

UNIVERSITÉ FERHAT ABBAS – SÉTIF –
U. F. A. S. (ALGÉRIE)

MÉMOIRE

Présenté à la Faculté des Sciences
Département des Mathématiques

Pour l'obtention du diplôme de

MAGISTÈRE

Option : Analyse numérique et Optimisation

Présenté par :

ZAOUAGUI IDRIS NOUREDDINE

THÈME :

***Étude qualitative et comparative de la méthode décompositionnelle
appliquée aux équations différentielles ordinaires***

Soutenu le : 24 / 03 / 2005

devant la commission d'examen :

Mr. MEKIAS Houssine

PR. U. F. A. Sétif

Président

Mr. ABBAOUI Karim

PR. U. F. A. Sétif

Rapporteur

Mr. KERAGUEL Abdelkrim

MC. U. F. A. Sétif

Examineur

Mr. ZIADI Abdelkader

MC. U. F. A. Sétif

Examineur

INTRODUCTION

Depuis deux dizaines d'années, une grande variété d'équations fonctionnelles de tous types à savoir : (algébriques, différentielles, aux dérivées partielles, intégrales, etc....), linéaires ou non linéaires, ont été résolues par la méthode décompositionnelle. Cette méthode a été inventée en 1981 par le physicien américain **GEORGE ADOMIAN** qui l'a développé vers 1983, et depuis elle n'a cessé de s'améliorer jusqu'à ce jour par **YVES CHERRUAULT** et ses collègues.

La méthode décompositionnelle est basée sur la décomposition d'une fonction inconnue sous forme d'une série dont les termes sont définis de manière récurrente en utilisant des polynômes d'un type particulier appelé « *polynômes d'ADOMIAN* ». Cette méthode ne change pas la nature du problème et n'effectue aucune linéarisation. La solution sera obtenue sous la forme d'une série qui converge généralement très vite, sous des conditions que nous allons préciser dans ce travail.

L'application de la méthode décompositionnelle aux équations différentielles ordinaires est le problème qui nous intéresse dans ce travail, car certains types de modèles médicales et biologiques conduisent à des équations différentielles ordinaires et en particulier les problèmes aux conditions initiales et aux limites. Le but souhaité est de faire une étude qualitative et comparative avec les méthodes classiques connues.

INTRODUCTION

Le travail que nous allons présenter est divisé en trois chapitres. Dans le premier chapitre nous donnons l'application de la méthode aux équations différentielles ordinaires. Pour ce faire, nous avons proposé des formules permettant de calculer facilement les polynômes d'ADOMIAN pour une fonction scalaire à deux variables et d'utiliser ces dernières pour démontrer la convergence de la méthode et de la comparer aux méthodes numériques les plus utilisées pour la résolution des problèmes aux conditions initiales. Nous présentons aussi la méthode décompositionnelle itérative qui est une variante numérique de la méthode décompositionnelle d'ADOMIAN, cette méthode résout numériquement les équations différentielles ordinaires en particulier les problèmes aux conditions initiales. Enfin nous appliquons la méthode décompositionnelle aux problèmes aux limites.

Le deuxième chapitre est consacré à la résolution numérique des problèmes aux conditions initiales par la méthode décompositionnelle itérative et à la comparaison de cette méthode avec les méthodes d'EULER, de TAYLOR, de RUNGE – KUTTA « classique », de MILNE et d'ADAMS.

En fin dans le troisième chapitre, nous résolvons des problèmes aux limites linéaires du deuxième degré et nous comparons numériquement la méthode décompositionnelle avec celle des différences finies et de RAYLEIGH RITZ GALERKIN.

SOMMAIRE

INTRODUCTION	4
Chapitre 1. Étude théorique de la méthode décompositionnelle appliquée aux équations différentielles ordinaires	6
1.1) Application de la méthode décompositionnelle aux P. C. I. du 1 ^{er} degré	7
1.2) Principe de la méthode décompositionnelle itérative	23
1.3) Application de la méthode décompositionnelle aux P. C. L. du 2 ^{ème} degré	25
Chapitre 2. Étude comparative de la méthode décompositionnelle itérative pour la résolution de quelques problèmes aux conditions initiales du 1^{er} degré	28
2.1) La résolution numérique des problèmes aux conditions initiales	29
2.2) Comparaison avec les méthodes numériques à un pas	31
2.3) Comparaison avec les méthodes numériques à pas multiple.....	43
Chapitre 3. Étude comparative de la méthode décompositionnelle pour la résolution de quelques problèmes aux limites linéaires du 2^{ème} degré	52
3.1) La résolution par la méthode décompositionnelle	53
3.2) La résolution par les méthodes classiques	55
3.3) Comparaison avec les méthodes classiques	56
CONCLUSION	75
RÉFÉRENCE	78

Chapitre 01

*Étude théorique de la méthode
décompositionnelle appliquée aux équations
différentielles ordinaires*

- 1.1) *Application de la méthode décompositionnelle aux P. C. I. du 1^{er} degré*
- 1.2) *Principe de la méthode décompositionnelle itérative*
- 1.3) *Application de la méthode décompositionnelle aux P. C. L. du 2^{ème} degré*

Dans ce chapitre nous étudions théoriquement l'application de la méthode décompositionnelle aux problèmes aux conditions initiales du 1^{er} degré et nous donnons des formules qui permettant de calculer facilement les polynômes d'ADOMIAN pour une fonction scalaire à deux variables, ensuite nous donnons le principe de la méthode décompositionnelle itérative. Enfin nous appliquons la méthode décompositionnelle aux problèmes aux limites du 2^{ème} degré.

Dans tout ce qui suit, nous utiliserons les notations suivantes :

Pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$ et $F(x) = f(x, y(x))$, nous posons :

$$\alpha! := \alpha_1! \dots \alpha_n! \quad (1.1)$$

$$|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n \quad (1.2)$$

$$|n \cdot \alpha_n| := \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + n\alpha_n \quad (1.3)$$

$$f^{[n]}(x, y(x)) := \left. \frac{d^n}{dt^n} F(t) \right|_{t=x} \quad (1.4)$$

1.1. Application de la méthode décompositionnelle aux P. C. I. du 1^{er} degré :

Étant donné le problème (PCI) défini par :

$$(PCI): \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

où : y est C^∞ au voisinage de x_0 et f est C^∞ au voisinage de (x_0, y_0) .

1.1.1. Principe de la méthode décompositionnelle appliquée aux P. C. I. du 1^{er} degré :

Considérons le problème classique (PCI) :

$$(PCI) \Leftrightarrow y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \quad (1.1.1)$$

La méthode décompositionnelle consiste à chercher la solution sous la forme

d'une série :
$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) \quad (1.1.2)$$

puis à décomposer le terme non linéaire sous la forme :

$$f(x, y(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \quad (1.1.3)$$

où les A_n sont des polynômes qu'on appelle polynômes d'ADOMIAN. Ils sont obtenus par l'expression :

$$f\left(x_0 + \lambda(x - x_0), \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n y_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A_n(x) \quad (1.1.4)$$

où λ est un paramètre introduit par convenance. Grâce à (1.1.4) nous obtenons les $A_n(x)$ par la formule :

$$A_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} f\left(x_0 + \lambda(x - x_0), \sum_{i=0}^n \lambda^i y_i(x)\right) \Big|_{\lambda=0} \quad (1.1.5)$$

En remplaçant (1.1.2) et (1.1.3) dans (1.1.1), nous obtenons :

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = y(x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_0}^x A_n(t) dt \quad (1.1.6)$$

Les termes de la série $\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)$ sont alors identifiés par les formules :

$$\begin{cases} y_0(x) = y(x_0) \\ y_1(x) = \int_{x_0}^x A_0(t) dt \\ \vdots \\ y_{n+1}(x) = \int_{x_0}^x A_n(t) dt \\ \vdots \end{cases} \quad (1.1.7)$$

La solution exacte du problème ($\mathcal{PCI}$) est maintenant complètement déterminée, mais en pratique il est difficile de calculer tous les termes de la

série $\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)$, c'est pour cela qu'on utilise une approximation de la solution

sous la forme d'une série tronquée : $\phi_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i(x)$ (1.1.8)

1.1.2. Formules pour calculer les polynômes d'ADOMIAN :

Lemme 1.1 : « FAA DI BRUNO » [02]

Soient $a \in \mathbf{R}$, $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ et $\psi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ sont des fonction où : $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ et φ_1, φ_2 sont C^∞ au $\mathcal{V}(a)$ et ψ est C^∞ au $\mathcal{V}(\varphi_1(a), \varphi_2(a))$ alors :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^n}{dt^n} (\psi \circ \varphi)(t) \right|_{t=a} &= \sum_{|n \cdot \alpha_n| + |n \cdot \beta_n| = n} \frac{n!}{\alpha! \beta!} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{|\alpha|}} \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial y^{|\beta|}} \psi(\varphi_1(a), \varphi_2(a)) \\ &\quad \cdot \left(\frac{\varphi'_1(a)}{1!} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\varphi_1^{[n]}(a)}{n!} \right)^{\alpha_n} \cdot \left(\frac{\varphi'_2(a)}{1!} \right)^{\beta_1} \dots \left(\frac{\varphi_2^{[n]}(a)}{n!} \right)^{\beta_n} \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

Démonstration :

Pour $n = 1$ nous avons :

$$\begin{aligned} \forall a \in \mathbf{R} : \left. \frac{d}{dt} (\psi \circ \varphi)(t) \right|_{t=a} &= \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x} \psi(\varphi_1(a), \varphi_2(a)), \frac{\partial}{\partial y} \psi(\varphi_1(a), \varphi_2(a)) \right), (\varphi'_1(a), \varphi'_2(a)) \right\rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \psi(\varphi_1(a), \varphi_2(a)) \varphi'_1(a) + \frac{\partial}{\partial y} \psi(\varphi_1(a), \varphi_2(a)) \varphi'_2(a) \end{aligned}$$

alors la condition initiale est satisfaite.

Supposons que :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (\psi \circ \varphi)(t) \right|_{t=a} &= \sum_{|(n-1) \cdot \alpha_{n-1}| + |(n-1) \cdot \beta_{n-1}| = n-1} \frac{(n-1)!}{\alpha_1! \dots \alpha_{n-1}! \beta_1! \dots \beta_{n-1}!} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{|\alpha|}} \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial y^{|\beta|}} \psi(\varphi_1(a), \varphi_2(a)) \\ &\quad \cdot \left(\frac{\varphi'_1(a)}{1!} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\varphi_1^{[n-1]}(a)}{(n-1)!} \right)^{\alpha_{n-1}} \cdot \left(\frac{\varphi'_2(a)}{1!} \right)^{\beta_1} \dots \left(\frac{\varphi_2^{[n-1]}(a)}{(n-1)!} \right)^{\beta_{n-1}} \end{aligned}$$

$$\left. \frac{d^n}{dt^n} (\psi \circ \varphi)(t) \right|_{t=a} = \frac{d}{dt} \left(\left. \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (\psi \circ \varphi)(t) \right) \right|_{t=a}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{|(n-1)\alpha_{n-1}|+|(n-1)\beta_{n-1}|=n-1} \frac{d}{dt} \left(\frac{(n-1)!}{\alpha_1! \cdots \alpha_{n-1}! \beta_1! \cdots \beta_{n-1}!} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{|\alpha|}} \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial y^{|\beta|}} \Psi \circ \Phi \right. \\
 &\quad \cdot \left(\frac{\Phi'_1}{1!} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\Phi_1^{[n-1]}}{(n-1)!} \right)^{\alpha_{n-1}} \cdot \left(\frac{\Phi'_2}{1!} \right)^{\beta_1} \cdots \left(\frac{\Phi_2^{[n-1]}}{(n-1)!} \right)^{\beta_{n-1}} \Bigg) \Bigg|_{t=a} \\
 &= \sum_{|(n-1)\alpha_{n-1}|+|(n-1)\beta_{n-1}|=n-1} \left(\frac{(\alpha_1+1) \cdot (n-1)!}{(\alpha_1+1)! \cdots \alpha_{n-1}! \beta_1! \cdots \beta_{n-1}!} \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}+1}}{\partial x^{\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}+1}} \frac{\partial^{\beta_1+\cdots+\beta_{n-1}}}{\partial y^{\beta_1+\cdots+\beta_{n-1}}} \Psi(\Phi_1(a), \Phi_2(a)) \right. \\
 &\quad \cdot \left(\frac{\Phi'_1(a)}{1!} \right)^{\alpha_1+1} \cdots \left(\frac{\Phi_1^{[n-1]}(a)}{(n-1)!} \right)^{\alpha_{n-1}} \cdot \left(\frac{\Phi'_2(a)}{1!} \right)^{\beta_1} \cdots \left(\frac{\Phi_2^{[n-1]}(a)}{(n-1)!} \right)^{\beta_{n-1}} \\
 &\quad + \frac{2(\alpha_2+1) \cdot (n-1)!}{(\alpha_1-1)! (\alpha_2+1)! \cdots \alpha_{n-1}! \beta_1! \cdots \beta_{n-1}!} \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}}}{\partial x^{\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}}} \frac{\partial^{\beta_1+\cdots+\beta_{n-1}}}{\partial y^{\beta_1+\cdots+\beta_{n-1}}} \Psi(\Phi_1(a), \Phi_2(a)) \\
 &\quad \cdot \left(\frac{\Phi'_1(a)}{1!} \right)^{\alpha_1-1} \left(\frac{\Phi''_1(a)}{2!} \right)^{\alpha_2+1} \cdots \left(\frac{\Phi_1^{[n-1]}(a)}{(n-1)!} \right)^{\alpha_{n-1}} \cdot \left(\frac{\Phi'_2(a)}{1!} \right)^{\beta_1} \cdots \left(\frac{\Phi_2^{[n-1]}(a)}{(n-1)!} \right)^{\beta_{n-1}} \\
 &\quad + \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad + \\
 &\quad + \frac{n \cdot (n-1)!}{\alpha_1! \cdots (\alpha_{n-1}-1)! \beta_1! \cdots \beta_{n-1}!} \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}}}{\partial x^{\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}}} \frac{\partial^{\beta_1+\cdots+\beta_{n-1}}}{\partial y^{\beta_1+\cdots+\beta_{n-1}}} \Psi(\Phi_1(a), \Phi_2(a)) \\
 &\quad \cdot \left(\frac{\Phi'_1(a)}{1!} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\Phi_1^{[n-1]}(a)}{(n-1)!} \right)^{\alpha_{n-1}-1} \left(\frac{\Phi_1^{[n]}(a)}{n!} \right) \cdot \left(\frac{\Phi'_2(a)}{1!} \right)^{\beta_1} \cdots \left(\frac{\Phi_2^{[n-1]}(a)}{(n-1)!} \right)^{\beta_{n-1}} \\
 &\quad + \frac{(\beta_1+1)(n-1)!}{\alpha_1! \cdots \alpha_{n-1}! (\beta_1+1)! \cdots \beta_{n-1}!} \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}}}{\partial x^{\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}}} \frac{\partial^{\beta_1+\cdots+\beta_{n-1}+1}}{\partial y^{\beta_1+\cdots+\beta_{n-1}+1}} \Psi(\Phi_1(a), \Phi_2(a)) \\
 &\quad \cdot \left(\frac{\Phi'_1(a)}{1!} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\Phi_1^{[n-1]}(a)}{(n-1)!} \right)^{\alpha_{n-1}} \cdot \left(\frac{\Phi'_2(a)}{1!} \right)^{\beta_1+1} \cdots \left(\frac{\Phi_2^{[n-1]}(a)}{(n-1)!} \right)^{\beta_{n-1}} \\
 &\quad + \frac{2(\beta_2+1) \cdot (n-1)!}{\alpha_1! \cdots \alpha_{n-1}! (\beta_1-1)! (\beta_2+1)! \cdots \beta_{n-1}!} \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}}}{\partial x^{\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}}} \frac{\partial^{\beta_1+\cdots+\beta_{n-1}}}{\partial y^{\beta_1+\cdots+\beta_{n-1}}} \Psi(\Phi_1(a), \Phi_2(a)) \\
 &\quad \cdot \left(\frac{\Phi'_1(a)}{1!} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\Phi_1^{[n-1]}(a)}{(n-1)!} \right)^{\alpha_{n-1}} \cdot \left(\frac{\Phi'_2(a)}{1!} \right)^{\beta_1-1} \left(\frac{\Phi''_2(a)}{2!} \right)^{\beta_2+1} \cdots \left(\frac{\Phi_2^{[n-1]}(a)}{(n-1)!} \right)^{\beta_{n-1}} \\
 &\quad + \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad +
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{n \cdot (n-1)!}{\alpha_1! \cdots \alpha_{n-1}! \beta_1! \cdots (\beta_{n-1}-1)!} \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}}}{\partial x^{\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}}} \frac{\partial^{\beta_1+\cdots+\beta_{n-1}}}{\partial y^{\beta_1+\cdots+\beta_{n-1}}} \psi(\varphi_1(a), \varphi_2(a))$$

$$\cdot \left(\frac{\varphi_1'(a)}{1!} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\varphi_1^{[n-1]}(a)}{(n-1)!} \right)^{\alpha_{n-1}} \cdot \left(\frac{\varphi_2'(a)}{1!} \right)^{\beta_1} \cdots \left(\frac{\varphi_2^{[n-1]}(a)}{(n-1)!} \right)^{\beta_{n-1}-1} \left(\frac{\varphi_2^{[n]}(a)}{n!} \right)$$

Dans le 1^{er} terme, on pose :

$$\alpha'_1 = \alpha_1 + 1, \alpha'_2 = \alpha_2, \dots, \alpha'_{n-1} = \alpha_{n-1}, \alpha'_n = 0$$

$$\beta'_1 = \beta_1, \beta'_2 = \beta_2, \dots, \beta'_{n-1} = \beta_{n-1}, \beta'_n = 0$$

$$\alpha'_1 + \alpha'_2 + \cdots + \alpha'_n = \alpha_1 + 1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1} + 0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1} + 1$$

$$\beta'_1 + \beta'_2 + \cdots + \beta'_n = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{n-1} + 0 = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{n-1}$$

$$|n \cdot \alpha'_n| + |n \cdot \beta'_n| = \alpha_1 + 1 + 2\alpha_2 + \cdots + (n-1)\alpha_{n-1} + n0 + \beta_1 + 2\beta_2 + \cdots + (n-1)\beta_{n-1} + n0$$

$$= 1 + |(n-1) \cdot \alpha_{n-1}| + |(n-1) \cdot \beta_{n-1}| = 1 + n - 1 = n$$

Dans le 2^{ème} terme, on pose :

$$\alpha'_1 = \alpha_1 - 1, \alpha'_2 = \alpha_2 + 1, \dots, \alpha'_{n-1} = \alpha_{n-1}, \alpha'_n = 0$$

$$\beta'_1 = \beta_1, \beta'_2 = \beta_2, \dots, \beta'_{n-1} = \beta_{n-1}, \beta'_n = 0$$

$$\alpha'_1 + \alpha'_2 + \cdots + \alpha'_n = \alpha_1 - 1 + \alpha_2 + 1 + \cdots + \alpha_{n-1} + 0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1}$$

$$\beta'_1 + \beta'_2 + \cdots + \beta'_n = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{n-1} + 0 = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{n-1}$$

$$|n \cdot \alpha'_n| + |n \cdot \beta'_n| = \alpha_1 - 1 + 2\alpha_2 + 2 + \cdots + (n-1)\alpha_{n-1} + n0 + \beta_1 + 2\beta_2 + \cdots + (n-1)\beta_{n-1} + n0$$

$$= -1 + 2 + |(n-1) \cdot \alpha_{n-1}| + |(n-1) \cdot \beta_{n-1}| = 1 + n - 1 = n$$

⋮

Dans le n^{ème} terme, on pose :

$$\alpha'_1 = \alpha_1, \alpha'_2 = \alpha_2, \dots, \alpha'_{n-1} = \alpha_{n-1} - 1, \alpha'_n = 1$$

$$\beta'_1 = \beta_1, \beta'_2 = \beta_2, \dots, \beta'_{n-1} = \beta_{n-1}, \beta'_n = 0$$

$$\alpha'_1 + \alpha'_2 + \cdots + \alpha'_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1} - 1 + 1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1}$$

$$\beta'_1 + \beta'_2 + \cdots + \beta'_n = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{n-1} + 0 = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{n-1}$$

$$\begin{aligned}
|n \cdot \alpha'_n| + |n \cdot \beta'_n| &= \alpha_1 + \dots + (n-1)\alpha_{n-1} - (n-1) + n \cdot 1 + \beta_1 + \dots + (n-1)\beta_{n-1} + n0 \\
&= -(n-1) + n + |(n-1) \cdot \alpha_{n-1}| + |(n-1) \cdot \beta_{n-1}| = -(n-1) + n + (n-1) = n
\end{aligned}$$

Dans le terme $n+1$, on pose :

$$\begin{aligned}
\alpha'_1 &= \alpha_1, \alpha'_2 = \alpha_2, \dots, \alpha'_{n-1} = \alpha_{n-1}, \alpha'_n = 0 \\
\beta'_1 &= \beta_1 + 1, \beta'_2 = \beta_2, \dots, \beta'_{n-1} = \beta_{n-1}, \beta'_n = 0 \\
\alpha'_1 + \alpha'_2 + \dots + \alpha'_n &= \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1} + 0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1} \\
\beta'_1 + \beta'_2 + \dots + \beta'_n &= \beta_1 + 1 + \beta_2 + \dots + \beta_{n-1} + 0 = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{n-1} + 1 \\
|n \cdot \alpha'_n| + |n \cdot \beta'_n| &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + (n-1)\alpha_{n-1} + n0 + \beta_1 + 1 + 2\beta_2 + \dots + (n-1)\beta_{n-1} + n0 \\
&= |(n-1) \cdot \alpha_{n-1}| + |(n-1) \cdot \beta_{n-1}| + 1 = n - 1 + 1 = n
\end{aligned}$$

Dans le terme $n+2$, on pose :

$$\begin{aligned}
\alpha'_1 &= \alpha_1, \alpha'_2 = \alpha_2, \dots, \alpha'_{n-1} = \alpha_{n-1}, \alpha'_n = 0 \\
\beta'_1 &= \beta_1 - 1, \beta'_2 = \beta_2 + 1, \dots, \beta'_{n-1} = \beta_{n-1}, \beta'_n = 0 \\
\alpha'_1 + \alpha'_2 + \dots + \alpha'_n &= \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1} + 0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1} \\
\beta'_1 + \beta'_2 + \dots + \beta'_n &= \beta_1 - 1 + \beta_2 + 1 + \dots + \beta_{n-1} + 0 = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{n-1} \\
|n \cdot \alpha'_n| + |n \cdot \beta'_n| &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + (n-1)\alpha_{n-1} + n0 + \beta_1 - 1 + 2\beta_2 + 2 + \dots + (n-1)\beta_{n-1} + n0 \\
&= |(n-1) \cdot \alpha_{n-1}| + |(n-1) \cdot \beta_{n-1}| - 1 + 2 = n - 1 - 1 + 2 = n
\end{aligned}$$

:

