

Table des matières

Remerciements	3
Notation	4
Introduction	5
1 Groupes dont les sous-groupes propres vérifient une propriété donnée	9
1.1 Introduction	10
1.2 Groupes non- $\mathfrak{N}$ minimaux	10
1.3 Groupes non- $\mathfrak{FA}$ et non- $\mathfrak{AF}$ minimaux	13
1.4 Groupes non- $\mathfrak{FN}$ et non- $\mathfrak{NF}$ minimaux	14
1.5 Groupes non- $(L\mathfrak{F})\mathfrak{N}$ et non- $(L\mathfrak{F})\mathfrak{N}_k$ minimaux	15
1.6 Groupes non- $\mathfrak{CN}$ et non- $\mathfrak{NC}$ minimaux	16
1.7 Groupes non- $\mathfrak{NN}$ et non- $\mathfrak{NR}$ minimaux	18
1.8 Groupes non- $\mathfrak{B}$ minimaux	20
1.9 Groupes non- $\mathfrak{FB}$ et non- $(L\mathfrak{F})\mathfrak{B}$ minimaux	21
1.10 Groupes non- $\mathfrak{CB}$ et non- $\mathfrak{BC}$ minimaux	22
1.11 Groupes non- $\mathfrak{BR}$ minimaux	22
1.12 Groupes non-hypercycliques minimaux	23
2 Groupes dont tous les sous-groupes propres sont (localement finis)- par-(localement nilpotents)	25
2.1 Introduction	26

Table des matières

2.2	Groupes non- $\Omega_\pi \mathfrak{J}$ minimaux	27
2.3	Groupes non- $\Omega_\pi \mathfrak{Y}$ minimaux	30
2.4	Groupes non- $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{X}$ minimaux	33
2.5	Groupes non- $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{V}$ minimaux	36
2.6	Quelques Conséquences	38
3	Groupes dont tous les sous-groupes propres de rang infini sont $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$	44
3.1	Introduction	45
3.2	Groupes dont les sous-groupes propres de rang infini appartiennent à une classe donnée	46
3.3	Groupes dont tous les sous-groupes propres de rang infini sont $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$	49
3.3.1	Le cas non-parfait et $\mathfrak{F}$ –parfait	49
3.3.2	Le cas $\mathfrak{F}$ –parfait et non simple	51
3.3.3	Groupes dont tous les sous-groupes propres de rang infini sont $\mathfrak{F}_\pi \mathfrak{N}_c$ ou $\mathfrak{C}_\pi \mathfrak{N}_c$	54
3.3.4	Perspectives	56
	Bibliographie	57

Remerciements

J'exprime tout d'abord ma gratitude à mon directeur de thèse Mr. Nadir Trabelsi pour m'avoir soutenu dans mon parcours. D'abord pour mon mémoire de magister et ensuite durant la thèse, il m'a fait découvrir des sujets passionnants en théorie des groupes infinis. Sa patience, son savoir et ses remarques m'ont toujours permis de mieux comprendre les difficultés auxquelles j'étais confronté et de les surmonter. Je lui en suis reconnaissante de m'avoir accordé beaucoup de son temps lorsque j'en avais besoin. Merci infiniment de votre disponibilité sans vous tout ce travail n'aurait jamais vu le jour...

J'exprime mes remerciements à monsieur Bensalem Naceurdine Professeur à l'Université Sétif 1, pour avoir accepté d'examiner ce travail et de présider le jury.

Je remercie chaleureusement les examinateurs Noui Lemnouar Professeur à l'Université de Batna, Badis Abdelhafid Maître de conférence A à l'Université de Khenchela et Guerboussa Yacine Maître de conférence A à l'Université de Ouargla qui m'ont honoré en acceptant d'évaluer mon travail.

Mes remerciements vont à tous mes enseignants, tout le personnel administratif et à tous mes amis qui m'ont soutenue durant les moments difficiles et à tous ceux qui de près ou de loin m'ont apporté leur aide.

Mes derniers remerciements iront à ma très chère famille : soeurs, frères, beau frère, neveux, nièces...et en particulier à mes parents qui ont toujours été là pour moi. Merci de votre confiance et votre soutien.

Notation

Soient G un groupe, n un entier positif et $x, y, x_1, x_2, \dots, x_n$ des éléments de G . On utilisera les notations suivantes :

$$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}x^y; \text{ où } x^y = y^{-1}xy$$

$$[x, {}_0y] = x, [x, {}_ny] = [[x, {}_{n-1}y], y] \text{ et } [x_1, x_2, \dots, x_n] = [[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}], x_n]$$

$G^{(0)} = G$, $G^{(1)} = G'$ le sous-groupe dérivé de G et $G^{(n)}$ le $(n+1)^{\text{ème}}$ terme de la série dérivée de G .

$\gamma_1(G) = G$, $\gamma_2(G) = G'$ et $\gamma_n(G)$ le $n^{\text{ème}}$ terme de la série centrale descendante de G .

$Z_0(G) = 1$, $Z_1(G) = Z(G)$ le centre de G et $Z_n(G)$ le $(n+1)^{\text{ème}}$ terme de la série centrale ascendante de G .

$\mathfrak{A}$ la classe des groupes abéliens.

$\mathfrak{B}$ la classe des groupes de Baer.

$\mathfrak{C}$ la classe des groupes de Chernikov.

$\mathfrak{F}$ (resp. $\mathfrak{F}_\pi$) la classe des groupes finis (resp. π -groupes finis).

$L\mathfrak{F}$ (resp. $L\mathfrak{F}_\pi$) la classe des groupes localement finis (resp. localement π -groupes finis).

$\mathfrak{N}$ (resp. $\mathfrak{N}_k$) la classe des groupes nilpotents (resp. nilpotents de classe $\leq k$).

π un ensemble de nombres premiers.

$\mathfrak{R}$ la classe des groupes de rang fini (ou bien de rang de Prüfer fini).

Si $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ sont deux classes de groupes, alors le produit $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ désigne la classe des groupes G qui admettent un sous-groupe normal $N \in \mathfrak{X}$ tel que $G/N \in \mathfrak{Y}$.

C_{p^∞} groupe quasicyclique.

Introduction

Cette thèse se compose de deux parties qui portent sur deux problématiques étroitement liées, mais qui peuvent être considérées indépendamment l'une de l'autre. La première partie reprend d'ailleurs notre article paru en 2015 au "*Publ. Math. Debrecen*" [21] et qui fait l'objet du deuxième chapitre de cette thèse.

Depuis plusieurs années, je m'intéresse plus particulièrement aux groupes non- $(\mathfrak{P})$ minimaux, c'est-à-dire aux groupes qui n'appartiennent pas à la classe $(\mathfrak{P})$ alors que tous leurs sous-groupes propres le sont ; où $(\mathfrak{P})$ est une classe (ou une propriété) de groupes donnée.

Cette problématique classique en théorie des groupes est très ancienne puisqu'elle remonte à 1903 quand Miller et Moreno [35] ont caractérisé les groupes finis non-abéliens minimaux en démontrant, entre autres, que de tels groupes sont métabéliens. Plus tard, en 1924 O. J. Schmidt [43] a classifié les groupes finis non-nilpotents minimaux en démontrant que de tels groupes sont résolubles de longueur ≤ 3 et leurs ordres sont divisibles par deux nombres premiers distincts. Il est naturel d'étendre ce type d'étude aux groupes infinis, mais ce n'est qu'en 1964 que cette question a été traitée pour la première fois dans le cas des groupes infinis [37]. Depuis la parution de cet article ce type d'étude a fait l'objet de nombreuses publications faites par plusieurs auteurs.

Dans le chapitre 1 de la thèse, nous donnerons une synthèse de certains résultats qui ont été obtenus sur les groupes non- $\mathfrak{P}$ minimaux. Notamment, nous exposerons des résultats sur les groupes non- $\mathfrak{N}$ minimaux [37], [44], non- $\mathfrak{FA}$ et non- $\mathfrak{AF}$ minimaux [8],

Introduction

[12], [36], non- $\mathfrak{F}\mathfrak{N}$ et non- $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ minimaux [11], [47], [3], [9], [10], [12], [36], non- $(L\mathfrak{F})\mathfrak{N}$ minimaux [20], [46], non- $\mathfrak{C}\mathfrak{N}$ et non- $\mathfrak{N}\mathfrak{C}$ minimaux [1], [3], [13], [36], [40], non- $\mathfrak{R}\mathfrak{N}$ et non- $\mathfrak{N}\mathfrak{R}$ minimaux [24], [25], [26], non- $\mathfrak{B}$ minimaux [2], [48], non- $\mathfrak{F}\mathfrak{B}$ et non- $(L\mathfrak{F})\mathfrak{B}$ minimaux [4], [5], non- $\mathfrak{C}\mathfrak{B}$ et non- $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ minimaux [1], [6], non- $\mathfrak{B}\mathfrak{R}$ minimaux [6] et non-hypercycliques minimaux [19].

En 1964, Newman et Wiegold ont prouvé dans [37, Théorème 3.3] que si G est un groupe non- $\mathfrak{N}$ minimal de type infini ayant des sous-groupes maximaux, alors G est un p -groupe métabélien de Chernikov pour un certain premier p , et par conséquent G est hypercentral ; où $\mathfrak{N}$ désigne la classe des groupes nilpotents.

Notons aussi qu'en 1997, H. Smith dans [44] a établi un résultat sur les groupes non- $\mathfrak{N}$ minimaux de type infini n'ayant pas de sous-groupes maximaux en démontrant, entre autres, que de tels groupes sont des p -groupes dénombrables (voir le Théorème 1.2.6).

Mon premier travail a été de généraliser ces résultats aux groupes non- $(L\mathfrak{F})\mathfrak{N}$ et non- $(L\mathfrak{F})\mathfrak{N}_c$ minimaux de type infini ; où $L\mathfrak{F}$ désigne la classe des groupes localement finis, $\mathfrak{N}_c$ désigne la classe des groupes nilpotents de classe au plus égale à c et c est un entier strictement positif. Plus précisément, nous avons montré que les groupes non- $(L\mathfrak{F})\mathfrak{N}$ et non- $(L\mathfrak{F})\mathfrak{N}_c$ minimaux de type infini n'existent pas. Ce travail a donné lieu à un article paru en 2007 [20].

Après cela, notre attention est consacrée d'ailleurs à généraliser ce résultat pour la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}$, où π est un ensemble donné de nombres premiers et $L\mathfrak{F}_\pi$ désigne la classe des π -groupes localement finis.

Dans le chapitre 2, nous allons décrire les groupes non- $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}$ minimaux de type infini en démontrant que de tels groupes sont exactement les p -groupes non- $\mathfrak{N}$ minimaux, où $p \notin \pi$.

En fait ce résultat est une conséquence d'un résultat plus général en considérant une classe $\mathfrak{X}$ de groupes localement nilpotents qui est stable par passage aux sous-groupes et quotients et telle que tout groupe non- $\mathfrak{X}$ minimal localement gradué infini soit un p -groupe dénombrable, où p est un nombre premier. Plus précisément, nous allons démontrer qu'un groupe G est non- $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{X}$ minimal de type infini si et seulement s'il existe un nombre premier $p \notin \pi$ tel que G soit un p -groupe non- $\mathfrak{X}$ minimal de type infini.

Introduction

De plus, nous avons montré dans [20] qu'un groupe localement gradué dont tous les sous-groupes propres sont dans la classe $(L\mathfrak{F})\mathfrak{N}_c$ est aussi dans la classe $(L\mathfrak{F})\mathfrak{N}_c$.

Dans le chapitre 2 de cette thèse, on démontre un résultat analogue pour la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$ et celui-ci est une conséquence d'un résultat plus général en considérant une variété $\mathfrak{V}$ de groupes localement nilpotents. Plus précisément, on démontre que si G est un groupe localement gradué infini dont tous les sous-groupes propres sont dans la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{V}$, alors G est dans la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{V}$.

Une fois ce travail accompli. Nous nous sommes intéressés à une autre problématique qui consiste à étudier et caractériser les groupes G de rang infini dont les sous-groupes propres de rang infini appartiennent à une classe donnée $\mathfrak{P}$. Ce type d'étude consiste d'abord de voir si tous les sous-groupes propres de G sont dans $\mathfrak{P}$, ensuite de voir si le groupe G lui-même est dans $\mathfrak{P}$, notamment quand les groupes non- $\mathfrak{P}$ minimaux sont de rang fini.

Historiquement, cette problématique trouve son origine en 1951 dans un ancien résultat de A. I. Mal'cev [33] qui affirme qu'un groupe localement nilpotent de rang infini contient un sous-groupe abélien de rang infini. Puis en 1971 V. P. Sunkov [45] a établi un résultat similaire à celui de Mal'cev pour les groupes localement finis de rang infini. Ensuite M. I. Kargapolov [29] en 1962 a montré qu'un groupe résoluble de rang infini admet au moins un sous-groupe abélien de rang infini, par contre Y. I. Merzljakov [34] en 1969 a montré qu'il existe un groupe localement résoluble de rang infini dont lequel tout sous-groupe abélien est de rang fini. Motivé par cela, l'étude de tels groupes a été un sujet de recherches intensives depuis ces dernières décennies et a récemment connu un essor considérable notamment pour certaines classes de groupes résolubles généralisés.

On trouvera dans le chapitre 3, une synthèse des résultats qui ont été publiés récemment sur cette dernière problématique pour différentes classes de groupes, notamment celles qu'on rencontre le plus souvent dans la littérature. On citera par exemple [16], [17], [18], [22], [23].

En 2014, M. De Falco, F. De Giovanni, C. Musella et N. Trabelsi [16] ont montré que si G est un groupe fortement localement gradué de rang infini dont tous les sous-groupes propres de rang infini sont dans la classe $(L\mathfrak{F})\mathfrak{A}$, alors G est aussi dans $(L\mathfrak{F})\mathfrak{A}$;

Introduction

où $\mathfrak{A}$ désigne la classe des groupes abéliens.

Récemment, F. De Giovanni et M. Trombetti [18] ont généralisé ce résultat en remplaçant la classe des groupes $(L\mathfrak{F})\mathfrak{A}$ par celle des groupes $(L\mathfrak{F})\mathfrak{N}$.

Dans le chapitre 3, on se propose de généraliser ces résultats pour la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$. Plus précisément, on établira qu'un groupe $\mathfrak{F}$ -parfait fortement localement gradué de rang infini dont tous les sous-groupes propres de rang infini sont dans la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$, est lui-même dans $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$ s'il est non-parfait ou bien s'il n'admet pas une image homomorphe simple de rang infini ; où c est un entier strictement positif.

Nous allons démontrer également qu'un groupe fortement localement gradué de rang infini dont tous les sous-groupes propres de rang infini sont dans la classe $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{N}_c$ (respectivement, $\mathfrak{C}_\pi\mathfrak{N}_c$) est lui-même dans la classe $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{N}_c$ (respectivement, $\mathfrak{C}_\pi\mathfrak{N}_c$) où $\mathfrak{C}_\pi = (L\mathfrak{F}_\pi) \cap \mathfrak{C}$, $\mathfrak{F}_\pi = (L\mathfrak{F}_\pi) \cap \mathfrak{F}$, $\mathfrak{C}$ désigne la classe des groupes de Chernikov et c est un entier strictement positif.

Chapitre 1

Groupes dont les sous-groupes propres vérifient une propriété donnée

Sommaire

1.1	Introduction	10
1.2	Groupes non- $\mathfrak{N}$ minimaux	10
1.3	Groupes non- $\mathfrak{F}\mathfrak{A}$ et non- $\mathfrak{A}\mathfrak{F}$ minimaux	13
1.4	Groupes non- $\mathfrak{F}\mathfrak{N}$ et non- $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ minimaux	14
1.5	Groupes non- $(L\mathfrak{F})\mathfrak{N}$ et non- $(L\mathfrak{F})\mathfrak{N}_k$ minimaux	15
1.6	Groupes non- $\mathfrak{C}\mathfrak{N}$ et non- $\mathfrak{N}\mathfrak{C}$ minimaux	16
1.7	Groupes non- $\mathfrak{N}\mathfrak{N}$ et non- $\mathfrak{N}\mathfrak{N}$ minimaux	18
1.8	Groupes non- $\mathfrak{B}$ minimaux	20
1.9	Groupes non- $\mathfrak{F}\mathfrak{B}$ et non- $(L\mathfrak{F})\mathfrak{B}$ minimaux	21
1.10	Groupes non- $\mathfrak{C}\mathfrak{B}$ et non- $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ minimaux	22
1.11	Groupes non- $\mathfrak{B}\mathfrak{N}$ minimaux	22
1.12	Groupes non-hypercycliques minimaux	23

1.1 Introduction

Etant donnée une classe de groupes $\mathfrak{X}$, on définit un groupe non- $\mathfrak{X}$ minimal comme étant un groupe n'appartenant pas à la classe $\mathfrak{X}$ alors que tous ses sous-groupes propres le sont. Historiquement, l'étude de ce type de groupes a commencé au début du 20ème siècle dans le cas des groupes finis. A titre d'exemple, en 1903 Miller et Moreno [35] ont étudié et caractérisé les groupes finis non-abéliens dont tous les sous-groupes propres sont abéliens et ils ont établi, entre autres, que de tels groupes sont métabéliens et leurs ordres sont divisibles par au plus deux nombres premiers. Puis O. J. Schmidt [43] en 1924, a classifié les groupes finis non-nilpotents dont tous les sous-groupes propres sont nilpotents en démontrant que de tels groupes sont résolubles de longueur ≤ 3 et leurs ordres sont divisibles par deux nombres premiers distincts. Ce type d'étude peut s'étendre aux groupes infinis, mais ce n'est qu'en 1964 que cette question a été traitée pour la première fois pour les groupes infinis. En effet, M. F. Newman et J. Wiegold dans [37] ont étudié les groupes non-nilpotents minimaux infinis. Depuis la parution de ce papier ce type d'étude a fait l'objet de nombreuses publications faites par différents auteurs. Dans ce chapitre nous donnerons une synthèse des principaux résultats qui ont été obtenus dans cette direction.

1.2 Groupes non- $\mathfrak{N}$ minimaux

M. F. Newman et J. Wiegold [37] se sont intéressés aux groupes infinis non nilpotents dont tous les sous-groupes propres sont nilpotents. Il est clair que de tels groupes sont soit de type fini, soit localement nilpotents.

Tout au long de cette thèse $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{N}_k$ désignent respectivement les classes des groupes nilpotents et nilpotents de classe $\leq k$, où k est un entier positif.

Théorème 1.2.1 : *Si G est un groupe infini de type fini non- $\mathfrak{N}$ ou non- $\mathfrak{N}_k$ minimal, alors $G/\text{Frat}(G)$ est un groupe simple et non-abélien.*

Ce théorème veut dire que si les groupes non- $\mathfrak{N}$ et non- $\mathfrak{N}_k$ minimaux existent, alors de tels groupes simples existent aussi. Ce qui a amené Newman et Wiegold [37] à étudier les groupes non- $\mathfrak{N}$ et non- $\mathfrak{N}_k$ minimaux simples.

