

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE FERHAT ABBAS - SETIF 1



THÈSE

Présentée à la faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Option : Mathématiques Appliquées

Par

Azeb Ahmed ABDELAZIZ

THÈME

**Etude théorique de quelques problèmes
dynamiques en contact avec endommagement**

Soutenu le : 26 /05/ 2015

Devant le jury :

Président	Dr. A. KADEM	Prof. Université de Sétif 1
Encadreur	Dr. S. BOUTECHEBAK	M.C. Université de Sétif 1
Examineurs	Dr. A. AYADI	Prof. Université d'Oum EL Bouaghi
	Dr. A. MEROUANI	M.C. Université de Bordj Bou Arréridj

Remerciements

Mes premiers remerciements vont, comme il se doit, à Docteur "Souraya Boutechebak" qui a dirigé cette thèse. C'est très difficile en quelques lignes de remercier mon directeur de thèse. Tout d'abord, je la remercie de m'avoir permis suivre cette aventure de la recherche en Mathématiques Appliquées où j'ai pu apprécier tant sa dynamisme que sa rigueur scientifique. Je tiens ensuite à leur exprimer mes plus vifs remerciements pour tous les précieux conseils qu'elle m'a donnés en orientant et en guidant mon travail. Outre sa compétence, la patience et la confiance qu'elle m'a accordée, travailler sous sa direction fût pour moi un grand plaisir.

Ma reconnaissance va aussi à Monsieur A. Kadem pour avoir accepté d'être président de ce jury. Je le remercie profondément pour les suggestions importantes qu'il m'a faits.

Je remercie également Messieurs A. Merouani et A. Ayadi de m'avoir l'honneur de participer au jury. Je les remercie très chaleureusement.

Je tiens enfin à exprimer mes remerciements à tous les miens qui m'ont soutenue par leur amour et leur confiance ; mes amis qui trouveront ici toute ma reconnaissance pour leur aide et leur encouragement qui m'a permis de terminer cette thèse.

Table des matières

Introduction générale	xi
Notations	xiv
Liste des figures	xv
I Modélisation et Outils Mathématiques	1
1 Modélisation	4
1.1 Cadres physiques - Modèles mathématiques	4
1.2 Lois de comportement.	10
1.3 Conditions aux limites de contact et lois de frottement	14
1.4 Conditions électriques à la surface de contact	20
2 Outils Mathématiques	24
2.1 Espaces de Sobolev	24
2.2 Triplet de Gelfand	28
2.3 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles	29
2.4 Eléments d'analyse dans les espaces de Hilbert	33
2.4.1 Equations et inéquations variationnelles d'évolution	33

2.4.2	Théorème de point fixe de Banach	36
2.5	Compléments divers	36
2.5.1	Lemmes de type Gronwall	37
2.5.2	Sous différentiabilité	38
II Problèmes de contact en thermodynamique avec endommagement		40
3	Problème de contact avec compliance normal et adhésion	43
3.1	Position du problème thermo-mécanique et hypothèses	43
3.2	Formulation variationnelle	49
3.3	Existence et unicité de la solution	51
4	Problème de contact avec réponse normale instantanée et frottement	65
4.1	Position du problème thermo-mécanique et hypothèses	65
4.2	Formulation variationnelle.	70
4.3	Existence et unicité de la solution	72
5	Problème de contact avec compliance normale et frottement	83
5.1	Position du problème thermo-mécanique et hypothèses	83
5.2	Formulation variationnelle.	87
5.3	Résultat d'existence et d'unicité	89
5.3.1	Résultat d'existence pour une inéquation d'évolution abstraite	89
5.3.2	Démonstration du Théorème 5.3.1	91
III Problèmes de contact des matériaux piézoélectriques avec en-		

dommagement	102
6 Problème électro-élasto-viscoplastique de contact avec compliance normale et adhésion	105
6.1 Position du problème électro-mécanique et hypothèses	105
6.2 Formulation variationnelle	110
6.3 Existence et unicité de la solution	111
7 Problème électro-viscoélastique de contact bilatéral avec frottement de Tresca	122
7.1 Position du problème électro-mécanique et hypothèses	122
7.2 Formulation variationnelle	127
7.3 Existence et unicité de la solution	128
7.4 Dépendance continue de la solution par rapport au seuil de frottement	138
Bibliographie	143

Introduction générale

Dans la plupart des systèmes de la mécanique des milieux continus, ils existent des situations dans lesquelles un corps déformable entre en contact avec d'autre corps ou bien avec une fondation rigide ou déformable. La problématique du contact est essentiellement de savoir comment les forces sont appliquées sur une structure et comment réagissent ces structures lorsqu'elles subissent ces forces. Les problèmes de contact mécanique se rencontrent principalement dans des domaines aussi variés que l'aéronautique, la mécanique automobile, le génie civil, les sciences du bois, la médecine, la production de l'énergie (assemblage des structures, fissuration dans les joints soudés) et les systèmes de transmissions. Prenant en compte les comportements divers des milieux continus, elle englobe l'hydrodynamique, la dynamique des gaz, l'élasticité, la plasticité et d'autres types de comportements. Vu l'importance du phénomène, des efforts considérables ont été consacrés à la modélisation, l'analyse ainsi que l'approximation numérique des processus physiques provenant des contacts entre des corps déformables ou entre un corps et une base rigide, déformable ou lubrifiée. Par conséquent, une Théorie Mathématique générale de la Mécanique du contact(MTCM) est actuellement émergée. Elle est concernée par les structures mathématiques qui sont à la base des problèmes de contact avec des lois constitutives différentes, c'est à dire, différents matériaux, diverses géométries et des conditions de contact différentes; voir par exemple [54, 63].

La modélisation des problèmes de contact d'un corps déformable avec une base dépend essentiellement de propriétés mécaniques du matériau considéré, ainsi que des conditions aux limites

de contact.

Le sujet de l'endommagement est extrêmement important dans les conceptions en ingénierie puisqu'il influence directement sur la vie usuelle de la structure ou la composante conçue. Il existe une littérature très riche sur ce sujet. Les modèles prenant en considération l'influence de l'endommagement interne du matériau sur le processus de contact ont été étudiés mathématiquement. L'analyse mathématique de problèmes unidimensionnels peut être trouvée dans [40]. Les premiers modèles de l'endommagement mécanique provenant des considérations thermodynamiques sont apparus dans [33]. Des modèles généraux récents dans [38, 39, 41, 49, 58] sont issus du principe de la puissance virtuelle. Dans tous ces travaux, l'endommagement du matériau est décrit par une fonction α ayant des valeurs entre zéro et un. Lorsque $\alpha = 1$, il n'y a pas d'endommagement dans le matériau, lorsque $\alpha = 0$, le matériau est complètement endommagé et lorsque $0 < \alpha < 1$, il a un endommagement partiel et le système a une capacité réduite. Certains problèmes en thermo-mécanique de contact avec endommagement ont été étudiés dans [9, 15, 16, 48, 50, 51, 67].

Les matériaux piézoélectriques sont extrêmement utilisés comme interrupteurs et actionneurs dans beaucoup de systèmes d'ingénierie, en radioélectronique, l'électroacoustique et la mesure des équipements. Ils sont caractérisés par le couplage des propriétés mécaniques et électriques. Ce couplage conduit à l'apparition d'un potentiel électrique suite à une déformation mécanique et, inversement, une déformation mécanique est générée lorsqu'un potentiel électrique est appliqué. Les matériaux piézoélectriques, pour lesquelles les propriétés mécaniques sont viscoélastiques sont appelés "les matériaux électro-viscoélastiques" et ceux pour lesquelles les propriétés mécaniques sont élasto-viscoplastiques sont appelés "les matériaux électro-élasto-viscoplastiques". Des modèles généraux pour des matériaux électro-élastiques ayant un effet piézoélectrique peuvent être trouvés dans [14, 51, 75, 45]. Un problème de contact avec "slip-dependent" pour les matériaux électro-élastiques a été étudié dans [68], et pour les matériaux électro-élasto-viscoplastiques a été étudié dans [30]. Des problèmes de contact sans frottement pour des matériaux électro-

viscoélastiques ont été étudiés dans [25, 8, 13, 64, 69] sous l'hypothèse que la fondation est isolante.

Actuellement, un intérêt considérable est porté aux problèmes de contact avec frottement impliquant les matériaux piézoélectriques voir par exemple [45]. Cependant, il n'existe virtuellement pas de résultats mathématiques à propos des problèmes de contact pour de tels matériaux et on a besoin de développer la Théorie Mathématique du Contact Mécanique (MTCM) pour inclure le couplage entre les propriétés mécaniques et électriques.

Les processus d'adhésion sont importants en industrie lorsque des parties, souvent non métalliques, sont collées ensemble. Pour cette raison, le contact adhésif entre les corps, lorsqu'une colle est ajoutée pour empêcher les surfaces d'un mouvement relatif, a récemment reçu, de plus en plus, une grande attention dans la littérature. Des modèles généraux avec adhésion peuvent être trouvés dans [36, 37, 56, 62]. Des résultats sur l'analyse mathématique de plusieurs problèmes de contact avec adhésion ; citons par exemple [25, 64, 63, 70]. Récemment, les matériaux composites ont atteint le sommet, puisqu'ils sont très solides et très légers, et par conséquent une importance considérable en aviation et en industrie automobile. Cependant, les matériaux composites peuvent subir, sous des contraintes, une délimination dans laquelle des plusieurs couches se décolent et se déplacent relativement les unes par rapport aux autres. Pour modéliser le processus lorsque le collage n'est pas permanent et un décolage peut avoir lieu, nous avons besoin de décrire l'adhésion et le contact ensemble. Un nombre de publications récentes traite des tels modèles, voir par exemple [22, 25, 36, 35, 56, 61] et les références comprises. L'idée est d'introduire une variable de surface interne, le champ d'adhésion $\beta \in [0, 1]$ qui décrit la densité fractionnelle des adhésifs actifs sur la surface de contact. En un point de la surface de contact adhésif, lorsque $\beta = 1$, l'adhésion est complète et tous les adhésifs sont actifs ; lorsque $\beta = 0$, tous les adhésifs sont inactifs, sévères et il n'y a pas d'adhésion. Lorsque $0 < \beta < 1$, l'adhésion est partielle et seulement une fraction β des adhésifs est active.

La thermodynamique a pour objet principal, l'étude des phénomènes mécaniques (travail,

pression,...) couplés aux phénomènes thermiques (chaleur, température,...), tous deux considérés du point de vue macroscopique. Elle est née au XIX^{ème} siècle de la nécessité de comprendre le fonctionnement des machines thermiques produites au début de l'ère industrielle. En raison du caractère universel des principes produits par la thermodynamique, celle-ci a dépassé par la suite le cadre strict de l'étude des machines, pour toucher tous les domaines de la physique dans lesquels la chaleur joue un rôle (électromagnétisme, optique,..), ainsi que d'autres disciplines scientifiques (chimie, biologie,...).

L'objectif de cette thèse est de proposer une certaine contribution à l'étude de quelques problèmes aux limites en mécanique de contact. Dans un processus dynamique, nous considérons ici des lois non linéaires pour des matériaux élasto-viscoplastiques prenant en considération l'influence de l'endommagement interne du matériau et un effet thermique. On décrit l'évolution de l'endommagement par une inclusion différentielle du type parabolique comme dans [58, 70].

Nous considérons également des lois de comportement pour des matériaux dites électro-viscoélastiques ou électro-élasto-viscoplastiques, ayant des propriétés mécaniques ainsi que des propriétés électriques (matériaux piézoélectriques). L'adhésion entre les surfaces de contact, lorsqu'une colle ajoutée pour éviter aux surfaces un mouvement relatif, est prise en considération dans ce travail.

Cette thèse est composée de trois parties que nous décrivons brièvement.

Dans la première partie, le but est d'introduire les outils nécessaires pour une bonne compréhension de la suite des problèmes traités. Nous commençons par présenter les divers modèles mécaniques de contact étudiés, puis, nous indiquons les espaces fonctionnels et les principales notations utilisées tout au long de la thèse. Enfin, nous rappelons quelques résultats fondamentaux d'analyse fonctionnelle concernant les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz, les équations et les inéquations variationnelles d'évolution paraboliques et les lemmes de Gronwall.

Dans la deuxième partie, nous consacrons trois chapitres pour l'étude théorique de deux problèmes de contact pour des lois constitutives non linéaires thermo-élasto-viscoplastiques avec

endommagement et d'un problèmes de contact pour une loi de comportement linéaire en thermo-viscoélasticité dans des processus dynamiques. Le premier chapitre qui s'inspire de l'article [9] est consacré à l'analyse d'un problème de contact sans frottement, avec endommagement et adhésion. Le contact est modélisé par une compliance normale. Nous établissons une formulation variationnelle du problème et démontrons l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel résultant. Les démonstrations sont basées sur les équations variationnelles dépendantes du temps, un résultat classique d'existence et d'unicité pour les inéquations paraboliques, une version du théorème de Cauchy-Lipschitz et les arguments de point fixe. Pour le deuxième chapitre, nous considérons un problème de contact avec frottement et endommagement. Le contact est modélisé par une réponse normale instantanée associée à une loi locale de frottement. On propose une formulation variationnelle. Pour établir l'existence et l'unicité de la solution de ce problème, on utilise la théorie des équations d'évolutions du premier ordre, des inéquations variationnelles du type parabolique et des arguments de point fixe de Banach. Tandis que dans le troisième chapitre, on s'intéresse à l'étude d'un problème de contact avec une version du loi de frottement de Coulomb. Le contact est modélisé par une condition de compliance normale. Nous présentons une formulation variationnelle du problème et nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution.

Dans la troisième partie, nous présentons deux problèmes dynamiques de contact pour des lois constitutives non linéaires électro-élasto-viscoplastiques et électro-viscoélastiques avec endommagement, sous diverses lois de contact, étudiés dans deux chapitres séparés. Dans le premier chapitre on considère un problème de contact électro-élasto-viscoplastique sans frottement avec adhésion. Nous obtenons une formulation variationnelle au problème mécanique puis présentons un résultat d'existence et d'unicité de la solution pour le modèle mécanique. Les démonstrations s'inspirent de celles utilisées dans le travail qui a fait l'objet du premier chapitre de la seconde partie. Dans le deuxième chapitre nous donnons un problème électro-viscoélastique avec contact bilatéral et frottement. Les démonstrations sont basées sur des résultats classiques sur

les équations et les inéquations variationnelles d'évolution et des arguments de point fixe.

Signalons pour finir que nous avons adopté la convention usuelle de sommation sur l'indice répété.

Notations

Soit Ω est un domaine de $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$ on note par

$\bar{\Omega}$	l'adhérence de Ω ,
Γ	la frontière de Ω supposée régulière,
$mes\Gamma_1$	la mesure de Lebesgue $(d - 1)$ dimensionnelle de Γ_1 ,
$\Gamma_i (i = \overline{1, 3})$	une partie mesurable de Γ ,
ν	la normale unitaire sortante à Γ ,
v_ν, v_τ	les composantes normales et tangentielles du champ vectoriel v ,
σ_ν, σ_τ	les composantes normales et tangentielles du champ tensoriel σ ,
$C^1(\bar{\Omega})$	l'espace des fonctions réelles continuellement différentiables sur $\bar{\Omega}$,
H	l'espace $L^2(\Omega)^d$,
$\mathcal{H}$	l'espace $L^2(\Omega)_s^{d \times d}$,
H_1	l'espace $H^1(\Omega)^d$,
$\mathcal{H}_1$	l'espace $\{\sigma \in \mathcal{H}, \text{Div}\sigma = (\sigma_{ij,j}) \in H\}$,
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace de sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ ,
$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$,
$\gamma : H_1 \rightarrow H_\Gamma$	l'application trace pour les fonctions vectorielles,
W	l'espace $\{\zeta \in H^1(\Omega) \mid \zeta = 0 \text{ sur } \Gamma_a\}$,
$\mathcal{W}$	l'espace $\{D = (D_i) \mid D_i \in L^2(\Omega), D_{i,i} \in L^2\}$.

Si X est un espace de Hilbert réel, on utilise les notations suivantes :

$(\cdot, \cdot)_X$	le produit scalaire sur X ,
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{X' \times X}$	le produit de dualité entre X et X' ,
$\ \cdot\ _X$	la norme sur X ,
$x_n \rightarrow x$	la convergence forte de la suite (x_n) vers l'élément x dans X ,
$x_n \rightharpoonup x$	la convergence faible de la suite (x_n) vers l'élément x dans X .

Si de plus $[0, T]$ un intervalle de temps, $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$, on note par

$C(0, T; H)$	l'espace des fonctions continues de $[0, T]$ dans H ,
$C^1(0, T; H)$	l'espace des fonctions continûment dérivables sur $[0, T]$ dans H ,
$L^p(0, T; H)$	l'espace des fonctions mesurables sur $[0, T]$ dans H ,
$\ \cdot\ _{L^p(0, T; H)}$	la norme de $L^p(0, T; H)$,
$W^{k,p}(0, T; H)$	l'espace de Sobolev de paramètres k et p ,
$\ \cdot\ _{W^{k,p}(0, T; H)}$	la norme de $W^{k,p}(0, T; H)$.

Pour une fonction f , on note par :

$\dot{f}, \ddot{f}$	les dérivées première et seconde de f par rapport au temps ,
$dom f$	le domaine de f ,
$supp f$	le support de f ,
$\partial_i f, f_{,i}$	la dérivée partielle de f par rapport à l'ième composante x_i ,
∇f	le gradient de f ,
$\varepsilon(f)$	la partie symétrique du gradient de f ,
$Div f$	la divergence de f ,
∂f	le sous différentiel de f ,
$div f$	la divergence de f .

Autre notations :

$\liminf$	limite inférieure,
$\limsup$	la limite supérieure,
$\mathbb{S}^d$	l'espace des tenseurs d'ordre deux symétriques sur $\mathbb{R}^d$,
$\cdot \cdot$	le produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{S}^d$,
$\ \cdot\ $	la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{S}^d$,
C	une constante générique strictement positive,
Λ^n	puissance n de l'opérateur Λ ,
p.p.	presque partout,
χ_K	fonction indicatrice de K .

Liste des figures

1.1	Cadre physique n°1	5
1.2	Cadre physique n°2	6
1.3	Représentation graphique de l'opérateur de troncation R_ν	15
1.4	Représentation graphique de la fonction δ	21
1.5	Représentation graphique de la fonction ψ	22

Première partie

Modélisation et Outils Mathématiques

Partie I

Modélisation et Outils Mathématiques

Afin de faciliter la lecture de cet ouvrage, il nous est paru nécessaire de présenter dans la première partie les cadres physiques et fonctionnels dans lesquels on va travailler. Nous précisons d'abord les cadres physiques et les modèles mathématiques correspondants utilisés dans cette thèse, ensuite nous décrivons les lois de comportement, les conditions de contact et les différentes lois de frottement qui interviennent dans tout le document.

Après un bref rappel de la mécanique des milieux continus, nous introduisons quelques préliminaires mathématiques qui seront utilisés partout dans ce mémoire. Nous commençons d'abord par les espaces de type Sobolev associés aux opérateurs divergence et déformation utilisés en mécanique, ainsi que leurs principales propriétés, notamment les théorèmes de trace. Nous rappelons ensuite les propriétés des espaces des fonctions à valeurs vectorielles et les espaces liés à l'effet piézoélectrique.

Enfin, nous passons en revue quelques résultats fondamentaux d'analyse fonctionnelle non linéaire dans les espaces de Hilbert, quelques résultats sur les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz, les inéquations quasi-variationnelles elliptiques et d'évolution.

Chapitre 1

Modélisation

Ce chapitre représente un bref rappel de la mécanique des milieux continus où nous allons introduire les cadres physiques utilisés dans cette thèse ; il est destiné à rappeler l'équation de mouvement de Cauchy, à décrire les lois de comportement thermo-élasto-viscoplastiques, électro-élasto-viscoplastiques et électro-viscoélastiques. Par ailleurs, nous précisons dans ce chapitre les conditions aux limites de contact.

1.1 Cadres physiques - Modèles mathématiques

Dans cette section nous allons introduire les deux cadres physiques et leurs modèles mathématiques des problèmes mécaniques intervenant dans cette thèse.

Cadre physique n°1. Soit un corps matériel qui occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) avec une surface frontière régulière Γ , partitionnée en trois parties mesurables Γ_1, Γ_2 et Γ_3 , tel que $mes\Gamma_1 > 0$. Nous notons par ν la normale unitaire sortante à Γ . Le corps est encastré sur Γ_1 dans une structure fixe. Sur Γ_2 agissent des tractions surfaciques de densité f_2 et dans Ω agissent des forces volumiques de densité f_0 et d'une source de chaleur externe donnée par la fonction q (voir figure 1.1). On suppose que f_2 et f_0 varient très lentement par rapport au temps. Soient $T > 0$ et $[0, T]$ l'intervalle de temps en question. Le corps est en contact avec

ou sans frottement, avec ou sans adhésion avec un obstacle déformable ou lubrifié sur la partie Γ_3 . Nous supposons que le matériau peut être endommagé durant le contact. Nous prenons en considération les propriétés mécaniques du corps. Notre objectif sera d'étudier l'évolution de ces propriétés dans le temps, sous l'hypothèse des petites transformations.

Nous utiliserons ce cadre physique dans les chapitres 3 et 4 de la thèse.

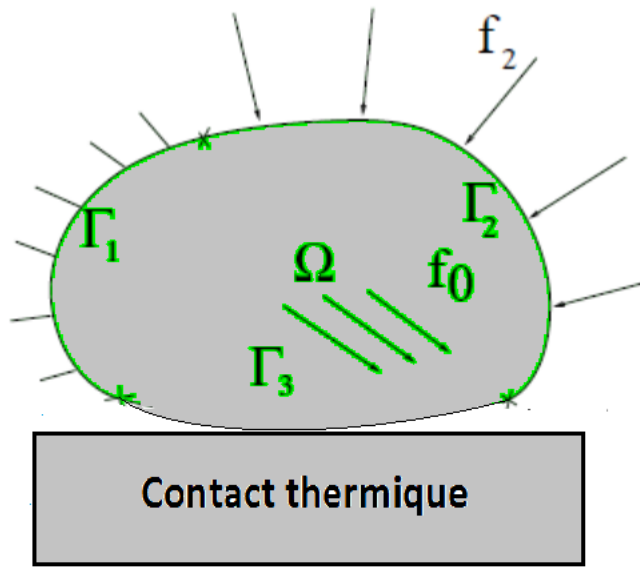


FIGURE 1.1 – Cadre physique n°1

Cadre physique n°2. Nous envisageons un corps matériel qui occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) avec une surface frontière régulière Γ , partitionnée en trois parties mesurables Γ_1, Γ_2 et Γ_3 , correspondant aux conditions aux limites mécaniques, d'une part, et en deux parties mesurables Γ_a et Γ_b , correspondant aux conditions aux limites électriques, d'autre part, telles que $mes\Gamma_1 > 0$, $mes\Gamma_a > 0$ et $\Gamma_3 \subset \Gamma_b$. On note par ν la normale unitaire sortante à Γ . Le corps est encastré sur Γ_1 dans une structure fixe. Sur Γ_2 agissent des tractions surfaciques de densité f_2 et dans Ω agissent des forces volumiques de densité f_0 et des charges électriques de densité volumiques q_0 (voir figure 1.2). On suppose que f_2 et f_0 varient très lentement par rapport au

temps. Le milieu est soumis à l'action de potentiel fixé φ_0 sur la partie Γ_a de la frontière ainsi qu'à l'action des charges électriques de densité surfacique q_2 , agissant sur la partie Γ_b . Soit $T > 0$ et soit $[0, T]$ l'intervalle de temps en question. Le corps est (ou peut arriver) en contact avec ou sans adhésion, avec ou sans frottement avec une fondation conductive (ou isolatrice) sur la partie Γ_3 . Nous supposons que le matériau peut être endommagé durant le contact. On étudie l'évolution de ces propriétés dans l'intervalle de temps $[0, T]$, sous l'hypothèse des petites transformations.

Les hypothèses physiques introduites pour la piézoélectricité consistent à négliger les effets magnétiques et thermiques et à considérer l'interaction électro-mécanique uniquement. Cette hypothèse est raisonnable pour les matériaux piézoélectriques utilisés habituellement comme les céramiques, les polymères et les piézo-compisites.

Nous utiliserons ce cadre physique dans les chapitres 6 et 7 de cette thèse.

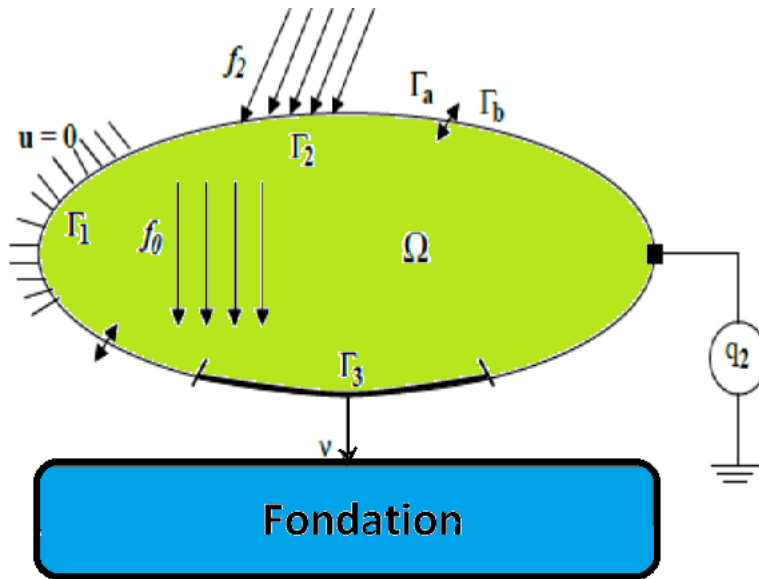


FIGURE 1.2 – Cadre physique n°2

Avant d'obtenir les modèles mathématiques qui correspondent au cadre physique présenté, voici quelques notations et conventions que nous utiliserons tout au long de cette thèse.

Nous désignons par $\mathbb{S}^d$ ($d = 2, 3$) l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur $\mathbb{R}$; $(\cdot, \cdot)$ et

$\|\cdot\|$ représentent respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{S}^d$. Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} u.v &= u_i v_i, & \|v\| &= (v.v)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^d, \\ \sigma.\tau &= \sigma_{ij} \tau_{ij}, & \|\tau\| &= (\tau.\tau)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \sigma, \tau \in \mathbb{S}^d, \end{aligned}$$

avec la convention de l'indice muet. Pour un vecteur v , nous utilisons la notation v pour désigner la trace γv de v sur Γ . Nous notons par v_ν et v_τ les composantes normale et tangentielle de v sur la frontière données par

$$v_\nu = v.\nu, \quad v_\tau = v - v_\nu \nu. \quad (1.1.1)$$

Nous désignons par $\sigma = \sigma(x, t)$ le champ des contraintes, par $u = u(x, t)$ le champ des déplacements et par $\varepsilon(u)$ le champ des déformations infinitésimales. Pour simplifier les notations, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance des fonctions par rapport à $x \in \bar{\Omega}$ et $t \in [0, T]$.

Pour un champ des contraintes σ nous dénotons par σ_ν et σ_τ les composantes normale et tangentielle à la frontière donnés par

$$\sigma_\nu = \sigma \nu.\nu, \quad \sigma_\tau = \sigma \nu - \sigma_\nu \nu. \quad (1.1.2)$$

En utilisant (1.1.1) et (1.1.2), nous obtenons la relation

$$(\sigma \nu).v = \sigma_\nu v_\nu + \sigma_\tau.v_\tau, \quad (1.1.3)$$

qui va intervenir tout au long de cette thèse, dans l'établissement des formulations variationnelles des problèmes mécaniques de contact.

En outre, les points au-dessus d'une fonction représentent la dérivation par rapport au temps, par exemple

$$\dot{u} = \frac{du}{dt} \quad \ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2}$$

où $\dot{u}$ désigne le champ des vitesses et $\ddot{u}$ désigne le champ des accélérations. Pour le champ des vitesses $\dot{u}$ les notations $\dot{u}_\nu$ et $\dot{u}_\tau$ représentent respectivement les vitesses normale et tangentielle

à la frontière, c'est-à-dire

$$\dot{v}_\nu = \dot{v} \cdot \nu, \quad \dot{v}_\tau = \dot{v} - \dot{v}_\nu \cdot \nu.$$

Rappelons maintenant la relation déformation-déplacement dans l'hypothèse des petites transformations

$$\varepsilon = (\varepsilon_{ij}), \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j) \text{ dans } \Omega \times (0, T). \quad (1.1.4)$$

Notons qu'ici et tout au long de la thèse, un indice qui suit une virgule indique une dérivation partielle par rapport à la composante correspondante à la variable spatiale.

Passons maintenant à la description des modèles mathématiques associées aux cadres physiques ci-dessus.

Modèle mathématique n°1. Le premier modèle mathématique étudié dans ce mémoire, décrit l'évolution du corps dans le cadre physique °1 (page 4). Les fonctions inconnues du problème sont le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, le champ de température $\theta : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, le champ d'endommagement $\alpha : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ et le champ d'adhésion $\beta : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$.