Dans le terme $2n$, on pose :

$$\begin{aligned}
\alpha'_1 &= \alpha_1, \alpha'_2 = \alpha_2, \dots, \alpha'_{n-1} = \alpha_{n-1}, \alpha'_n = 0 \\
\beta'_1 &= \beta_1, \beta'_2 = \beta_2, \dots, \beta'_{n-1} = \beta_{n-1} - 1, \beta'_n = 1 \\
\alpha'_1 + \alpha'_2 + \dots + \alpha'_n &= \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1} + 0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1} \\
\beta'_1 + \beta'_2 + \dots + \beta'_n &= \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{n-1} - 1 + 1 = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{n-1} \\
|n \cdot \alpha'_n| + |n \cdot \beta'_n| &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + (n-1)\alpha_{n-1} + n0 + \beta_1 + 2\beta_2 + \dots + (n-1)\beta_{n-1} - (n-1) + n \cdot 1 \\
&= |(n-1) \cdot \alpha_{n-1}| + |(n-1) \cdot \beta_{n-1}| - (n-1) + n = (n-1) - (n-1) + n = n
\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d^n}{dt^n} (\psi \circ \varphi)(t) \right|_{t=a} &= \sum_{|n \cdot \alpha'_n| + |n \cdot \beta'_n| = n} \left(\frac{\alpha'_1 \cdot (n-1)!}{\alpha'_1! \cdots \alpha'_n! \beta'_1! \cdots \beta'_n!} \frac{\partial^{\alpha'_1 + \cdots + \alpha'_n}}{\partial x^{\alpha'_1 + \cdots + \alpha'_n}} \frac{\partial^{\beta'_1 + \cdots + \beta'_n}}{\partial y^{\beta'_1 + \cdots + \beta'_n}} \psi(\varphi_1(a), \varphi_2(a)) \right. \\
&\quad \cdot \left(\frac{\varphi'_1(a)}{1!} \right)^{\alpha'_1} \cdots \left(\frac{\varphi_1^{[n]}(a)}{n!} \right)^{\alpha'_n} \cdot \left(\frac{\varphi'_2(a)}{1!} \right)^{\beta'_1} \cdots \left(\frac{\varphi_2^{[n]}(a)}{n!} \right)^{\beta'_n} \\
&\quad + \frac{2\alpha'_2 \cdot (n-1)!}{\alpha'_1! \cdots \alpha'_n! \beta'_1! \cdots \beta'_n!} \frac{\partial^{\alpha'_1 + \cdots + \alpha'_n}}{\partial x^{\alpha'_1 + \cdots + \alpha'_n}} \frac{\partial^{\beta'_1 + \cdots + \beta'_n}}{\partial y^{\beta'_1 + \cdots + \beta'_n}} \psi(\varphi_1(a), \varphi_2(a)) \\
&\quad \cdot \left(\frac{\varphi'_1(a)}{1!} \right)^{\alpha'_1} \cdots \left(\frac{\varphi_1^{[n]}(a)}{n!} \right)^{\alpha'_n} \cdot \left(\frac{\varphi'_2(a)}{1!} \right)^{\beta'_1} \cdots \left(\frac{\varphi_2^{[n]}(a)}{n!} \right)^{\beta'_n} \\
&\quad + \vdots \\
&\quad + \frac{n\alpha'_n \cdot (n-1)!}{\alpha'_1! \cdots \alpha'_n! \beta'_1! \cdots \beta'_n!} \frac{\partial^{\alpha'_1 + \cdots + \alpha'_n}}{\partial x^{\alpha'_1 + \cdots + \alpha'_n}} \frac{\partial^{\beta'_1 + \cdots + \beta'_n}}{\partial y^{\beta'_1 + \cdots + \beta'_n}} \psi(\varphi_1(a), \varphi_2(a)) \\
&\quad \cdot \left(\frac{\varphi'_1(a)}{1!} \right)^{\alpha'_1} \cdots \left(\frac{\varphi_1^{[n]}(a)}{n!} \right)^{\alpha'_n} \cdot \left(\frac{\varphi'_2(a)}{1!} \right)^{\beta'_1} \cdots \left(\frac{\varphi_2^{[n]}(a)}{n!} \right)^{\beta'_n} \\
&\quad + \frac{\beta'_1 \cdot (n-1)!}{\alpha'_1! \cdots \alpha'_n! \beta'_1! \cdots \beta'_n!} \frac{\partial^{\alpha'_1 + \cdots + \alpha'_n}}{\partial x^{\alpha'_1 + \cdots + \alpha'_n}} \frac{\partial^{\beta'_1 + \cdots + \beta'_n}}{\partial y^{\beta'_1 + \cdots + \beta'_n}} \psi(\varphi_1(a), \varphi_2(a)) \\
&\quad \cdot \left(\frac{\varphi'_1(a)}{1!} \right)^{\alpha'_1} \cdots \left(\frac{\varphi_1^{[n]}(a)}{n!} \right)^{\alpha'_n} \cdot \left(\frac{\varphi'_2(a)}{1!} \right)^{\beta'_1} \cdots \left(\frac{\varphi_2^{[n]}(a)}{n!} \right)^{\beta'_n} \\
&\quad + \frac{2\beta'_2 \cdot (n-1)!}{\alpha'_1! \cdots \alpha'_n! \beta'_1! \cdots \beta'_n!} \frac{\partial^{\alpha'_1 + \cdots + \alpha'_n}}{\partial x^{\alpha'_1 + \cdots + \alpha'_n}} \frac{\partial^{\beta'_1 + \cdots + \beta'_n}}{\partial y^{\beta'_1 + \cdots + \beta'_n}} \psi(\varphi_1(a), \varphi_2(a)) \\
&\quad \cdot \left(\frac{\varphi'_1(a)}{1!} \right)^{\alpha'_1} \cdots \left(\frac{\varphi_1^{[n]}(a)}{n!} \right)^{\alpha'_n} \cdot \left(\frac{\varphi'_2(a)}{1!} \right)^{\beta'_1} \cdots \left(\frac{\varphi_2^{[n]}(a)}{n!} \right)^{\beta'_n} \\
&\quad + \vdots \\
&\quad + \frac{n\beta'_n \cdot (n-1)!}{\alpha'_1! \cdots \alpha'_n! \beta'_1! \cdots \beta'_n!} \frac{\partial^{\alpha'_1 + \cdots + \alpha'_n}}{\partial x^{\alpha'_1 + \cdots + \alpha'_n}} \frac{\partial^{\beta'_1 + \cdots + \beta'_n}}{\partial y^{\beta'_1 + \cdots + \beta'_n}} \psi(\varphi_1(a), \varphi_2(a)) \\
&\quad \cdot \left(\frac{\varphi'_1(a)}{1!} \right)^{\alpha'_1} \cdots \left(\frac{\varphi_1^{[n]}(a)}{n!} \right)^{\alpha'_n} \cdot \left(\frac{\varphi'_2(a)}{1!} \right)^{\beta'_1} \cdots \left(\frac{\varphi_2^{[n]}(a)}{n!} \right)^{\beta'_n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{|n \cdot \alpha'_n| + |n \cdot \beta'_n| = n} \left(\frac{(n \cdot \alpha'_n + n \cdot \beta'_n) \cdot (n-1)!}{\alpha'_1! \cdots \alpha'_n! \beta'_1! \cdots \beta'_n!} \frac{\partial^{\alpha'_1 + \cdots + \alpha'_n}}{\partial x^{\alpha'_1 + \cdots + \alpha'_n}} \frac{\partial^{\beta'_1 + \cdots + \beta'_n}}{\partial y^{\beta'_1 + \cdots + \beta'_n}} \psi(\varphi_1(a), \varphi_2(a)) \right. \\
&\quad \cdot \left(\frac{\varphi'_1(a)}{1!} \right)^{\alpha'_1} \cdots \left(\frac{\varphi_1^{[n]}(a)}{n!} \right)^{\alpha'_n} \cdot \left(\frac{\varphi'_2(a)}{1!} \right)^{\beta'_1} \cdots \left(\frac{\varphi_2^{[n]}(a)}{n!} \right)^{\beta'_n} \Big) \\
&= \sum_{|n \cdot \alpha'_n| + |n \cdot \beta'_n| = n} \left(\frac{n!}{\alpha'_1! \cdots \alpha'_n! \beta'_1! \cdots \beta'_n!} \frac{\partial^{\alpha'_1 + \cdots + \alpha'_n}}{\partial x^{\alpha'_1 + \cdots + \alpha'_n}} \frac{\partial^{\beta'_1 + \cdots + \beta'_n}}{\partial y^{\beta'_1 + \cdots + \beta'_n}} \psi(\varphi_1(a), \varphi_2(a)) \right. \\
&\quad \cdot \left(\frac{\varphi'_1(a)}{1!} \right)^{\alpha'_1} \cdots \left(\frac{\varphi_1^{[n]}(a)}{n!} \right)^{\alpha'_n} \cdot \left(\frac{\varphi'_2(a)}{1!} \right)^{\beta'_1} \cdots \left(\frac{\varphi_2^{[n]}(a)}{n!} \right)^{\beta'_n} \Big)
\end{aligned}$$

d'où : (1.1.9).

Théorème 1.1 : [01], [03]

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, les A_n sont donnés par les formules :

$$\begin{cases} A_0(x) = f(x_0, y_0(x)) \\ A_n(x) = \sum_{\alpha + |n \cdot \beta_n| = n} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^{| \beta |}}{\partial y^{| \beta |}} f(x_0, y_0(x)) \frac{(x - x_0)^\alpha (y_1(x))^{\beta_1} \cdots (y_n(x))^{\beta_n}}{\alpha! \beta_1! \cdots \beta_n!} \end{cases} \quad (1.1.10)$$

Démonstration :

D'après (1.1.5) nous avons : $A_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} f\left(x_0 + \lambda(x - x_0), \sum_{i=0}^n \lambda^i y_i(x)\right) \Big|_{\lambda=0}$

on prend : $\psi(x, y) = f(x, y)$, $\varphi_1(\lambda) = x_0 + \lambda(x - x_0)$ et $\varphi_2(\lambda) = \sum_{i=0}^n \lambda^i y_i(x)$

alors : $\varphi(\lambda) = (\varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda)) = \left(x_0 + \lambda(x - x_0), \sum_{i=0}^n y_i(x) \lambda^i\right)$

$$A_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} f\left(x_0 + \lambda(x - x_0), \sum_{i=0}^n \lambda^i y_i(x)\right) \Big|_{\lambda=0} = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} (f \circ \varphi)(\lambda) \Big|_{\lambda=0}$$

$$\varphi_1(0) = x_0, \quad \varphi_2(0) = y_0(x)$$

$$\varphi'_1(\lambda) = x - x_0 \quad \text{d'où} : \frac{\varphi'_1(0)}{1!} = x - x_0$$

$$\forall m = 2, \dots, n : \varphi_1^{[m]}(\lambda) = 0 \quad \text{d'où} : \frac{\varphi_1^{[m]}(0)}{m!} = 0$$

$\forall m = 1, \dots, n : \varphi_2^{[m]}(\lambda) = m! y_m(x) + (\dots)\lambda + \dots + (\dots)\lambda^{n-m}$ d'où : $\varphi^{[m]}(0) = m! y_m(x)$

alors : $\frac{\varphi_2^{[m]}(0)}{m!} = y_m(x)$

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} (f \circ \varphi)(\lambda) \right|_{\lambda=0} &= \frac{1}{n!} \sum_{|n \cdot \alpha_n| + |n \cdot \beta_n| = n} \frac{n!}{\alpha_1! \dots \alpha_n! \beta_1! \dots \beta_n!} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{|\alpha|}} \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial y^{|\beta|}} f(\varphi_1(0), \varphi_2(0)) \\
 &\quad \cdot \left(\frac{\varphi_1'(0)}{1!} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\varphi_1^{[n]}(0)}{n!} \right)^{\alpha_n} \cdot \left(\frac{\varphi_2'(0)}{1!} \right)^{\beta_1} \dots \left(\frac{\varphi_2^{[n]}(0)}{n!} \right)^{\beta_n} \\
 &= \sum_{\alpha_1 + |n \cdot \beta_n| = n} \frac{1}{\alpha_1! \beta_1! \dots \beta_n!} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial y^{|\beta|}} f(\varphi_1(0), \varphi_2(0)) \\
 &\quad \cdot \left(\frac{\varphi_1'(0)}{1!} \right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{\varphi_2'(0)}{1!} \right)^{\beta_1} \dots \left(\frac{\varphi_2^{[n]}(0)}{n!} \right)^{\beta_n} \\
 &+ \sum_{\substack{|n \cdot \alpha_n| + |n \cdot \beta_n| = n \\ \alpha_1 + |n \cdot \beta_n| \neq n}} \frac{n!}{\alpha_1! \dots \alpha_n! \beta_1! \dots \beta_n!} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{|\alpha|}} \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial y^{|\beta|}} f(\varphi_1(0), \varphi_2(0)) \\
 &\quad \cdot \left(\frac{\varphi_1'(0)}{1!} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\varphi_1^{[n]}(0)}{n!} \right)^{\alpha_n} \cdot \left(\frac{\varphi_2'(0)}{1!} \right)^{\beta_1} \dots \left(\frac{\varphi_2^{[n]}(0)}{n!} \right)^{\beta_n} \\
 &= \sum_{\alpha_1 + |n \cdot \beta_n| = n} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial y^{|\beta|}} f(x_0, y_0(x)) \frac{(x - x_0)^{\alpha_1} \cdot (y_1(x))^{\beta_1} \dots (y_n(x))^{\beta_n}}{\alpha_1! \beta_1! \dots \beta_n!} \\
 &+ \sum_{\substack{|n \cdot \alpha_n| + |n \cdot \beta_n| = n \\ \alpha_1 + |n \cdot \beta_n| \neq n}} \frac{n!}{\alpha_1! \dots \alpha_n! \beta_1! \dots \beta_n!} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{|\alpha|}} \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial y^{|\beta|}} f(x_0, y_0(x)) \\
 &\quad \cdot (x - x_0)^{\alpha_1} \cdot 0^{\alpha_2} \dots 0^{\alpha_n} \cdot (y_1(x))^{\beta_1} \dots (y_n(x))^{\beta_n} \\
 &= \sum_{\alpha_1 + |n \cdot \beta_n| = n} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial y^{|\beta|}} f(x_0, y_0(x)) \frac{(x - x_0)^{\alpha_1} \cdot (y_1(x))^{\beta_1} \dots (y_n(x))^{\beta_n}}{\alpha_1! \beta_1! \dots \beta_n!} \\
 \text{d'où : } A_n(x) &= \sum_{\alpha_1 + |n \cdot \beta_n| = n} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial y^{|\beta|}} f(x_0, y_0(x)) \frac{(x - x_0)^{\alpha_1} \cdot (y_1(x))^{\beta_1} \dots (y_n(x))^{\beta_n}}{\alpha_1! \beta_1! \dots \beta_n!}
 \end{aligned}$$

🚦 Cela nous permet de lister les polynômes d'ADOMIAN pour : $n = 0, \dots, 4$.

$$A_0(x) = f(x_0, y_0(x)) \quad (1.1.11)$$

$$A_1(x) = \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0(x))(x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0(x))y_1(x) \quad (1.1.12)$$

$$\begin{aligned} A_2(x) = & \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x_0, y_0(x))(x - x_0)^2 + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0(x))y_1(x)(x - x_0) \\ & + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x_0, y_0(x))(y_1(x))^2 + \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0(x))y_2(x) \end{aligned} \quad (1.1.13)$$

$$\begin{aligned} A_3(x) = & \frac{1}{3!} \frac{\partial^3}{\partial x^3} f(x_0, y_0(x))(x - x_0)^3 + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0(x))y_1(x)(x - x_0)^2 \\ & + \frac{1}{2!} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x_0, y_0(x))(y_1(x))^2(x - x_0) + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0(x))(y_2(x))(x - x_0) \\ & + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3}{\partial y^3} f(x_0, y_0(x))(y_1(x))^3 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x_0, y_0(x))(y_1(x))(y_2(x)) \\ & + \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0(x))(y_3(x)) \end{aligned} \quad (1.1.14)$$

$$\begin{aligned} A_4(x) = & \frac{1}{4!} \frac{\partial^4}{\partial x^4} f(x_0, y_0(x))(x - x_0)^4 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0(x))(y_1(x))(x - x_0)^3 \\ & + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x_0, y_0(x))(y_1(x))^2(x - x_0)^2 \\ & + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0(x))y_2(x)(x - x_0)^2 \\ & + \frac{1}{3!} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^3}{\partial y^3} f(x_0, y_0(x))(y_1(x))^3(x - x_0) \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x_0, y_0(x))y_1(x)y_2(x)(x - x_0) \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0(x))y_3(x)(x - x_0) + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4}{\partial y^4} f(x_0, y_0(x))(y_1(x))^4 \\ & + \frac{1}{2!} \frac{\partial^3}{\partial y^3} f(x_0, y_0(x))(y_1(x))^2 y_2(x) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x_0, y_0(x))(y_2(x))^2 \\ & + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x_0, y_0(x))y_1(x)y_3(x) + \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0(x))y_4(x) \end{aligned} \quad (1.1.15)$$

Proposition 1.1 : [02]

Pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$f^{[n]}(x, y(x)) = \sum_{\alpha + |n \cdot \beta_n| = n} \frac{n!}{\alpha! \beta_n!} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^{|\beta_n|}}{\partial y^{|\beta_n|}} f(x, y(x)) \left(\frac{y'(x)}{1!} \right)^{\beta_1} \dots \left(\frac{y^{[n]}(x)}{n!} \right)^{\beta_n} \quad (1.1.16)$$

Démonstration :

On prend : $\psi(x, y) = f(x, y)$, $\varphi_1(x) = x$ et $\varphi_2(x) = y(x)$

alors : $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x)) = (x, y(x))$ et $f^{[n]}(x, y(x)) = \left. \frac{d}{dt} (\psi \circ \varphi)(t) \right|_{t=x}$

$\varphi'_1(x) = 1$ et $\forall m = 2, \dots, n : \varphi_1^{[m]}(x) = 0$

$\forall m = 1, \dots, n : \varphi_2^{[m]}(x) = y^{[m]}(x)$

$$\begin{aligned} f^{[n]}(x, y(x)) &= \sum_{\alpha_1 + |n \cdot \beta_n| = n} \frac{n!}{\alpha_1! \beta_1! \dots \beta_n!} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \frac{\partial^{|\beta_n|}}{\partial y^{|\beta_n|}} f(x, y(x)) \cdot \left(\frac{1}{1!} \right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{y'(x)}{1!} \right)^{\beta_1} \dots \left(\frac{y^{[n]}(x)}{n!} \right)^{\beta_n} \\ &\quad + \sum_{\substack{|n \alpha_n| + |n \cdot \beta_n| = n \\ \alpha_1 + |n \cdot \beta_n| \neq n}} \frac{n!}{\alpha_1! \dots \alpha_n! \beta_1! \dots \beta_n!} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{|\alpha|}} \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial y^{|\beta|}} f(x, y(x)) \\ &\quad \cdot \left(\frac{1}{1!} \right)^{\alpha_1} \cdot 0^{\alpha_2} \dots 0^{\alpha_n} \cdot \left(\frac{y'(x)}{1!} \right)^{\beta_1} \dots \left(\frac{y^{[n]}(x)}{n!} \right)^{\beta_n} \\ &= \sum_{\alpha_1 + |n \cdot \beta_n| = n} \frac{n!}{\alpha_1! \beta_n!} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \frac{\partial^{|\beta_n|}}{\partial y^{|\beta_n|}} f(x, y(x)) \cdot \left(\frac{y'(x)}{1!} \right)^{\beta_1} \dots \left(\frac{y^{[n]}(x)}{n!} \right)^{\beta_n} \\ \text{d'où : } f^{[n]}(x, y(x)) &= \sum_{\alpha + |n \cdot \beta_n| = n} \frac{n!}{\alpha! \beta_n!} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^{|\beta_n|}}{\partial y^{|\beta_n|}} f(x, y(x)) \cdot \left(\frac{y'(x)}{1!} \right)^{\beta_1} \dots \left(\frac{y^{[n]}(x)}{n!} \right)^{\beta_n} \end{aligned}$$

Proposition 1.2 : [01], [03]

$$\forall n \in \mathbf{N} : A_n(x) = \frac{y^{[n+1]}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad (1.1.17)$$

Démonstration :

$$A_0(x) = f(x_0, y_0(x)) = f(x_0, y(x_0)) = y'(x_0) = \frac{y^{[0+1]}(x_0)}{(0+1)!} (x - x_0)^0$$

donc la condition initiale est satisfaite.

Supposons que : $\forall i = 0, \dots, n-1 : A_i(x) = \frac{y^{[i+1]}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i$

$$\begin{aligned}
 \text{alors : } \forall i = 0, \dots, n-1 : y_{i+1}(x) &= \int_{x_0}^x A_i(t) dt \\
 &= \int_{x_0}^x \frac{y^{[i+1]}(x_0)}{i!} (t - x_0)^i dt \\
 &= \frac{y^{[i+1]}(x_0)}{(i+1)!} (x - x_0)^{i+1} \\
 A_n(x) &= \sum_{\alpha + |n \cdot \beta_n| = n} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial y^{|\beta|}} f(x_0, y_0(x)) \frac{(x - x_0)^\alpha (y_1(x))^{\beta_1} \dots (y_n(x))^{\beta_n}}{\alpha! \beta_1! \dots \beta_n!} \\
 &= \sum_{\alpha + |n \cdot \beta_n| = n} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial y^{|\beta|}} f(x_0, y(x_0)) \frac{(x - x_0)^\alpha \left(\frac{y'(x_0)}{1!} (x - x_0) \right)^{\beta_1} \dots \left(\frac{y^{[n]}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \right)^{\beta_n}}{\alpha! \beta_1! \dots \beta_n!} \\
 &= \frac{1}{n!} \sum_{\alpha + |n \cdot \beta_n| = n} \frac{n!}{\alpha! \beta_1! \dots \beta_n!} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial y^{|\beta|}} f(x_0, y(x_0)) \left(\frac{y'(x)}{1!} \right)^{\beta_1} \dots \left(\frac{y^{[n]}(x)}{n!} \right)^{\beta_n} (x - x_0)^{\alpha + \beta_1 + \dots + n\beta_n} \\
 &= \frac{1}{n!} \sum_{\alpha + |n \cdot \beta_n| = n} \frac{n!}{\alpha! \beta_1! \dots \beta_n!} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial y^{|\beta|}} f(x_0, y(x_0)) \left(\frac{y'(x)}{1!} \right)^{\beta_1} \dots \left(\frac{y^{[n]}(x)}{n!} \right)^{\beta_n} (x - x_0)^n \\
 &= \frac{1}{n!} f^{[n]}(x_0, y(x_0)) (x - x_0)^n \\
 &= \frac{y^{[n+1]}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n
 \end{aligned}$$

$$\text{alors : } A_n(x) = \frac{y^{[n+1]}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

$$\text{d'où : } \forall n \in \mathbf{N} : A_n(x) = \frac{y^{[n+1]}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Corollaire 1.1 : [01]

La solution du problème classique (*PCI*) obtenue par le schéma (1.1.7)

$$\text{coïncide avec la série entière : } y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{[n]}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad (1.1.18)$$

Démonstration :

Nous savons que : $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)$ (1.1.19)

et d'après le schéma (1.1.7) nous avons : $\forall n \in \mathbf{N} : y_n(x) = \int_{x_0}^x A_{n-1}(t) dt$

alors : $\forall n \in \mathbf{N} : y_n(x) = \int_{x_0}^x \frac{y^{[n]}(x_0)}{(n-1)!} (t - x_0)^{n-1} dt$

d'où : $\forall n \in \mathbf{N} : y_n(x) = \frac{y^{[n]}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ (1.1.20)

de (1.1.19) et (1.1.20) nous obtenons : $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{[n]}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$.