Chapitre 1. Groupes dont les sous-groupes propres vérifient une propriété donnée

Théorème 1.2.2 : *Soit G un groupe non- $\mathfrak{N}$ ou non- $\mathfrak{N}_k$ minimal simple de type fini. Alors :*

- (i) *L'intersection de toute paire de sous-groupes maximaux est triviale.*
- (ii) *Pour tout élément $1 \neq x$ de G , il existe un élément g de G tel que $G = \langle x, x^g \rangle$.*
- (iii) *G n'admet pas d'élément d'ordre 2.*

Notons que des exemples de groupes non- $\mathfrak{N}$ et non- $\mathfrak{N}_k$ minimaux de type fini existent. En effet, A. I. Olshanski [38] en 1979 a construit un groupe infini de type fini simple G dont tous les sous-groupes propres non triviaux sont cycliques d'ordre un nombre premier p donné.

Il est clair qu'un tel groupe n'appartient pas à la classe $\mathfrak{N}$ (respectivement, $\mathfrak{N}_k$) alors que tous les sous-groupes propres sont dans $\mathfrak{N}$ (respectivement, $\mathfrak{N}_k$), et ce quelque soit $k > 0$.

Théorème 1.2.3 : *Si G est un groupe non- $\mathfrak{N}$ minimal localement nilpotent, alors :*

- (i) *G est un groupe infini dénombrable.*
- (ii) *G/G' est un p -groupe localement cyclique et si $G \neq G'$, alors G est un p -groupe.*

Ce sont les seuls résultats que M. F. Newman et J. Wiegold [37] ont obtenu sur les groupes non- $\mathfrak{N}$ minimaux localement nilpotents. Ce qui les a amenés à supposer de plus que les groupes en question possèdent des sous-groupes maximaux.

Ainsi ils ont obtenu une description complète des groupes non- $\mathfrak{N}$ minimaux localement nilpotents ayant des sous-groupes maximaux.

Soient p un nombre premier, n un entier positif et $r = 0, 1$. Notons B l'ensemble des groupes $B(p, n, r)$ où $B(p, n, r)$ est le groupe engendré par l'ensemble $\{b, h_1, h_2, \dots\}$ tel que ces éléments vérifient les relations suivantes :

$$\begin{cases} [h_i, h_j] = [h_i, b^p] = 1, & \text{où } i, j = 1, 2, \dots \\ [h_{i+1}, b] = h_i, & \text{où } i = 1, 2, \dots \\ [h_1, b] = 1; & b^{p^n} = h_1^r \end{cases}$$

Chapitre 1. Groupes dont les sous-groupes propres vérifient une propriété donnée

Théorème 1.2.4 :

- 1) *Tout groupe non- $\mathfrak{N}$ minimal localement nilpotent ayant des sous-groupes maximaux est isomorphe à un groupe de B .*
- 2) *Tout groupe de B est un groupe non- $\mathfrak{N}$ minimal localement nilpotent ayant des sous-groupes maximaux.*
- 3) *Deux groupes de B ne peuvent pas être isomorphes.*

Le Théorème précédent admet la conséquence suivante :

Corollaire 1.2.5 : *Si G est un groupe non- $\mathfrak{N}$ minimal localement nilpotent ayant des sous-groupes maximaux, alors G est un p -groupe métabélien de Chernikov et G/G' est cyclique. En particulier, G est hypercentral.*

Notons que M. F. Newman et J. Wiegold [37] n'ont pas traité le cas des groupes non- $\mathfrak{N}$ minimaux localement nilpotents n'admettant pas des sous-groupes maximaux. Ce n'est qu'en 1997 que Howard Smith [44] a étudié et caractérisé de tels groupes dans la classe des groupes localement gradués en distinguant le cas résoluble du cas non-résoluble. Mais un résultat de A. O. Azar [3] paru en 2000 affirme qu'un groupe localement gradué non- $\mathfrak{N}$ minimal est résoluble. Plus précisément, on a le résultat suivant :

Théorème 1.2.6 : *Soit G un groupe non- $\mathfrak{N}$ minimal localement nilpotent n'ayant pas de sous-groupes maximaux. Alors on a :*

- (i) *G est un p -groupe dénombrable et $G/G' \simeq C_{p^\infty}$ pour un certain premier p .*
- (ii) *Tout sous-groupe de G est sous-normal.*
- (iii) *$(G')^p \neq G'$ et toute image hypercentrale de G est abélienne. En particulier, $G' = \gamma_n(G)$ pour tout $n \geq 2$.*
- (iv) *Tout sous-groupe radicable de G est central.*
- (v) *Le centralisateur de G' est abélien et G' est omissible (i.e si $H \leq G$ tel que $G = HG'$, alors $H = G$). En particulier, G n'admet pas de sous-groupes propres d'indice fini.*
- (vi) *G' n'est pas la clôture normale d'un sous-groupe fini de G .*
- (vii) *L'hypercentre de G coïncide avec le centre de G .*

Les groupes non- $\mathfrak{N}$ minimaux résolubles localement nilpotents n'ayant pas de sous-groupes maximaux existent. En effet, H. Heineken et I. J. Mohamed [28] en 1968 ont construit pour tout premier p donné, un p -groupe métabélien dont le centre est trivial et dont tous les sous-groupes propres sont sous-normaux et nilpotents.

1.3 Groupes non- $\mathfrak{FA}$ et non- $\mathfrak{AF}$ minimaux

Désignons par $\mathfrak{FA}$ (respectivement, $\mathfrak{AF}$) la classe des groupes finis-par-abéliens (respectivement, abéliens-par-finis).

Un groupe G est dit localement gradué si tout sous-groupe non-trivial de type fini de G admet une image finie non-triviale.

B. Bruno et R. E. Phillips [11] ont étudié les groupes non- $\mathfrak{FA}$ minimaux dans la classe des groupes localement gradués en démontrant le résultat suivant :

Théorème 1.3.1 : *Soit G un groupe localement gradué non- $\mathfrak{FA}$ minimal. Alors il existe un sous-groupe normal A et un élément y de G d'ordre une puissance d'un nombre premier q tels que $A \simeq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ où $A_i \simeq C_{p^\infty}$ pour un certain premier p et $G = A \langle y \rangle$.*

En 1984, B. Bruno dans [8] a étudié les groupes localement gradués non- $\mathfrak{AF}$ minimaux dans la classe des groupes périodiques en distinguant les cas p -groupe et non p -groupe. Or elle a conjecturé qu'un groupe localement gradué non- $\mathfrak{AF}$ minimal non parfait est périodique. Cette conjecture fut démontrée en 1995 par B. Bruno et R. E. Phillips [12]. Ensuite ils ont conjecturé que le résultat précédent reste vrai si la condition "non parfait" est enlevée. Cette conjecture est devenue une réalité et a été démontrée en 1997 par F. Napolitani et E. Pegoraro [36]. Ainsi il n'existe pas de groupes non- $\mathfrak{AF}$ minimaux localement gradués non périodiques ou parfait. En combinant tous ces résultats, on a le résultat suivant :

Théorème 1.3.2 : *Soit G un groupe localement gradué.*

- 1) *Si G n'est pas un p -groupe pour tout premier p , alors G est un groupe non- $\mathfrak{AF}$ minimal si, et seulement si, $G = G' A$ et $G' \cap A = 1$ où $A \simeq C_{p^\infty}$ pour un certain premier p et G' est un sous-groupe normal minimal dans G qui est un q -sous-groupe abélien élémentaire pour un certain premier $q \neq p$.*

Chapitre 1. Groupes dont les sous-groupes propres vérifient une propriété donnée

2) Si G est un p -groupe pour un certain premier p , alors G est un groupe non- $\mathfrak{A}\mathfrak{F}$ minimal si, et seulement si, G' est abélien, $G/G' \simeq C_{p^\infty}$ et $HG' < G$ pour tout sous-groupe propre H de G .

Notons que l'exemple de H. Heineken et I. J. Mohamed [28] est un p -groupe non- $\mathfrak{A}\mathfrak{F}$ minimal.

1.4 Groupes non- $\mathfrak{FN}$ et non- $\mathfrak{NF}$ minimaux

Désignons par $\mathfrak{FN}$ (respectivement, $\mathfrak{NF}$) la classe des groupes finis-par-nilpotents (respectivement, nilpotents-par-finis).

Dans un article paru en 1996, la classification des groupes non- $\mathfrak{FN}$ minimaux est donnée par M. Xu [47] en distinguant le cas de type fini du cas de type infini.

Dans le cas de type fini, M. Xu [47] a prolongé le Théorème 1.2.1 de Newman et Wiegold pour les groupes non- $\mathfrak{FN}$ minimaux. Plus précisément, il a montré le résultat suivant :

Théorème 1.4.1 : *Si G est un groupe non- $\mathfrak{FN}$ minimal de type fini, alors G est un groupe parfait qui n'admet pas de sous-groupes propres d'indice fini et $G/\text{Frat}(G)$ est un groupe simple infini.*

Notons que l'exemple d'Olshanski [38] affirme l'existence des groupes non- $\mathfrak{FN}$ minimaux de type fini.

Théorème 1.4.2 : *G est un groupe de type infini non- $\mathfrak{FN}$ minimal si, et seulement si, G vérifie l'une des conditions suivantes :*

- (i) G est un groupe non- $\mathfrak{FA}$ minimal non parfait,
- (ii) G est un groupe non-nilpotent dont tous les sous-groupes propres sont sous-normaux et nilpotents.

En ajoutant une borne sur la classe de nilpotence, B. Bruno et R. E. Phillips [11] ont classifié les groupes non- $\mathfrak{FN}_k$ minimaux en se restreignant aux groupes localement gradués.

Chapitre 1. Groupes dont les sous-groupes propres vérifient une propriété donnée

Théorème 1.4.3 : Soit $k \geq 0$ un entier. Les conditions suivantes dans un groupe localement gradué G sont équivalentes :

- (i) G est un groupe non- $\mathfrak{FN}_k$ minimal.
- (ii) G est un groupe non- $\mathfrak{FA}$ minimal.
- (iii) G est un groupe non- $\mathfrak{FA}$, de Chernikov et dont tous les sous-groupes propres sont soit abéliens, soit finis.

B. Bruno dans [9] et [10] a prolongé les résultats obtenus sur les groupes non- $\mathfrak{AF}$ minimaux en remplaçant la classe des groupes $\mathfrak{AF}$ par celle des groupes $\mathfrak{NF}$ et elle a réussi à caractériser les groupes localement gradués non- $\mathfrak{NF}$ minimaux dans la classe des groupes périodiques en distinguant les cas localement nilpotent et non localement nilpotent. Plus tard, B. Bruno et R. E. Phillips [12] et F. Napolitani et E. Pegoraro [36] ont montré qu'il n'existe pas de groupes localement gradués non- $\mathfrak{NF}$ minimaux non périodiques ou parfait. Plus précisément, on a le résultat suivant :

Théorème 1.4.4 :

- 1) Soit G un groupe localement gradué et non localement nilpotent. Alors G est un groupe non- $\mathfrak{NF}$ minimal si, et seulement si, $G = VH$ et $V \cap H = 1$, où $H \simeq C_{p\infty}$ pour un certain premier p et V est un q -groupe special pour un certain premier $q \neq p$ tel que $H \subseteq C_G(V')$ et V/V' est un sous-groupe normal minimal dans G/V' .
- 2) Soit G un groupe localement nilpotent. Si G est un groupe non- $\mathfrak{NF}$ minimal, alors G est un p -groupe pour un certain premier p .

Ce Théorème donne une bonne caractérisation des groupes non- $\mathfrak{NF}$ minimaux dans la classe des groupes localement gradués.

1.5 Groupes non- $(L\mathfrak{F})\mathfrak{N}$ et non- $(L\mathfrak{F})\mathfrak{N}_k$ minimaux

Désignons par $(L\mathfrak{F})\mathfrak{N}$ et $(L\mathfrak{F})\mathfrak{N}_k$ respectivement les classes des groupes (localement finis)-par-nilpotents et (localement finis)-par-(nilpotents de classe $\leq k$), où k est un entier positif.

Chapitre 1. Groupes dont les sous-groupes propres vérifient une propriété donnée

Dans [46] et [20], nous avons étudié les groupes non- $(L\mathfrak{F})\mathfrak{N}$ et non- $(L\mathfrak{F})\mathfrak{N}_k$ minimaux. Plus précisément, nous avons généralisé les résultats obtenus par M. F. Newman et Wiegold (Théorème 1.2.1) et M. Xu (Théorème 1.4.1).

Dans cette section, on désigne par Ω la classe des groupes périodiques (de torsion) ou la classe des groupes localement finis.

Théorème 1.5.1 : *Soit $k > 0$ un entier. Si G est un groupe non- $\Omega\mathfrak{N}$ (respectivement, non- $\Omega\mathfrak{N}_k$) minimal, alors G est parfait de type fini, n'admet pas d'image non-triviale finie et le quotient de G par son sous-groupe de Frattini, $G/\text{Frat}(G)$, est un groupe simple infini.*

Signalons que les groupes non- $\Omega\mathfrak{N}$ (respectivement, non- $\Omega\mathfrak{N}_k$) minimaux existent. En effet l'exemple construit par Olshanski [39] est un groupe simple, infini de type fini et sans torsion dont tous les sous-groupes propres sont cycliques.

Comme un groupe localement gradué de type fini admet un sous-groupe propre d'indice fini, on déduit la conséquence suivante :

Corollaire 1.5.2 : *Soit $k > 0$ un entier. Si G est un groupe localement gradué dont tous les sous-groupes propres sont dans la classe $\Omega\mathfrak{N}$ (respectivement, $\Omega\mathfrak{N}_k$), alors G est dans la classe $\Omega\mathfrak{N}$ (respectivement, $\Omega\mathfrak{N}_k$).*

1.6 Groupes non- $\mathfrak{CN}$ et non- $\mathfrak{N}_k\mathfrak{C}$ minimaux

Désignons par $\mathfrak{CN}$ (respectivement, $\mathfrak{CN}_k$) la classe des groupes de Chernikov-par-nilpotents (respectivement, Chernikov-par-(nilpotents de classe $\leq k$)), où k est un entier positif.

En 1988, J. Otal et J. M. Pena [40] ont caractérisé les groupes localement gradués dont tous les sous-groupes propres sont dans la classe $\mathfrak{CN}_k$. Plus précisément, ils ont montré le résultat suivant :

Théorème 1.6.1 : *Soit $k \geq 0$ un entier. Un groupe localement gradué G est un $\mathfrak{CN}_k$ -groupe si, et seulement si, tout sous-groupe propre de G est dans la classe $\mathfrak{CN}_k$.*

Ce résultat veut dire qu'il n'existe pas de groupes non- $\mathfrak{CN}_k$ minimaux dans la classe des groupes localement gradués.

Chapitre 1. Groupes dont les sous-groupes propres vérifient une propriété donnée

Par contre l'étude des groupes non- $\mathfrak{CN}$ minimaux n'a été faite qu'en 2013 par A. Arikan et N. Trabelsi [1]. Plus précisément, ils ont démontré que de tels groupes sont exactement les groupes non- $\mathfrak{N}$ minimaux localement nilpotents n'ayant pas de sous-groupes maximaux qui ont été étudiés par H. Smith [44].

Théorème 1.6.2 : *G est un groupe localement gradué non- $\mathfrak{CN}$ minimal si, et seulement si, G est un groupe non- $\mathfrak{N}$ minimal localement nilpotent n'ayant pas de sous-groupes maximaux.*

Notons que les groupes non- $\mathfrak{CN}$ minimaux existent. En effet, le groupe de Heineken et Mohamed est un exemple de tels groupes.

En 1997, F. Napolitani et E. Pegoraro [36] ont étudié les groupes G dont tous les sous-groupes propres sont nilpotents-par-Chernikov dans la classe des groupes localement gradués. Ils ont montré que G est soit nilpotents-par-Chernikov, soit un p -groupe parfait, dénombrable, localement fini et dont tous les sous-groupes propres sont nilpotents. Mais en 2000, A. O. Asar [3] a complété le résultat précédent en démontrant qu'un p -groupe localement nilpotent dont tous les sous-groupes propres sont nilpotents-par-Chernikov est lui-même nilpotents-par-Chernikov. En combinant ces deux résultats, on a le résultat suivant :

Théorème 1.6.3 : *Si G est un groupe localement gradué dont tous les sous-groupes propres sont dans la classe $\mathfrak{NC}$, alors G est un $\mathfrak{NC}$ -groupe.*

En 1988, Otal et Pena [40] ont montré que si G est un groupe localement gradué périodique dont tous les sous-groupes propres sont abéliens-par-Chernikov, alors G est abélien-par-Chernikov. Ils ont soulevé la question si un tel résultat est vrai pour tous les groupes localement gradués. Ce n'est qu'en 1997 que F. Napolitani et E. Pegoraro [36] ont donné une réponse positive à cette question ; plus précisément, ils ont montré que si G est un groupe localement gradué dont tous les sous-groupes propres sont abéliens-par-Chernikov, alors G est abélien-par-Chernikov. En 2004, B. Bruno et F. Napolitani [13] ont généralisé ce résultat aux groupes dont tous les sous-groupes propres sont (nilpotents de classe $\leq k$)-par-Chernikov. Plus précisément ils ont établi le résultat suivant :

Théorème 1.6.4 : Soit $k \geq 0$ un entier. Si G est un groupe localement gradué dont tous les sous-groupes propres sont dans la classe $\mathfrak{N}_k\mathfrak{C}$, alors G est aussi dans la classe $\mathfrak{N}_k\mathfrak{C}$.

1.7 Groupes non- $\mathfrak{RN}$ et non- $\mathfrak{NR}$ minimaux

Rappelons qu'un groupe G est localement gradué si tout sous-groupe non-trivial de type fini de G admet une image finie non-triviale.

Soit $\mathfrak{X}$ la classe des groupes localement gradués périodiques. S. N. Chernikov [14] a introduit une classe de groupes, notée $\bar{\mathfrak{X}}$, définie comme étant la clôture de $\mathfrak{X}$ par les opérations de clôture $\dot{P}$, $\ddot{P}$, R et L telles que pour toute classe de groupes $\mathfrak{D}$:

- $\dot{P}\mathfrak{D}$ est la classe des groupes ayant une série ascendante dont les facteurs sont des $\mathfrak{D}$ -groupes,
- $\ddot{P}\mathfrak{D}$ est la classe des groupes ayant une série descendante dont les facteurs sont des $\mathfrak{D}$ -groupes,
- $R\mathfrak{D}$ est la classe des groupes G tels que $\bigcap_N \{N : N \triangleleft G \text{ et } G/N \in \mathfrak{D}\}$ est triviale. Les groupes de $R\mathfrak{D}$ sont dits résiduellement $\mathfrak{D}$ -groupes,
- $L\mathfrak{D}$ est la classe des groupes G tels que toute partie finie de G est contenue dans un $\mathfrak{D}$ -groupe ; en particulier, si $S\mathfrak{D} = \mathfrak{D}$, alors $L\mathfrak{D}$ est la classe de tous les groupes G dont tous les sous-groupes de type fini sont dans $\mathfrak{D}$.

