناة الإخبارية صحيح والذي مفاده أن نسبة الأطفال المصابين بالتوحد في الجزائر لا تتجاوز 5%.

حل التمرين الرابع:

نريد اختبار صحة الفرضية التالية:

$$\begin{cases} H_0: \mu = 2 \\ H_1: \mu \neq 2 \end{cases}$$

بما أن $n = 35 \geq 30$ والإختبار ذو جانبين فإن قاعدة إتخاذ القرار هي:

$$\begin{cases} \mathbf{Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} \in \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \rightarrow \overline{RH_0}} \\ \mathbf{Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} \notin \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \rightarrow RH_0} \end{cases}$$

حيث σ^2 مجهول وعليه: $\boldsymbol{\sigma_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n-1}}}$

$$\boldsymbol{\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{69,32}{35} = 1,98}$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{2,7335}{35}} = 0,28$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{0,28}{\sqrt{35-1}} = \mathbf{0,048}$$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0,05}{2}} = Z_{0,975} = 1,96 \Rightarrow \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] = [\mathbf{-1,96.}; \mathbf{+1,96}]$$

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{1,98 - 2}{\sqrt{0,048}} = \frac{-0,02}{0,219} = \mathbf{-0,0913}$$

ونلاحظ أن: $Z = \mathbf{-0,0913} \in \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] = [-1,96; +1,96] \rightarrow \overline{\mathbf{RH_0}}$

أي أن القرار هو **عدم رفض الفرضية المبدئية H_0** مما يعني أن إدعاء إدارة هذا المصنع صحيح بأن الوسط الحسابي لطول قطر الأنابيب التي يصنعها مطابق للمواصفات ويساوي 2 سم.

حل التمرين الخامس:

لإختبار مدى التزام الشركة بتعهدها نقوم بصياغة الفرضيات التالية:

$$\begin{cases} H_0: p \leq 3\% \\ H_1: p > 3\% \end{cases}$$

الإختبار ذو جانب أيمن وعليه قاعدة اتخاذ القرار هي:

$$\begin{cases} Z = \dfrac{f - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} \leq +Z_{1-\alpha} \rightarrow \overline{\mathbf{RH_0}} \\ Z = \dfrac{f - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} > +Z_{1-\alpha} \rightarrow \mathbf{RH_0} \end{cases}$$

لدينا: $p_0 = 3\%$; $f = \frac{2}{50} = \mathbf{0,04}$

$$Z = \frac{f - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0,04 - 0,03}{\sqrt{\frac{0,03(0,97)}{50}}} = \mathbf{0.4145}$$

$$Z_{1-\alpha} = Z_{1-0,01} = Z_{0,99} = \mathbf{2,3263}$$

بما أن: $Z = \mathbf{0.4145} \leq Z_{1-\alpha} = \mathbf{2,3263} \rightarrow \overline{\mathbf{RH_0}}$

أي أن القرار هو **عدم رفض الفرضية المبدئية H_0** مما يدل أن الشركة قد إلتزمت بتعهدها.

حل التمرين السادس:

لإختبار صحة إدعاء الشركة نقوم بصياغة الفرضيات التالية:

$$\begin{cases} H_0: \mu = 42000 \\ H_1: \mu \neq 42000 \end{cases}$$

بما أن حجم العينة صغير $n = 25 < 30$ والإختبار ذو جانبين فإن قاعدة إتخاذ القرار تعطى بالصيغة التالية:

$$\begin{cases} \mathbf{T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} \in \left[-t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}; +t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}\right] \rightarrow \overline{RH_0}} \\ \mathbf{T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} \notin \left[-t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}; +t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}\right] \rightarrow RH_0} \end{cases}$$

حيث σ^2 مجهول وعليه: $\boldsymbol{\sigma_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n-1}}}$

لدينا: $\mu_0 = \mathbf{42000}$; $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{987000}{25} = \mathbf{39480}$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{153600}{25} = \mathbf{6144} \Rightarrow \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sqrt{s^2}}{\sqrt{n-1}} = \sqrt{\frac{6144}{25-1}} = \sqrt{256} = \mathbf{16}$$

وبذلك يكون: $T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sqrt{s^2}}{\sqrt{n-1}}} = \frac{39480 - 42000}{16} = \mathbf{-157,5}$

لدينا أيضا: $t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1} = t_{1-\frac{0,05}{2};25-1} = t_{0,975;24} = \mathbf{2,06}$

أي أن: $\left[-t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}; +t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}\right] = [\mathbf{-2,06}; \mathbf{+2,06}]$

نلاحظ أن: $T = \mathbf{-157,5} \notin \left[-t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}; +t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}\right] = [\mathbf{-2,06}; \mathbf{+2,06}] \rightarrow \mathbf{RH_0}$

أي أن القرار هنا هو **رفض الفرضية المبدئية H_0** مما يعني أن إدعاء هذه الشركة كاذب وغير صحيح.

امتحانات سابقة

جامعة سطيف 1
السنة الثانية LMD

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير
2018/2017
امتحان الدورة العادية في مقياس إحصاء3

المدة: ساعة ونصف

الاسم و اللقب:.....رقم التسجيل:.....الفوج:.....

التمرين الأول:

يرغب منتج أسلاك كهربائية اختبار ما إذا كانت لهذه الأسلاك قوة مقاومة للكسر تساوي 500و، فقوة مقاومة أقل لن تكون ملائمة وقومة مقاومة أكبر سترفع التكاليف، أخذ المنتج عينة عشوائية حجمها 64 وحدة فوجد أن متوسط قوة المقاومة لديها 510و بانحراف معياري 48 علما أن مقاومة الكسر تتبع توزيع طبيعي.

1- هل متوسط قوة مقاومة الكسر للأسلاك الكهربائية تساوي 500و عند مستوى دلالة 1%.

2- إذا كان حجم العينة العشوائية هو 26 وحدة بدلا من 64 وحدة فهل متوسط قوة مقاومة الكسر للأسلاك الكهربائية أقل من 500 و عند مستوى دلالة 5%.

التمرين الثاني:

لتقدير نسبة الأفراد الذين يفضلون تناول قهوة نزيار في مدينة سطيف، أجريت دراسة إحصائية على عينة حجمها 500 فرد ومن خلال هذه الدراسة تبين أن 150 فرد من أفراد هذه العينة [illegible] تناول هذه القهوة.

REDMI NOTE 8
AI QUAD CAMERA

1- قدر بمجال نسبة الأفراد الذين يفضلون تناول هذه القهوة في مدينة سطيف عند مستوى ثقة 95%. اشرح النتيجة

2-إذا علمت أن نسبة الأفراد الذين يفضلون تناول هذه القهوة في مدينة سطيف هي 5% وتم سحب عينة عشوائية من 500 فرد. احسب احتمال أن تكون نسبة الأفراد الذين يفضلون تناول هذه القهوة في هذه العينة محصورة بين 3% و 4.5%.

التمرين الثالث:

لتكن آلة مختصة في إنتاج قطع حديد دائرية قطرها d، فإذا كان قطر القطع يخضع للتوزيع الطبيعي و أخذت عينة عشوائية من منتوج هذه الآلة حجمها 9 وتم قياس الأقطار المنتجة فكانت النتائج كما يلي:

22.8	23.1	20.1	20.2	19.7	19.8	20.1	19.6	20

1- أوجد مجال الثقة لمتوسط أقطار القطع المنتجة عند مستوى ثقة 95% واشرح النتيجة.

سؤال نظري:

أجب باختصار على السؤال التالي

ما هي العلاقة بين خطأ المعاينة العشوائية وحجم العينة وكيف تؤثر على دقة النتائج

REDMI NOTE 8
AI QUAD CAMERA

جامعة سطيف 1 كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير قسم: العلوم التجارية + المالية والمحاسبة

السنة الثانية LMD 2019/2018 المدة: ساعة و نصف

الامتحان الاستدراكي في مقياس إحصاء3

التمرين الأول: (10 نقاط)

في دراسة حول أسباب هجرة الأطباء بالجزائر اجريت دراسة استطلاعية لآراء عينة من الأطباء بكل من القطاع الخاص والعمومي حول الموضوع حجمها 900 طبيب فوجد أن متوسط عدد الأطباء الذين يرجعون أسباب الهجرة إلى ظروف العمل الصعبة في هذه العينة هو 400 طبيب علما أن متغير الدراسة هنا يتبع التوزيع الطبيعي بانحراف معياري قدره 50.

1-هل متوسط عدد الأطباء الذين يرجعون أسباب الهجرة إلى ظروف العمل الصعبة يفوق 500 طبيب عند مستوى دلالة 1%.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2- هل متوسط عدد الأطباء الذين يرجعون أسباب الهجرة إلى ظروف العمل الصعبة يقل عن 500 طبيب عند مستوى دلالة 5%.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

التمرين الثاني: (10 نقاط)

بغرض تقدير نسبة المؤسسات الاستشفائية العمومية EPH التي تقوم برسكلة نفاياتها الطبية كما يجب في بالجزائر، أجريت دراسة إحصائية على عينة حجمها 250 مؤسسة استشفائية، تبين من خلال هذه الدراسة أن 150 مؤسسة من هذه العينة لا تقوم برسكلة نفاياتها على الإطلاق.

المطلوب:

1- قدر بمجال نسبة المؤسسات الاستشفائية التي لا تقوم برسكلة نفاياتها في الجزائر باحتمال خطأ 5%، واشرح النتيجة:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2-إذا علمت أن نسبة المؤسسات الاستشفائية التي تقوم برسكلة نفاياتها الطبية في الجزائر هي 7% وتم سحب عينة عشوائية من 150 مؤسسة استشفائية. احسب احتمال أن تكون نسبة المؤسسات الاستشفائية التي تقوم برسكلة نفاياتها في هذه العينة محصورة بين 4% و 8%.**(يتم أخذ رقمين فقط هنا بعد الفاصلة مع تدوير الرقم الثالث)**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3- بفرض أنه تم سحب عينتين من المؤسسات الاستشفائية الأولى من الجزائر والأخرى من تونس الشقيق بغرض المقارنة بين نسبة المؤسسات المتبنية لنظام رسكلة النفايات الطبية فتم الحصول على البيانات التالية:

n_1	n_2	P_1	P_2	f_1	f_2
140	155	15%	7.5%	6%	12%

المطلوب: ماهو القانون الاحتمالي للفرق بين نسبتي هاتين العينتين وحدد معالمه؟

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

جامعة سطيف 1
السنة الثانية LMD

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير
2020/2019
الإمتحان الإستدراكي لمقياس إحصاء 3

قسم المالية والمحاسبة
المدة: ساعة واحدة

الاسم واللقب:.....رقم التسجيل:.....الفوج:.....

التمرين01:(08ن)

بغرض المساهمة في حماية الأطقم الطبية والشبه طبية من فيروس كورونا في الجزائر، تبنت العديد من المؤسسات المصغرة صناعة المآزر الطبية ذات الاستخدام الواحد(tabliers médicaux à usage unique) وفي إطار عمليات الرقابة على مدى مطابقة انتاج احدى هذه المؤسسات للمعايير المطلوبة تبين أن متوسط طول المنزر في عينة قدرها 201 منزر من انتاج هذا المصنع هو 1.2 متر بانحراف معياري قدره 0.05 متر.

1- أوجد مجال الثقة لمتوسط طول المنزر من انتاج هذه المؤسسة ككل وذلك عند مستوى معنوية 5%:

2- إذا علمت أن متوسط طول المنزر من انتاج هذه المؤسسة ككل هو 1.5 متر بانحراف معياري قدره 0.3 متر، وتم أخذ عينة من 350 منزر. حدد التوزيع الاحتمالي لمتوسط طول المنزر في هذه العينة، ثم بيّن معالمه:

التمرين 02:(12ن)

بعد الهزات الأرضية المتتالية التي مست ولاية ميلة في صيف 2020 قامت الجهات المعنية بزيارة تفقدية للأحياء المتضررة من هذا الزلزال قصد الوقوف على ما خلفه من أضرار واتخاذ التدابير اللازمة لمعالجة الوضع، حيث تمت معاينة 36 مسكن فقط بهذه الأحياء فتبين أن 9 منها كانت فعلا متضررة وتتطلب الترميم لتكون صالحة للسكن.

والمطلوب:

1- أوجد قيمة $v(f)$، حيث f هي نسبة المساكن التي تتطلب الترميم.