On sait qu'en général, l'évolution d'un corps matériel est décrite par l'équation de mouvement de Cauchy.

$$\text{Div} \sigma + f_0 = \rho \ddot{u} \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T), \quad (1.1.5)$$

où $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ désigne la densité de masse ; ici "Div" représente l'opérateur divergence pour les tenseurs, $\text{Div} \sigma = (\sigma_{ij,j})$. Le processus d'évolution défini par (1.1.5) s'appelle processus dynamique. Dans certaines situations, cette équation peut encore se simplifier. Par exemple, dans le cas où le champ des vitesses $\dot{u}$ varie très lentement par rapport au temps, le terme $\rho \ddot{u}$ peut être négligé. Dans ce cas, le processus s'appelle quasistatique et l'équation (1.1.5) s'appelle l'équation d'équilibre et devient

$$\text{Div} \sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T),$$

Puisque le corps est encastré sur Γ_1 , le champ des déplacements s'annule

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times (0, T). \quad (1.1.6)$$

La condition aux limites en tractions est

$$\sigma_\nu = f_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \times (0, T), \quad (1.1.7)$$

Nous allons compléter ultérieurement le modèle mathématique (1.1.5)-(1.1.7) par les conditions de contact sur la partie Γ_3 de la frontière.

Modèle mathématique n°2. Ce modèle mathématique décrit l'évolution du corps dans le cadre physique n°2 (page 5). C'est un modèle électro-mécanique. Les inconnues mécaniques du problème sont le champ des déplacements u , le champ des contraintes σ satisfaisant les égalités (1.1.6)- (1.1.7), le champ d'endommagement α et le champ d'adhésion β . A celles-ci se rajoutent les inconnues électriques du problème, à savoir le champ de déplacements électriques $D : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ et le potentiel électrique $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$. L'évolution du corps piézoélectrique est décrite par l'équation d'équilibre pour le champ de déplacements électriques.

$$\operatorname{div} D = q_0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T), \quad (1.1.8)$$

où "div" est l'opérateur de divergence pour les vecteurs, $\operatorname{div} D = (Di, i)$, et q_0 représente la densité des charges électriques volumiques. Rappelons que dans le cadre physique n°2, le potentiel électrique s'annule sur la partie Γ_a de la frontière

$$\varphi = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_a \times (0, T), \quad (1.1.9)$$

tandis que sur Γ_b , une charge électrique de densité q_2 est prescrite,

$$D \cdot \nu = q_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_b \times (0, T). \quad (1.1.10)$$

Ce modèle piézoélectrique (1.1.5)-(1.1.10) sera complété ultérieurement par les conditions aux limites sur la surface de contact Γ_3 .

Les équations précédentes sont insuffisantes à elles seules pour décrire le mouvement du corps matériel considéré. Il est nécessaire de décrire ce qui est propre au matériau lui même, c'est l'objet des lois de comportement que nous décrirons dans le deuxième paragraphe de ce chapitre.

1.2 Lois de comportement.

Les lois de comportement sont des relations entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations et leurs dérivées. C'est toute une série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement. Les expériences physiques pour les matériaux unidimensionnels constituent le point de départ dans l'établissement des lois de comportement. Voici quatre exemples classiques d'essais sur les solides : essais de chargement monotone, essais de charge-décharge, essais de fluage et essais de relaxation.

Dans la description des phénomènes purement mécanique, par loi de comportement (ou loi constitutive) nous comprenons dans la suite une relation entre le tenseur des contraintes σ , le tenseur des déformations infinitésimales ε et leurs dérivées temporelles $\dot{\sigma}$ et $\dot{\varepsilon}$. Pour un phénomène mécanique, une loi de comportement de matériau élasto-viscoplastique peut être écrite sous la forme

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{B}\varepsilon(u(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(s)), \varepsilon(u(s))) ds, \quad (1.2.1)$$

où les opérateurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des tenseurs d'ordre quatre et non linéaires ; leurs composantes a_{ijkl} et b_{ijkl} s'appellent coefficients de viscosité et élasticité respectivement et $\mathcal{G}$ représente une fonction constitutive non linéaire qui décrit le comportement viscoplastique du matériau.

Cette loi modifie légèrement dans la description des phénomènes thermo-mécaniques ou électro-mécaniques car ici nous devons aussi prendre en considération le champ de température θ , le champ de déplacements électriques $D = (D_i)$ ainsi que le champ électrique $E(\varphi) = -\nabla\varphi = -(\varphi, i)$. Nous présentons par la suite les lois de comportement qui interviennent dans cette thèse, elles correspondent à quatre catégories particulières de matériaux : matériaux thermo-viscoélastiques, matériaux thermo-élasto-viscoplastiques, matériaux électro-viscoélastiques et ma-

tériaux électro-élasto-viscoplastiques.

En conclusion, l'analyse des données expérimentales permet d'établir ce qui est propre au matériau lui-même et conduit à l'établissement de la forme des lois de comportement.

Lois de comportement thermo-viscoélastique ou thermo-élasto-viscoplastique avec endommagement.

Si nous prenons en considération l'effet thermique et l'endommagement du matériau durant le contact, nous arrivons à une généralisation de la loi (1.2.1), qui est une loi de comportement thermo-élasto-viscoplastique avec endommagement ayant la forme

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{B}\varepsilon(u(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(s)), \varepsilon(u(s)), \theta(s), \alpha(s)) ds, \quad (1.2.2)$$

La température θ est définie par une équation parabolique, qui représente la conservation de l'énergie comme suit

$$\dot{\theta} - k_0 \Delta \theta = \psi(\sigma - \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u})), \varepsilon(u), \theta, \alpha) + q, \quad (1.2.3)$$

où ψ est une fonction constitutive non linéaire qui représente la chaleur engendrée par les forces intérieures. Ici et ci-dessous k_0 est une constante strictement positive et q une donnée, qui représente la source de chaleur du volume.

L'endommagement α est une variable interne causé par de déformation viscoplastique, l'inclusion différentielle suivante sera utilisée pour décrire l'évolution du champ d'endommagement

$$\dot{\alpha} - k_1 \Delta \alpha + \partial \chi_K(\alpha) \ni S(\sigma - \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u})), \varepsilon(u), \theta, \alpha), \quad (1.2.4)$$

L'ensemble des fonctions d'endommagement admissibles K défini par

$$K = \{\alpha \in H^1(\Omega) \mid 0 \leq \alpha \leq 1 \text{ p.p dans } \Omega\}$$

Ici et ci-dessous, k_1 est une constante strictement positive, qui représente le coefficient de diffusion microfissuré, $\partial \chi$ est le sous-différentiel de la fonction indicatrice χ_K et S est une fonction constitutive donnée ; qui représente la source de l'endommagement dans le système.

Nous citons également parmi les lois thermo-élasto-viscoplastiques avec endommagement, une autre loi de comportement qui est même une généralisation de la loi (1.2.1), et écrit sous la forme

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon\dot{u}(t) + \mathcal{B}\varepsilon(u(t)) - \mathcal{M}(\theta(t), \alpha(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(s)), \varepsilon(u(s)), \alpha(s))ds, \quad (1.2.5)$$

où $\mathcal{M}$ est un opérateur de dilatation thermique. L'évolution de champ de température θ est régie par l'équation de la chaleur, obtenue à partir de la conservation de l'énergie, et définie par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{\theta} - \operatorname{div}(\mathcal{K}\nabla\theta) = \psi(\dot{u}, \theta, \alpha) + q. \quad (1.2.6)$$

où $\mathcal{K} = (k_{ij})$ représente le tenseur de conductivité thermique avec $\operatorname{div}(\mathcal{K}\nabla\theta) = (k_{ij}\theta_{,i})_{,i}$ et ψ est une fonction constitutive non linéaire qui représente la chaleur engendrée par les forces intérieures.

L'endommagement α est une variable interne définie plus haut par la relation (1.2.4).

Lorsque $\mathcal{G} = 0$, et pour l'endommagement α affecte la partie de l'élasticité, on peut définir une loi de comportement thermo-viscoélastique avec endommagement comme suit

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \alpha\mathcal{B}\varepsilon(u) - \mathcal{M}\theta, \quad (1.2.7)$$

dans ce cas sellement, les tenseurs $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{M}$ de viscosité, d'élasticité et thermique respectivement sont linéaires.

La température θ est définie par une équation de la conservation de l'énergie comme suit

$$\dot{\theta} - \operatorname{div}(\mathcal{K}\nabla\theta) = \alpha\varepsilon(\dot{u}).\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) - \theta\mathcal{M}.\varepsilon(\dot{u}) + C_\alpha(\dot{\alpha})^2 + q, \quad (1.2.8)$$

où C_α est le coefficient de vitesse d'endommagement et $q(x, t) > 0$ est la quantité de chaleur dans le volume durant l'intervalle de temps.

L'endommagement α est décrit par l'inclusion différentielle suivante

$$\dot{\alpha} - k_1\Delta\alpha + \partial\chi_{K^*}(\alpha) \ni S(\varepsilon(u), \theta, \alpha), \quad (1.2.9)$$

L'ensemble des fonctions d'endommagement admissibles K_* défini par

$$K_* = \{\alpha \in H^1(\Omega) \mid 0 < \alpha_* \leq \alpha \leq 1 \text{ p.p dans } \Omega\}.$$

Lois de comportement électro-viscoélastique ou électro-élasto-viscoplastique avec endommagement.

Les matériaux piézoélectrique sont caractérisés par le couplage des propriétés mécaniques et électriques. Ce couplage conduit à l'apparition d'un potentiel électrique lors de l'application des contraintes mécaniques, et inversement, des contraintes mécaniques sont générées lorsqu'un potentiel électrique est appliqué. Un matériau piézoélectrique dont les propriétés mécaniques sont élasto-viscoplastique est appelé matériau électro-élasto-viscoplastique et pour la contrainte on a $\sigma = \sigma^{evp} + \sigma^{el}$, où σ^{evp} et σ^{el} sont respectivement les parties élasto-viscoplastique et électrique de la contrainte, telles que σ^{evp} définie par (1.2.1) et $\sigma^{el} = -\mathcal{E}^* E(\varphi)$. A partir de la loi (1.2.1), nous obtenons une loi de comportement électro-élasto-viscoplastique avec endommagement comme suit

$$\begin{cases} \sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{B}\varepsilon(u) - \mathcal{E}^* E(\varphi) \\ \quad + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(s)) + \mathcal{E}^* E(\varphi(s)), \varepsilon(u(s)), \alpha(s)) ds, \\ D = \mathcal{E}\varepsilon(u) + \mathcal{C}E(\varphi) \end{cases} \quad (1.2.10)$$

dans laquelle les opérateurs $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{E}$, E sont définis ci-dessus. $\mathcal{C}$ représente le tenseur de la primitivité électrique. L'endommagement α pour la loi (1.2.10) causé par des déformations viscoplastiques, est donné par l'inclusion différentielle suivante

$$\dot{\alpha} - k_1 \Delta \alpha + \partial \chi_K(\alpha) \ni S((\sigma - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{E}^* E(\varphi), \varepsilon(u), \alpha) \quad (1.2.11)$$

Nous utiliserons la loi de comportement (1.2.10) dans le chapitre 6 de la troisième partie de cette thèse.

Lorsque $\mathcal{G} = 0$, et pour l'endommagement α causé par des déformations élastiques, (1.2.10) se

réduit à une loi de comportement de matériau électro-viscoélastique avec endommagement

$$\begin{cases} \sigma(t) = \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}(t))) + \mathcal{B}(\varepsilon(u(t)), \alpha(t)) - \mathcal{E}^*E(\varphi(t)), \\ D = \mathcal{E}\varepsilon(u) + \mathcal{C}E(\varphi). \end{cases} \quad (1.2.12)$$

où l'endommagement α est donné par l'inclusion différentielle suivante

$$\dot{\alpha} - k_1 \Delta \alpha + \partial \chi_K(\alpha) \ni S(\varepsilon(u), \alpha) \quad (1.2.13)$$

Nous utiliserons le loi de comportement (1.2.12) dans le chapitre 7 de la troisième partie de ce mémoire.

Finalement, afin de compléter le modèle mathématique qui décrit l'évolution du corps, il faut préciser les conditions aux limites sur Γ_3 , c'est l'objet des conditions de contact et lois avec ou sans frottement que nous décrirons dans le paragraphe suivant.

1.3 Conditions aux limites de contact et lois de frottement

Les conditions aux limites sur la surface de contact sont décrites à la fois en direction de la normale et dans le plan tangent, ces dernières étant appelées condition de frottement. En direction de la normale nous pouvons distinguer le contact unilatéral (lorsque l'obstacle est rigide), bilatéral (lorsqu'il n'y a pas de séparation entre le corps et l'obstacle), de compliance normale (lorsque l'obstacle est déformable) ou bien de réponse normale instantanée (lorsque la surface de contact est lubrifiée). A part le cas limite lorsque la contrainte tangentielle est nulle (le cas sans frottement), le frottement peut être à seuil (quand le glissement se produit que lorsque la force de frottement atteint une valeur critique) ou sans seuil (lorsque le glissement se produit pour n'importe quelle force de frottement). Parmi les lois de frottement à seuil, les plus utilisées dans la littérature sont celles de Coulomb et de Tresca ; elles modélisent un frottement sec, alors que les lois de frottement sans seuil modélisent un frottement lubrifié.

Condition de contact avec compliance normale et adhésion.

On va décrire la condition de contact avec compliance normale et adhésion sur $\Gamma_3 \times (0, T)$, on

introduit une variable interne d'état β définie sur $\Gamma_3 \times (0, T)$, qui représente l'intensité d'adhésion sur la surface de contact, telle que $0 \leq \beta \leq 1$. Quand $\beta = 1$ à un point $x \in \Gamma_3$, l'adhésion est complète et tous les liens sont actifs, quand $\beta = 0$ tous les liens sont désactivés et il n'y a pas d'adhésion; et quand $0 < \beta < 1$ c'est le cas d'une adhésion partielle et mesure la fraction des liens. Pour plus détails sur ce paragraphe, on renvoie par exemple [13]. On suppose que la fondation est supposée déformable et la zone de contact n'est pas connue à priori. La contrainte normale σ_ν satisfait la condition de compliance normale et adhésion, c'est-à-dire

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - l) - \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (1.3.1)$$

où σ_ν est le déplacement normal, l représente l'intestice entre le corps et la fondation, γ_ν est un coefficient positif, $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction donnée appelée fonction de compliance normale, et la fonction $R_\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est l'opérateur de troncature donné par

$$R_\nu(s) = \begin{cases} L & \text{si } s < -L, \\ -s & \text{si } -L \leq s \leq 0, \\ 0 & \text{si } 0 < s. \end{cases} \quad (1.3.2)$$

Ici $L > 0$ est longueur caractéristique des liens (voir figure 1.3).

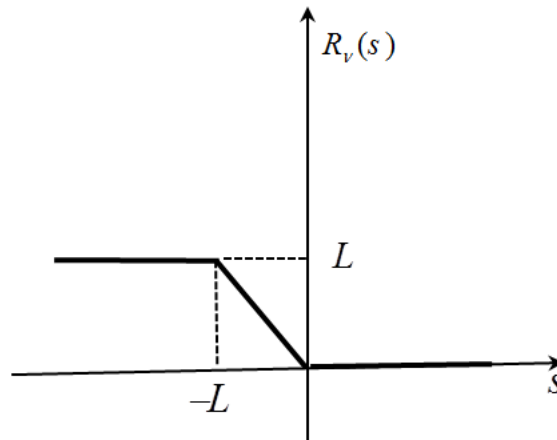


FIGURE 1.3 – Représentation graphique de l'opérateur de troncature R_ν

La condition (1.3.1) indique que la fondation exerce une action sur le corps en fonction de sa pénétration $u_\nu - l$, où le deuxième terme de l'égalité est la contribution de l'adhésion β à la tension de surface, précisons que dans le chapitre 3 de la thèse nous considérons le cas où le corps repose sur la fondation, c'est-à-dire, l'intestice l est nule. Notons que la condition de compliance normale avec adhésion (1.3.1) a été déjà utilisée dans [45, 70].

Quand le champ d'adhésion β est nul, (1.3.1) devient

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - l) \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times (0, T), \quad (1.3.3)$$

ce qui représente la condition de compliance normale sans adhésion, Des expressions générales de la forme (1.3.3) ont été utilisées dans [28, 29, 31, 58].

Comme exemple de fonction de compliance normale, nous pouvons considérer

$$p_\nu(r) = c_\nu r_+,$$

où c_ν est une constante positive et $r_+ = \max\{0, r\}$.

La diversité des matériaux a conduit les chercheurs à utiliser le collage des composites comme étant un moyen universel d'assemblage de matériaux de natures différentes. Pour modéliser les phénomènes d'adhésion, il est nécessaire d'ajouter le processus d'adhésion à la description du contact.

L'évolution du champ d'adhésion est décrite par une équation différentielle de la forme

$$\dot{\beta} = -[\beta(\gamma_\nu R_\nu(u_\nu)^2 + \gamma_\tau \|R_\tau(u_\tau)\|^2) - \epsilon_a]_+ \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times (0, T), \quad (1.3.4)$$

$$\beta(0) = \beta_0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_3, \quad (1.3.5)$$

où γ_ν, γ_τ et ϵ_a sont coefficients d'adhérence positifs, et β_0 l'adhésion initiale, tel que

$$0 \leq \beta_0 \leq 1, \quad \text{p.p. } x \in \Gamma_3, \quad (1.3.6)$$

et la fonction $R_\tau : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est l'opérateur de troncation donné par

$$R_\tau(v) = \begin{cases} v & \text{si } \|v\| \leq L, \\ L \frac{v}{\|v\|} & \text{si } \|v\| > L. \end{cases} \quad (1.3.7)$$

Sous les conditions (1.3.4)-(1.3.6), on a la remarque suivante :

Remarque 1.3.1 . *Nous remarquons que le champ d'adhésion vérifie la restriction $0 \leq \beta \leq 1$. En effet, puisque $\dot{\beta} \leq 0$ donc $\beta \leq \beta_0 \leq 1$. En outre, si $\beta = 0$ quand $t = t_0$ donc $\dot{\beta} = 0$ pour tout $t \geq t_0$, et d'où $\beta = 0$ pour tout $t \geq t_0$, p.p.x $\in \Gamma_3$. Alors nous concluons que $0 \leq \beta \leq 1$ pour tout $t \in [0, T]$, p.p.x $\in \Gamma_3$.*

Condition dans le plan tangent.

Aux points de Γ_3 , la rigidité tangentielle générée par la colle est supposée dépendante de l'adhésion β et du déplacement tangentiel u_τ ,

$$-\sigma_\tau = p_\tau(\beta)R_\tau(u_\tau) \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times (0, T) \quad (1.3.8)$$

où $p_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction de contact tangentielle, R_τ est un opérateur de troncation défini par la relation (1.3.7). Alors, $p_\tau(\beta)$ agit comme une constante de ressort, qui croît avec β ; la traction est en direction opposé au déplacement. Le module maximum de la traction tangentielle dans (1.3.8) est $p_\tau(1)L$. La traction de frottement tangentielle est supposée être beaucoup plus petite que l'adhésion et donc elle est omise. Quand elle n'est pas négligeable on doit ajouter la traction de frottement comme cela a été fait en [56].

Condition de contact avec réponse normale instantanée et frottement.

Une condition dite condition de contact avec réponse normale instantanée sur la surface potentielle de contact $\Gamma_3 \times (0, T)$ s'écrit

$$-\sigma_\nu = p_\nu(\dot{u}_\nu) \quad (1.3.9)$$

où $\dot{u}_\nu$ désigne la vitesse normale et p_ν est une fonction prescrite telle que $p_\nu(r) = 0$ pour $r \leq 0$. L'équation(1.3.9) traduit une dépendance générale de la contrainte normale par rapport à la vitesse normale, elle peut représenter le comportement d'une couche de lubrifiant sur la surface de contact. De tels exemples de contact à réponse normale instantanée sous la forme (1.3.9) peuvent être trouvés dans [16, 59]. Dans le cas où

$$p_\tau(r) = k_\nu r_+ \quad \forall r \in \mathbb{R}$$

avec $K_\nu \geq 0$, la résistance de la fondation à la pénétration est proportionnelle à la vitesse normale. Ce type de comportement a été considéré dans [59] modélisant le mouvement d'un corps déformable sur le sable ou sur un matériau granulaire.

La loi de frottement associée est donnée par

$$-\sigma_\tau = p_\tau(\dot{u}_\tau), \quad (1.3.10)$$

avec $\dot{u}_\tau$ représente la vitesse tangentielle sur la surface de contact. Cette seconde égalité dans (1.3.10) est sans seuil et dit que le cisaillement tangentiel sur la surface de contact dépend de la fonction de la vitesse tangentielle.

Les problèmes de contact avec frottement ont été étudiés dans de nombreuses publications, avec réponse normale instantanée voir par exemple [6, 16, 20, 24, 59]. Dans ces travaux les résultats d'existence et d'unicité des solutions faibles ont été obtenus.

Dans le cas où

$$p_\tau(r) = K_\tau r \quad \forall r \in \mathbb{R}^d$$

avec K_τ est le coefficient de frottement, supposé positif, (1.3.10) montre que le cisaillement tangentielle est proportionnel à la vitesse tangentielle. Tel est le cas quand la surface de contact est lubrifiée par une fine couche de fluide non newtonien voir par exemple [71].

Nous pouvons également envisager d'autres exemples de fonctions de contact données par

$$p_\nu(r) = k_\nu(r_+)^m + p_0, \quad (1.3.11)$$

$$p_\tau(r) = k_\tau \|r\|^{m-1} r \quad (1.3.12)$$

où $0 < m \leq 1$ est coefficient fixé et p_0 est la pression de l'huile lubrifiant, supposée donnée. Pour $m = 1$, l'équation (1.3.11) a été considérée dans [59] afin de modéliser le comportement d'une couche de lubrifiant sur la surface de contact.

Contact bilatéral avec frottement de Tresca.

Ici le contact entre le corps et la fondation se produit avec frottement bilatéral c'est-à-dire le

contact est maintenu pendant le mouvement. Cette propriété se traduit mathématiquement par :

$$u_\nu = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times [0, T]. \quad (1.3.13)$$

La loi de Tresca présente un seuil de frottement fixe g lorsque le solide et la base rigide sont en contact, la base rigide exerce sur le solide un effort tangentiel qui ne dépasse pas le seuil g .

$$\|\sigma_\tau\| \leq g \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times [0, T] \quad (1.3.14)$$

Tant que la contrainte tangentielle n'a pas atteint le seuil g , le milieu continu ne peut pas se déplacer par rapport à l'obstacle et il y'a blocage, ce qui traduit par :

$$\|\sigma_\tau\| < g \Rightarrow \dot{u}_\tau = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times [0, T] \quad (1.3.15)$$

Lorsque ce seuil est atteint, le solide peut se déplacer tangentiellement par rapport à la base rigide et il y'a alors un glissement. La contrainte tangentielle s'oppose à la vitesse. Par conséquent

$$\|\sigma_\tau\| = g \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda \dot{u}_\tau \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times [0, T] \quad (1.3.16)$$

En conclusion, les conditions de contact bilatéral avec frottement de Tresca s'écrivent alors comme suit :

$$\begin{cases} u_\nu = 0, & \|\sigma_\tau\| \leq g \\ \|\sigma_\tau\| < g \Rightarrow \dot{u}_\tau = 0 \\ \|\sigma_\tau\| = g \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda \dot{u}_\tau \end{cases} \quad (1.3.17)$$

où le seuil de frottement $g > 0$ est une fonction réelle définie sur $\Gamma_3 \times (0, T)$,

Loi de frottement de type Coulomb. C'est une des lois de frottement les plus répandues dans la littérature mathématique. Elle se caractérise par l'intervention de la contrainte normale dans le seuil de frottement et elle peut s'énoncer comme suit :

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq \mu |\sigma_\nu| \\ \|\sigma_\tau\| < \mu |\sigma_\nu| \Rightarrow u_\tau = 0 \\ \|\sigma_\tau\| = \mu |\sigma_\nu| \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda u_\tau \end{cases} \quad (1.3.18)$$

où $\mu \geq 0$ est le coefficient de frottement. C'est une version statique de la loi de Coulomb.

Une version dynamique de la loi de frottement de Coulomb utilisée en littérature dite loi de frottement sec, elle est indépendant de la vitesse de glissement et donnée par

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq p_\tau |u_\nu - l| \\ \dot{u}_\tau \neq 0 \Rightarrow \sigma_\tau = -p_\tau |u_\nu - l| \frac{\dot{u}_\tau}{\|\dot{u}_\tau\|} \end{cases} \quad (1.3.19)$$

où p_τ est une fonction positive. Dans (1.3.19), la contrainte tangentielle ne peut pas excéder le seuil de frottement $p_\tau |u_\nu - l|$. De plus, quand le seuil de frottement est atteint, le corps se met à glisser et la contrainte tangentielle tend à s'opposer au mouvement. Cette condition de frottement a été utilisée dans différents papiers, par exemple [60].

1.4 Conditions électriques à la surface de contact

Dans cette section nous allons énoncer les conditions de contact électrique, associées aux problèmes électro-mécaniques, sur la partie Γ_3 de la surface. Nous supposons que la fondation est électriquement conductive et son potentiel est maintenu à φ_0 . La condition électrique sur Γ_3 est donnée par

$$D \cdot \nu = \psi(u_\nu - l) \delta(\varphi - \varphi_0) \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T). \quad (1.4.1)$$

où ψ et δ sont des fonctions données qui seront décrites ultérieurement. Cette condition représente une condition régularisée qui peut être obtenue à partir des considérations suivantes.

Lorsqu'il n'y a pas de contact en un point sur la surface (i.e. $u_\nu < l$), l'interstice entre le corps et la base est supposé être isolant (disons qu'il est rempli d'air) et la composante normale du champ de déplacement électrique s'annule pour qu'il n'y ait aucune charge électrique libre sur la surface. Ainsi,

$$u_\nu < l \Rightarrow D \cdot \nu = 0. \quad (1.4.2)$$

Durant le processus de contact, (i.e. quand $u_\nu > l$) la composante normale du champ de déplacement électrique où la charge électrique libre est supposé être proportionnelle à la différence de

potentiel entre la surface du corps et la fondation, avec une constante positive k comme facteur de proportionnalité. Ainsi,

$$u_\nu \geq l \Rightarrow D \cdot \nu = k (\varphi - \varphi_0). \quad (1.4.3)$$

Combinons (1.4.2), (1.4.3) pour obtenir

$$D \cdot \nu = k \chi_{[0, \infty)}(u_\nu - l) (\varphi - \varphi_0), \quad (1.4.4)$$

où $\chi_{[0, \infty)}$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[0, \infty)$, qui est donnée par

$$\chi_{[0, \infty)}(r) = \begin{cases} 0 & \text{if } r < 0, \\ 1 & \text{if } r \geq 0. \end{cases}$$

La condition (1.4.4) décrit le contact électrique parfait. Pour la rendre plus réaliste, nous la régularisons par la condition (1.4.1) dans laquelle δ est une fonction de troncation,

$$\delta(s) = \begin{cases} -L_\delta & \text{si } s < -L_\delta, \\ s & \text{si } -L_\delta \leq s \leq L_\delta, \\ L_\delta & \text{si } s > L_\delta, \end{cases} \quad (1.4.5)$$

où L_δ est une constante positive très grande.

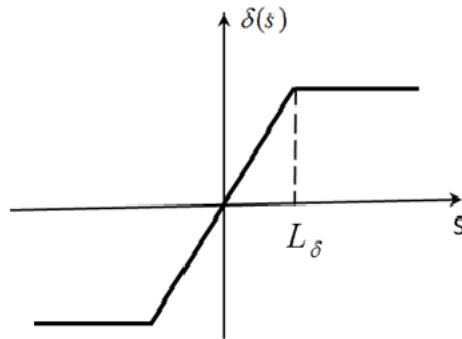


FIGURE 1.4 – Représentation graphique de la fonction δ

De cette façon, la différence $\varphi - \varphi_0$ est remplacée par $\delta(\varphi - \varphi_0)$. Notons que cette troncation ne pose aucune limitation pratique sur l'applicabilité du modèle puisque L_δ peut être arbitrairement grand (voir figure 1.4) et donc dans les applications $\delta(\varphi - \varphi_0) = \varphi - \varphi_0$. Les raisons de la

régularisation (1.4.1) de (1.4.4) sont mathématiques. Premièrement, nous avons besoin d'éviter les discontinuités dans les charges électriques lorsque le contact est établi et donc nous régularisons la fonction $k\chi_{[0,\infty)}$ dans (1.4.4) par une fonction Lipschitzienne ψ . Un choix possible est l'exemple suivant :

$$\psi(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < 0, \\ k\lambda r & \text{si } 0 \leq r \leq \frac{1}{\lambda}, \\ k & \text{si } r > \frac{1}{\lambda}, \end{cases} \quad (1.4.6)$$

où $\lambda > 0$ est un paramètre assez grand.