1.1.3. Convergence de la technique :

Proposition 1.3 : [02]

$$\sum_{|n \cdot \beta_n| = n} \frac{1}{\beta_1! \cdots \beta_n! 1^{\beta_1} 2^{\beta_2} \cdots n^{\beta_n}} = 1$$
 (1.1.21)

Démonstration :

On prend $\psi(x, y) = \exp(x + y)$, $\varphi_1(t) = 0$, $\varphi_2(t) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} t^i$ et $\alpha = 0$.

$$\varphi_1(0) = 0 \text{ et } \varphi_2(0) = 0$$

$$\forall m = 1, \dots, n : \varphi_1^{[m]}(t) = 0 \text{ d'où : } \frac{\varphi_1^{[m]}(0)}{m!} = 0, \forall m = 1, \dots, n$$

$$\forall m = 1, \dots, n : \varphi_2^{[m]}(t) = (m-1)! + (\dots)t + \dots + (\dots)t^{n-m}$$

$$\text{d'où : } \varphi_2^{[m]}(0) = (m-1)!, \forall m = 1, \dots, n \Rightarrow \forall m = 1, \dots, n : \frac{\varphi_2^{[m]}(0)}{m!} = \frac{1}{m}$$

$$\forall k, l \in \mathbf{N} : \frac{\partial^k}{\partial x^k} \frac{\partial^l}{\partial y^l} \psi(\varphi_1(0), \varphi_2(0)) = \exp 0 = 1$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dt^n} \exp\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} t^i\right) \Big|_{t=0} &= \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dt^n} (\psi \circ \varphi)(t) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{|n \cdot \alpha_n| + |n \cdot \beta_n| = n} \frac{n!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n! \beta_1! \cdots \beta_n!} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{|\alpha|}} \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial y^{|\beta|}} \psi(\varphi_1(0), \varphi_2(0)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left(\frac{\varphi_1'(0)}{1!} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\varphi_1^{[n]}(0)}{n!} \right)^{\alpha_n} \cdot \left(\frac{\varphi_2'(0)}{1!} \right)^{\beta_1} \dots \left(\frac{\varphi_2^{[n]}(0)}{n!} \right)^{\beta_n} \\
& = \sum_{|n \cdot \beta_n| = n} \frac{1}{\beta_1! \dots \beta_n!} \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial y^{|\beta|}} \psi(\varphi_1(0), \varphi_2(0)) \cdot \left(\frac{\varphi_2^{[1]}(0)}{1!} \right)^{\beta_1} \dots \left(\frac{\varphi_2^{[n]}(0)}{n!} \right)^{\beta_n} \\
& \quad + \sum_{\substack{|n \cdot k_n| + |n \cdot l_n| = n \\ |n \cdot l_n| \neq n}} \frac{1}{\alpha_1! \dots \alpha_n! \beta_1! \dots \beta_n!} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{|\alpha|}} \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial y^{|\beta|}} \psi(\varphi_1(0), \varphi_2(0)) \\
& \quad \cdot \left(\frac{\varphi_1'(0)}{1!} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\varphi_1^{[n]}(0)}{n!} \right)^{\alpha_n} \cdot \left(\frac{\varphi_2'(0)}{1!} \right)^{\beta_1} \dots \left(\frac{\varphi_2^{[n]}(0)}{n!} \right)^{\beta_n} \\
& = \sum_{|n \cdot \beta_n| = n} \frac{1}{\beta_1! \dots \beta_n!} \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{1} \right)^{\beta_1} \dots \left(\frac{1}{n} \right)^{\beta_n} \\
& \quad + \sum_{\substack{|n \cdot \alpha_n| + |n \cdot \beta_n| = n \\ |n \cdot \alpha_n| \neq n}} \frac{1}{\alpha_1! \dots \alpha_n! \beta_1! \dots \beta_n!} \cdot 1 \cdot 0^{\alpha_1} \dots 0^{\alpha_n} \cdot \left(\frac{1}{1} \right)^{\beta_1} \dots \left(\frac{1}{n} \right)^{\beta_n} \\
\text{d'où : } & \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dt^n} \exp \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} t^i \right) \Bigg|_{t=0} = \sum_{|n \cdot \beta_n| = n} \frac{1}{\beta_1! \dots \beta_n! \cdot 1^{\beta_1} \dots n^{\beta_n}} \tag{1.1.22}
\end{aligned}$$

D'une autre part on pose : $\gamma_m = \frac{1}{m!} \frac{d^m}{dt^m} \exp \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} t^i \right) \Bigg|_{t=0}$ il suffit de montrer

que : $\forall m \in \mathbf{N}^* : \gamma_m = 1$.

Pour : $m = 1$, $\gamma_1 = \frac{1}{1!} \frac{d}{dt} \exp \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} t^i \right) \Bigg|_{t=0} = 1$

On suppose que : $\forall j = 1, \dots, m-1 : \gamma_j = 1$ et on démontre que $\gamma_m = 1$

$$\begin{aligned}
\gamma_m & = \frac{d^m}{dt^m} \exp \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} t^i \right) \Bigg|_{t=0} = \frac{1}{m!} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \left(\frac{d}{dt} \exp \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} t^i \right) \right) \Bigg|_{t=0} \\
& = \frac{1}{m!} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \left(\left(\sum_{i=1}^n t^{i-1} \right) \exp \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} t^i \right) \right) \Bigg|_{t=0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{m!} \sum_{j=0}^{m-1} C_{m-1}^j \underbrace{\left(\frac{d^{m-1-j}}{dt^{m-1-j}} \sum_{i=1}^n t^{i-1} \right) \Big|_{t=0}}_{(m-1-j)!} \underbrace{\left(\frac{d^j}{dt^j} \exp \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} t^i \right) \right) \Big|_{t=0}}_{j! \gamma_j = j!} \\
&= \frac{1}{m!} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(m-1)!}{(m-1-j)! j!} (m-1-j)! j! \\
&= \frac{(m-1)!}{m!} \sum_{j=0}^{m-1} 1 = \frac{1}{m} m = 1
\end{aligned}$$

alors : $\forall m \in \mathbf{N}^* : \frac{1}{m!} \frac{d^m}{dt^m} \exp \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} t^i \right) \Big|_{t=0} = 1$

Pour $m = n$ nous trouvons : $\frac{1}{n!} \frac{d^n}{dt^n} \exp \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} t^i \right) \Big|_{t=0} = 1$ (1.1.23)

de (1.1.22) et (1.1.23) nous obtenons : $\sum_{|n-\beta_n|=n} \frac{1}{\beta_1! \dots \beta_n! 1^{\beta_1} 2^{\beta_2} \dots n^{\beta_n}} = 1$

Théorème 1.2 : [01], [03]

Si $\frac{\partial^k}{\partial x^k} \frac{\partial^l}{\partial y^l} f(x_0, y(x_0)) = 0$, pour tout $k \in \mathbf{N}^*, l \in \mathbf{N}$ et $\left| \frac{\partial^l}{\partial y^l} f(x_0, y(x_0)) \right| \leq M$, pour tout $l \in \mathbf{N}$, alors la série solution de (PCI) est absolument convergente dans l'intervalle $\left] x_0 - \frac{1}{M}, x_0 + \frac{1}{M} \right[$ et l'on a : $|y_n(x_0)| \leq \frac{M^n |x - x_0|^n}{n}$ (1.1.24)

Démonstration :

Nous savons que $\forall n \in \mathbf{N} : y_n(x) = \frac{y^{[n]}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$

alors : $|y_n(x)| = \frac{|y^{[n]}(x_0)|}{n!} |x - x_0|^n, \forall n \in \mathbf{N}$

donc il suffit de montrer que : $\frac{|y^{[n]}(x_0)|}{n!} \leq \frac{M^n}{n}$

Pour $n = 1$: $\frac{|y'(x_0)|}{1!} = |f(x_0, y(x_0))| \leq M = \frac{M^1}{1}$

alors la condition initiale est satisfaite

Supposons que pour tout $i = 1, \dots, n$ nous avons : $\frac{|y^{[i]}(x_0)|}{i!} \leq \frac{M^i}{i}$

$$\begin{aligned}
 |y^{[n+1]}(x_0)| &= |f^{[n]}(x_0, y(x_0))| \\
 &= \left| \sum_{\alpha + |n \cdot \beta_n| = n} \frac{n!}{\alpha! \beta_n!} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^{|\beta_n|}}{\partial y^{|\beta_n|}} f(x_0, y(x_0)) \left(\frac{y'(x_0)}{1!} \right)^{\beta_1} \dots \left(\frac{y^{[n]}(x_0)}{n!} \right)^{\beta_n} \right| \\
 &\leq \sum_{\alpha + |n \cdot \beta_n| = n} \frac{n!}{\alpha! \beta_n!} \left| \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^{|\beta_n|}}{\partial y^{|\beta_n|}} f(x_0, y(x_0)) \right| \left(\frac{|y'(x_0)|}{1!} \right)^{\beta_1} \dots \left(\frac{|y^{[n]}(x_0)|}{n!} \right)^{\beta_n} \\
 &= \sum_{|n \cdot \beta_n| = n} \frac{n!}{\beta_n!} \left| \frac{\partial^{|\beta_n|}}{\partial y^{|\beta_n|}} f(x_0, y(x_0)) \right| \left(\frac{|y'(x_0)|}{1!} \right)^{\beta_1} \dots \left(\frac{|y^{[n]}(x_0)|}{n!} \right)^{\beta_n} \\
 &\quad + \sum_{\substack{\alpha + |n \cdot \beta_n| = n \\ \alpha \neq 0}} \frac{n!}{\alpha! \beta_n!} \left| \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^{|\beta_n|}}{\partial y^{|\beta_n|}} f(x_0, y(x_0)) \right| \left(\frac{|y'(x_0)|}{1!} \right)^{\beta_1} \dots \left(\frac{|y^{[n]}(x_0)|}{n!} \right)^{\beta_n} \\
 &\leq \sum_{|n \cdot \beta_n| = n} \frac{n!}{\beta_n!} M \left(\frac{M}{1} \right)^{\beta_1} \dots \left(\frac{M^n}{n} \right)^{\beta_n} + \sum_{\substack{\alpha + |n \cdot \beta_n| = n \\ \alpha \neq 0}} \frac{n!}{\alpha! \beta_n!} \cdot 0 \cdot \left(\frac{M}{1} \right)^{\beta_1} \dots \left(\frac{M^n}{n} \right)^{\beta_n}
 \end{aligned}$$

$$\text{alors : } |y^{[n+1]}(x_0)| \leq n! \cdot M^{n+1} \sum_{|n \cdot \beta_n| = n} \frac{1}{\beta_1! \dots \beta_n! \cdot 1^{\beta_1} \dots n^{\beta_n}} = n! M^{n+1} \cdot 1 = n! M^{n+1}$$

$$\text{donc : } \frac{|y^{[n+1]}(x_0)|}{(n+1)!} \leq \frac{n! M^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{M^{n+1}}{n+1}$$

$$\text{d'où : } \forall n \in \mathbf{N} : |y_n(x_0)| \leq \frac{M^n |x - x_0|^n}{n}$$

La série solution $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)$ est absolument convergente si et seulement

si la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n}{n} |x - x_0|^n$ est convergente

D'après D'ALEMBERT : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{M^{n+1}}{(n+1)} |x - x_0|^{n+1}}{\frac{M^n}{n} |x - x_0|^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nM}{n+1} |x - x_0| = M |x - x_0| < 1$

alors : $|x - x_0| < \frac{1}{M}$ d'où : $x \in \left] x_0 - \frac{1}{M}, x_0 + \frac{1}{M} \right[$

1.2.Principe de la méthode décompositionnelle itérative :

Étant donné le problème $(\mathcal{PCI}_0)$ défini par :

$$(\mathcal{PCI}_0): \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & \text{pour : } x \in [x_0, x_0 + \theta] \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

où : y est C^∞ au voisinage de x_0 et f est C^∞ au voisinage de (x_0, y_0) .

En subdivisant l'intervalle $[x_0, x_0 + \theta]$ d'une manière équidistante par des arguments $x_0 < \dots < x_N = x_0 + \theta$ où : $x_{k+1} = x_k + h, \forall k = 1, \dots, N$ avec $h = \frac{\theta}{N}$.

La méthode décompositionnelle itérative consiste à calculer la solution sous la forme des valeurs approchées $y_0, \dots, y_N$ à partir des arguments $x_0, \dots, x_N$.

1.2.1. Présentation de la méthode décompositionnelle itérative :

Considérons le problème classique $(\mathcal{PCI}_0)$:

$$(\mathcal{PCI}_0) \Leftrightarrow y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \quad (1.2.1)$$

Nous décomposons respectivement : $y(x)$ et $f(x, y(x))$ sous les forme :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n^{(0)}(x) \quad (1.2.2)$$

$$f(x, y(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(0)}(x) \quad (1.2.3)$$

En remplaçant (1.2.2) et (1.2.3) dans (1.2.1), nous obtenons :

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n^{(0)}(x) = y(x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_0}^x A_n^{(0)}(t) dt \quad (1.2.4)$$

Ceci conduit à l'algorithme suivant :

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + h \\ y_0^{(0)}(x) = y(x_0) \\ y_1^{(0)}(x) = \int_{x_0}^x A_0^{(0)}(t) dt \\ \vdots \\ y_m^{(0)}(x) = \int_{x_0}^x A_{m-1}^{(0)}(t) dt \\ y_1 = \sum_{i=0}^m y_i^{(0)}(x_1) \end{cases} \quad (1.2.5)$$

Pour $k = 1, \dots, N$, on considère le problème (PCI_k) défini par :

$$(PCI_k): \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & \text{pour : } x \in [x_0, x_0 + \theta] \\ y(x_k) = y_k \end{cases}$$

$$(PCI_k) \Leftrightarrow y(x) = y(x_k) + \int_{x_k}^x f(t, y(t)) dt \quad (1.2.6)$$

Nous décomposons respectivement : $y(x)$ et $f(x, y(x))$ sous les forme :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n^{(k)}(x) \quad (1.2.7)$$

$$f(x, y(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(k)}(x) \quad (1.2.8)$$

En remplaçant (1.2.7) et (1.2.8) dans (1.2.6), nous obtenons :

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n^{(k)}(x) = y(x_k) + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_k}^x A_n^{(k)}(t) dt \quad (1.2.9)$$

On est donc amené à considérer l'algorithme suivant :

$$\begin{cases}
 x_{k+1} = x_k + h \\
 y_0^{(k)}(x) = y(x_k) \\
 y_1^{(k)}(x) = \int_{x_k}^x A_0^{(k)}(t) dt \\
 \vdots \\
 y_m^{(k)}(x) = \int_{x_k}^x A_{m-1}^{(k)}(t) dt \\
 y_{k+1} = \sum_{i=0}^m y_i^{(k)}(x_{k+1})
 \end{cases} \quad (1.2.10)$$

Remarque 1.1 :

Les polynômes d'ADOMIAN sont donnés par les formules suivantes :

$$A_n^{(k)}(x) = \sum_{\alpha + |n - \beta_n| = n} \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial y^{|\beta|}} f(x_k, y_0^{(k)}(x)) \cdot \frac{(x - x_k)^\alpha (y_1^{(k)}(x))^{\beta_1} \cdots (y_n^{(k)}(x))^{\beta_n}}{\alpha! \beta_1! \cdots \beta_n!} \right) \quad (1.2.11)$$

1.3. Application de la méthode décompositionnelle aux P. C. L. du 2^{ème} degré :

Étant donné le problème ($\mathcal{PCL}$) défini par :

$$(\mathcal{PCL}) : \begin{cases} y''(x) = g(x)y'(x) + f(x, y(x)) & \text{pour : } x \in [x_0, x_L] \\ y(x_0) = y_0 \\ y(x_L) = y_L \end{cases}$$

où : f , y et g sont des fonctions analytiques.

$$(\mathcal{PCL}) \Leftrightarrow y''(x) = g(x)y'(x) + f(x, y(x)) \quad (1.3.1)$$

Une intégration de (1.3.1) donne :

$$\begin{aligned}
 \int_x^{x_L} y''(t) dt &= \int_x^{x_L} g(t)y'(t) dt + \int_x^{x_L} f(t, y(t)) dt \\
 \Leftrightarrow y'(x) &= y'(x_L) - g(x_L)y_L + g(x)y(x) + \int_x^{x_L} g'(t)y(t) dt - \int_x^{x_L} f(t, y(t)) dt \quad (1.3.2)
 \end{aligned}$$

Une nouvelle intégration de (1.3.2) conduit à :

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x y'(t)dt &= \int_{x_0}^x (y'(x_L) - g(x_L)y_L)dt + \int_{x_0}^x g(t)y(t)dt + \int_{x_0}^x \int_t^{x_L} g'(s)y(s)dsdt \\ &\quad - \int_{x_0}^x \int_t^{x_L} f(s,y(s))dsdt \\ \Leftrightarrow y(x) &= y_0 + (y'(x_L) - g(x_L)y_L)(x - x_0) + \int_{x_0}^x g(t)y(t)dt + \int_{x_0}^x \int_t^{x_L} g'(s)y(s)dsdt \\ &\quad - \int_{x_0}^x \int_t^{x_L} f(s,y(s))dsdt \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

Remarque 1.2 : [06]

Dans la forme (1.3.3), $y'(x_L)$ est inconnu, cela ne nous permet pas d'appliquer la méthode décompositionnelle. Nous changeons la forme de (1.3.3) en écrivant $y'(x_L)$ sous la forme :

$$y'(x_L) = \sum_{l=0}^{\infty} \delta_l, \quad \delta_l \in \mathbf{R}, \quad \forall l \in \mathbf{N}.$$

$$\begin{aligned} (1.3.3) \Leftrightarrow y(x) &= y_0 + \left(\sum_{l=0}^{\infty} \delta_l - g(x_L)y_L \right) (x - x_0) + \int_{x_0}^x g(t)y(t)dt + \int_{x_0}^x \int_t^{x_L} g'(s)y(s)dsdt \\ &\quad - \int_{x_0}^x \int_t^{x_L} f(s,y(s))dsdt \\ \Leftrightarrow y(x) &= y_0 + (\delta_0 - g(x_L)y_L)(x - x_0) + \left(\sum_{l=1}^{\infty} \delta_l \right) (x - x_0) + \int_{x_0}^x g(t)y(t)dt \\ &\quad + \int_{x_0}^x \int_t^{x_L} g'(s)y(s)dsdt - \int_{x_0}^x \int_t^{x_L} f(s,y(s))dsdt \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

La méthode décompositionnelle consiste à décomposer, respectivement, $y(x)$ et $f(x,y(x))$ sous les formes suivantes:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) \quad (1.3.5)$$

$$f(x,y(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \quad (1.3.6)$$

En remplaçant les relations (1.3.5) et (1.3.6) dans (1.3.4) nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) &= y_0 + (\delta_0 - g(x_L)y_L)(x - x_0) + \left(\sum_{l=1}^{\infty} \delta_l \right) (x - x_0) + \int_{x_0}^x g(t) \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t) dt \\
 &\quad + \int_{x_0}^x \int_t^{x_L} g'(s) \sum_{n=0}^{\infty} y_n(s) ds dt - \int_{x_0}^x \int_t^{x_L} \sum_{n=0}^{\infty} A_n(s) ds dt \\
 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) &= y_0 + (\delta_0 - g(x_L)y_L)(x - x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\delta_{n+1} (x - x_0) + \int_{x_0}^x g(t) y_n(t) dt \right. \\
 &\quad \left. + \int_{x_0}^x \int_t^{x_L} g'(s) y_n(s) ds dt - \int_{x_0}^x \int_t^{x_L} A_n(s) ds dt \right) \tag{1.3.7}
 \end{aligned}$$

Les termes de la série $\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)$ sont identifiés par les formules :

$$\begin{cases}
 y_0(x) = y_0 + (\delta_0 - g(x_L)y_L)(x - x_0) \\
 y_1(x) = \delta_1(x - x_0) + \int_{x_0}^x g(t)y_0(t)dt + \int_{x_0}^x \int_t^{x_L} g'(s)y_0(s)dsdt - \int_{x_0}^x \int_t^{x_L} A_0(s)dsdt \\
 \vdots \\
 y_{n+1}(x) = \delta_{n+1}(x - x_0) + \int_{x_0}^x g(t)y_n(t)dt + \int_{x_0}^x \int_t^{x_L} g'(s)y_n(s)dsdt - \int_{x_0}^x \int_t^{x_L} A_n(s)dsdt \\
 \vdots
 \end{cases}$$

La solution approchée est donnée par : $\phi_n(x) = \sum_{i=1}^{n-1} y_i(x)$ (1.3.8)

Remarque 1.3 : [06]

- 1) Si $y_0(x_0) = y_0$ alors $\phi_0(x_0) = y_0$ et si $y_i(x_0) = 0, \forall i = 1, \dots, n$ alors $\phi_n(x_0) = y_0$.
- 2) Si $y_0(x_L) = y_L$ alors $\phi_0(x_L) = y_L$ et si $y_i(x_L) = 0, \forall i = 1, \dots, n$ alors $\phi_n(x_L) = y_L$.

Remarque 1.4 : [06]

les $\delta_i, i = 0, \dots, n$ sont obtenus par : $y_0(x_L) = y_L$ et $y_i(x_L) = 0, \forall i = 1, \dots, n$.

Chapitre 02

*Étude comparative de la méthode
décompositionnelle itérative pour la résolution
de quelques problèmes aux conditions initiales
du 1^{er} degré*

- 2.1) *La résolution numérique des P. C. I. du 1^{er} degré*
- 2.2) *La comparaison avec les méthodes numériques à un pas*
- 2.3) *La comparaison avec les méthodes numériques à pas multiples*

Dans ce chapitre, nous rappelons la résolution des problèmes aux conditions initiales du 1^{er} degré avec la méthode décompositionnelle itérative et les autres méthodes numériques classiques, après nous comparons cette méthode avec quelques méthodes numériques à un pas comme celle d'EULER, de TAYLOR et de RUNGE – KUTTA « classique ». Enfin nous comparons la méthode avec quelques méthodes numériques à pas multiples comme celle de MILNE et d'ADAMS.

2.1. La résolution numérique des P. C. I. du 1^{er} degré :

Considérons le problème (PCI) définie par :

$$(PCI): \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & \text{pour : } x \in [x_0, x_0 + \theta] \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

✚ On supposera toujours que :

- $f \in C^\infty([x_0, x_0 + \theta] \times \mathbf{R})$ et $y \in C^\infty([x_0, x_0 + \theta])$.
- L'intervalle $[x_0, x_0 + \theta]$ est subdivisé d'une manière équidistante par des argument $x_0 < \dots < x_N = x_0 + \theta$ où : $x_{k+1} = x_k + h, \forall k = 1, \dots, N$
avec $h = \frac{\theta}{N}$.
- p est la solution exacte de (PCI) .
- E_k est l'erreur de la troncature globale : $E_k = p(x_k) - y_k$ (2.1.1)

✚ Les méthodes qu'on va présenter consistent à déterminer les valeurs approchées $y_0, y_1, \dots, y_N$ de la fonction y aux arguments : $x_0, x_1, \dots, x_N$.