Notons que tout $\bar{\mathfrak{X}}$ -groupe est localement gradué et que tout groupe localement (résoluble-par-fini) (respectivement, résiduellement fini) est un $\bar{\mathfrak{X}}$ -groupe. De plus, la classe $\bar{\mathfrak{X}}$ est stable par passage aux sous-groupes mais elle n'est pas stable par quotients.

Notons aussi que S. N. Chernikov [14] a montré qu'un $\bar{\mathfrak{X}}$ -groupe de rang fini est une extension finie d'un groupe localement résoluble.

Rappelons qu'un groupe est dit de rang fini s'il existe un entier positif r tel que tout sous-groupe de type fini peut-être engendré par au plus r éléments. Le plus petit entier r vérifiant cette propriété est le rang du groupe. Dans ce qui suit $\mathfrak{R}$ désigne la classe des groupes de rang fini.

Notons que tout groupe de Chernikov est de rang fini. Ce qui a amené M. R. Dixon, M. J. Evans et H. Smith en 1999 [24] à généraliser le résultat de J. Otal et J. M. Pena

Chapitre 1. Groupes dont les sous-groupes propres vérifient une propriété donnée

cité ci-dessus (Théorème 1.6.1) en remplaçant la classe des groupes de Chernikov par celle de rang fini en se restreignant aux $\tilde{\mathfrak{X}}$ -groupes. Plus précisément, ils ont établi le résultat suivant :

Théorème 1.7.1 : *Soit $k \geq 0$ un entier. Si G est un $\tilde{\mathfrak{X}}$ -groupe dont tous les sous-groupes propres sont dans la classe $\mathfrak{RN}_k$, alors G est aussi dans la classe $\mathfrak{RN}_k$.*

Ce Théorème montre qu'il n'existe pas de groupes non- $\mathfrak{RN}_k$ minimaux qui sont des $\tilde{\mathfrak{X}}$ -groupes. Aussi la question de savoir si ce résultat est vrai pour un groupe localement gradué reste posée.

Notons que les auteurs n'ont pas traité le cas où la borne sur la classe de nilpotence est enlevée, ce qui les a amené plus tard à affaiblir l'hypothèse du théorème précédent en démontrant, dans un article paru en 2001 [26], le résultat suivant :

Théorème 1.7.2 : *Soit G un $\tilde{\mathfrak{X}}$ -groupe dont tous les sous-groupes propres sont dans la classe $\mathfrak{RN}$. Alors G est soit un $\mathfrak{RN}$ -groupe, soit un p -groupe pour un certain premier p dont tous les sous-groupes propres sont nilpotents et G/G' est un groupe quasicyclique.*

Il ressort de ce Théorème qu'un $\tilde{\mathfrak{X}}$ -groupe non- $\mathfrak{RN}$ minimal est un groupe de type Heineken-Mohamed.

En combinant ce Théorème et le Théorème 1.6.2 (cité en haut), on retire cette conséquence :

Corollaire 1.7.3 : *Soit G un $\tilde{\mathfrak{X}}$ -groupe. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) G est un groupe non- $\mathfrak{CN}$ minimal,
- (ii) G est un groupe non- $\mathfrak{RN}$ minimal,
- (iii) G est un groupe non- $\mathfrak{N}$ minimal n'ayant pas des sous-groupes maximaux.

En 2000, M. R. Dixon, M. J. Evans et H. Smith [25] ont considéré les groupes non- $\mathfrak{RN}$ minimaux dans la classe des groupes localement (résolubles-par-finis). Plus précisément, ils ont établi le résultat suivant :

Chapitre 1. Groupes dont les sous-groupes propres vérifient une propriété donnée

Théorème 1.7.4 : Soit G un groupe non- $\mathfrak{NR}$ minimal localement (résoluble-par-fini). Alors :

- 1) G n'admet aucune image de rang fini, en particulier G est parfait,
- 2) G admet une image simple infinie,
- 3) G est soit localement de rang infini soit localement fini.

Dans le même contexte, M. R. Dixon, M. J. Evans et H. Smith [25] ont généralisé ces derniers résultats en ajoutant une borne sur la classe de nilpotence.

Théorème 1.7.5 : Soit k un entier positif et soit G un groupe dont tous les sous-groupes propres sont dans la classe $\mathfrak{N}_k\mathfrak{R}$. Alors G est un $\mathfrak{NR}$ -groupe et G est soit un $\mathfrak{N}_k\mathfrak{R}$ -groupe, soit un groupe résoluble, s'il vérifie l'une des conditions suivantes :

- 1) G est localement fini n'ayant pas une image simple infinie ;
- 2) G est localement résoluble ;
- 3) G est localement (résoluble-par-fini), localement de rang fini et n'est pas localement fini.

1.8 Groupes non- $\mathfrak{B}$ minimaux

Rappelons qu'un groupe est de Baer si tous ses sous-groupes cycliques sont sous-normaux ; donc c'est un groupe localement nilpotent. Dans ce qui suit $\mathfrak{B}$ désigne la classe des groupes de Baer.

Les groupes non- $\mathfrak{B}$ minimaux ont été d'abord étudiés par M. Xu [48] dans le cas des groupes résolubles. Les résultats obtenus par celui-ci ont été améliorés par A. Badis et N. Trabelsi [4] et plus tard généralisés par A. Arikan et N. Trabelsi [2] dans le cas des groupes localement gradués. Plus précisément, ils ont démontré que :

Théorème 1.8.1 : Soit G un groupe non- $\mathfrak{B}$ minimal localement gradué infini. Alors G est un p -groupe dénombrable non-parfait localement nilpotent, où p est un nombre premier et il existe un élément a de G tel que $G = \langle a \rangle^G = G' \langle a \rangle$.

Théorème 1.8.2 : Soit G un groupe non- $\mathfrak{B}$ minimal localement gradué infini. Si G' est non-parfait, alors pour tout entier $n \geq 2$, on a :

Chapitre 1. Groupes dont les sous-groupes propres vérifient une propriété donnée

- (i) $G/\gamma_n(G')$ est un groupe non- $\mathfrak{N}$ minimal ayant des sous-groupes maximaux,
- (ii) $\langle x \rangle \gamma_n(G')$ est de Baer pour tout élément x de G ,
- (iii) Si $G = H\gamma_n(G')$, alors $G = H$ pour tout sous-groupe H de G .

Réciproquement, si G admet un sous-groupe normal vérifiant les trois conditions (i), (ii) et (iii), alors G est un groupe non- $\mathfrak{B}$ minimal localement gradué infini dont G' est non-parfait.

Notons que M. Xu [48] a obtenu le même résultat pour $n = 2$.

Un exemple de groupe non- $\mathfrak{B}$ minimal infini a été donné par M. Xu [48]. En utilisant le célèbre exemple de H. Heineken et I. J. Mohamed, il a construit un groupe qui est un produit semi-direct d'un 2-groupe de type Heineken-Mohamed par un groupe cyclique d'ordre 2. Un tel groupe n'est pas non- $\mathfrak{N}$ minimal car il contient un sous-groupe propre non-nilpotent.

Notons qu'un groupe non- $\mathfrak{N}$ minimal localement nilpotent ayant des sous-groupes maximaux est un groupe non- $\mathfrak{B}$ minimal. Par contre un groupe non- $\mathfrak{N}$ minimal localement nilpotent n'ayant pas de sous-groupes maximaux est un groupe de Baer.

1.9 Groupes non- $\mathfrak{FB}$ et non- $(L\mathfrak{F})\mathfrak{B}$ minimaux

A. Badis et N. Trabelsi [4] ont caractérisé les groupes non- $\mathfrak{FB}$ minimaux en démontrant un résultat analogue à celui de M. Xu [48] sur les groupes non- $\mathfrak{B}$ minimaux.

Théorème 1.9.1 : Si G est un groupe résoluble non- $\mathfrak{FB}$ minimal, alors pour tout entier $n \geq 2$, les conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) $G/\gamma_n(G')$ est un groupe non- $\mathfrak{FA}$ minimal;
- (ii) Pour tous éléments x, y de G , $\langle x, y \rangle \gamma_n(G')$ est un groupe fini-par-Baer;
- (iii) Pour tout sous-groupe H de G , si $G = H\gamma_n(G')$ alors $G = H$.

Réciproquement, si G admet un sous-groupe normal vérifiant les trois conditions (i), (ii) et (iii), alors G est un groupe résoluble non- $\mathfrak{FB}$ minimal.

Chapitre 1. Groupes dont les sous-groupes propres vérifient une propriété donnée

Aussi A. Badis et N. Trabelsi [5] ont étudié les groupes non- $(L\mathfrak{F})\mathfrak{B}$ minimaux. Ils ont démontré un résultat similaire établi par moi-même [20] et N. Trabelsi [46] pour les groupes non- $(L\mathfrak{F})\mathfrak{N}$ minimaux.

Théorème 1.9.2 : *Si G est un groupe non- $(L\mathfrak{F})\mathfrak{B}$ minimal, alors G est un groupe de type fini parfait qui n'admet pas de sous-groupes propres d'indice fini et $G/\text{Frat}(G)$ est un groupe simple infini.*

1.10 Groupes non- $\mathfrak{CB}$ et non- $\mathfrak{BC}$ minimaux

En prolongeant des travaux effectués par M. Xu [48] et A. Arikan et N. Trabelsi [2] sur les groupes non- $\mathfrak{B}$ minimaux et par A. Badis et N. Trabelsi [4] sur les groupes non- $\mathfrak{FB}$ minimaux, en 2013 A. Arikan et N. Trabelsi [1] ont établi des résultats sur les groupes non- $\mathfrak{CB}$ minimaux en se restreignant aux groupes localement gradués.

Théorème 1.10.1 : *Soit G un groupe localement gradué non- $\mathfrak{CB}$ minimal. Alors G est localement fini et G/G' est un p -groupe cyclique pour un certain premier p . De plus, G coïncide avec la clôture normal d'un p -élément de G i.e il existe un p -élément a de G tel que $G = \langle a \rangle^G$.*

Notons que l'exemple construit par M. Xu [48] (mentionné plus haut) affirme l'existence des groupes non- $\mathfrak{CB}$ minimaux.

A. Badis et N. Trabelsi [6] ont travaillé sur le dual de cette classe en caractérisant les groupes dont tous les sous-groupes propres sont Baer-par-Chernikov dans le cas des groupes localement gradués.

Théorème 1.10.2 : *Si G est un groupe localement gradué dont tous les sous-groupes propres sont dans la classe $\mathfrak{BC}$, alors G aussi est un $\mathfrak{BC}$ -groupe.*

1.11 Groupes non- $\mathfrak{BR}$ minimaux

En 2011, A. Badis et N. Trabelsi [6] ont généralisé les résultats obtenus par M. R. Dixon, M. J. Evans et H. Smith (Théorème 1.7.4) sur les groupes non- $\mathfrak{NR}$ minimaux

en remplaçant la classe des groupes nilpotents par celle de Baer. Plus précisément, ils ont établi le résultat suivant :

Théorème 1.11.1 : *Soit G un groupe non- $\mathfrak{BR}$ minimal localement (résoluble-par-fini). Alors :*

- 1) G admet une image simple infinie,
- 2) G est soit localement de rang infini soit localement fini.

1.12 Groupes non-hypercycliques minimaux

Rappelons qu'un groupe est dit hypercyclique s'il admet une série normale ascendante $1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_\alpha = G$ telle que $G_{\beta+1}/G_\beta$ est cyclique pour tout ordinal $\beta < \alpha$ et si λ est un ordinal limite, alors $G_\lambda = \bigcup_{\beta < \lambda} G_\beta$.

Aussi un groupe G est dit hypercentral s'il admet une série centrale ascendante, c'est-à-dire une série normale ascendante $1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_\alpha = G$ telle que $G_{\beta+1}/G_\beta \leq Z(G/G_\beta)$ et ce pour tout ordinal $\beta < \alpha$ et si λ est un ordinal limite, alors $G_\lambda = \bigcup_{\beta < \lambda} G_\beta$.

Il est connu qu'un groupe hypercyclique localement nilpotent est hypercentral [41].

Dans un article paru en 2015, F. De Giovanni et M. Trombetti [19] ont caractérisé les groupes infinis non-hypercycliques minimaux dans la classe des groupes localement gradués qui sont exactement les groupes non-hypercentraux minimaux.

Théorème 1.12.1 : *Soit G un groupe localement gradué infini. G est non-hypercyclique minimal si et seulement s'il est non-hypercentral minimal.*

Ainsi les auteurs [19] ont donné quelques propriétés sur les groupes non-hypercentraux minimaux infinis dans la classe des groupes localement gradués. Plus précisément, ils ont démontré un résultat analogue à celui de H. Smith sur les groupes non- $\mathfrak{N}$ minimaux localement gradués (Théorème 1.2.6).

Théorème 1.12.2 : *Soit G un groupe non-hypercentral minimal localement gradué infini. Alors :*

- (i) G est un p -groupe localement fini, pour un certain premier p ,

Chapitre 1. Groupes dont les sous-groupes propres vérifient une propriété donnée

- (ii) G est hyperabélien,
- (iii) Si $G' \neq G$, alors G/G' est un p -groupe quasicyclique,
- (iv) Le centralisateur de G' est abélien,
- (v) Tout sous-groupe de G est ascendant,
- (vi) Si N est un sous-groupe normal propre de G , alors XN est propre dans G pour tout sous-groupe propre X de G ,
- (vii) G' ne peut pas être une clôture normale d'un sous-groupe fini de G .

Chapitre 2

Groupes dont tous les sous-groupes propres sont (localement finis)-par-(localement nilpotents)

Sommaire

2.1	Introduction	26
2.2	Groupes non- $\Omega_\pi \mathfrak{Z}$ minimaux	27
2.3	Groupes non- $\Omega_\pi \mathfrak{Y}$ minimaux	30
2.4	Groupes non- $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{X}$ minimaux	33
2.5	Groupes non- $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{Y}$ minimaux	36
2.6	Quelques Conséquences	38

2.1 Introduction

Suite aux travaux effectués sur les groupes non- $(L\mathfrak{F})\mathfrak{N}$ et non- $(L\mathfrak{F})\mathfrak{N}_c$ minimaux par moi-même [20], on va généraliser les classes $(L\mathfrak{F})\mathfrak{N}$ et $(L\mathfrak{F})\mathfrak{N}_c$ en considérant les classes $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}$ et $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$; où c est un entier strictement positif, π est un ensemble donné de nombres premiers et où $L\mathfrak{F}_\pi$ désigne la classe des π -groupes localement finis.

Nous avons montré dans [20] que les groupes non- $(L\mathfrak{F})\mathfrak{N}$ et non- $(L\mathfrak{F})\mathfrak{N}_c$ minimaux de type infini n'existent pas. Il devient naturel de se demander si c'est le cas pour les groupes non- $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}$ minimaux de type infini.

D'après le Corollaire 1.2.5 et le Théorème 1.2.6, tout groupe non- $\mathfrak{N}$ minimal de type infini est un p -groupe pour un certain nombre premier p , donc c'est un groupe non- $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}$ minimal de type infini pour tout ensemble π ne contenant pas p . Dans ce chapitre, nous allons établir que la réciproque est vraie aussi. Plus précisément, nous allons démontrer qu'un groupe G est non- $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}$ minimal de type infini si et seulement s'il existe un nombre premier $p \notin \pi$ tel que G soit un p -groupe non- $\mathfrak{N}$ minimal.

De plus, nous avons montré dans [20] (voir le Corollaire 1.5.2) qu'un groupe localement gradué dont tous les sous-groupes propres sont dans la classe $(L\mathfrak{F})\mathfrak{N}_c$ est aussi dans la classe $(L\mathfrak{F})\mathfrak{N}_c$. Dans ce chapitre, on démontre un résultat analogue à celui-là pour la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$.

En fait, nos résultats sur la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}$ et ceux sur $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$ sont des conséquences de résultats plus généraux sur la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{X}$ (respectivement, $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{Y}$), où $\mathfrak{X}$ (respectivement, $\mathfrak{Y}$) désigne une classe de groupes localement nilpotents fermée par passage aux sous-groupes et aux quotients et telle que tout groupe non- $\mathfrak{X}$ minimal localement gradué infini soit un p -groupe dénombrable pour un certain premier p (respectivement, une variété de groupes localement nilpotents). Plus précisément, notre principal résultat de ce chapitre affirme qu'un groupe de type infini G est non- $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{X}$ minimal si et seulement s'il existe un nombre premier $p \notin \pi$ tel que G soit un p -groupe non- $\mathfrak{X}$ minimal.

2.2 Groupes non- $\Omega_\pi \mathfrak{F}$ minimaux

Tout au long de cette thèse, π désigne un ensemble donné de nombres premiers non vide.

Rappelons qu'un π -groupe est un groupe G dont tous les éléments sont des π -éléments, c'est-à-dire que les diviseurs premiers des ordres de tous ses éléments appartiennent à π , *i.e* pour tout $x \in G$, si p divise l'ordre de x alors $p \in \pi$.

Désignons par T_π le sous-groupe engendré par tous les π -éléments de G . Notons que T_π n'est pas toujours un π -groupe et que G/T_π est sans π -éléments.

De plus, si π est l'ensemble de tout les nombres premiers, alors T_π coïncide avec le sous-groupe engendré par tous les éléments de G d'ordre fini.

Désignons par $\mathfrak{F}$ une classe de groupes localement nilpotents stable par passage aux sous-groupes et quotients et désignons par Ω_π soit la classe des π -groupes soit la classe des π -groupes localement finis. Dans cette section, nous démontrons un résultat sur les groupes non- $\Omega_\pi \mathfrak{F}$ minimaux de type infini (Proposition 2.2.3) qui va nous servir beaucoup tout au long de ce chapitre.

D'abord on va commencer par ces deux lemmes importants :

Lemme 2.2.1 : *Soit G un groupe engendré par des π -éléments. Si G est dans la classe $L(\Omega_\pi \mathfrak{N})$, alors G est dans Ω_π .*

Démonstration : Comme $L(\Omega_\pi) = \Omega_\pi$, sans perdre la généralité, on peut supposer que G soit de type fini. Donc G est dans la classe $\Omega_\pi \mathfrak{N}$. Soit N un sous-groupe propre normal de G tel que N soit dans Ω_π et G/N soit nilpotent. Le groupe $(G/N)/(G/N)'$ étant abélien de type fini et engendré par des π -éléments, est un π -groupe fini d'après [42, page 128]. Comme G/N est nilpotent, il est aussi un π -groupe fini d'après [41, corollaire du théorème 2.26]. D'où G est dans la classe Ω_π . ■

Lemme 2.2.2 : *Soit G un groupe non- $\Omega_\pi \mathfrak{F}$ minimal de type infini. Alors T_π est dans la classe Ω_π . De plus, si H est un sous-groupe propre de G , alors HT_π est aussi propre dans G .*

Démonstration : Comme G n'est pas de type fini, il est dans la classe $L(\Omega_\pi \mathfrak{F})$ qui est incluse dans la classe $L(\Omega_\pi \mathfrak{N})$. Par suite, T_π étant un sous-groupe engendré

Chapitre 2. Groupes dont tous les sous-groupes propres sont (localement finis)-par-(localement nilpotents)

par des π -éléments, est dans la classe Ω_π d'après le Lemme 2.2.1. Maintenant, soit H un sous-groupe propre de G , donc il est dans la classe $\Omega_\pi \mathfrak{Z}$. Si $G = HT_\pi$, alors on a $G/T_\pi = HT_\pi/T_\pi \simeq H/H \cap T_\pi$. Comme la classe $\Omega_\pi \mathfrak{Z}$ est stable par passage aux quotients, G/T_π est dans $\Omega_\pi \mathfrak{Z}$. Ensuite G/T_π étant sans π -éléments, est dans la classe $\mathfrak{Z}$. Or T_π est dans Ω_π , on en déduit que G est dans $\Omega_\pi \mathfrak{Z}$; ce qui contredit le fait que G soit non- $\Omega_\pi \mathfrak{Z}$ minimal. D'où le sous-groupe HT_π est propre dans G . ■

Proposition 2.2.3 : *Un groupe de type infini G est non- $\Omega_\pi \mathfrak{Z}$ minimal si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

- (i) T_π est dans la classe Ω_π et si H est un sous-groupe propre de G , alors HT_π est propre aussi,
- (ii) G/T_π est un groupe non- $\mathfrak{Z}$ minimal de type infini.