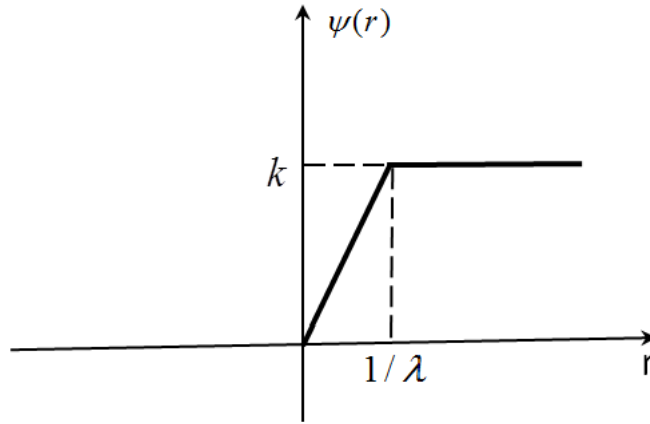


FIGURE 1.5 – Représentation graphique de la fonction ψ

Ce choix veut dire que durant le processus du contact, la conductivité électrique augmente avec le contact à travers les aspérités de la surface, et se stabilise quand la pénétration $u_\nu - l$ atteint la valeur $\frac{1}{\lambda}$. Deuxièmement, nous avons besoin du terme $\delta(\varphi - \varphi_0)$ pour rendre le terme $\varphi - \varphi_0$ borné (voir figure 1.5). Notons que lorsque $\psi \equiv 0$ dans (1.4.1), nous obtenons

$$D \cdot \nu = 0, \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (1.4.7)$$

ce qui découple les problèmes électriques et mécaniques sur la surface de contact. La condition (1.44) modélise le cas où l'obstacle est un isolant parfait et a été utilisée dans [68, 69, 45]. La

condition (1.4.1) à la place de (1.4.7), introduit un couplage fort entre les conditions aux limites mécaniques et électriques et mène vers un nouveau modèle mathématique, non standard. Elle sera utilisée dans le chapitre 6 de la thèse. Par ailleurs, la condition (1.4.7) va être utilisée dans le chapitre 7 de la thèse où nous avons supposé que la base est isolatrice (i.e. $\psi \equiv 0$).

Chapitre 2

Outils Mathématiques

Dans ce chapitre, nous introduisons les espaces fonctionnels utilisés dans cette thèse, et donnons quelques propriétés nécessaires dans la suite. Partout dans ce chapitre Ω est un domaine borné et Lipschitzien de $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$, de frontière Γ représentable localement comme le graphe d'une fonction Lipschitzienne sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^{d-1}$ étant situé localement d'un seul côté de Γ . Par ailleurs, nous considérons deux décompositions de Γ , $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ et $\Gamma = \Gamma_a \cup \Gamma_b$ avec $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset, i \neq j$ telle que $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_a, \Gamma_b$ sont mesurables et $mes\Gamma_1 > 0, mes\Gamma_b > 0$.

2.1 Espaces de Sobolev

On commence par un bref rappel de quelques résultats sur l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ défini par

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \partial_i u \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, d\}.$$

D'abord, on note par ∇u le vecteur de composante $\partial_i u$. On a $\nabla u \in L^2(\Omega)^d$ pour tout $u \in H^1(\Omega)$. On sait que $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\partial_i u, \partial_i v)_{L^2(\Omega)},$$

et la norme associée

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \quad \text{et on écrit } \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^d}^2. \quad (2.1.1)$$

On a les résultats suivants :

$$C^1(\bar{\Omega}) \text{ est dense dans } H^1(\Omega)$$

Théorème 2.1.1 . (*Rellich*)

$$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \text{ avec injection compacte}$$

Théorème 2.1.2 . (*trace de Sobolev*) Il existe une application linéaire et continue $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ telle que $\gamma u = u|_{\Gamma}$ pour $u \in C^1(\bar{\Omega})$.

Remarque 2.1.1 . l'espace $L^2(\Gamma)$ ci-dessus représente l'espace des fonctions réelles sur Γ qui sont L^2 pour la mesure superficielle $d\Gamma$. L'application γ s'appelle application de trace; elle est définie comme le prolongement par densité de l'application $u \mapsto u|_{\Gamma}$ définie pour $u \in C^1(\bar{\Omega})$. On note que l'application de trace $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ est un opérateur compact.

Introduisons les espaces de Hilbert suivants, associés aux inconnues mécaniques u et σ :

$$\begin{aligned} H &= \{u = (u_i) \mid u_i \in L^2(\Omega)\}, \\ H_1 &= \{u = (u_i) \in H \mid u_i \in H^1(\Omega)\}, \\ \mathcal{H} &= \{\sigma = (\sigma_{ij}) \mid \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega)\}, \\ \mathcal{H}_1 &= \{\sigma \in \mathcal{H} \mid \text{Div } \sigma = (\sigma_{ij,j}) \in L^2(\Omega)^d\}. \end{aligned}$$

Les espaces $H, H_1, \mathcal{H}$ et $\mathcal{H}_1$ sont des espaces réels de Hilbert munis des produits scalaires donnés par

$$\begin{aligned} (u, v)_H &= \int_{\Omega} u_i v_i dx, \quad \forall u, v \in H, \\ (u, v)_{H_1} &= (u, v)_H + (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}, \quad \forall u, v \in H_1, \\ (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}} &= \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} dx, \quad \forall \sigma, \tau \in \mathcal{H}, \\ (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}_1} &= (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \sigma, \text{Div } \tau)_H, \quad \forall \sigma, \tau \in \mathcal{H}_1, \end{aligned}$$

respectivement, où $\varepsilon : H_1 \rightarrow \mathcal{H}$ et $\text{Div} : \mathcal{H}_1 \rightarrow H$ sont respectivement les opérateurs de déformation et de divergence, définis par

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \text{Div } \sigma = (\sigma_{ij,i}).$$

Soit X un espace de Banach, nous désignons par $\|\cdot\|_X$ la norme associée, en particulier les normes associées aux espaces H , H_1 , $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}_1$.

Puisque la frontière Γ est Lipschitzienne, le vecteur normal extérieur ν à la frontière est définie p.p. Pour tout champ de vecteurs $v \in H_1$ nous utilisons la notation v pour désigner la trace γv de v sur Γ . Rappelons que l'application de trace $\gamma : H_1 \rightarrow H_\Gamma$ est linéaire et continue, mais n'est pas surjective. L'image de H_1 par cette application est notée par H_Γ , ce sous-espace s'injecte continûment dans $L^2(\Gamma)^d$. Désignons par H'_Γ le dual de H_Γ , et $(\cdot, \cdot)$ le produit de dualité entre H'_Γ et H_Γ . Pour tout $\sigma \in \mathcal{H}_1$, il existe un élément $\sigma\nu \in H'_\Gamma$ tel que

$$(\sigma\nu, \gamma v) = (\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \sigma, v)_H \quad \forall v \in H_1. \quad (2.1.2)$$

En outre, si σ est assez régulier (par exemple C^1), nous avons la formule

$$(\sigma\nu, \gamma v) = \int_{\Gamma} \sigma\nu \cdot v da, \quad \forall v \in H_1. \quad (2.1.3)$$

Donc, pour σ assez régulier nous avons la formule suivante (Formule de Green) :

$$(\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \sigma, v)_H = \int_{\Gamma} \sigma\nu \cdot v da, \quad \forall v \in H_1. \quad (2.1.4)$$

Nous définissons les sous-espace fermé de $L^2(\Omega)$ et H_1

$$Y = \{v \in L^2(\Omega) \mid \varepsilon_{ij}(v) \in L^2(\Omega)\} = H^1(\Omega) \quad , \quad V = \{v \in H_1 \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}. \quad (2.1.5)$$

Puisque $\text{mes}\Gamma_1 > 0$, l'inégalité de Korn s'applique sur V , alors, il existe une constante $C_K > 0$ dépendant uniquement de Ω et Γ_1 telle que

$$\|\varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}} \geq C_K \|v\|_{H_1}, \quad (2.1.6)$$

Nous considérons sur l'espace V , le produit scalaire donné par

$$(u, v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in V. \quad (2.1.7)$$

et soit $\|\cdot\|_V$ la norme associée, i.e.

$$\|v\|_V = \|\varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}}, \quad v \in V. \quad (2.1.8)$$

Par l'inégalité de Korn, il vient que $\|\cdot\|_{H_1}$ et $\|\cdot\|_V$ sont des normes équivalentes sur V et ainsi $(V, \|\cdot\|_V)$ est un espace de Hilbert. En outre, par le Théorème de trace de Sobolev il existe une constante C_0 dépendant uniquement de Ω , Γ_1 et Γ_3 telle que

$$\|v\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq C_0 \|v\|_V, \quad \forall v \in V. \quad (2.1.9)$$

De plus, on note par V' et Y' les duales de V et Y respectivement. Nous utilisons les notations $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V' \times V}$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_{Y' \times Y}$ pour représenter la dualité entre V' , V et Y' , Y respectivement.

Pour une fonction scalaire β , qui représente le champ d'adhésion sur la surface Γ_3 du contact, nous définissons l'ensemble

$$\mathcal{Z} = \{\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \mid 0 \leq \beta(t) \leq 1 \text{ sur } \Gamma_3\}. \quad (2.1.10)$$

Dans ce qui suit, nous définissons les espaces de Sobolev associés aux inconnues électriques (champ du déplacement électrique D et le potentiel électrique φ) des problèmes électro-mécaniques qui vont être introduits dans les chapitres 5 et 6 de la thèse.

Soit les espaces

$$\mathcal{W} = \{ D = (D_i) \mid D_i \in L^2(\Omega), \operatorname{div} D \in L^2(\Omega) \}, \quad (2.1.11)$$

$$W = \{\zeta \in H^1(\Omega) \mid \zeta = 0 \text{ sur } \Gamma_a\}, \quad (2.1.12)$$

où $\operatorname{div} D = (D_{i,i})$. Ces espaces $\mathcal{W}$ et W sont des espaces réels de Hilbert munis des produits scalaires donnés par

$$(D, E)_{\mathcal{W}} = (D, E)_{L^2(\Omega)^d} + (\operatorname{div} D, \operatorname{div} E)_{L^2(\Omega)}, \quad (2.1.13)$$

$$(\varphi, \phi)_W = (\nabla \varphi, \nabla \phi)_{L^2(\Omega)^d}, \quad (2.1.14)$$

et leurs normes associées $\|\cdot\|_{\mathcal{W}}$ et $\|\cdot\|_W$, respectivement.

$$\|D\|_{\mathcal{W}}^2 = \|D\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \|\operatorname{div} D\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \|\phi\|_W = \|\nabla \phi\|_{L^2(\Omega)^d}. \quad (2.1.15)$$

Puisque $\operatorname{mes}(\Gamma_a) > 0$, l'inégalité de Friedrichs-Poincaré est satisfaite, ainsi,

$$\|\nabla \zeta\|_{L^2(\Omega)^d} \geq C_F \|\zeta\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall \zeta \in W, \quad (2.1.16)$$

où $C_F > 0$ est une constante qui dépend uniquement de Ω et Γ_a et $\nabla \xi = (\xi_{.,i})$.

Il s'ensuit de (2.1.16) que $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ et $\|\cdot\|_W$ sont des normes équivalentes sur W et donc $(W, \|\cdot\|_W)$ est un espace réel de Hilbert. De plus, par le théorème de trace de Sobolev, il existe une constante $\tilde{C}_0$ dépendant uniquement de Ω , Γ_a et Γ_3 telle que

$$\|\zeta\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \tilde{C}_0 \|\zeta\|_W, \quad \forall \zeta \in W. \quad (2.1.17)$$

Aussi, rappelons que lorsque $\mathbf{D} \in L^2(\Omega)^d$ est une fonction régulière, la formule de Green (2.1.4) est satisfaite :

$$(\mathbf{D}, \nabla \zeta)_{L^2(\Omega)^d} + (\operatorname{div} \mathbf{D}, \zeta)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Gamma} \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} \zeta da, \quad \forall \zeta \in H^1(\Omega). \quad (2.1.18)$$

Pour des détails supplémentaires sur les espaces de Sobolev nous renvoyons le lecteur par exemple à [1, 18, 33].

2.2 Triplet de Gelfand

Dans cette section nous rappelons la définition d'un Triplet de Gelfand. Pour cela on va commencer par un rappel sur le théorème de représentation de Riesz-Fréchet :

Théorème 2.2.1 . *Soit H un espace de Hilbert et soit H' son espace dual. Alors, pour tout $\phi \in H'$ il existe $f \in H$ unique tel que*

$$\langle \phi, v \rangle_{H' \times H} = (f, v)_H \quad \forall v \in H$$

On a de plus

$$\|\phi\|_{H'} = \|f\|_H$$

Preuve. pour une démonstration, voir ([18], page 81-82).

L'importance de ce théorème est que toute forme linéaire continue sur H peut se représenter à l'aide du produit scalaire. L'application $\phi \mapsto f$ est un isomorphisme isométrique qui permet d'identifier H et H' .

Soit maintenant H un espace de Hilbert réel tel que V dense dans H et l'injection $V \subset H$ est continue. On identifie H et H' . Soit V' le dual de V . On peut alors prolonger H dans V' grâce au procédé suivant : étant donné $f \in H$, l'application $v \in V \mapsto (f, v)_H$ est une forme linéaire continue sur H et a fortiori sur V ; on la note $Tf \in V'$ de sorte que

$$\langle Tf, v \rangle_{V' \times V} = (f, v), \quad \forall f \in H, \quad \forall v \in V.$$

On vérifie que $T : H \rightarrow V'$ possède les propriétés suivantes :

- (1) $\|Tf\|_{V'} \leq C\|f\|_H \quad \forall f \in H$,
- (2) T est injective,
- (3) $T(H)$ est dense dans V' .

En général T n'est pas surjective de H sur V' . A l'aide de T on prolonge H dans V' et on a le schéma

$$V \subset H = H' \subset V'. \quad (2.2.1)$$

où les injections canoniques sont continues et denses. Ce triplet est appelé Triplet de Gelfand. on dit que H est l'espace pivot.

2.3 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles

Soit $0 < T < \infty$ et soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach réel. Nous notons par $C_c(0, T; X)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact dans $(0, T)$ à valeurs dans X .

Définition 2.3.1 . Une fonction $f : [0, T] \rightarrow X$ est dite mesurable s'il existe un sous ensemble $E \subset [0, T]$ de mesure nulle et une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $C_c(0, T; X)$ telle que $\|f_n(t) - f(t)\|_X \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, pour tout $t \in [0, T]/E$.

Définition 2.3.2 . Une fonction $f : [0, T] \rightarrow X$ est dite fortement dérivable dans $t_0 \in (0, T)$ s'il existe un élément $\frac{df}{dt}(t_0) \in X$ appelé la dérivée forte de f dans t_0 , tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{h} (f(t_0 + h) - f(t_0)) - \frac{df}{dt}(t_0) \right\|_X = 0. \quad (2.3.1)$$

Définition 2.3.3 . Une fonction $f : [0, T] \rightarrow X$ est dite intégrable s'il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $C_c(0, T; X)$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^t \|f_n(t) - f(t)\|_X dt = 0. \quad (2.3.2)$$

Théorème 2.3.1 (Bochner) Une fonction $f : [0, T] \rightarrow X$ est dite mesurable et intégrable si et seulement si $x \rightarrow \|f(x)\|_X : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ est intégrable. Dans ce cas,

$$\left\| \int_0^T f dt \right\|_X \leq \int_0^T \|f\|_X dt. \quad (2.3.3)$$

Soit $1 \leq p \leq \infty$ l'espace de Lebesgue $L^p(0, T; X)$ est l'ensemble des classes de fonctions $f : (0, T) \rightarrow X$ mesurables telles que l'application $t \rightarrow \|f(t)\|_X$ appartient à $L^p(0, T)$ On sait que $L^p(0, T; X)$ est un espace vectoriel normé avec la norme

$$\|f\|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{si } 1 \leq p < \infty, \quad (2.3.4)$$

$$\|f\|_{L^\infty(0, T; X)} = \inf \{ C > 0 : \|f(t)\|_X \leq C, \text{ p.p. } t \in (0, T) \}, \quad \text{si } p = \infty. \quad (2.3.5)$$

par ailleurs, on a les résultats suivants.

Proposition 2.3.1 (1) $L^p(0, T; X)$ ($1 \leq p < \infty$) est un espace de Banach.

(2) Si X est un espace de Hilbert avec le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ alors $L^2(0, T; X)$ est aussi un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(0, T; X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt.$$

(3) $L^r(0, T; X) \subset L^q(0, T; X)$ avec injection continue $1 \leq q \leq r \leq \infty$.

(4) Si X est un espace de Hilbert, alors

$$L^p(0, T; X)' \subset L^q(0, T; X) \quad \text{si } 1 < p, q < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

$$L^1(0, T; X)' \subset L^\infty(0, T; X),$$

où $L^p(0, T; X)'$ représente le dual de l'espace $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Définition 2.3.4 . Soit $u, v \in L^1(0, T; X)$. La fonction v s'appelle la dérivée généralisée d'ordre n de u sur $(0, T)$ si

$$\int_0^T \varphi^{(n)}(t) u(t) dt = (-1)^n \int_0^T \varphi(t) v(t) dt, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(0, T). \quad (2.3.6)$$

$C_c^\infty(0, T)$ étant l'espace des fonctions réelles indéfiniment dérivables, à support compact dans $(0, T)$. Nous écrivons $v = \dot{u}$ pour $n = 1$ et $v = u^{(n)}$ pour $n \geq 2$.

Soit $1 \leq p \leq \infty$. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(0, T; X)$ est l'espace des fonctions $u : [0, T] \rightarrow X$ telles que $u \in L^p(0, T; X)$ et $\dot{u} \in L^p(0, T; X)$ et $W^{1,p}(0, T; X)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(0, T; X)} = \|u\|_{L^p(0, T; X)} + \|\dot{u}\|_{L^p(0, T; X)}.$$

Définition 2.3.5 Une fonction $f : [0, T] \rightarrow X$ est dite absolument continue si quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que pour toute suite d'intervalles (a_j, b_j) disjoints, inclus dans $[0, T]$, tels que $\sum_j (b_j - a_j) < \delta$ on a $\sum_j \|f(b_j) - f(a_j)\|_X < \varepsilon$

Maintenant nous rappelons le lien entre les fonctions absolument continues et les fonctions de l'espace $W^{1,p}(0, T; X)$.

Théorème 2.3.2 . Soit $1 \leq p \leq \infty$ un espace de banach réflexif et soit $u \in L^p(0, T; X)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) $u \in W^{1,p}(0, T; X)$.
- (2) u admet un représentant absolument continu presque partout dérivable ayant la dérivée forte dans $L^p(0, T; X)$.
- (3) Il existe $u_0 \in X$ et $g \in L^p(0, T; X)$ telles que $u(t) = u_0 + \int_0^t g(s)ds \quad \forall t \in [0, T]$.

Il découle de la démonstration du Théorème 2.3.2 que, si X est un espace réflexif, alors toute fonction $u \in W^{1,p}(0, T; X)$ est fortement dérivable p.p sur $(0, T)$ et $\dot{u} = \frac{du}{dt}$ p.p sur $(0, T)$ par ailleurs $W^{1,1}(0, T; X)$ coïncide avec l'ensemble des fonctions lipschitziennes $u : [0, T] \rightarrow X$.

Étant donné un entier $k \geq 2$ et un réel $1 \leq p \leq \infty$ on définit par récurrence l'espace

$$W^{k,p}(0, T; X) = \{u \in W^{k-1,p}(0, T; X); \dot{u} \in W^{k-1,p}(0, T; X)\}.$$

on vérifie aisément que $u \in W^{k,p}(0, T; X)$ si et seulement s'il existe k fonctions $g_1, \dots, g_k \in L^\infty(0, T; X)$ telles que

$$\int_0^T u(t) \varphi^{(j)}(t) dt = (-1)^j \int_0^T g_j(t) \varphi(t) dt \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(I), \forall j = 1, 2, \dots, k$$

où $\varphi^{(j)}$ désigne la dérivée d'ordre j de φ . On peut donc considérer les dérivées successives $\dot{u} = g_1$

, $u^{(2)} = g_2, \dots, u^{(k)} = g_k$. L'espace $W^{k,p}(0, T; X)$ est un espace de banach muni de la norme

$$\|u\|_{W^{k,p}(0,T;X)} = \|u\|_{L^p(0,T;X)} + \sum_{\alpha=1}^k \|u^{(\alpha)}\|_{L^p(0,T;X)}.$$

Nous dénotons aussi par $C([0, T]; X)$ et $C^1([0, T]; X)$ les espaces des fonctions continues et continûment différentiables sur $[0, T]$ à valeurs dans X , respectivement, avec les normes

$$\begin{aligned} \|x\|_{C([0,T];X)} &= \max_{t \in [0,T]} \|x(t)\|_X, \\ \|x\|_{C^1([0,T];X)} &= \max_{t \in [0,T]} \|x(t)\|_X + \max_{t \in [0,T]} \|\dot{x}(t)\|_X \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Pour plus de détails sur les résultats résumés dans ce paragraphe nous renvoyons le lecteur par exemple à [18].

2.4 Éléments d'analyse dans les espaces de Hilbert

Dans cette section nous rappelons quelques éléments d'analyse dans les espaces de Hilbert et quelques résultats concernant les équations et les inéquations variationnelles d'évolution paraboliques du première ordre qui interviennent dans l'étude des problèmes mécaniques. Puis nous rappelons le théorème de point fixe de Banach.

2.4.1 Equations et inéquations variationnelles d'évolution

Nous commençons ce paragraphe par un bref rappel sur les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz. Pour cela, on considère un espace de Hilbert V muni du produit scalaire $(.,.)_V$ et la norme associée $\|.\|_V$ et V' l'espace dual de V en notant par $\langle ., . \rangle_{V' \times V}$ pour le produit de dualité entre V et V' .

Définition 2.4.1 . L'opérateur $A : V \rightarrow V'$ est dite :

(a) monotone si

$$\langle Au - Av, v - u \rangle_{V' \times V} \geq 0 \quad \forall u, v \in V;$$

(b) fortement monotone s'il existe $m > 0$ tel que

$$\langle Au - Av, u - v \rangle_{V' \times V} \geq m \|u - v\|_V^2 \quad \forall u, v \in V;$$

(c) de Lipschitz s'il existe $L > 0$

$$\|Au - Av\|_{V'} \leq L \|u - v\|_V \quad \forall u, v \in V.$$

(d) est dite hemicontinu si pour toute suite numérique $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ telle que $\lambda_n \rightarrow \lambda$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ on a

$$\langle A(u + \lambda_n v), w \rangle_{V' \times V} \rightarrow \langle A(u + \lambda v), w \rangle_{V' \times V} \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

En utilisant la définition précédente, on a le résultat suivant :

Proposition 2.4.1 . *Tout opérateur de Lipschitz est hémicontinu.*

Proposition 2.4.2 . *Soit $A : V \rightarrow V$ un opérateur non linéaire fortement monotone et de Lipschitz, c'est-à-dire*

$$\begin{cases} \text{(a) il existe } m > 0 \text{ tel que } (Au_1 - Au_2, u_1 - u_2)_V \geq m\|u_1 - u_2\|_V^2, \forall u_1, u_2 \in V. \\ \text{(b) il existe } L > 0 \text{ tel que } \|Au_1 - Au_2\|_V \leq L\|u_1 - u_2\|_V, \forall u_1, u_2 \in V. \end{cases}$$

Alors, pour tout $f \in V$ il existe un élément unique $u \in V$ tel que $Au = f$.

Le résultat précédent est un cas particulier du Théorème de Minty-Browder (voir par exemple [18] p. 88).

Théorème 2.4.1 . *Soit $V \subset H \subset V'$ un triplet de Gelfand. Soit $A : V \rightarrow V'$ un opérateur hémicontinu et monotone qui satisfait.*

$$\langle Av, v \rangle_{V' \times V} \geq \omega \|v\|_V^2 + \lambda, \quad \forall v \in V, \quad (2.4.1)$$

$$\|Av\|_{V'} \leq C_1(\|v\|_V + 1), \quad \forall v \in V \quad (2.4.2)$$

Pour des constantes $\omega > 0$, $C_1 > 0$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Etant donnée $u_0 \in H$ et $f \in L^2(0, T; V')$, alors il existe une fonction unique u satisfait

$$u \in L^2(0, T; V) \cap C([0, T]; H), \quad \dot{u} \in L^2(0, T; V'),$$

$$\dot{u}(t) + Au(t) = f(t) \text{ p.p. } t \in (0, T),$$

$$u(0) = u_0.$$

Théorème 2.4.2 . *Soit $V \subset H \subset V'$ est un triple de Gelfand, K est un sous-ensemble fermé non vide et convexe de V , et soit $A : V \rightarrow V'$ est un opérateur linéaire, symétrique et continu qui satisfait*

$$\text{il existe } C_2 \in \mathbb{R} \text{ et } C_3 > 0 \text{ tel que } \langle Av, v \rangle_{V' \times V} + C_2 \|v\|_H^2 \geq C_3 \|v\|_V^2, \quad \forall v \in V. \quad (2.4.3)$$

Alors, pour tout $u_0 \in K$ et $f \in L^2(0, T; V')$, il existe une unique fonction u qui satisfait

$$u \in L^2(0, T; V) \cap C(0, T; H) \cap W^{1,2}(0, T; V') \quad (2.4.4)$$

$$u(t) \in K, \quad \forall t \in [0, T], \quad (2.4.5)$$

$$\begin{aligned} & \langle \dot{u}(t), v - u(t) \rangle_{V' \times V} + \langle Au(t), v - u(t) \rangle_{V' \times V} \\ & \geq \langle f(t), v - u(t) \rangle_{V' \times V}, \quad \forall v \in K, \quad p.p. t \in (0, T), \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

$$u(0) = u_0. \quad (2.4.7)$$

Si $u_0 \in K$ et $f \in L^2(0, T; H)$, alors il existe une unique fonction u qui satisfait (2.4.5)-(2.4.7) et vérifie

$$u \in W^{1,2}(0, T; H) \cap L^2(0, T; V) \quad (2.4.8)$$

Les démonstrations de deux théorèmes précédentes peuvent être trouvées par exemple dans [11, 12].

Dans cette section, nous allons rappeler une version du théorème de Cauchy- Lipschitz (voir par exemple [72] ,p.48).

Théorème 2.4.3 *Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ est un espace de Banach réel et soit $F(t, \cdot) : X \rightarrow X$ un opérateur défini p.p. sur $(0, T)$ qui satisfait les propriétés suivantes :*

il existe $L_F > 0$ tel que $\|F(t, x) - F(t, y)\|_X \leq L_F \|x - y\|_X, \quad \forall x, y \in X, \quad p.p. t \in (0, T),$

il existe $1 \leq p \leq \infty$ tel que $F(\cdot, x) \in L^p(0, T; X), \quad \forall x \in X.$

Alors, pour tout $x_0 \in X$, il existe une fonction unique, $x \in W^{1,p}(0, T; X)$ tel que

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)) \quad p.p. t \in (0, T),$$

$$x(0) = x_0.$$

Le Théorème 2.4.3 sera utilisé pour prouver la solvabilité unique du problème intermédiaire impliquant le champ d'adhésion.

2.4.2 Théorème de point fixe de Banach

Le théorème de point fixe de Banach va être utilisé plus tard dans cette thèse pour démontrer l'existence et l'unicité. Soit X un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|_X$, $K \subset X$ une partie de X et soit $\Lambda : K \rightarrow X$ un opérateur défini sur K . On s'intéresse à l'existence d'une solution de l'équation

$$\Lambda(u) = u, \quad u \in K \quad (2.4.9)$$

Une telle solution de (2.4.9) s'appelle un point fixe de Λ dans K .

Théorème 2.4.4 . *(de point fixe de Banach) Soit K une partie non vide et fermé de l'espace de Banach X et soit $\Lambda : K \rightarrow K$ une contractante, i.e., $\exists k \in]0, 1[$ tel que*

$$\|\Lambda(u) - \Lambda(v)\|_X \leq k\|u - v\|_X, \quad u, v \in K.$$

Alors il existe un unique élément $u \in K$ tel que $\Lambda(u) = u$, i.e., Λ possède un point fixe unique dans K

Nous allons ainsi utiliser une version du théorème de point fixe de Banach que nous présentons ci-dessus.

Pour cela, nous rappelons que les puissances de l'opérateur Λ sont définies récursivement par

$$\Lambda^n = \Lambda(\Lambda^{n-1}) \quad \text{pour } n \geq 2.$$

Théorème 2.4.5 . *Sous les mêmes conditions du Théorème 2.4.4, on suppose que Λ^n est une contractante pour un certain entier $n \geq 2$. Alors Λ admet un point fixe unique dans K .*

2.5 Compléments divers

Nous rappelons ici les lemmes classiques du type Gronwall qui interviennent dans de nombreux problèmes de majoration et d'estimation d'erreur, en particulier pour établir l'unicité de la

solution. Pour avoir plus de détails sur les rappels figurant dans cette section, on pourra consulter par exemple [42].