2.1.1. La résolution par les méthodes à un pas :

Considérons toujours le problème classique (PCI) :

Algorithme 2.1 : « EULER » [07], [08], [09], [10]

$$\forall k = 0, \dots, N-1 : y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) \quad (2.1.2)$$

Algorithme 2.2 : « L'algorithme de TAYLOR d'ordre m » [07], [08], [09]

$$\forall k = 0, \dots, N-1 : y_{k+1} = y_k + \sum_{i=1}^m \frac{h^i}{i!} f^{[i-1]}(x_k, y_k) \quad (2.1.3)$$

Remarque 2.1 :

Pour tout $x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$, nous avons :

$$1) f^{[n+1]}(x, y(x)) = Df^{[n]}(x, y(x))(1, f(x, y(x))) \quad (2.1.5)$$

$$2) f^{[n]}(x, y(x)) = \sum_{\alpha + \beta_1 + \dots + n\beta_n = n} \frac{n!}{\alpha! \beta_1! \dots \beta_n!} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^{\beta_1 + \dots + \beta_n}}{\partial y^{\beta_1 + \dots + \beta_n}} f(x, y(x)) \cdot \left(\frac{f(x, y(x))}{1!} \right)^{\beta_1} \dots \left(\frac{f^{[n-1]}(x, y(x))}{n!} \right)^{\beta_n} \quad (2.1.6)$$

Algorithme 2.3 : « L'algorithme de RUNGE – KUTTA » [07], [08], [09], [10]

$$\forall k = 0, \dots, N-1 : \begin{cases} k_1^{(k)} = hf(x_k, y_k) \\ k_2^{(k)} = hf\left(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}k_1^{(k)}\right) \\ k_3^{(k)} = hf\left(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}k_2^{(k)}\right) \\ k_4^{(k)} = hf(x_k + h, y_k + k_3^{(k)}) \\ y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(k_1^{(k)} + 2k_2^{(k)} + 2k_3^{(k)} + k_4^{(k)}) \end{cases} \quad (2.1.7)$$

2.1.2. La résolution par les méthodes à pas multiples :

Considérons toujours le problème classique ($\mathcal{PCI}$) :

Algorithme 2.4 : « L'algorithme de MILNE » [07]

➤ y_1, y_2, y_3 sont calculés par la méthode de TAYLOR.

$$\text{➤ Pour } k = 3, \dots, N-1 : y_{k+1} = y_{k-3} + \frac{4h}{3}(2y'_{k-2} - y'_{k-1} + 2y'_k) \quad (2.1.8)$$

$$\text{où : } \forall k = 0, \dots, N : y'_k = f(x_k, y_k) \quad (2.1.9)$$

Algorithme 2.5 : « L'algorithme d'ADAMS » [07], [08], [09], [10]

➤ y_1, y_2, y_3 sont calculés par la méthode de TAYLOR.

➤ Pour $k = 3, \dots, N$:

$$\begin{cases} \bar{y}_{k+1} = y_k + \frac{h}{24} (55y'_k - 59y'_{k-1} + 37y'_{k-2} - 9y'_{k-3}) \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24} (9\bar{y}'_{k+1} + 19y'_k - 5y'_{k-1} + y'_{k-2}) \end{cases} \quad (2.1.10)$$

où : $\forall k = 0, \dots, N : y'_k = f(x_k, y_k)$ et $\bar{y}'_{k+1} = f(x_{k+1}, \bar{y}_{k+1})$ (2.1.11)

$\bar{y}_k$ est une prédiction et y_k est une correction.

2.1.3. La résolution par la méthode décompositionnelle itérative :

Considérons toujours le problème classique (PCI) :

Algorithme 2.6 :

$$\forall k = 0, \dots, N : \begin{cases} x_{k+1} = x_k + h \\ y_0^{(k)}(x) = y(x_k) \\ y_1^{(k)}(x) = \int_{x_k}^x A_0^{(k)}(t) dt \\ \vdots \\ y_m^{(k)}(x) = \int_{x_k}^x A_{m-1}^{(k)}(t) dt \\ y_{k+1} = \sum_{i=0}^m y_i^{(k)}(x_{k+1}) \end{cases} \quad (2.1.12)$$

Remarque 2.2 :

Les polynômes d'ADOMIAN sont donnés par les formules suivantes :

$$A_n^{(k)}(x) = \sum_{\alpha + \beta_1 + \dots + \beta_n = n} \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^{\beta_1 + \dots + \beta_n}}{\partial y^{\beta_1 + \dots + \beta_n}} f(x_k, y_0^{(k)}(x)) \cdot \frac{(x - x_k)^\alpha (y_1^{(k)}(x))^{\beta_1} \dots (y_n^{(k)}(x))^{\beta_n}}{\alpha! \beta_1! \dots \beta_n!} \right) \quad (2.1.13)$$

2.2. Comparaison avec les méthodes numériques à un pas :

Dans tout ce qui suite nous considérons le problème classique (PCI) :

2.2.1. Comparaison avec la méthode d'EULER :

Nous utilisons dans cette comparaison la méthode décompositionnelle itérative du 1^{er} ordre.

$$\text{Nous avons pour } k = 0, \dots, N : \begin{cases} x_{k+1} = x_k + h \\ y_0^{(k)}(x) = y(x_k) \\ y_1^{(k)}(x) = \int_{x_k}^x A_0^{(k)}(t) dt \\ y_{k+1} = y_0^{(k)}(x_{k+1}) + y_1^{(k)}(x_{k+1}) \end{cases} \quad (2.2.1)$$

D'après (2.2.1) nous avons :

$$y_0^{(k)}(x) = y(x_k) \quad (2.2.2)$$

$$A_0^{(k)}(x) = f(x_k, y_0^{(k)}(x)) = f(x_k, y(x_k))$$

$$y_1^{(k)}(x) = \int_{x_k}^x A_0^{(k)}(t) dt = \int_{x_k}^x f(x_k, y(x_k)) dt = (x - x_k) f(x_k, y(x_k))$$

$$\text{d'où : } y_1^{(k)}(x) = (x - x_k) f(x_k, y(x_k)) \quad (2.2.3)$$

$$y_{k+1} = y_0^{(k)}(x_{k+1}) + y_1^{(k)}(x_{k+1}) \quad (2.2.4)$$

En remplaçant (2.2.2) et (2.2.3) dans (2.2.4) nous obtenons :

$$y_{k+1} = y(x_k) + (x_{k+1} - x_k) f(x_k, y(x_k))$$

$$\text{d'où : } y_{k+1} = y_k + h f(x_k, y_k) \quad (2.2.5)$$

Conséquence 2.1 :

La méthode décompositionnelle itérative du 1^{er} ordre se réduit à celle d'EULER.

2.2.2. Comparaison avec la méthode de TAYLOR d'ordre m :

Nous allons dans cette comparaison utiliser la méthode décompositionnelle itérative d'ordre m , nous avons pour $k = 0, \dots, N$:

$$\begin{cases}
 x_{k+1} = x_k + h \\
 y_0^{(k)}(x) = y(x_k) \\
 y_1^{(k)}(x) = \int_{x_k}^x A_0^{(k)}(t) dt \\
 \vdots \\
 y_m^{(k)}(x) = \int_{x_k}^x A_{m-1}^{(k)}(t) dt \\
 y_{k+1} = \sum_{i=0}^m y_i^{(k)}(x_{k+1})
 \end{cases} \quad (2.2.6)$$

d'après (2.2.6) nous avons :

$$y_0^{(k)}(x) = y(x_k) \quad (2.2.7)$$

$$A_0^{(k)}(x) = f(x_k, y_0^{(k)}(x)) = f(x_k, y(x_k))$$

$$y_1^{(k)}(x) = \int_{x_k}^x A_0^{(k)}(t) dt = \int_{x_k}^x f(x_k, y(x_k)) dt = (x - x_k) f(x_k, y(x_k))$$

$$\text{d'où : } y_1^{(k)}(x) = f(x_k, y(x_k))(x - x_k)$$

Supposons que pour tout $i = 2, \dots, n$, nous avons :

$$y_i^{(k)}(x) = \frac{1}{i!} f^{[i-1]}(x_k, y(x_k))(x - x_k)^i$$

$$\begin{aligned}
 A_n^{(k)}(x) &= \sum_{\alpha + \beta_1 + \dots + n\beta_n = n} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^{\beta_1 + \dots + \beta_n}}{\partial y^{\beta_1 + \dots + \beta_n}} f(x_k, y_0^{(k)}(x)) \\
 &\quad \cdot \frac{(x - x_k)^\alpha (y_1^{(k)}(x))^{\beta_1} \dots (y_n^{(k)}(x))^{\beta_n}}{\alpha! \beta_1! \dots \beta_n!} \\
 &= \sum_{\alpha + \beta_1 + \dots + n\beta_n = n} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^{\beta_1 + \dots + \beta_n}}{\partial y^{\beta_1 + \dots + \beta_n}} f(x_k, y(x_k)) \\
 &\quad \cdot \frac{(x - x_k)^\alpha \left(\frac{f(x_k, y(x_k))}{1!} (x - x_k) \right)^{\beta_1} \dots \left(\frac{f^{[n-1]}(x_k, y(x_k))}{n!} (x - x_k)^n \right)^{\beta_n}}{\alpha! \beta_1! \dots \beta_n!} \\
 &= \frac{1}{n!} \sum_{\alpha + \beta_1 + \dots + n\beta_n = n} \frac{n!}{\alpha! \beta_1! \dots \beta_n!} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^{\beta_1 + \dots + \beta_n}}{\partial y^{\beta_1 + \dots + \beta_n}} f(x_k, y(x_k)) \\
 &\quad \cdot \left(\frac{f(x_k, y(x_k))}{1!} \right)^{\beta_1} \dots \left(\frac{f^{[n-1]}(x_k, y(x_k))}{n!} \right)^{\beta_n} (x - x_k)^{\alpha + \beta_1 + \dots + n\beta_n}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n!} \left(\sum_{\alpha+\beta_1+\dots+\beta_n=n} \frac{n!}{\alpha!\beta_1!\dots\beta_n!} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^{\beta_1+\dots+\beta_n}}{\partial y^{\beta_1+\dots+\beta_n}} f(x_k, y(x_k)) \right. \\
&\quad \cdot \left(\frac{f(x_k, y(x_k))}{1!} \right)^{\beta_1} \dots \left(\frac{f^{[n-1]}(x_k, y(x_k))}{n!} \right)^{\beta_n} \Big) (x - x_k)^n \\
&= \frac{1}{n!} f^{[n]}(x_k, y(x_k)) (x - x_k)^n
\end{aligned}$$

$$\text{d'où : } A_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n!} f^{[n]}(x_k, y(x_k)) (x - x_k)^n$$

$$\begin{aligned}
y_{n+1}^{(k)}(x) &= \int_{x_k}^x A_n^{(k)}(t) dt \\
&= \int_{x_k}^x \frac{1}{n!} f^{[n]}(x_k, y(x_k)) (t - x_k)^n dt \\
&= \frac{1}{(n+1)!} f^{[n]}(x_k, y(x_k)) (x - x_k)^{n+1}
\end{aligned}$$

$$\text{alors : } \forall n = 1, \dots, m : y_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n!} f^{[n-1]}(x_k, y(x_k)) (x - x_k)^n \quad (2.2.8)$$

$$y_{k+1} = \sum_{i=0}^m y_i^{(k)}(x_{k+1})$$

$$\text{alors : } y_{k+1} = y_0^{(k)}(x_{k+1}) + \sum_{i=1}^m y_i^{(k)}(x_{k+1}) \quad (2.2.9)$$

En remplaçant (2.2.7) et (2.2.8) dans (2.2.9) nous obtenons :

$$\begin{aligned}
y_{k+1} &= y(x_k) + \sum_{i=1}^m \frac{1}{i!} f^{[i-1]}(x_k, y(x_k)) (x_{k+1} - x_k)^i \\
&= y(x_k) + \sum_{i=1}^m \frac{1}{i!} f^{[i-1]}(x_k, y_k) h^i
\end{aligned}$$

$$\text{d'où : } y_{k+1} = y_k + \sum_{i=1}^m \frac{h^i}{i!} f^{[i-1]}(x_k, y_k) \quad (2.2.10)$$

Conséquence 2.1 :

La méthode décompositionnelle itérative se réduit à celle de TAYLOR.

2.2.3. Comparaison avec la méthode classique de RUNGE – KUTTA :

En utilisant la méthode décompositionnelle itérative de 4^{ème} ordre.

$$\text{Nous avons pour } k = 0, \dots, N: \begin{cases} y_0^{(k)}(x) = y(x_k) \\ y_1^{(k)}(x) = \int_{x_k}^x A_0^{(k)}(t) dt \\ y_2^{(k)}(x) = \int_{x_k}^x A_1^{(k)}(t) dt \\ y_3^{(k)}(x) = \int_{x_k}^x A_2^{(k)}(t) dt \\ y_4^{(k)}(x) = \int_{x_k}^x A_3^{(k)}(t) dt \\ y_{k+1} = \sum_{i=0}^4 y_i^{(k)}(x_{k+1}) \end{cases} \quad (2.2.11)$$

d'après (2.2.11) nous avons :

$$y_0^{(k)}(x) = y(x_k) \quad (2.2.12)$$

$$y_{k+1} = y_0^{(k)}(x_{k+1}) + y_1^{(k)}(x_{k+1}) + y_2^{(k)}(x_{k+1}) + y_3^{(k)}(x_{k+1}) + y_4^{(k)}(x_{k+1}) \quad (2.2.13)$$

d'après (2.2.13) nous avons :

$$\forall n = 1, 2, 3, 4 : y_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n!} f^{[n-1]}(x_k, y(x_k))(x - x_k)^n \quad (2.2.14)$$

En remplaçant (2.2.12) et (2.2.14) dans (2.2.13) nous obtenons :

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y(x_k) + f(x_k, y(x_k))(x_{k+1} - x_k) + \frac{1}{2!} f^{[1]}(x_k, y(x_k))(x_{k+1} - x_k)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!} f^{[2]}(x_k, y(x_k))(x_{k+1} - x_k)^3 + \frac{1}{4!} f^{[3]}(x_k, y(x_k))(x_{k+1} - x_k)^4 \\ &= y(x_k) + f(x_k, y(x_k))h + \frac{1}{2!} f^{[1]}(x_k, y(x_k))h^2 + \frac{1}{3!} f^{[2]}(x_k, y(x_k))h^3 \\ &\quad + \frac{1}{4!} f^{[3]}(x_k, y(x_k))h^4 \\ &= y(x_k) + \frac{1}{6} \left(6f(x_k, y(x_k))h + 3f^{[1]}(x_k, y(x_k))h^2 + f^{[2]}(x_k, y(x_k))h^3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} f^{[3]}(x_k, y(x_k))h^4 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= y(x_k) + \frac{1}{6} \left(hf(x_k, y(x_k)) \right. \\
&\quad + 2h \left(f(x_k, y(x_k)) + \frac{h}{2} f^{[1]}(x_k, y(x_k)) \right) \\
&\quad + 2h \left(f(x_k, y(x_k)) + \frac{h}{2} f^{[1]}(x_k, y(x_k)) + \frac{h^2}{4} f^{[2]}(x_k, y(x_k)) \right) \\
&\quad + h \left(f(x_k, y(x_k)) + hf^{[1]}(x_k, y(x_k)) + \frac{h^2}{2} f^{[2]}(x_k, y(x_k)) \right. \\
&\quad \quad \left. \left. + \frac{h^3}{4} f^{[3]}(x_k, y(x_k)) \right) \right) \\
&= y(x_k) + \frac{1}{6} (R_1^{(k)} + 2R_2^{(k)} + 2R_3^{(k)} + R_4^{(k)}) \tag{2.2.14}
\end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned}
R_1^{(k)} &= hf(x_k, y(x_k)) \\
R_2^{(k)} &= h \left(f(x_k, y(x_k)) + \frac{h}{2} f^{[1]}(x_k, y(x_k)) \right) \\
R_3^{(k)} &= h \left(f(x_k, y(x_k)) + \frac{h}{2} f^{[1]}(x_k, y(x_k)) + \frac{h^2}{4} f^{[2]}(x_k, y(x_k)) \right) \\
R_4^{(k)} &= h \left(f(x_k, y(x_k)) + hf^{[1]}(x_k, y(x_k)) + \frac{h^2}{2} f^{[2]}(x_k, y(x_k)) + \frac{h^3}{4} f^{[3]}(x_k, y(x_k)) \right)
\end{aligned}$$

✚ Supposons que le problème (PCI) est linéaire, nous avons :

$$\begin{aligned}
R_1^{(k)} &= hf(x_k, y(x_k)) \\
\text{d'où : } R_1^{(k)} &= k_1^{(k)} \tag{2.2.15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_2^{(k)} &= h \left(f(x_k, y(x_k)) + \frac{h}{2} f^{[1]}(x_k, y(x_k)) \right) \\
&= h \left(f(x_k, y(x_k)) + Df(x_k, y(x_k)) \left(\frac{h}{2}, \frac{hf(x_k, y(x_k))}{2} \right) \right) \\
&= hf \left(x_k + \frac{h}{2}, y(x_k) + \frac{hf(x_k, y(x_k))}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$= hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y(x_k) + \frac{k_1^{(k)}}{2}\right)$$

$$\text{d'où : } R_2^{(k)} = k_2^{(k)} \quad (2.2.16)$$

$$\begin{aligned} R_3^{(k)} &= h\left(f(x_k, y(x_k)) + \frac{h}{2} f^{[1]}(x_k, y(x_k)) + \frac{h^2}{4} f^{[2]}(x_k, y(x_k))\right) \\ &= h\left(f(x_k, y(x_k)) + \frac{h}{2} \left(f^{[1]}(x_k, y(x_k)) + \frac{h}{2} f^{[2]}(x_k, y(x_k))\right)\right) \\ &= h\left(f(x_k, y(x_k)) + \frac{h}{2} \left(f^{[1]}(x_k, y(x_k)) + Df^{[1]}(x_k, y(x_k)) \left(\frac{h}{2}, \frac{h}{2} f(x_k, y(x_k))\right)\right)\right) \\ &= h\left(f(x_k, y(x_k)) + \frac{h}{2} f^{[1]}\left(x_k + \frac{h}{2}, y(x_k) + \frac{h}{2} f(x_k, y(x_k))\right)\right) \\ &= h\left(f(x_k, y(x_k)) + Df(x_k, y(x_k)) \left(\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \left(f(x_k, y(x_k)) + \frac{h}{2} f^{[1]}(x_k, y(x_k))\right)\right)\right) \\ &= hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y(x_k) + \frac{h}{2} \left(f(x_k, y(x_k)) + \frac{h}{2} f^{[1]}(x_k, y(x_k))\right)\right) \\ &= hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y(x_k) + \frac{R_2^{(k)}}{2}\right) \\ &= hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y(x_k) + \frac{k_2^{(k)}}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } R_3^{(k)} = k_3^{(k)} \quad (2.2.17)$$

$$\begin{aligned} R_4^{(k)} &= h\left(f(x_k, y(x_k)) + hf^{[1]}(x_k, y(x_k)) + \frac{h^2}{2} f^{[2]}(x_k, y(x_k)) + \frac{h^3}{4} f^{[3]}(x_k, y(x_k))\right) \\ &= h\left(f(x_k, y(x_k)) + h\left(f^{[1]}(x_k, y(x_k)) + \frac{h}{2} \left(f^{[2]}(x_k, y(x_k)) + \frac{h}{2} f^{[3]}(x_k, y(x_k))\right)\right)\right) \\ &= h\left(f(x_k, y(x_k)) + h\left(f^{[1]}(x_k, y(x_k)) + \frac{h}{2} \left(f^{[2]}(x_k, y(x_k)) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + Df^{[2]}(x_k, y(x_k)) \left(\frac{h}{2}, \frac{h}{2} f(x_k, y(x_k))\right)\right)\right)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= h \left(f(x_k, y(x_k)) + h \left(f^{[1]}(x_k, y(x_k)) + \frac{h}{2} f^{[2]} \left(x_k + \frac{h}{2}, y(x_k) + \frac{h}{2} f(x_k, y(x_k)) \right) \right) \right) \\
&= h \left(f(x_k, y(x_k)) + h \left(f^{[1]}(x_k, y(x_k)) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + Df^{[1]}(x_k, y(x_k)) \left(\frac{h}{2}, \frac{h}{2} f(x_k, y(x_k)) + \frac{h^2}{4} f^{[1]}(x_k, y(x_k)) \right) \right) \right) \\
&= h \left(f(x_k, y(x_k)) + hf^{[1]} \left(x_k + \frac{h}{2}, y(x_k) + \frac{h}{2} f(x_k, y(x_k)) + \frac{h^2}{4} f^{[1]}(x_k, y(x_k)) \right) \right) \\
&= h \left(f(x_k, y(x_k)) \right. \\
&\quad \left. + Df(x_k, y(x_k)) \left(h, h \left(f(x_k, y(x_k)) + \frac{h}{2} f^{[1]}(x_k, y(x_k)) + \frac{h^2}{4} f^{[2]}(x_k, y(x_k)) \right) \right) \right) \\
&= hf \left(x_k + h, y(x_k) + h \left(f(x_k, y(x_k)) + \frac{h}{2} f^{[1]}(x_k, y(x_k)) + \frac{h^2}{4} f^{[2]}(x_k, y(x_k)) \right) \right) \\
&= hf(x_k + h, y(x_k) + R_3^{(k)}) \\
&= hf(x_k + h, y(x_k) + k_3^{(k)})
\end{aligned}$$

$$\text{d'où : } R_4^{(k)} = k_4^{(k)} \quad (2.2.18)$$

En remplaçant (2.2.15), (2.2.16), (2.2.17) et (2.2.18) dans (2.2.14) nous

$$\text{obtenons : } y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6} (k_1^{(k)} + 2k_2^{(k)} + 2k_3^{(k)} + k_4^{(k)}) \quad (2.2.19)$$

$$\text{où : } \forall k = 0, \dots, N-1 : \begin{cases} k_1^{(k)} = hf(x_k, y_k) \\ k_2^{(k)} = hf \left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_1^{(k)}}{2} \right) \\ k_3^{(k)} = hf \left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_2^{(k)}}{2} \right) \\ k_4^{(k)} = hf(x_k + h, y_k + k_3^{(k)}) \end{cases}$$

✚ Si le problème (PCI) n'est pas linéaire, nous avons l'exemple suivant :

Exemple 2.1 :

Étudions la résolution de l'équation suivante :

$$\begin{cases} y'(x) = -y^2(x) & \text{pour : } x \in [-4, -2] \\ y(-4) = -\frac{1}{5} \end{cases} \quad (2.2.20)$$

par la méthode décompositionnelle itérative et la méthode de RUNGE – KUTTA « classique ».