Démonstration : Soit G un groupe non- $\Omega_\pi \mathfrak{Z}$ minimal de type infini. Le Lemme 2.2.2 montre que la condition (i) est satisfaite. Maintenant, supposons que G/T_π soit un $\mathfrak{Z}$ -groupe. D'après (i), on a T_π est dans Ω_π , donc G est dans la classe $\Omega_\pi \mathfrak{Z}$; cela contredit le fait que G est non- $\Omega_\pi \mathfrak{Z}$ -groupe. D'où G/T_π n'est pas un $\mathfrak{Z}$ -groupe. On va montrer que tous les sous-groupes propres de G/T_π sont dans la classe $\mathfrak{Z}$. Pour ce faire, soit N/T_π un sous-groupe propre de G/T_π . Donc N étant propre dans G , est dans $\Omega_\pi \mathfrak{Z}$. Par suite, N/T_π est dans $\Omega_\pi \mathfrak{Z}$. Or G/T_π est sans π -éléments, donc N/T_π est dans $\mathfrak{Z}$. De plus, G étant non- $\Omega_\pi \mathfrak{Z}$ minimal de type infini, est dans la classe $L(\Omega_\pi \mathfrak{Z})$. Si G/T_π est de type fini, alors il est dans la classe $\Omega_\pi \mathfrak{Z}$. Comme G/T_π est sans π -élément, il est dans $\mathfrak{Z}$ et par conséquent G est un $\Omega_\pi \mathfrak{Z}$ -groupe; contradiction. D'où G/T_π est de type infini et localement dans $\mathfrak{Z}$. D'après ce qui précède, le quotient G/T_π est non- $\mathfrak{Z}$ minimal de type infini; ce qui prouve (ii).

Réciproquement, supposons que les deux conditions (i) et (ii) soient vérifiées. Si G est de type fini, alors il en est de même pour G/T_π ; ce qui est contradictoire avec (ii). D'où G est de type infini. Supposons que G soit un $\Omega_\pi \mathfrak{Z}$ -groupe. Donc T_π étant dans Ω_π , G/T_π est un $\Omega_\pi \mathfrak{Z}$ -groupe. Or G/T_π est sans π -éléments, il s'ensuit donc qu'il est un $\mathfrak{Z}$ -groupe; ce qui est contradictoire avec (ii). D'où G n'est pas dans la classe $\Omega_\pi \mathfrak{Z}$. Reste à montrer que tous les sous-groupes propres de G sont dans la classe $\Omega_\pi \mathfrak{Z}$. Soit H un sous-groupe propre de G . Donc le sous-groupe $H \cap T_\pi$ est inclus dans T_π . Comme T_π est dans Ω_π , nous en déduisons que $H \cap T_\pi$ est aussi dans Ω_π car la classe Ω_π est fermée par passage aux sous-groupes. De plus, on a $H/H \cap T_\pi \simeq HT_\pi/T_\pi$. Si

Chapitre 2. Groupes dont tous les sous-groupes propres sont (localement finis)-par-(localement nilpotents)

$HT_\pi/T_\pi = G/T_\pi$, alors $G = HT_\pi$; ce qui contredit la condition (i). D'où HT_π/T_π est un sous-groupe propre de G/T_π et d'après (ii) il est dans $\mathfrak{J}$. Donc $H/H \cap T_\pi$ est aussi dans $\mathfrak{J}$. Or $H \cap T_\pi$ est dans Ω_π , il s'ensuit donc que H est dans $\Omega_\pi \mathfrak{J}$. D'où G est un groupe non- $\Omega_\pi \mathfrak{J}$ minimal de type infini. ■

Corollaire 2.2.4 : *Soit G un groupe non- $\Omega_\pi \mathfrak{J}$ minimal de type infini. Si T_π admet un complément dans G , c'est à dire s'il existe un sous-groupe H de G tel que $G = T_\pi H$ et $T_\pi \cap H = 1$, alors G est un groupe non- $\mathfrak{J}$ minimal, de type infini et sans π -éléments.*

Démonstration : Supposons que G soit non- $\Omega_\pi \mathfrak{J}$ minimal de type infini tel que $G = T_\pi H$ où H est un sous-groupe de G . Si H est propre dans G , alors il en est de même de $T_\pi H$ d'après (i) de la Proposition 2.2.3; ce qui est contradictoire. D'où $G = H$. Comme $T_\pi \cap H = 1$, on en déduit que G est sans π -éléments et par conséquent $T_\pi = 1$. Il découle de la condition (ii) de la Proposition 2.2.3, que G est un groupe non- $\mathfrak{J}$ minimal de type infini. ■

Au vu de ce Corollaire et la Proposition 2.2.3 on peut dire que si les groupes non- $\Omega_\pi \mathfrak{J}$ minimaux de type infini existent, alors les groupes non- $\mathfrak{J}$ minimaux de type infini existent aussi.

Notons que les groupes non- $(L\mathfrak{N})$ minimaux sont de type fini. En effet, supposons qu'un groupe non- $(L\mathfrak{N})$ minimal G soit de type infini, donc tout sous-groupe de type fini de G est propre et par conséquent il est nilpotent, d'où G est localement nilpotent; contradiction. Donc comme conséquence remarquable de la Proposition 2.2.3, on a le résultat suivant :

Corollaire 2.2.5 : *Si G est un groupe de type infini dont tous les sous-groupes propres sont dans la classe $\Omega_\pi(L\mathfrak{N})$, alors G est dans la classe $\Omega_\pi(L\mathfrak{N})$.*

Démonstration : Supposons que G n'est pas dans la classe $\Omega_\pi(L\mathfrak{N})$. Donc G est non- $\Omega_\pi(L\mathfrak{N})$ minimal de type infini. D'après (ii) de la Proposition 2.2.3, G/T_π est un groupe non- $(L\mathfrak{N})$ minimal de type infini; ce qui contredit le fait que les groupes non- $(L\mathfrak{N})$ minimaux sont de type fini. ■

2.3 Groupes non- $\Omega_\pi\mathfrak{V}$ minimaux

Soit $\mathfrak{V}$ une classe de groupes localement nilpotents stable par passage aux sous-groupes et aux quotients et telle que tout groupe non- $\mathfrak{V}$ minimal localement gradué soit périodique.

Les groupes non- $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{V}$ minimaux de type infini sont caractérisés par la Proposition 2.2.3. Celle-ci dit que de tels groupes sont périodiques. En effet, soit G un groupe non- $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{V}$ minimal de type infini. D'après (i) de la Proposition 2.2.3, T_π est périodique. De plus, d'après (ii) de la Proposition 2.2.3, G/T_π est non- $\mathfrak{V}$ minimal de type infini et donc il est non- $\mathfrak{V}$ minimal localement nilpotent. En utilisant notre hypothèse sur les groupes non- $\mathfrak{V}$ minimaux localement gradués, il s'ensuit que ce quotient est périodique ; d'où G est périodique.

Comme il est le seul résultat qu'on a obtenu sur les groupes non- $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{V}$ minimaux dans le cas de type infini, le problème devient plus intéressant si on se limite à les étudier dans le cas de type fini.

Le résultat principal obtenu sur les groupes non- $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{V}$ minimaux de type fini généralise plusieurs résultats énoncés au chapitre 1 (Théorème 1.2.1, Théorème 1.4.1, Théorème 1.5.1 et Théorème 1.9.2). Plus précisément, on va montrer que tels groupes G sont parfaits n'ayant pas d'images non triviales finies et le quotient de G par son sous-groupe de Frattini est simple.

D'abord on commence par la conséquence suivante :

Si on prend π l'ensemble de tous les nombres premiers alors on a $\Omega_\pi = \Omega$. Dans ce cas Ω désigne soit la classe des groupes périodiques soit celle des groupes localement finis.

Par le fait qu'un groupe non-trivial ne peut pas être périodique et sans π -éléments en même temps, la condition (ii) de la Proposition 2.2.3 n'est pas satisfaite. Par conséquent, on a le résultat suivant :

Corollaire 2.3.1 : *Si G est un groupe de type infini dont tous les sous-groupes propres sont dans la classe $\Omega\mathfrak{V}$, alors G lui-même est dans $\Omega\mathfrak{V}$.*

Démonstration : Comme G est de type infini, il est dans $L(\Omega\mathfrak{V})$ et donc G est dans $L(\Omega\mathfrak{N})$. Il en résulte que l'ensemble T des éléments de G d'ordre fini est un sous-

Chapitre 2. Groupes dont tous les sous-groupes propres sont (localement finis)-par-(localement nilpotents)

groupe de G , d'où $T_\pi = T$. Supposons que G n'est pas dans $\Omega\mathfrak{Y}$, donc G est non- $\Omega\mathfrak{Y}$ minimal de type infini. D'après (ii) de la Proposition 2.2.3, G/T est non- $\mathfrak{Y}$ minimal de type infini et par conséquent il est non- $\mathfrak{Y}$ minimal localement nilpotent. Il s'ensuit d'après l'hypothèse sur les groupes non- $\mathfrak{Y}$ minimaux localement gradués que G/T est périodique, ce qui est contradictoire avec le fait que ce quotient est sans torsion. D'où G est un $\Omega\mathfrak{Y}$ -groupe. ■

On a besoin de démontrer le lemme suivant :

Lemme 2.3.2 : *Soit G un groupe non-périodique dont tous les sous-groupes propres sont dans la classe $\Omega_\pi\mathfrak{Y}$. Si G est de type fini et admet un sous-groupe propre d'indice fini, alors G est dans $\Omega_\pi\mathfrak{Y}$.*

Démonstration : Supposons que G soit de type fini et N soit un sous-groupe propre normal de G tel que G/N soit fini. Donc N est un $\Omega_\pi\mathfrak{Y}$ -groupe de type fini. D'où N est dans la classe $\Omega_\pi\mathfrak{N}$. Posons H le sous-groupe engendré par tous les π -éléments de N . D'après le Lemme 2.2.1, H est dans la classe Ω_π . De plus, N/H étant sans π -éléments, est nilpotent. Or, le quotient $(G/H)/(N/H)$ qui est isomorphe avec G/N est fini. Il s'ensuit donc que G/H est dans la classe $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$. Par suite, G/H étant nilpotent-par-fini de type fini, vérifie la condition maximale sur les sous-groupes et par conséquent tous ses sous-groupes sont de type fini. D'où tous les sous-groupes propres de G/H sont dans la classe $\Omega_\pi\mathfrak{N}$. On en déduit que tout les sous-groupes propres de G sont dans $\Omega_\pi\mathfrak{N}$. Or G/H étant localement gradué dont tous les sous-groupes propres sont dans $\Omega\mathfrak{N}$, est dans $\Omega\mathfrak{N}$ d'après le Corollaire 1.5.2. D'où G est dans $\Omega\mathfrak{N}$, ce qui implique qu'il admet un sous-groupe de torsion. Comme G est non-périodique, T_π est propre dans G . Donc d'après ce qui précède T_π est dans $\Omega_\pi\mathfrak{N}$ et le Lemme 2.2.1 dit que T_π est dans Ω_π . Maintenant G/T_π étant sans π -éléments, tous ses sous-groupes propres sont dans la classe $\mathfrak{Y}$. Comme G est non-périodique, G/T_π est aussi non-périodique. De plus, G/T_π étant isomorphe avec $(G/H)/(T_\pi/H)$, est nilpotent-par-fini. Supposons que G/T_π n'est pas un $\mathfrak{Y}$ -groupe. Donc G/T_π étant un groupe non- $\mathfrak{Y}$ minimal localement gradué, est périodique d'après notre hypothèse ; ce qui est contradictoire. D'où G/T_π est dans la classe $\mathfrak{Y}$ et par conséquent G est dans $\Omega_\pi\mathfrak{Y}$. ■

Notons que si un groupe non- $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{Y}$ minimal est de type infini alors il est localement gradué infini. Le résultat suivant montre que la réciproque est vraie aussi,

Chapitre 2. Groupes dont tous les sous-groupes propres sont (localement finis)-par-(localement nilpotents)

c'est-à-dire qu'un groupe non- $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{V}$ minimal qui est localement gradué infini doit-être de type infini.

Proposition 2.3.3 : *Soit G un groupe non- $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{V}$ minimal infini de type fini. Alors G est un groupe parfait, n'admet pas d'images non triviales finies et le quotient de G par son sous-groupe de Frattini, $G/\text{Frat}(G)$, est simple.*

Démonstration : Soit G un groupe infini non- $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{V}$ minimal de type fini. Supposons que G admet un sous-groupe propre N qui est normal et d'indice fini. Donc N est de type fini et il est dans la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}$. De plus, comme G est infini, N aussi est infini. Si N est périodique, alors N étant (localement fini)-par-nilpotent de type fini, est fini; ce qui est contradictoire. D'où N est non-périodique, ce qui nous donne que G est aussi non-périodique. Par suite, G étant non-périodique dont tous ses sous-groupes propres sont dans la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{V}$, est dans la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{V}$ d'après le Lemme 2.3.2; contradiction. D'où G n'admet pas d'images non triviales finies. Maintenant, supposons que G' , le sous-groupe dérivé de G , soit propre dans G . Alors G/G' , l'abélianisé de G , étant abélien de type fini, est localement gradué de type fini, donc il admet une image non-triviale finie. Il en résulte que G aussi admet une image non-triviale finie; contradiction, d'où G est parfait. Il nous reste qu'à montrer que $G/\text{Frat}(G)$ est un groupe simple. Pour ce faire supposons le contraire, c'est à dire qu'il n'est pas simple. D'abord comme G est de type fini, le quotient $G/\text{Frat}(G)$ n'est pas trivial. Soit $K/\text{Frat}(G)$ un sous-groupe non-trivial normal dans $G/\text{Frat}(G)$. Il existe donc un sous-groupe maximal M de G qui ne contient pas K . Si le sous-groupe MK est propre dans G , alors on en déduit par la maximalité de M que $MK = M$. Donc le sous-groupe K est inclus dans M ; contradiction. D'où $G = MK$. Soit F le sous-groupe engendré par tous les π -éléments de M . Comme M est propre dans G , il est dans la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{V}$; de plus comme la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{V}$ est stable par passage aux sous-groupes, F est dans $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{V}$. D'après le Lemme 2.2.1, il s'ensuit que F est dans la classe $L\mathfrak{F}_\pi$. Si $g \in G$, alors $(KF)^g \leq KF$ et par conséquent KF est un sous-groupe normal dans G . De plus, on a $G/KF = KM/KF \simeq M/M \cap KF \simeq (M/F)/(M \cap KF/F)$. Comme M/F est sans π -éléments, on en déduit que ce quotient est dans la classe $\mathfrak{V}$. D'où G/KF est un $\mathfrak{V}$ -groupe de type fini, par conséquent il est nilpotent. Mais G étant parfait, n'admet pas d'images non-triviales nilpotentes. Il en résulte donc que le quotient G/KF est trivial, i.e $G = KF$. Par suite, on a $G/K = KF/K \simeq F/F \cap K$.

Chapitre 2. Groupes dont tous les sous-groupes propres sont (localement finis)-par-(localement nilpotents)

Donc G/K est un $L\mathfrak{F}_\pi$ -groupe de type fini, d'où G/K est fini. Comme G n'admet pas d'images non-triviales finies, on en déduit que G/K est trivial, donc $G = K$ et par suite $G/\text{Frat}(G)$ est simple. ■

2.4 Groupes non- $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{X}$ minimaux

Désignons par $\mathfrak{X}$ une classe de groupes localement nilpotents qui est fermée par passage aux sous-groupes et aux quotients et telle que tout groupe non- $\mathfrak{X}$ minimal localement gradué infini soit un p -groupe dénombrable où p est un nombre premier.

Dans cette section nous allons décrire la structure des groupes non- $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{X}$ minimaux de type infini en démontrant que de tels groupes sont précisément les p -groupes non- $\mathfrak{X}$ minimaux où $p \notin \pi$.

D'abord nous avons besoin du Lemme suivant qui est dû à O. H. Kegel et B. A. F. Wehrfritz [30, Lemme 1.D.4].

Lemme 2.4.1 ([30, Lemme 1.D.4]) : *Si K est un sous-groupe normal d'un groupe localement fini G tel que G/K est un p -groupe dénombrable pour un certain premier p , alors il existe un p -sous-groupe P de G tel que $G = PK$.*

A l'aide de la Proposition 2.2.3 et le Lemme 2.4.1 on est en mesure de démontrer notre principal résultat.

Théorème 2.4.2 : *Un groupe G est non- $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{X}$ minimal de type infini si, et seulement, s'il existe un nombre premier $p \notin \pi$ tel que G soit un p -groupe non- $\mathfrak{X}$ minimal de type infini.*

Démonstration : Soit G un groupe non- $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{X}$ minimal de type infini et soit T_π le sous-groupe engendré par tous les π -éléments de G . La Proposition 2.2.3 dit que T_π est dans la classe $L\mathfrak{F}_\pi$ et G/T_π est un groupe non- $\mathfrak{X}$ minimal de type infini. Il en résulte que G/T_π est un groupe non- $\mathfrak{X}$ minimal localement nilpotent infini. Par application de notre hypothèse sur la classe $\mathfrak{X}$ et le fait que G/T_π est sans π -éléments, on en déduit que G/T_π est un p -groupe dénombrable pour un certain premier $p \notin \pi$. Par suite, G/T_π étant localement nilpotent, est localement fini ; par conséquent G est localement fini. On en déduit, d'après le Lemme 2.4.1, qu'il existe un p -sous-groupe

Chapitre 2. Groupes dont tous les sous-groupes propres sont (localement finis)-par-(localement nilpotents)

P de G tel que $G = PT_\pi$. Supposons que $P \cap T_\pi$ est non-trivial et soit x un élément de $P \cap T_\pi$. Si p divise l'ordre de x , alors x étant un π -élément, $p \in \pi$; contradiction. Donc $P \cap T_\pi = 1$. D'après le Corollaire 2.2.4, il s'ensuit que G est un p -groupe pour un certain premier $p \notin \pi$ et non- $\mathfrak{X}$ minimal de type infini.