REDMI NOTE 8
AI QUAD CAMERA

2- قدر بمجال نسبة المساكن التي تتطلب الترميم بالأحياء المتضررة من هذا الزلزال ككل و هذا باحتمال خطأ قدره 1% واشرح النتيجة:

3- بفرض أن نسبة المساكن التي تتطلب الترميم نتيجة هذا الزلزال بولاية ميلة ككل هي 8%، فما احتمال أن تكون نسبة المساكن التي تتطلب الترميم في عينة من 46 مسكن تقل عن 10 % ؟

من جدول التوزيع الـ
لطبيعي رقم 1:

$F(1.96) = 0.975$
$F(1.95) = 0.9744$
$F(2.95) = 0.9984$
$F(1.99) = 0.9767$
$F(0.5) = 0.6915$
$F(3.1) = 0.9990$

$F(2.26) = 0.9881$
$F(0.15) = 0.5596$
$F(0.75) = 0.7734$
$F(3.00) = 0.9986$
$F(1.56) = 0.9406$
$F(1.56) = 0.9406$

من جدول التوزيع الـ
لطبيعي رقم 2:

$Z_{0.975} = 1.96$
$Z_{0.995} = 2.58$
$Z_{0.95} = 1.64$
$Z_{0.75} = 0.67$
$Z_{0.755} = 0.69$
$Z_{0.755} = 0.69$

$Z_{0.97} = 1.88$
$Z_{0.99} = 2.33$
$Z_{0.955} = 1.69$
$Z_{0.90} = 1.28$
$Z_{0.957} = 1.72$
$Z_{0.957} = 1.72$

من جدول توزيـ
ستيودنت:

$t_{0.95;8} = 1.86$
$t_{0.99;7} = 3.00$
$t_{0.975;7} = 2.36$
$t_{0.75;8} = 0.706$
$t_{0.90;7} = 1.42$
$t_{0.90;7} = 1.42$

$t_{0.55;8} = 0.130$
$t_{0.75;7} = 0.711$
$t_{0.90;8} = 1.40$
$t_{0.975;8} = 2.31$
$t_{0.55;7} = 0.130$
$t_{0.55;7} = 0.130$

من جداول تو
يع فيشر:

$F_{0.95;8;7} = 3.73$
$F_{0.99;10;30} = 2.98$
$F_{0.95;7;8} = 3.5$
$F_{0.99;30;40} = 2.20$
$F_{0.99;8;7} = 6.84$
$F_{0.99;8;7} = 6.84$

$F_{0.95;30;10} = 2.7$
$F_{0.99;7;8} = 6.18$
$F_{0.99;40;60} = 1.94$
$F_{0.95;40;40} = 2.11$
$F_{0.95;10;40} = 2.08$
$F_{0.95;10;40} = 2.08$

من جدول توزيع
كاي تربيع:

$K^2_{0.975;8} = 17.5$
$K^2_{0.95;30} = 43.8$
$K^2_{0.05;30} = 18.5$
$K^2_{0.05;40} = 26.5$
$K^2_{0.975;7} = 16.0$

$K^2_{0.975;30} = 47.0$

REDMI NOTE 8
AI QUAD CAMERA

جامعة سطيف 1	كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير	قسم: العلوم التجارية + المالية والمحاسبة
السنة الثانية LMD	2021/2020	المدة: ساعة و نصف

امتحان الدورة العادية لمقياس الإحصاء3

التمرين الأول: (08 نقاط)

أجب بصحيح إذا كانت العبارة صحيحة وإذا كانت خاطئة صححها:

1– تتمثل الأخطاء في الدراسات الإحصائية غير الشاملة في أخطاء المعاينة العشوائية

.....

.....

2– للتقدير عدة أنواع من بينها: التقدير النقطي والتقدير بقيمة.

.....

.....

3– تتلخص خصائص المقدر الجيد في معيارين هما الفعالية والتقارب.

.....

.....

4–عندما يكون حجم العينة يساوي 30 فإن $\bar{x}$ يتبع توزيع كاي تربيع.

.....

.....

5– لبناء مجال الثقة لتباين المجتمع σ^2 يُشترط أن يكون حجم العينة صغير جدا.

.....

.....

6– يعطى مجال الثقة لـ μ إذا كان حجم العينة أكبر من 30 بـ:

$$\mathbf{IC(\mu)}_{(1-\alpha)\%} = \left[f - \mathbf{t}_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{v(f)}; f + \mathbf{t}_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{v(f)}\right]$$

.....

.....

7– عند بناء مجال الثقة للنسبة p فإن: $\sqrt{v(f)} = \sqrt{\frac{pq}{n}}$.

.....

.....

8– عندما يكون حجم العينة يساوي 25 فإن f يتبع توزيع ستودنت

.....

.....

التمرين الثاني: (05 نقاط)

ليكن X متغير عشوائي يمثل سعة قاروات أحد أنواع معقمات الأيدي والمنتجة من طرف إحدى المؤسسات الجزائرية يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط قدره 24.5 مليلتر وتباين يقدر بـ 0.64 مليلتر. **والمطلوب:**

1– حدد معالم هذا التوزيع؛

.....

.....

2– ما هي نسبة القاروارات التي تتجاوز سعتها 26 مليلتر؛

.....

.....

3– حـدد نسـبة القاروارات التي تتـراوح سعتـها ما بين 23.404 و25.5مليلتر؛

.....

.....

التمرين الثالث: (05 نقاط)

بغرض المساهمة في حماية الأطقم الطبية والشبه طبية من فيروس كورونا في الجزائر، تبنت العديد من المؤسسات المصغرة صناعة المآزر الطبية ذات الاستخدام الواحد**(tabliers médicaux à usage unique)** والتي تنقسم إلى ثلاثة أنواع حسب نوع المادة الأولية المستعملة في إنتاجها. حيث تطلبت عملية الرقابة على جودة إنتاج إحدى هذه المؤسسات اختيار عينة بنسبة 30% من الانتاج الاجمالي لها وكان التوزيع كما يلي: 40 ألف مئزر من النوع أ، 35 ألف مئزر من النوع ب و25 ألف مئزر من النوع ج. **والمطلوب:**

1– حدد حجوم العينات المطلوب اختيارها:

.....

.....

2– إذا اعتبرنا أن العينات الممكن تشكيلها في هذه الدراسة هو 4 عينات وكان متوسط عدد المآزر التالفة في كل عينة من هذه العينات هو على التوالي: 33، 35، 34، 36، **والمطلوب**: حساب كل من $E(\bar{x})$ و$V(\bar{x})$:

.....

.....

3– أكتب قانون مجال الثقة لـ μ اذا كان حجم العينة أكبر من **30**:

.....

.....

التمرين الرابع: (02 نقاط)

مجتمع طبيعي تباينه مقدر بـ 15، اذ سحبنا مع الارجاع عينة حجمها 10. **المطلوب:**

أحسب احتمال$p(\sum_1^5(x_i - \bar{x})^2 \geq 31.35)$

.....

.....

جامعة فرحات عباس– سطيف1–

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

قسم العلوم التجارية

السنة الثانية LMD امتحان في مقياس الإحصاء3 (11 جانفي2022) المدة:ساعة ونصف

التمرين الأول:(06 نقاط)

تدرجت في دراستك إلى مرحلة إعداد تقرير التربص، وقمت باختيار موضوع حول "مدى استخدام وسائل الدفع الالكتروني في البنك الوطني الجزائري – وكالة سطيف–" ، قام موظف البنك المسؤول عن هذه الخدمة بتسليمك ورقة تحمل أسماءا رمزية لمتعاملي البنك الذين يحملون بطاقة "Visa Card" فكان عددهم 100 عميل.

المطلوب: باستعمال المعاينة العشوائية المنتظمة، شكل عينة مكونة من 10 عملاء موضحا كل الخطوات اللازمة لذلك بالتفصيل، حيث أن العميل الأول المختار يحمل الرقم 6؟

التمرين الثاني:(08 نقاط)

تم استجواب عينة عشوائية من زبائن أحد المحلات التجارية عددها 100 فيما إذا كانوا راضين عن المحل التجاري، فإذا علمت أن نسبة الراضين بالفعل عن المحل في المجتمع بلغت 20%.

المطلوب:

1. ما هو القانون الإحتمالي لنسبة الراضين عن المحل في هذه العينة (f) ؟ ثم أحسب μ_f و σ_f؟
2. أحسب احتمال أن تكون نسبة الراضين عن المحل في هذه العينة أقل من 15%؟
3. أحسب احتمال أن تكون نسبة الراضين عن المحل في هذه العينة محصورة بين 18% و22%؟
4. أوجد النسبة C ، إذا كان: $P(f > c) = 0,025$؟

التمرين الثالث: (06 نقاط)

إذا إفترضنا أنّ عدد طلبة السنة الثانية بقسم العلوم التجارية في إحدى الجامعات الجزائرية كبير جدّا، وعلمنا أن علاماتهم في مقياس الإحصاء3 تخضع لتوزيع طبيعي، قمنا بسحب عينة عشوائية مكونة من 10 طلبة، فوجدنا أنّ متوسط علامات مقياس الإحصاء3 في هذه العينة يقدّر بـ: 9 وتباين العينة يقدّر بـ: 25.

المطلوب:

1. قدر بمجال متوسط علامات مقياس الإحصاء3 لجميع الطلبة في هذه الجامعة بدرجة ثقة 95% واشرح النتيجة؟
2. ما هو خطأ المعاينة المحتمل ارتكابه في تقدير علامات مقياس الإحصاء3 لجميع الطلبة في هذه الجامعة بدرجة ثقة 95%،مع شرح النتيجة؟
3. نريد تحسين دقة النتائج بنسبة 40%، فما هو حجم العينة اللازم لتحقيق هذا الهدف، مع شرح النتيجة؟

ملاحظة: – يمنع منعا باتا تبادل الآلة الحاسبة بين الطلبة،كما يأخذ رقمين بعد الفاصلة وذلك بالتقريب.

– على الطالب استخدام الجداول الإحصائية المطبوعة في ظهر الورقة ولا يحق له استخدام أي جدول آخر.

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

السنة الثانية LMD (قسم العلوم التجارية) الامتحان التعويضي في مقياس الإحصاء3 (20 جانفي2022) المدة:ساعة ونصف

التمرين الأول:(06 نقاط)

أردنا هذا العام أن نأخذ عينة منتظمة من طلبة الإعلام الآلي بجامعة سطيف1 الذين يستعملون النقل الجامعي قصد التعرف على أسباب استعمال هذا النوع من النقل ومدى رضاهم عن وسائل النقل الممنوحة لهم، فإذا كان حجم طلبة الإعلام الآلي بجامعة سطيف1 هو 400 طالب.

المطلوب: شكل عينة مكونة من 8 طلبة حيث أن الطالب الأول المختار يحمل الرقم 25 ؟

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

التمرين الثاني:(08 نقاط)

مجتمع طبيعي متوسطه الحسابي يقدر بـ: 240 وانحرافه المعياري يقدر بـ: 6، سحبنا منه عينة عشوائية حجمها 64 مفردة.

المطلوب:

1. أحسب احتمال أن يكون المتوسط الحسابي للعينة أقل من أو يساوي 242؟

.....

.....

.....

2. أحسب احتمال أن يكون المتوسط الحسابي للعينة أكبر من 241؟

.....

.....

3. أحسب احتمال أن يكون المتوسط الحسابي للعينة محصورا ما بين 238 و239؟

.....

.....

.....

4. أوجد العدد C ، إذا كان: $P(\bar{X} > c) = 0,975$؟

.....

.....

.....

التمرين الثالث: (06 نقاط)

إذا إفترضنا أنّ عدد طلبة السنة الأولى بقسم التعليم الأساسي في إحدى الجامعات الجزائرية كبير جدّا، وعلمنا أن علاماتهم في مقياس الإحصاء1 تخضع لتوزيع طبيعي، قمنا بسحب عينة عشوائية مكونة من 37 طلبة، فوجدنا أنّ متوسط علامات مقياس الإحصاء1 في هذه العينة يقدّر بـ: 12 وتباين العينة يقدّر بـ: 36.

المطلوب:

1. قدر بمجال متوسط علامات جميع الطلبة في هذه الجامعة بدرجة ثقة 95% واشرح النتيجة؟

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. ما هو خطأ المعاينة المحتمل ارتكابه في تقدير علامات جميع الطلبة في هذه الجامعة بدرجة ثقة 95%، مع شرح النتيجة؟

.....

.....

.....

.....

3. نريد تحسين دقة النتائج بنسبة 30%، فما هو حجم العينة اللازم لتحقيق هذا الهدف، مع شرح النتيجة؟

.....