Nous avons : $f(x, y) = -y^2$, $x_0 = -4$, $y_0 = -\frac{1}{5}$, $\theta = 2$ et $h = \frac{\theta}{N} = \frac{2}{N}$.

$$\forall k = 0, \dots, N-1 : x_{k+1} = x_k + h \Rightarrow x_k = x_0 + kh = -4 + kh$$

□ La résolution analytique donne la solution exacte :

$$p(x) = \frac{1}{x-1} \quad (2.2.21)$$

□ La résolution par la méthode décompositionnelle itérative :

$$y_0^{(k)}(x) = y(x_k) = y_k$$

$$\text{d'où : } y_0^{(k)}(x) = y_k \quad (2.2.22)$$

$$A_0^{(k)}(x) = -y^2(x_k) = -y_k^2$$

$$y_1^{(k)}(x) = \int_{x_k}^x A_0^{(k)}(t) dt = \int_{x_k}^x -y_k^2 dt = -y_k^2(x - x_k)$$

$$\text{d'où : } y_1^{(k)}(x) = -y_k^2(x - x_k) \quad (2.2.23)$$

$$A_1^{(k)}(x) = 0(x - x_k) - 2y(x_k)(-y_k^2(x - x_k))$$

$$= -2y_k(-y_k^2(x - x_k))$$

$$= 2y_k^3(x - x_k)$$

$$y_2^{(k)}(x) = \int_{x_k}^x A_1^{(k)}(t) dt = \int_{x_k}^x 2y_k^3(t - x_k) dt = y_k^3(x - x_k)^2$$

$$\text{d'où : } y_2^{(k)}(x) = y_k^3(x - x_k)^2 \quad (2.2.24)$$

$$\begin{aligned}
 A_2^{(k)}(x) &= \frac{1}{2!} 0 \cdot (x - x_k)^2 + 0 \cdot (-y_k^2(x - x_k))(x - x_k) - \frac{1}{2!} 2(-y_k^2(x - x_k))^2 \\
 &\quad - 2y(x_k)y_k^3(x - x_k)^2 \\
 &= -y_k^4(x - x_k)^2 - 2y_k^4(x - x_k)^2 \\
 &= -3y_k^4(x - x_k)^2
 \end{aligned}$$

$$y_3^{(k)}(x) = \int_{x_k}^x A_2^{(k)}(t) dt = \int_{x_k}^x -3y_k^4(t - x_k)^2 dt = -y_k^4(x - x_k)^3$$

$$\text{d'où : } y_3^{(k)}(x) = -y_k^4(x - x_k)^3 \quad (2.2.25)$$

$$\begin{aligned}
 A_3^{(k)}(x) &= \frac{1}{3!} 0 \cdot (x - x_k)^3 + \frac{1}{2!} 0 \cdot (-y_k^2(x - x_k))(x - x_k)^2 + \frac{1}{2!} 0 \cdot (-y_k^2(x - x_k))^2(x - x_k) \\
 &\quad + 0(y_k^3(x - x_k)^2)(x - x_k) + \frac{1}{3!} 0(-y_k^2(x - x_k))^3 \\
 &\quad - 2(-y_k^2(x - x_k))(y_k^3(x - x_k)^2) - 2y(x_k)(-y_k^4(x - x_k)^3) \\
 &= 2y_k^5(x - x_k)^3 + 2y_k^5(x - x_k)^3 \\
 &= 4y_k^5(x - x_k)^3
 \end{aligned}$$

$$y_4^{(k)}(x) = \int_{x_k}^x A_3^{(k)}(t) dt = \int_{x_k}^x 4y_k^5(t - x_k)^3 dt = y_k^5(x - x_k)^4$$

$$\text{d'où : } y_4^{(k)}(x) = y_k^5(x - x_k)^4 \quad (2.2.26)$$

$$y_{k+1} = \sum_{i=0}^4 y_i^{(k)}(x_{k+1}) \quad (2.2.27)$$

En remplaçant (2.2.22), (2.2.23), (2.2.24), (2.2.25) et (2.2.26) dans (2.2.27) nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 y_{k+1} &= y_k - y_k^2(x - x_k) + y_k^3(x - x_k)^2 - y_k^4(x - x_k)^3 + y_k^5(x - x_k)^4 \\
 &= y_k - y_k^2h + y_k^3h^2 - y_k^4h^3 + y_k^5h^4
 \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } y_{k+1} = y_k - y_k^2h + y_k^3h^2 - y_k^4h^3 + y_k^5h^4 \quad (2.2.28)$$

□ La résolution par la méthode de RUNGE – KUTTA « classique » :

$$k_1^{(k)} = hf(x_k, y_k) = -hy_k^2$$

$$\text{d'où : } k_1^{(k)} = -hy_k^2 \quad (2.2.29)$$

$$\begin{aligned} k_2^{(k)} &= hf\left(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}k_1^{(k)}\right) \\ &= -h\left(y_k + \frac{1}{2}k_1^{(k)}\right)^2 \\ &= -h\left(y_k - \frac{h}{2}y_k^2\right)^2 \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } k_2^{(k)} = -h\left(y_k - \frac{h}{2}y_k^2\right)^2 \quad (2.2.30)$$

$$\begin{aligned} k_3^{(k)} &= hf\left(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}k_2^{(k)}\right) \\ &= -h\left(y_k + \frac{1}{2}k_2^{(k)}\right)^2 \\ &= -h\left(y_k - \frac{h}{2}\left(y_k - \frac{h}{2}y_k^2\right)^2\right)^2 \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } k_3^{(k)} = -h\left(y_k - \frac{h}{2}\left(y_k - \frac{h}{2}y_k^2\right)^2\right)^2 \quad (2.2.31)$$

$$\begin{aligned} k_4^{(k)} &= hf(x_k + h, y_k + k_3^{(k)}) \\ &= -h(y_k + k_3^{(k)})^2 \\ &= -h\left(y_k - h\left(y_k - \frac{h}{2}\left(y_k - \frac{h}{2}y_k^2\right)^2\right)^2\right)^2 \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } k_4^{(k)} = -h\left(y_k - h\left(y_k - \frac{h}{2}\left(y_k - \frac{h}{2}y_k^2\right)^2\right)^2\right)^2 \quad (2.2.32)$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6} (k_1^{(k)} + 2k_2^{(k)} + 2k_3^{(k)} + k_4^{(k)}) \quad (2.2.33)$$

Test Numérique 2.1 :

On pose : $N = 10$ d'où : $h = 0.2$

k	x_k	y_k^{An}	y_k^{RK}
00	$-4.0000000000 \times 10^{+00}$	$-2.0000000000 \times 10^{-01}$	$-2.0000000000 \times 10^{-01}$
01	$-3.8000000000 \times 10^{+00}$	$-2.0833331200 \times 10^{-01}$	$-2.0833333233 \times 10^{-01}$
02	$-3.6000000000 \times 10^{+00}$	$-2.1739125382 \times 10^{-01}$	$-2.1739130197 \times 10^{-01}$
03	$-3.4000000000 \times 10^{+00}$	$-2.2727263673 \times 10^{-01}$	$-2.2727272300 \times 10^{-01}$
04	$-3.2000000000 \times 10^{+00}$	$-2.3809509253 \times 10^{-01}$	$-2.3809523120 \times 10^{-01}$
05	$-3.0000000000 \times 10^{+00}$	$-2.4999977830 \times 10^{-01}$	$-2.499998946 \times 10^{-01}$
06	$-2.8000000000 \times 10^{+00}$	$-2.6315756685 \times 10^{-01}$	$-2.6315787909 \times 10^{-01}$
07	$-2.6000000000 \times 10^{+00}$	$-2.7777730026 \times 10^{-01}$	$-2.777775488 \times 10^{-01}$
08	$-2.4000000000 \times 10^{+00}$	$-2.9411695606 \times 10^{-01}$	$-2.9411761374 \times 10^{-01}$
09	$-2.2000000000 \times 10^{+00}$	$-3.1249899984 \times 10^{-01}$	$-3.1249995148 \times 10^{-01}$
10	$-2.0000000000 \times 10^{+00}$	$-3.3333187749 \times 10^{-01}$	$-3.3333326219 \times 10^{-01}$

k	$ E_k^{An} $	$ E_k^{RK} $	Comparaison
00	$+0.0000000000 \times 10^{+00}$	$+0.0000000000 \times 10^{+00}$	$ E_0^{An} = E_0^{RK} $
01	$+2.1333107725 \times 10^{-08}$	$+1.0008989193 \times 10^{-09}$	$ E_1^{An} \geq E_1^{RK} $
02	$+5.0530161388 \times 10^{-08}$	$+2.3774191504 \times 10^{-09}$	$ E_2^{An} \geq E_2^{RK} $
03	$+9.0538833319 \times 10^{-08}$	$+4.2721239879 \times 10^{-09}$	$ E_3^{An} \geq E_3^{RK} $
04	$+1.4556644601 \times 10^{-07}$	$+6.8916961027 \times 10^{-09}$	$ E_4^{An} \geq E_4^{RK} $
05	$+2.2170002012 \times 10^{-07}$	$+1.0535586625 \times 10^{-08}$	$ E_5^{An} \geq E_5^{RK} $
06	$+3.2788693716 \times 10^{-07}$	$+2.5647401597 \times 10^{-08}$	$ E_6^{An} \geq E_6^{RK} $
07	$+4.7751382226 \times 10^{-07}$	$+2.2896983864 \times 10^{-08}$	$ E_7^{An} \geq E_7^{RK} $
08	$+6.9099587563 \times 10^{-07}$	$+3.3314790926 \times 10^{-08}$	$ E_8^{An} \geq E_8^{RK} $
09	$+1.0001585906 \times 10^{-06}$	$+4.8521997087 \times 10^{-08}$	$ E_9^{An} \geq E_9^{RK} $
10	$+1.4558431758 \times 10^{-06}$	$+7.1140220825 \times 10^{-08}$	$ E_{10}^{An} \geq E_{10}^{RK} $

Nous avons pour $k = 1, \dots, 10 : |E_k^{An}| \geq |E_k^{RK}|$, alors la méthode classique du RUNGE – KUTTA converge plus vite vers la solution exacte que la méthode décompositionnelle itérative d'ordre 4.

Conséquence 2.3 :

- 1) Si le problème (PCI) est linéaire, la méthode décompositionnelle itérative du 4^{ème} ordre se réduit à celle de RUNGE – KUTTA « classique ».
- 2) Si le problème (PCI) n'est pas linéaire, la méthode de RUNGE – KUTTA « classique » converge plus vite que la méthode décompositionnelle itérative du 4^{ème} ordre.

2.3.Comparaison avec les méthodes numériques à pas multiples :

2.3.1. Comparaison avec la méthode de MILNE :

Exemple 2.2 :

Résolvons le problème suivant :

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) + 1 & \text{pour : } x \in [0,1] \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (2.3.1)$$

par la méthode décompositionnelle itérative et la méthode de MILNE.

Nous avons : $f(x, y) = y + 1$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $\theta = 1$ et $h = \frac{\theta}{N} = \frac{1}{N}$.

$$\forall k = 0, 1, \dots, N-1 : x_{k+1} = x_k + h \Rightarrow x_k = x_0 + kh = 0 + kh = kh$$

✚ La résolution analytique donne la solution exacte :

$$p(x) = \exp(x) - 1 \quad (2.3.2)$$

✚ La résolution par la méthode décompositionnelle itérative :

$$y_0^{(k)}(x) = y(x_k) = y_k$$

$$\text{d'où : } y_0^{(k)}(x) = y_k \quad (2.3.3)$$

$$A_0^{(k)}(x) = y_0^{(k)}(x) + 1 = y(x_k) + 1 = y_k + 1$$

$$y_1^{(k)}(x) = \int_{x_k}^x A_0^{(k)}(t) dt = \int_{x_k}^x (y_k + 1) dt = (y_k + 1)(x - x_k)$$

$$\text{d'où : } y_1^{(k)}(x) = (y_k + 1)(x - x_k) \quad (2.3.4)$$

$$A_1^{(k)}(x) = 0 \cdot (x - x_k) + 1 \cdot y_1^{(k)}(x) = (y_k + 1)(x - x_k)$$

$$y_2^{(k)}(x) = \int_{x_k}^x A_1^{(k)}(t) dt = \int_{x_k}^x (y_k + 1)(t - x_k) dt = \frac{1}{2!} (y_k + 1)(x - x_k)^2$$

$$\text{d'où : } y_2^{(k)}(x) = \frac{1}{2!} (y_k + 1)(x - x_k)^2 \quad (2.3.5)$$

$$\begin{aligned} A_2^{(k)}(x) &= \frac{1}{2!} 0 \cdot (x - x_k)^2 + 0 \cdot (x - x_k) + \frac{1}{2!} 0 \cdot ((y_k + 1)(x - x_k))^2 + \frac{1}{2!} (y_k + 1)(x - x_k)^2 \\ &= \frac{1}{2!} (y_k + 1)(x - x_k)^2 \end{aligned}$$

$$y_3^{(k)}(x) = \int_{x_k}^x A_2^{(k)}(t) dt = \int_{x_k}^x \frac{1}{2!} (y_k + 1)(t - x_k)^2 dt = \frac{1}{3!} (y_k + 1)(x - x_k)^3$$

$$\text{d'où : } y_3^{(k)}(x) = \frac{1}{3!} (y_k + 1)(x - x_k)^3 \quad (2.3.6)$$

$$\begin{aligned} A_3^{(k)}(x) &= \frac{1}{3!} 0 \cdot (x - x_k)^3 + \frac{1}{2!} 0 \cdot ((x - x_k)(y_k + 1))(x - x_k)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2!} 0 \cdot ((y_k + 1)(x - x_k))^2 (x - x_k) + 0 \cdot \left(\frac{1}{2!} (y_k + 1)(x - x_k)^2 \right) (x - x_k) \\ &\quad + \frac{1}{3!} 0 \cdot ((y_k + 1)(x - x_k))^3 + 0 \cdot ((y_k + 1)(x - x_k)) \left(\frac{1}{2!} (y_k + 1)(x - x_k)^2 \right) \\ &\quad + 1 \cdot \left(\frac{1}{3!} (y_k + 1)(x - x_k)^3 \right) \\ &= \frac{1}{3!} (y_k + 1)(x - x_k)^3 \end{aligned}$$

$$y_4^{(k)}(x) = \int_{x_k}^x A_3^{(k)}(t) dt = \int_{x_k}^x \frac{1}{3!} (y_k + 1)(t - x_k)^3 dt = \frac{1}{4!} (y_k + 1)(x - x_k)^4$$

$$\text{d'où : } y_4^{(k)}(x) = \frac{1}{4!} (y_k + 1)(x - x_k)^4 \quad (2.3.7)$$

$$y_{k+1} = \sum_{i=0}^4 y_i^{(k)}(x_{k+1}) \quad (2.3.8)$$

En remplaçant (2.3.3), (2.3.4), (2.3.5), (2.3.6) et (2.3.5) dans (2.3.8) nous obtenons :

$$y_{k+1} = y_k + (y_k + 1)(x - x_k) + \frac{1}{2!}(y_k + 1)(x - x_k)^2 + \frac{1}{3!}(y_k + 1)(x - x_k)^3 + \frac{1}{4!}(y_k + 1)(x - x_k)^4$$

$$y_{k+1} = y_k + (y_k + 1)h + \frac{1}{2!}(y_k + 1)h^2 + \frac{1}{3!}(y_k + 1)h^3 + \frac{1}{4!}(y_k + 1)h^4$$

$$\text{d'où : } y_{k+1} = y_k + (y_k + 1) \sum_{i=1}^4 \frac{1}{i!} h^i \quad (2.3.9)$$

🌈 La résolution par la méthode de MILNE :

$$\text{Pour } k = 0, 1, 2 : y_{k+1} = y_k + (y_k + 1) \left(\sum_{i=1}^4 \frac{1}{i!} h^i \right)$$

$$\text{pour } k = 3, \dots, N-1 : y_{k+1} = y_{k-3} + \frac{4h}{3}(2y'_{k-2} - y'_{k-1} + 2y'_k) \quad (2.3.10)$$

$$y'_{k-2} = f(x_{k-2}, y_{k-2}) = y_{k-2} + 1 \quad (2.3.11)$$

$$y'_{k-1} = f(x_{k-1}, y_{k-1}) = y_{k-1} + 1 \quad (2.3.12)$$

$$y'_k = f(x_k, y_k) = y_k + 1 \quad (2.3.13)$$

En Remplaçant (2.3.11), (2.3.12) et (2.3.13) dans (2.3.10) nous obtenons :

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_{k-3} + \frac{4h}{3}(2y_{k-2} + 2 - y_{k-1} - 1 + 2y_k + 2) \\ &= y_{k-3} + \frac{4h}{3}(2y_{k-2} - y_{k-1} + 2y_k + 3) \\ &= \frac{8h}{3}y_k - \frac{4h}{3}y_{k-1} + \frac{8h}{3}y_{k-2} + y_{k-3} + 4h \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } y_{k+1} = \frac{8h}{3}y_k - \frac{4h}{3}y_{k-1} + \frac{8h}{3}y_{k-2} + y_{k-3} + 4h \quad (2.3.14)$$

Test Numérique 2.2 :

On pose : $N = 10$ d'où : $h = 0.1$

k	x_k	y_k^{An}	y_k^{Mn}
00	$+0.0000000000 \times 10^{+00}$	$+0.0000000000 \times 10^{+00}$	$+0.0000000000 \times 10^{+00}$
01	$+1.0000000000 \times 10^{-01}$	$+1.0517083333 \times 10^{-01}$	$+1.0517083333 \times 10^{-01}$
02	$+2.0000000000 \times 10^{-01}$	$+2.2140257085 \times 10^{-01}$	$+2.2140257085 \times 10^{-01}$
03	$+3.0000000000 \times 10^{-01}$	$+3.4985849706 \times 10^{-01}$	$+3.4985849706 \times 10^{-01}$
04	$+4.0000000000 \times 10^{-01}$	$+4.9182424008 \times 10^{-01}$	$+4.9182081199 \times 10^{-01}$
05	$+5.0000000000 \times 10^{-01}$	$+6.4872063860 \times 10^{-01}$	$+6.4871593582 \times 10^{-01}$
06	$+6.0000000000 \times 10^{-01}$	$+8.2211796209 \times 10^{-01}$	$+8.2211297802 \times 10^{-01}$
07	$+7.0000000000 \times 10^{-01}$	$+1.0137516266 \times 10^{+00}$	$+1.0137453830 \times 10^{+00}$
08	$+8.0000000000 \times 10^{-01}$	$+1.2255395633 \times 10^{+00}$	$+1.2255287666 \times 10^{+00}$
09	$+9.0000000000 \times 10^{-01}$	$+1.4596014138 \times 10^{+00}$	$+1.4595876833 \times 10^{+00}$
10	$+1.0000000000 \times 10^{+00}$	$+1.7182797441 \times 10^{+00}$	$+1.7182646268 \times 10^{+00}$

k	$ E_k^{An} $	$ E_k^{Mn} $	Comparaison
00	$+0.0000000000 \times 10^{+00}$	$+0.0000000000 \times 10^{+00}$	$ E_0^{An} = E_0^{Mn} $
01	$+8.4742282525 \times 10^{-08}$	$+8.4742282525 \times 10^{-08}$	$ E_1^{An} = E_1^{Mn} $
02	$+1.8731248019 \times 10^{-07}$	$+1.8731248019 \times 10^{-07}$	$ E_2^{An} = E_2^{Mn} $
03	$+3.1051558835 \times 10^{-07}$	$+3.1051558835 \times 10^{-07}$	$ E_3^{An} = E_3^{Mn} $
04	$+4.5756405598 \times 10^{-07}$	$+3.8856524043 \times 10^{-06}$	$ E_4^{An} \leq E_4^{Mn} $
05	$+6.3210609369 \times 10^{-07}$	$+5.3348858273 \times 10^{-06}$	$ E_5^{An} \leq E_5^{Mn} $
06	$+8.3829945652 \times 10^{-07}$	$+5.8223713495 \times 10^{-06}$	$ E_6^{An} \leq E_6^{Mn} $
07	$+1.0808762454 \times 10^{-06}$	$+7.3245155363 \times 10^{-06}$	$ E_7^{An} \leq E_7^{Mn} $
08	$+1.3652024791 \times 10^{-06}$	$+1.2161897757 \times 10^{-05}$	$ E_8^{An} \leq E_8^{Mn} $
09	$+1.6973845050 \times 10^{-06}$	$+1.5427842300 \times 10^{-05}$	$ E_9^{An} \leq E_9^{Mn} $
10	$+2.0843308448 \times 10^{-06}$	$+1.7201649825 \times 10^{-05}$	$ E_{10}^{An} \leq E_{10}^{Mn} $

Nous avons pour $k = 0,1,2,3 : |E_k^{An}| = |E_k^{Mn}|$, et pour $k = 4, \dots, 10 : |E_k^{An}| \leq |E_k^{Mn}|$

alors la méthode décompositionnelle itérative converge plus vite vers la

solution exacte que la méthode de MILNE.

2.3.2. Comparaison avec la méthode d'ADAMS :

Exemple 2.3 :

Étudions la résolution de l'équation suivante :

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) + x & \text{pour : } x \in [0,3] \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (2.3.15)$$

par la méthode décompositionnelle itérative et la méthode d'ADAMS.