Réciproquement, soit π un ensemble de nombres premiers et soit G un p -groupe non- $\mathfrak{X}$ minimal de type infini pour un certain premier $p \notin \pi$. On va montrer que G est non- $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{X}$ minimal. Pour ce faire, soit H un sous-groupe propre de G . Donc H est un $\mathfrak{X}$ -groupe. Comme la classe $\mathfrak{X}$ est incluse dans la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{X}$, on en déduit que H est dans $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{X}$. Maintenant, si G est dans $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{X}$, alors il existe un sous-groupe normal N de G tel que N soit un $L\mathfrak{F}_\pi$ -groupe et G/N soit un $\mathfrak{X}$ -groupe. Si x est un élément de N , alors $\langle x \rangle$ le sous-groupe engendré par x est un sous-groupe de G . Comme N est dans la classe $L\mathfrak{F}_\pi$, le sous-groupe $\langle x \rangle$ est un π -groupe fini; c'est à dire que si q divise l'ordre de x , alors q appartient à π . Ceci contredit le fait que G est un p -groupe pour un certain premier $p \notin \pi$, d'où G n'est pas dans la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{X}$. Ceci achève la démonstration du théorème. ■

Il ressort du Théorème précédent la conséquence immédiate suivante :

Corollaire 2.4.3 : *Soit G un groupe de type infini dont tous les sous-groupes propres sont dans la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{X}$. Si G a un π -élément non-trivial, alors G lui même est dans la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{X}$.*

Démonstration : Soit G un groupe de type infini dont tous les sous-groupes propres sont dans la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{X}$ et soit x un π -élément non-trivial de G . Supposons que G n'est pas un $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{X}$ -groupe. D'après le Théorème 2.4.2, il existe un premier $p \notin \pi$ tel que G est un p -groupe non- $\mathfrak{X}$ minimal. Si p divise l'ordre de x , alors x étant un π -élément, on en déduit que p appartient à π ; contradiction. D'où G est dans la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{X}$. ■

Signalons ici qu'on peut prendre $\mathfrak{X}$ la classe des groupes nilpotents (respectivement, de Baer). En effet, dans le Théorème 1.2.3 et le Théorème 1.2.6 (respectivement, le Théorème 1.8.1), il est montré qu'un groupe non-nilpotent minimal (respectivement, non-Baer minimal) de type infini est un p -groupe dénombrable pour un certain premier p .

D'autres possibilités pour $\mathfrak{X}$ est la classe ZA des groupes hypercentraux. En effet, soit G un groupe non- ZA minimal de type infini. D'après [27, Lemme 2.2], G est

Chapitre 2. Groupes dont tous les sous-groupes propres sont (localement finis)-par-(localement nilpotents)

périodique. Ensuite, tout sous-groupe de type fini de G est propre et par conséquent il est hypercentral, d'où G est localement nilpotent. Par suite, G étant localement nilpotent et périodique, est produit direct de ses sous-groupes de Sylow *i.e* $G \simeq \prod_{i \in I} P_i$ où P_i est un p_i -sous-groupe maximal de G et $i \in I$. Si $|I| > 1$, alors $G \simeq P_1 \times \prod_{i>1} P_i$. D'après [41, vol 1, page 51], la classe ZA est N_0 -fermée, c'est à dire que le produit de deux sous-groupes normaux hypercentraux est hypercentral, donc on en déduit que G est hypercentral ; contradiction. D'où G est un p -groupe pour un certain premier p . Maintenant, supposons que G n'est pas dénombrable. Donc tout sous-groupe dénombrable de G est propre et par conséquent il est hypercentral. Par suite, G étant un groupe dont tout sous-groupe dénombrable est hypercentral, est hypercentral d'après [41, Corollaire 2 du Théorème 8.34] ; contradiction. D'où G est dénombrable. D'après ce qui précède il s'ensuit qu'un groupe non- ZA minimal de type infini est un p -groupe dénombrable pour un certain premier p .

Nous donnons maintenant un exemple sur les groupes non- $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}$ minimaux de type infini pour un ensemble donné π de nombres premiers :

Soit $G = A \rtimes \langle x \rangle$ un 2-groupe localement dihedral qui est un produit semi-direct d'un 2-groupe quasicyclique A *i.e* $A \simeq C_{2^\infty}$ par un groupe cyclique $\langle x \rangle$ d'ordre 2 *i.e* $x^2 = 1$ tel que G agit sur A par inversion *i.e* $a^x = a^{-1}$ pour tout $a \in A$. Il est facile de montrer que G est un groupe non- $\mathfrak{N}$ minimal de type infini. En effet, supposons que G est de type fini. On a $|G : A| = 2$. Comme A est d'indice fini dans G , on en déduit que A est aussi de type fini ; contradiction avec le fait qu'un groupe quasicyclique est de type infini. D'où G est de type infini. Ensuite G n'est pas nilpotent puisque $\langle x \rangle$ n'est pas sous-normal dans G . En effet, supposons le contraire c'est à dire que $\langle x \rangle$ soit sous-normal dans G . Donc il existe une série finie de sous-groupes $(H_i)_{0 \leq i \leq n}$ de G telle que $\langle x \rangle = H_0 \triangleleft H_1 \dots \triangleleft H_{n-1} \triangleleft H_n = G$. Il s'ensuit que $\langle x \rangle^G \leq H_{n-1} < G$. Or $x^G = x^{\langle x \rangle^A} = x^A = \langle x \rangle [A, x]$. Mais on a

$$[A, x] = \langle \{[a, x] / a \in A\} \rangle = \langle a^{-1}a^x / a \in A \rangle = \langle a^2 / a \in A \rangle = A^2 = A$$

D'où $\langle x \rangle^G = \langle x \rangle A = G$, contradiction. Reste à voir que tout les sous-groupes propres de G sont nilpotents. Soit H un sous-groupe propre de G . D'une part, si $H \leq A$, alors H est abélien et par conséquent il est nilpotent. D'autre part, supposons que $H \not\leq A$. Comme $|G : A| = 2$, on en déduit que $G = AH$. Par suite, on a $G/A = AH/A \simeq H/H \cap A$ est

Chapitre 2. Groupes dont tous les sous-groupes propres sont (localement finis)-par-(localement nilpotents)

fini. Supposons que $H \cap A = A$. Donc $A \leq H$. Comme A est un sous-groupe maximal dans G et H est propre dans G , on en déduit que $H = A$; contradiction. D'où $H \cap A$ est propre dans A et par conséquent il est fini. Il en résulte que H étant un 2-groupe fini, est nilpotent.

Bien entendu, si on prend π l'ensemble de nombres premiers impaires, alors comme G est un 2-groupe non- $\mathfrak{N}$ minimal où $2 \notin \pi$, il est non- $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}$ minimal d'après le Théorème 2.4.2.

2.5 Groupes non- $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{V}$ minimaux

Désignons par $\mathfrak{V}$ une variété de groupes localement nilpotents.

Dans cette section on va démontrer qu'il n'existe pas de groupes non- $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{V}$ minimaux qui soient localement gradués infinis.

D'abord on va démontrer le résultat préliminaire suivant :

Lemme 2.5.1 : *Si G est un groupe non- $\mathfrak{V}$ minimal localement gradué, alors G est fini.*

Démonstration : Soit G un groupe non- $\mathfrak{V}$ minimal localement gradué. On va montrer que G est fini. Supposons le contraire, c'est à dire que G soit infini. Si G est de type infini, alors tout sous-groupe H de type fini est propre dans G ; d'où H est dans la variété $\mathfrak{V}$. Comme toute variété est localement fermée, c'est à dire un groupe est dans une variété si tous ses sous-groupes de type fini appartiennent à la variété, on en déduit que G est dans $\mathfrak{V}$; contradiction. Il s'ensuit donc que G est de type fini. Par suite, G étant localement gradué, il admet une image non-triviale finie, c'est à dire qu'il existe un sous-groupe N propre et normal dans G tel que le quotient G/N soit fini. Donc N est de type fini et dans $\mathfrak{V}$; d'où N est nilpotent. On en déduit que G est nilpotent-par-fini de type fini, donc il vérifie la condition maximale sur les sous-groupes et par conséquent tous ses sous-groupes sont de type fini. Il en découle que tous les sous-groupes propres de G sont nilpotents. Si G n'est pas nilpotent, alors G est non-nilpotent minimal de type fini. D'après le Théorème 1.2.1, le quotient de G par son sous-groupe de Frattini, $G/\text{Frat}(G)$, est simple. Ensuite $G/\text{Frat}(G)$ étant localement gradué de type fini, admet une image non-triviale finie, *i.e* il existe un sous-groupe $K/\text{Frat}(G)$ normal et propre dans $G/\text{Frat}(G)$ tel que $(G/\text{Frat}(G))/(K/\text{Frat}(G))$ soit

Chapitre 2. Groupes dont tous les sous-groupes propres sont (localement finis)-par-(localement nilpotents)

fini. Or $G/\text{Frat}(G)$ est simple, donc $K = \text{Frat}(G)$; d'où $G/\text{Frat}(G)$ est fini. Par conséquent G étant un groupe nilpotent-par-fini tel que $G/\text{Frat}(G)$ soit fini, est fini d'après [31]; contradiction. Donc G est un groupe infini nilpotent de type fini, ce qui implique que G est (sans torsion)-par-fini. Soit N un sous-groupe normal sans-torsion de G tel que G/N soit fini. Donc N est sans-torsion nilpotent de type fini. D'après [42, Théorème 5.2.21], N est résiduellement un p -groupe fini pour tout premier p . Soient p et q deux nombres premiers distincts et soient H et K deux sous-groupes propres normaux de N tels que N/H et N/K soient respectivement d'ordre une puissance de p et une puissance de q . D'où $N/H \cap K$ est un groupe nilpotent fini d'ordre $p^\alpha q^\beta$. Par suite, $G/H_G \cap K_G$ est aussi un groupe nilpotent fini ayant au moins deux sous-groupes de Sylow, on en déduit qu'il est produit direct de deux sous-groupes propres. Il s'ensuit que $G/H_G \cap K_G$ est dans $\mathfrak{V}$ car toute variété est stable par produit direct. Or $(G/H_G \cap K_G)/(H_G/H_G \cap K_G) \simeq G/H_G$, donc G/H_G est aussi dans $\mathfrak{V}$. D'où le quotient $G/\bigcap_{H_G} \{H_G : N/H \text{ est un } p\text{-groupe fini}\}$ reste dans $\mathfrak{V}$ car toute variété est R -fermée i.e $R\mathfrak{V} = \mathfrak{V}$. Mais $\bigcap_{H_G} \{H_G : N/H \text{ est un } p\text{-groupe fini}\}$ est triviale car N est résiduellement un p -groupe fini. Donc G est dans $\mathfrak{V}$, cette contradiction achève la démonstration. ■

Proposition 2.5.2 : *Soit G un groupe non- $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{V}$ minimal infini. Alors G est de type fini, parfait, n'ayant pas de sous-groupes propres d'indice fini et le quotient de G par son sous-groupe de Frattini, $G/\text{Frat}(G)$, est simple.*

Démonstration : Supposons que G soit un groupe non- $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{V}$ minimal infini. Si G n'est pas de type fini, alors T_π est un $(L\mathfrak{F}_\pi)$ -groupe et G/T_π est non- $\mathfrak{V}$ minimal de type infini d'après la Proposition 2.2.3. Soit H/T_π un sous-groupe de type fini de G/T_π , donc il est propre dans G/T_π et par conséquent il est dans $\mathfrak{V}$. Par suite, H/T_π étant de type fini et $\mathfrak{V}$ étant une variété de groupes localement nilpotents, H/T_π est nilpotent. Il s'ensuit que G/T_π est non- $\mathfrak{V}$ minimal localement nilpotent. D'après le Lemme 2.5.1, on en déduit que G/T_π est fini. Il existe donc un sous-groupe F propre et de type fini dans G tel que $G = T_\pi F$. D'après la condition (i) de la Proposition 2.2.3, on en déduit que $G = F$; contradiction. Donc G est de type fini. Maintenant, G étant un groupe non- $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{V}$ minimal infini de type fini, la Proposition 2.3.3 nous permet de dire que G est parfait, n'admet pas de sous-groupes propres d'indice fini et $G/\text{Frat}(G)$ est simple. ■

Chapitre 2. Groupes dont tous les sous-groupes propres sont (localement finis)-par-(localement nilpotents)

En utilisant la Proposition 2.5.2, on a la conséquence importante suivante :

Corollaire 2.5.3 : *Soit G un groupe localement gradué infini dont tous les sous-groupes propres sont dans la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{V}$. Alors G est dans la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{V}$.*

Démonstration : Supposons le contraire, c'est à dire que G n'est pas dans la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{V}$. Donc G étant un groupe non- $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{V}$ minimal infini, est de type fini et n'admet pas de sous-groupes propres d'indice fini d'après la Proposition 2.5.2. Ceci contredit le fait qu'un groupe localement gradué admet une image non triviale finie. D'où G est dans la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{V}$. ■

Il est important de signaler qu'on peut prendre pour la variété $\mathfrak{V}$ la classe $\mathfrak{N}_c$ des groupes nilpotents de classe au plus égale à c .

Aussi suite aux travaux effectués par E. I. Zel'manov [49] et [50], la classe des groupes localement nilpotents d'exposant un entier positif donné est une variété et donc est une autre possibilité pour la variété $\mathfrak{V}$.

Notons que A. I. Olshanski [39] a construit un groupe simple, infini de type fini et sans torsion, dont tous les sous-groupes propres sont cycliques. Un tel groupe est un exemple de groupes non- $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_1$ minimaux et ce pour tout ensemble π de nombres premiers.

2.6 Quelques Conséquences

Dans cette section, nous déduisons quelques résultats sur les groupes non- $\mathfrak{C}_\pi\mathfrak{N}$ et non- $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{N}$ (respectivement, non- $\mathfrak{C}_\pi\mathfrak{N}_c$ et non- $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{N}_c$) minimaux de type infini, où $\mathfrak{C}_\pi = (L\mathfrak{F}_\pi) \cap \mathfrak{C}$, $\mathfrak{F}_\pi = (L\mathfrak{F}_\pi) \cap \mathfrak{F}$, $\mathfrak{C}$ désigne la classe des groupes de Chernikov et c est un entier strictement positif.

Dans le Théorème 1.6.2, A. Arikan et N. Trabelsi ont montré qu'un groupe localement gradué est non- $\mathfrak{CN}$ minimal si et seulement s'il est non- $\mathfrak{N}$ minimal n'ayant pas de sous-groupes maximaux. En utilisant le Théorème 2.4.2, on peut généraliser ce résultat en remplaçant la classe des groupes $\mathfrak{CN}$ par celle de $\mathfrak{C}_\pi\mathfrak{N}$.

Pour ce faire, on prouvera d'abord le lemme suivant :

Chapitre 2. Groupes dont tous les sous-groupes propres sont (localement finis)-par-(localement nilpotents)

Lemme 2.6.1 : Soit G un groupe. Si H et K sont deux sous-groupes normaux dans la classe $\mathfrak{C}_\pi\mathfrak{N}$, alors le produit HK est aussi dans la classe $\mathfrak{C}_\pi\mathfrak{N}$.

Démonstration : Supposons que H et K soient deux sous-groupes normaux d'un groupe G qui sont dans la classe $\mathfrak{C}_\pi\mathfrak{N}$. Donc il existe deux entiers positifs c et d tels que $\gamma_c(H)$ et $\gamma_d(K)$ sont des $\mathfrak{C}_\pi$ -sous-groupes normaux de G . Comme le produit de deux sous-groupes normaux de la classe $L\mathfrak{F}_\pi$ (respectivement, la classe $\mathfrak{C}$) est un $L\mathfrak{F}_\pi$ -sous-groupe (respectivement, $\mathfrak{C}$ -sous-groupe), on en déduit que $\gamma_c(H)\gamma_d(K)$ est un $\mathfrak{C}_\pi$ -sous-groupe normal de G . De plus, on a

$$HK/\gamma_c(H)\gamma_d(K) = (H\gamma_d(K)/\gamma_c(H)\gamma_d(K))(K\gamma_c(H)/\gamma_c(H)\gamma_d(K))$$

Comme le quotient $H\gamma_d(K)/\gamma_c(H)\gamma_d(K)$ est nilpotent de classe au plus égale à c , le quotient $K\gamma_c(H)/\gamma_c(H)\gamma_d(K)$ est nilpotent de classe au plus égale à d et le produit de deux sous-groupes normaux nilpotents est nilpotent, on en déduit que $HK/\gamma_c(H)\gamma_d(K)$ est nilpotent. Or $\gamma_c(H)\gamma_d(K)$ est dans la classe $\mathfrak{C}_\pi$, d'où HK est dans la classe $\mathfrak{C}_\pi\mathfrak{N}$.

■

Corollaire 2.6.2 : Soit G un groupe de type infini. Alors G est non- $\mathfrak{C}_\pi\mathfrak{N}$ minimal si, et seulement si, G est non- $\mathfrak{N}$ minimal tel que soit G n'admet pas de sous-groupe maximaux, soit il existe un premier $p \notin \pi$ tel que G soit un p -groupe ayant des sous-groupes maximaux.

Démonstration : Supposons que G soit un groupe non- $\mathfrak{C}_\pi\mathfrak{N}$ minimal de type infini. D'abord il est facile de montrer que G est localement gradué. En effet, soit H un sous-groupe de type fini non-trivial de G . Donc G étant de type infini, H est propre dans G et ensuite il est dans $\mathfrak{C}_\pi\mathfrak{N}$. D'où H est localement gradué de type fini et par conséquent il admet une image non-triviale finie. Maintenant, Comme la classe $\mathfrak{C}_\pi\mathfrak{N}$ est incluse dans $\mathfrak{CN}$, tous les sous-groupes propres de G sont dans $\mathfrak{CN}$. Donc il est clair que G est soit un $\mathfrak{CN}$ -groupe, soit un groupe non- $\mathfrak{CN}$ minimal. Or le Lemme 2.6.1 dit que toute paire de sous-groupes propres normaux de G engendrent un sous-groupe propre. Il découle de [37, Théorème 2.12] que toute image nilpotente de G est abélienne. D'où G est soit un $\mathfrak{CA}$ -groupe, soit un groupe non- $\mathfrak{CN}$ minimal. Si G est non- $\mathfrak{CN}$ minimal, alors G étant localement gradué, est un groupe non- $\mathfrak{N}$ minimal n'ayant pas de sous-groupes maximaux d'après le Théorème 1.6.2. Il s'ensuit donc que G est soit un $\mathfrak{CA}$ -groupe, soit un groupe non- $\mathfrak{N}$ minimal n'ayant pas de sous-groupes

Chapitre 2. Groupes dont tous les sous-groupes propres sont (localement finis)-par-(localement nilpotents)

maximaux. D'autre part, comme la classe $\mathfrak{C}_\pi \mathfrak{N}$ est incluse dans $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}$, tous les sous-groupes propres de G sont dans la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}$. D'où G est soit un $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}$ -groupe, soit un groupe non- $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}$ minimal. Il s'ensuit que G est soit un $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{A}$ -groupe, soit en vertu du Théorème 2.4.2 il existe un premier $p \notin \pi$ tel que G est un p -groupe non- $\mathfrak{N}$ minimal. Maintenant, si on suppose que G ne soit pas non- $\mathfrak{N}$ minimal, alors d'après ce qui précède, G est dans la classe $(\mathfrak{CA} \cap (L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{A})$. Donc G' , le sous-groupe dérivé de G , est dans la classe $(L\mathfrak{F}_\pi) \cap \mathfrak{C}$ qui est exactement celle de $\mathfrak{C}_\pi$. D'où G est un $\mathfrak{C}_\pi \mathfrak{A}$ -groupe et par conséquent un $\mathfrak{C}_\pi \mathfrak{N}$ -groupe ; ce qui est contradictoire avec le fait que G est non- $\mathfrak{C}_\pi \mathfrak{N}$ minimal. Finalement, il en résulte que G est non- $\mathfrak{N}$ minimal tel que soit G n'admet pas de sous-groupes maximaux, soit il existe un premier $p \notin \pi$ tel que G soit un p -groupe ayant des sous-groupes maximaux.