.....

.....

.....

.....

.....

حلول امتحانات سابقة

جامعة سطيف 1 — كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير — قسم: مالية ومحاسبة + تجارة

السنة الثانية LMD — مارس 2018/2017 — المدة: ساعة و نصف

الامتحان الاستدراكي في مقياس إحصاء3

الاسم و اللقب: ..... رقم التسجيل: ..... الفوج: .....

السؤال النظري:(02 نقطة)

متى نقول عن $\hat{\theta}$ أنه مقدر غير متماسك؟

$\hat{\theta}$ ... θ ... $V(\hat{\theta}) \to 0$ ... $n \to \infty (N)$

التمرين الأول: (10 نقاط)

تدعي احدى القنوات الاخبارية بالجزائر أن نسبة الأطفال المصابين بالتوحد لا تتجاوز 5%، وبغرض متابعة الموضوع تم أخذ عينه من 80 طفل فوجد أن 6 أطفال منهم مصابين بهذا المرض.

المطلوب:

1. حدد التوزيع الاحتمالي لنسبة الأطفال المصابين بالتوحد، وما هي معالمه؟

التوزيع الاحتمالي هو التوزيع الطبيعي

$f \to N(E(f); V(f))$ حيث

$E(f) = p = 0,05$

$V(f) = \frac{p.q}{n} = \frac{0,05.(0,95)}{80} = 0,00059$

2. لنفرض أن نسبة الأطفال المصابين بالتوحد غير معروفة، قدر بمجال هذه النسبة وذلك باحتمال خطأ قدره 5% واشرح النتيجة.

$IC(P)_{(1-\alpha)\%} = \left[f - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} ; f + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right]$

حيث: $f = \frac{6}{80} = 0,075$

$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0,05}{2}} = Z_{0,975} = 1,96$

$\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} = \sqrt{\frac{0,075(1-0,075)}{80}} = 0,0294$

$IC(P)_{95\%} = \left[0,075 \mp (1,96)(0,0294)\right]$

$= [0,0174 ; 0,1326]$

المتوسط: نسبة قدرها 95% يمكن القول أن نسبة الأطفال المصابين بالتوحد تتراوح ما بين 1,74% و 13,26%

3. عند مستوى ثقة 90% ماهو الحد الأعلى لخطأ المعاينة في تقدير نسبة الأطفال المصابين بالتوحد؟

$E = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}$

حيث: $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0,1}{2}} = Z_{0,95}$

$= 1,6449$

ومنه: $E = 1,6449\sqrt{\frac{0,075(1-0,075)}{80}}$

$= 0,0484$

4. عند مستوى دلالة 1% اختبر صحة ادعاء هذه القناة الاخبارية.

صياغة الفرضيات:

$H_0 : P \leq 0,05$

$H_1 : P > 0,05$

اختبار الفرضيات:

قاعدة اتخاذ القرار:

$Z = \frac{f - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} \leq Z_{1-\alpha} \Rightarrow R.H_0$

$Z = \frac{f - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} > Z_{1-\alpha} \Rightarrow R.H_0$

لدينا:

$Z = \frac{0,075 - 0,05}{\sqrt{\frac{0,05(1-0,05)}{80}}} = 1,026$

REDMI NOTE 8
AI QUAD CAMERA

$Z_{1-\alpha} = Z_{1-0,01} = Z_{0,99} = 2,3263$

بما أن:

$Z = 1,026 < Z_{1-\alpha} = 2,3263$

$\Rightarrow \overline{RH_0}$

أي أن الفرضية H_0 صحيحة وهذا يعني أن ادعاء الشركة المصنعة صحيح.

التمرين الثاني: (08 نقاط)

في إحدى الدراسات الخاصة بمدى انتشار الوعي الصحي في المجتمع الجزائري تم أخذ عينة من الأفراد لرصد بعض المعلومات المتعلقة بالموضوع. فإذا كان X متغير عشوائي يمثل عدد مرات أخذ الفرد الواحد للقاح المضاد للأنفلونزا الموسمية إلى غاية سنة الدراسة وكان:

$\sum_{i=1}^{12}(x_i - \bar{x})^2 = 0.48$ ، X يتبع التوزيع الطبيعي و $\bar{x} = 3$.

1. قدر بمجال تباين عدد مرات أخذ الفرد للقاح المضاد للإنفلونزا الموسمية عند مستوى ثقة 99% مع شرح النتيجة.

$$IC(\delta^2)_{(1-\alpha)\%} = \left[\frac{nS^2}{K^2_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}} ; \frac{nS^2}{K^2_{n-1;\frac{\alpha}{2}}}\right]$$

حيث:

$$S^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{0,48}{12}$$

$S^2 = 0,04$

$K^2_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} = K^2_{11;0,995} = 26,8$

$K^2_{n-1;\frac{\alpha}{2}} = K^2_{11;0,005} = 2,6$

$IC(\delta^2)_{99\%} = [0,0179 ; 0,1846]$

المشرع بثقة قدرها 99% يمكن القول أن تباين عدد مرات أخذ الفرد للقاح المضاد للأنفلونزا الموسمية محصور بين 0,0179 و 0,1846

2. إذا علمت أن $\mu = 3$، فما هو احتمال أن لا يتجاوز متوسط عدد مرات أخذ اللقاح في هذه العينة 3 مرات؟

$$P(\bar{X} \leq 3) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{S^2}{n-1}}} \leq \frac{3-3}{\sqrt{\frac{0,04}{11}}}\right)$$

$= P(t_{11} \leq 0)$

$= 0,5$

3. نفرض أن متوسط عدد مرات أخذ اللقاح للفرد الواحد لا يساوي 3 مرات، اختبر صحة هذه الفرضية عند مستوى دلالة 1%.

صياغة الفرضيات:

$$\begin{cases} H_0: \mu = 3 \\ H_1: \mu \neq 3 \end{cases}$$

قاعدة اتخاذ القرار:

$$\begin{cases} T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{S^2}{n-1}}} \in \left[-t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} ; t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\right] \Rightarrow \overline{RH_0} \\ T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{S^2}{n-1}}} \notin \left[-t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} ; t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\right] \Rightarrow RH_0 \end{cases}$$

حيث:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{S^2}{n-1}}} = \frac{3-3}{\sqrt{\frac{0,04}{11}}} = 0$$

$t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} = t_{11;0,995} = 3,11$

بما أن:

$T = 0 \in [-3,11 ; 3,11] \Rightarrow \overline{RH_0}$

أي أن الفرضية الصفرية صحيحة

هذا يعني أن الفرضية الصفرية (خاطئة) صحيحة

REDMI NOTE 8
AI QUAD CAMERA

جامعة فرحات عباس– سطيف1–

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

السنة الثانية LMD (قسم العلوم التجارية) الحل النموذجي للامتحان في مقياس الإحصاء3 (11 جانفي2022)

المدة:ساعة ونصف

حل التمرين الأول:

لتشكيل عينة منتظمة من 10 عملاء من مجتمع حجمه 100 عميل نتبع الخطوات التالية:

1. نحسب الأساس r حيث: $r = \frac{N}{n} = \frac{100}{10} = 10$ ← **1ن**

2. نقسم المجتمع إلى مجموعات متساوية في كل منها 10 عناصر (عملاء) ثم نرقم عناصر المجموعة الاولى من 1 إلى 10 والمجموعة الثانية من 11 إلى 20 وهكذا حتى المجموعة الأخيرة من 91 إلى 100.

3. نختار عنصر b بطريقة عشوائية من المجموعة الأولى وهنا تم تحديده بـ 6 أي أن **العنصر الأول** في هذه العينة هو العميل الذي يحمل الرقم 6 ← **0,5 ن**

4. بناءا على العنصر b يتحدد باقي عناصر العينة تلقائيا حيث تمثل أرقام هذه العناصر حدود متتالية حسابية حدها الأول b وأساسها r وذلك كما يلي:

– **العنصر الثاني** هو العميل الذي يحمل الرقم: 16 لأن : $\mathbf{b + r = 6 + 10 = 16}$ ← **0,5 ن**

– **العنصر الثالث** هو العميل الذي يحمل الرقم: 26 لأن : $\mathbf{b + 2r = 6 + (2 \times 10) = 26}$ ← **0,5 ن**

– **العنصر الرابع** هو العميل الذي يحمل الرقم: 36 لأن : $\mathbf{b + 3r = 6 + (3 \times 10) = 36}$ ← **0,5 ن**

– **العنصر الخامس** هو العميل الذي يحمل الرقم: 46 لأن : $\mathbf{b + 4r = 6 + (4 \times 10) = 46}$ ← **0,5 ن**

– **العنصر السادس** هو العميل الذي يحمل الرقم: 56 لأن : $\mathbf{b + 5r = 6 + (5 \times 10) = 56}$ ← **0,5 ن**

– **العنصر السابع** هو العميل الذي يحمل الرقم: 66 لأن : $\mathbf{b + 6r = 6 + (6 \times 10) = 66}$ ← **0,5 ن**

– **العنصر الثامن** هو العميل الذي يحمل الرقم: 76 لأن : $\mathbf{b + 7r = 6 + (7 \times 10) = 76}$ ← **0,5 ن**

– **العنصر التاسع** هو العميل الذي يحمل الرقم: 86 لأن : $\mathbf{b + 8r = 6 + (8 \times 10) = 86}$ ← **0,5 ن**

– **العنصر العاشر** هو العميل الذي يحمل الرقم: 96 لأن : $\mathbf{b + 9r = 6 + (9 \times 10) = 96}$

ومنه فإن عناصر هذه العينة المنتظمة هي: $\{6; 16; 26; 36; 46; 56; 66; 76; 86; 96\}$ ← **0,5 ن**

حل التمرين الثاني:

1. القانون الإحتمالي لـ f، ثم حساب μ_f و σ_f :

بما أن توزيع المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي لأن $n \geq 30$ ، فإن f تتبع تقريبا التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي قدره: μ_f وانحراف معياري قدره: σ_f، أي: $f \rightsquigarrow N(\mu_f; \sigma_f)$ ، وبذلك يكون: $Z = \frac{f-\mu_f}{\sigma_f} \rightsquigarrow N(0;1)$ ← **1ن**

$\mu_f = E(f) = p = 20\% = 0,2$ ← **0,5 ن** / $\sigma_f = \sqrt{\sigma^2_f} = \sqrt{\frac{p.q}{n}} = \sqrt{\frac{0,2\times(1-0,2)}{100}} = \sqrt{0,0016} = 0,04$ ← **0,5 ن**

2. حساب احتمال أن تكون نسبة الراضين عن المحل في هذه العينة أقل من 15%:

$P(f < 0,15) \rightarrow P\left(Z < \frac{0,15-0,2}{0,04}\right) = P(Z < -1,25)$

$P(Z < -1,25) = 1 - P(Z \leq 1,25) = 1 - F(1,25) = 1 - 0,8944 = 0,1056$ ← **2ن**

3. حساب احتمال أن تكون نسبة الراضين عن المحل في هذه العينة محصورة بين 18% و22%:

$P(0,18 \leq f \leq 0,22) \rightarrow P\left(\frac{0,18-0,2}{0,04} \leq Z \leq \frac{0,22-0,2}{0,04}\right) = P(-0,5 \leq Z \leq 0,5)$

$= P(Z \leq 0,5) - P(Z \leq -0,5) = P(Z \leq 0,5) - [1 - P(Z \leq 0,5)] = P(Z \leq 0,5) + P(Z \leq 0,5) - 1$

$= 2P(Z \leq 0,5) - 1 = 2F(0,5) - 1 = 2 \times 0,6915 - 1 = 0,383$ ← **2ن**

4- إيجاد النسبة c بحيث: $P(f > c) = 0,025$:

$P(f > c) = 0,025 \rightarrow P\left(Z > \frac{c-0,2}{0,04}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{c-0,2}{0,04}\right) = 0,025 \rightarrow P\left(Z \leq \frac{c-0,2}{0,04}\right) = 1 - 0,025 = 0,975$

$z_{0,975} = \frac{c-0,2}{0,04} \rightarrow c = 0,2 + (z_{0,975} \times 0,04) = 0,2 + (1,96 \times 0,04) = 0,2784 = 27,84\%$ ← **2ن**

حل التمرين الثالث:

بما أن مجتمع غير محدود وتوزيع المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي وحجم العينة $(n = 10 < 30)$ ، بالإضافة إلى تباين المجتمع σ^2، فإن الإحصائية المناسبة هي: $T = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} \rightsquigarrow T_{n-1}$ ، وبذلك يكون: $T = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} \rightsquigarrow T_9$ ، حيث أن المتوسط الحسابي للعينة: $\bar{x} = 9$ والانحراف المعياري للعينة قدره: $\frac{S}{\sqrt{n-1}} = \sqrt{\frac{S^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{25}{10-1}} = \frac{5}{3} = 1,67$.