2.5.1 Lemmes de type Gronwall

Lemme 2.5.1 . Soient $m, n \in C([0, T] : \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$ une constante, et $\phi \in C([0, T] : \mathbb{R})$ est une fonction telle que

(1) Si

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t m(s)ds + \int_0^t n(s)\phi(s)ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\phi(t) \leq (a + \int_0^t m(s)ds) \exp\left(\int_0^t n(s)ds\right), \quad \forall t \in [0, T].$$

(2) Si

$$\phi(t) \leq m(t) + a \cdot \int_0^t \phi(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\int_0^t \phi(s)ds \leq e^{aT} \cdot \int_0^t m(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

pour le cas particulier $m = 0$ la partie (1) de ce lemme devient

Corollaire 2.5.1 . Soit $n \in C([0, T] : \mathbb{R})$ telle que $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$ une constante, et $\phi \in C([0, T] : \mathbb{R})$ est une fonction telle que

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t n(s)\phi(s)ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\phi(t) \leq a \cdot \exp\left(\int_0^t n(s)ds\right), \quad \forall t \in [0, T],$$

Le corollaire 2.5.1 est souvent utilisé pour montrer l'unicité de la solution, de la façon suivante.

On suppose deux solutions, en notant par ϕ la norme de la différence entre ces solutions, on

essaie ensuite de majorer ϕ sous la forme

$$\phi(t) \leq \int_0^t n(s)\phi(s)ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

avec une certaine fonction $n \geq 0$. En appliquant corollaire 2.5.1 donne immédiatement la nullité de ϕ .

2.5.2 Sous différentiabilité

Nous considérons partout dans ce paragraphe que X est un espace normé, X' l'espace dual de X et K un sous-ensemble de l'espace X .

Définition 2.5.1 . On appelle fonction indicatrice de K , la fonction χ_K définie par

$$\chi_K = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in K, \\ +\infty & \text{si } u \notin K \end{cases} \quad (2.5.1)$$

Il est important d'introduire des notions telles que la sous-différentiabilité et le sous-gradient d'une fonction. La notion de sous-différentiabilité intervient fréquemment en mécanique et notamment dans la mécanique du contact.

Définition 2.5.2 . Soit une fonction $j : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ et u un élément de X tel que $j(u) \neq \pm\infty$.

Le sous-différentiel de j en u , noté $\partial j(u)$ est l'ensemble de X' défini par

$$\partial j(u) = \{u' \in X' : j(v) \geq j(u) + \langle u', v - u \rangle_{X' \times X}, \quad \forall v \in X\}. \quad (2.5.2)$$

Tout élément u' de l'ensemble $\partial j(u)$ est appelé sous-gradient de j en u . La fonction j est dite sous-différentiable en u si $\partial j(u) \neq \emptyset$, et on dit sous-différentiable si elle l'est en tout point u de l'espace X .

Dans le cas d'un espace de Hilbert X , le sous-différentiel de j en u peut aussi être écrit comme

$$\partial j(u) = \{u' \in X : j(v) \geq j(u) + (u', v - u)_X, \quad \forall v \in X\}.$$

Maintenant nous supposons que K est un convexe non vide. Nous considérons la fonction indicatrice χ_K de l'ensemble K . Nous avons de suite que si $u \notin K$ alors $\partial \chi_K(u) = \emptyset$. Supposons alors que $u \in K$. Il vient que si $u' \in \partial \chi_K(u)$ alors $\langle u', v - u \rangle_{X' \times X} \leq 0$, $\forall v \in K$.

Nous pouvons ainsi caractériser le sous-différentiel $\partial \chi_K$ d'une fonction indicatrice χ_K d'un ensemble convexe non vide

$$\partial \chi_K(u) = \{u' \in X' : \langle u', v - u \rangle_{X' \times X} \leq 0, \quad \forall v \in K\} \quad (2.5.3)$$

Deuxième partie

Problèmes de contact en thermodynamique avec endommagement

Partie II

Problèmes de contact en thermodynamique avec endommagement

Dans cette deuxième partie, nous allons traiter trois problèmes de contact dynamiques impliquant l'endommagement pour des corps thermo-viscoélastiques ou thermo-élasto-viscoplastiques. Le premier problème est modélisé avec condition de compliance normale couplée avec adhésion et sans frottement, le deuxième problème est modélisé avec condition de réponse normale instantanée avec frottement et le dernier est modélisé avec condition de compliance normale couplée avec adhésion et avec la loi de frottement sec de Coulomb. Pour ces problèmes, l'effet thermique est décrit par une équation différentielle de la chaleur et l'endommagement mécanique de matériau est décrit par une inclusion de type parabolique. On établit pour chaque problème une formulation variationnelle et un résultat d'existence et d'unicité. Les démonstrations sont basées sur des résultats classiques d'existence et d'unicité sur les équations et inéquations paraboliques, résultats d'existence pour une inéquation d'évolution abstraite et une version du Théorème de Cauchy-Lipschitz et des arguments de point fixe.

Chapitre 3

Problème de contact avec compliance normal et adhésion

Nous décrivons dans ce chapitre un modèle mathématique dans un processus dynamique d'un problème de contact entre un corps thermo-élasto-viscoplastique et une fondation déformable, nous supposons que le contact est sans frottement et qu'il est avec compliance normale et adhésion. Ce chapitre est structuré en 3 sections. Dans la première section, nous écrivons le problème thermo-mécanique et nous précisons les hypothèses adéquates sur les données. Ensuite, dans la section 2 nous obtenons la formulation faible. Puis dans la section 3 nous énonçons le Théorème 3.3.1 sur l'existence d'une solution faible unique du problème, et nous le prouvons. L'analyse de ce problème a fait l'objet de la publication [9].

3.1 Position du problème thermo-mécanique et hypothèses

Nous nous plaçons dans le cadre physique n°1 (page 4) présenté dans la première partie de la thèse et par conséquent nous utilisons le premier modèle mathématique n°1 (page 8). Pour que le modèle soit complet, précisons que la loi de comportement thermo-élasto-viscoplastique avec endommagement de type (1.2.2) et la condition de compliance normale couplée avec l'adhésion

est prescrite dans (1.3.1), où l'équation d'adhésion est décrite par (1.3.4)-(1.3.5). Alors le modèle classique pour ce processus est le suivant :

Problème $\mathcal{P}^1$. Trouver un champ des déplacements $u : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d$, un champ des contraintes $\sigma : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{S}^d$, un champ de température $\theta : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, un champ d'endommagement $\alpha : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ et un champ d'adhésion $\beta : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{B}\varepsilon(u(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(s)), \varepsilon(u(s)), \theta(s), \alpha(s)) ds \quad (3.1.1)$$

dans Ω , p.p. $t \in (0, T)$,

$$\rho \ddot{u} = \text{Div } \sigma + f \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.1.2)$$

$$\dot{\theta} - k_0 \Delta \theta = \psi(\sigma - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}), \varepsilon(u), \theta, \alpha) + q \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.1.3)$$

$$\dot{\alpha} - k_1 \Delta \alpha + \partial_K \chi(\alpha) \ni S(\sigma - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}), \varepsilon(u), \theta, \alpha) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.1.4)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (3.1.5)$$

$$\sigma \nu = f_0 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (3.1.6)$$

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu) - \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.1.7)$$

$$-\sigma_\tau = p_\tau(\beta) R_\tau(u_\tau) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.1.8)$$

$$\dot{\beta} = -[\beta(\gamma_\nu R_\nu(u_\nu)^2 + \gamma_\tau \|R_\tau(u_\tau)\|^2) - \epsilon_a]_+ \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.1.9)$$

$$k_0 \frac{\partial \theta}{\partial \nu} + k_2 \theta = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T), \quad (3.1.10)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T), \quad (3.1.11)$$

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = w_0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.1.12)$$

$$\beta(0) = \beta_0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (3.1.13)$$

Maintenant, nous allons fournir quelques commentaires sur les égalités, l'inclusion et les conditions aux limites (3.1.1)-(3.1.13) qui ont été déjà introduits dans le premier chapitre. L'équation (3.1.1) représente la loi de comportement thermo-élasto-viscoplastique de la forme (1.2.2), le processus est dynamique et (3.1.2) est l'équation du mouvement pour le champ des déplacements donnée dans (1.1.5). (3.1.3) représente la conservation de l'énergie où k_0 est une constante

strictement positive, ψ est une fonction constitutive non linéaire qui représente la chaleur engendrée par les forces intérieures, q est une donnée, qui représente la source de chaleur volumique. L'évolution du champ d'endommagement est gouvernée par l'inclusion (3.1.4) avec k_1 est une constante strictement positive, $\partial\chi$ représente le sous-différentiel de la fonction indicatrice χ_K et S est une fonction constitutive donnée; qui représente la source de l'endommagement dans le système. Les égalités (3.1.5) et (3.1.6) sont les conditions aux limites déplacement-traction, respectivement. L'équation (3.1.7) représente la condition de compliance normale avec adhésion sur la surface de contact Γ_3 où p_ν est une fonction positive donnée, qui sera décrite ci-dessous, et R_ν est l'opérateur de troncation définie par (1.3.3). La condition de contact (3.1.7) a été utilisé dans divers documents, voir par exemple [22, 23, 65, 70]. La Condition (3.1.8) est la condition de contact avec adhésion sur le plan tangentiel, dans lequel p_τ une fonction donnée et R_τ est l'opérateur de troncation définie par (1.3.7).

Ebsuite, l'équation différentielle ordinaire (3.1.9) décrit l'évolution du champ d'adhésion et elle a déjà été utilisée dans [22, 65], voir aussi [61] pour plus de détails. Nous notons que le processus adhésif est irréversible, une fois que la "déliaison" se produit l'adhésion ne peut pas être rétablie, car $\dot{\beta} \leq 0$. En outre, il est facile de voir que si $0 \leq \beta_0 \leq 1$ p.p. sur Γ_3 , alors $0 \leq \beta \leq 1$ p.p sur Γ_3 pendant le processus. (3.1.10) est une condition à la limite de Fourier pour la température où k_2 représente un coefficient de conduction de Γ . (3.1.11) est une condition à la limite de Neumann homogène pour le champ de l'endommagement sur Γ . Enfin, les fonctions u_0 , w_0 , θ_0 et α_0 dans (3.1.12) et β_0 dans (3.1.13) sont les données initiales.

Pour obtenir une formulation variationnelle du problème mécanique $\mathcal{P}^1$, nous avons besoin d'introduire quelques hypothèses sur les données.

L'opérateur de viscosité $\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \quad \text{Il existe } L_{\mathcal{A}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad \|\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2)\| \leq L_{\mathcal{A}} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| \text{ pour tout } \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ \text{(b)} \quad \text{Il existe } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ telle que } (\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2)) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m_{\mathcal{A}} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\|^2 \\ \quad \text{pour tout } \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ \text{(c)} \quad \text{L'application } x \mapsto \mathcal{A}(x, \varepsilon) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega \text{ pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(d)} \quad \text{L'application } x \mapsto \mathcal{A}(x, 0) \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (3.1.14)$$

L'opérateur d'élasticité $\mathcal{B} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \quad \text{Il existe } L_{\mathcal{B}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad \|\mathcal{B}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{B}(x, \varepsilon_2)\| \leq L_{\mathcal{B}} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| \text{ pour tout } \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ \text{(b)} \quad \text{L'application } x \mapsto \mathcal{B}(x, \varepsilon) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega \text{ pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(c)} \quad \text{L'application } x \mapsto \mathcal{B}(x, 0) \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (3.1.15)$$

L'opérateur de viscoplasticité $\mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \quad \text{Il existe } L_{\mathcal{G}} > 0 \text{ telle que } \|\mathcal{G}(x, \sigma_1, \varepsilon_1, \theta_1, \alpha_1) - \mathcal{G}(x, \sigma_2, \varepsilon_2, \theta_2, \alpha_2)\| \\ \quad \leq L_{\mathcal{G}} (\|\sigma_1 - \sigma_2\| + \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| + |\theta_1 - \theta_2| + |\alpha_1 - \alpha_2|) \\ \quad \text{pour tout } \sigma_1, \sigma_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ et pour tout } \theta_1, \theta_2, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ \text{(b)} \quad \text{L'application } x \mapsto \mathcal{G}(x, \sigma, \varepsilon, \theta, \alpha) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega \\ \quad \text{pour tout } \sigma, \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \text{ pour tout } \theta, \alpha \in \mathbb{R}. \\ \text{(c)} \quad \text{L'application } x \mapsto \mathcal{G}(x, 0, 0, 0, 0) \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (3.1.16)$$

La fonction constitutive non linéaire $\psi : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \quad \text{Il existe } L_{\psi} > 0 \text{ telle que } |\psi(x, \sigma_1, \varepsilon_1, \theta_1, \alpha_1) - \\ \quad \psi(x, \sigma_2, \varepsilon_2, \theta_2, \alpha_2)| \leq L_{\psi} (\|\sigma_1 - \sigma_2\| + \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| + |\theta_1 - \theta_2| + |\alpha_1 - \alpha_2|) \\ \quad \text{pour tout } \sigma_1, \sigma_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ et pour tout } \theta_1, \theta_2, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \\ \text{(b)} \quad \text{L'application } x \mapsto \psi(x, \sigma, \varepsilon, \theta, \alpha) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega \\ \quad \text{pour tout } \sigma, \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \text{ pour tout } \theta, \alpha \in \mathbb{R}. \\ \text{(c)} \quad \text{L'application } x \mapsto \psi(x, 0, 0, 0, 0) \in L^2(\Omega). \end{array} \right. \quad (3.1.17)$$

La fonction source d'endommagement $S : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \quad \text{Il existe } L_S > 0 \text{ tels que} \\ \quad |S(x, \sigma_1, \varepsilon_1, \theta_1, \alpha_1) - S(x, \sigma_2, \varepsilon_2, \theta_2, \alpha_2)| \leq L_S(\|\sigma_1 - \sigma_2\| + \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| \\ \quad + |\theta_1 - \theta_2| + |\alpha_1 - \alpha_2|) \text{ pour tout } \sigma_1, \sigma_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \\ \quad \text{pour tout } \theta_1, \theta_2, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ \text{(b)} \quad \text{L'application } x \mapsto S(x, \sigma, \varepsilon, \theta, \alpha) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega \\ \quad \text{pour tout } \sigma, \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \text{ pour tout } \theta, \alpha \in \mathbb{R}. \\ \text{(c)} \quad \text{L'application } x \mapsto S(x, 0, 0, 0, 0) \in L^2(\Omega). \end{array} \right. \quad (3.1.18)$$

La fonction de compliance normale $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \quad \text{Il existe } L_\nu > 0 \text{ telle que} \\ \quad |p_\nu(x, r_1) - p_\nu(x, r_2)| \leq L_\nu |r_1 - r_2| \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ \text{(b)} \quad \text{L'application } x \mapsto p_\nu(x, r) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3, \quad \forall r \in \mathbb{R}. \\ \text{(c)} \quad \text{L'application } x \mapsto p_\nu(x, r) = 0 \text{ pour tout } r \leq 0, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (3.1.19)$$

La fonction de contact tangentiel $p_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \quad \text{Il existe } L_\tau > 0 \text{ telle que} \\ \quad |p_\tau(x, d_1) - p_\tau(x, d_2)| \leq L_\tau |d_1 - d_2| \quad \forall d_1, d_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3, \\ \text{(b)} \quad \text{Il existe } M_\tau > 0 \text{ telle que } |p_\tau(x, d)| \leq M_\tau \quad \forall d \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ \text{(c)} \quad \text{L'application } x \mapsto p_\tau(x, d) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3, \quad \forall d \in \mathbb{R}. \\ \text{(d)} \quad \text{L'application } x \mapsto p_\tau(x, 0) \in L^2(\Gamma_3). \end{array} \right. \quad (3.1.20)$$

La masse volumique satisfait

$$\rho \in L^\infty(\Omega), \text{ Il existe } \rho^* > 0 \text{ telle que } \rho(x) \geq \rho^* \text{ p.p. } x \in \Omega. \quad (3.1.21)$$

Les coefficients d'adhésion satisfont les conditions suivantes :

$$\gamma_\nu, \gamma_\tau \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \epsilon_a \in L^2(\Gamma_3), \quad \gamma_\nu, \gamma_\tau, \epsilon_a \geq 0. \quad (3.1.22)$$

Les forces volumiques, les tractions surfaciques et la source de chaleur externe ont la régularité

$$f \in L^2(0, T; H), \quad f_0 \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2)^d), \quad q \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad (3.1.23)$$

Les données initiales satisfont les conditions suivantes :

$$u_0 \in V, \quad w_0 \in H, \quad \theta_0 \in Y, \quad \alpha_0 \in K, \quad (3.1.24)$$

$$k_i > 0, \quad i = 0, 1, 2. \quad (3.1.25)$$

Le champ d'adhésion initial satisfait

$$\beta_0 \in L^2(\Gamma_3), \quad 0 \leq \beta_0 \leq 1, \quad \text{p.p sur } \Gamma_3, \quad (3.1.26)$$

Le théorème de représentation de Riesz-Fréchet entraîne l'existence d'un élément $F(t) \in V'$ tel que :

$$\langle F(t), v \rangle_{V' \times V} = (f(t), v)_H + (f_0(t), \gamma v)_{L^2(\Gamma_2)^d} \quad \forall v \in V, \quad t \in (0, T). \quad (3.1.27)$$

On note que la condition (3.1.23) implique que

$$F \in L^2(0, T; V'). \quad (3.1.28)$$

Nous introduisons les fonctions continues suivantes

$$\mathbf{a}_0 : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{a}_0(\zeta, \xi) = k_0 \int_{\Omega} \nabla \zeta \cdot \nabla \xi dx + k_2 \int_{\Gamma} \zeta \xi da, \quad (3.1.29)$$

$$\mathbf{a}_1 : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{a}_1(\zeta, \xi) = k_1 \int_{\Omega} \nabla \zeta \cdot \nabla \xi dx. \quad (3.1.30)$$

Considérons la fonction d'adhésion $j_{acn} : L^\infty(\Gamma_3) \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$j_{acn}(\beta, u, v) = \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu) v_\nu da + \int_{\Gamma_3} (-\gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu) v_\nu + p_\tau(\beta) R_\tau(u_\tau) \cdot v_\tau) da. \quad (3.1.31)$$

Gardant à l'esprit (3.1.19) et (3.1.20), nous observons que les intégrales dans (3.1.31) sont bien définis.

Nous finissons cette section avec d'autres notations qui sont nécessaires dans l'étude du problème.

Ainsi dans la suite de cette thèse, nous employons un produit scalaire modifié sur l'espace de Hilbert $H = L^2(\Omega)^d$, défini par

$$((u, v))_H = (\rho u, v)_H, \quad \forall u, v \in H, \quad (3.1.32)$$

et soit $\|\cdot\|_H$ une norme associée, i.e

$$\|v\|_H = (\rho v, v)_H^{\frac{1}{2}}, \quad \forall v \in H. \quad (3.1.33)$$

Suivant l'hypothèse (3.1.32), il s'en suit que $\| \cdot \|_H$ et $\| \cdot \|_H$ sont des normes équivalentes sur H . De plus l'inclusion de la trace de $(V, \|\cdot\|_V)$ dans $(H, \|\cdot\|_H)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dans $(L^2(\Omega), \|\cdot\|_{L^2(\Omega)})$ sont continues et denses, et nous avons alors

$$\langle u, v \rangle_{V' \times V} = ((u, v))_H, \quad \forall u \in H, \forall v \in V, \quad (3.1.34)$$

$$\langle \zeta, \xi \rangle_{Y' \times Y} = (\zeta, \xi)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \zeta \in L^2(\Omega), \quad \forall \xi \in Y. \quad (3.1.35)$$

3.2 Formulation variationnelle

Nous supposons que $u, \sigma, \theta, \alpha$ et β sont des fonctions régulières satisfaisantes (3.1.1)-(3.1.13). Multiplions scalairement l'équation (3.1.2) par $v \in V$, intégrons le résultat sur Ω , et utilisons la formule de Green (2.1.4), nous obtenons

$$(\rho \ddot{u}(t), v)_H + (\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} f_0(t) \cdot v \, dx + \int_{\Gamma} \sigma(t) \nu \cdot v \, da. \quad (3.2.1)$$

Utilisons (3.1.5)-(3.1.8) et (1.1.3), on trouve

$$(\rho \ddot{u}(t), v)_H + (\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} f(t) \cdot v \, dx + \int_{\Gamma_2} f_0(t) \cdot v \, da \quad (3.2.2)$$

$$- \int_{\Gamma_3} p_{\nu}(u_{\nu}(t)) v_{\nu} \, da - \int_{\Gamma_3} (-\gamma_{\nu} \beta^2 R_{\nu}(u_{\nu}(t)) v_{\nu} + p_{\tau}(\beta) R_{\tau}(u_{\tau}(t)) \cdot v_{\tau}) \, da. \quad (3.2.3)$$

Par conséquent, de (3.2.2), (3.1.27), (3.1.31), (3.1.32) et (3.1.34) on obtient

$$\langle \ddot{u}(t), v \rangle_{V' \times V} + (\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j_{acn}(\beta, u(t), v) = \langle F(t), v \rangle_{V' \times V}. \quad (3.2.4)$$

On multiplie scalairement l'équation (3.1.3) par $\omega \in Y$, en appliquant la formule de Green (2.1.18) et utilisons (3.1.10), (3.1.29) et (3.1.35), on obtient

$$\begin{aligned} & \langle \dot{\theta}(t), \omega \rangle_{Y' \times Y} + \mathbf{a}_0(\theta(t), \omega) \\ &= \langle \psi(\sigma(t) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t))), \varepsilon(u(t), \theta(t), \alpha(t)), \omega \rangle_{Y' \times Y} + (q(t), \omega)_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Enfin, soit $\alpha(t) \in K$ et p.p. $t \in (0, T)$. D'après l'équation (3.1.4) et la définition 2.5.3 de $\partial\chi_K$, on obtient

$$\begin{aligned} & (\dot{\alpha}(t), \xi - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} - k_1(\Delta\alpha(t), \xi - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} \\ & \geq (S((\sigma(t) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t))), \varepsilon(u(t)), \theta(t), \alpha(t)), \xi - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi \in K. \end{aligned}$$

En appliquant La formule de Green (2.1.18) avec (3.1.11), (3.1.30) et (3.1.35) on trouve

$$\begin{aligned} & \langle \dot{\alpha}(t), \xi - \alpha(t) \rangle_{Y' \times Y} + \mathbf{a}_1(\alpha(t), \xi - \alpha(t)) \\ & \geq \langle S(\sigma(t) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t))), \varepsilon(u(t)), \theta(t), \alpha(t)), \xi - \alpha(t) \rangle_{Y' \times Y} \quad \forall \xi \in K. \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Finalement, en combinant (3.1.1), (3.2.4)-(3.2.5), (3.1.9), (3.1.12) et (3.1.13) nous trouvons $\mathcal{P}_V^1$ la formulation variationnelle du Problème $\mathcal{P}^1$.

Problème $\mathcal{P}_V^1$. Trouver le champ des déplacements $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ des contraintes $\sigma : [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, le champ de température $\theta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, le champ d'endommagement $\alpha : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ et le champ d'adhésion $\beta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned} & \sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{B}\varepsilon(u(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(s)), \varepsilon(u(s)), \theta(s), \alpha(s)) ds \\ & \text{p.p. } t \in (0, T), \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

$$\begin{aligned} & \langle \ddot{u}(t), v \rangle_{V' \times V} + (\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j_{acn}(\beta(t), u(t), v) \\ &= \langle F(t), v \rangle_{V' \times V} \quad \forall v \in V, \text{ p.p. } t \in (0, T), \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

$$\begin{aligned} & \langle \dot{\theta}(t), \omega \rangle_{Y' \times Y} + \mathbf{a}_0(\theta(t), \omega) \\ &= \langle \psi(\sigma(t) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t))), \varepsilon(u(t)), \theta(t), \alpha(t)), \omega \rangle_{Y' \times Y} + (q(t), \omega)_{L^2(\Omega)} \quad \forall \omega \in Y, \text{ p.p. } t \in (0, T), \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

$$\begin{aligned} & \langle \dot{\alpha}(t), \xi - \alpha(t) \rangle_{Y' \times Y} + \mathbf{a}_1(\alpha(t), \xi - \alpha(t)) \\ & \geq \langle S(\sigma(t) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t))), \varepsilon(u(t)), \theta(t), \alpha(t)), \xi - \alpha(t) \rangle_{Y' \times Y} \quad \forall \xi \in K, \text{ p.p. } t \in (0, T), \alpha(t) \in K, \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

$$\dot{\beta}(t) = -[\beta(t)(\gamma_\nu R_\nu(u_\nu(t))^2 + \gamma_\tau \|R_\tau(u_\tau(t))\|^2) - \epsilon_a]_+ \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \tag{3.2.10}$$

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = w_0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0, \quad \beta(0) = \beta_0 \tag{3.2.11}$$

3.3 Existence et unicité de la solution

Notre intérêt principale dans cette section est d'obtenir un résultat d'existence et d'unicité pour le problème variationnel $\mathcal{P}_V^1$

Théorème 3.3.1 *Sous les hypothèses (3.1.14)-(3.1.26), le problème variationnel $\mathcal{P}_V^1$ admet une solution unique $(u, \sigma, \theta, \alpha, \beta)$ ayant la régularité*

$$u \in W^{1,2}(0, T; V) \cap C^1([0, T]; H), \quad (3.3.1)$$

$$\ddot{u} \in L^2(0, T; V'), \quad (3.3.2)$$

$$\sigma \in L^2(0, T; \mathcal{H}), \quad (3.3.3)$$

$$\theta \in L^2(0, T; Y) \cap C([0, T]; L^2(\Omega)), \quad (3.3.4)$$

$$\dot{\theta} \in L^2(0, T; Y'), \quad (3.3.5)$$

$$\alpha \in L^2(0, T; Y) \cap C([0, T]; L^2(\Omega)), \quad (3.3.6)$$

$$\dot{\alpha} \in L^2(0, T; Y'), \quad (3.3.7)$$

$$\beta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Z}. \quad (3.3.8)$$

Un quintuple $(u, \sigma, \theta, \alpha, \beta)$ satisfaisant (3.2.6)-(3.2.11) s'appelle solution faible du problème de contact thermo-élasto-vescoplastique $\mathcal{P}^1$. Nous concluons que, sous les conditions précisées dans le Théorème 3.3.1, le problème (3.1.1)-(3.1.13) a une solution faible unique.

Nous occupons maintenant de la preuve du Théorème 3.3.1, qui est basée sur des résultats classiques des équations et des inéquations d'évolution avec les opérateurs monotones et les arguments du point fixe. A cette fin, nous supposons dans la suite que (3.1.14)-(3.1.26) sont vérifiées, et C représentera une constante strictement positive qui peut dépendre des données du problème mais elle est indépendante du temps t , et sa valeur peut changer d'un endroit à l'autre. Pour la simplicité, nous supprimons dans ce qui suit la dépendance explicite des diverses fonctions sur $x \in \Omega \cup \Gamma$.

Soit $\eta \in L^2(0, T; V')$ donné. Dans la première étape, nous considérons le problème variationnel suivant.

Problème $\mathcal{P}_{u_\eta}^1$. Trouver le champ des déplacements $u_\eta : [0, T] \rightarrow V$, tels que pour $t \in [0, T]$

$$\langle \ddot{u}_\eta(t), v \rangle_{V' \times V} + (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_\eta(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + \langle \eta(t), v \rangle_{V' \times V} = \langle F(t), v \rangle_{V' \times V}, \forall v \in V, \quad (3.3.9)$$

$$u_\eta(0) = u_0, \quad \dot{u}_\eta(0) = w_0. \quad (3.3.10)$$

Nous avons le résultat suivant

Lemme 3.3.1 . *Pour tout $\eta \in L^2(0, T; V')$, le problème $\mathcal{P}_{u_\eta}^1$ possède une unique solution satisfaisant (3.3.1)-(3.3.2).*

Démonstration. En utilisant le théorème de représentation de Riesz-Fréchet. Nous définissons l'opérateur $A : V \rightarrow V'$ par

$$\langle Aw, v \rangle_{V' \times V} = (\mathcal{A}\varepsilon(w), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}. \quad (3.3.11)$$

Il s'ensuit de (3.3.11) et (3.1.14)(a) avec (2.1.8) et pour tout $v, w \in V$ on a

$$\|Aw - Av\|_{V'} \leq C\|w - v\|_V, \quad (3.3.12)$$

ce qui montre que $A : V \rightarrow V'$ est de Lipschitz et donc hemicontinu.

En utilisant (3.3.11), (3.1.14)(b) et (2.1.8)

$$\langle Aw - Av, w - v \rangle_{V' \times V} \geq m_{\mathcal{A}}\|w - v\|_V^2 \quad \forall v, w \in V, \quad (3.3.13)$$

i.e, que $A : V \rightarrow V'$ est un opérateur monotone.

Maintenant, nous choisissons $v = 0_V$ dans (3.3.13), on obtient

$$\begin{aligned} \langle Aw, w \rangle_{V' \times V} &\geq m_{\mathcal{A}}\|w\|_V^2 - \|A0_V\|_{V'}\|w\|_V \\ &\geq \frac{1}{2}m_{\mathcal{A}}\|w\|_V^2 - \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}}\|A0_V\|_{V'}^2, \quad \forall w \in V. \end{aligned}$$

Alors, A satisfait la condition(2.4.1) du Théorème 2.4.1 avec $\omega = \frac{1}{2}m_{\mathcal{A}}$ et $\lambda = -\frac{1}{2m_{\mathcal{A}}}\|A0_V\|_{V'}^2$.