Réciproquement, supposons qu'il existe un premier $p \notin \pi$ tel que G soit un p -groupe non- $\mathfrak{N}$ minimal ayant des sous-groupes maximaux. Donc G est un groupe sans π -éléments. De plus, comme tout groupe nilpotent est un $\mathfrak{C}_\pi \mathfrak{N}$ -groupe, tous les sous-groupes propres de G sont dans la classe $\mathfrak{C}_\pi \mathfrak{N}$. Il découle que G est soit un $\mathfrak{C}_\pi \mathfrak{N}$ -groupe, soit non- $\mathfrak{C}_\pi \mathfrak{N}$ minimal. Supposons que G soit dans la classe $\mathfrak{C}_\pi \mathfrak{N}$. Comme G est sans π -éléments, il est nilpotent ; contradiction. D'où G est non- $\mathfrak{C}_\pi \mathfrak{N}$ minimal. Maintenant, si G est non- $\mathfrak{N}$ minimal n'ayant pas de sous-groupes maximaux, alors G est non- $\mathfrak{CN}$ minimal d'après le Théorème 1.6.2. Si G est un $\mathfrak{C}_\pi \mathfrak{N}$ -groupe, alors il est dans la classe $\mathfrak{CN}$; contradiction. D'où G est non- $\mathfrak{C}_\pi \mathfrak{N}$ minimal. ■

J. Otal et J. M. Pena dans le Théorème 1.6.1 ont montré qu'un groupe localement gradué dont tous les sous-groupes propres sont dans la classe $\mathfrak{CN}_c$ est lui même dans la classe $\mathfrak{CN}_c$. On généralise ce résultat en utilisant le Corollaire 2.5.3.

Corollaire 2.6.3 : *Soit G un groupe localement gradué infini dont tous les sous-groupes propres sont dans la classe $\mathfrak{C}_\pi \mathfrak{N}_c$. Alors G est dans la classe $\mathfrak{C}_\pi \mathfrak{N}_c$.*

Démonstration : Supposons que G soit un groupe localement gradué infini dont tous les sous-groupes propres sont dans la classe $\mathfrak{C}_\pi \mathfrak{N}_c$. Comme $\mathfrak{C}_\pi = (L\mathfrak{F}_\pi) \cap \mathfrak{C}$ est incluse dans la classe $\mathfrak{C}$, G est un groupe infini localement gradué dont tous les sous-groupes propres sont dans la classe $\mathfrak{CN}_c$. On en déduit par le Théorème 1.6.1 que G est dans la classe $\mathfrak{CN}_c$. De plus, la classe $\mathfrak{C}_\pi$ est incluse dans la classe $L\mathfrak{F}_\pi$. Donc G étant un groupe infini localement gradué dont tous les sous-groupes propres sont dans la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$, est dans la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$ en vertu du Corollaire 2.5.3. D'après ce

Chapitre 2. Groupes dont tous les sous-groupes propres sont (localement finis)-par-(localement nilpotents)

qui précède G est dans la classe $((L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c \cap \mathfrak{C}\mathfrak{N}_c)$. Donc $\gamma_{c+1}(G)$ est dans la classe $(L\mathfrak{F}_\pi) \cap \mathfrak{C} = \mathfrak{C}_\pi$. D'où G est un $\mathfrak{C}_\pi\mathfrak{N}_c$ -groupe. ■

A l'aide de ce Corollaire, on déduit le résultat suivant qui sera utilisé pour démontrer les conséquences ci-dessous.

Lemme 2.6.4 : *Soit G un groupe de type infini. Si G est non- $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{N}_c$ minimal, alors G est non- $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_c$ minimal.*

Démonstration : Soit G un groupe non- $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{N}_c$ minimal de type infini. Comme la classe $\mathfrak{F}_\pi$ est incluse dans $\mathfrak{F}$, tout sous-groupe propre de G est dans la classe $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_c$. Il ne reste qu'à montrer que G n'est pas un $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_c$ -groupe. Pour ce faire, supposons le contraire ; c'est à dire que G est dans la classe $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_c$. G étant de type infini, est infini. De plus, les sous-groupes de type fini de G sont propres, donc ils sont finis-par-nilpotents, d'où G est localement gradué. On sait que tout groupe fini est de Chernikov et on a $\mathfrak{F}_\pi = (L\mathfrak{F}_\pi) \cap \mathfrak{F}$, donc la classe $\mathfrak{F}_\pi$ est incluse dans $\mathfrak{C}_\pi$; d'où tout sous-groupe propre de G est dans $\mathfrak{C}_\pi\mathfrak{N}_c$. Par suite, G étant infini localement gradué dont tous les sous-groupes propres sont dans la classe $\mathfrak{C}_\pi\mathfrak{N}_c$, est dans $\mathfrak{C}_\pi\mathfrak{N}_c$ d'après le Corollaire 2.6.3. En particulier, G est dans la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$ et comme il est dans $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_c$, on en déduit qu'il est dans $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{N}_c$; contradiction. Il découle que G n'est pas dans $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_c$ et par conséquent il est non- $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_c$ minimal. ■

En combinant le résultat de [47, Théorème 3.5] et le fait qu'un groupe non- $\mathfrak{N}$ minimal de type infini est résoluble d'après [3, Théorème 1.3], nous avons le résultat suivant :

Corollaire 2.6.5 : *Soit G un groupe de type infini. G est non- $\mathfrak{F}\mathfrak{N}$ minimal si, et seulement si, il est non- $\mathfrak{F}\mathfrak{A}$ minimal ou non- $\mathfrak{N}$ minimal n'ayant pas de sous-groupes maximaux.*

On généralisera ce résultat en utilisant le Théorème 2.4.2.

Corollaire 2.6.6 : *Soit G un groupe de type infini. Alors G est un groupe non- $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{N}$ minimal si, et seulement si, l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

- (i) G est un groupe non- $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{A}$ minimal,

Chapitre 2. Groupes dont tous les sous-groupes propres sont (localement finis)-par-(localement nilpotents)

(ii) G est non- $\mathfrak{N}$ minimal. De plus, soit G n'admet pas de sous-groupes maximaux, soit il existe un premier $p \notin \pi$ tel que G soit un p -groupe ayant des sous-groupes maximaux.

Démonstration : Supposons que G soit un groupe non- $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{N}$ minimal. D'abord on a le produit de deux sous-groupes normaux de G de la classe $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{N}$ est un $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{N}$ -groupe, donc toute image nilpotente de G est abélienne d'après [37, Théorème 2.12]. Maintenant, comme la classe $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{N}$ est incluse dans $\mathfrak{F}\mathfrak{N}$, tous les sous-groupes propres de G sont dans $\mathfrak{F}\mathfrak{N}$. Donc il est clair que G est soit un $\mathfrak{F}\mathfrak{N}$ -groupe, soit un groupe non- $\mathfrak{F}\mathfrak{N}$ minimal. Par suite, G est soit un $\mathfrak{F}\mathfrak{A}$ -groupe ou bien d'après le Corollaire 2.6.5, G est soit non- $\mathfrak{F}\mathfrak{A}$ minimal, soit non- $\mathfrak{N}$ minimal n'ayant pas de sous-groupes maximaux. D'autre part, comme la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}$ contient celle de $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{N}$, tous les sous-groupes propres de G sont dans $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}$. Donc G est soit un $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}$ -groupe, soit non- $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}$ minimal. Il en résulte que G est soit un $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{A}$ -groupe, soit il existe un premier $p \notin \pi$ tel que G est un p -groupe non- $\mathfrak{N}$ minimal d'après le Théorème 2.4.2. Si G est non- $\mathfrak{N}$ minimal, alors la condition (ii) est vérifiée. Sinon, supposons que G n'est pas un groupe non- $\mathfrak{N}$ minimal. Donc d'après ce qui précède, G est dans la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{A}$ et de plus il est soit un $\mathfrak{F}\mathfrak{A}$ -groupe, soit non- $\mathfrak{F}\mathfrak{A}$ minimal. Si G est un $\mathfrak{F}\mathfrak{A}$ -groupe, alors comme il est un $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{A}$ -groupe, on en déduit qu'il est un $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{A}$ -groupe et a fortiori un $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{N}$ -groupe; contradiction. D'où G est un $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{A}$ -groupe et non- $\mathfrak{F}\mathfrak{A}$ minimal. On va montrer maintenant que G est non- $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{A}$ minimal. En effet, si G est dans la classe $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{A}$, alors il est dans $\mathfrak{F}\mathfrak{A}$; contradiction. Soit H un sous-groupe propre de G , donc il est dans $((L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{A} \cap \mathfrak{F}\mathfrak{A})$. Par suite, H' est dans $(L\mathfrak{F}_\pi) \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{F}_\pi$ et par conséquent H est un $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{A}$ -groupe. D'où la condition (i).

Réciproquement, supposons que G soit non- $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{A}$ minimal. Il est clair que tout les sous-groupe propres de G sont dans $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{N}$. De plus, G est non- $\mathfrak{F}\mathfrak{A}$ minimal d'après le Lemme 2.6.4. Par suite, G est non- $\mathfrak{F}\mathfrak{N}$ minimal d'après le Corollaire 2.6.5. Comme la classe $\mathfrak{F}\mathfrak{N}$ contient celle de $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{N}$, G ne peut pas être un $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{N}$ -groupe et par conséquent il est non- $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{N}$ minimal. Supposons que G est un p -groupe non- $\mathfrak{N}$ minimal pour un certain premier $p \notin \pi$, donc il est sans π -éléments. Par suite, si G est un $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{N}$ -groupe, alors G est nilpotent; contradiction. D'où G n'est pas dans la classe $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{N}$. Il s'ensuit donc que G est non- $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{N}$ minimal. Maintenant, supposons qu'il existe un premier $p \in \pi$ tel que G est un p -groupe non- $\mathfrak{N}$ minimal n'ayant pas de sous-groupes maximaux. D'après le Corollaire 2.6.5, G est non- $\mathfrak{F}\mathfrak{N}$ minimal. D'autre part G étant un p -groupe

Chapitre 2. Groupes dont tous les sous-groupes propres sont (localement finis)-par-(localement nilpotents)

non- $\mathfrak{N}$ minimal pour un certain premier $p \in \pi$, est un $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}$ -groupe d'après le Théorème 2.4.2. On va montrer que tous les sous-groupes propre de G sont dans la classe $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{N}$. En effet, soit H un sous-groupe propre de G . Donc H est dans la classe $((L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N} \cap \mathfrak{F}\mathfrak{N})$. Il existe un entier $d > 0$ tel que $\gamma_d(H)$ est dans $(L\mathfrak{F}_\pi) \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{F}_\pi$. D'où H est dans $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{N}$. Or si G est un $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{N}$ -groupe, alors il est $\mathfrak{F}\mathfrak{N}$ -groupe ; contradiction. D'où G est non- $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{N}$ minimal. ■

Dans le Théorème 1.4.3, B. Bruno et R. E. Phillips ont montré qu'un groupe localement gradué est non- $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_c$ minimal si, et seulement si, il est non- $\mathfrak{F}\mathfrak{A}$ minimal. On généralisera ce résultat en utilisant le Corollaire 2.5.3.

Corollaire 2.6.7 : *Un groupe de type infini G est non- $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{N}_c$ minimal si, et seulement, si G est non- $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{A}$ minimal.*

Démonstration : Soit G un groupe de type infini et supposons qu'il est non- $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{N}_c$ minimal. D'après le Lemme 2.6.4, G est non- $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_c$ minimal. Il est clair que G est un groupe localement gradué infini. Donc G est non- $\mathfrak{F}\mathfrak{A}$ minimal en vertu du Théorème 1.4.3. Par conséquent, G est non- $\mathfrak{F}\mathfrak{N}$ minimal d'après le Corollaire 2.6.5. D'autre part, G étant localement gradué infini dont tous les sous-groupe propres sont dans la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$, est dans $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$ d'après le Corollaire 2.5.3. Comme le produit de deux $\mathfrak{F}\mathfrak{N}$ -sous-groupes normaux est un $\mathfrak{F}\mathfrak{N}$ -sous-groupe, toute image nilpotente de G est abélienne. D'où G est un $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{A}$ -groupe. Or d'après ce qui précède G n'est pas un $\mathfrak{F}\mathfrak{A}$ -groupe et par conséquent G n'est pas dans la classe $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{A}$. Il découle que G est non- $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{A}$ minimal.

Réciproquement, supposons que G soit non- $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{A}$ minimal. Il est clair que tous les sous-groupes propres de G sont dans la classe $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{N}_c$. Reste à montrer que G n'est pas un $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{N}_c$ -groupe. Pour ce faire, supposons le contraire, c'est à dire que G est un $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{N}_c$ -groupe. Donc en particulier G est un $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{A}$ -groupe ; contradiction. D'où G ne peut pas être dans la classe $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{N}_c$ et par conséquent G est non- $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{N}_c$ minimal. ■

Notons que le célèbre exemple de H. Heineken et I. J. Mohamed [28] qui est un groupe non- $\mathfrak{N}$ minimal n'ayant pas de sous-groupes maximaux affirme l'existence des groupes non- $\mathfrak{C}_\pi\mathfrak{N}$ et non- $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{N}$ minimaux pour tout ensemble π de nombres premiers.

Chapitre 3

Groupes dont tous les sous-groupes propres de rang infini sont $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$

Sommaire

3.1	Introduction	45
3.2	Groupes dont les sous-groupes propres de rang infini appartiennent à une classe donnée	46
3.3	Groupes dont tous les sous-groupes propres de rang infini sont $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$	49
3.3.1	Le cas non-parfait et $\mathfrak{F}$ -parfait	49
3.3.2	Le cas $\mathfrak{F}$ -parfait et non simple	51
3.3.3	Groupes dont tous les sous-groupes propres de rang infini sont $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{N}_c$ ou $\mathfrak{C}_\pi\mathfrak{N}_c$	54
3.3.4	Perspectives	56

3.1 Introduction

Soit $\mathfrak{X}$ la classe de Chernikov définie dans le chapitre 1. La classe des groupes fortement localement gradués, notée par $\bar{\mathfrak{X}}^{SH}$, est la plus grande sous-classe de $\mathfrak{X}$ qui est stable par rapport aux sections où une section d'un groupe G est définie comme étant un quotient d'un sous-groupe de G . Donc elle forme une large classe S et H -fermée de groupes résolubles généralisés. En particulier, elle contient tous les groupes localement (résolubles-par-finis).

Rappelons qu'un groupe G est dit de rang fini (ou bien de rang de Prüfer fini) s'il existe un entier strictement positif r tel que tout sous-groupe de type fini de G peut-être engendré par r -éléments, le plus petit entier r vérifiant cette propriété est appelé le rang de G . S'il n'existe pas un tel entier r , le groupe G est dit de rang infini. Notons que la classe des groupes de rang fini est stable par passage aux sous-groupes, quotients et par extensions.

L'étude des groupes de rang infini dont tous les sous-groupes propres de rang infini appartiennent à une classe donnée $\mathfrak{X}$ a récemment connu un essor considérable en se restreignant à certaines classes de groupes résolubles généralisés. Dans ce chapitre nous donnerons d'abord quelques résultats qui sont parus récemment dans cette direction pour diverses classes de groupes et par différents auteurs, on citera par exemple [16], [17], [18], [22], [23].

En fait l'étude de tels groupes nous a amené d'abord à voir si tous les sous-groupes propres sont dans la classe $\mathfrak{X}$. Un obstacle qui peut empêcher le groupe lui-même d'être dans $\mathfrak{X}$ est lorsque les groupes non- $\mathfrak{X}$ minimaux sont de rang infini. Dans ce cas on ne dispose pas de beaucoup de résultats.

En 1999 M. R. Dixon, M. J. Evans et H. Smith [22] ont montré qu'un groupe fortement localement gradué de rang infini dont tous les sous-groupes propres de rang infini sont dans la classe $\mathfrak{N}_c$ est lui-même dans la classe $\mathfrak{N}_c$, où c est un entier strictement positif et $\mathfrak{N}_c$ désigne la classe des groupes nilpotents de classe au plus égale à c . Récemment, F. De Giovanni et M. Trombetti [18] ont généralisé ce résultat en remplaçant la classe $\mathfrak{N}_c$ par celle des groupes $(L\mathfrak{F})\mathfrak{N}$; où $(L\mathfrak{F})\mathfrak{N}$ désigne la classe des groupes (localement finis)-par-nilpotents.

Chapitre 3. Groupes dont tous les sous-groupes propres de rang infini sont $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$

Dans ce chapitre on se propose de généraliser ces résultats pour la classe des groupes $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$, où $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$ désigne la classe des groupes (localement π -finis)-par-(nilpotents de classe $\leq c$) et c est un entier strictement positif.

Plus précisément, on démontre qu'un groupe $\mathfrak{F}$ -parfait fortement localement gradué de rang infini dont tous les sous-groupes propres de rang infini sont dans la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$ est lui-même dans la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$ s'il est non-parfait ou bien s'il n'admet pas d'image homomorphe simple de rang infini.

Nous allons démontrer également qu'un groupe fortement localement gradué de rang infini dont tous les sous-groupes propres de rang infini sont dans la classe $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{N}_c$ (respectivement, $\mathfrak{C}_\pi\mathfrak{N}_c$) est lui-même dans la classe $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{N}_c$ (respectivement, $\mathfrak{C}_\pi\mathfrak{N}_c$); où $\mathfrak{C}_\pi = (L\mathfrak{F}_\pi) \cap \mathfrak{C}$, $\mathfrak{F}_\pi = (L\mathfrak{F}_\pi) \cap \mathfrak{F}$, $\mathfrak{C}$ désigne la classe des groupes de Chernikov et c est un entier strictement positif.

3.2 Groupes dont les sous-groupes propres de rang infini appartiennent à une classe donnée

Ces dernières années beaucoup de résultats ont été publiés sur les groupes de rang infini dont tous les sous-groupes propres de rang infini appartiennent à une classe de groupes donnée en se restreignant à certains groupes résolubles généralisés. Dans cette section, on va donner quelques résultats récents qui nous semblent intéressants, notamment ceux qui sont publiés dans [16], [17], [18], [22], [23].