1. التقدير بمجال لمتوسط علامات جميع الطلبة في هذه الجامعة بدرجة ثقة 95% مع شرح النتيجة:

إن مجال الثقة لـ μ عند مستوى الثقة $(1-\alpha)\%$ في هذه الحالة هو كما يلي:

$\mathbf{IC(\mu)_{(1-\alpha)\%}} = \left[\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n-1}}; \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n-1}}\right]$ ← **0,5 ن**

$(1-\alpha)\% = 95\% \Rightarrow \alpha = 05\% = 0,05$

$t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1} = t_{1-\frac{0,05}{2};10-1} = t_{1-0,025;9} = t_{0,975;9} = 2,26$

وعليه مجال الثقة لـ μ عند مستوى الثقة 95% هو كما يلي:

$IC(\mu)_{95\%} = [9 - (2,26 \times 1,67); 9 + (2,26 \times 1,67)] = [\mathbf{5,23; 12,77}]$ ← **1 ن**

الشرح: نحن واثقون بنسبة 95% أن القيمة الحقيقية لمتوسط علامات جميع الطلبة في هذه الجامعة يتراوح بين 5,23 و12,77 . ← **0,5 ن**

2. خطأ المعاينة المحتمل ارتكابه في تقدير متوسط علامات جميع الطلبة في هذه الجامعة بدرجة ثقة 95%، مع شرح النتيجة:

من مجال الثقة لـ μ نستنتج أن:

$E = |\bar{x} - \mu| = \mp t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n-1}}$ ← **0,5 ن**

$= \mp 2,26 \times 1,67 = \mp 3,77$ ← **1 ن**

الشرح: لدينا 95% من الثقة أن لا يتجاوز خطأ المعاينة في تقدير متوسط علامات جميع الطلبة في هذه الجامعة المقدار 3,7742 بالزيادة أو بالنقصان. ← **0,5 ن**

3. حجم العينة اللازم عندما نريد تحسين دقة النتائج بنسبة 40%، مع شرح النتيجة: لتحسين دقة النتائج بـ 40% يعني تخفيض خطأ المعاينة بـ 40%، وهذا يعني أن خطأ المعاينة الجديد يكون كما يلي:

$E_1 = E_0 - (E_0 \times 0{,}4) = 3{,}77 - (3{,}77 \times 0{,}4) = 3{,}77 - 1{,}508 = 2{,}262$

انطلاقا من صيغة E يمكن حساب حجم العينة n ، حيث نقوم بتربيع الطرفين فنجد:

$E^2 = t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}{}^2 . \frac{S^2}{n-1} \Rightarrow \mathbf{n} = [\mathbf{t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}{}^2} . \frac{\mathbf{S^2}}{\mathbf{E^2}}] + \mathbf{1}$ ⟵ **0,5 ن**

$= [(2{,}26^2) \times \frac{25}{2{,}262^2}] + 1 = 25{,}95 \simeq 26$ ⟵ **1 ن**

الشرح: حجم العينة اللازم (المطلوب) لتحسين دقة النتائج بنسبة 40% أو لتحسين دقة النتائج بنسبة 40% يجب رفع حجم العينة من 10 إلى 26 طالب. ⟵ **0,5 ن**

جامعة فرحات عباس– سطيف1–

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

السنة الثانية LMD الحل النموذجي للامتحان التعويضي في مقياس الإحصاء3 (20 جانفي2022) المدة:ساعة ونصف

حل التمرين الأول:

لتشكيل عينة منتظمة من 8 طلبة من مجتمع حجمه 400 طالب نتبع الخطوات التالية:

1. نحسب الأساس r حيث: $r = \frac{N}{n} = \frac{400}{8} = 50$ ← **1ن**

2. نقسم المجتمع إلى مجموعات متساوية في كل منها 50 عنصر (طالب) ثم نرقم عناصر المجموعة الاولى من 1 إلى 50 والمجموعة الثانية من 51 إلى 100 وهكذا حتى المجموعة الأخيرة من 351 إلى 400. ← **1ن**

3. نختار عنصر b بطريقة عشوائية من المجموعة الأولى وهنا تم تحديده بـ 25 أي أن **العنصر الأول** في هذه العينة هو العميل الذي يحمل الرقم 25 ← **0,5 ن**

4. بناءا على العنصر b يتحدد باقي عناصر العينة تلقائيا حيث تمثل أرقام هذه العناصر حدود متتالية حسابية حدها الأول b وأساسها r وذلك كما يلي:

– **العنصر الثاني** هو الطالب الذي يحمل الرقم: 75 لأن : $\mathbf{b + r = 25 + 50 = 75}$ ← **0,5 ن**

– **العنصر الثالث** هو الطالب الذي يحمل الرقم: 125 لأن : $\mathbf{b + 2r = 25 + (2 \times 50) = 125}$ ← **0,5 ن**

– **العنصر الرابع** هو الطالب الذي يحمل الرقم: 175 لأن : $\mathbf{b + 3r = 25 + (3 \times 50) = 175}$ ← **0,5 ن**

– **العنصر الخامس** هو الطالب الذي يحمل الرقم: 225 لأن : $\mathbf{b + 4r = 25 + (4 \times 50) = 225}$ ← **0,5 ن**

– **العنصر السادس** هو الطالب الذي يحمل الرقم: 275 لأن : $\mathbf{b + 5r = 25 + (5 \times 50) = 275}$ ← **0,5 ن**

– **العنصر السابع** هو الطالب الذي يحمل الرقم: 325 لأن : $\mathbf{b + 6r = 25 + (6 \times 50) = 325}$ ← **0,5 ن**

– **العنصر الثامن** هو الطالب الذي يحمل الرقم: 375 لأن : $\mathbf{b + 7r = 25 + (7 \times 50) = 375}$ ← **0,5 ن**

ومنه فإن عناصر هذه العينة المنتظمة هي: $\{375; 325; 275; 225; 175; 125; 75; 25\}$

حل التمرين الثاني:

بما أن توزيع المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي و $n = 64 \geq 30$ ، بالإضافة إلى تباين المجتمع معلوم: $\sigma^2 = 6^2 = 36$، فإن $\bar{x}$ يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي قدره: $E(\bar{x}) = \mu = 240$ وانحراف معياري قدره: $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{6}{\sqrt{64}} = \frac{6}{8} = 0,75$

أي: $\bar{X} \rightsquigarrow N(240; 0,75)$ ، وبذلك يكون: $Z = (\frac{\bar{x}-240}{0,75}) \rightsquigarrow N(0; 1)$.

1. حساب احتمال أن يكون المتوسط الحسابي للعينة أقل من أو يساوي 242:

$$P(\bar{X} \leq 242) \rightarrow P\left(Z \leq \frac{242-240}{0,75}\right) = P(Z \leq 2,67) = F(2,67) = 0,9962$$ ← **2ن**

2. حساب احتمال أن يكون المتوسط الحسابي للعينة أكبر من 241:

$$P(\bar{X} > 241) \rightarrow P\left(Z > \frac{241-240}{0,75}\right) = P(Z > 1,33) = 1 - P(Z \leq 1,33)$$
$$= 1 - F(1,33) = 1 - 0,9082 = 0,0918$$ ← **2ن**

3. حساب احتمال أن يكون المتوسط الحسابي للعينة محصورا ما بين 238 و 239:

$$P(238 \le \bar{X} \le 239) \to P\left(\frac{238-240}{0,75} \le Z \le \frac{239-240}{0,75}\right) = P(-2,67 \le Z \le -1,33)$$
$$= P(Z \le -1,33) - P(Z \le -2,67) = [1 - P(Z \le 1,33)] - [1 - P(Z \le 2,67)]$$
$$= P(Z \le 2,67) - P(Z \le 1,33) = F(2,67) - F(1,33) = 0,9962 - 0,0918 = 0,9044$$ ← ن2

4- إيجاد العدد c بحيث: $P(\bar{X} > c) = 0,975$:

$$P(\bar{X} > c) = 0,975 \to P\left(Z > \frac{c-240}{0,75}\right) = 1 - P\left(Z \le \frac{c-240}{0,75}\right) = 0,975 \to P\left(Z \le \frac{c-0,2}{0,04}\right) = 1 - 0,975 = 0,025$$ ← ن2

$$z_{0,025} = \frac{c-240}{0,75} \to c = 240 + (z_{0,025} \times 0,75) = 240 + (-1,96 \times 0,75) = 238,53$$

حل التمرين الثالث:

بما أن مجتمع غير محدود وتوزيع المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي وحجم العينة كبير $(n = 37 < 30)$ ، بالإضافة إلى تباين المجتمع σ^2، فإن $Z = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} \rightsquigarrow N(0;1)$ ، حيث أن المتوسط الحسابي للعينة: $\bar{x} = 12$ والانحراف المعياري للعينة قدره: $\sigma_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n-1}} = \sqrt{\frac{36}{37-1}} = 1$.

1. التقدير بمجال لمتوسط علامات جميع الطلبة في هذه الجامعة (بدرجة ثقة 95% مع شرح النتيجة:

إن مجال الثقة لـ μ عند مستوى الثقة $(1-\alpha)\%$ في هذه الحالة هو كما يلي:

$$\mathbf{IC(\mu)_{(1-\alpha)\%}} = \left[\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n-1}}; \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n-1}}\right]$$ ← ن 0,5

$$(1-\alpha)\% = 95\% \Rightarrow \alpha = 05\% = 0,05$$
$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{1-\frac{0,05}{2}} = z_{1-0,025} = z_{0,975} = 1,96$$

وعليه مجال الثقة لـ μ عند مستوى الثقة 95% هو كما يلي:

$$IC(\mu)_{95\%} = [12 - (1,96 \times 1); 12 + (1,96 \times 1)] = [\mathbf{10,04; 13,96}]$$ ← ن 1

الشرح: نحن واثقون بنسبة 95% أن القيمة الحقيقية لمتوسط علامات جميع الطلبة في هذه الجامعة يتراوح بين 10,04 و13,96 . ← ن 0,5

2. خطأ المعاينة المحتمل ارتكابه في تقدير متوسط علامات جميع الطلبة في هذه الجامعة بدرجة ثقة 95%، مع شرح النتيجة:

من مجال الثقة لـ μ نستنتج أن:

$$E = |\bar{x} - \mu| = \mp z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n-1}}$$ ← ن 0,5

$$= \mp 1,96 \times 1 = \mp 1,96$$ ← ن 1

الشرح: لدينا 95% من الثقة أن لا يتجاوز خطأ المعاينة في تقدير متوسط علامات جميع الطلبة في هذه الجامعة المقدار 1,96 بالزيادة أو بالنقصان. ← ن 0,5

3. حجم العينة اللازم عندما نريد تحسين دقة النتائج بنسبة 30%، مع شرح النتيجة: لتحسين دقة النتائج بـ 30% يعني تخفيض خطأ المعاينة بـ 30%، وهذا يعني أن خطأ المعاينة الجديد يكون كما يلي:

$$E_1 = E_0 - (E_0 \times 0,3) = 1,96 - (1,96 \times 0,3) = 1,96 - 0,588 = 1,372$$

انطلاقا من صيغة E يمكن حساب حجم العينة n ، حيث نقوم بتربيع الطرفين فنجد:

$$E^2 = z_{1-\frac{\alpha}{2}}{}^2 . \frac{S^2}{n-1} \Rightarrow \mathbf{n} = [\mathbf{z_{1-\frac{\alpha}{2}}{}^2 . \frac{S^2}{E^2}}] + \mathbf{1}$$

0,5 ن

$$= [(1,96^2) \times \frac{36}{1,372^2}] + 1 = 74,47 \simeq 74$$

1 ن

الشرح: حجم العينة اللازم (المطلوب) لتحسين دقة النتائج بنسبة 30% أو لتحسين دقة النتائج بنسبة 30% يجب رفع حجم العينة من 37 إلى 74 طالب.

0,5 ن

الحل النموذجي للامتحان الاستدراكي في مقياس الإحصاء3 (06جوان2022)

حل التمرين الأول:(06 نقاط)

نفترض أن أحد المجتمعات الإحصائية يتكون من 4 أفراد حسب الوزن كما يلي: 8، 9، 25، 27.