Ensuite, par (3.3.12) nous déduisons que

$$\|Aw\|_{V'} \leq C(\|w\|_V + \|A0_V\|_{V'}), \quad \forall w \in V.$$

Cette inégalité montre que A satisfait la condition(2.4.2) du Théorème 2.4.1. D'une autre part nous pouvons écrire (3.3.9) comme suit

$$\ddot{u}_\eta(t) + A\dot{u}_\eta(t) = F_\eta(t) \text{ dans } V', \quad t \in (0, T). \quad (3.3.14)$$

D'après (3.1.24) et (3.1.28) nous avons

$$F_\eta = F - \eta \in L^2(0, T; V') \text{ et } w_0 \in H.$$

Finalement, nous remarquons que toutes les conditions du Théorème 2.4.1 sont vérifiées, donc nous concluons qu'il existe une unique fonction w_η et qui satisfait

$$w_\eta \in L^2(0, T; V) \cap C(0, T; H), \quad \dot{w}_\eta \in L^2(0, T; V'), \quad (3.3.15)$$

$$\dot{w}_\eta(t) + Aw_\eta(t) = F_\eta(t) \text{ p.p. } t \in (0, T), \quad (3.3.16)$$

$$w_\eta(0) = w_0. \quad (3.3.17)$$

Nous définissons la fonction $u_\eta : [0, T] \rightarrow V$ par

$$u_\eta(t) = \int_0^t w_\eta(s)ds + u_0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.3.18)$$

Moyennant (3.3.11) et (3.3.15)-(3.3.18), nous impliquons que u_η est une solution du problème variationnel $\mathcal{P}_{u_\eta}^1$, et qui satisfait la régularité (3.3.1)-(3.3.2). L'unicité de la solution vient de l'unicité de la solution du problème (3.3.15)-(3.3.17) ; grâce au Théorème 2.4.1. $\square$

Dans la deuxième étape, nous utilisons le champ de déplacement u_η obtenu dans le Lemme 3.3.1 et nous considérons le problème de valeur initiale suivant.

Problème $\mathcal{P}_{\beta_\eta}^1$. Trouver le champ d'adhésion $\beta_\eta : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ tel que

$$\dot{\beta}_\eta(t) = -[\beta_\eta(t)(\gamma_\nu R_\nu(u_{\eta\nu})(t)^2 + \gamma_\tau \|R_\tau(u_{\eta\tau}(t))\|^2) - \epsilon_a]_+, \text{ p.p. } t \in (0, T), \quad (3.3.19)$$

$$\beta_\eta(0) = \beta_0. \quad (3.3.20)$$

Lemme 3.3.2 . *Il existe une unique solution $\beta_\eta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Z}$ du problème $\mathcal{P}_{\beta_\eta}^1$.*

Démonstration. On considère la fonction de trace $G_\eta : [0, T] \times L^2(\Gamma_3) \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ définie par

$$G_\eta(t, \beta) = -[\beta(\gamma_\nu R_\nu(u_{\eta\nu}(t))^2 + \gamma_\tau \|R_\tau(u_{\eta\tau}(t))\|^2) - \epsilon_a]_+$$

pour $t \in [0, T]$ et $\beta_1, \beta_2 \in L^2(\Gamma_3)$. D'après les propriétés des opérateurs de troncation R_ν et R_τ nous avons

$$\begin{aligned} \|G_\eta(t, \beta_1) - G_\eta(t, \beta_2)\|_{L^2(\Gamma_3)} &\leq \|\beta_1 - \beta_2\|_{L^2(\Gamma_3)} L^2 \|\gamma_\nu + \gamma_\tau\|_{L^2(\Gamma_3)} \\ &\leq C \|\beta_1 - \beta_2\|_{L^2(\Gamma_3)}, \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \|G_\eta(t, \beta)\|_{L^2(\Gamma_3)} &\leq \|\beta\|_{L^2(\Gamma_3)} L^2 \|\gamma_\nu + \gamma_\tau\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|\epsilon_a\|_{L^2(\Gamma_3)} \\ &\leq C. \end{aligned}$$

Donc, nous impliquons que G_η est Lipschitz continue par rapport au deuxième argument, et cela uniformément dans le temps. D'ailleurs, pour n'importe quel $\beta \in L^2(\Gamma_3)$, la fonction de trace $t \rightarrow G_\eta(t, \beta)$ appartient à $L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_3))$. Ainsi, en utilisant le Théorème 2.4.3, nous obtenons qu'il existe une fonction unique $\beta_\eta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3))$ qui satisfait (3.3.19) et (3.3.20). Aussi, d'après les arguments utilisés dans la Remarque 1.3.1 et (3.1.26) nous déduisons que $0 \leq \beta_\eta(t) \leq 1$ pour tout $t \in [0, T]$, p.p. sur Γ_3 . Par conséquent, de la définition de $\mathcal{Z}$ nous montrons que $\beta_\eta \in \mathcal{Z}$, ce qui donne la preuve du Lemme. 3.3.2. $\square$

Problème $\mathcal{P}_{\theta_\lambda}^1$. Trouver le champ de température $\theta_\lambda : [0, T] \rightarrow Y$ tel que

$$\langle \dot{\theta}_\lambda(t), \omega \rangle_{Y' \times Y} + \mathbf{a}_0(\theta_\lambda(t), \omega) = \langle \lambda(t) + q(t), \omega \rangle_{Y' \times Y}, \quad \forall \omega \in Y, \text{ p.p. } t \in (0, T), \quad (3.3.21)$$

$$\theta_\lambda(0) = \theta_0. \quad (3.3.22)$$

Lemme 3.3.3 *Pour tout $\lambda \in L^2(0, T; Y')$, il existe une solution unique θ_λ du problème $\mathcal{P}_{\theta_\lambda}^1$ satisfait (3.3.4)-(3.3.5).*

Démonstration. L'inclusion de la trace de $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dans $(L^2(\Omega), \|\cdot\|_{L^2(\Omega)})$ est continue et dense, nous pouvons écrire le Triplet de Gelfand

$$Y \subset L^2(\Omega) \subset Y'.$$

On considère l'opérateur linéaire $A_0 : Y \rightarrow Y'$ défini par

$$\langle A_0 \zeta, \xi \rangle_{Y' \times Y} = \mathbf{a}_0(\zeta, \xi), \quad \forall \zeta, \xi \in Y. \quad (3.3.23)$$

Nous utilisons (3.3.23) et la définition (3.1.29), on peut écrire pour tout $\zeta, \xi \in Y$.

$$|\langle A_0 \zeta, \xi \rangle_{Y' \times Y}| \leq k_0 \int_{\Omega} |\nabla \zeta \cdot \nabla \xi| dx + k_2 \int_{\Gamma} |\zeta \xi| da$$

En utilisant l'inégalité de Hölder on obtient

$$|\langle A_0 \zeta, \xi \rangle_{Y' \times Y}| \leq k_0 \|\nabla \zeta\|_{L^2(\Omega)^d} \|\nabla \xi\|_{L^2(\Omega)^d} + k_2 \|\zeta\|_{L^2(\Gamma)} \|\xi\|_{L^2(\Gamma)} \quad (3.3.24)$$

Gardant en tête Théorème 2.1.2 (trace de Sobolev), l'inégalité (3.3.24) devient

$$\|A_0 \zeta\|_{Y'} \leq C \|\zeta\|_Y, \quad (3.3.25)$$

ce qui montre que $A_0 : Y \rightarrow Y'$ est continu et donc hemicontinu.

D'après la définition (3.3.23) on vérifie

$$\langle A_0 \zeta, \zeta \rangle_{Y' \times Y} \geq 0,$$

i.e, que $A_0 : Y \rightarrow Y'$ est un opérateur monotone.

D'autre part, moyennant (3.3.24), comme $k_2 > 0$ et pour tout $\zeta \in Y$ on résulte

$$\langle A_0 \zeta, \zeta \rangle_{Y' \times Y} \geq k_0 \|\nabla \zeta\|_{L^2(\Omega)^d}^2,$$

et d'où

$$\langle A_0 \zeta, \zeta \rangle_{Y' \times Y} \geq k_0 \|\zeta\|_Y^2 - k_0 \|\zeta\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Alors, A_0 satisfait la condition (2.4.1) du Théorème 2.4.1 avec $\omega = k_0$ et $\lambda = -k_0 \|\xi\|_{L^2(\Omega)}^2$.

Ensuite, de (3.3.25) nous déduisons que A_0 satisfait la condition (2.4.2).

Il s'ensuit maintenant de la régularité (3.1.23)-(3.1.24) et $\lambda \in L^2(0, T; Y')$ que $q_\lambda = \lambda + q \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ et $\theta_0 \in L^2(\Omega)$.

Finalement, nous remarquons que toutes les conditions du Théorème 2.4.1 sont vérifiées, donc nous concluons qu'il existe une unique fonction θ_λ qui satisfait

$$\theta_\lambda \in L^2(0, T; Y) \cap C([0, T]; L^2(\Omega)), \quad \dot{\theta}_\lambda \in L^2(0, T; Y'), \quad (3.3.26)$$

$$\dot{\theta}_\lambda(t) + A_0 \theta_\lambda(t) = q_\lambda(t) \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \quad (3.3.27)$$

$$\theta_\lambda(0) = \theta_0. \quad (3.3.28)$$

□

Problème $\mathcal{P}_{\alpha_\mu}^1$. Trouver le champ d'endommagement $\alpha_\mu : [0, T] \rightarrow Y$ tel que

$$\langle \dot{\alpha}_\mu(t), \xi - \alpha_\mu(t) \rangle_{Y' \times Y} + \mathbf{a}_1(\alpha_\mu(t), \xi - \alpha_\mu(t)) \quad (3.3.29)$$

$$\geq \langle \mu, \xi - \alpha_\mu(t) \rangle_{Y' \times Y}, \quad \forall \xi \in K, \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \quad \alpha_\mu(t) \in K,$$

$$\alpha_\mu(0) = \alpha_0. \quad (3.3.30)$$

Lemme 3.3.4 . *Pour tout $\mu \in L^2(0, T; Y')$, Il existe une unique solution α_μ du Problème $\mathcal{P}_{\alpha_\mu}^1$ satisfait (3.3.6)-(3.3.7).*

Démonstration. La preuve de ce lemme est basé sur l'application du Théorème 2.4.2. L'inclusion de la trace de $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dans $(L^2(\Omega), \|\cdot\|_{L^2(\Omega)})$ est continue et dense, nous pouvons écrire le Triplet de Gelfand

$$Y \subset L^2(\Omega) \subset Y'.$$

On sait que l'ensemble du champ d'endommagement admissible K est un sous-ensemble non vide, fermé et convexe dans Y . Ainsi, le champ initial d'endommagement $\alpha_0 \in K$.

On considère l'opérateur $A_1 : Y \rightarrow Y'$ défini par

$$\langle A_1 \zeta, \xi \rangle_{Y' \times Y} = \mathbf{a}_1(\zeta, \xi), \quad \forall \zeta, \xi \in Y. \quad (3.3.31)$$

Nous utilisons (3.3.31) et la définition (3.1.30), on peut vérifier que A_1 est linéaire, continu et symétrique.

Ainsi, pour tout $\xi \in Y$ nous avons

$$\langle A_1 \xi, \xi \rangle_{Y' \times Y} = k_1 \|\nabla \xi\|_{L^2(\Omega)^d}^2,$$

alors

$$\langle A_1 \xi, \xi \rangle_{Y' \times Y} + (k_1 + 1) \|\xi\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq k_1 (\|\nabla \xi\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \|\xi\|_{L^2(\Omega)}^2),$$

et d'où

$$\langle A_1 \xi, \xi \rangle_{Y' \times Y} + C_2 \|\xi\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq C_3 \|\xi\|_Y^2 \quad \text{avec } C_2 = k_1 + 1 \text{ et } C_3 = k_1.$$

Nous remarquons que toutes les conditions du Théorème 2.4.2 sont vérifiées, ce qui conclut la preuve de Lemme 3.3.4. $\square$

Dans ce qui suit, nous utilisons les champs de déplacement u_η , de température θ_λ et d'endommagement α_μ , pour construire le problème de Cauchy associé au champ du tenseur des contraintes.

Problème $\mathcal{P}_{\sigma_\eta, \lambda, \mu}^1$. Trouver le champ de contrainte $\sigma_{\eta, \lambda, \mu} : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$ tel que

$$\sigma_{\eta, \lambda, \mu}(t) = \mathcal{B}\varepsilon(u_\eta(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma_{\eta, \lambda, \mu}(s), \varepsilon(u_\eta(s)), \theta_\lambda(s), \alpha_\mu(s)) ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.3.32)$$

Lemme 3.3.5 . *Il existe une unique solution du problème $\mathcal{P}_{\sigma_{\eta,\lambda,\mu}}^1$ et elle satisfait (3.3.3). En outre, si $u_{\eta_i}, \theta_{\lambda_i}, \alpha_{\mu_i}$ et $\sigma_{\eta_i,\lambda_i,\mu_i}$ représentent les solutions des problèmes $\mathcal{P}_{u_{\eta_i}}^1$, $\mathcal{P}_{\theta_{\lambda_i}}^1$, $\mathcal{P}_{\alpha_{\mu_i}}^1$ et $\mathcal{P}_{\sigma_{\eta_i,\lambda_i,\mu_i}}^1$ respectivement, pour $i = 1, 2$, alors il existe $C > 0$ tel que*

$$\begin{aligned} \|\sigma_{\eta_1,\lambda_1,\mu_1}(t) - \sigma_{\eta_2,\lambda_2,\mu_2}(t)\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq C(\|u_{\eta_1}(t) - u_{\eta_2}(t)\|_V^2 \\ &+ \int_0^t (\|u_{\eta_1}(s) - u_{\eta_2}(s)\|_V^2 + \|\theta_{\lambda_1}(s) - \theta_{\lambda_2}(s)\|_Y^2 + \|\alpha_{\mu_1}(s) - \alpha_{\mu_2}(s)\|_Y^2) ds). \end{aligned} \quad (3.3.33)$$

Démonstration.

On considère $\Lambda_{\eta,\lambda,\mu} : L^2(0, T; \mathcal{H}) \rightarrow L^2(0, T; \mathcal{H})$ l'opérateur donné par

$$\Lambda_{\eta,\lambda,\mu}\sigma(t) = \mathcal{B}\varepsilon(u_{\eta}(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s), \varepsilon(u_{\eta}(s)), \theta_{\lambda}(s), \alpha_{\mu}(s)) ds. \quad (3.3.34)$$

Soit $\sigma_i \in L^2(0, T; \mathcal{H})$, $i = 1, 2$ et $t_1 \in (0, T)$.

D'après l'hypothèse (3.1.16) et l'inégalité de Hölder, on trouve

$$\|\Lambda_{\eta,\lambda,\mu}\sigma_1(t_1) - \Lambda_{\eta,\lambda,\mu}\sigma_2(t_1)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq L_{\mathcal{G}}^2 T \int_0^{t_1} \|\sigma_1(s) - \sigma_2(s)\|_{\mathcal{H}}^2 ds. \quad (3.3.35)$$

En utilisant l'opérateur $\Lambda_{\eta,\lambda,\mu}$ une autre fois, on obtient

$$\|\Lambda_{\eta,\lambda,\mu}^2\sigma_1(t_1) - \Lambda_{\eta,\lambda,\mu}^2\sigma_2(t_1)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq L_{\mathcal{G}}^4 T^2 \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \|\sigma_1(s) - \sigma_2(s)\|_{\mathcal{H}}^2 ds dt_2.$$

On fait une itération sur cette dernière inégalité n fois pour trouver

$$\|\Lambda_{\eta,\lambda,\mu}^n\sigma_1(t_1) - \Lambda_{\eta,\lambda,\mu}^n\sigma_2(t_1)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq L_{\mathcal{G}}^{2n} T^n \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \dots \int_0^{t_n} \|\sigma_1(s) - \sigma_2(s)\|_{\mathcal{H}}^2 ds dt_n \dots dt_2.$$

L'intégration sur l'intervalle de temps $(0, T)$, il s'ensuit que

$$\|\Lambda_{\eta,\lambda,\mu}^n\sigma_1 - \Lambda_{\eta,\lambda,\mu}^n\sigma_2\|_{L^2(0,T;\mathcal{H})}^2 \leq \frac{L_{\mathcal{G}}^{2n} T^n}{n!} \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{L^2(0,T;\mathcal{H})}^2. \quad (3.3.36)$$

Ce qui implique que pour n suffisamment grand, l'opérateur $\Lambda_{\eta,\lambda,\mu}^n$ est une contraction sur l'espace de Banach $L^2(0, T; \mathcal{H})$ donc il existe un élément unique $\sigma_{\eta,\lambda,\mu} \in L^2(0, T; \mathcal{H})$ telle que $\Lambda_{\eta,\lambda,\mu}^n\sigma_{\eta,\lambda,\mu} =$

$\sigma_{\eta,\lambda,\mu}$, qui représente l'unique solution du problème $\mathcal{P}_{\sigma_{\eta,\lambda,\mu}}^1$, en utilisant (3.3.32), la régularité de $u_\eta, \theta_\lambda, \alpha_\mu$ et les propriétés des opérateurs $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{G}$, il vient que $\sigma_{\eta,\lambda,\mu} \in L^2(0, T; \mathcal{H})$.

En outre, si $u_{\eta_i}, \theta_{\lambda_i}, \alpha_{\mu_i}$ et $\sigma_{\eta_i, \lambda_i, \mu_i}$ représentent les solutions des problèmes $\mathcal{P}_{u_{\eta_i}}^1$, $\mathcal{P}_{\theta_{\lambda_i}}^1$, $\mathcal{P}_{\alpha_{\mu_i}}^1$ et $\mathcal{P}_{\sigma_{\eta_i, \lambda_i, \mu_i}}^1$, respectivement, pour $i = 1, 2$, nous utilisons (2.1.8), les propriétés (3.1.15) et (3.1.16) de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{G}$ avec l'inégalité de Young pour obtenir

$$\begin{aligned} & \|\sigma_{\eta_1, \lambda_1, \mu_1}(t) - \sigma_{\eta_2, \lambda_2, \mu_2}(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \\ & \leq C(\|u_{\eta_1}(t) - u_{\eta_2}(t)\|_V^2 + \int_0^t (\|\sigma_{\eta_1, \lambda_1, \mu_1}(s) - \sigma_{\eta_2, \lambda_2, \mu_2}(s)\|_{\mathcal{H}}^2 \\ & \quad + \|u_{\eta_1}(s) - u_{\eta_2}(s)\|_V^2 + \|\theta_{\lambda_1}(s) - \theta_{\lambda_2}(s)\|_Y^2 + \|\alpha_{\mu_1}(s) - \alpha_{\mu_2}(s)\|_Y^2) ds). \end{aligned}$$

En utilisant l'argument de Gronwall dans l'inégalité précédente nous déduisons (3.3.33), ce qui achève la démonstration. $\square$

On considère l'opérateur $\Lambda : L^2(0, T; V' \times Y' \times Y') \rightarrow L^2(0, T; V' \times Y' \times Y')$, défini par

$$\Lambda(\eta(t), \lambda(t), \mu(t)) = (\Lambda_0(\eta(t), \lambda(t), \mu(t)), \Lambda_1(\eta(t), \lambda(t), \mu(t)), \Lambda_2(\eta(t), \lambda(t), \mu(t))), \quad (3.3.37)$$

où $v \in V$, $t \in [0, T]$ avec les opérateurs Λ_0, Λ_1 et Λ_2 sont donnés par

$$\langle \Lambda_0(\eta(t), \lambda(t), \mu(t)), v \rangle_{V' \times V} = (\mathcal{B}\varepsilon(u_\eta(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j_{acn}(\beta_\eta(t), u_\eta(t), v) \quad (3.3.38)$$

$$+ (\int_0^t \mathcal{G}(\sigma_{\eta, \lambda, \mu}(s), \varepsilon(u_\eta(s)), \theta_\lambda(s), \alpha_\mu(s)) ds, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}},$$

$$\Lambda_1(\eta(t), \lambda(t), \mu(t)) = \psi(\sigma_{\eta, \lambda, \mu}(t), \varepsilon(u_\eta(t)), \theta_\lambda(t), \alpha_\mu(t)), \quad (3.3.39)$$

$$\Lambda_2(\eta(t), \lambda(t), \mu(t)) = S(\sigma_{\eta, \lambda, \mu}(t), \varepsilon(u_\eta(t)), \theta_\lambda(t), \alpha_\mu(t)). \quad (3.3.40)$$

Lemme 3.3.6 . *L'opérateur Λ admet un point fixe unique $(\eta^*, \lambda^*, \mu^*) \in L^2(0, T; V' \times Y' \times Y')$.*

Démonstration. Soient $(\eta_1, \lambda_1, \mu_1), (\eta_2, \lambda_2, \mu_2) \in L^2(0, T; V' \times Y' \times Y')$.

Pour simplicité, nous utilisons les notation $u_{\eta_i} = u_i$, $\dot{u}_{\eta_i} = \dot{u}_i$, $\ddot{u}_{\eta_i} = \ddot{u}_i$, $\beta_{\eta_i} = \beta_i$, $\theta_{\lambda_i} = \theta_i$, $\alpha_{\mu_i} = \alpha_i$ et $\sigma_{\eta_i, \lambda_i, \mu_i} = \sigma_i$ pour $i = 1, 2$. En utilisant (2.1.8), les hypothèses (3.1.15), (3.1.16) et (3.1.18)-

(3.1.20) avec les définitions de R_η et R_τ et la Remarque 1.3.1 nous avons

$$\begin{aligned}
& \|\Lambda_0(\eta_1(t), \lambda_1(t), \mu_1(t)) - \Lambda_0(\eta_2(t), \lambda_2(t), \mu_2(t))\|_{V'}^2 \leq \|\mathcal{B}\varepsilon(u_1(t)) - \mathcal{B}\varepsilon(u_2(t))\|_{\mathcal{H}}^2 \\
& + \int_0^t \|\mathcal{G}(\sigma_1(s), \varepsilon(u_\eta(s)), \theta_1(s), \alpha_1(s)) - \mathcal{G}(\sigma_2(s), \varepsilon(u_2(s)), \theta_2(s), \alpha_2(s))\|_{\mathcal{H}}^2 ds \\
& + C(\|p_\nu(u_{1\eta\nu}(t)) - p_\nu(u_{2\eta\nu}(t))\|_{L^2(\Gamma_3)}^2) \\
& + C(\|\beta_1^2(t)R_\nu(u_{1\eta\nu}(t)) - \beta_2^2(t)R_\nu(u_{2\eta\nu}(t))\|_{L^2(\Gamma_3)}^2) \\
& + C(\|p_\tau(\beta_1(t))\|R_\tau(u_{1\eta\tau}(t))\| - p_\tau(\beta_2(t))\|R_\tau(u_{2\eta\tau}(t))\|\|_{L^2(\Gamma_3)}^2),
\end{aligned}$$

ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}
& \|\Lambda_0(\eta_1(t), \lambda_1(t), \mu_1(t)) - \Lambda_0(\eta_2(t), \lambda_2(t), \mu_2(t))\|_{V'}^2 \\
& \leq C \left(\int_0^t (\|\sigma_1(s) - \sigma_2(s)\|_{\mathcal{H}}^2 + \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 + \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_Y^2 \right. \\
& \quad \left. + \|\alpha_1(s) - \alpha_2(s)\|_Y^2) ds + \|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 + \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \right). \tag{3.3.41}
\end{aligned}$$

Nous utilisons estimation (3.3.33) pour obtenir

$$\begin{aligned}
& \|\Lambda_0(\eta_1(t), \lambda_1(t), \mu_1(t)) - \Lambda_0(\eta_2(t), \lambda_2(t), \mu_2(t))\|_{V'}^2 \\
& \leq C \left(\int_0^t (\|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 + \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_Y^2 \right. \\
& \quad \left. + \|\alpha_1(s) - \alpha_2(s)\|_Y^2) ds + \|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 + \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \right). \tag{3.3.42}
\end{aligned}$$

Du problème de Cauchy (3.3.19)-(3.3.20), nous pouvons écrire

$$\beta_i(t) = \beta_0 - \int_0^t [\beta_i(s)(\gamma_\nu R_\nu(u_\nu(s))^2 + \gamma_\tau \|R_\tau(u_\tau(s))\|^2) - \epsilon_a]_+ ds,$$

et alors

$$\begin{aligned}
& \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq C \int_0^t \|\beta_1(s)(R_\nu(u_{1\nu}(s)))^2 - \beta_2(s)(R_\nu(u_{2\nu}(s)))^2\|_{L^2(\Gamma_3)} ds \\
& + C \int_0^t \|\beta_1(s)\|R_\tau(u_{1\tau}(s))\|^2 - \beta_2(s)\|R_\tau(u_{2\tau}(s))\|^2\|_{L^2(\Gamma_3)} ds.
\end{aligned}$$

En utilisant la définition de R_ν et R_τ et on écrit $\beta_1 = \beta_1 - \beta_2 + \beta_2$, nous obtenons

$$\|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq C \left(\int_0^t \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds + \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)^d} ds \right).$$

Ensuite, nous appliquons l'inégalité de Gronwall pour déduire

$$\|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq C \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)^d} ds,$$

Moyennant (2.1.9) on obtient que

$$\|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \leq C \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds \quad (3.3.43)$$

D'autre part, d'après $u_i(t) = u_0 + \int_0^t \dot{u}_i(s) ds$, on sait que pour p.p. $t \in (0, T)$,

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V \leq \int_0^t \|\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)\|_{V'} ds. \quad (3.3.44)$$

En appliquant les inégalités de Young et Hölder, (3.3.42) devient, via (3.3.43) et (3.3.44)

$$\begin{aligned} & \|\Lambda_0(\eta_1(t), \lambda_1(t), \mu_1(t)) - \Lambda_0(\eta_2(t), \lambda_2(t), \mu_2(t))\|_{V'}^2 \\ & \leq C \left(\int_0^t (\|\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)\|_{V'}^2 + \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 \right. \\ & \quad \left. + \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_Y^2 + \|\alpha_1(s) - \alpha_2(s)\|_Y^2) ds \right) \text{ p.p. } t \in (0, T). \end{aligned} \quad (3.3.45)$$

En outre, on trouve en prenant la substitution $\eta = \eta_1$, $\eta = \eta_2$ dans (3.3.9), et on choisit $v = \dot{u}_1 - \dot{u}_2$ comme fonction test

$$\begin{aligned} & \langle \ddot{u}_1(t) - \ddot{u}_2(t), \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t) \rangle_{V' \times V} + (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_1(t)) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_2(t))), \varepsilon(\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)) \rangle_{\mathcal{H}} \\ & = \langle \eta_2(t) - \eta_1(t), \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t) \rangle_{V' \times V} \text{ p.p. } t \in (0, T). \end{aligned}$$

En vertu de (2.1.8), (3.1.14)(b), (3.1.32), (3.1.34) et (3.1.21), l'équation précédente devient

$$\frac{(\rho^*)^2}{2} \frac{d}{dt} \|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|_H^2 + m_{\mathcal{A}} \|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|_{V'}^2 \leq \|\eta_2(t) - \eta_1(t)\|_{V'} \|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|_V.$$

On intègre cette inégalité par rapport au temps et par l'inégalité de Young mène à

$$(\rho^*)^2 \|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|_H^2 + m_{\mathcal{A}} \int_0^t \|\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)\|_{V'}^2 ds \leq \frac{2}{m_{\mathcal{A}}} \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{V'}^2 ds.$$

En conséquence,

$$\int_0^t \|\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)\|_{V'}^2 ds \leq C \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{V'}^2 ds \text{ p.p. } t \in (0, T), \quad (3.3.46)$$

ce qui implique également, en utilisant une variante de (3.3.44), que

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 \leq C \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{V'}^2 ds \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \quad (3.3.47)$$

De plus, si nous prenons la substitution $\lambda = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_2$ dans (3.3.21) et en soustrayant les deux équations obtenues, on déduit en choisissant $\omega = \theta_{\lambda_1} - \theta_{\lambda_2}$ comme fonction test

$$\begin{aligned} & \langle \dot{\theta}_1(t) - \dot{\theta}_2(t), \theta_1(t) - \theta_2(t) \rangle_{Y' \times Y} + \mathbf{a}_0(\theta_1(t) - \theta_2(t), \theta_1(t) - \theta_2(t)) \\ &= \langle \lambda_1(t) - \lambda_2(t), \theta_1(t) - \theta_2(t) \rangle_{Y' \times Y}, \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \end{aligned}$$

On intègre l'égalité précédente, en utilisant (3.1.35), les conditions initiales $\theta_1(0) = \theta_2(0) = \theta_0$ et comme $\mathbf{a}_0$ est Y-elliptique nous obtenons

$$\frac{1}{2} \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_Y^2 ds \leq \int_0^t \langle \lambda_1(s) - \lambda_2(s), \theta_1(s) - \theta_2(s) \rangle_{Y' \times Y} ds$$