Nous avons : $f(x, y) = y + x$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $\theta = 3$ et $h = \frac{\theta}{N} = \frac{3}{N}$.

$$\forall k = 0, 1, \dots, N-1 : x_{k+1} = x_k + h \Rightarrow x_k = x_0 + kh = 0 + kh = kh$$

La résolution analytique donne la solution exacte :

$$p(x) = \exp(x) - x - 1 \quad (2.3.16)$$

La résolution par la méthode décompositionnelle itérative :

$$y_0^{(k)}(x) = y(x_k) = y_k$$

$$\text{d'où : } y_0^{(k)}(x) = y_k \quad (2.3.17)$$

$$A_0^{(k)}(x) = y_k + x_k$$

$$y_1^{(k)}(x) = \int_{x_k}^x A_0^{(k)}(t) dt = \int_{x_k}^x (y_k + x_k) dt = (y_k + x_k)(x - x_k)$$

$$\text{d'où : } y_1^{(k)}(x) = (y_k + x_k)(x - x_k) \quad (2.3.18)$$

$$\begin{aligned} A_1^{(k)}(x) &= 1 \cdot (x - x_k) + 1 \cdot (y_k + x_k)(x - x_k) \\ &= (y_k + x_k + 1)(x - x_k) \end{aligned}$$

$$y_2^{(k)}(x) = \int_{x_k}^x A_1^{(k)}(t) dt = \int_{x_k}^x (y_k + x_k + 1)(t - x_k) dt = \frac{1}{2} (y_k + x_k + 1)(x - x_k)^2$$

$$\text{d'où : } y_2^{(k)}(x) = \frac{1}{2} (y_k + x_k + 1)(x - x_k)^2 \quad (2.3.19)$$

$$\begin{aligned}
A_2^{(k)}(x) &= \frac{1}{2!} 0 \cdot (x - x_k)^2 + 0 \cdot (y_k + x_k)(x - x_k)(x - x_k) + \frac{1}{2!} 0((y_k + x_k)(x - x_k))^2 \\
&\quad + 1 \cdot \left(\frac{1}{2} (y_k - x_k + 1)(x - x_k)^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} (y_k - x_k + 1)(x - x_k)^2
\end{aligned}$$

$$y_3^{(k)}(x) = \int_{x_k}^x A_2^{(k)}(t) dt = \int_{x_k}^x \frac{1}{2} (y_k + x_k + 1)(t - x_k)^2 dt = \frac{1}{3!} (y_k + x_k + 1)(x - x_k)^3$$

$$\text{d'où : } y_3^{(k)}(x) = \frac{1}{3!} (y_k + x_k + 1)(x - x_k)^3 \quad (2.3.20)$$

$$\begin{aligned}
A_3^{(k)}(x) &= \frac{1}{3!} 0 \cdot (x - x_k)^3 + \frac{1}{2!} 0 \cdot (y_k + x_k)(x - x_k)(x - x_k)^2 \\
&\quad + \frac{1}{2!} 0 \cdot ((y_k + x_k)(x - x_k))^2 (x - x_k) + 0 \cdot \left(\frac{1}{2} (y_k + x_k + 1)(x - x_k)^2 \right) (x - x_k) \\
&\quad + \frac{1}{3!} 0 \cdot ((y_k + x_k)(x - x_k))^3 + 0 \cdot (y_k + x_k)(x - x_k) \left(\frac{1}{2} (y_k + x_k + 1)(x - x_k)^2 \right) \\
&\quad + 1 \cdot \left(\frac{1}{3!} (y_k + x_k + 1)(x - x_k)^3 \right) \\
&= \frac{1}{3!} (y_k + x_k + 1)(x - x_k)^3
\end{aligned}$$

$$y_4^{(k)}(x) = \int_{x_k}^x A_3^{(k)}(t) dt = \int_{x_k}^x \frac{1}{3!} (y_k + x_k + 1)(t - x_k)^3 dt = \frac{1}{4!} (y_k + x_k + 1)(x - x_k)^4$$

$$\text{d'où : } y_4^{(k)}(x) = \frac{1}{4!} (y_k + x_k + 1)(x - x_k)^4 \quad (2.3.21)$$

$$y_{k+1} = \sum_{i=0}^4 y_i^{(k)}(x_{k+1}) \quad (2.3.22)$$

En remplaçant (2.3.17), (2.3.18), (2.3.19), (2.3.20) et (2.3.21) dans (2.3.22) nous obtenons :

$$y_{k+1} = y_k + (y_k + x_k)(x - x_k) + \frac{1}{2!} (y_k + x_k + 1)(x - x_k)^2 + \frac{1}{3!} (y_k + x_k + 1)(x - x_k)^3$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4!}(y_k + x_k + 1)(x - x_k)^4 \\
& = y_k + (y_k + x_k)h + \frac{1}{2!}(y_k + x_k + 1)h^2 + \frac{1}{3!}(y_k + x_k + 1)h^3 + \frac{1}{4!}(y_k + x_k + 1)h^4 \\
& \text{d'où : } y_{k+1} = y_k + (y_k + x_k)h + (y_k + x_k + 1)\sum_{i=2}^4 \frac{1}{i!} h^i \tag{2.3.23}
\end{aligned}$$

🌈 La résolution par la méthode d'ADAMS :

$$\text{Pour } k = 0, 1, 2 : y_{k+1} = y_k + (y_k + x_k)h + (y_k + x_k + 1)\sum_{i=2}^4 \frac{1}{i!} h^i \tag{2.3.24}$$

Pour $k = 3, \dots, N-1$:

$$\bar{y}_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(55y'_k - 59y'_{k-1} + 37y'_{k-2} - 9y'_{k-3}) \tag{2.3.25}$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(9\bar{y}'_{k+1} + 19y'_k - 5y'_{k-1} + y'_{k-2}) \tag{2.3.26}$$

$$\bar{y}'_{k+1} = f(x_{k+1}, \bar{y}_{k+1}) = \bar{y}_{k+1} + x_{k+1} \tag{2.3.27}$$

$$y'_k = f(x_k, y_k) = y_k + x_k \tag{2.3.28}$$

$$y'_{k-1} = f(x_{k-1}, y_{k-1}) = y_{k-1} + x_{k-1} \tag{2.3.29}$$

$$y'_{k-2} = f(x_{k-2}, y_{k-2}) = y_{k-2} + x_{k-2} \tag{2.3.30}$$

$$y'_{k-3} = f(x_{k-3}, y_{k-3}) = y_{k-3} + x_{k-3} \tag{2.3.31}$$

En remplaçant (2.3.228), (2.3.29), (2.3.30) et (2.3.31) dans (2.3.25) nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\bar{y}_{k+1} &= y_k + \frac{h}{24}(55y'_k - 59y'_{k-1} + 37y'_{k-2} - 9y'_{k-3}) \\
&= y_k + \frac{h}{24}(55y_k + 55x_k - 59y_{k-1} - 59x_{k-1} + 37y_{k-2} + 37x_{k-2} - 9y_{k-3} - 9x_{k-3}) \\
&= y_k + \frac{h}{24}(55y_k - 59y_{k-1} + 37y_{k-2} - 9y_{k-3} + 55kh - 59(k-1)h + 37(k-2)h \\
&\quad - 9(k-3)h)
\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{55h}{24} + 1 \right) y_k - \frac{59h}{24} y_{k-1} + \frac{37h}{24} y_{k-2} - \frac{3h}{8} y_{k-3} + \left(k + \frac{1}{2} \right) h^2$$

$$\text{d'où : } \bar{y}_{k+1} = \left(\frac{55h}{24} + 1 \right) y_k - \frac{59h}{24} y_{k-1} + \frac{37h}{24} y_{k-2} - \frac{3h}{8} y_{k-3} + \left(k + \frac{1}{2} \right) h^2 \quad (2.3.32)$$

En remplaçant (2.3.32) dans (2.3.27) nous obtenons :

$$\bar{y}'_{k+1} = \left(\frac{55h}{24} + 1 \right) y_k - \frac{59h}{24} y_{k-1} + \frac{37h}{24} y_{k-2} - \frac{3h}{8} y_{k-3} + \left(k + \frac{1}{2} \right) h^2 + x_{k+1} \quad (2.3.33)$$

En remplaçant (2.3.33), (2.3.28), (2.3.29) et (2.3.30) dans (2.3.26) nous obtenons :

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{24} (9\bar{y}'_{k+1} + 19y'_k - 5y'_{k-1} + y'_{k-2}) \\ &= y_k + \frac{h}{24} (9\bar{y}_{k+1} + 9x_{k+1} + 19y_k + 19x_k - 5y_{k-1} - 5x_{k-1} + y_{k-2} + x_{k-2}) \\ &= y_k + \frac{h}{24} \left(\left(\frac{165h}{8} + 9 \right) y_k - \frac{177h}{8} y_{k-1} + \frac{111h}{8} y_{k-2} - \frac{27h}{8} y_{k-3} + 9 \left(k + \frac{1}{2} \right) h^2 \right. \\ &\quad \left. + 19y_k - 5y_{k-1} + y_{k-2} + 9(k+1)h + 19kh - 5(k-1)h + (k-2)h \right) \\ &= y_k + \left(\frac{55h^2}{64} + \frac{3h}{8} \right) y_k - \frac{59h^2}{64} y_{k-1} + \frac{37h^2}{64} y_{k-2} - \frac{9h^2}{64} y_{k-3} + \frac{3kh^3}{8} + \frac{3h^3}{16} \\ &\quad + \frac{19h}{24} y_k - \frac{5h}{24} y_{k-1} + \frac{h}{24} y_{k-2} + \frac{h}{24} (24k + 12) \\ &= \left(\frac{55h^2}{64} + \frac{28h}{24} + 1 \right) y_k - \left(\frac{59h^2}{64} + \frac{5h}{24} \right) y_{k-1} + \left(\frac{37h^2}{64} + \frac{h}{24} \right) y_{k-2} - \frac{9h^2}{64} y_{k-3} \\ &\quad + \frac{3kh^3}{8} + kh + \frac{3h^3}{16} + \frac{h}{2} \\ \text{d'où : } y_{k+1} &= \left(\frac{55h^2}{64} + \frac{28h}{24} + 1 \right) y_k - \left(\frac{59h^2}{64} + \frac{5h}{24} \right) y_{k-1} + \left(\frac{37h^2}{64} + \frac{h}{24} \right) y_{k-2} \\ &\quad - \frac{9h^2}{64} y_{k-3} + \frac{3kh^3}{8} + kh + \frac{3h^3}{16} + \frac{h}{2} \quad (2.3.34) \end{aligned}$$

Test Numérique 2.3 :

On pose : $N = 10$ d'où : $h = 0.3$

k	x_k	y_k^{An}	y_k^{As}
00	$+0.0000000000 \times 10^{+00}$	$+0.0000000000 \times 10^{+00}$	$+0.0000000000 \times 10^{+00}$
01	$+3.0000000000 \times 10^{-01}$	$+4.9837500000 \times 10^{-02}$	$+4.9837500000 \times 10^{-02}$
02	$+6.0000000000 \times 10^{-01}$	$+2.2206127641 \times 10^{-01}$	$+2.2206127641 \times 10^{-01}$
03	$+9.0000000000 \times 10^{-01}$	$+5.5948663819 \times 10^{-01}$	$+5.5948663819 \times 10^{-01}$
04	$+1.2000000000 \times 10^{+00}$	$+1.1199072950 \times 10^{+00}$	$+1.1199303561 \times 10^{+00}$
05	$+1.5000000000 \times 10^{+00}$	$+1.9813353633 \times 10^{+00}$	$+1.9813994082 \times 10^{+00}$
06	$+1.8000000000 \times 10^{+00}$	$+3.2490745234 \times 10^{+00}$	$+3.2492046017 \times 10^{+00}$
07	$+2.1000000000 \times 10^{+00}$	$+5.0652676321 \times 10^{+00}$	$+5.0655021885 \times 10^{+00}$
08	$+2.4000000000 \times 10^{+00}$	$+7.6217844473 \times 10^{+00}$	$+7.6221807195 \times 10^{+00}$
09	$+2.7000000000 \times 10^{+00}$	$+1.1177617964 \times 10^{+01}$	$+1.1178260388 \times 10^{+01}$
10	$+3.0000000000 \times 10^{+00}$	$+1.6082366638 \times 10^{+01}$	$+1.6083378942 \times 10^{+01}$

k	$ E_k^{An} $	$ E_k^{As} $	Comparaison
00	$+0.0000000000 \times 10^{+00}$	$+0.0000000000 \times 10^{+00}$	$ E_0^{An} = E_0^{As} $
01	$+2.1307578777 \times 10^{-05}$	$+2.1307578777 \times 10^{-05}$	$ E_1^{An} = E_1^{As} $
02	$+5.7523984651 \times 10^{-05}$	$+5.7523984651 \times 10^{-05}$	$ E_2^{An} = E_2^{As} $
03	$+1.1647297288 \times 10^{-04}$	$+1.1647297288 \times 10^{-04}$	$ E_3^{An} = E_3^{As} $
04	$+2.0962776398 \times 10^{-04}$	$+1.8656664179 \times 10^{-04}$	$ E_4^{An} \geq E_4^{As} $
05	$+3.5370705882 \times 10^{-04}$	$+2.8966214450 \times 10^{-04}$	$ E_5^{An} \geq E_5^{As} $
06	$+5.7294097860 \times 10^{-04}$	$+4.4286276534 \times 10^{-04}$	$ E_6^{An} \geq E_6^{As} $
07	$+9.0228053159 \times 10^{-04}$	$+6.6772405989 \times 10^{-04}$	$ E_7^{An} \geq E_7^{As} $
08	$+1.3919333942 \times 10^{-03}$	$+9.9566118297 \times 10^{-04}$	$ E_8^{An} \geq E_8^{As} $
09	$+2.1137610020 \times 10^{-03}$	$+1.4713368291 \times 10^{-03}$	$ E_9^{An} \geq E_9^{As} $
10	$+3.1702848792 \times 10^{-03}$	$+2.1579815948 \times 10^{-03}$	$ E_{10}^{An} \geq E_{10}^{As} $

Nous avons pour $k = 0,1,2,3$: $|E_k^{An}| = |E_k^{As}|$, et pour $i = 4, \dots, 10$: $|E_k^{An}| \geq |E_k^{As}|$

alors la méthode d'ADAMS converge plus vite vers la solution exacte que la méthode décompositionnelle itérative.

Chapitre 03

*Étude comparative de la méthode
décompositionnelle pour la résolution de
quelques problèmes aux limites linéaires du
2^{ème} degré*

- 3.1) *La résolution par la méthode décompositionnelle*
- 3.2) *La résolution par les méthodes classiques*
- 3.3) *Comparaison avec les méthodes classiques*

Dans ce chapitre, nous étudions d'une façon précise la résolution des problèmes aux limites linéaire de type suivant :

$$\begin{cases} u''(t) = a(t)u'(t) + b(t)u(t) + c(t) & \text{pour : } t \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0 \\ a, b \text{ et } c \text{ sont des fonctions analytiques} \end{cases} \quad (3.1)$$

par la méthode décompositionnelle et les méthodes classiques, après nous comparerons numériquement la méthode décompositionnelle avec celle des différences finies et de RAYLEIGH RITZ GALERKIN.

3.1. La résolution par la méthode décompositionnelle :

Considérons le problème (3.1) :

Une intégration de (3.1) donne :

$$\begin{aligned} \int_t^1 u''(s)ds &= \int_t^1 a(s)u'(s)ds + \int_t^1 b(s)u(s)ds + \int_t^1 c(s)ds \\ \Leftrightarrow u'(t) &= u'(1) + a(t)u(t) + \int_t^1 (a'(s) - b(s))u(s)ds - \int_t^1 c(s)ds \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

Une nouvelle intégration de (3.1.1) donne :

$$\begin{aligned} \int_0^t u'(s)ds &= \int_0^t u'(1)ds + \int_0^t a(s)u(s)ds + \int_0^t \int_s^1 (a'(r) - b(r))u(r)drds - \int_0^t \int_s^1 c(r)drds \\ \Leftrightarrow u(t) &= u'(1)t + \int_0^t a(s)u(s)ds + \int_0^t \int_s^1 (a'(r) - b(r))u(r)drds - \int_0^t \int_s^1 c(r)drds \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

La méthode décompositionnelle consiste à décomposer respectivement $u'(1)$ et $u(t)$ sous les formes suivantes :

$$u'(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n = \delta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \quad \text{d'où : } u'(1) = \delta_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{n+1} \quad (3.1.3)$$

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \quad (3.1.4)$$

Comme c est une fonction analytique, on peut écrire $c(t)$ sous la forme suivante :

$$c(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^{[n]}(0)}{n!} \cdot t^n \quad (3.1.5)$$

En remplaçant les relations (3.1.5), (3.1.4) et (3.1.3) dans (3.1.2) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) &= \delta_0 t + \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{n+1} t + \int_0^t a(s) \sum_{n=0}^{\infty} u_n(s) ds + \int_0^t \int_s^1 (a'(r) - b(r)) \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r) dr ds \\ &\quad - \int_0^t \int_s^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^{[n]}(0)}{n!} r^n dr ds \\ \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) &= \delta_0 t + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\delta_{n+1} t + \int_0^t a(s) u_n(s) ds + \int_0^t \int_s^1 (a'(r) - b(r)) u_n(r) dr ds \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t \int_s^1 \frac{c^{[n]}(0)}{n!} r^n dr ds \right) \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Les termes de la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ sont identifiés par les formules :

$$\begin{cases} u_0(t) = \delta_0 t \\ u_1(t) = \delta_1 t + \int_0^t a(s) u_0(s) ds + \int_0^t \int_s^1 (a'(r) - b(r)) u_0(r) dr ds - \int_0^t \int_s^1 c(0) dr ds \\ \vdots \\ u_{n+1}(t) = \delta_{n+1} t + \int_0^t a(s) u_n(s) ds + \int_0^t \int_s^1 (a'(r) - b(r)) u_n(r) dr ds - \int_0^t \int_s^1 \frac{c^{[n]}(0)}{n!} r^n dr ds \\ \vdots \end{cases}$$

Remarque 3.1.1:

Les δ_i , $i = 0, \dots, n$ sont obtenus par : $u_i(1) = 0, \forall i = 0, \dots, n$ (3.1.7)

La solution approchée est donnée par : $\phi_n(t) = \sum_{i=1}^n u_i(t)$ (3.1.8)

3.2. La résolution par les méthodes classiques :

Considérons le problème linéaire (3.1) :

On supposera toujours que :

✚ L'intervalle $[0,1]$ est subdivisé d'une manière équidistante par des

arguments : $0 = t_0 < \dots < t_{N+1} = 1$ où : $t_i = ih$, $i = 0, \dots, N$ avec : $h = \frac{1}{N+1}$.

✚ ρ est la solution exacte du problème linéaire (3.1).

✚ ε_i est l'erreur de la troncature globale $\varepsilon_i = \rho(t_i) - u_i$ (3.2.1)

3.2.1. La résolution par la méthode des différences finies :

Considérons toujours le problème linéaire (3.1) :

La méthode des différences finies consiste à chercher la solution sous des valeurs approchées $u_0, \dots, u_{N+1}$ de la fonction u aux arguments : $t_0, \dots, t_{N+1}$.

Notons que : $\forall i \in \{0, \dots, N+1\} : a(t_i) = a_i, b(t_i) = b_i, c(t_i) = c_i, u(t_i) = u_i$ (3.2.2)

On pose $\tilde{u} = (u_1, \dots, u_N)^t$, $\tilde{c} = (c_1, \dots, c_N)^t$ et on définit la matrice M par :

$$M = \frac{1}{2h^2} \begin{pmatrix} -(4 + 2b_1h^2) & 2 - a_1h & 0 & 0 & 0 \\ 2 + a_2h & -(4 + 2b_2h^2) & 2 - a_2h & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 2 + a_{N-1}h & -(4 + 2b_{N-1}h^2) & 2 - a_{N-1}h \\ 0 & 0 & 0 & 2 + a_Nh & -(4 + 2b_Nh^2) \end{pmatrix}$$

Les $(u_i)_{i=1, \dots, N}$ sont obtenus par la résolution du système linéaire $M\tilde{u} = \tilde{c}$.

3.2.2. La résolution par la méthode de RAYLEIGH RITZ GALERKIN :

Considérons toujours le problème linéaire (3.1) :

On transforme le problème (3.1) au problème variationnel suivant :

$$\int_0^1 u'(t)(\varphi_j'(t) - a(t)\varphi_j(t))dt - \int_0^1 b(t)u(t)\varphi_j(t)dt = \int_0^1 c(t)\varphi_j(t)dt \quad (3.2.3)$$

où : $(\varphi_j)_{j=1,\dots,N}$ sont linéairement indépendantes et :

$$\forall j = 1, \dots, N : \varphi_j(0) = \varphi_j(1) = 0 \quad (3.2.4)$$

La méthode de *RAYLEIGH RITZ GALERKIN* consiste à chercher la solution

$$\text{sous la forme suivante : } u(t) = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i(t) \quad (3.2.5)$$

En remplaçant la relation (3.2.5) dans (3.2.3), nous obtenons :

$$\sum_{i=1}^N u_i \left(\int_0^1 \varphi_i'(t)(\varphi_j'(t) - a(t)\varphi_j(t))dt - \int_0^1 b(t)\varphi_i(t)\varphi_j(t)dt \right) = \int_0^1 c(t)\varphi_j(t)dt \quad (3.2.6)$$

$$\text{On pose : } \tilde{u} = (u_1, \dots, u_N)^t, \quad \tilde{c} = (c_1, \dots, c_N)^t \text{ et } M = (m_{ji})_{\substack{j=1,\dots,N \\ i=1,\dots,N}} \quad (3.2.7)$$

$$\forall i, j = 1, \dots, N : m_{ji} = \int_0^1 \varphi_i'(t)(\varphi_j'(t) - a(t)\varphi_j(t))dt - \int_0^1 b(t)\varphi_i(t)\varphi_j(t)dt \quad (3.2.8)$$

$$\forall j = 1, \dots, N : c_j = \int_0^1 c(t)\varphi_j(t)dt \quad (3.2.9)$$

Les $(u_i)_{i=1,\dots,N}$ sont obtenus par la résolution du système linéaire $M\tilde{u} = \tilde{c}$.

3.3.Comparaison avec les méthodes classiques :

3.3.1. Comparaison avec la méthode des différences finies :

Exemple 3.1 :

Étudions la résolution de l'équation suivante :

$$\begin{cases} u''(t) = 2u'(t) - u(t) + 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (3.3.1)$$

par la méthode décompositionnelle et la méthode des différences finies.

Nous avons : $a(t) = 2$, $b(t) = -1$, $c(t) = 1$.

✚ La résolution analytique donne la solution exacte :

$$\rho(t) = (t-1)\exp(t) - t\exp(t-1) + 1 \quad (3.3.2)$$

✚ La résolution par la méthode décompositionnelle donne :

$$u_0(t) = \delta_0 t \quad (3.3.3)$$

$$u_0(1) = 0 \Leftrightarrow \delta_0 = 0 \quad (3.3.4)$$

En remplaçant (3.3.1.4) dans (3.3.1.3) nous obtenons :

$$u_0(t) = 0 \quad (3.3.5)$$

$$u_1(t) = \delta_1 t + \int_0^t 2u_0(s)ds + \int_0^t \int_s^1 u_0(r)drds - \int_0^t \int_s^1 drds \quad (3.3.6)$$

En remplaçant (3.3.1.5) dans (3.3.1.6) nous obtenons :

$$u_1(t) = \delta_1 t - \int_0^t \int_s^1 drds \quad (3.3.7)$$

$$\begin{aligned} u_1(1) = 0 &\Leftrightarrow \delta_1 = \int_0^1 \int_s^1 drds = \int_0^1 (1-s)ds = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \delta_1 = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

En remplaçant (3.3.8) dans (3.3.7) nous obtenons :

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \frac{1}{2}t - \int_0^t \int_s^1 drds \\ &= \frac{1}{2}t - \int_0^t (1-s)ds \\ &= \frac{1}{2}t - \left(t - \frac{1}{2}t^2\right) \\ \text{alors : } u_1(t) &= \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

$$u_2(t) = \delta_2 t + \int_0^t 2u_1(s)ds + \int_0^t \int_s^1 u_1(r)drds \quad (3.3.10)$$

En remplaçant (3.3.9) dans (3.3.10) nous obtenons :

$$u_2(t) = \delta_2 t + \int_0^t (s^2 - s)ds + \frac{1}{2} \int_0^t \int_s^1 (r^2 - r)drds \quad (3.3.11)$$

$$\begin{aligned} u_2(1) = 0 &\Leftrightarrow \delta_2 = -\int_0^1 (s^2 - s)ds - \frac{1}{2} \int_0^1 \int_s^1 (r^2 - r)drds \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(-\frac{1}{3}s^3 + \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{6} \right) ds \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{5}{24} \\ &\Leftrightarrow \delta_2 = \frac{5}{24} \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

En remplaçant (3.3.12) dans (3.3.11) nous obtenons :

$$\begin{aligned} u_2(t) &= \frac{5}{24}t + \int_0^t (s^2 - s)ds + \frac{1}{2} \int_0^t \int_s^1 (r^2 - r)drds \\ &= \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{5}{24}t + \frac{1}{2} \int_0^t \left(-\frac{1}{3}s^3 + \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{6} \right) ds \\ &= \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{5}{24}t - \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{12}t^3 - \frac{1}{12}t \\ &= -\frac{1}{24}t^4 + \frac{5}{12}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{8}t \end{aligned}$$

$$\text{alors : } u_2(t) = -\frac{1}{24}t^4 + \frac{5}{12}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{8}t \quad (3.3.13)$$

$$\phi_2(t) = u_0(t) + u_1(t) + u_2(t) \quad (3.3.14)$$

En remplaçant (3.3.13) dans (3.3.14) nous obtenons :

$$\phi_2(t) = -\frac{1}{24}t^4 + \frac{5}{12}t^3 - \frac{3}{8}t \quad (3.3.15)$$

✚ La résolution par la méthode des différences finies :

$$\forall i \in \{0, \dots, N+1\} : a_i = a(t_i) = 2, \quad b_i = b(t_i) = -1, \quad c_i = c(t_i) = 1$$

$$M = \frac{1}{2h^2} \begin{pmatrix} -(4-2h^2) & 2-2h & 0 & 0 & 0 \\ 2+2h & -(4-2h^2) & 2-2h & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 2+2h & -(4-2h^2) & 2-2h \\ 0 & 0 & 0 & 2+2h & -(4-2h^2) \end{pmatrix} \quad \text{et } \tilde{c} = (1, \dots, 1)^t$$

On pose $N = 9$ alors : $h = \frac{1}{10} = 0.1$

$$M = \begin{pmatrix} -199 & 99 & 0 & 0 & 0 \\ 101 & -199 & 99 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 101 & -199 & 99 \\ 0 & 0 & 0 & 101 & -199 \end{pmatrix} \quad \text{et : } \tilde{c} = (1, \dots, 1)^t$$

La résolution numérique du système $M\tilde{u} = \tilde{c}$ nous donne $\tilde{u} = (u_1, \dots, u_N)^t$.