1. حساب وسط وتباين هذا المجتمع:

– الوسط الحسابي للمجتمع هو μ حيث:

$$\mu = \frac{\sum x_i}{N} \longrightarrow \text{(0,5)}$$

$$= \frac{8+9+25+27}{4} = \mathbf{17,25} \longrightarrow \text{(0,5)}$$

– تباين المجتمع هو σ^2 حيث:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{4} \frac{(x_i-\mu)^2}{N} \longrightarrow \text{(0,5)}$$

$$= \frac{(8-17,25)^2+(9-17,25)^2+(25-17,25)^2+(27-17,25)^2}{4} = \frac{85.5625+68.0625+60.0625+95.0625}{4} = \mathbf{77,1875} \quad \text{(0,5)}$$

2. تحديد العينات الطبقية التي يمكن تشكيلها عندما يتم سحب عنصرين من هذا المجتمع موضحا لذلك كل الخطوات اللازمة: هنا

يمكن تقسيم هذا المجتمع الى طبقتين فقط هما: $N_1 = \{8; 9\}$ (0,5) و $N_2 = \{25; 27\}$ (0,5)

إذن العينات الممكن تشكيلها هي: (8،25) (0,25)، (8،27) (0,25)

(9،25) (0,25)، (9،27) (0,25)

3. حساب وسط وتباين تلك المعاينة الطبقية:

العينة	(8،25)	(8،27)	(9،25)	(9،27)
$\bar{x}$	16,5	17,5	17	18

– حساب وسط المعاينة الطبقية $E(\bar{x})$:

$$E(\bar{x}) = \mu_{\bar{x}} = \frac{\sum \bar{x}_i}{4} \quad \text{(0,5)}$$

$$\frac{16,5+17,5+17+18}{4} = \mathbf{17,25} \quad \text{(0,5)}$$

– حساب تباين المعاينة الطبقية $V(\bar{x})$:

$$V(\bar{x}) = \sigma^2_{\bar{x}} = \sum_{i=1}^{4} \frac{(\bar{x}_i - E(\bar{x}))^2}{4} \quad \text{(0,5)}$$

$$= \sum_{i=1}^{4} \frac{(\bar{x}_i-17,25)^2}{4} = \frac{(16,5-17,25)^2+(17,5-17,25)^2+(17-17,25)^2+(18-17,25)^2}{4}$$

$$= \frac{0.5625+0.0625+0.0625+0.5625}{4} = \mathbf{0,3125} \quad \text{(0,5)}$$

حل التمرين الثاني:(08 نقاط)

1. القانون الإحتمالي لمتوسط علامات مقياس الإحصاء 2 في هذه العينة، ثم حساب $E(\bar{x})$ و$\sigma_{\bar{x}}$:

بما أن مجتمع غير محدود وتوزيع المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي وحجم العينة صغير $(n = 5 < 30)$ ، بالإضافة إلى تباين المجتمع σ^2، فإن القانون الإحتمالي لـ $\bar{x}$ هو **قانون ستيودنت** ← (1ن)

وبذلك يكون: $T = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} \backsim T_4$، حيث أن المتوسط الحسابي هو: $E(\bar{x}) = \mu = \mathbf{10}$ (0,5) وانحراف معياري قدره:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n-1}} = \sqrt{\frac{S^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{1}{5-1}} = \frac{1}{2} = \mathbf{0,5} \quad \text{(0,5)}$$

2. حساب احتمال أن يكون متوسط علامات مقياس الإحصاء2 في هذه العينة أقل من أو يساوي $\mathbf{12,3}$:

T يتبع توزيع ستيودنت بدرجة حرية $n-1$، أي: $T \backsim T_4$.

$P(\overline{X} \leq 12,3) \rightarrow P\left(\frac{\overline{x}-\mu_{\overline{x}}}{\sigma_{\overline{x}}} \leq \frac{\overline{x}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}}\right)$ 0,5

$= P\left(T \leq \frac{12,3-10}{0,5}\right)$ 0,5

$= P(T \leq 4,6)$ 0,5

من جدول توزيع ستيودنت عند درجة حرية $n = 4$ فإن القيمة الجدولية 4,6 تقابل الاحتمال 0,995 وبذلك يكون:

$P(\overline{X} \leq 12,3) = \mathbf{0,995}$ 0,5

3. حساب احتمال أن يكون متوسط علامات مقياس الإحصاء2 في هذه العينة أكبر من $\mathbf{11,39}$:

$P(\overline{X} > 11,39) \rightarrow P\left(\frac{\overline{x}-\mu_{\overline{x}}}{\sigma_{\overline{x}}} > \frac{\overline{x}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}}\right)$ 0,5

$= P\left(T > \frac{11,39-10}{0,5}\right)$ 0,5

$= P(T > 2,78) = 1 - P(T \leq 2,78)$ 0,5

من جدول توزيع ستيودنت عند درجة حرية $n = 4$ فإن القيمة الجدولية 2,78 تقابل الاحتمال 0,975 وبذلك يكون:

$= 1 - 0,975 = 0,025 \Rightarrow P(\overline{X} > 11,39) = \mathbf{0,025}$ 0,5

4- إيجاد العدد c بحيث: $\mathbf{P(\overline{X} \leq c) = 0,9}$:

$P(\overline{X} \leq c) = 0,9 \rightarrow P(T \leq t_{4;0,9})$ 0,5

$= P\left(T \leq \frac{c-10}{0,5}\right) = 0,9$ 0,5

$t_{4;0,9} = \frac{c-10}{0,5} \rightarrow \mathbf{t_{4;0,9} = 1,58}$ 0,5

$c = 10 + (t_{4;0,9} \times 0,5) = 10 + (1,58 \times 0,5) = \mathbf{10,79}$ 0,5

حل التمرين الثالث: (06 نقاط)

1. التقدير بمجال لنسبة الأفراد ذوي الدخل المحدود في هذا المجتمع وذلك بمستوى دلالة 10% مع شرح النتيجة:

إن مجال الثقة لـ P عند مستوى الثقة $(1-\alpha)\%$ هو كما يلي:

$\mathbf{IC(P)_{(1-\alpha)\%}} = \left[\mathbf{f - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}.\sqrt{\frac{\mathbf{f.(1-f)}}{\mathbf{n}}}; \mathbf{f + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}.\sqrt{\frac{\mathbf{f.(1-f)}}{\mathbf{n}}}\right]$ 0,5

$\alpha = 10\% = 0,1 \Rightarrow (1-\alpha)\% = 90\%$

$f = \frac{x}{n} = \frac{160}{1600} = 0,1$

$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0,1}{2}} = Z_{1-0,05} = Z_{0,95} = 1,645$

$\sigma_f = \sqrt{\frac{f.(1-f)}{n}} = \sqrt{\frac{0,1.(1-0,1)}{1600}} = \sqrt{\frac{0,09}{1600}} = 0,0075$

وعليه مجال الثقة لـ P عند مستوى الثقة 90% هو كما يلي:

$IC(P)_{90\%} = [0,1 - (1,645 \times 0,0075); 0,1 + (1,645 \times 0,0075)]$

$= [0,0877; 0,1123] = [\mathbf{8,77\%; 11,23\%}]$ 1

الشرح: نحن واثقون بنسبة 90% أن نسبة الأفراد ذوي الدخل المحدود في هذا المجتمع هي محصورة مابين 8,77% و11,23% . 0,5

2. خطأ المعاينة المحتمل ارتكابه في تقدير نسبة الأفراد ذوي الدخل المحدود في هذا المجتمع عند مستوى دلالة 10% مع الشرح:

من مجال الثقة لـ P نستنتج أن:

$E = |f - P| = \mp \mathbf{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}.\sqrt{\frac{\mathbf{f.(1-f)}}{\mathbf{n}}}$ 0, 5

$= \mp 1,645 \times 0,0075 = \mp \mathbf{0,0123}$ 1

الشرح: لدينا 90% من الثقة أن خطأ المعاينة في تقدير نسبة الأفراد ذوي الدخل المحدود في هذا المجتمع لا يتجاوز 1,23% بالزيادة أو بالنقصان. 0, 5

3. حجم العينة اللازم إذا أردنا تحسين دقة النتائج في دراسة مقبلة بنسبة 20% مقارنة بالدراسة الحالية، مع شرح النتيجة:

لتحسين دقة النتائج بـ 20% يعني تخفيض خطأ المعاينة بـ 20%، وهذا يعني أن خطأ المعاينة الجديد يكون كما يلي:

$$E_1 = E_0 - (E_0 \times 0{,}2\ ) = 0{,}0123\ - (0{,}0123\ \times 0{,}2\ )$$
$$= 0{,}0123 - 0{,}00246 = 0{,}00984 \simeq 0{,}0098$$

انطلاقا من صيغة E يمكن حساب حجم العينة n ، حيث نقوم بتربيع الطرفين فنجد:

$$E^2 = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}{}^2 . \frac{f.(1-f)}{n} \Rightarrow \mathbf{n = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}{}^2 . \frac{f.(1-f)}{E^2}}$$

0, 5

ن 0,5

$$= [(1{,}645^2) \times \frac{0{,}1.(1-0{,}1)}{0{,}0098^2}] = 2535{,}84\ \simeq \mathbf{2536}$$

1

الشرح: حجم العينة اللازم (المطلوب) لتحسين دقة النتائج بنسبة 20% أي لتحسين دقة النتائج بنسبة 20% عن الدراسة السابقة يجب رفع حجم العينة من 1600 فرد إلى 2536 فرد.

ن 0,5

جامعة فرحات عباس– سطيف1–

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

السنة الثانية LMD (قسم العلوم التجارية) حل الإمتحان العادي في مقياس الإحصاء3 (18 جانفي2023) المدة:ساعة ونصف

التمرين الأول: (نقطة واحدة (1) أمام كل إجابة)

1. دالة الكثافة الاحتمالية لمتغير عشوائي يتبع القانون الطبيعي تعرف بالعلاقة الرياضية التالية:		**2.** تباين متغير عشوائي الذي يتبع قانون ستيودنت يعطى بالصيغة التالية:	
أ– $f(x)=\frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})}$		أ* $V(X)=2n$	
ب– $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$	×	ب* $V(X)=n$	
ج– $f(x)=\frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}}e^{-(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$		ج* $V(X)=\frac{n}{n-2}$	×
د– $f(x)=\frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}}e^{-(\frac{x-\mu}{\sigma})^{\frac{1}{2}}}$		د* $V(X)=0$	
3. عند تقسيم المجتمع إلى مجموعات واختيار عينة من كل مجموعة، هذه العينة تسمى:		**4.** المقدّر $\hat{\theta}$ هو:	
أ– عينة عنقودية		أ– القيمة العددية لمعلمة المجتمع	
ب– عينة منتظمة		ب– الصيغة الرياضية (الإحصائية) التي نقدر بها معلمة المجتمع	×
ج– عينة حصصية	×	ج– تقدير معلمة المجتمع بقيمة واحدة تحسب من بيانات العينة	
د– عينة طبقية		د– مجموعة من القيم تتضمن فيما بينها قيمة معلمة المجتمع المجهولة	
5. نقول عن المقدر $\hat{\theta}$ أنه متحيز للمعلمة θ إذا كان:		**6.** العلاقة بين E وn هي:	
أ* $E(\hat{\theta})-\theta$		أ– علاقة طردية، حيث كلما زاد خطأ المعاينة كلما كان حجم العينة كبير	
ب* $E(\hat{\theta})=\theta$		ب– علاقة عكسية، حيث كلما زاد حجم العينة كلما كان خطأ المعاينة ضعيف	×
ج* $V(\hat{\theta})\xrightarrow[n\to\infty(N)]{}0$		ج– علاقة طردية، حيث كلما زاد حجم العينة كلما كان خطأ المعاينة كبير	
د* لا شيء مما سبق	×	د– لاشيء مما سبق	
7. تصاغ عادة فرضية العدم:		**8.** المنطقة الحرجة هي:	
أ– في صورة وجود أثر ذو دلالة إحصائية		أ– منطقة قبول الفرضية المبدئية	
ب– في صورة عدم وجود فروق ذات دلالة إحصائية	×	ب– منطقة قبول الفرضية الصفرية	
ج– في صورة وجود علاقة ذات دلالة إحصائية		ج– منطقة قبول الفرضية البديلة	×
د– كل ما سبق		د– لاشيء مما سبق	
9. التمثيل البياني لتوزيع كاي تربيع مرتبط بقيمة درجة الحرية n :		**10.** تستخدم العينة العشوائية البسيطة إذا كان مجتمع الدراسة:	
أ– فكلما كانت n صغيرة كلما كان المنحنى متناظر		أ– متجانس	×
ب– فكلما كانت n صغيرة كلما كان المنحنى ملتوي نحو اليسار		ب– غير محدود	
ج– فكلما كانت n كبيرة كلما كان المنحنى ملتوي نحو اليمين		ج– محدود	
د– فكلما كانت n صغيرة كلما كان المنحنى ملتوي نحو اليمين	×	د– غير متجانس	
11. عند تقسيم المجتمع إلى مجموعات واختيار عينة عشوائيا من كل مجموعة، هذه العينة تسمى:		**12.** التقدير هو:	
أ– عينة عنقودية		أ– القيمة العددية لمعلمة المجتمع	×
ب– عينة منتظمة		ب– الصيغة الرياضية (الإحصائية) التي نقدر بها معلمة المجتمع	
ج– عينة حصصية		ج– تقدير معلمة المجتمع بقيمة واحدة تحسب من بيانات العينة	