Employant les inégalité de Hölder et Young, on en déduit que

$$\frac{1}{2} \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_Y^2 ds \leq \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_Y^2 ds + \int_0^t \|\lambda_1(s) - \lambda_2(s)\|_{Y'}^2 ds.$$

Moyennant une version des lemmes de Gronwall (Corollaire 2.5.1), il s'ensuit que

$$\|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_Y^2 ds \leq C \int_0^t \|\lambda_1(s) - \lambda_2(s)\|_{Y'}^2 ds. \quad (3.3.48)$$

En substituant maintenant $\mu = \mu_1, \xi = \alpha_{\mu_1}$, $\mu = \mu_2, \xi = \alpha_{\mu_2}$ dans (3.3.29) et moyennant des arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve de (3.3.48) pour obtenir que

$$\|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\alpha_1(s) - \alpha_2(s)\|_Y^2 ds \leq C \int_0^t \|\mu_1(s) - \mu_2(s)\|_{Y'}^2 ds. \quad (3.3.49)$$

Nous pouvons en déduire, en utilisant (3.3.45)-(3.3.49), que

$$\begin{aligned} & \|\Lambda_0(\eta_1(t), \lambda_1(t), \mu_1(t)) - \Lambda_0(\eta_2(t), \lambda_2(t), \mu_2(t))\|_{V'}^2 \\ & \leq C (\|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_{V'}^2 + \|\lambda_1(t) - \lambda_2(t)\|_{Y'}^2 + \|\mu_1(t) - \mu_2(t)\|_{Y'}^2). \end{aligned} \quad (3.3.50)$$

D'après l'hypothèse (3.1.17) et (3.3.33) il s'ensuit

$$\begin{aligned}
& \|\Lambda_1(\eta_1(t), \lambda_1(t), \mu_1(t)) - \Lambda_1(\eta_2(t), \lambda_2(t), \mu_2(t))\|_{Y'}^2 \\
&= \|\psi(\sigma_1(t), \varepsilon(u_1(t)), \theta_1(t), \alpha_1(t)) - \psi(\sigma_2(t), \varepsilon(u_2(t)), \theta_2(t), \alpha_2(t))\|_{Y'}^2 \\
&\leq C(\|u_1(t) - u_2(t)\|_{V'}^2 + \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{Y'}^2 + \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{Y'}^2) \quad \text{p.p. } t \in (0, T).
\end{aligned}$$

Cela nous permet de déduire, via (3.3.47), (3.3.48) et (3.3.49), que

$$\begin{aligned}
& \|\Lambda_1(\eta_1(t), \lambda_1(t), \mu_1(t)) - \Lambda_1(\eta_2(t), \lambda_2(t), \mu_2(t))\|_{Y'}^2 \\
&\leq C(\|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_{V'}^2 + \|\lambda_1(t) - \lambda_2(t)\|_{Y'}^2 + \|\mu_1(t) - \mu_2(t)\|_{Y'}^2).
\end{aligned} \tag{3.3.51}$$

De même, en utilisant (3.3.33) et (3.3.47)-(3.3.49), on obtient l'estimation suivante pour Λ^2

$$\begin{aligned}
& \|\Lambda_2(\eta_1(t), \lambda_1(t), \mu_1(t)) - \Lambda_2(\eta_2(t), \lambda_2(t), \mu_2(t))\|_{Y'}^2 \\
&= \|S(\sigma_1(t), \varepsilon(u_1(t)), \theta_1(t), \alpha_1(t)) - S(\sigma_2(t), \varepsilon(u_2(t)), \theta_2(t), \alpha_2(t))\|_{Y'}^2 \\
&\leq C(\|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_{V'}^2 + \|\lambda_1(t) - \lambda_2(t)\|_{Y'}^2 + \|\mu_1(t) - \mu_2(t)\|_{Y'}^2).
\end{aligned} \tag{3.3.52}$$

D'après (3.3.50), (3.3.51) et (3.3.52), nous concluons qu'il existe une constante positive $C > 0$ vérifiant

$$\begin{aligned}
& \|\Lambda(\eta_1, \lambda_1, \mu_1) - \Lambda(\eta_2, \lambda_2, \mu_2)\|_{L^2(0,T;V' \times Y' \times Y')}^2 \\
&\leq C\|\eta_1 - \eta_2, \lambda_1 - \lambda_2, \mu_1 - \mu_2\|_{L^2(0,T;V' \times Y' \times Y')}^2.
\end{aligned} \tag{3.3.53}$$

On généralise cette procédure par récurrence sur n . On obtient alors la formule

$$\begin{aligned}
& \|\Lambda^n(\eta_1, \lambda_1, \mu_1) - \Lambda^n(\eta_2, \lambda_2, \mu_2)\|_{L^2(0,T;V' \times Y' \times Y')}^2 \\
&\leq \frac{C^n T^n}{n!} \|(\eta_1 - \eta_2, \lambda_1 - \lambda_2, \mu_1 - \mu_2)\|_{L^2(0,T;V' \times Y' \times Y')}^2,
\end{aligned} \tag{3.3.54}$$

ce qui implique que pour n suffisamment grand une puissance Λ^n de Λ est une contraction dans l'espace de Banach $L^2(0, T; V' \times Y' \times Y')$, ce qui conclut la preuve. $\square$

Maintenant, nous avons tous les ingrédients pour prouver le Théorème 3.3.1.

Démonstration du Théorème 3.3.1.

Soit $(\eta^*, \lambda^*, \mu^*) \in L^2(0, T; V' \times Y' \times Y')$ être le point fixe de Λ définie par (3.3.37)-(3.3.40) et notons par

$$(a) \ u = u_{\eta^*}, \quad (b) \ \theta = \theta_{\lambda^*}, \quad (c) \ \alpha = \alpha_{\mu^*}, \quad (3.3.55)$$

$$(a) \ \sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \sigma_{\eta^* \lambda^* \mu^*}, \quad (b) \ \beta = \beta_{\eta^*}. \quad (3.3.56)$$

Nous prouvons que $(u, \sigma, \theta, \alpha, \beta)$ satisfait (3.2.6)-(3.2.11) et (3.3.1)-(3.3.8). En effet, nous écrivons (3.3.32) pour $\eta = \eta^*$, $\lambda = \lambda^*$ avec $\mu = \mu^*$ en utilisant (3.3.55) et (3.3.56)(a) pour obtenir que (3.2.6) est satisfaite. Maintenant, nous considérons (3.3.9) pour $\eta = \eta^*$ et en utilisant (3.3.55)(a) pour trouver

$$\begin{aligned} \langle \ddot{u}, v \rangle_{V' \times V} + (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + \langle \eta^*(t), v \rangle_{V' \times V} &= \langle F(t), v \rangle_{V' \times V} \\ \forall v \in V, \text{ p.p. } t \in (0, T). \end{aligned} \quad (3.3.57)$$

Les égalités $\Lambda_0(\eta^*, \lambda^*, \mu^*) = \eta^*$, $\Lambda_1(\eta^*, \lambda^*, \mu^*) = \lambda^*$, $\Lambda_2(\eta^*, \lambda^*, \mu^*) = \mu^*$ combinés avec (3.3.38)-(3.3.40), (3.3.55) et (3.3.56) montrent que

$$\begin{aligned} \langle \eta^*(t), v \rangle_{V' \times V} &= (\mathcal{B}\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j_{acn}(\beta(t), u(t), v) \\ &+ \left(\int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(s)), \varepsilon(u(s)), \alpha(s)) ds, \varepsilon(v) \right)_{\mathcal{H}} \quad \forall v \in V, \end{aligned} \quad (3.3.58)$$

$$\lambda^*(t) = \psi(\sigma(t) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)), \varepsilon(u(t)), \theta(t), \alpha(t)), \quad (3.3.59)$$

$$\mu^*(t) = S(\sigma(t) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)), \varepsilon(u(t)), \theta(t), \alpha(t)). \quad (3.3.60)$$

Maintenant, nous substituons (3.3.58) dans (3.3.57) et l'utilisation (3.2.6) de voir que (3.2.7) est satisfaite. Nous écrivons (3.3.21) pour $\lambda = \lambda^*$ et l'utilisation (3.3.55)(b) et (3.3.59) de constater que (3.2.8) est satisfait, aussi nous écrivons (3.3.29) pour $\mu = \mu^*$ et en utilisant (3.3.55)(c) et (3.3.60) à trouver que (3.2.9) est satisfaite. Nous considérons maintenant (3.3.19) pour $\eta = \eta^*$ et l'utilisation (3.3.55)(a) et (3.3.56)(b) pour obtenir que (3.2.10) est satisfaite. Suivant (3.2.11) et la régularité (3.3.1)-(3.3.2), (3.3.4)-(3.3.8) suivre Lemmes 3.3.1, 3.3.2, 3.3.3 et 3.3.4. La régularité (3.3.3) suit du Lemme 3.3.5. La partie unicité du Théorème 3.3.1 est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ définie par (3.3.37)-(3.3.40) et la solvabilité unique des problèmes $\mathcal{P}_{u_\eta}^1$, $\mathcal{P}_{\beta_\eta}^1$, $\mathcal{P}_{\theta_\lambda}^1$, $\mathcal{P}_{\alpha_\mu}^1$ et $\mathcal{P}_{\sigma_{\eta, \lambda, \mu}}^1$ qui achève la démonstration. $\square$

Chapitre 4

Problème de contact avec réponse normale instantanée et frottement

Dans ce chapitre nous étudions un problème dynamique avec frottement, endommagement et réponse normale instantanée pour une loi de comportement thermo-élasto-viscoplastique (1.2.5). Notre objectif est de prouver l'existence et l'unicité d'une solution faible.

Le plan de ce chapitre est le suivant. Dans la première section nous commençons par donner une formulation thermo-mécanique du problème. Ensuite dans la deuxième section nous dérivons la formulation variationnelle sous une forme d'un système couplant une équation intégrale-différentielle, une équation variationnelle du second ordre, une équation variationnelle du premier ordre et une inéquation variationnelle du premier ordre. Puis dans la section 3 nous énonçons Théorème 2.4.1 sur l'existence d'une solution unique du problème, et nous le démontrons.

4.1 Position du problème thermo-mécanique et hypothèses

Nous reprenons le cadre physique n°1 (page 4), schématisée à la figure 1.1. Nous considérons que le corps est thermo-élasto-viscoplastique. Le corps peut être en contact avec une base déformable sur la surface potentielle de contact Γ_3 avec une couche de lubrifiant supposé entre eux.

De ces considérations, le modèle mathématique n°1 (page 8) nous conduit à formuler le problème thermo-mécanique suivant :

Problème $\mathcal{P}^2$. Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{S}^d$, le champ d'endommagement $\alpha : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ et le champ de température $\theta : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ tels que.

$$\begin{aligned} \sigma(t) = & \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{B}\varepsilon(u(t)) - \mathcal{M}(\theta(t), \alpha(t)) \\ & + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}(s))), \varepsilon(u(s)), \alpha(s)) ds \quad \text{dans } \Omega, \text{ p.p. } t \in (0, T), \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

$$\ddot{u} = \text{Div } \sigma + f \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (4.1.2)$$

$$\dot{\theta} - \text{div}(\mathcal{K}\nabla\theta) = \psi(\dot{u}, \theta, \alpha) + q \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (4.1.3)$$

$$\dot{\alpha} - k_1\Delta\alpha + \partial_K\chi(\alpha) \ni S(\sigma - \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u})), \varepsilon(u), \theta, \alpha) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (4.1.4)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (4.1.5)$$

$$\sigma\nu = f_0 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (4.1.6)$$

$$-\sigma_\nu = p_\nu(\dot{u}_\nu), \quad -\sigma_\tau = p_\tau(\dot{u}_\tau) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (4.1.7)$$

$$-k_{ij}\theta_{,i}\nu_j = k_e(\theta - \theta_R) - h_\tau(\|\dot{u}_\tau\|) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (4.1.8)$$

$$\theta = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \times (0, T), \quad (4.1.9)$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T), \quad (4.1.10)$$

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = w_0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (4.1.11)$$

L'équation (4.1.1) représente la loi de comportement d'un matériau thermo-élasto-viscoplastique avec endommagement, qui est causé par des déformations viscoplastique introduite dans (1.2.2). Ensuite (4.1.2) représente l'équation du mouvement donnée dans (1.1.5), où le processus est dynamique. La condition (4.1.3) représente la conservation de l'énergie avec ψ une fonction constitutive non linéaire qui représente la chaleur produite par le travail des forces internes. L'évolution du champ d'endommagement est gouvernée par l'inclusion différentielle donnée par la relation (4.1.4). Les conditions (4.1.5) et (4.1.6) sont des conditions déplacement-traction

introduits par (1.1.6) et (1.1.7). (4.1.7) décrit les conditions de contact avec réponse normale instantanée et frottement sur la partie Γ_3 . L'équation (4.1.8) représente la condition au bord associée à la température dérivée de la condition de Fourier avec θ_R est la température de fondation, k_e représente l'échange de la température entre le corps déformable et la fondation, h_τ la fonction tangentielle. (4.1.9) la condition aux limites de la température sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. (4.1.10) est la condition à la limite de Neumann, (4.1.11) représente les conditions initiales.

D'autre part, pour le champ de température, nous définissons l'ensemble Y_1 de $H^1(\Omega)$ par

$$Y_1 = \{\omega \in H^1(\Omega) / \omega = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2\}. \quad (4.1.12)$$

Avant d'établir une formulation variationnelle au problème $\mathcal{P}^2$, nous avons besoin de quelques hypothèses. Nous assumons que les opérateurs $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et la fonction S vérifient les hypothèses (3.1.14), (3.1.15) et (3.1.18) du chapitre précédent.

Nous supposons que l'opérateur de viscoplasticité $\mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \quad \text{Il existe } L_{\mathcal{G}} > 0 \text{ telle que } \|\mathcal{G}(x, \sigma_1, \varepsilon_1, \alpha_1) - \mathcal{G}(x, \sigma_2, \varepsilon_2, \alpha_2)\| \\ \leq L_{\mathcal{G}}(\|\sigma_1 - \sigma_2\| + \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| + |\alpha_1 - \alpha_2|) \\ \text{pour tout } \sigma_1, \sigma_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ pour tout } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ \text{(b)} \quad \text{L'application } x \mapsto \mathcal{G}(x, \sigma, \varepsilon, \alpha) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega \\ \text{pour tout } \sigma, \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{R}. \\ \text{(c)} \quad \text{L'application } x \mapsto \mathcal{G}(x, 0, 0, 0) \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (4.1.13)$$

Le tenseur thermique $\mathcal{M} : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \quad \text{Il existe } L_{\mathcal{M}} > 0 \text{ telle que } \|\mathcal{M}(x, \theta_1, \alpha_1) - \mathcal{M}(x, \theta_2, \alpha_2)\| \\ \leq L_{\mathcal{M}}(|\theta_1 - \theta_2| + |\alpha_1 - \alpha_2|) \text{ pour tout } \theta_1, \theta_2, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ \text{(b)} \quad \text{L'application } x \mapsto \mathcal{M}(x, \theta, \alpha) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega \\ \text{pour tout } \theta, \alpha \in \mathbb{R}. \\ \text{(c)} \quad \text{L'application } x \mapsto \mathcal{M}(x, 0, 0) \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (4.1.14)$$

La fonction constitutive non linéaire $\psi : \Omega \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_\psi > 0 \text{ telle que } |\psi(x, \xi_1, \theta_1, \alpha_1) - \psi(x, \xi_2, \theta_2, \alpha_2)| \leq L_\psi (\|\xi_1 - \xi_2\| + |\theta_1 - \theta_2| + |\alpha_1 - \alpha_2|) \\ \text{pour tout } \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^d, \text{ et pour tout } \theta_1, \theta_2, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \\ \text{(b) L'application } x \mapsto \psi(x, \xi, \theta, \alpha) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega \\ \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^d, \text{ pour tout } \theta, \alpha \in \mathbb{R}. \\ \text{(c) L'application } x \mapsto \psi(x, 0, 0, 0, 0) \in L^2(\Omega). \end{array} \right. \quad (4.1.15)$$

La fonction de contact normale $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } C_1^\nu, C_2^\nu > 0 \text{ tel que } |p_\nu(x, r)| \leq C_1^\nu |r| + C_2^\nu \quad \forall r \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ \text{(b) } (p_\nu(x, r_1) - p_\nu(x, r_2))(r_1 - r_2) \geq 0 \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ \text{(c) L'application } x \rightarrow p_\nu(x, r) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3 \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}. \\ \text{(d) L'application } r \rightarrow p_\nu(x, r) \text{ est continue sur } \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (4.1.16)$$

La fonction de contact tangentiel $p_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } C_1^\tau, C_2^\tau > 0 \text{ tel que } \|p_\tau(x, d)\| \leq C_1^\tau \|d\| + C_2^\tau \quad \forall d \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ \text{(b) } (p_\tau(x, d_1) - p_\tau(x, d_2)) \cdot (d_1 - d_2) \geq 0 \quad \forall d_1, d_2 \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ \text{(c) L'application } x \rightarrow p_\tau(x, d) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3 \text{ pour tout } d \in \mathbb{R}^d. \\ \text{(d) L'application } d \rightarrow p_\tau(x, d) \text{ est continue sur } \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ \text{(e) } p_\tau(x, d) \cdot \nu(x) = 0 \quad \forall d \in \mathbb{R}^d \text{ tel que } d \cdot \nu(x) = 0 \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (4.1.17)$$

De même, nous supposons que la fonction tangentielle $h_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L^\tau > 0 \text{ telle que } |h_\tau(x, r_1) - h_\tau(x, r_2)| \leq L^\tau |r_1 - r_2| \\ \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3, \\ \text{(b) L'application } x \rightarrow h_\tau(x, r) \in L^2(\Gamma_3) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3, \forall r \in \mathbb{R}_+. \end{array} \right. \quad (4.1.18)$$

La masse volumique satisfait

$$\rho \in L^\infty(\Omega), \text{ Il existe } \rho^* > 0 \text{ telle que } \rho(x) \geq \rho^* \text{ p.p. } x \in \Omega. \quad (4.1.19)$$

Les forces volumiques , les tractions surfaciques et et la densité de la source de chaleur externe ont la régularité

$$f \in L^2(0, T; H), \quad f_0 \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2)^d), \quad q \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)). \quad (4.1.20)$$

et pour certains $C_K > 0$, pour tout $(\xi_i) \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{K} = (k_{ij}), \quad k_{ij} = k_{ji} \in L^\infty(\Omega), \quad k_{ij}\xi_i\xi_j \geq C_K\xi_i\xi_j, \quad (4.1.21)$$

Les données aux limites et initiales satisfont les conditions suivantes :

$$u_0 \in V, \quad w_0 \in H, \quad \theta_0 \in Y_1, \quad \theta_R \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_3)), \quad k_e \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}_+), \quad \alpha_0 \in K. \quad (4.1.22)$$

Nous définissons la forme bilinéaire $a : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\mathbf{a} : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{a}(\zeta, \xi) = k \int_{\Omega} \nabla \zeta \cdot \nabla \xi dx. \quad (4.1.23)$$

Nous notons par $F : [0, T] \rightarrow V$ la fonction définie par

$$\langle F(t), v \rangle_{V' \times V} = (f(t), v)_H + (f_0(t), \gamma v)_{L^2(\Gamma_2)^d} \quad \forall v \in V, \quad t \in (0, T). \quad (4.1.24)$$

On note que la condition (4.1.20) implique que

$$F \in L^2(0, T; V'). \quad (4.1.25)$$

Par la suite, nous définissons les formes linéaires $Q : [0, T] \rightarrow Y'_1$, $\mathcal{R} : Y_1 \rightarrow Y'_1$ et aussi $\Theta : V \times Y_1 \times Y \rightarrow Y'_1$ par

$$\langle Q(t), \omega \rangle_{Y'_1 \times Y_1} = \int_{\Omega} q(t) \omega dx + \int_{\Gamma_3} k_e \theta_R(t) \omega da \quad \forall \omega \in Y_1, \quad (4.1.26)$$

$$\langle \mathcal{R}\tau, \omega \rangle_{Y'_1 \times Y_1} = \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} k_{i,j} \tau_{,j} \omega_{,i} dx + \int_{\Omega} k_e \tau \omega dx \quad \forall \tau, \omega \in Y_1, \quad (4.1.27)$$

$$\langle \Theta(v, \zeta, \xi), \omega \rangle_{Y_1' \times Y_1} = \int_{\Omega} \psi(v, \zeta, \xi) \omega dx + \int_{\Gamma_3} h_{\tau}(\|v_{\tau}\|_V) \omega da \quad (4.1.28)$$

$$\forall v \in V, \xi \in Y \text{ et } \forall \zeta, \omega \in Y_1,$$

Finalement, nous définissons l'application $j_{rni} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$j_{rni}(u, v) = \int_{\Gamma_3} (p_{\nu}(u_{\nu})v_{\nu} + p_{\tau}(u_{\tau}).v_{\tau}) da, \quad \forall u, v \in V. \quad (4.1.29)$$

Nous finissons cette section avec une autre notation qui est nécessaire dans l'étude du problème, ainsi dans la suite de cette thèse. On sait que l'inclusion $(Y_1, \|\cdot\|_{Y_1})$ dans $(L^2(\Omega), \|\cdot\|_{L^2(\Omega)})$ est continue et dense, et nous avons alors

$$\langle \zeta, \xi \rangle_{Y_1' \times Y_1} = (\zeta, \xi)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \zeta \in L^2(\Omega), \quad \forall \xi \in Y_1. \quad (4.1.30)$$

4.2 Formulation variationnelle.

Nous supposons que u , σ , θ et α sont des fonctions régulières satisfaisantes (4.1.1)-(4.1.11).

Nous procédons comme le chapitre précédent pour obtenir une formulation faible du problème $\mathcal{P}^2$ et nous obtenons alors une équation similaire à (3.2.1).

$$(\rho \ddot{u}(t), v)_H + (\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} f_0(t).v \, dx + \int_{\Gamma} \sigma(t)\nu.v \, da. \quad (4.2.1)$$

Nous appliquons les conditions aux bords (4.1.5)-(4.1.7) et (1.1.3) nous obtenons

$$\begin{aligned} (\rho \ddot{u}(t), v)_H + (\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} &= \int_{\Omega} f(t).v \, dx + \int_{\Gamma_2} f_0(t).v da \\ &- \int_{\Gamma_3} (p_{\nu}(\dot{u}_{\nu}(t))v_{\nu} + p_{\tau}(\dot{u}_{\tau}(t)).v_{\tau}) da. \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Par conséquent, d'après (4.2.2), (4.1.24), (4.1.29), (3.1.32) et (3.1.34) on obtient

$$\langle \ddot{u}(t), v \rangle_{V' \times V} + (\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j_{rni}(\dot{u}(t), v) = \langle F(t), v \rangle_{V' \times V} \quad (4.2.3)$$

On multiplie scalairement l'équation (4.1.3) par $\omega \in Y_1$ ($\omega = 0$ sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$), en appliquant la formule de Green (2.1.18) on obtient

$$\int_{\Omega} \dot{\theta}(t) \omega dx + (\mathcal{K} \nabla \theta(t), \nabla \omega)_{L^2(\Omega)^d} - \int_{\Gamma} \mathcal{K} \nabla \theta(t). \nu \omega da = \int_{\Omega} (\psi(\dot{u}(t), \theta(t), \alpha(t)) + q(t)) \omega dx, \quad (4.2.4)$$

d'où

$$(\dot{\theta}(t), \omega)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} k_{i,j} \theta_{,j} \omega_{,i} dx - \int_{\Gamma_3} k_{ij} \theta_{,i} \nu_j \omega da = \int_{\Omega} (\psi(\dot{u}(t), \theta(t), \alpha(t)) + q(t)) \omega dx. \quad (4.2.5)$$

On remplace par (4.1.8) on trouve

$$\begin{aligned} & (\dot{\theta}(t), \omega)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} k_{i,j} \theta_{,j} \gamma_{,i} dx + \int_{\Gamma_3} (k_e(\theta - \theta_R) - h_{\tau}(\|\dot{u}\|_V)) \omega da \\ &= \int_{\Omega} \psi(\dot{u}(t), \theta(t), \alpha(t)) \omega dx + \int_{\Omega} q(t) \omega dx \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

Nous utilisons les définitions (4.1.26), (4.1.27) et (4.1.28) de $\mathcal{R}$, Θ et $Q(t)$ respectivement, avec (4.1.30) on écrit

$$\dot{\theta}(t) + \mathcal{R}\theta(t) = \Theta(\dot{u}(t), \theta(t), \alpha(t)) + Q(t) \text{ dans } Y_1'. \quad (4.2.7)$$

Enfin, soit $\alpha(t) \in K$ et p.p. $t \in (0, T)$. D'après l'équation (6.1.4) en utilisant des calculs similaires à ceux utilisés dans la preuve de (3.2.5), on obtient l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} & (\dot{\alpha}(t), \xi - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} + a(\alpha(t), \xi - \alpha(t)) \\ & \geq (S(\sigma(t) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)), \varepsilon(u(t)), \theta(t), \alpha(t)), \xi - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi \in K. \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Finalement, en combinant (4.1.1), (4.2.3), (4.2.7), (4.2.8) et (4.1.11) nous trouvons $\mathcal{P}_V^2$ la formulation variationnelle du Problème $\mathcal{P}^2$.

Problème $\mathcal{P}_V^2$. Trouver le champ des déplacements $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ des contraintes $\sigma : [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, le champ d'endommagement $\alpha : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ et le champ de température

$\theta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{B}\varepsilon(u(t)) - \mathcal{M}(\theta(t), \alpha(t)) \\ &+ \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}(s))), \varepsilon(u(s)), \alpha(s)) ds \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

$$\begin{aligned} \langle \ddot{u}(t), v \rangle_{V' \times V} + (\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j_{rni}(\dot{u}(t), v) &= \langle F(t), v \rangle_{V' \times V} \\ \forall v \in V, \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

$$\dot{\theta}(t) + \mathcal{R}\theta(t) = \Theta(\dot{u}(t), \theta(t), \alpha(t)) + Q(t) \quad \text{dans } Y_1' \quad (4.2.11)$$

$$\begin{aligned} \alpha(t) &\in K, (\dot{\alpha}(t), \xi - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} + a(\alpha(t), \xi - \alpha(t)) \\ &\geq (S(\sigma(t) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)), \varepsilon(u(t)), \theta(t), \alpha(t)), \xi - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi \in K, \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = w_0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0. \quad (4.2.13)$$

4.3 Existence et unicité de la solution

Notre intérêt principale dans cette section est d'obtenir un résultat d'existence et d'unicité pour le problème variationnel $\mathcal{P}_V^2$

Théorème 4.3.1 *Sous les hypothèses (3.1.14)-(3.1.18), (3.1.21)-(3.1.25), (4.1.16) et (4.1.17) le problème variationnel $\mathcal{P}_V^2$ admet une solution unique $\{u, \sigma, \theta, \alpha\}$ ayant la régularité*

$$u \in W^{1,2}(0, T; V) \cap C^1(0, T; H) \cap W^{2,2}(0, T; V'), \quad (4.3.1)$$

$$\sigma \in L^2(0, T; \mathcal{H}), \quad (4.3.2)$$

$$\theta \in L^2(0, T; Y_1) \cap C(0, T; L^2(\Omega)) \cap W^{1,2}(0, T; Y_1'), \quad (4.3.3)$$

$$\alpha \in L^2(0, T; Y) \cap W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)), \quad (4.3.4)$$

Un quadruple $(u, \sigma, \theta, \alpha)$ qui satisfait (4.2.9)-(4.2.13) s'appelle une solution faible du problème mécanique $\mathcal{P}^2$

La démonstration du Théorème 4.3.1 sera conduite en plusieurs étapes. Elle est basée sur les

résultats des équations et des inéquations d'évolution avec les opérateurs monotones et les arguments du point fixe. Nous supposons dans la suite C est une constante positive qui dépend de $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3, \mathcal{A}, \mathcal{G}, p_v, p_\tau$ et T mais ne dépend pas que t , ni du reste des données, dont la valeur varie d'une place à l'autre.

Soit $\eta \in L^2(0, T; V')$, dans la première étape, on considère le problème variationnel suivant.