Dans un article paru en 1999, M. R. Dixon, M. J. Evans et H. Smith [22] ont étudié la structure des $\bar{\mathfrak{X}}$ -groupes dont tous les sous-groupes propres de rang infini sont dans la classe $\mathfrak{N}_c$ (respectivement, $L\mathfrak{N}$); où $\mathfrak{N}_c$ (respectivement, $L\mathfrak{N}$) désigne la classe des groupes nilpotents de classe au plus égale à c (respectivement, la classe des groupes localement nilpotents) en démontrant les résultats suivants :

Théorème 3.2.1 : Soient $c > 0$ un entier et G un $\bar{\mathfrak{X}}$ -groupe de rang infini.

- 1) Si tous les sous-groupes propres de rang infini de G sont dans la classe $\mathfrak{N}_c$, alors G lui-même est dans la classe $\mathfrak{N}_c$.
- 2) Si tous les sous-groupes propres de rang infini de G sont dans la classe $L\mathfrak{N}$, alors G lui-même est dans la classe $L\mathfrak{N}$.

Chapitre 3. Groupes dont tous les sous-groupes propres de rang infini sont $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$

Signalons ici qu'un résultat analogue à celui-là en remplaçant la classe $\mathfrak{N}_c$ par celle des groupes nilpotents $\mathfrak{N}$ est impossible. En effet, le célèbre exemple construit par H. Heineken et I. J. Mohamed (voir la page 13) est un groupe localement nilpotent, non-nilpotent et de rang infini, alors que tous ses sous-groupes propres sont nilpotents. C'est pour cette raison là, le résultat obtenu par les auteurs [22] sur les $\tilde{\mathfrak{X}}$ -groupes dont tous les sous-groupes propres de rang infini sont dans la classe $\mathfrak{N}$ est le suivant :

Théorème 3.2.2 : *Soit G un $\tilde{\mathfrak{X}}$ -groupe de rang infini. Si tous les sous-groupes propres de rang infini de G sont dans la classe $\mathfrak{N}$, alors tous les sous-groupes propres de G sont dans la classe $\mathfrak{N}$.*

Bien entendu, un groupe non- $\mathfrak{N}$ minimal localement nilpotent n'ayant pas de sous-groupes maximaux est de rang infini comme le montre l'exemple de Heineken et Mohamed, par contre un groupe non- $\mathfrak{N}$ minimal localement nilpotent ayant des sous-groupes maximaux est de rang fini.

Dans le même contexte, les auteurs dans un article paru en 1997 [23], ont considéré un problème similaire à celui du Théorème 3.2.1 en remplaçant la classe $\mathfrak{N}_c$ (respectivement, $L\mathfrak{N}$) par celle des groupes résolubles de longueur dérivée au plus égale à d qui est notée par $\mathfrak{S}_d$ (respectivement, des groupes localement résolubles notée $L\mathfrak{S}$) dans le cas des $\tilde{\mathfrak{X}}$ -groupes. Ils ont établi les résultats suivants :

Théorème 3.2.3 : *Soient $d \geq 0$ un entier et G un $\tilde{\mathfrak{X}}$ -groupe de rang infini.*

- 1) *Si tous les sous-groupes propres de rang infini de G sont dans la classe $\mathfrak{S}_d$, alors G lui-même est dans la classe $\mathfrak{S}_d$.*
- 2) *Si tous les sous-groupes propres de rang infini sont dans la classe $L\mathfrak{S}$. Alors G est soit $L\mathfrak{S}$, soit isomorphe à l'un des groupes $SL(2, F)$, $PSL(2, F)$ ou $Sz(F)$; où F désigne un corps infini localement fini et ne contenant aucun sous-corps propre infini.*

Notons que si G est un groupe localement gradué non- $\mathfrak{A}\mathfrak{F}$ (respectivement, non- $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$) minimal, alors G est de rang infini. En effet, si G est de rang fini, alors il est de Chernikov d'après le Théorème 1.3.2 (respectivement, le Théorème 1.4.4) et par conséquent G est dans la classe $\mathfrak{A}\mathfrak{F}$ (respectivement, $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$) ; contradiction. D'ailleurs l'exemple de

Chapitre 3. Groupes dont tous les sous-groupes propres de rang infini sont $(L\mathfrak{F})\mathfrak{N}_c$

Heineken-Mohamed [28] illustre bien cette idée. Donc les groupes fortement localement gradués de rang infini dont tous les sous-groupes propres de rang infini sont $\mathfrak{A}\mathfrak{F}$ (respectivement, $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$) ne sont pas en général dans la classe $\mathfrak{A}\mathfrak{F}$ (respectivement, $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$). C'est pour cela que le résultat obtenu sur de tels groupes par F. De Giovanni et F. Saccomanno [17] est le suivant :

Théorème 3.2.4 : *Soit G un groupe fortement localement gradué de rang infini. Si tous les sous-groupes propres de rang infini de G sont $\mathfrak{A}\mathfrak{F}$ (respectivement, $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$), alors tous les sous-groupes propres de G sont dans la classe $\mathfrak{A}\mathfrak{F}$ (respectivement, $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$).*

De leur côté, M. De Falco, F. De Giovanni, C. Musella et N. Trabelsi [16] en 2014 ont montré le résultat suivant :

Théorème 3.2.5 : *Soit G un groupe fortement localement gradué de rang infini. Si tous les sous-groupes propres de rang infini de G sont dans la classe $(L\mathfrak{F})\mathfrak{A}$, alors G est aussi $(L\mathfrak{F})\mathfrak{A}$.*

Récemment, F. De Giovanni et M. Trombetti [18] ont généralisé le Théorème 3.2.1 en démontrant le résultat suivant :

Théorème 3.2.6 : *Soit G un groupe fortement localement gradué de rang infini.*

- 1) *Si tous les sous-groupes propres de rang infini de G sont dans la classe $(L\mathfrak{F})\mathfrak{N}$, alors G lui-même est dans la classe $(L\mathfrak{F})\mathfrak{N}$.*
- 2) *Si tous les sous-groupes propres de rang infini de G sont dans la classe $(L\mathfrak{F})(L\mathfrak{N})$, alors G lui-même est dans la classe $(L\mathfrak{F})(L\mathfrak{N})$.*

3.3 Groupes dont tous les sous-groupes propres de rang infini sont $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$

Cette section est consacrée d'abord à démontrer qu'un groupe fortement localement gradué de rang infini dont tous les sous-groupes propres de rang infini sont dans la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$ est lui-même dans la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$. Dans un premier temps, en considérant que notre groupe est $\mathfrak{F}$ –parfait et non-parfait, puis en considérant le cas où notre groupe est $\mathfrak{F}$ –parfait et n'admet pas d'image homomorphe simple de rang infini.

On va caractériser également les groupes fortement localement gradués de rang infini dont tous les sous-groupes propres de rang infini sont dans la classe $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{N}_c$ (respectivement, $\mathfrak{C}_\pi\mathfrak{N}_c$) ; où $\mathfrak{C}_\pi = (L\mathfrak{F}_\pi) \cap \mathfrak{C}$, $\mathfrak{F}_\pi = (L\mathfrak{F}_\pi) \cap \mathfrak{F}$, $\mathfrak{C}$ désigne la classe des groupes de Chernikov et c est un entier strictement positif. Plus précisément, on démontre que de tels groupes sont dans la classe $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{N}_c$ (respectivement, $\mathfrak{C}_\pi\mathfrak{N}_c$).

3.3.1 Le cas non-parfait et $\mathfrak{F}$ –parfait

Dans cette partie, le groupe G est considéré comme étant $\mathfrak{F}$ –parfait c'est à dire qu'il n'admet pas de sous-groupes propres d'indice fini.

D'abord nous avons besoin du Lemme suivant dû à [7, Lemma 3.7] qui pour la commodité du lecteur on a inclu sa démonstration qui est très courte.

Lemme 3.3.1 ([7]) : *Soient $\mathfrak{X}$ une classe de groupes S –fermée et G un groupe de rang infini dont tous les sous-groupes propres de rang infini sont dans la classe $\mathfrak{X}$. Si G/G' est de rang infini, alors tous les sous-groupes propres de G sont dans la classe $\mathfrak{X}$.*

Démonstration : Soit H un sous-groupe propre de rang fini de G . Si $HG' = G$, alors $G/G' = HG'/G' \simeq H/H \cap G'$. Comme H est de rang fini et la classe des groupes de rang fini est H –fermée, on en déduit que G/G' est aussi de rang fini ; contradiction. D'où HG' est un sous-groupe propre de G . Si HG' est de rang infini, alors il est dans la classe $\mathfrak{X}$. Comme $\mathfrak{X}$ est S –fermée, on en déduit que H est aussi dans $\mathfrak{X}$. Supposons maintenant que HG' soit de rang fini. Donc G/HG' est de rang infini. Par suite, G/HG' étant abélien de rang infini, admet un sous-groupe propre K/HG' de rang infini d'après

Chapitre 3. Groupes dont tous les sous-groupes propres de rang infini sont $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$

[29]. Ce qui nous donne que HG' est contenu dans K . Donc K , et par conséquent H , est dans la classe $\mathfrak{X}$. ■

En utilisant le Théorème 3.2.1 et le Corollaire 2.5.3, on est en mesure de prouver le résultat suivant :

Théorème 3.3.2 : *Soient $c > 0$ un entier et G un groupe fortement localement gradué de rang infini dont tous les sous-groupes propres de rang infini sont $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$. Si G est $\mathfrak{F}$ -parfait et non-parfait, alors G est un $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$ -groupe.*

Démonstration : Supposons que G/G' est de rang infini. Comme la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$ est stable par passage aux sous-groupes, on en déduit que tous les sous-groupes propres de G sont dans la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$ d'après le Lemme 3.3.1. Par suite, G étant localement gradué infini, il est dans la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$ d'après le Corollaire 2.5.3. Supposons maintenant G/G' de rang fini. Comme G est de rang infini et G/G' est de rang fini, on en déduit que G' est de rang infini. Par suite, G' étant un sous-groupe propre de G , est dans la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$. Soit T_π le sous-groupe engendré par tous les π -éléments de G' . Donc T_π est dans la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$ et par conséquent est un $L\mathfrak{F}_\pi$ -groupe d'après le Lemme 2.2.1. Supposons que T_π soit de rang fini, donc G/T_π est de rang infini. Soit H/T_π un sous-groupe propre de G/T_π de rang infini. Par suite, H étant propre dans G et de rang infini, est dans la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$. D'où H/T_π est aussi dans la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$. Il s'ensuit qu'il existe un sous-groupe normal K/T_π de H/T_π tel que K/T_π est un $L\mathfrak{F}_\pi$ -groupe et $(H/T_\pi)/(K/T_\pi)$ est nilpotent de classe égale au plus à c . On en déduit que $\gamma_{c+1}(H/T_\pi)$ est inclu dans K/T_π et par conséquent est un $L\mathfrak{F}_\pi$ -groupe. Or $\gamma_{c+1}(H/T_\pi) = \gamma_{c+1}(H)T_\pi/T_\pi$ est un sous-groupe de G'/T_π qui est sans π -éléments. Donc $\gamma_{c+1}(H/T_\pi)$ est trivial, ce qui nous donne que H/T_π est nilpotent de classe $\leq c$. Par suite, G/T_π étant fortement localement gradué de rang infini dont tous les sous-groupes propres de rang infini sont nilpotents de classe au plus égale à c , est lui-même nilpotent de classe au plus égale à c d'après le Théorème 3.2.1. Comme T_π est un $L\mathfrak{F}_\pi$ -groupe, il en résulte que G est dans la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$. Maintenant, supposons que le rang de T_π soit infini et soit H/T_π un sous-groupe propre de G/T_π . Comme T_π est de rang infini, H aussi est de rang infini. D'où H , et par conséquent H/T_π , est dans la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$. Comme G est $\mathfrak{F}$ -parfait, G/T_π est infini. Par suite, G/T_π étant localement gradué infini dont tous les sous-groupes propres sont dans la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$, est lui-même dans la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$ d'après le Corollaire 2.5.3. Or T_π est un

Chapitre 3. Groupes dont tous les sous-groupes propres de rang infini sont $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$

$L\mathfrak{F}_\pi$ —groupe, il en découle que G est dans la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$. ■

3.3.2 Le cas $\mathfrak{F}$ —parfait et non simple

Dans cette partie, on va considérer que notre groupe G est $\mathfrak{F}$ —parfait n’ayant pas d’image homomorphe simple de rang infini, en particulier G lui-même n’est pas simple.

A l’aide du Théorème 3.2.1 et le Corollaire 2.5.3, on est en mesure de prouver le résultat suivant :

Théorème 3.3.3 : *Soient $c > 0$ un entier et G un groupe fortement localement gradué de rang infini dont tous les sous-groupes propres de rang infini sont $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$. Si G est $\mathfrak{F}$ —parfait n’ayant pas d’image homomorphe simple de rang infini, alors G est un $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$ —groupe.*

Démonstration : D’après le Théorème 3.3.2, on peut supposer que G soit parfait. En vertu du Théorème 3.2.6, G est dans la classe $(L\mathfrak{F})\mathfrak{N}$. Donc G étant parfait, il n’admet pas d’image nilpotente non-triviale. Il s’ensuit que G est localement fini. Soit F_π le sous-groupe engendré par tous les π —sous-groupes normaux de G . Donc F_π est un π —sous-groupe normal dans G . Si F_π est de rang fini, alors G/F_π est de rang infini et comme il vérifie les hypothèses du théorème, on peut supposer que F_π est trivial. D’abord on va supposer que tout sous-groupe propre normal de G est de rang fini et soit M le sous-groupe engendré par tous les sous-groupes propres normaux de G . Si M est un sous-groupe propre de G , alors M est de rang fini (d’après l’hypothèse) et par conséquent G/M est un groupe simple de rang infini ; cela contredit le fait que G n’admet pas d’image homomorphe simple de rang infini. Donc $G = M$ et G est engendré par tous ses sous-groupes propres normaux. Soit N un sous-groupe propre normal de G . D’après ce qu’on a supposé, N est de rang fini. Donc le quotient G/N est de rang infini. Par suite, G/N étant localement fini de rang infini, admet un sous-groupe propre K/N de rang infini d’après [45]. D’où K est un sous-groupe propre de G de rang infini et par conséquent il est dans la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$. Donc N est aussi dans la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$, ce qui implique que $\gamma_{c+1}(N)$ est un $L\mathfrak{F}_\pi$ —groupe. Mais F_π étant trivial, on en déduit que $\gamma_{c+1}(N)$ est aussi trivial. D’où N est nilpotent de classe au plus égale à c . Il en résulte donc que tous les sous-groupes propres normaux de G sont nilpotents de

Chapitre 3. Groupes dont tous les sous-groupes propres de rang infini sont $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$

classe au plus égale à c . Maintenant, il est facile de voir que G est localement nilpotent. En effet, soit H un sous-groupe de type fini de G . D'une part, comme G est engendré par tous ses sous-groupes propres normaux, on en déduit que H est inclu dans un produit d'un nombre fini de sous-groupes propres normaux de G qui sont nilpotents de classe au plus égale à c . D'autre part, on sait que le produit d'un nombre fini de sous-groupes normaux nilpotents est nilpotent. Donc H est nilpotent et par conséquent G est localement nilpotent. Ensuite, G étant un groupe localement nilpotent périodique, est produit direct de ses composantes primaires i.e $G = \prod_{p \notin \pi} G_p$ où G_p est un p -sous-groupe maximal de G tel que p est un nombre premier n'appartenant pas à l'ensemble π puisque F_π est trivial. Si G possède plusieurs composantes primaires, qui sont donc propres, alors pour un certain nombre premier $p \notin \pi$, $G = G_p \langle G_q : p \neq q \notin \pi \rangle$ est produit de deux sous-groupes propres normaux. D'où G est de rang fini, ce qui est contradictoire. Donc G est un p -groupe où $p \notin \pi$, d'où G est sans π -éléments. Il s'ensuit que tous les sous-groupes propres de rang infini de G sont nilpotents de classe au plus égale à c . Par suite, G étant fortement localement gradué de rang infini dont tous les sous-groupes propres de rang infini sont nilpotents de classe égale au plus à c , est aussi nilpotent de classe égale au plus à c en vertu du Théorème 3.2.1. Comme G est parfait, il est trivial; ce qui est contradictoire. Il en résulte que G admet un sous-groupe propre normal N de rang infini. Donc N est dans la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$. Comme F_π est trivial, on en déduit que N est sans π -éléments et par conséquent N est nilpotent de classe égale au plus à c . Comme G est $\mathfrak{F}$ -parfait, G/N est infini. Soit H/N un sous-groupe propre de G/N . Donc H est un sous-groupe propre de G de rang infini, d'où H , et par conséquent H/N , est dans la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$. Par suite, G/N étant un groupe localement gradué infini dont tous les sous-groupes propres sont $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$, est lui-même dans la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$ d'après le Corollaire 2.5.3. Mais comme G est parfait, G/N est dans la classe $L\mathfrak{F}_\pi$. D'où G est dans la classe $\mathfrak{N}_c(L\mathfrak{F}_\pi)$.