د- عينة طبقية	×	د- مجموعة من القيم تتضمن فيما بينها قيمة معلمة المجتمع المجهولة	
13. المقدر الفعال هو الذي يحقق الصيغة التالية:		**14.** العلاقة بين σ^2 و n هي:	
أ* $V(\hat{\theta}) = \frac{\Sigma(\hat{\theta}-\theta)^2}{n} \min$	×	أ- علاقة عكسية، حيث كلما كان تباين المجتمع كبيرا كان خطأ المعاينة صغيرا	
ب* $\hat{\theta} \xrightarrow[n\to\infty(N)]{} \theta$		ب- علاقة عكسية ، حيث كلما زاد خطأ المعاينة كلما كان تباين المجتمع صغيرا	
ج* $V(\hat{\theta}) \xrightarrow[n\to\infty(N)]{} 0$		ج- علاقة طردية، حيث يزداد حجم خطأ المعاينة كلما كان تباين المجتمع كبيرا	×
د* لا شيء مما سبق		د- لاشيء مما سبق	
15. الخطأ من الدرجة الثانية هو:		**16.** عند اختبار الطرف الأيسر بالنسبة لـ μ، يمكن أن نصيغ الفرضية التالية:	
أ- رفض الفرضية الصفرية علما أن فرضية العدم صحيحة		أ- $\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \neq \mu_0 \end{cases}$	
ب- رفض الفرضية المبدئية علما أن الفرضية الأصلية غير صحيحة		ب- $\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu < \mu_0 \end{cases}$	×
ج- قبول الفرضية الصفرية علما أن الفرضية المبدئية غير صحيحة	×	ج- $\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu > \mu_0 \end{cases}$	
د- كل ما سبق		د- لاشيء مما سبق	

التمرين الثاني:

1. اختبار صحة إدعاء إدارة المصلحة التسويقية وذلك عند مستوى معنوية 5% بأن نسبة الزبائن الأوفياء لها بالفعل في هذا البلد قد بلغت 20%:

يمكن صياغة الفرضيات التالية: $\begin{cases} H_0: p = 20\% \\ H_1: p \neq 20\% \end{cases}$ **0,25**

الإختبار هنا ذو جانبين و $n = 400 \geq 30$ وعليه تكون قاعدة إتخاذ القرار في هذه الحالة كما يلي:

$$\begin{cases} \mathbf{Z = \frac{f-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \in \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \rightarrow \overline{RH_0}} \\ \mathbf{Z = \frac{f-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \notin \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \rightarrow RH_0} \end{cases}$$ **0,25**

لدينا: $n = 400 \quad ; \quad p_0 = 20\% = \mathbf{0,2} \quad ; \quad f = \frac{x}{n} = \frac{40}{400} = 10\% = \mathbf{0,1}$

$$\mathbf{Z = \frac{f-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0.1-0,2}{\sqrt{\frac{0,2(1-0,2)}{400}}} = -5}$$ **0,25**

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0,05}{2}} = Z_{0,975} = \mathbf{1,96} \Rightarrow \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] = [-\mathbf{1,96}\,; +\mathbf{1,96}]$$ **0,25**

نلاحظ أن : $\mathbf{Z = -5} \notin \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] = [-1,96\,; +1,96] \rightarrow \mathbf{RH_0}$

أي أن القرار هو **رفض الفرضية المبدئية** H_0 **0,5** مما يعني أن إدعاء إدارة المصلحة التسويقية لهذه المؤسسة كاذب وغير صحيح. **0,5**

2. القرار بنصح المؤسسة على تسويق منتوجها الجديد على مجال واسع أم لا عند مستوى دلالة 5%:

يمكن صياغة الفرضيات التالية: $\begin{cases} H_0: p \leq 10\% \\ H_1: p > 10\% \end{cases}$ **0,25**

نلاحظ أن الاختبار هنا ذو جانب أيمن و $n \geq 30$ ومنه فإن قاعدة إتخاذ القرار تكون على النحو التالي:

$$\begin{cases} Z = \frac{f-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \leq +Z_{1-\alpha} \rightarrow \overline{RH_0} \\ Z = \frac{f-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} > +Z_{1-\alpha} \rightarrow RH_0 \end{cases}$$ **0,25**

لدينا: $n = 400 \quad ; \quad p_0 = 10\% = \mathbf{0,1} \quad ; \quad f = \frac{x}{n} = \frac{40}{400} = 10\% = \mathbf{0,1}$

$$Z_{1-\alpha} = Z_{1-0,05} = Z_{0,95} = \mathbf{1,645}$$ **0,25**

$$\mathbf{Z = \frac{f-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0.1-0,1}{\sqrt{\frac{0,1(1-0,1)}{400}}} = 0}$$ **0,25**

نلاحظ أن: $\mathbf{Z = 0 \leq Z_{1-\alpha} = 1,645 \rightarrow \overline{RH_0}}$ أي أن القرار هو **عدم رفض الفرضية المبدئية** H_0 (0,5) معناه أنه قد تأكد لنا من معلومات العينة المدروسة وبمستوى دلالة 5% أن نسبة 10% أو أقل من الزبائن سيشترون المنتوج الجديد، **وبالتالي ننصح المؤسسة أن لا تتسرع على تسويق منتوجها الجديد على مجال واسع.** (0,5)

جامعة فرحات عباس– سطيف1–

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

السنة الثانية LMD (قسم العلوم التجارية) حل الإمتحان التعويضي في مقياس الإحصاء3 (18 جانفي2023) المدة:ساعة ونصف

الاسم واللقب:.....رقم التسجيل:.....الفوج:.... متنقل بدين:نعم ☐لا ☐

حل التمرين الأول: (نقطة واحدة (1) أمام كل إجابة)

1. دالة الكثافة الاحتمالية لمتغير عشوائي يتبع قانون ستيودنت تعرف بالعلاقة الرياضية التالية:		**2.** الأمل الرياضي لمتغير عشوائي يتبع قانون كاي تربيع يعطى بالصيغة التالية:	
أ– $f(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}.\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}.\left(\frac{t^2}{n}\right)^{-\left(\frac{n}{2}\right)}$		أ* $E(X)=2n$	
ب– $f(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}.\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)}$	×	ب* $E(X)=n$	×
ج– $f(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}.\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}.\left(\frac{t^2}{n}\right)^{\left(\frac{n}{2}\right)}$		ج* $E(X)=\frac{n}{n-2}$	
د– $f(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}.\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$		د* $E(X)=0$	
3. فترة الثقة هي:		**4.** عند تقسيم المجتمع إلى مجموعات واختيار مفردة من المجموعة الأولى عشوائيا ثم مفردة بذات الترتيب من المجموعات الأخرى، هذه العينة تسمى:	
أ– تقدير معلمة المجتمع بقيمة واحدة تحسب من بيانات العينة		أ– عينة عمدية	
ب– القيمة العددية لمعلمة المجتمع		ب– عينة حصصية	
ج– الصيغة الرياضية (الإحصائية) التي نقدر بها معلمة المجتمع		ج– عينة منتظمة	×
د– المجال الذي يحتوي على مجموعة من القيم تتضمن فيما بينها قيمة معلمة المجتمع المجهولة	×	د– عينة طبقية	
5. قيمة التحيز هي:		**6.** يقتضي الأمر عند استعمال طريقة المعاينة أن نراعي بعض الشروط اللازمة وهي:	
أ* $E(\hat{\theta})+\theta$		أ– أن تكون وحدات المجتمع غير مستقلة عن بعضها البعض	
ب* $E(\hat{\theta})=\theta$		ب– أن يكون اختيار وحدات العينة من المجتمع بتحيز	
ج* $V(\hat{\theta})\xrightarrow[n\to\infty(N)]{}0$		ج– أن تكون وحدات المجتمع غير متجانسة	
د* لا شيء مما سبق	×	د– لاشيء مما سبق	×
7. أسلوب المعاينة الذي يساعد على التقليل أكثر من مقدار خطأ التقدير هو:		**8.** يراعي الباحث في تصميم الاستبيان أن تكون الأسئلة:	
أ– العينة العشوائية البسيطة مع الإرجاع		أ– طويلة	
ب– العينة العشوائية البسيطة بدون إرجاع		ب– سهلة وواضحة	×
ج– العينة الطبقية	×	ج– غير قابلة للتبويب	
د– لاشيء مما سبق		د– كل ما سبق	
9. يهمل معامل الإرجاع المعبر عنه بـ: $\frac{N-n}{N-1}$ إذا كان:		**10.** تستخدم العينة الطبقية إذا كان مجتمع الدراسة:	
أ– $\frac{n}{N}\geq 0,05$		أ– متجانس	
ب– $\frac{n}{N}>0,05$		ب– غير محدود	
ج– $\frac{n}{N}<0,05$		ج– محدود	
د– $\frac{n}{N}\leq 0,05$	×	د– غير متجانس	×

11. دالة الكثافة الاحتمالية لمتغير عشوائي يتبع القانون الطبيعي المعياري هي كالتالي:		**12.** التقدير النقطي هو:	
أ- $f(z)=\frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}$		أ- القيمة العددية لمعلمة المجتمع	
ب- $f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}$	×	ب- الصيغة الرياضية (الإحصائية) التي نقدر بها معلمة المجتمع	
ج- $f(z)=\frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}}e^{-z^2}$		ج- تقدير معلمة المجتمع بقيمة واحدة تحسب من بيانات العينة	×
د- $f(z)=\frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}}e^{-z^{\frac{1}{2}}}$		د- مجموعة من القيم تتضمن فيما بينها قيمة معلمة المجتمع المجهولة	
13. المقدر المتقارب هو الذي يحقق الصيغة التالية:		**14.** يحتل القانون الطبيعي موضع الصدارة في الاحتمالات والإحصاء لأنه:	
أ* $V(\hat{\theta})=\frac{\Sigma(\hat{\theta}-\theta)^2}{n}\min$		أ- – أكثر استخداما في النواحي التطبيقية	
ب* $\hat{\theta}\xrightarrow[n\to\infty(N)]{}\theta$		ب- يستخدم في مجال الاستدلال الإحصائي الشامل	
ج* $V(\hat{\theta})\xrightarrow[n\to\infty(N)]{}0$	×	ج- معظم القوانين الاحتمالية الأخرى يمكن تقريبها إليه	
د* لا شيء مما سبق		د- كل ما سبق	×
15. درجة المخاطرة هي:		**16.** تصاغ عادة الفرضية البديلة:	
أ- مجموعة من القيم تتضمن فيما بينها قيمة معلمة المجتمع المجهولة θ		أ- في صورة عدم وجود أثر ذو دلالة إحصائية	
ب- نسبة الحظوظ لعدم احتواء مجال الثقة على القيمة الحقيقية لـ θ	×	ب- في صورة وجود فروق ذات دلالة إحصائية	×
ج- مجموعة من القيم التي لا تتضمن فيما بينها قيمة معلمة المجتمع المجهولة θ		ج- في صورة عدم وجود علاقة ذات دلالة إحصائية	
د- نسبة الحظوظ لاحتواء مجال الثقة على القيمة الحقيقية لـ θ		د- لاشيء مما سبق	

حل التمرين الثاني: 1. اختبار صحة الفرضية عند مستوى دلالة 5%:

الفرضية مفادها أن متوسط علامات مقياس الإحصاء1 في هذه الجامعة يساوي 12، أي هنا يراد اختبار الفرضية التالية: (0,25) $\begin{cases}H_0:\mu=12\\H_1:\mu\neq12\end{cases}$