Problème $\mathcal{P}_{u_\eta}^2$. Trouver le champ des déplacements $u_\eta : [0, T] \rightarrow V$, tel que

$$\begin{aligned} \langle \ddot{u}_\eta(t), v \rangle_{V' \times V} + (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_\eta(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j_{rni}(\dot{u}_\eta(t), v) + \langle \eta(t), v \rangle_{V' \times V} \\ = \langle F(t), v \rangle_{V' \times V}, \forall v \in V, \text{ p.p. } t \in (0, T), \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

$$u_\eta(0) = u_0, \quad \dot{u}_\eta(0) = w_0. \quad (4.3.6)$$

Lemme 4.3.1 . *Il existe une solution unique du problème $\mathcal{P}_{u_\eta}^2$ qui satisfait la régularité (4.3.1).*

Démonstration. En utilisant le théorème de représentation de Riesz-Fréchet, nous définissons l'opérateur $A : V \rightarrow V'$

$$\langle Aw, v \rangle_{V' \times V} = (\mathcal{A}\varepsilon(w), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j_{rni}(w, v), \quad w, v \in V, \quad (4.3.7)$$

et on définit un élément $F_\eta(t) \in V'$ par

$$\langle F_\eta(t), v \rangle_{V' \times V} = \langle F(t) - \eta(t), v \rangle_{V' \times V} \quad \forall v \in V, t \in [0, T]. \quad (4.3.8)$$

Soient $v, w \in V$, en utilisant (4.3.7) et la définition de j_{rni} donnée par (4.1.29) nous trouvons :

$$\begin{aligned} \langle Aw - Av, w - v \rangle_{V' \times V} &= (\mathcal{A}\varepsilon(w)) - (\mathcal{A}\varepsilon(v), \varepsilon(w - v))_{\mathcal{H}} \\ &+ \int_{\Gamma_3} (p_\nu(w_\nu) - p_\nu(v_\nu))(w_\nu - v_\nu) da \\ &+ \int_{\Gamma_3} (p_\tau(w_\tau) - p_\tau(v_\tau)).(w_\tau - v_{2\tau}) da. \end{aligned}$$

D'après (3.1.14)(b), (4.1.16)(b) et (4.1.17)(b) avec (2.1.8), nous obtenons

$$\langle Aw - Av, w - v \rangle_{V' \times V} \geq m_{\mathcal{A}} \|w - v\|_V^2, \quad (4.3.9)$$

l'inégalité précédente indique que l'opérateur A est fortement monotone sur V .

En utilisant de nouveau (4.3.7) et (4.1.29) il vient, pour tout $v \in V$ que

$$\begin{aligned} \langle Aw_1 - Aw_2, v \rangle_{V' \times V} &= (\mathcal{A}\varepsilon(w_1) - \mathcal{A}\varepsilon(w_2), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} (p_\nu(w_{1\nu}) - p_\nu(w_{2\nu})) v_\nu da \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} (p_\tau(w_{1\tau}) - p_\tau(w_{2\tau})) \cdot v_\tau da, \end{aligned}$$

par (2.1.9) et (3.1.14)(a) nous déduisons que

$$\begin{aligned} \|Aw_1 - Aw_2\|_{V'} &\leq L_A \|w_1 - w_2\|_V + C_0 \|p_\nu(w_{1\nu}) - p_\nu(w_{2\nu})\|_{L^2(\Gamma_3)} \\ &\quad + C_0 \|p_\tau(w_{1\tau}) - p_\tau(w_{2\tau})\|_{L^2(\Gamma_3)^d}. \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

L'inégalité (4.3.10) et l'hypothèses (4.1.16)(d), (4.1.17)(d) impliquent que l'opérateur $A : V \rightarrow V'$ est continu et ainsi est hemicontinu.

En utilisant des calculs similaires à ceux utilisés dans le problème précédent, on résulte que A vérifie toutes les conditions du Théorème 2.4.1, donc nous concluons qu'il existe une unique fonction w_η et qui satisfait

$$w_\eta \in L^2(0, T; V) \cap C(0, T; H), \dot{w}_\eta \in L^2(0, T; V'), \quad (4.3.11)$$

$$\dot{w}_\eta(t) + Aw_\eta(t) = F_\eta(t) \text{ p.p. } t \in [0, T], \quad (4.3.12)$$

$$w_\eta(0) = w_0 \quad (4.3.13)$$

Soit $u_\eta : [0, T] \rightarrow V$ la fonction définie par

$$u_\eta(t) = \int_0^t w_\eta(s) ds + u_0 \quad \forall t \in [0, T] \quad (4.3.14)$$

Il vient de (4.3.7) et (4.3.11)-(4.3.14) que u_η est une solution du problème variationnel $\mathcal{P}_{u_\eta}^2$ et elle satisfait la régularité exprimée dans (4.3.1). Ce qui conclut la partie existence du Lemme 4.3.1.

L'unicité de la solution vient de l'unicité de la solution du problème (4.3.12)-(4.3.13), grâce au Théorème 2.4.1.

Dans la deuxième étape, soit $\lambda \in L^2(0, T; Y_1')$ et nous considérons le problème de valeur initiale suivant.

Problème $\mathcal{P}_{\theta_\lambda}^2$. Trouver le champ de température $\theta_\lambda : [0, T] \rightarrow Y_1$ tel que

$$\dot{\theta}_\lambda(t) + \mathcal{R}\theta_\lambda(t) = \lambda(t) + Q(t) \text{ dans } Y_1', \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \quad (4.3.15)$$

$$\theta_\lambda(0) = \theta_0. \quad (4.3.16)$$

Lemme 4.3.2 . *Il existe une solution unique θ_λ du problème $\mathcal{P}_{\theta_\lambda}^2$ qui satisfait la régularité (4.3.3).*

Démonstration. Le résultat découle de l'évolution d'équation classique du premier ordre donné. Nous allons appliquer le Théorème 2.4.1. Ici, le Triple de Gelfand est donnée par

$$Y_1 \subset L^2(\Omega) = (L^2(\Omega))' \subset Y_1'.$$

L'opérateur $\mathcal{R}$ est linéaire et coercitive. Par l'inégalité de Korn, nous avons

$$\langle \mathcal{R}\tau, \tau \rangle_{Y_1 \times Y_1'} \geq C \|\tau\|_{Y_1}^2. \quad (4.3.17)$$

Moyennant (4.1.27) et pour tout $\tau, \omega \in Y_1$ on a

$$\langle \mathcal{R}\tau, \omega \rangle_{Y_1' \times Y_1} \leq \sum_{i,j=1}^d \|k_{i,j}\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\tau_{,i}\|_{L^2(\Omega)} \|\omega_{,i}\|_{L^2(\Omega)} + \|k_e\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\omega\|_{L^2(\Omega)},$$

en utilisant (2.1.1) on trouve

$$\langle \mathcal{R}\tau, \omega \rangle_{Y_1' \times Y_1} \leq C \|\tau\|_{Y_1} \|\omega\|_{Y_1}. \quad (4.3.18)$$

D'un autre coté, d'après la définition de Q on déduit que

$$Q_\lambda = \lambda + Q \in L^2(0, T; Y_1'). \quad (4.3.19)$$

Les inégalités (4.3.17), (4.3.18) et la régularité (4.3.19), $\theta_0 \in L^2(\Omega)$ implique que toutes les conductions du Théorème 2.4.1 sont vérifiées, donc nous concluons qu'il existe une unique fonction θ_λ et qui satisfait

$$\theta_\lambda \in L^2(0, T; Y_1) \cap C(0, T; L^2(\Omega)), \quad \dot{\theta}_\lambda \in L^2(0, T; Y_1'), \quad (4.3.20)$$

$$\dot{\theta}_\lambda(t) + \mathcal{R}\theta_\lambda(t) = Q_\lambda(t) \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \quad (4.3.21)$$

$$\theta_\lambda(0) = \theta_0. \quad (4.3.22)$$

Troisième étape, soit $\mu \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ donné, on considère le problème suivant, dont l'inconnu est le champ d'endommagement.

Problème $\mathcal{P}_{\alpha_\mu}^2$. Trouver le champ d'endommagement $\alpha_\mu : [0, T] \rightarrow Y$ tel que

$$(\dot{\alpha}_\mu(t), \xi - \alpha_\mu(t))_{L^2(\Omega)} + \mathbf{a}(\alpha_\mu(t), \xi - \alpha_\mu(t)) \quad (4.3.23)$$

$$\geq (\mu, \xi - \alpha_\mu(t))_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi \in K, \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \quad \alpha_\mu(t) \in K,$$

$$\alpha_\mu(0) = \alpha_0. \quad (4.3.24)$$

Lemme 4.3.3 . *Il existe une solution unique α_μ du problème $\mathcal{P}_{\alpha_\mu}^2$, pour tout $\mu \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ satisfait la régularité (4.3.4).*

Démonstration. Nous utilisons la définition (4.1.23) et le fait que $\alpha_0 \in K$ dans (4.1.22) et un résultat classique d'existence et d'unicité sur les inéquations paraboliques données dans le Théorème 2.4.2.

Dans la quatrième étape, nous utilisons le champs de déplacement u_η obtenu dans le Lemme 4.3.1, le champ de température θ_λ obtenue dans le Lemme 4.3.2 et le champ d'endommagement α_μ obtenu dans le Lemme 4.3.3, pour construire le problème de Cauchy associé au champ du tenseur des contraintes.

Problème $\mathcal{P}_{\sigma_{\eta,\lambda,\mu}}^2$. Trouver le champ des contraintes $\sigma_{\eta,\lambda,\mu} : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$ tel que

$$\begin{aligned} \sigma_{\eta,\lambda,\mu}(t) &= \mathcal{B}\varepsilon(u_\eta(t)) - \mathcal{M}(\theta_\lambda(t), \alpha_\mu(t)) \\ &+ \int_0^t \mathcal{G}(\sigma_{\eta,\lambda,\mu}(s), \varepsilon(u_\eta(s)), \alpha_\mu(s)) ds \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (4.3.25)$$

Lemme 4.3.4 . *Il existe une unique solution du problème $\mathcal{P}_{\sigma_{\eta,\lambda,\mu}}^2$ et elle satisfait (4.3.2). En outre, si $u_{\eta_i}, \theta_{\lambda_i}, \alpha_{\mu_i}$ et $\sigma_{\eta_i,\lambda_i,\mu_i}$ représentent les solutions des problèmes $\mathcal{P}_{u_{\eta_i}}^2$, $\mathcal{P}_{\theta_{\lambda_i}}^2$, $\mathcal{P}_{\alpha_{\mu_i}}^2$ et $\mathcal{P}_{\sigma_{\eta_i,\lambda_i,\mu_i}}^2$, respectivement, pour $i = 1, 2$, alors il existe $C > 0$ telle que*

$$\begin{aligned} \|\sigma_{\eta_1,\lambda_1,\mu_1}(t) - \sigma_{\eta_2,\lambda_2,\mu_2}(t)\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq C(\|u_{\eta_1}(t) - u_{\eta_2}(t)\|_V^2 + \|\theta_{\lambda_1}(t) - \theta_{\lambda_2}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &+ \|\alpha_{\mu_1}(t) - \alpha_{\mu_2}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t (\|u_{\eta_1}(s) - u_{\eta_2}(s)\|_V^2 + \|\alpha_{\mu_1}(s) - \alpha_{\mu_2}(s)\|_Y^2) ds). \end{aligned} \quad (4.3.26)$$

Démonstration.

Etape 1. Soit l'application $\Lambda_{\eta,\lambda,\mu} : L^2(0, T; \mathcal{H}) \rightarrow L^2(0, T; \mathcal{H})$ définie par

$$\Lambda_{\eta,\lambda,\mu}\sigma(t) = \mathcal{B}\varepsilon(u_{\eta}(t)) - \mathcal{M}(\theta_{\lambda}(t), \alpha_{\mu}(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s), \varepsilon(u_{\eta}(s)), \alpha_{\mu}(s)) ds. \quad (4.3.27)$$

Soit $\sigma_i \in L^2(0, T; \mathcal{H})$, $i = 1, 2$. D'après l'hypothèse (4.1.13) et l'inégalité de Hölder. En utilisant des arguments semblables à celui de la preuve du Lemme 3.3.5 du troisième chapitre, nous trouvons

$$\|\Lambda_{\eta,\lambda,\mu}^n \sigma_1 - \Lambda_{\eta,\lambda,\mu}^n \sigma_2\|_{L^2(0,T;\mathcal{H})}^2 \leq \frac{L_{\mathcal{G}}^{2n} T^n}{n!} \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{L^2(0,T;\mathcal{H})}^2.$$

nous trouvons, pour n suffisamment grand, que l'opérateur $\Lambda_{\eta,\lambda,\mu}^n$ est une contraction dans l'espace de Banach $L^2(0, T; \mathcal{H})$, et par conséquent, du théorème Banach du point fixe, il existe un élément unique $\sigma_{\eta,\lambda,\mu} \in L^2(0, T; \mathcal{H})$ telle que $\Lambda_{\eta,\lambda,\mu}^n \sigma_{\eta,\lambda,\mu} = \sigma_{\eta,\lambda,\mu}$, qui représente l'unique solution du problème $\mathcal{P}_{\sigma_{\eta,\lambda,\mu}}^2$.

En outre, si $u_{\eta_i}, \theta_{\lambda_i}, \alpha_{\mu_i}$ et $\sigma_{\eta_i,\lambda_i,\mu_i}$ représentent les solutions de problèmes $\mathcal{P}_{u_{\eta_i}}^2$, $\mathcal{P}_{\theta_{\lambda_i}}^2$, $\mathcal{P}_{\alpha_{\mu_i}}^2$ et $\mathcal{P}_{\sigma_{\eta_i,\lambda_i,\mu_i}}^2$, respectivement, pour $i = 1, 2$, puis nous utilisons (2.1.8), les hypothèses (3.1.15), (4.1.13) et (4.1.14) de $\mathcal{B}$, $\mathcal{G}$ et $\mathcal{M}$, l'inégalité de Young et le lemme de Gronwall, on obtient l'inégalité (4.3.26). $\square$

Etape 2. On considère l'opérateur $\Lambda : L^2(0, T; V', Y_1', L^2(\Omega)) \rightarrow L^2(0, T; V', Y_1', L^2(\Omega))$, défini par

$$\Lambda(\eta(t), \lambda(t), \mu(t)) = (\Lambda_0(\eta(t), \lambda(t), \mu(t)), \Theta(\dot{u}_{\eta}(t), \theta(t)_{\lambda}, \alpha(t)_{\mu}), S(\sigma_{\eta,\lambda,\mu}(t), \varepsilon(u_{\eta}(t)), \theta_{\lambda}(t), \alpha_{\mu}(t))), \quad (4.3.28)$$

où l'opérateur Λ_0 est donné par

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_0(\eta(t), \lambda(t), \mu(t)), v \rangle_{V' \times V} &= (\mathcal{B}\varepsilon(u_\eta(t)) - \mathcal{M}(\theta_\lambda(t), \alpha_\mu(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \\ &+ \left(\int_0^t \mathcal{G}(\sigma_{\eta, \lambda, \mu}(s), \varepsilon(u_\eta(s)), \alpha_\mu(s)) ds, \varepsilon(v) \right)_{\mathcal{H}} \end{aligned} \quad (4.3.29)$$

Lemme 4.3.5 . *L'opérateur Λ admet un point fixe unique $(\eta^*, \lambda^*, \mu^*) \in L^2(0, T; V' \times Y_1' \times L^2(\Omega))$.*

Démonstration.

Soient $(\eta_1, \lambda_1, \mu_1), (\eta_2, \lambda_2, \mu_2) \in L^2(0, T; V', Y_1', L^2(\Omega))$. Au début, on utilise (4.3.29), (2.1.8) et les hypothèses (3.1.14), (3.1.15), (4.1.13) et (4.1.14) et en appliquons les inégalités de Young et Holder, on obtient

$$\begin{aligned} \|\Lambda_0(\eta_1(t), \lambda_1(t), \mu_1(t)) - \Lambda_0(\eta_2(t), \lambda_2(t), \mu_2(t))\|_{V'}^2 &\leq C(\|u_{\eta_1}(t) - u_{\eta_2}(t)\|_V^2 \\ &+ \|\theta_{\lambda_1}(t) - \theta_{\lambda_2}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\alpha_{\mu_1}(t) - \alpha_{\mu_2}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &+ \int_0^t (\|\sigma_{\eta_1, \mu_1}(s) - \sigma_{\eta_2, \mu_2}(s)\|_{\mathcal{H}}^2 + \|u_{\eta_1}(s) - u_{\eta_2}(s)\|_V^2 + \|\alpha_{\mu_1}(s) - \alpha_{\mu_2}(s)\|_Y^2) ds) \end{aligned} \quad (4.3.30)$$

D'autre part, on sait que $u_i(t) = u_0 + \int_0^t \dot{u}_i(s) ds$ pour tout $t \in (0, T)$,

$$\|u_{\eta_1}(s) - u_{\eta_2}(s)\|_V \leq \int_0^t \|\dot{u}_{\eta_1}(s) - \dot{u}_{\eta_2}(s)\|_{V'} ds. \quad (4.3.31)$$

A l'aide de (4.3.26) et (4.3.31), l'inéquation (4.3.30) devient

$$\begin{aligned} \|\Lambda_0(\eta_1(t), \lambda(t), \mu_1(t)) - \Lambda_0(\eta_2(t), \mu_2(t))\|_{V'}^2 &\leq C(\|\theta_{\lambda_1}(t) - \theta_{\lambda_2}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &+ \|\alpha_{\mu_1}(t) - \alpha_{\mu_2}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t (\|\dot{u}_{\eta_1}(s) - \dot{u}_{\eta_2}(s)\|_{V'}^2 \\ &+ \|u_{\eta_1}(s) - u_{\eta_2}(s)\|_V^2 + \|\alpha_{\mu_1}(s) - \alpha_{\mu_2}(s)\|_Y^2) ds). \end{aligned} \quad (4.3.32)$$

En outre, on trouve en prenant la substitution $\eta = \eta_1$, $\eta = \eta_2$ dans (4.3.5), et on choisit $v = \dot{u}_1 - \dot{u}_2$ comme fonction test

$$\begin{aligned} &\langle \ddot{u}_1(t) - \ddot{u}_2(t), \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t) \rangle_{V' \times V} + \langle \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}_1(t))) - \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}_2(t))), \varepsilon(\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)) \rangle_{V' \times V} \\ &+ j_{rni}(\dot{u}_1(t), \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)) - j_{rni}(\dot{u}_2(t), \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)) \\ &= -\langle \eta_1(t) - \eta_2(t), \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t) \rangle_{V' \times V} \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \end{aligned} \quad (4.3.33)$$

En utilisant les hypothèses (4.1.16), (4.1.17) et la définition (4.1.29), nous déduisons que

$$j_{rni}(\dot{u}_1(t), \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)) - j_{rni}(\dot{u}_2(t), \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)) \geq 0. \quad (4.3.34)$$

Et d'après (3.1.32), (3.1.34) et (4.3.33), (4.3.34) l'égalité devint

$$\begin{aligned} & \rho((\ddot{u}_1(t) - \ddot{u}_2(t)), \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t))_H + \langle \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}_1(t))) - \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}_2(t))), \varepsilon(\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)) \rangle_{V' \times V} \\ & \leq -\langle \eta_1(t) - \eta_2(t), \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t) \rangle_{V' \times V}. \end{aligned} \quad (4.3.35)$$

On intègre l'inégalité (4.3.35) par rapport au temps, et en vertu de (3.1.14)(b) et (2.1.8), en utilisant (4.1.19) et les conditions initiales $\dot{u}_1(0) = \dot{u}_2(0) = w_0$, on trouve

$$m_{\mathcal{A}} \int_0^t (\|\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)\|_V^2) ds \leq - \int_0^t \langle \eta_1(s) - \eta_2(s), \dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s) \rangle_{V' \times V} ds, \quad (4.3.36)$$

en utilisant l'inégalité $2ab \leq \frac{a^2}{m_{\mathcal{A}}} + m_{\mathcal{A}}b^2$, nous obtenons

$$\int_0^t \|\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)\|_V^2 ds \leq C \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{V'}^2 ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.3.37)$$

D'après (4.3.31) on a

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 ds \leq C \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{V'}^2 ds \quad \forall t \in [0, T] \quad (4.3.38)$$

De plus, si nous prenons la substitution $\lambda = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_2$ dans (4.3.15) et en soustrayant les deux équations obtenues, on déduit en choisissant $\theta_{\lambda_1} - \theta_{\lambda_2}$ comme fonction test

$$\begin{aligned} & \langle \dot{\theta}_1(t) - \dot{\theta}_2(t), \theta_1(t) - \theta_2(t) \rangle_{Y_1' \times Y_1} + \langle \mathcal{R}\theta_1(t) - \mathcal{R}\theta_2(t), \theta_1(t) - \theta_2(t) \rangle_{Y_1' \times Y_1} \\ & = \langle \lambda_1(t) - \lambda_2(t), \theta_1(t) - \theta_2(t) \rangle_{Y_1' \times Y_1}, \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \end{aligned}$$

On intègre l'inégalité précédente, en utilisant (3.1.35), les conditions initiales $\theta_{\mu_1}(0) = \theta_{\mu_2}(0) = \theta_0$ et comme $\mathcal{R}$ est linéaire et coercive, nous obtenons

$$\frac{1}{2} \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{Y_1}^2 ds \leq \int_0^t \langle \lambda_1(s) - \lambda_2(s), \theta_1(s) - \theta_2(s) \rangle_{Y_1' \times Y_1} ds$$

Employant les inégalité de Hölder et Young, on en déduit que

$$\frac{1}{2}\|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{Y_1}^2 ds \leq \frac{1}{2} \int_0^t (\|\lambda_1(s) - \lambda_2(s)\|_{Y_1'}^2 + \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{Y_1}^2) ds.$$

Moyennant une version des lemmes de Gronwall (Corollaire 2.5.1), il s'ensuit que

$$\|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{Y_1}^2 ds \leq C \int_0^t \|\lambda_1(s) - \lambda_2(s)\|_{Y_1'}^2 ds. \quad (4.3.39)$$

Maintenant, en substituant $\mu = \mu_1, \xi = \alpha_{\mu_1}, \mu = \mu_2, \xi = \alpha_{\mu_2}$ dans (4.3.23) et en soustrayant les deux équations obtenues, on trouve

$$\begin{aligned} & (\dot{\alpha}_{\mu_1}(t) - \dot{\alpha}_{\mu_2}(t), \alpha_{\mu_1}(t) - \alpha_{\mu_2}(t))_{L^2(\Omega)} + \mathbf{a}(\alpha_{\mu_1}(t) - \alpha_{\mu_2}(t), \alpha_{\mu_1}(t) - \alpha_{\mu_2}(t)) \\ & \leq (\mu_1(t) - \mu_2(t), \alpha_{\mu_1}(t) - \alpha_{\mu_2}(t))_{L^2(\Omega)}, \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \end{aligned}$$

On intègre l'inégalité précédente, en utilisant les conditions initiales $\alpha_{\mu_1}(0) = \alpha_{\mu_2}(0) = \alpha_0$ et comme $\mathbf{a}$ est Y -elliptique nous obtenons

$$\frac{1}{2}\|\alpha_{\mu_1}(t) - \alpha_{\mu_2}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \int_0^t \|\alpha_{\mu_1}(s) - \alpha_{\mu_2}(s)\|_Y^2 ds \leq \int_0^t (\mu_1(s) - \mu_2(s), \alpha_{\mu_1}(s) - \alpha_{\mu_2}(s))_{L^2(\Omega)} ds$$

Employant les inégalité de Hölder et Young, et lemme de Gronwall on déduit que

$$\|\alpha_{\mu_1}(t) - \alpha_{\mu_2}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\alpha_{\mu_1}(s) - \alpha_{\mu_2}(s)\|_Y^2 ds \leq C \int_0^t \|\mu_1(s) - \mu_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds. \quad (4.3.40)$$

De (4.3.32) et (4.3.37)-(4.3.40) on a

$$\begin{aligned} & \int_0^t \|\Lambda_0(\eta_1(s), \lambda_1(s), \mu_1(s)) - \Lambda_0(\eta_2(s), \lambda_2(s), \mu_2(s))\|_{V'}^2 ds \\ & C \int_0^T \left(\int_0^T (\|\eta_1(r) - \eta_2(r)\|_{V'}^2 + \|\lambda_1(r) - \lambda_2(r)\|_{Y_1'}^2 + \|\mu_1(r) - \mu_2(r)\|_{L^2(\Omega)}^2) dr \right) ds \end{aligned}$$

On intègre la deuxième intégrale par rapport à $s \in [0, T]$ on trouve

$$\begin{aligned} & \int_0^T \|\Lambda_0((\eta_1(s), \lambda_1(s), \mu_1(s)) - \Lambda_0(\eta_2(s), \lambda_2(s), \mu_2(s)))\|_{V'}^2 ds \\ & \leq C \int_0^T (\|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{V'}^2 + \|\lambda_1(s) - \lambda_2(s)\|_{Y_1'}^2 + \|(\mu_1(s) - \mu_2(s))\|_{L^2(\Omega)}^2) ds \end{aligned} \quad (4.3.41)$$

D'après la définition (4.1.28) de Θ et les hypothèses (4.1.15), (4.1.18) on obtient

$$\begin{aligned} & \|\Theta(\dot{u}_1(t), \theta_1(t), \alpha_1(t)) - \Theta(\dot{u}_2(t), \theta_2(t), \alpha_2(t))\|_{Y_1'}^2 \\ & \leq C(\|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|_V^2 + \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{Y_1}^2 + \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2) \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \end{aligned}$$

Cela nous permet de déduire, via (4.3.37), (4.3.39) et (4.3.40), que

$$\begin{aligned} & \int_0^T \|\Theta(\eta_1(s), \lambda_1(s), \mu_1(s)) - \Theta(\eta_2(s), \lambda_2(s), \mu_2(s))\|_{Y_1'}^2 ds \\ & \leq C \int_0^T (\|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{V'}^2 + \|\lambda_1(s) - \lambda_2(s)\|_{Y_1'}^2 + \|\mu_1(s) - \mu_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2) ds. \end{aligned} \quad (4.3.42)$$

En utilisant hypothèse (3.1.18) et l'igalité (2.1.8) avec les estimations (4.3.26), (4.3.37)-(4.3.40) on obtient l'estimation de S

$$\begin{aligned} & \int_0^t \|S(\sigma_{\eta_1, \lambda_1, \mu_1}(s), \varepsilon(u_{\eta_1}(s)), \theta_{\eta_1}(s), \alpha_{\mu_1}(s)) \\ & - S(\sigma_{\eta_2, \lambda_2, \mu_2}(s), \varepsilon(u_{\eta_2}(s)), \theta_{\eta_2}(s), \alpha_{\mu_2}(s))\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ & \leq C \int_0^T (\|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{V'}^2 + \|(\lambda_1(s) - \lambda_2(s))\|_{Y_1'}^2 + \|(\mu_1(s) - \mu_2(s))\|_{L^2(\Omega)}^2) ds. \end{aligned} \quad (4.3.43)$$

De (4.3.41)-(4.3.43), nous concluons qu'il existe une constante positive $C > 0$ vérifier

$$\begin{aligned} & \|\Lambda(\eta_1, \lambda_1, \mu_1) - \Lambda(\eta_2, \lambda_2, \mu_2)\|_{L^2(0, T; V' \times Y_1' \times L^2(\Omega))} \\ & \leq C \|\eta_1 - \eta_2, \lambda_1 - \lambda_2, \mu_1 - \mu_2\|_{L^2(0, T; V' \times Y_1' \times L^2(\Omega))} \end{aligned} \quad (4.3.44)$$

En réitérant l'inégalité (4.3.44) n fois on obtient

$$\begin{aligned} & \|\Lambda^n((\eta_1, \lambda_1, \mu_1) - \Lambda^n(\eta_2, \lambda_2, \mu_2))\|_{L^2(0, T; V' \times Y_1' \times L^2(\Omega))} \\ & \leq \frac{C^n}{n!} \|\eta_1 - \eta_2, \lambda_1 - \lambda_2, \mu_1 - \mu_2\|_{L^2(0, T; V' \times Y_1' \times L^2(\Omega))}. \end{aligned} \quad (4.3.45)$$

pour n assez grand, l'opérateur Λ^n est contractant sur l'espace $L^2(0, T; V' \times Y_1' \times L^2(\Omega))$, donc Λ a un point fixe unique. $\square$

Nous avons maintenant tout ce qui est nécessaire pour prouver le Théorème 4.3.1.

Démonstration du Théorème 4.3.1.

Soit $(\eta^*, \lambda^*, \mu^*) \in L^2(0, T; V' \times Y_1' \times L^2(\Omega))$ être le point fixe de Λ défini par (4.3.28), (4.3.29) et notons par

$$(a) \ u = u_{\eta^*}, \quad (b) \ \theta = \theta_{\lambda^*}, \quad (c) \ \alpha = \alpha_{\mu^*}, \quad (d) \ \sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \sigma_{\eta^*, \lambda^*, \mu^*}, \quad (4.3.46)$$

où u , θ , α et $\sigma_{\eta^*, \lambda^*, \mu^*}$ sont des solutions des problèmes $\mathcal{P}_{u_\eta}^2$, $\mathcal{P}_{\theta_\eta}^2$, $\mathcal{P}_{\alpha_\mu}^2$ et $\mathcal{P}_{\sigma_{\eta, \lambda, \mu}}^2$ respectivement, pour $\eta = \eta^*$, $\lambda = \lambda^*$ et $\mu = \mu^*$. Nous prouvons que $(u, \sigma, \theta, \alpha)$ satisfait (4.2.9)-(4.2.13) et (4.3.1)-(4.3.4). En effet, nous écrivons (4.3.25) pour $\eta = \eta^*$, $\lambda = \lambda^*$ avec $\mu = \mu^*$ en utilisant (4.3.46) pour obtenir que (4.2.9) est satisfaite.