Test Numérique 3.1 :

i	t_i	u_i	$\phi_2(t_i)$
01	$+1.0000000000 \times 10^{-01}$	$-4.8203085632 \times 10^{-02}$	$-3.7087500000 \times 10^{-02}$
02	$+2.0000000000 \times 10^{-01}$	$-8.6792061019 \times 10^{-02}$	$-7.1733333333 \times 10^{-02}$
03	$+3.0000000000 \times 10^{-01}$	$-1.1518291408 \times 10^{-01}$	$-1.0158750000 \times 10^{-01}$
04	$+4.0000000000 \times 10^{-01}$	$-1.3288284585 \times 10^{-01}$	$-1.2440000000 \times 10^{-01}$
05	$+5.0000000000 \times 10^{-01}$	$-1.3949709093 \times 10^{-01}$	$-1.3802083333 \times 10^{-01}$
06	$+6.0000000000 \times 10^{-01}$	$-1.3473488549 \times 10^{-01}$	$-1.4040000000 \times 10^{-01}$
07	$+7.0000000000 \times 10^{-01}$	$-1.1841450535 \times 10^{-01}$	$-1.2958750000 \times 10^{-01}$
08	$+8.0000000000 \times 10^{-01}$	$-9.0467304336 \times 10^{-02}$	$-1.0373333333 \times 10^{-01}$
09	$+9.0000000000 \times 10^{-01}$	$-5.0940692150 \times 10^{-02}$	$-6.1087500001 \times 10^{-02}$

i	$ \varepsilon_i $	$ \rho(t_i) - \phi_2(t_i) $	Comparaison
01	$+1.2892293391 \times 10^{-02}$	$+1.7767077581 \times 10^{-03}$	$ \varepsilon_1 \geq \rho(t_1) - \phi_2(t_1) $
02	$+1.9804061664 \times 10^{-02}$	$+4.7453339786 \times 10^{-03}$	$ \varepsilon_2 \geq \rho(t_2) - \phi_2(t_2) $
03	$+2.1306157637 \times 10^{-02}$	$+7.7107435579 \times 10^{-03}$	$ \varepsilon_3 \geq \rho(t_3) - \phi_2(t_3) $
04	$+1.8263372823 \times 10^{-02}$	$+9.7805269755 \times 10^{-03}$	$ \varepsilon_4 \geq \rho(t_4) - \phi_2(t_4) $
05	$+1.1871125718 \times 10^{-02}$	$+1.0394868126 \times 10^{-02}$	$ \varepsilon_5 \geq \rho(t_5) - \phi_2(t_5) $
06	$+3.6953377137 \times 10^{-03}$	$+9.3604522224 \times 10^{-03}$	$ \varepsilon_6 \leq \rho(t_6) - \phi_2(t_6) $
07	$+4.2840613720 \times 10^{-03}$	$+6.8889332820 \times 10^{-03}$	$ \varepsilon_7 \leq \rho(t_7) - \phi_2(t_7) $
08	$+9.6254838238 \times 10^{-03}$	$+3.6405451738 \times 10^{-03}$	$ \varepsilon_8 \geq \rho(t_8) - \phi_2(t_8) $
09	$+9.3732951989 \times 10^{-03}$	$+7.7351265145 \times 10^{-04}$	$ \varepsilon_9 \geq \rho(t_9) - \phi_2(t_9) $

Nous avons pour $i \in \{1;2;3;4;5;7;8;9\}$, $|\varepsilon_i| \geq |\rho(t_i) - \phi_2(t_i)|$

et pour $i = 6$: $|\varepsilon_6| \leq |\rho(t_6) - \phi_2(t_6)|$, alors on peut dire que dans cette exemple la méthode décompositionnelle converge plus vite vers la solution exacte que la méthode des différences finies

Exemple 3.2 :

Étudions la résolution de l'équation suivante :

$$\begin{cases} u''(t) = -4\pi^2 u(t) - 4\pi^2 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (3.3.16)$$

par la méthode décompositionnelle et la méthode des différences finies.

Nous avons : $a(t) = 0$, $b(t) = -4\pi^2$, $c(t) = -4\pi^2$.

🌈 La résolution analytique donne la solution exacte :

$$\rho(t) = \cos(2\pi t) - 1 \quad (3.3.17)$$

🌈 La résolution par la méthode décompositionnelle donne :

$$u_0(t) = \delta_0 t \quad (3.3.18)$$

$$u_0(1) = 0 \Leftrightarrow \delta_0 = 0 \quad (3.3.19)$$

En remplaçant (3.3.19) dans (3.3.18) nous obtenons :

$$u_0(t) = 0 \quad (3.3.20)$$

$$u_1(t) = \delta_1 t + 4\pi^2 \int_0^t \int_s^1 u_0(r) dr ds + 4\pi^2 \int_0^t \int_s^1 dr ds \quad (3.3.21)$$

En remplaçant (3.3.20) dans (3.3.21) nous obtenons :

$$u_1(t) = \delta_1 t + 4\pi^2 \int_0^t \int_s^1 dr ds \quad (3.3.22)$$

$$\begin{aligned} u_1(1) = 0 &\Leftrightarrow \delta_1 = -4\pi^2 \int_0^1 \int_s^1 dr ds \\ &= -4\pi^2 \int_0^1 (1-s) ds = -2\pi^2 \\ &\Leftrightarrow \delta_1 = -2\pi^2 \end{aligned} \quad (3.3.23)$$

En remplaçant (3.3.23) dans (3.3.22) nous obtenons :

$$\begin{aligned} u_1(t) &= -2\pi^2 t + 4\pi^2 \int_0^t \int_s^1 dr ds \\ &= -2\pi^2 t + 4\pi^2 \int_0^t (1-s) ds \\ &= -2\pi^2 t + 4\pi^2 \left(t - \frac{1}{2} t^2 \right) \\ &= -4\pi^2 t^2 + 4\pi^2 t \end{aligned}$$

$$\text{alors : } u_1(t) = -4\pi^2 (t^2 - t) \quad (3.3.24)$$

$$u_2(t) = \delta_2 t + 4\pi^2 \int_0^t \int_s^1 u_1(r) dr ds \quad (3.3.25)$$

En remplaçant (3.3.24) dans (3.3.25) nous obtenons :

$$u_2(t) = \delta_2 t - 16\pi^4 \int_0^t \int_s^1 (r^2 - r) dr ds \quad (3.3.26)$$

$$\begin{aligned} u_2(1) = 0 &\Leftrightarrow \delta_2 = 16\pi^4 \int_0^1 \int_s^1 (r^2 - r) dr ds \\ &= 16\pi^4 \int_0^1 \left(-\frac{1}{3} s^3 + \frac{1}{2} s^2 - \frac{1}{6} \right) ds = -\frac{4\pi^4}{3} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \delta_2 = -\frac{4\pi^4}{3} \quad (3.3.27)$$

En remplaçant (3.3.27) dans (3.3.26) nous obtenons :

$$\begin{aligned} u_2(t) &= -\frac{4\pi^4}{3}t - 16\pi^4 \int_0^t \int_s^1 (r^2 - r) dr ds \\ &= -\frac{4\pi^4}{3}t - 16\pi^4 \int_0^t \left(-\frac{1}{3}s^3 + \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{6} \right) ds \\ &= \frac{4\pi^4}{3}t^4 - \frac{8\pi^4}{3}t^3 + \frac{4\pi^4}{3}t \\ \text{alors : } u_2(t) &= \frac{4\pi^4}{3}t^4 - \frac{8\pi^4}{3}t^3 + \frac{4\pi^4}{3}t \end{aligned} \quad (3.3.28)$$

$$\phi_2(t) = u_0(t) + u_1(t) + u_2(t) \quad (3.3.29)$$

En remplaçant (3.3.28) dans (3.3.29) nous obtenons :

$$\phi_2(t) = \frac{4\pi^4}{3}t^4 - \frac{8\pi^4}{3}t^3 - 4\pi^2 t^2 + 4\left(\pi^2 + \frac{\pi^4}{3}\right)t \quad (3.3.30)$$

🚦 La résolution par la méthode des différences finies :

$$\forall i \in \{0, \dots, N+1\} : a_i = a(t_i) = 0, \quad b_i = b(t_i) = -4\pi^2, \quad c_i = c(t_i) = -4\pi^2$$

$$M = \frac{1}{2h^2} \begin{pmatrix} -(4 - 2(\pi h)^2) & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -(4 - 2(\pi h)^2) & 2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -(4 - 2(\pi h)^2) & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -(4 - 2(\pi h)^2) \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$\tilde{c} = (\pi^2, \dots, \pi^2)^t$$

On pose $N = 9$ alors : $h = \frac{1}{10} = 0.1$, alors:

$$M = \begin{pmatrix} \pi^2 - 200 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 100 & \pi^2 - 200 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 100 & \pi^2 - 200 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 100 & \pi^2 - 200 \end{pmatrix} \text{ et : } \tilde{c} = (\pi^2, \dots, \pi^2)^t$$

La résolution numérique du système $M\tilde{u} = \tilde{c}$ nous donne $\tilde{u} = (u_1, \dots, u_N)^t$.

Test Numérique 3.2 :

i	t_i	u_i	$\phi_2(t_i)$
01	$+1.0000000000 \times 10^{-01}$	$+4.7543862305 \times 10^{+01}$	$+1.6294166692 \times 10^{+01}$
02	$+2.0000000000 \times 10^{-01}$	$+9.0494029528 \times 10^{+01}$	$+3.0422049878 \times 10^{+01}$
03	$+3.0000000000 \times 10^{-01}$	$+1.2461149007 \times 10^{+02}$	$+4.1292667739 \times 10^{+01}$
04	$+4.0000000000 \times 10^{-01}$	$+1.4652898556 \times 10^{+02}$	$+4.8126747547 \times 10^{+01}$
05	$+5.0000000000 \times 10^{-01}$	$+1.5408334588 \times 10^{+02}$	$+5.0456725665 \times 10^{+01}$
06	$+6.0000000000 \times 10^{-01}$	$+1.4652898556 \times 10^{+02}$	$+4.8126747547 \times 10^{+01}$
07	$+7.0000000000 \times 10^{-01}$	$+1.2461149007 \times 10^{+02}$	$+4.1292667739 \times 10^{+01}$
08	$+8.0000000000 \times 10^{-01}$	$+9.0494029528 \times 10^{+01}$	$+3.0422049878 \times 10^{+01}$
09	$+9.0000000000 \times 10^{-01}$	$+4.7543862305 \times 10^{+01}$	$+1.6294166692 \times 10^{+01}$

i	$ \varepsilon_i $	$ \rho(t_i) - \phi_2(t_i) $	Comparaison
01	$+4.6734845311 \times 10^{+01}$	$+1.6485149697 \times 10^{+01}$	$ \varepsilon_1 \geq \rho(t_1) - \phi_2(t_1) $
02	$+9.0185012534 \times 10^{+01}$	$+3.1113032884 \times 10^{+01}$	$ \varepsilon_2 \geq \rho(t_2) - \phi_2(t_2) $
03	$+1.2492050707 \times 10^{+02}$	$+4.2601684734 \times 10^{+01}$	$ \varepsilon_3 \geq \rho(t_3) - \phi_2(t_3) $
04	$+1.4733800255 \times 10^{+02}$	$+4.9935764542 \times 10^{+01}$	$ \varepsilon_4 \geq \rho(t_4) - \phi_2(t_4) $
05	$+1.5508334588 \times 10^{+02}$	$+5.2456725665 \times 10^{+01}$	$ \varepsilon_5 \geq \rho(t_5) - \phi_2(t_5) $
06	$+1.4733800255 \times 10^{+02}$	$+4.9935764542 \times 10^{+01}$	$ \varepsilon_6 \geq \rho(t_6) - \phi_2(t_6) $
07	$+1.2492050707 \times 10^{+02}$	$+4.2601684734 \times 10^{+01}$	$ \varepsilon_7 \geq \rho(t_7) - \phi_2(t_7) $
08	$+9.0185012533 \times 10^{+01}$	$+3.1113032883 \times 10^{+01}$	$ \varepsilon_8 \geq \rho(t_8) - \phi_2(t_8) $
09	$+4.6734845311 \times 10^{+01}$	$+1.6485149697 \times 10^{+01}$	$ \varepsilon_9 \geq \rho(t_9) - \phi_2(t_9) $

Nous avons pour $i \in 1, \dots, 9$: $|\varepsilon_i| \geq |\rho(t_i) - \phi_2(t_i)|$, alors on peut dire dans

cette exemple la méthode décompositionnelle converge plus vite vers la solution exacte que la méthode des différences finies

3.3.2. Comparaison avec la méthode de RAYLEIGH RITZ GALERKIN :

Exemple 3.3 :

Étudions la résolution de l'équation suivante :

$$\begin{cases} u''(t) = 2u'(t) - u(t) + 2\exp(t) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (3.3.31)$$

par la méthode décompositionnelle et la méthode de RAYLEIGH RITZ GALERKIN avec : $\varphi_i(t) = t^{i+2} - t$, $i = 1, \dots, N$.

Nous avons : $a(t) = 2$, $b(t) = -1$, $c(t) = 2\exp(t)$.

✚ La résolution analytique donne la solution exacte :

$$\rho(t) = (t^2 - t)\exp(t) \quad (3.3.32)$$

✚ La résolution par la méthode décompositionnelle donne :

$$u_0(t) = \delta_0 t \quad (3.3.33)$$

$$u_0(1) = 0 \Leftrightarrow \delta_0 = 0 \quad (3.3.34)$$

En remplaçant (3.3.34) dans (3.3.33) nous obtenons :

$$u_0(t) = 0 \quad (3.3.35)$$

$$u_1(t) = \delta_1 t + 2 \int_0^t u_0(s) ds + \int_0^t \int_s^1 u_0(r) dr ds - 2 \int_0^t \int_s^1 dr ds \quad (3.3.36)$$

En remplaçant (3.3.35) dans (3.3.36) nous obtenons :

$$u_1(t) = \delta_1 t - 2 \int_0^t \int_s^1 dr ds \quad (3.3.37)$$

$$u_1(1) = 0 \Leftrightarrow \delta_1 = 2 \int_0^1 \int_s^1 dr ds$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_0^1 (1-s) ds = 1 \\
&\Leftrightarrow \delta_1 = 1
\end{aligned} \tag{3.3.38}$$

En remplaçant (3.3.38) dans (3.3.37) nous obtenons :

$$\begin{aligned}
u_1(t) &= t - 2 \int_0^t \int_s^1 dr ds \\
&= t - 2 \int_0^t (1-s) ds \\
&= t - 2 \left(t - \frac{1}{2} t^2 \right) \\
\text{alors : } u_1(t) &= t^2 - t
\end{aligned} \tag{3.3.39}$$

$$u_2(t) = \delta_2 t + 2 \int_0^t u_1(s) ds + \int_0^t \int_s^1 u_1(r) dr ds - 2 \int_0^t \int_s^1 r dr ds \tag{3.3.40}$$

En remplaçant (3.3.39) dans (3.3.40) nous obtenons :

$$u_2(t) = \delta_2 t + 2 \int_0^t (s^2 - s) ds + \int_0^t \int_s^1 (r^2 - r) dr ds - 2 \int_0^t \int_s^1 r dr ds \tag{3.3.41}$$

$$\begin{aligned}
u_2(1) = 0 &\Leftrightarrow \delta_2 = -2 \int_0^1 (s^2 - s) ds - \int_0^1 \int_s^1 (r^2 - r) dr ds + 2 \int_0^1 \int_s^1 r dr ds \\
&= \frac{1}{3} - \int_0^1 \left(-\frac{1}{3} s^3 + \frac{1}{2} s^2 - \frac{1}{6} \right) ds + \int_0^1 (1 - s^2) ds \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{2}{3} = \frac{13}{12} \\
&\Leftrightarrow \delta_2 = \frac{13}{12}
\end{aligned} \tag{3.3.42}$$

En remplaçant (3.3.42) dans (3.3.41) nous obtenons :

$$\begin{aligned}
u_2(t) &= \frac{13}{12} t + 2 \int_0^t (s^2 - s) ds + \int_0^t \int_s^1 (r^2 - r) dr ds - 2 \int_0^t \int_s^1 r dr ds \\
&= \frac{13}{12} t + \frac{2}{3} t^3 - t^2 + \int_0^t \left(-\frac{1}{3} s^3 + \frac{1}{2} s^2 - \frac{1}{6} \right) ds - \int_0^t (1 - s^2) ds
\end{aligned}$$

$$= \frac{13}{12}t + \frac{2}{3}t^3 - t^2 - \frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{6}t - t + \frac{1}{3}t^3$$

$$\text{alors : } u_2(t) = -\frac{1}{12}t^4 + \frac{7}{6}t^3 - t^2 - \frac{1}{12}t \quad (3.3.43)$$

$$\phi_2(t) = u_0(t) + u_1(t) + u_2(t) \quad (3.3.44)$$

En remplaçant (3.3.43) dans (3.3.44) nous obtenons :

$$\phi_2(t) = -\frac{1}{12}t^4 + \frac{7}{6}t^3 - \frac{13}{12}t \quad (3.3.45)$$

La résolution par la méthode de *RAYLEIGH RITZ GALERKIN* :

On pose $N = 2$:

Nous avons : $\phi_1(t) = t^3 - t$, $\phi_2(t) = t^4 - t$.

alors : $\phi_1'(t) = 3t^2 - 1$, $\phi_2'(t) = 4t^3 - 1$.

$$\forall i, j = 1, 2 : m_{ji} = \int_0^1 \phi_i'(t)(\phi_j'(t) - 2\phi_j(t))dt + \int_0^1 \phi_i(t)\phi_j(t)dt$$

$$\begin{aligned} m_{11} &= \int_0^1 \phi_1'(t)(\phi_1'(t) - 2\phi_1(t))dt + \int_0^1 (\phi_1(t))^2 dt \\ &= \int_0^1 (3t^2 - 1)(-2t^3 + 3t^2 + 2t - 1)dt + \int_0^1 (t^3 - t)^2 dt \\ &= \int_0^1 (-6t^5 + 9t^4 + 8t^3 - 6t^2 - 2t + 1)dt + \int_0^1 (t^6 - 2t^4 + t^2)dt \\ &= \frac{4}{5} + \frac{8}{105} = \frac{34}{35} \end{aligned}$$

$$m_{11} = \frac{34}{35}$$

$$\begin{aligned} m_{12} &= \int_0^1 \phi_1'(t)(\phi_2'(t) - 2\phi_1(t))dt + \int_0^1 \phi_1(t)\phi_2(t)dt \\ &= \int_0^1 (4t^3 - 1)(-2t^3 + 3t^2 + 2t - 1)dt + \int_0^1 (t^4 - t)(t^3 - t)dt \\ &= \int_0^1 (-8t^6 + 12t^5 + 8t^4 - 2t^3 - 3t^2 - 2t + 1)dt + \int_0^1 (t^7 - t^5 - t^4 + t^2)dt \end{aligned}$$

$$= \frac{67}{70} + \frac{11}{120} = \frac{881}{840}$$

$$m_{12} = \frac{881}{840}$$

$$\begin{aligned} m_{21} &= \int_0^1 \varphi_1'(t)(\varphi_2'(t) - 2\varphi_2(t))dt + \int_0^1 \varphi_1(t)\varphi_2(t)dt \\ &= \int_0^1 (3t^2 - 1)(-2t^4 + 4t^3 + 2t - 1)dt + \int_0^1 (t^3 - t)(t^4 - t)dt \\ &= \int_0^1 (-6t^6 + 12t^5 + 2t^4 + 2t^3 - 3t^2 - 2t + 1)dt + \int_0^1 (t^7 - t^5 - t^4 + t^2)dt \\ &= \frac{73}{70} + \frac{11}{120} = \frac{953}{840} \end{aligned}$$

$$m_{21} = \frac{953}{840}$$

$$\begin{aligned} m_{22} &= \int_0^1 \varphi_2'(t)(\varphi_2'(t) - 2\varphi_2(t))dt + \int_0^1 (\varphi_2(t))^2 dt \\ &= \int_0^1 (4t^3 - 1)(-2t^4 + 4t^3 + 2t - 1)dt + \int_0^1 (t^4 - t)^2 dt \\ &= \int_0^1 (-8t^7 + 16t^6 + 10t^4 - 8t^3 - 2t + 1)dt + \int_0^1 (t^8 - 2t^5 + t^2)dt \\ &= \frac{9}{7} + \frac{1}{9} = \frac{88}{63} \end{aligned}$$

$$m_{22} = \frac{88}{63}$$

$$\text{d'où : } M = \begin{pmatrix} \frac{34}{35} & \frac{881}{840} \\ \frac{953}{840} & \frac{88}{63} \end{pmatrix}$$

$$\forall j = 1, 2 : c_j = \int_0^1 2\varphi_j(t)\exp(t)dt$$

$$\begin{aligned} c_1 &= \int_0^1 2\varphi_1(t)\exp(t)dt \\ &= \int_0^1 2(t^3 - t)\exp(t)dt \\ &= 0 - \int_0^1 2(3t^2 - 1)\exp(t)dt \end{aligned}$$

$$= -4 \exp(1) - 2 + \int_0^1 12t \exp(t) dt$$

$$= -4 \exp(1) - 2 + 12 \exp(1) - \int_0^1 12 \exp(t) dt$$

$$= 8 \exp(1) - 2 - 12 \exp(1) + 12$$

$$c_1 = -4 \exp(1) + 10$$

$$c_2 = \int_0^1 2\varphi_2(t) \exp(t) dt$$

$$= \int_0^1 2(t^4 - t) \exp(t) dt$$

$$= 0 - \int_0^1 2(4t^3 - 1) \exp(t) dt$$

$$= -6 \exp(1) - 2 + \int_0^1 24t^2 \exp(t) dt$$

$$= -6 \exp(1) - 2 + 24 \exp(1) - \int_0^1 48t \exp(t) dt$$

$$= 18 \exp(1) - 2 - 48 \exp(1) + \int_0^1 48 \exp(t) dt$$

$$= -30 \exp(1) - 2 + 48 \exp(1) - 48$$

$$c_2 = 18 \exp(1) - 50$$

$$\text{d'où : } \tilde{c} = \begin{pmatrix} -4 \exp(1) + 10 \\ 18 \exp(1) - 50 \end{pmatrix}$$

$$M\tilde{u} = \tilde{c} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{34}{35} u_1 + \frac{881}{840} u_2 = -4 \exp(1) + 10 \\ \frac{953}{840} u_1 + \frac{88}{63} u_2 = 18 \exp(1) - 50 \end{cases}$$