في هذه الحالة الإختبار ذو جانبين وبذلك تكون قاعدة إتخاذ القرار على النحو التالي: (0,25)

$$\begin{cases}\mathbf{Z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}}\in\left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}};+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]\rightarrow\overline{RH_0}}\\\mathbf{Z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}}\notin\left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}};+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]\rightarrow RH_0}\end{cases}$$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}}=Z_{1-\frac{0,05}{2}}=Z_{0,975}=1,96\Rightarrow\left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}};+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]=[-1,96.;+1,96]$$ (0,25)

$$\mathbf{Z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}}=\frac{11-12}{1}=\frac{-1}{1}=-1}$$ (0,25)

$$\mathbf{-1\in[-1,96;+1,96]\rightarrow\overline{RH_0}}$$

هذا يعني أن القرار هو **عدم رفض الفرضية المبدئية H_0** (0, 5) مستوى دلالة 5%، **أي أننا نقبل أن متوسط علامات مقياس الإحصاء1 في هذه الجامعة يساوي 12** (0, 5)

2. اختبار صحة الفرضية عند مستوى دلالة 1%:

الفرضية مفادها أن متوسط علامات مقياس الإحصاء1 في هذه الجامعة يقل عن 10 ، أي هنا يراد اختبار الفرضية التالية: (0,25) $\begin{cases}H_0:\mu\geq10\\H_1:\mu<10\end{cases}$

نلاحظ أن الاختبار هنا ذو جانب أيسر و $n\leq30$ ، ومنه فإن قاعدة إتخاذ القرار تكون على النحو التالي:

$$\begin{cases}\mathbf{Z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}}\geq-Z_{1-\alpha}\rightarrow\overline{RH_0}}\\\mathbf{Z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}}<-Z_{1-\alpha}\rightarrow RH_0}\end{cases}$$ (0,25)

$$-Z_{1-\alpha}=-Z_{1-0,01}=-Z_{0,99}=\mathbf{-2,3263}$$ (0,25)

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} = \frac{11-10}{1} = 1$$ (0,25)

نلاحظ أن: $Z = 1 \geq -Z_{1-\alpha} = -2,3263 \rightarrow \overline{RH_0}$ أي أن القرار هو **عدم رفض H_0** (0,5) **بمعنى أن متوسط علامات مقياس الإحصاء1 في هذه الجامعة يقل عن 10** (0,5).

قائمة المراجع

قائمة المراجع

قائمة الملاحق

الملحق رقم 1: الجداول المتعلقة بقانون الطبيعي المعياري

جدول التـــوزيـــــع الطبيعي المعياري1

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5476	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.8366	0.6406	0.5443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6735	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	07422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	07734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8506	0.8531	0.8554	0.8577	0.8598	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	08962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9043	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9866	0.9871	0.9875	0.9876	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9915
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9978	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

z	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.8	4.0	4.5
F(z)	0.99865	0.999032	0.999513	0.999517	0.999563	0.999767	0.999941	0.999926	0.999968	0.999997

جدول التـــوزيـــــع الطبيعي المعياري2

p	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.010	
0.00	-	3.0902	2.8782	2.7478	2.6521	2.5758	2.5121	2.4573	2.4089	2.3656	2.3263	**0.99**
0.01	2.3263	2.2904	2.2571	2.2262	2.1973	2.1701	2.1444	2.1201	2.0969	2.0749	2.0537	**0.98**
0.02	2.0537	2.0335	2.0141	1.9954	1.9774	1.9600	1.9431	1.9266	1.9110	1.8957	1.8808	**0.97**
0.03	1.8808	1.8663	1.8522	1.8364	1.8250	1.6119	1.7991	1.7868	1.7744	1.7624	1.7507	**0.96**
0.04	1.7507	1.7392	1.7279	1.7169	1.7060	1.6954	1.6849	1.6747	1.6646	1.6546	1.6449	**0.95**
0.05	1.6449	1.6352	1.6258	1.6164	1.6072	1.5982	1.5893	1.5805	1.5716	1.5632	1.5548	**0.94**
0.06	1.5548	1.5464	1.5382	1.5301	1.5220	1.5141	1.5063	1.4985	1.4908	1.4833	1.4758	**0.93**
0.07	1.4758	1.4684	1.4611	1.4538	1.4466	1.4396	1.4325	1.4265	1.4187	1.4118	1.4051	**0.92**
0.08	1.4051	1.3984	1.3917	1.3852	1.3787	1.3722	1.3658	1.3585	1.3532	1.3469	1.3408	**0.91**
0.09	1.3408	1.3346	1.3285	1.3225	1.3165	1.3108	1.3047	1.2988	1.2930	1.2873	1.2816	**0.90**
0.10	1.2816	1.2759	1.2702	1.2646	1.2591	1.2536	1.2481	1.2426	1.2372	1.2319	1.2265	**0.89**
0.11	1.2265	1.2212	1.2160	1.2107	1.2055	1.2004	1.1952	1.1901	1.1850	1.1880	1.1750	**0.88**
0.12	1.1750	1.1700	1.1650	1.1601	1.1552	1.1503	1.1455	1.1407	1.1359	1.1311	1.1264	**0.87**
0.13	1.1264	1.1217	1.1170	1.1123	1.1077	1.1031	1.0985	1.0939	1.0893	1.0848	1.0803	**0.86**
0.14	1.0803	1.0758	1.0714	1.0669	1.0625	1.0581	1.0537	1.0454	1.0450	1.0407	1.0364	**0.85**
0.15	1.0364	1.0322	1.0279	1.0237	1.0194	1.0152	1.0110	1.0069	1.0027	0.9986	0.9945	**0.84**
0.16	0.9945	0.9904	0.9863	0.9822	0.9782	0.9741	0.9701	0.9661	0.9621	0.9581	0.9542	**0.83**
0.17	0.9542	0.9502	0.9463	0.9424	0.9385	0.9346	0.9307	0.9269	0.9230	0.9192	0.9154	**0.82**
0.18	0.9154	0.9116	0.9078	0.9040	0.9002	0.8965	0.8927	0.8890	0.8853	0.8816	0.8779	**0.81**
0.19	0.8779	0.8742	0.8705	0.8669	0.8633	0.8596	0.8560	0.8524	0.8488	0.8452	0.8416	**0.80**
0.20	0.8416	0.8381	0.8345	0.8310	0.8274	0.8239	0.8204	0.8169	0.8134	0.8099	0.8064	**0.79**
0.21	0.8064	0.8030	0.7995	0.7961	0.7926	0.7892	0.7868	0.7824	0.7790	0.7756	0.7722	**0.78**
0.22	0.7722	0.7688	0.7655	0.7621	0.7588	0.7554	0.7521	0.7488	0.7454	0.7421	0.7388	**0.77**
0.23	0.7388	0.7366	0.7323	0.7290	0.7257	0.7226	0.7192	0.7160	0.7128	0.7095	0.7063	**0.76**
0.24	0.7063	0.7031	0.6999	0.6967	0.6935	0.6903	0.6871	0.6840	0.6808	0.6776	0.6745	**0.75**
0.25	0.6745	0.6713	0.6682	0.6651	0.6620	0.6588	0.6567	0.6528	0.6495	0.6464	0.6433	**0.74**
0.26	0.6433	0.6403	0.6372	0.6341	0.6311	0.6280	0.6250	0.6219	0.6189	0.6158	0.6128	**0.73**
0.27	0.6128	0.6098	0.6068	0.6038	0.6008	0.5978	0.5948	0.5918	0.5888	0.5858	0.5828	**0.72**
0.28	0.5828	0.5799	0.5769	0.5740	0.5710	0.5681	0.5651	0.5622	0.5592	0.5563	0.5534	**0.71**
0.29	0.5534	0.5505	0.5476	0.5446	0.5417	0.5388	0.5369	0.5330	0.5302	0.5273	0.5244	**0.70**
0.30	0.5244	0.5215	0.5187	0.5158	0.5129	0.5101	0.5072	0.5044	0.5016	0.4987	0.4956	**0.69**
0.31	0.4959	0.4930	0.4902	0.4874	0.4845	0.4817	0.4789	0.4761	0.4733	0.4705	0.4677	**0.68**
0.32	0.4677	0.4649	0.4621	0.4593	0.4565	0.4536	0.4510	0.4482	0.4454	0.4427	0.4399	**0.67**
0.33	0.4399	0.4372	0.4344	0.4316	0.4289	0.4261	0.4234	0.4207	0.4179	0.4152	0.4125	**0.66**
0.34	0.4125	0.4097	0.4070	0.4043	0.4016	0.3989	0.3961	0.3834	0.3907	0.3880	0.3853	**0.65**
0.35	0.3853	0.3826	0.3799	0.3772	0.3745	0.3719	0.3692	0.3665	0.3638	0.3611	0.3585	**0.64**
0.36	0.3585	0.3558	0.3531	0.3505	0.3478	0.3451	0.3425	0.3398	0.3372	0.3345	0.3319	**0.63**
0.37	0.3319	0.3292	0.3266	0.3239	0.3213	0.3186	0.3160	0.3134	0.3107	0.3081	0.3055	**0.62**
0.38	0.3055	0.3029	0.3002	0.2979	0.2950	0.2924	0.2898	0.2871	0.2845	0.2819	0.2793	**0.61**
0.39	0.2793	0.2767	0.2741	0.2715	0.2689	0.2663	0.2637	0.2611	0.2585	0.2559	0.2533	**0.60**
0.40	0.2533	0.2508	0.2482	0.2466	0.2430	0.2404	0.2378	0.2353	0.2327	0.2301	0.2275	**0.59**
0.41	0.2275	0.2250	0.2224	0.2198	0.2173	0.2147	0.2121	0.2095	0.2070	0.2045	0.2019	**0.58**
0.42	0.2019	0.1993	0.1968	0.1942	0.1917	0.1891	0.1866	0.1840	0.1815	0.1789	0.1764	**0.57**
0.43	0.1764	0.1738	0.1713	0.1687	0.1662	0.1637	0.1611	0.1588	0.1560	0.1535	0.1510	**0.56**
0.44	0.1510	0.1464	0.1459	0.1434	0.1408	0.1383	0.1358	0.1332	0.1307	0.1282	0.1257	**0.55**
0.45	0.1257	0.1231	0.1206	0.1181	0.1166	0.1130	0.1105	0.1080	0.1055	0.1030	0.1004	**0.54**
0.46	0.1004	0.0979	0.0954	0.0929	0.0904	0.0878	0.0853	0.0828	0.0803	0.0778	0.0753	**0.53**
0.47	0.0753	0.0728	0.0702	0.0677	0.0652	0.0627	0.0602	0.0577	0.0552	0.0527	0.0502	**0.52**
0.48	0.0502	0.0476	0.0451	0.0426	0.0401	0.0376	0.0351	0.0326	0.0301	0.0276	0.0251	**0.51**
0.49	0.0251	0.0226	0.0201	0.0175	0.0150	0.0125	0.0100	0.0075	0.0050	0.0025	0.0000	**0.50**
	0.010	**0.009**	**0.008**	**0.007**	**0.006**	**0.005**	**0.004**	**0.003**	**0.002**	**0.001**	**0.000**	**p**

الملحق رقم 2: جـــدول توزيـــــع كاي تربيـــــــع

	$x^2_{0.005}$	$x^2_{0.01}$	$x^2_{0.025}$	$x^2_{0.05}$	$x^2_{0.10}$	$x^2_{0.25}$	$x^2_{0.50}$	$x^2_{0.75}$	$x^2_{0.90}$	$x^2_{0.95}$	$x^2_{0.975}$	$x^2_{0.99}$	$x^2_{0.995}$	$x^2_{0.999}$
1	0.0000	0.0002	0.0010	0.0089	0.0158	0.102	0.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	10.8
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.108	0.211	0.575	1.89	2.77	4.61	5.99	7.33	9.21	10.6	13.8
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.8	12.8	16.3
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9	18.5
5	0.412	0.554	0.881	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	16.1	16.7	20.5
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5	22.5
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.88	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3	24.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.67	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0	26.1
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6	27.9
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.84	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2	29.6
11	2.60	3.05	8.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8	31.3
12	3.07	3.57	4.40	5.28	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.8	26.2	28.3	32.9
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.8	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8	34.5
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.8	36.1
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8	37.7
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.81	11.9	15.8	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3	39.3
17	5.70	6.41	7.66	8.67	10.1	12.8	16.8	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7	40.8
18	6.26	7.01	8.23	9.89	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.6	34.8	37.2	42.3
19	6.84	7.68	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6	43.8
20	7.48	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0	45.3
21	8.08	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	88.9	41.4	46.8
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8	48.3
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2	49.7
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6	51.2
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9	52.6
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.8	54.1
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6	55.5
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.8	51.0	56.9
29	13.1	14.8	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3	58.8
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.8	43.8	47.0	50.9	53.7	59.7
40	20.7	22.2	24.4	26.5	29.1	33.7	39.3	45.6	51.8	55.8	59.8	63.7	66.8	73.4
50	28.0	29.7	32.4	34.8	37.7	42.9	49.3	56.8	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5	86.7
60	35.5	37.5	40.5	43.2	46.5	52.3	59.3	67.0	74.4	79.1	88.3	88.4	92.0	99.6
70	43.3	45.4	48.8	51.7	55.3	61.7	69.3	77.6	85.5	90.5	95.0	100	104	112
80	51.2	53.5	57.2	60.4	64.3	71.1	79.3	88.1	96.6	102	107	112	116	125
90	59.2	61.8	65.6	69.1	73.8	80.6	89.3	98.6	108	113	118	124	128	137
100	67.3	70.1	74.2	77.9	82.4	90.1	99.3	109	118	124	130	136	140	149