Maintenant, soit x un π -élément de G . Si $\langle N, x \rangle = G$, alors $G/N \simeq \langle x \rangle / \langle x \rangle \cap N$, d'où G/N est cyclique. Cela nous donne que G est nilpotent-par-cyclique; mais G est parfait, on en déduit donc que G est trivial; contradiction. Par conséquent le sous-groupe $\langle N, x \rangle$ est propre dans G . Comme N est de rang infini, $\langle N, x \rangle$ est aussi de rang infini. Donc il est dans la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$. D'où $\gamma_{c+1}(\langle N, x \rangle)$ est un $L\mathfrak{F}_\pi$ -groupe. Donc le commutateur $[N, x]$ qui est inclu dans $\gamma_{c+1}(\langle N, x \rangle)$ est aussi un $L\mathfrak{F}_\pi$ -groupe. D'autre part, on a $[N, x]$ est inclu dans N ; mais N est sans π -éléments,

Chapitre 3. Groupes dont tous les sous-groupes propres de rang infini sont $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$

donc $[N, x]$ est trivial. D'où x est un élément d'Engel à gauche borné du sous-groupe $\langle N, x \rangle$. De plus $\langle N, x \rangle$, étant nilpotent-par-cyclique, est résoluble, donc l'ensemble des éléments d'Engel à gauche borné du sous-groupe $\langle N, x \rangle$ coïncide avec le radical de Baer du sous-groupe $\langle N, x \rangle$ d'après [42, 12.3.3]. On a N est un sous-groupe normal nilpotent de G , donc N est inclu dans le radical de Baer du sous-groupe $\langle N, x \rangle$. On en déduit que $\langle N, x \rangle$ est un groupe de Baer qui est nilpotent-par-fini, donc $\langle N, x \rangle$ est nilpotent d'après [15, Lemme 77]. On sait que dans un groupe nilpotent les éléments d'ordres premiers entre eux commutent, donc comme x est un π -élément et N est sans π -éléments, on en déduit que $[N, x] = 1$. Soit T_π le sous-groupe engendré par tous les π -éléments de G . Donc $[N, T_\pi] = 1$ et par conséquent T_π est contenu dans $C_G(N)$ le centralisateur de N dans G . Supposons que NT_π soit propre dans G , donc il est dans la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$ et par conséquent T_π est un $L\mathfrak{F}_\pi$ -groupe d'après le Lemme 2.2.1. On en déduit que T_π est trivial, donc G est sans π -éléments. Par suite, G est un groupe fortement localement gradué de rang infini dont tous les sous-groupes propres de rang infini sont dans la classe $\mathfrak{N}_c$, d'où G est lui-même dans la classe $\mathfrak{N}_c$ d'après le Théorème 3.2.1; contradiction avec le fait que G est parfait. Il s'ensuit que $NT_\pi = G$, donc $G/T_\pi \simeq N/N \cap T_\pi$ est nilpotent. D'où G/T_π est trivial et donc $G = T_\pi$. Comme $T_\pi \leq C_G(N)$, on en déduit que $N \leq Z(G)$. Par suite, $G/Z(G) \simeq (G/N)/(Z(G)/N)$ est un $(L\mathfrak{F}_\pi)$ -groupe. D'après [41, corollaire du théorème 4.12], G' est aussi un $(L\mathfrak{F}_\pi)$ -groupe. Comme G est parfait et F_π est trivial, on en déduit que G est trivial; contradiction. Par cette contradiction finale, il s'ensuit que F_π est de rang infini. Si $F_\pi = G$, alors G est dans la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)$. Supposons que F_π soit propre dans G et soit H/F_π un sous-groupe propre de G/F_π . Comme F_π est de rang infini, H est aussi de rang infini. Donc H , et par conséquent H/F_π , appartient à la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$. Par suite, G/F_π étant localement gradué infini dont tous les sous-groupes propres sont dans la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$, est lui-même dans $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$ d'après le Corollaire 2.5.3. Il en résulte que G est dans la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$. Mais G étant parfait, n'admet pas d'image nilpotente non-triviale. D'où G est un $(L\mathfrak{F}_\pi)$ -groupe. Ceci achève la démonstration. ■

3.3.3 Groupes dont tous les sous-groupes propres de rang infini sont $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{N}_c$ ou $\mathfrak{C}_\pi\mathfrak{N}_c$

Soient $\mathfrak{C}_\pi = (L\mathfrak{F}_\pi) \cap \mathfrak{C}$ et $\mathfrak{F}_\pi = (L\mathfrak{F}_\pi) \cap \mathfrak{F}$, où $\mathfrak{C}$ désigne la classe des groupes de Chernikov et c est un entier strictement positif.

Dans cette dernière partie, on établit des résultats sur les groupes fortement localement gradués de rang infini dont tous les sous-groupes propres de rang infini sont dans la classe $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{N}_c$ ou $\mathfrak{C}_\pi\mathfrak{N}_c$.

Pour ce faire, établissons d'abord le résultat préliminaire suivant :

Lemme 3.3.4 : *Soit G un groupe fortement localement gradué de rang infini dont tous les sous-groupes propres de rang infini sont dans $\mathfrak{N}\mathfrak{N}_c$. Alors G/G' est de rang infini.*

Démonstration : D'abord il est facile de montrer que tous les sous-groupes propres de G sont dans la classe $\mathfrak{N}\mathfrak{N}_c$. En effet, soit H un sous-groupe propre de G . Si H est de rang infini, alors il est dans $\mathfrak{N}\mathfrak{N}_c$. Supposons que H est de rang fini, donc il est clair qu'il est dans $\mathfrak{N}\mathfrak{N}_c$. Par suite, G étant fortement localement gradué, est lui-même dans la classe $\mathfrak{N}\mathfrak{N}_c$ en vertu du Théorème 1.7.1. Il existe donc un sous-groupe N normal dans G tel que N soit de rang fini et G/N soit dans $\mathfrak{N}_c$. Comme G est de rang infini, G/N est de rang infini. Supposons que $(G/N)/(G/N)'$ est de rang fini. Donc G/N étant nilpotent, est aussi de rang fini d'après [41, Corollaire du Théorème 2.26] ; contradiction. D'où le rang de $(G/N)/(G/N)'$ est infini. Or $(G/N)/(G/N)' \simeq G/G'N$, donc $G/G'N$ est de rang infini et par conséquent le rang de G/G' est infini aussi. ■

A l'aide du Théorème 1.4.3 et le Lemme 2.6.4, on a le résultat suivant :

Théorème 3.3.5 : *Soit G un groupe fortement localement gradué de rang infini dont tous les sous-groupes propres de rang infini sont dans la classe $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{N}_c$. Alors G lui-même est dans la classe $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{N}_c$.*

Démonstration : Comme les groupes finis sont de rang fini, on en déduit que tous les sous-groupes propres de rang infini de G sont dans la classe $\mathfrak{N}\mathfrak{N}_c$. Ensuite, d'après le Lemme 3.3.4, le rang de G/G' est infini. Comme la classe $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{N}_c$ est stable par passage aux sous-groupes, il s'ensuit que tous les sous-groupes propres de G sont dans $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{N}_c$.

Chapitre 3. Groupes dont tous les sous-groupes propres de rang infini sont $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$

d'après le Lemme 3.3.1. Supposons que G soit de type fini. Donc G étant localement gradué dont tous les sous-groupes propres sont dans $\mathfrak{F}\mathfrak{N}$, est lui-même dans $\mathfrak{F}\mathfrak{N}$ d'après le Théorème 1.4.3. Il existe donc un sous-groupe normal N de G tel que N soit fini et G/N soit nilpotent. On en déduit que N est de rang fini, de plus G/N étant nilpotent de type fini, est polycyclique et par conséquent il est de rang fini. D'où G est de rang fini, ce qui est contradictoire. Donc G est de type infini. Maintenant, si G n'est pas dans la classe $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{N}_c$, alors G est non- $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{N}_c$ minimal. Le Lemme 2.6.4 dit que G est non- $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_c$ minimal. Par conséquent, G est de Chernikov d'après le Théorème 1.4.3 ; ce qui nous donne que G est de rang fini, contradiction. D'où G est un $\mathfrak{F}_\pi\mathfrak{N}_c$ -groupe. ■

Si on prend pour π l'ensemble de tous les nombres premiers, alors $\mathfrak{F}_\pi = \mathfrak{F}$, donc le Théorème précédent admet la conséquence suivante :

Corollaire 3.3.6 : *Soit G un groupe fortement localement gradué de rang infini dont tous les sous-groupes propres de rang infini sont dans la classe $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_c$. Alors G lui-même est dans la classe $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_c$.*

Maintenant, A l'aide du Corollaire 2.6.3, on est en mesure de montrer le résultat suivant

Théorème 3.3.7 : *Soit G un groupe fortement localement gradué de rang infini dont tous les sous-groupes propres de rang infini sont dans la classe $\mathfrak{C}_\pi\mathfrak{N}_c$. Alors G lui-même est dans la classe $\mathfrak{C}_\pi\mathfrak{N}_c$.*

Démonstration : Comme les groupes de Chernikov sont de rang fini, on en déduit que tous les sous-groupes propres de rang infini de G sont dans la classe $\mathfrak{N}\mathfrak{N}_c$. Par suite, le Lemme 3.3.4 montre que G/G' est de rang infini. Comme la classe $\mathfrak{C}_\pi\mathfrak{N}_c$ est stable par passage aux sous-groupes, il s'ensuit que tous les sous-groupes propres de G sont dans $\mathfrak{C}_\pi\mathfrak{N}_c$ d'après le Lemme 3.3.1. Ensuite, G étant localement gradué infini, on en déduit que G est dans la classe $\mathfrak{C}_\pi\mathfrak{N}_c$ d'après le Corollaire 2.6.3. ■

Si on prend pour π l'ensemble de tous les nombres premiers, alors $\mathfrak{C}_\pi = \mathfrak{C}$, donc le Théorème précédent admet la conséquence suivante :

Corollaire 3.3.8 : *Soit G un groupe fortement localement gradué de rang infini dont tous les sous-groupes propres de rang infini sont dans la classe $\mathfrak{C}\mathfrak{N}_c$. Alors G lui-même est dans la classe $\mathfrak{C}\mathfrak{N}_c$.*

Chapitre 3. Groupes dont tous les sous-groupes propres de rang infini sont $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$

les groupes non- $\mathfrak{CN}$ minimaux localement gradués sont exactement les groupes non- $\mathfrak{N}$ minimaux n'ayant pas de sous-groupes maximaux d'après le Théorème 1.6.2, donc ils sont de rang infini. C'est pour cela que les groupes fortement localement gradués de rang infini dont tous les sous-groupes propres de rang infini sont dans la classe $\mathfrak{CN}$ ne sont pas en général dans la classe $\mathfrak{CN}$. En revanche, on a le résultat suivant :

Théorème 3.3.9 : *Soit G un groupe fortement localement gradué de rang infini dont tous les sous-groupes propres de rang infini sont dans la classe $\mathfrak{CN}$. Alors tous les sous-groupes propres de G sont dans la classe $\mathfrak{CN}$.*

Démonstration : Comme les groupes de Chernikov sont de rang fini, on en déduit que tous les sous-groupes propres de rang infini de G sont dans la classe $\mathfrak{NN}$. Par suite, le Lemme 3.3.4 montre que G/G' est de rang infini. Comme la classe $\mathfrak{CN}$ est stable par passage aux sous-groupes, il s'ensuit que tous les sous-groupes propres de G sont dans la classe $\mathfrak{CN}$ d'après le Lemme 3.3.1. ■

3.3.4 Perspectives

On pense que les hypothèses $\mathfrak{F}$ -parfait, non-parfait et n'admet pas d'images homomorphes simples de rang infini des Théorèmes 3.3.2 et 3.3.3 peuvent-êtres enlevées. D'où la conjecture suivante :

Conjecture 1 : *Soit $c > 0$ un entier. Si G est un groupe fortement localement gradué de rang infini dont tous les sous-groupes propres de rang infini sont $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$, alors G est un $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}_c$ -groupe.*

L'exemple de H. Heineken et I. J. Mohamed [28] est un p -groupe de rang infini qui n'est pas nilpotent et dont tous les sous-groupes propres sont nilpotents, donc ils sont dans la classe $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}$ pour tout ensemble de nombres premiers π ne contenant pas p . Donc la conjecture suivante est raisonnable :

Conjecture 2 : *Si G est un groupe fortement localement gradué de rang infini dont tous les sous-groupes propres de rang infini sont $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}$, alors G est soit un $(L\mathfrak{F}_\pi)\mathfrak{N}$ -groupe, soit G un groupe non- $\mathfrak{N}$ minimal n'ayant pas de sous-groupes maximaux.*

Bibliographie

- [1] A. Arikan, N. Trabelsi, On groups whose proper subgroups are Chernikov-by-Baer or (periodic divisible abelian)-by-Baer, J. Algebra Appl. 12 (2013) 1-15.
- [2] A. Arikan, N. Trabelsi, On minimal non-Baer-groups, Comm. Algebra 39 (2011) 2489-2497.
- [3] A. O. Asar, Locally nilpotent p -groups whose proper subgroups are hypercentral or nilpotent-by-Chernikov, J. London Math. Soc. (2) 61 (2000) 412-422.
- [4] A. Badis and N. Trabelsi, Soluble minimal non-(finite-by-Baer) groups. Riccerche di Matimatica (2010) 59 : 129-135.
- [5] A. Badis and N. Trabelsi, Groups with few non -((locally finite) -by- Baer) subgroups. Note di Matimatica 30 (2010) no. 2, 107-111.
- [6] A. Badis and N. Trabelsi, Groups whose proper subgroups are Baer-by-Chernikov or Baer-by-(finite rank).Cent. Eur. J. Math. 9(6) (2011), 1344-1348.
- [7] M. Bouchelaghem, N. Trabelsi, Groups whose proper subgroups of infinite rank have minimax conjugacy classes. J. Algebra appl. 16 (2017), 12 pp.
- [8] B. Bruno, On groups with Abelian-by-finite proper subgroups, Bollettino U. M. I. (6).3-B, (1984), 797-807.
- [9] B. Bruno, Groups in which proper subgroups contain a nilpotent subgroup of finite index, Boll. U. M. I., VI. Ser., D, Algebra Geom. 3, n° 1, (1984), 179-188.
- [10] B. Bruno, On p -groups with nilpotent-by-finite proper subgroups, Boll. U. M. I., VI.Ser., A 3, n° 1, (1989), 45-51.68.

Bibliographie

- [11] B. Bruno and R. E. Phillips, On minimal conditions related to Miller-Moreno type groups, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* 69 (1983), 153-168.
- [12] B. Bruno and R. E. Phillips, A note on groups with nilpotent-by-finite proper groups, *Arch. Math.* 65, (1995), 369—374.
- [13] B. Bruno and F. Napolitani, A note on nilpotent-by-Cernikov groups, *Glasgow Math.J.* 46 (2004), 211-215.
- [14] N. S. Chernikov, A theorem on groups of finite special rank. *Ukrain. Mat. Zh.* 42, 962-970 (1990) ; English transl. in *Ukrainian Math. J.* 42, 855-861 (1990).
- [15] C. Casolo, Groups with all subgroups subnormal, *Note Mat.* 28 (2009), n.2, 1-154.
- [16] M. De Falco, F. De Giovanni, C. Musella and N. Trabelsi, Groups with restrictions on subgroups of infinite rank, *Rev. Mat. Iberoam.* 30, no. 2, (2014), 537–550.
- [17] F. De Giovanni and F. Saccomanno, A note on groups of infinite rank whose proper subgroups are abelian-by-finite, *Colloq. Math.* 137, No. 2, (2014), 165-170.
- [18] F. De Giovanni and M. Trombetti, Groups of infinite rank with a locally finite term in the lower central series, *Algebra Colloq.* 22, no. 2, (2015), 181-188.
- [19] F. De Giovanni and M. Trombetti, Infinite minimal non-hypercyclic groups, *J. Algebra Appl.* 14, no. 10, (2015), 1550143, 15 pp.
- [20] A. Dilmi, Groups whose proper subgroups are (locally finite)-by-nilpotent, *Ann.Math. Blaise Pascal* 14 (2007), 29-35.
- [21] A. Dilmi and N. Trabelsi, Groups whose proper subgroups are (locally finite)-by-(locally nilpotent), *Publ. Math. Debrecen*, 87/ 1-2 (2015), 209-219.
- [22] M. R. Dixon, M. J. Evans and H. Smith, Locally (soluble-by-finite) groups with all proper non-nilpotent subgroups of finite rank, *J. Pure Appl. Algebra* 135, No. 1 (1999), 33-43.
- [23] M. R. Dixon, M. J. Evans and H. Smith, Locally (soluble-by-finite) groups with all proper insoluble subgroups of finite rank, *Arch. Math.* 68, No. 2 (1997), 100-109.
- [24] M. R. Dixon, M. J. Evans and H. Smith, Groups with all proper subgroups (finite rank)-by-nilpotent, *Arch. Math.* 72 (1999), 321-327.
- [25] M. R. Dixon, M. J. Evans and H. Smith, Groups with all proper subgroups nilpotent-by-(finite rank), *Arch. Math.* 75 (2000), 81-91.

Bibliographie

- [26] M. R. Dixon, M. J. Evans and H. Smith, Groups with all proper subgroups (finite rank)-by-nilpotent. II, *Communications in Algebra*, 29(3) (2001), 1183-1190.
- [27] S. Franciosi, F. De Giovanni, Y.P. Sysak, Groups with many polycyclic-by-nilpotent subgroups, *Ric. Mat.* 48 (1999) 361-378.
- [28] H. Heineken and I. J. Mohamed, A group with trivial centre satisfying the normalizer condition, *Journal of Algebra* 10 (1968), 368-376.
- [29] M. I. Kargapolov, Soluble groups of finite rank, *Algebra and Logic* 1, no. 5 (1962), 37-44.
- [30] O. H. Kegel, B. A. F. Wehrfritz, *Locally Finite Groups*, North-Holland, Amsterdam, 1973.
- [31] J. C. Lennox, Polycyclic Frattini factors in certain finitely generated groups, *Arch. Math.* 24 (1973) 571-578.
- [32] J. C. Lennox and D. J. S. Robinson, *The Theory of Infinite Soluble Groups*, (Clarendon Press, Oxford 2004).
- [33] A. I. Mal'cev, On certain classes of infinite soluble groups, *Mat. Sbornik* 28 (1951), 567-588; translated in *Amer. Math. Soc. Translations* 2 (1956), 1-21.
- [34] Y. I. Merzljakov, Locally soluble groups of finite rank, *Algebra and Logic* 8 (1969), 686-690.
- [35] G. A. Miller and H. Moreno. Non-abelian groups in which every subgroup is abelian. *Trans. Amer. Math. Soc.* 4 (1903), 389-404.
- [36] F. Napolitano and E. Pegoraro, On groups with nilpotent-by-Cernikov proper subgroups, *Arch. Math.* 69 (1997), 89-94.
- [37] M. F. Newman and J. Wiegold, Groups with many nilpotent subgroups, *Archiv der Math.* 15 (1964), 241-250.
- [38] A. Y. Olshanski, infinite groups with cyclic subgroups, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 245(1979), 785-787.
- [39] A. Y. Olshanski, An infinite simple torsion-free Noetherian group, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 43 (1979), 1328-1393.70.
- [40] J. Otal, J. M. Pena, Groups in which every proper subgroup is Cernikov-by-nilpotent or nilpotent-by-Cernikov, *Arch. Math.*, Vol. 51 (1988), 193-197.

Bibliographie

- [41] D. J. S. Robinson, Finiteness conditions and generalized soluble groups, V1 and V2 (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1972).
- [42] D. J. S. Robinson, A course in the theory of groups, (Springer-verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1982).
- [43] O. Yu. Schmidt. The groups, all subgroups of which are special. Math.Sbornik 31 (1924), 366-372.
- [44] H. Smith, Groups with few non-nilpotent subgroups, Glasgow Math. J. 39 (1997), 141-151.
- [45] V. P. Sunkov, On locally finite groups of finite rank, Algebra and Logic 10, (1971), 127-142.
- [46] N. Trabelsi, On minimal non-(torsion-by-nilpotent) and non-((locally finite)-by-nilpotent) groups, C. R. Acad. Sci. Paris Ser.I 344 (2007), 353-356.
- [47] M. Xu, Groups whose proper subgroups are finite-by-nilpotent, Arch. Math. 66 (1996), 353-359.
- [48] M. Xu, Groups whose proper subgroups are Baer groups, Acta. Math. Sinica 40 (1996), 10-17.
- [49] E. I. Zel'manov, Solution of the restricted Burnside problem for 2-groups, (Russian) Mat. Sb. **182** (1991), no. 4, 568-592; translation in Math. USSR-Sb. **72** (1992), no. 2, 543-565.
- [50] E. I. Zel'manov, Solution of the restricted Burnside problem for groups of odd exponent (Russian), Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 54 (1990) (1) 42-59; translation in Math. USSR-Izv. 36 (1991) (1) 41-60.