La résolution numérique du système $M\tilde{u} = \tilde{c}$ nous donne $\tilde{u} = (u_1, u_2)^t$ où :

$$u_1 = -0.57723487668$$

$$u_2 = -0.29784708769$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} u(t) &= u_1 \varphi_1(t) + u_2 \varphi_2(t) \\ &= u_1(t^3 - t) + u_2(t^4 - t) \end{aligned}$$

$$= u_2 t^4 + u_1 t^3 - (u_1 + u_2)t$$

$$\text{d'où : } u(t) = u_2 t^4 + u_1 t^3 - (u_1 + u_2)t$$

$$u_1 = -0.57723487668$$

$$u_2 = -0.29784708769.$$

Test Numérique 3.3 :

i	t_i	$u(t_i)$	$\phi_2(t_i)$
01	$+1.0000000000 \times 10^{-01}$	$+8.6901176852 \times 10^{-02}$	$-1.0717500000 \times 10^{-01}$
02	$+2.0000000000 \times 10^{-01}$	$+1.6992195852 \times 10^{-01}$	$-2.0746666667 \times 10^{-01}$
03	$+3.0000000000 \times 10^{-01}$	$+2.4452668623 \times 10^{-01}$	$-2.9417500000 \times 10^{-01}$
04	$+4.0000000000 \times 10^{-01}$	$+3.0546486820 \times 10^{-01}$	$-3.6080000000 \times 10^{-01}$
05	$+5.0000000000 \times 10^{-01}$	$+3.4677117962 \times 10^{-01}$	$-4.0104166667 \times 10^{-01}$
06	$+6.0000000000 \times 10^{-01}$	$+3.6176546270 \times 10^{-01}$	$-4.0880000000 \times 10^{-01}$
07	$+7.0000000000 \times 10^{-01}$	$+3.4305272660 \times 10^{-01}$	$-3.7817500000 \times 10^{-01}$
08	$+8.0000000000 \times 10^{-01}$	$+2.8252314752 \times 10^{-01}$	$-3.0346666667 \times 10^{-01}$
09	$+9.0000000000 \times 10^{-01}$	$+1.7135206860 \times 10^{-01}$	$-1.7917500000 \times 10^{-01}$

i	$ \varepsilon_i $	$ \rho(t_i) - \phi_2(t_i) $	Comparaison
01	$+1.8636655948 \times 10^{-01}$	$+7.7096173733 \times 10^{-03}$	$ \varepsilon_1 \geq \rho(t_1) - \phi_2(t_1) $
02	$+3.6534639983 \times 10^{-01}$	$+1.2042225361 \times 10^{-02}$	$ \varepsilon_2 \geq \rho(t_2) - \phi_2(t_2) $
03	$+5.2799703582 \times 10^{-01}$	$+1.0704650409 \times 10^{-02}$	$ \varepsilon_3 \geq \rho(t_3) - \phi_2(t_3) $
04	$+6.6350279563 \times 10^{-01}$	$+2.7620725655 \times 10^{-03}$	$ \varepsilon_4 \geq \rho(t_4) - \phi_2(t_4) $
05	$+7.5895149730 \times 10^{-01}$	$+1.1138651009 \times 10^{-02}$	$ \varepsilon_5 \geq \rho(t_5) - \phi_2(t_5) $
06	$+7.9907397479 \times 10^{-01}$	$+2.8508512094 \times 10^{-02}$	$ \varepsilon_6 \geq \rho(t_6) - \phi_2(t_6) $
07	$+7.6594079517 \times 10^{-01}$	$+4.4713068568 \times 10^{-02}$	$ \varepsilon_7 \geq \rho(t_7) - \phi_2(t_7) $
08	$+6.3860969608 \times 10^{-01}$	$+5.2619881891 \times 10^{-02}$	$ \varepsilon_8 \geq \rho(t_8) - \phi_2(t_8) $
09	$+3.9271634860 \times 10^{-01}$	$+4.2189280002 \times 10^{-02}$	$ \varepsilon_9 \geq \rho(t_9) - \phi_2(t_9) $

Nous avons pour $i = 1, \dots, 9$, $|\varepsilon_i| \geq |\rho(t_i) - \phi_2(t_i)|$, alors on peut dire que dans cette exemple la méthode décompositionnelle converge plus vite vers la solution exacte que la méthode de *RAYLEIGH RITZ GALERKIN*.

Exemple 3.4 :

Étudions la résolution de l'équation suivante :

$$\begin{cases} u''(t) = -\pi^2 u(t) - \frac{\pi^2}{2} \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (3.3.46)$$

par la méthode décompositionnelle et la méthode de *RAYLEIGH RITZ*

GALERKIN avec : $\varphi_i(t) = t^{2i} - t^{2i-1}$, $i = 1, \dots, N$.

Nous avons : $a(t) = 0$, $b(t) = -\pi^2$, $c(t) = -\frac{\pi^2}{2}$.

✚ La résolution analytique donne la solution exacte :

$$\rho(t) = \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2} \quad (3.3.47)$$

✚ La résolution par la méthode décompositionnelle donne :

$$u_0(t) = \delta_0 t \quad (3.3.48)$$

$$u_0(1) = 0 \Leftrightarrow \delta_0 = 0 \quad (3.3.49)$$

En remplaçant (3.3.49) dans (3.3.48) nous obtenons :

$$u_0(t) = 0 \quad (3.3.50)$$

$$u_1(t) = \delta_1 t + \pi^2 \int_0^t \int_s^1 u_0(r) dr ds + \frac{\pi^2}{2} \int_0^t \int_s^1 dr ds \quad (3.3.51)$$

En remplaçant (3.3.50) dans (3.3.51) nous obtenons :

$$u_1(t) = \delta_1 t + \frac{\pi^2}{2} \int_0^t \int_s^1 dr ds \quad (3.3.52)$$

$$\begin{aligned} u_1(1) = 0 \Leftrightarrow \delta_1 &= -\frac{\pi^2}{2} \int_0^1 \int_s^1 dr ds \\ &= -\frac{\pi^2}{2} \int_0^1 (1-s) ds = -\frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \delta_1 = -\frac{\pi^2}{4} \quad (3.3.53)$$

En remplaçant (3.3.53) dans (3.3.52) nous obtenons :

$$\begin{aligned} u_1(t) &= -\frac{\pi^2}{4}t + \frac{\pi^2}{2} \int_0^t \int_s^1 dr ds \\ &= -\frac{\pi^2}{4}t + \frac{\pi^2}{2} \int_0^t (1-s) ds \\ &= -\frac{\pi^2}{4}t + \frac{\pi^2}{2} \left(t - \frac{1}{2}t^2 \right) \\ &= -\frac{\pi^2}{2}t^2 + \frac{\pi^2}{2}t \end{aligned}$$

$$\text{alors : } u_1(t) = -\frac{\pi^2}{2}(t^2 - t) \quad (3.3.54)$$

$$u_2(t) = \delta_2 t + \pi^2 \int_0^t \int_s^1 u_1(r) dr ds \quad (3.3.55)$$

En remplaçant (3.3.54) dans (3.3.55) nous obtenons :

$$u_2(t) = \delta_2 t - \frac{\pi^4}{2} \int_0^t \int_s^1 (r^2 - r) dr ds \quad (3.3.56)$$

$$\begin{aligned} u_2(1) = 0 &\Leftrightarrow \delta_2 = \frac{\pi^4}{2} \int_0^1 \int_s^1 (r^2 - r) dr ds \\ &= \frac{\pi^4}{2} \int_0^1 \left(-\frac{1}{3}s^3 + \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{6} \right) ds = -\frac{\pi^4}{24} \\ &\Leftrightarrow \delta_2 = -\frac{\pi^4}{24} \quad (3.3.57) \end{aligned}$$

En remplaçant (3.3.57) dans (3.3.56) nous obtenons :

$$\begin{aligned} u_2(t) &= -\frac{\pi^4}{24}t - \frac{\pi^4}{2} \int_0^t \int_s^1 (r^2 - r) dr ds \\ &= -\frac{\pi^4}{24}t - \frac{\pi^4}{2} \int_0^t \left(-\frac{1}{3}s^3 + \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{6} \right) ds \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi^4}{24} t^4 - \frac{\pi^4}{12} t^3 + \frac{\pi^4}{24} t$$

$$\text{alors : } u_2(t) = \frac{\pi^4}{24} t^4 - \frac{\pi^4}{12} t^3 + \frac{\pi^4}{24} t \quad (3.3.58)$$

$$\phi_2(t) = u_0(t) + u_1(t) + u_2(t) \quad (3.3.59)$$

En remplaçant (3.3.54) et (3.3.58) dans (3.3.59) nous obtenons :

$$\phi_2(t) = \frac{\pi^4}{24} t^4 - \frac{\pi^4}{12} t^3 - \frac{\pi^2}{2} t^2 + \left(\frac{\pi^4}{24} + \frac{\pi^2}{2} \right) t \quad (3.3.60)$$

🚦 La résolution par la méthode des éléments finis :

On pose $N = 2$:

Nous avons : $\varphi_1(t) = t^2 - t$ et $\varphi_2(t) = t^4 - t^3$

alors : $\varphi_i(t) = 2t - 1$ et $\varphi_i(t) = 4t^3 - 3t^2$

$$\forall i, j = 1, 2 : m_{ji} = \int_0^1 \varphi'_i(t) \varphi'_j(t) dt + \pi^2 \int_0^1 \varphi_i(t) \varphi_j(t) dt$$

$$\begin{aligned} m_{11} &= \int_0^1 (\varphi'_1(t))^2 dt + \pi^2 \int_0^1 (\varphi_1(t))^2 dt \\ &= \int_0^1 (2t - 1)^2 dt + \pi^2 \int_0^1 (t^2 - t)^2 dt \\ &= \int_0^1 (4t^2 - 4t + 1) dt + \pi^2 \int_0^1 (t^4 - 2t^3 + t^2) dt \\ &= \frac{1}{3} + \frac{\pi^2}{30} \end{aligned}$$

$$m_{11} = \frac{1}{3} + \frac{\pi^2}{30}$$

$$\begin{aligned} m_{12} &= \int_0^1 \varphi'_2(t) \varphi'_1(t) dt + \pi^2 \int_0^1 \varphi_2(t) \varphi_1(t) dt \\ &= \int_0^1 (4t^3 - 3t^2)(2t - 1) dt + \pi^2 \int_0^1 (t^4 - t^3)(t^2 - t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 (8t^4 - 10t^3 + 3t^2) dt + \pi^2 \int_0^1 (t^6 - 2t^5 + t^4) dt \\
&= \frac{1}{10} + \frac{\pi^2}{105} \\
m_{12} &= \frac{1}{10} + \frac{\pi^2}{105}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{21} &= \int_0^1 \varphi_1'(t) \varphi_2'(t) dt + \pi^2 \int_0^1 \varphi_1(t) \varphi_2(t) dt \\
&= \int_0^1 (2t-1)(4t^3 - 3t^2) dt + \pi^2 \int_0^1 (t^2 - t)(t^4 - t^3) dt \\
&= \int_0^1 (8t^4 - 10t^3 + 3t^2) dt + \pi^2 \int_0^1 (t^6 - 2t^5 + t^4) dt \\
&= \frac{1}{10} + \frac{\pi^2}{105} \\
m_{21} &= \frac{1}{10} + \frac{\pi^2}{105}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{22} &= \int_0^1 (\varphi_2'(t))^2 dt + \pi^2 \int_0^1 (\varphi_2(t))^2 dt \\
&= \int_0^1 (4t^3 - 3t^2)^2 dt + \pi^2 \int_0^1 (t^4 - t^3)^2 dt \\
&= \int_0^1 (16t^6 - 24t^5 + 9t^4) dt + \pi^2 \int_0^1 (t^8 - 2t^7 + t^6) dt \\
&= \frac{3}{35} + \frac{\pi^2}{252} \\
m_{22} &= \frac{3}{35} + \frac{\pi^2}{252}
\end{aligned}$$

$$\text{d'où : } M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{\pi^2}{30} & \frac{1}{10} + \frac{\pi^2}{105} \\ \frac{1}{10} + \frac{\pi^2}{105} & \frac{3}{35} + \frac{\pi^2}{252} \end{pmatrix}$$

$$\forall j=1,2 : c_j = -\frac{\pi^2}{2} \int_0^1 \varphi_j(t) dt$$

$$c_1 = -\frac{\pi^2}{2} \int_0^1 \varphi_1(t) dt$$

$$= -\frac{\pi^2}{2} \int_0^1 (t^2 - t) dt = \frac{\pi^2}{12}$$

$$c_1 = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\begin{aligned} c_2 &= -\frac{\pi^2}{2} \int_0^1 \varphi_2(t) dt \\ &= -\frac{\pi^2}{2} \int_0^1 (t^4 - t^3) dt = \frac{\pi^2}{40} \end{aligned}$$

$$c_2 = \frac{\pi^2}{40}$$

$$\text{d'où : } \tilde{c} = \begin{pmatrix} \frac{\pi^2}{12} \\ \frac{\pi^2}{40} \end{pmatrix}$$

$$M\tilde{u} = \tilde{c} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{3} + \frac{\pi^2}{30}\right)u_1 + \left(\frac{1}{10} + \frac{\pi^2}{105}\right)u_2 = \frac{\pi^2}{12} \\ \left(\frac{1}{10} + \frac{\pi^2}{105}\right)u_1 + \left(\frac{3}{35} + \frac{\pi^2}{252}\right)u_2 = \frac{\pi^2}{40} \end{cases}$$

La résolution numérique du système $M\tilde{u} = \tilde{c}$ nous donne $\tilde{u} = (u_1, u_2)^t$ où :

$$u_1 \approx 1.2166789205$$

$$u_2 \approx 0.85754615327$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} u(t) &= u_1\varphi_1(t) + u_2\varphi_2(t) \\ &= u_1(t^2 - t) + u_2(t^4 - t^3) \\ &= u_2t^4 - u_2t^3 + u_1t^2 - u_1t \end{aligned}$$

d'où : $u(t) = u_2t^4 - u_2t^3 + u_1t^2 - u_1t$ avec :

$$u_1 \approx 1.2166789205$$

$$u_2 \approx 0.85754615327$$

Test Numérique 3.4 :

i	t_i	$u(t_i)$	$\phi_2(t_i)$
01	$+1.0000000000 \times 10^{-01}$	$-1.1027289438 \times 10^{-01}$	$+8.4229185765 \times 10^{-01}$
02	$+2.0000000000 \times 10^{-01}$	$-2.0015692266 \times 10^{-01}$	$+1.5428653228 \times 10^{+00}$
03	$+3.0000000000 \times 10^{-01}$	$-2.7171019560 \times 10^{-01}$	$+2.0676272134 \times 10^{+00}$
04	$+4.0000000000 \times 10^{-01}$	$-3.2493271321 \times 10^{-01}$	$+2.3922252570 \times 10^{+00}$
05	$+5.0000000000 \times 10^{-01}$	$-3.7576636470 \times 10^{-01}$	$+2.5020480896 \times 10^{+00}$
06	$+6.0000000000 \times 10^{-01}$	$-3.6609492856 \times 10^{-01}$	$+2.3922252570 \times 10^{+00}$
07	$+7.0000000000 \times 10^{-01}$	$-3.4374407248 \times 10^{-01}$	$+2.0676272134 \times 10^{+00}$
08	$+8.0000000000 \times 10^{-01}$	$-2.8248135337 \times 10^{-01}$	$+1.5428653228 \times 10^{+00}$
09	$+9.0000000000 \times 10^{-01}$	$-1.7201621742 \times 10^{-01}$	$+8.4229185765 \times 10^{-01}$

i	$ \varepsilon_i $	$ \rho(t_i) - \phi_2(t_i) $	Comparaison
01	$+5.9914703217 \times 10^{-01}$	$+3.5341771986 \times 10^{-01}$	$ \varepsilon_1 \geq \rho(t_1) - \phi_2(t_1) $
02	$+1.1293198651 \times 10^{+00}$	$+6.1370238030 \times 10^{-01}$	$ \varepsilon_2 \geq \rho(t_2) - \phi_2(t_2) $
03	$+1.5731053181 \times 10^{+00}$	$+7.6623209097 \times 10^{-01}$	$ \varepsilon_3 \geq \rho(t_3) - \phi_2(t_3) $
04	$+1.9140776562 \times 10^{+00}$	$+8.0308031394 \times 10^{-01}$	$ \varepsilon_4 \geq \rho(t_4) - \phi_2(t_4) $
05	$+2.1360226859 \times 10^{+00}$	$+7.2379176849 \times 10^{-01}$	$ \varepsilon_5 \geq \rho(t_5) - \phi_2(t_5) $
06	$+2.2230946506 \times 10^{+00}$	$+5.3522553492 \times 10^{-01}$	$ \varepsilon_6 \geq \rho(t_6) - \phi_2(t_6) $
07	$+2.1608905704 \times 10^{+00}$	$+2.5048071555 \times 10^{-01}$	$ \varepsilon_7 \geq \rho(t_7) - \phi_2(t_7) $
08	$+1.9383368595 \times 10^{+00}$	$+1.1299018336 \times 10^{-01}$	$ \varepsilon_8 \geq \rho(t_8) - \phi_2(t_8) $
09	$+1.5502035485 \times 10^{-01}$	$+5.3589547340 \times 10^{-01}$	$ \varepsilon_9 \leq \rho(t_9) - \phi_2(t_9) $

Nous avons pour $i = 1, \dots, 8$, $|\varepsilon_i| \geq |\rho(t_i) - \phi_2(t_i)|$

et pour $i = 9$: $|\varepsilon_9| \leq |\rho(t_9) - \phi_2(t_9)|$ alors on peut dire que dans cet exemple la méthode décompositionnelle converge plus vite vers la solution exacte que la méthode de *RAYLEIGH RITZ GALERKIN*.

CONCLUSION

Nous avons été conduit à faire une étude adaptive et comparative d'une méthode unificatrice pour résoudre toutes les équations différentielles qu'elles soient linéaires ou non avec éventuellement des conditions initiales et aux limites. Cette méthode satisfait l'un des objectifs fondamentaux de la physique qui consiste à ne pas détruire la nature du phénomène modélisé en le linéarisant ou en le discrétisant en espace et en temps ou encore en le simplifiant de façon outrancière. La technique décompositionnelle répond aux objectifs ci-dessus en ce sens que l'on ne cherche pas à tout prix à simplifier le modèle, même s'il est non linéaire et qu'en plus la solution sera trouvée sous "forme analytique" à l'aide d'une série (éventuellement tronquée) de fonctions.

Nous avons donné dans le premier chapitre de nouveaux types de polynômes d'ADOMIAN pour une fonction à deux variables. En utilisant ces polynômes nous avons introduit une nouvelle technique que nous avons appelé la méthode décompositionnelle itérative qui permet de résoudre un grand nombre d'équations différentielles non linéaires. Cette nouvelle technique généralise quelques travaux parus ces deux dernières années. Ces travaux utilisent la technique de récolement par morceaux. Nous avons donné aussi une technique permettant l'application de la méthode aux problèmes aux limites, cette technique ouvre la voie à la résolution des équations aux dérivées partielles.

Dans le deuxième chapitre, nous avons démontré que la méthode décompositionnelle itérative du premier ordre se réduit à celle d'EULER, et d'ordre m se réduit à celle de TAYLOR d'ordre m . Et si le problème classique est linéaire la méthode décompositionnelle itérative du 4^{ème} ordre se réduit à

CONCLUSION

celle de RUNGE – KUTTA « classique », si le problème n'est pas linéaire, nous avons déduit grâce aux tests numériques 2.1 que la méthode de RUNGE – KUTTA « classique » converge plus vite vers la solution exacte que la méthode décompositionnelle itérative d'ordre 4. D'après le test numérique 2.2 nous avons déduit que la méthode décompositionnelle itérative converge plus rapidement vers la solution exacte que la méthode de MILNE et d'après le test numérique 2.3 nous trouvons que la méthode d'ADAMS converge plus vite vers la solution exacte que la méthode décompositionnelle itérative.

A l'aide des tests numériques 3.1, 3.2, 3.3 et 3.4 nous avons montré que la méthode décompositionnelle converge plus vite que la méthode des différences finies et la méthode de RAYLEIGH RITZ GALERKIN.

En appliquant la méthode décompositionnelle aux équations différentielles non linéaires dérivant de différents problèmes avec des conditions aux limites, nous rencontrons souvent des problèmes pour identifier les termes de la série solution.

Nous disposons maintenant d'une puissante méthode de résolution, d'équations fonctionnelles non linéaires, qui ne nécessite ni discrétisation ni linéarisation et qui devient d'utilisation facile depuis la mise en évidence de nouvelles formules de polynômes et de la méthode itérative.

RÉFÉRENCE

- [01] **K. ABBAOUI.** Les fondements mathématiques de la méthode décompositionnelle d'ADOMIAN et application a la résolution de problèmes issus de la biologie et de la médecine. *Thèse de doctorat de l'université PIERRE et MARIE CURIE, Paris VI, 1995.*
- [02] **A. KOLOMOGOROV et S. FONINE.** Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse combinatoire. *Edition mir, Moscou, 1987.*
- [03] **K. ABBAOUI and Y. CHERRUAULT.** Convergence of Adomian's method applied to differential equations. *Computers Math. Applic. Vol. 28, No. 5, pp. 103-109, 1994.*
- [04] **N. HIMOUN, K. ABBAOUI and Y. CHERRUAULT.** New results on Adomian method. *Kybernetes, Vol. 32, No. 4, pp. 523-539, 2003.*
- [05] **M. INC, Y. CHERRUAULT and K. ABBAOUI.** A computational approach to the wave equations : an application of the decomposition method. *Kybernetes, Vol. 33, No. 2, 2004.*
- [06] **M. BENABIDELLAH.** Application of the Adomian method. *Kybernetes, Vol. 33 No. 1, pp. 119-132.*
- [07] **J-P. DEMAILLY.** Analyse Numérique et équations différentielles. *O P U, Alger, 1993.*
- [08] **M. SIBONY et J-C. MARDON.** Analyse numérique II : Approximations et équations différentielles. *Hermann, Paris, 1982.*
- [09] **J-P. NOUGIER.** Méthodes de calcul numérique 2 : Fonctions équations aux dérivées. *HERMES Science Publications, Paris, 2001.*
- [10] **J. RAPPAZ et M. PICASSO.** Introduction à l'analyse numérique. *Presses polytechniques et universitaires romandes, Suisse, 2000.*

Abstract :

In this memory, we applied the decomposition method to the ordinary differential equations for the resolution of some problems with initial and limit conditions. Then we have comparing the iterative decomposition method with the classical numerical methods which solve the problems with initial conditions. Finally we have comparing the decomposition method with the classical methods which solve the problems with limit conditions.

Key – words :

Decomposition method, O D E, problems with initial conditions, problems with limit conditions.

Résumé :

Dans ce mémoire, nous avons étudié l'application de la méthode décompositionnelle aux équations différentielles ordinaires pour la résolution de quelques problèmes aux conditions initiales et aux limites. Ensuite nous avons comparé la méthode décompositionnelle itérative avec les méthodes numériques classiques qui résolvent les problèmes aux conditions initiales. Enfin nous avons comparé la méthode décompositionnelle avec les méthodes classiques qui résolvent les problèmes aux limites.

Mots – clés :

Méthode décompositionnelle, E D O, problèmes aux conditions initiales, problèmes aux limites.

ملخص :

في هذه المذكرة، درسنا تطبيق طريقة التفكيك في المعادلات التفاضلية العادية لحلول بعض المسائل ذات شروط ابتدائية و نهائية. ثم قارنا طريقة التفكيك التكرارية بالطرق العددية الكلاسيكية الخاصة بحل المسائل ذات شروط ابتدائية. في الأخير قارنا طريقة التفكيك بطرق الحل الكلاسيكية الخاصة بحل المسائل ذات شروط نهائية.

مفاتيح – كلمات :

طريقة التفكيك، م ت ع، مسائل ذات شروط ابتدائية، مسائل ذات شروط نهائية.