الملحق رقم 3: جدول تـــوزيـــــع ستيـــــــودنت

	$t_{0.55}$	$t_{0.60}$	$t_{0.70}$	$t_{0.75}$	$t_{0.80}$	$t_{0.90}$	$t_{0.95}$	$t_{0.975}$	$t_{0.99}$	$t_{0.995}$
1	0.158	0.325	0.727	1.000	1.376	3.08	6.31	12.71	31.82	63.66
2	0.142	0.289	0.617	0.816	1.061	1.89	2.92	4.30	6.96	9.92
3	0.137	0.277	0.584	0.765	0.978	1.64	2.35	3.18	4.54	5.84
4	0.134	0.271	0.569	0.741	0.941	1.58	2.13	2.78	3.75	4.60
5	0.132	0.267	0.559	0.727	0.920	1.48	2.02	2.57	3.36	4.03
6	0.131	0.265	0.553	0.718	0.906	1.44	1.94	2.45	3.14	3.71
7	0.130	0.263	0.549	0.711	0.896	1.42	1.90	2.36	3.00	3.50
8	0.130	0.262	0.546	0.706	0.889	1.40	1.86	2.31	2.90	3.36
9	0.129	0.261	0.543	0.703	0.888	1.38	1.83	2.26	2.82	3.25
10	0.129	0.260	0.542	0.700	0.879	1.37	1.81	2.23	2.76	3.17
11	0.129	0.260	0.540	0.697	0.876	1.36	1.80	2.20	2.72	3.11
12	0.128	0.259	0.539	0.695	0.873	1.36	1.78	2.18	2.68	3.06
13	0.128	0.259	0.538	0.694	0.870	1.35	1.77	2.16	2.65	3.01
14	0.128	0.258	0.537	0.692	0.868	1.34	1.76	2.14	2.62	2.98
15	0.128	0.258	0.536	0.691	0.866	1.34	1.75	2.13	2.60	2.95
16	0.128	0.258	0.535	0.690	0.865	1.34	1.75	2.12	2.58	2.92
17	0.128	0.257	0.534	0.689	0.863	1.33	1.74	2.11	2.57	2.90
18	0.127	0.257	0.534	0.688	0.862	1.33	1.73	2.10	2.55	2.88
19	0.127	0.257	0.533	0.688	0.861	1.33	1.73	2.09	2.54	2.86
20	0.127	0.257	0.533	0.687	0.860	1.32	1.72	2.09	2.53	2.84
21	0.127	0.257	0.532	0.686	0.859	1.32	1.72	2.08	2.52	2.83
22	0.127	0.256	0.532	0.686	0.858	1.32	1.72	2.07	2.51	2.82
23	0.127	0.256	0.532	0.685	0.858	1.32	1.71	2.07	2.50	2.81
24	0.127	0.256	0.531	0.685	0.857	1.32	1.71	2.06	2.49	2.80
25	0.127	0.256	0.531	0.684	0.856	1.32	1.71	2.06	2.48	2.79
26	0.127	0.256	0.531	0.684	0.856	1.32	1.71	2.06	2.48	2.78
27	0.127	0.256	0.531	0.684	0.855	1.31	1.70	2.05	2.47	2.77
28	0.127	0.256	0.530	0.683	0.855	1.31	1.70	2.05	2.47	2.76
29	0.127	0.256	0.530	0.683	0.854	1.31	1.70	2.04	2.46	2.76
30	0.127	0.256	0.530	0.683	0.854	1.31	1.70	2.04	2.46	2.75
40	0.126	0.255	0.529	0.681	0.851	1.30	1.68	2.02	2.42	2.70
60	0.126	0.254	0.527	0.679	0.848	1.30	1.67	2.00	2.39	2.66
120	0.126	0.254	0.526	0.677	0.845	1.29	1.66	1.98	2.36	2.62
∞	0.126	0.253	0.524	0.674	0.842	1.28	1.645	1.96	2.33	2.58

الملحق رقم 4: جدول تـــوزيـــــع فيـــــشر $(p = 0.95)$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	251	252	253	254
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.37
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.98
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.70	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.80
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.18
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.43	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

الملحق رقم 4: جدول تـــوزيـــــع فيـــــشر $(p = 0.99)$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4050	5000	5403	5625	5764	5859	5923	5981	6023	6056	6106	6157	62.09	6235	6261	6287	6313	6339	6366
2	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5
3	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3	27.2	27.1	26.9	26.7	26.6	26.5	26.4	26.3	26.2	26.1
4	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7	14.5	14.4	14.2	14.0	13.9	13.8	13.7	13.7	13.6	13.5
5	16.8	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2	10.1	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.48	3.34	3.25	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.70	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	8.68	3.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	8.40	6.11	5.19	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.68	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.48	4.10	3.87	3.70	3.66	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.56	2.46	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.82	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00

فهرس المحتويات

فهرس المحتويات	الصفحة
البسملة	-
مقدمة	أ
الفصل الأول: نظرية العينات	1
تمهيد	2
أولا: ماهية علم الإحصاء	2
1- تعريف علم الإحصاء	2
2- أهمية علم الإحصاء	2
3- إستخدامات علم الإحصاء	3
ثانيا: أقسام علم الإحصاء	3
1- الإحصاء الوصفي	3
2- الإحصاء الاستدلالي	3
ثالثا: التعريف بالمصطلحات الإحصائية	3
1- المجتمع الإحصائي	3
2- الوحدة الإحصائية	3
3- المتغير الإحصائي	3
4- العينة	4
رابعا: الخطوات العريضة لمنهج البحث الإحصائي	4
1- التحديد الدقيق للهدف الإحصائي	4
2- جمع البيانات الإحصائية	4
3- عرض البيانات الإحصائية	5
4- تحليل البيانات الإحصائية	5
5- تفسير البيانات الإحصائية	5
خامسا: أنواع المتغيرات الإحصائية	5
1- متغيرات كيفية	5
2- متغيرات كمية	5
سادسا: أنواع العينات	6
1- العينات العشوائية	6
2- العينات غير العشوائية	7

سابعا: أخطاء البيانات الإحصائية	8
1- خطأ التميز	8
2- خطأ المعاينة العشوائية أو خطأ الصدفة	9
تمارين محلولة	10
الفصل الثاني: التوزيعات الاحتمالية المتصلة	21
تمهيد	22
أولا: التوزيع الطبيعي	22
1- تعريف التوزيع الطبيعي	22
2- دالة الكثافة الاحتمالية للقانون الطبيعي	22
3- التمثيل البياني للتوزيع الاحتمالي للقانون الطبيعي	22
4- الخواص العددية للقانون الطبيعي	23
ثانيا: التوزيع الطبيعي المعياري	24
1- تعريف التوزيع الطبيعي المعياري	24
2- دالة الكثافة الاحتمالية للقانون الطبيعي المعياري	24
3- التمثيل البياني للتوزيع الاحتمالي للقانون الطبيعي المعياري	24
4- الخواص العددية للقانون الطبيعي المعياري	25
ثالثا: توزيع كاي تربيع	31
1- تعريف توزيع كاي تربيع	31
2- دالة الكثافة الاحتمالية لقانون كاي تربيع	31
3- التمثيل البياني للتوزيع الاحتمالي لقانون كاي تربيع	32
4- الخواص العددية لقانون كاي تربيع	32
رابعا: توزيع ستيودنت	35
1- تعريف توزيع ستيودنت	35
2- دالة الكثافة الاحتمالية لقانون ستيودنت	35
3- التمثيل البياني للتوزيع الاحتمالي لقانون ستيودنت	35
4- الخواص العددية لقانون ستيودنت	36
خامسا: توزيع فيشر	38
1- تعريف توزيع فيشر	38
2- دالة الكثافة الاحتمالية لقانون فيشر	38

3- التمثيل البياني للتوزيع الاحتمالي لقانون فيشر	39
4- الخواص العددية لقانون فيشر	39
تمارين محلولة	42
الفصل الثالث: توزيعات المعاينة	53
تمهيد	54
أولا: تعريف توزيع المعاينة	54
ثانيا: توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $(\bar{x})$	54
1- إذا كان حجم العينة كبير $(n \geq 30)$	54
2- إذا كان حجم العينة صغير $(n < 30)$	55
ثالثا: توزيع المعاينة لمجموع أو فرق بين متوسطين	57
رابعا: توزيع المعاينة لنسبة العينة (f)	58
خامسا: توزيع المعاينة لمجموع أو فرق بين نسيتين	59
سادسا: توزيع المعاينة للتباين (S^2)	59
سابعا: توزيع المعاينة لمجموع أو فرق بين تباينين	60
تمارين محلولة	64
الفصل الرابع: التقدير	71
تمهيد	72
أولا: خصائص المقدر الجيد	72
1- معيار عدم التحيز	72
2- معيار التقارب (التماسك)	73
3- معيار الفعالية	73
ثانيا: أنواع التقدير	74
1- التقدير النقطي	74
2- التقدير بمجال	74
ثالثا: مجال الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع μ	74
1- إذا كان حجم العينة كبير $(n \geq 30)$	74
2- إذا كان حجم العينة صغير $(n < 30)$	75
3- خطأ المعاينة في تقدير μ وحجم العينة اللازم لعدم تجاوز خطأ معين	76
رابعا: مجال الثقة للنسبة P في المجتمع	79

1- خطأ المعاينة في تقدير P	79
2- حجم العينة اللازم لعدم تجاوز خطأ معين في تقدير P	80
خامسا: مجال الثقة لتباين المجتمع σ^2 ومجال الثقة الانحراف المعياري للمجتمع σ	82
1- مجال الثقة لتباين المجتمع σ^2	82
2- مجال الثقة الانحراف المعياري للمجتمع σ	82
تمارين محلولة	84
الفصل الخامس: اختبار الفرضيات	92
تمهيد	93
أولا: صياغة وأنواع الفرضيات الاحصائية	93
1- صياغة الفرضية الاحصائية	94
2- أنواع الفرضيات الاحصائية	94
ثانيا: أنواع الأخطاء الاحصائية	94
ثالثا: أنواع اختبار الفرضيات الاحصائية	95
1- اختبار الطرفين أو ذو جانبين	95
2- اختبار الطرف الأيسر	95
3- اختبار الطرف الأيمن	96
رابعا: اختبار المتوسط الحسابي للمجتمع U	96
1- حالة حجم العينة كبير $(n \geq 30)$ وتباين المجتمع σ^2 معلوم	96
2- حالة حجم العينة كبير $(n \geq 30)$ وتباين المجتمع σ^2 مجهول	98
3- حالة حجم العينة صغير $(n < 30)$ وتباين المجتمع σ^2 مجهول	100
خامسا: اختبار نسبة صفة معينة في المجتمعP	103
1- حالة اختبار الطرفين أو ذو جانبين	103
2- حالة اختبار الطرف الأيسر	103
3- حالة اختبار الطرف الأيمن	103
سادسا: اختبار تباين المجتمع σ^2	105
1- حالة اختبار الطرفين أو ذو جانبين	105
2- حالة اختبار الطرف الأيسر	105
3- حالة اختبار الطرف الأيمن	105
تمارين محلولة	108

نماذج امتحانات سابقة	115
حلول امتحانات سابقة	127
قائمة المراجع	145
قائمة الملاحق	149
فهرس المحتويات	156