Maintenant, nous considérons (4.3.5) pour $\eta = \eta^*$ et en utilisant (4.3.46)(a) pour trouver

$$\begin{aligned} \langle \ddot{u}, v \rangle_{V' \times V} + (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j_{rni}(\dot{u}(t), v) + \langle \eta^*(t), v \rangle_{V' \times V} &= \langle F(t), v \rangle_{V' \times V} \\ \forall v \in V, \text{ p.p. } t \in (0, T). \end{aligned} \quad (4.3.47)$$

Les égalités $\Lambda_0(\eta^*, \lambda^*, \mu^*) = \eta^*$, $\Theta(\dot{u}_{\eta^*}, \theta_{\lambda^*}, \alpha_{\mu^*}) = \lambda^*$ et $S(\sigma_{\eta^*, \lambda^*, \mu^*}, \varepsilon(u_{\eta^*}), \theta_{\lambda^*}, \alpha_{\mu^*}) = \mu^*$ combinés avec (4.3.46) montrent que

$$\begin{aligned} \langle \eta^*(t), v \rangle_{V' \times V} &= (\mathcal{B}\varepsilon(u(t)) - \mathcal{M}(\theta(t), \alpha(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \\ &+ \left(\int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(s)), \varepsilon(u(s)), \alpha(s)) ds, \varepsilon(v) \right)_{\mathcal{H}} \quad \forall v \in V, \end{aligned} \quad (4.3.48)$$

$$\lambda^*(t) = \Theta(\dot{u}(t), \theta(t), \alpha(t)), \quad (4.3.49)$$

$$\mu^*(t) = S(\sigma(t) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)), \varepsilon(u(t)), \theta(t), \alpha(t)). \quad (4.3.50)$$

Maintenant, nous substituons (4.3.48) dans (4.3.47) et l'utilisation (4.2.9) de voir que (4.2.11) est satisfaite. Nous écrivons (4.3.15) pour $\lambda = \lambda^*$ avec l'utilisation (4.3.46)(b) et (4.3.49) de constater que (4.2.11) est satisfait, aussi nous écrivons (4.3.23) pour $\mu = \mu^*$ et en utilisant (4.3.46)(c) et (4.3.50) à trouver que (4.2.12) est satisfaite. Suivant (4.2.13) et la régularité (4.3.1), (4.3.3)-(4.3.4) et (4.3.2) proviennent de Lemmes 4.3.1, 4.3.2, 4.3.3 et 4.3.4 respectivement, la partie unicité du théorème 4.3.1 est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ défini par (4.3.28)-(4.3.29) et la solvabilité unique des problèmes $\mathcal{P}_{u_\eta}^2$, $\mathcal{P}_{\theta_\eta}^2$, $\mathcal{P}_{\alpha_\mu}^2$ et $\mathcal{P}_{\sigma_{\eta, \lambda, \mu}}^2$ qui achève la démonstration. $\square$

Chapitre 5

Problème de contact avec compliance normale et frottement

Dans ce chapitre on considère un problème de contact avec frottement en thermo-viscoélasticité linéaire dans le cas dynamique entre un corps thermo-viscoélastique et une fondation déformable, nous supposons que Le contact est modélisé avec une condition de compliance normale et frottement sec de type Coulomb .

Ce chapitre est structuré en 3 sections. Dans la première section, nous écrivons le problème thermo-mécanique et nous précisons les hypothèses adéquates sur les données. Ensuite, dans la section 2 nous obtenons la formulation faible. Puis dans la section 3 nous énonçons le Théorème 5.3.1 sur l'existence d'une solution faible unique du problème, et nous le prouvons.

5.1 Position du problème thermo-mécanique et hypothèses

Nous nous plaçons dans le cadre physique n°1(page 4) présenté dans la première partie de la thèse et par conséquent nous utilisons le premier modèle mathématique n°1(page 8). Pour que le modèle soit complet, précisons que la loi de comportement thermo-élasto-viscoélastique linéaire.

Alors le modèle classique pour ce processus est le suivant :

Problème $\mathcal{P}^3$. Trouver un champ des déplacements $u : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d$, un champ des contraintes $\sigma : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{S}^d$ et un champ de température $\theta : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{B}\varepsilon(u) - \mathcal{M}\theta, \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (5.1.1)$$

$$\rho \ddot{u} = \text{Div } \sigma + f \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (5.1.2)$$

$$\dot{\theta} - \text{div}(\mathcal{K}\nabla\theta) = -\mathcal{M}.\nabla\dot{u} + q \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (5.1.3)$$

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (5.1.4)$$

$$\sigma\nu = f_2 \text{ sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (5.1.5)$$

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - l) \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (5.1.6)$$

$$\|\sigma_\tau\| \leq p_\tau(u_\nu - l), \quad \sigma_\tau = -p_\tau(u_\nu - l) \frac{\dot{u}_\tau}{\|\dot{u}_\tau\|} \text{ si } \dot{u}_\tau \neq 0 \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (5.1.7)$$

$$-k_{ij}\theta_{,i}\nu_j = k_e(\theta - \theta_R) - h_\tau(\|\dot{u}_\tau\|) \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (5.1.8)$$

$$\theta = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \times (0, T), \quad (5.1.9)$$

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = w_0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \text{dans } \Omega. \quad (5.1.10)$$

L'équation (5.1.1) représente la loi de comportement d'un matériau thermo-viscoélastique avec endommagement. (5.1.2) représente l'équation du mouvement. La condition (5.1.3) représente l'équation de la conservation d'énergie où $q(x, t)$ est la quantité de chaleur dans le volume Ω durant l'intervalle de temps où $\mathcal{K} = (k_{ij})$ représente le tenseur de conductivité thermique, $\text{div}(\mathcal{K}\nabla\theta) = (k_{ij}\theta)_{,i}$ représente la densité du volume de la source température. Les conditions (5.1.4) et (5.1.5) sont des conditions déplacement-traction. (5.1.6) et (5.1.7) sont les conditions de contact de compliance normale et la version générale de la loi de frottement de Coulomb en vitesse sur la partie Γ_3 . (5.1.8) représente la condition au bord associée à la température dérivée de la condition de Fourier avec θ_R est la température de fondation, k_e est échange de la température entre le corps déformable et la fondation, h_τ une fonction tangentielle. (5.1.9) est la condition à la limite de la température sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. (5.1.10) représente les conditions initiales.

Pour les champs des déplacements et de température, nous définissons le cadre fonctionnel suivant :

$$\mathcal{U}_0 = \{v \in W^{1,\infty}(0, T; V) \cap W^{2,\infty}(0, T; H) \mid v(0) = u_0, \dot{v}(0) = w_0\},$$

$$Y_1 = \{\omega \in H^1(\Omega) \mid \omega = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2\}.$$

Pour obtenir une formulation variationnelle du problème mécanique $\mathcal{P}^3$, nous avons besoin d'introduire quelques hypothèses sur les données.

Soient $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_{ijkl})$, $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_{ijkl})$ deux tenseurs linéaires du quatrième ordre, tenseur de viscosité et tenseur d'élasticité respectivement satisfaites les propriétés de symétrie et d'ellipticité :

$$\mathcal{A}_{ijkl} = \mathcal{A}_{jikl} = \mathcal{A}_{klij}, \quad \mathcal{B}_{ijkl} = \mathcal{B}_{jikl} = \mathcal{B}_{klij}, \quad 1 \leq i, j, k, l \leq d \quad (5.1.11)$$

$$\exists m_{\mathcal{A}} > 0, \quad \mathcal{A}_{ijkl}\tau_{ij}\tau_{kl} \geq m_{\mathcal{A}}\tau_{ij}\tau_{kl}, \quad \forall \tau = (\tau_{ij}), \text{ tel que } \tau_{ij} = \tau_{ji}, \quad (5.1.12)$$

$$\exists m_{\mathcal{B}} > 0, \quad \mathcal{B}_{ijkl}\tau_{ij}\tau_{kl} \geq m_{\mathcal{B}}\tau_{ij}\tau_{kl}, \quad \forall \tau = (\tau_{ij}), \text{ tel que } \tau_{ij} = \tau_{ji}.$$

L'opérateur de viscosité $\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\exists L_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que } \|\mathcal{A}(x, \varepsilon)\| \leq L_{\mathcal{A}}\|\varepsilon\|, \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \quad (5.1.13)$$

L'opérateur d'élasticité $\mathcal{B} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\exists L_{\mathcal{B}} > 0 \text{ tel que } \|\mathcal{B}(x, \varepsilon)\| \leq L_{\mathcal{B}}\|\varepsilon\|, \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{S}^d \text{ p.p. } x \in \Omega \quad (5.1.14)$$

La fonction de compliance normal, de contact tangentiel p_s , ($s = \nu$ ou $s = \tau$) : $\Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_p > 0 \text{ tel que} \\ |p_s(x, r_1) - p_s(x, r_2)| \leq L_p |r_1 - r_2| \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ \text{(b) L'application } x \rightarrow p_s(x, r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \quad \forall r \in \mathbb{R}, \\ \text{(c) L'application } x \rightarrow p_s(x, r) = 0 \text{ pour tout } r \leq 0, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (5.1.15)$$

Nous supposons que la fonction tangentielle $h_{\tau} : \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L^{\tau} > 0 \text{ telle que } |h_{\tau}(x, r_1) - h_{\tau}(x, r_2)| \leq L^{\tau} |r_1 - r_2| \\ \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3, \\ \text{(b) L'application } x \rightarrow h_{\tau}(x, r) \in L^2(\Gamma_3) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3, \forall r \in \mathbb{R}_+. \end{array} \right. \quad (5.1.16)$$

La masse volumique satisfait

$$\rho \in L^\infty(\Omega), \text{ Il existe } \rho^* > 0 \text{ telle que } \rho(x) \geq \rho^* \text{ p.p. } x \in \Omega. \quad (5.1.17)$$

Les forces volumiques et les tractions surfaciques ont la régularité

$$f \in W^{1,2}(0, T; V), \quad f_0 \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Gamma_2)^d). \quad (5.1.18)$$

L'interstice l entre le corps et la base vérifie

$$l \in L^2(\Gamma_3), \quad l(x) \geq 0, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \quad (5.1.19)$$

Nous notons par $F : [0, T] \rightarrow V$ la fonction définie par

$$(F(t), v)_V = (f(t), v)_H + (f_0(t), \gamma v)_{L^2(\Gamma_2)^d} \quad \forall v \in V, \quad t \in (0, T), \quad (5.1.20)$$

et on note que la condition (5.1.18) implique que

$$F \in W^{1,2}(0, T; V). \quad (5.1.21)$$

Le tenseur thermique et la quantité de chaleur dans le volume satisfont

$$\mathcal{M} = (m_{ij}), \quad m_{ij} = m_{ji} \in L^\infty(\Omega), \quad q \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)). \quad (5.1.22)$$

Pour certains $C_K > 0$, pour tout $(\xi_i) \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{K} = (k_{ij}), \quad k_{ij} = k_{ji} \in L^\infty(\Omega), \quad k_{ij}\xi_i\xi_j \geq C_K\xi_i\xi_j. \quad (5.1.23)$$

Les données aux limites et initiales satisfont les conditions suivantes :

$$u_0, w_0 \in V, \quad \theta_0 \in Y_1, \quad \theta_R \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_3)), \quad k_e \in L^\infty(\Gamma_3, \mathbb{R}_+). \quad (5.1.24)$$

Nous supposons la condition de compatibilité sur les données initiales :

$$\exists f_1 \in H, \quad \mathbf{a}(w_0, v) + \mathbf{b}(u_0, v) = (F(0), v)_V = (f_1(t), v)_H + (\mathcal{M}\theta_0, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}, \quad \forall v \in V. \quad (5.1.25)$$

Nous définissons les fonctionnelles suivantes

$$\mathbf{a} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{a}(u, v) = (\mathcal{A}\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}, \quad (5.1.26)$$

$$\mathbf{b} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{b}(u, v) = (\mathcal{B}\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}. \quad (5.1.27)$$

Nous considérons l'application $j_{cnf} : [0, T] \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$j_{cnf}(t, u, v) = \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu - l) v_\nu da + \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_\nu - l) \|v_\tau\|_{L^2(\Gamma_3)^d} da. \quad (5.1.28)$$

Par la suite, nous définissons les formes linéaires $Q : [0, T] \rightarrow Y_1'$, $\mathcal{R} : Y_1 \rightarrow Y_1'$ et aussi $\Theta : V \rightarrow Y_1'$ par

$$\langle Q(t), \omega \rangle_{Y_1' \times Y_1} = \int_{\Omega} q(t) \omega dx + \int_{\Gamma_3} k_e \theta_R(t) \omega da, \quad \forall \omega \in Y_1, \quad (5.1.29)$$

$$\langle \mathcal{R}\tau, \omega \rangle_{Y_1' \times Y_1} = \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} k_{i,j} \tau_{,j} \omega_{,i} dx + \int_{\Gamma_3} k_e \tau \omega da, \quad \forall \tau, \omega \in Y_1, \quad (5.1.30)$$

$$\langle \Theta v, \omega \rangle_{Y_1' \times Y_1} = \int_{\Gamma_3} h_\tau(\|v_\tau\|_{L^2(\Gamma_3)^d}) \omega da - (\mathcal{M} \cdot \nabla v, \omega)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in V, \quad \forall \omega \in Y_1, \quad (5.1.31)$$

5.2 Formulation variationnelle.

Nous supposons que u , σ et θ sont des fonctions régulières satisfaisantes (5.1.1)-(5.1.10).

On multiplie l'équation (5.1.2) par $(\dot{v} - \dot{u}) \in V$, on intègre le résultat sur Ω , et utilisons la formule de Green (2.1.4), nous obtenons

$$(\rho \ddot{u}(t), \dot{v} - \dot{u})_H + (\sigma(t), \varepsilon(\dot{v} - \dot{u}))_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} f_0(t) \cdot (\dot{v} - \dot{u}) dx + \int_{\Gamma} \sigma(t) \nu \cdot (\dot{v} - \dot{u}) da.$$

Utilisons les conditions (5.1.4), (5.1.5) et la définition (1.1.3), on trouve

$$\begin{aligned} & (\rho \ddot{u}(t), \dot{v} - \dot{u})_H + (\sigma(t), \varepsilon(\dot{v} - \dot{u}))_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} f_0(t) \cdot (\dot{v} - \dot{u}) dx \\ & + \int_{\Gamma_2} f_0(t) \cdot (\dot{v} - \dot{u}) da + \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu (\dot{v}_\nu - \dot{u}_\nu) da + \int_{\Gamma_3} (\dot{v}_\nu - \dot{u}_\nu) \cdot \sigma_\tau da. \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

D'après (5.1.6) on a

$$\int_{\Gamma_3} \sigma_\nu(\dot{v}_\nu - \dot{u}_\nu) ds = \int_{\Gamma_3} -p_\nu(u_\nu - l)(\dot{v}_\nu - \dot{u}_\nu) ds$$

Enfin, il s'ensuit de la deuxième partie dans (5.1.7) que

$$\begin{aligned} \sigma_\tau \cdot \dot{v}_\tau &\geq -\|\sigma_\tau\|_{\mathcal{H}} \|\dot{v}_\tau\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \geq -p_\tau(u_\nu - l) \|\dot{v}_\tau\|_{L^2(\Gamma_3)^d}, \\ -\sigma_\tau \cdot \dot{u}_\tau &= \|\sigma_\tau\|_{\mathcal{H}} \|\dot{u}_\tau\|_{L^2(\Gamma_3)^d} = p_\tau(u_\nu - l) \|\dot{u}_\tau\|_{L^2(\Gamma_3)^d}, \end{aligned}$$

et ainsi,

$$\begin{aligned} - \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau(\dot{v}_\tau - \dot{u}_\tau) da &\leq \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_\nu - l)(\|\dot{v}_\tau\|_{L^2(\Gamma_3)^d} - \|\dot{u}_\tau\|_{L^2(\Omega)^d}) da \\ \int_{\Omega} (\rho \ddot{u}(t), \dot{v} - \dot{u})_H dx &+ \int_{\Omega} (\sigma(t), \varepsilon(\dot{v} - \dot{u}))_{\mathcal{H}} dx + \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu - l)(\dot{v}_\nu - \dot{u}_\nu) da \\ &+ \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_\nu - l)(\|\dot{v}_\tau\|_{L^2(\Omega)^d} - \|\dot{u}_\tau\|_{L^2(\Omega)^d}) da \geq \int_{\Gamma_2} f_0(\dot{v} - \dot{u}) da + \int_{\Omega} f(\dot{v} - \dot{u}) dx. \end{aligned}$$

A l'aide des définitions (5.1.26), (5.1.27) et (5.1.28) de fonctionnelles $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ et j_{cnf} avec (5.1.20), (3.1.32) on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^T [((\ddot{u}, \dot{v} - \dot{u}))_H + \mathbf{a}(\dot{u}, \dot{v} - \dot{u}) + \mathbf{b}(u, \dot{v} - \dot{u}) + j_{cnf}(t, u, \dot{v}) \\ - j_{cnf}(t, u, \dot{u}) - (\mathcal{M}\theta, \varepsilon(\dot{v} - \dot{u}))_{\mathcal{H}}] dt \geq \int_0^T (F(t), \dot{v} - \dot{u}(t))_V dt. \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

On multiplie scalairement l'équation (5.1.3) par $\omega \in Y_1$, en appliquant la formule de Green (2.1.18) et utilisons (5.1.8), (5.1.9) et (4.1.30), nous pouvons suivre une démarche semblable à celle utilisée pour (4.2.7) on démontre que

$$\dot{\theta}(t) + \mathcal{R}\theta(t) = \Theta\dot{u}(t) + Q(t) \text{ dans } Y_1'. \quad (5.2.3)$$

Finalement, en combinant (5.2.2), (5.2.3) et (5.1.10) nous trouvons $\mathcal{P}_V^3$ la formulation variationnelle du Problème $\mathcal{P}^3$.

Problème $\mathcal{P}_V^3$. Trouver le champ des déplacements $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ et le champ de température

$\theta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$\int_0^T [((\ddot{u}(t), \dot{v} - \dot{u}(t)))_H + \mathbf{a}(\dot{u}(t), \dot{v} - \dot{u}(t)) + \mathbf{b}(u(t), \dot{v}(t) - \dot{u}(t)) + j_{cnf}(t, u(t), \dot{v}) - j_{cnf}(t, u(t), \dot{u}(t)) - (\mathcal{M}\theta, \varepsilon(\dot{v} - \dot{u}(t)))_{\mathcal{H}}] dt \geq \int_0^T (F(t), \dot{v} - \dot{u}(t))_V ds, \forall v \in V, \text{ p.p. } t \in (0, T), \quad (5.2.4)$$

$$\dot{\theta}(t) + \mathcal{R}\theta(t) = \Theta\dot{u}(t) + Q(t) \text{ dans } Y_1' \quad (5.2.5)$$

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = w_0, \quad \theta(0) = \theta_0. \quad (5.2.6)$$

5.3 Résultat d'existence et d'unicité

Théorème 5.3.1 *Supposons que (5.1.11)-(5.1.15), (4.1.18) et (5.1.17)-(5.1.24) sont vérifiés.*

Alors il existe une solution unique $\{u, \theta\}$ au problème $\mathcal{P}_V^3$. En outre, la solution satisfait

$$u \in W^{1,\infty}(0, T; V) \cap W^{2,\infty}(0, T; H), \quad (5.3.1)$$

$$\theta \in W^{1,2}(0, T; Y_1') \cap L^2(0, T; Y_1) \cap C(0, T; L^2(\Omega)) \quad (5.3.2)$$

Un triplet des fonctions (u, σ, θ) satisfaisant (5.1.1), (5.2.4)-(5.2.6) s'appelle solution faible du problème de contact thermo-viscoélastique $\mathcal{P}^3$. Nous concluons que sous les hypothèses ci-dessus, le problème (5.1.1)-(5.1.10) a une unique solution faible. Pour préciser la régularité de la solution faible nous notons que (5.1.1), les conditions (5.1.11), (5.1.12), (5.1.18), (5.1.22) et la régularité (5.3.1), (5.3.2) montrent que

$$\sigma \in L^2(0, T; \mathcal{H}), \quad \text{Div } \sigma \in L^2(0, T; V'). \quad (5.3.3)$$

Nous nous occupons maintenant de la preuve du Theoreme 5.3.1 qui est basée sur l'application des arguments du point fixe et selon un résultat d'existence pour une inéquation d'évolution abstraite qui suit

5.3.1 Résultat d'existence pour une inéquation d'évolution abstraite

Soient $(H, \|\cdot\|_H)$ et $(V, \|\cdot\|_V)$ être deux espace de Hilbert dont les produits scalaires seront notés par $(\cdot, \cdot)_H$ et $(\cdot, \cdot)_V$, tel que V est dense dans H avec injection compacte.

Nous introduisons l'espace W_0 et l'ensemble K_0 comme

$$W_0 = W^{1,\infty}(0, T; V) \cap W^{2,\infty}(0, T; H), \quad K_0 = \{v \in W_0 \mid v(0) = u_0, \dot{v}(0) = w_0\},$$

avec u_0, w_0 dans V .

(1) Soient a, b être deux formes bilinéaires, symétriques, continues et V -elliptiques définies sur V^2 dans le sens suivant :

– il existe $m_A > 0$ tel que pour tout u, v dans V ,

$$a(u, v) \leq m_A \|u\|_V \|v\|_V, \quad (5.3.4)$$

– il existe $m_B > 0$ tel que pour tout u, v dans V ,

$$b(u, v) \leq m_B \|u\|_V \|v\|_V, \quad (5.3.5)$$

– il existe $A > 0, \lambda_A \geq 0$ tels que pour tout u dans V ,

$$a(u, u) \geq A \|u\|_V^2 - \lambda_A \|u\|_H^2, \quad (5.3.6)$$

– il existe $B > 0, \lambda_B \geq 0$ tels que pour tout u dans V

$$b(u, u) \geq B \|u\|_V^2 - \lambda_B \|u\|_H^2. \quad (5.3.7)$$

(2) On considère l'application $\phi : [0, T] \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ que se décompose en deux parties ϕ_1 et ϕ_2 telles que pour tout $t, u, v \in [0, T] \times V \times V$, $\phi(t, u, v) = \phi_1(u, v) + \phi_2(t, u, v)$ avec $\phi_1, \phi_2(t, \cdot, \cdot)$ séquentiellement faiblement continues pour tout $t \in [0, T]$ et satisfaisant les conditions suivantes :

(a) pour toute suite faiblement convergente $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} u$ dans W_0 .

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_0^T \phi(t, u_k(t), \dot{u}_k(t)) dt \geq \int_0^T \phi(t, u(t), \dot{u}(t)) dt, \quad (5.3.8)$$

(b) pour tout $u \in V$, $\phi_1(u, \cdot)$ est linéaire, il existe une application C^1 , notée par $\vartheta : V \rightarrow \mathbb{R}$, telle que :

$$\forall v \in W_0, \forall t \in [0, T], \text{ p.p. } \vartheta(v(t)) \geq 0 \text{ et } \frac{d\vartheta(v(t))}{dt} = \phi_1(v(t), \dot{v}(t)) \quad (5.3.9)$$

(c) $\phi_2(t, u, \cdot)$ est convexe, positivement homogène vérifie

$$\phi_2(0, u_0, \cdot) = 0, \quad \phi_2(t, u, -v) = \phi_2(t, u, v), \quad \forall v \in V. \quad (5.3.10)$$

(d) ϕ satisfait la propriété suivante

$$\begin{aligned} & \forall r > 0, \exists \kappa(r) > 0, \forall v_1, v_2, w_1, w_2 \in V, \forall t_1, t_2 \in [0, T] \text{ tel que } \|v_1\|_V \leq r, \|v_2\|_V \leq r : \\ & |\phi(t_1, v_1, w_1) - \phi(t_1, v_1, w_2) + \phi(t_2, v_2, w_2) - \phi(t_2, v_2, w_1)| \\ & \leq (\kappa(r) \|v_1 - v_2\|_V + \kappa_0 |t_1 - t_2|) \|w_1 - w_2\|_V, \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

où κ_0 est une constante positive.

(3) Soit l'application f appartient à $W^{1,2}(0, T; V)$ et nous assumons la condition de compatibilité suivante sur les conditions initiales :

$$\exists l_1 \in H \quad a(w_0, v) + b(u_0, v) + \phi_1(u_0, v) = (f(0), v)_V + (l_1, v)_H, \quad \forall v \in V \quad (5.3.12)$$

Théorème 5.3.2 . *Sous les hypothèses ci dessus, il existe une solution unique $u \in K_0$ du problème suivant :*

$$\begin{aligned} & \int_0^T (\ddot{u}(t), \dot{v}(t) - \dot{u}(t))_H dt + \int_0^T a(u(t), \dot{v}(t) - \dot{u}(t)) dt + \int_0^T b(\dot{u}(t), \dot{v}(t) - \dot{u}(t)) ds \\ & + \int_0^T \phi(t, u(t), \dot{v}(t)) dt - \int_0^T \phi(t, u(t), \dot{u}(t)) ds \geq \int_0^T (f(t), \dot{v}(t) - \dot{u}(t))_V ds \quad \forall v \in K_0. \end{aligned}$$

Démonstration. Pour la preuve du Théorème 5.3.2 voir [57].

5.3.2 Démonstration du Théorème 5.3.1

Soit $\eta \in W^{1,2}(0, T; V')$, on considère le problème variationnel suivant.

Problème $\mathcal{P}_{1, u_\eta}^3$. Trouver un champ des déplacements $u_\eta : [0, T] \rightarrow V$ tel que pour $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} & \int_0^T [((\ddot{u}_\eta(t), \dot{v} - \dot{u}_\eta(t)))_H + \mathbf{a}(\dot{u}_\eta(t), \dot{v} - \dot{u}_\eta) + \mathbf{b}(u_\eta(t), \dot{v} - \dot{u}_\eta) \\ & - \langle \eta(t), \dot{v} - \dot{u}_\eta(t) \rangle_{V \times V} + j_{cnf}(t, u_\eta(t), \dot{v}) - j_{cnf}(t, u_\eta(t), \dot{u}_\eta(t))] ds \\ & \geq \int_0^T (F(t), \dot{v} - \dot{u}_\eta(t))_V ds, \quad \forall v \in V. \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

En utilisant (5.1.18) et le Théorème de représentation de Riesz-Fréchet ; on peut alors définir un élément $F_\eta \in W^{1,2}(0, T; V)$ par l'égalité

$$(F_\eta(t), v)_V = (F(t), v)_V + \langle \eta(t), v \rangle_{V' \times V}, \quad \forall v \in V,$$

alors le problème $\mathcal{P}_{1, u_\eta}^3$ est équivalent au problème suivant.

Problème $\mathcal{P}_{2, u_\eta}^3$. Trouver un champ des déplacements $u_\eta \in \mathcal{U}_0$ tel que pour

$$\begin{aligned} & \int_0^T [((\ddot{u}_\eta(t), \dot{v} - \dot{u}_\eta(t)))_H + \mathbf{a}(\dot{u}_\eta(t), \dot{v} - \dot{u}_\eta(t)) + \mathbf{b}(u_\eta(t), \dot{v} - \dot{u}_\eta(t)) \\ & + j_{cnf}(t, u_\eta(t), \dot{v}) - j_{cnf}(t, u_\eta(t), \dot{u}_\eta(t))] ds \geq \int_0^T (F_\eta(t), \dot{v} - \dot{u}_\eta(t))_V ds, \quad v \in \mathcal{U}_0. \end{aligned} \quad (5.3.14)$$

Lemme 5.3.1 . *Sous les hypothèses (5.1.11)-(5.1.13), (5.1.17)-(5.1.21), (5.1.24) et (5.1.25) il existe une solution unique $u_\eta \in \mathcal{U}_0$ du problème $\mathcal{P}_{2, u_\eta}^3$. En outre, si u_{η_i} représente la solution des problèmes $\mathcal{P}_{2, u_{\eta_i}}^3$, pour $\eta_i \in W^{1,2}(0, T; V')$, $i = 1, 2$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\|\dot{u}_{\eta_1}(t) - \dot{u}_{\eta_2}(t)\|_V^2 ds + \|u_{1\eta}(t) - u_{2\eta}(t)\|_V^2 \leq C \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{V'}^2 ds \quad (5.3.15)$$

Démonstration.

Il suffit d'appliquer le Théorème 5.3.2, d'existence et unicité pour une inéquation d'évolution abstraite.

D'après les hypothèses (5.1.11) sur $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. on déduit que $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont bilinéaires et symétriques.

De (5.1.13), (2.1.8) il arrive que $\mathbf{a}$ est continue car :

$$\mathbf{a}(u, v) \leq \|\mathcal{A}(\varepsilon(u(t))), \varepsilon(\mathbf{v})\|_{\mathcal{H}} \leq L_{\mathcal{A}} \|u\|_V \|v\|_V.$$

De la même manière, d'après l'hypothèse (5.1.14) on démontre que $\mathbf{b}$ est continue, donc les conditions (5.3.4) et (5.3.5) sont vérifiées.

Puisque $\mathcal{A}$ est définie positive alors $\mathbf{a}$ est coercive et la condition (5.3.6) est vérifiée pour $\lambda_A = 0$.

Puisque $\mathcal{B}$ est définie positive alors $\mathbf{b}$ est coercive et la condition (5.3.7) est vérifiée pour $\lambda_B = 0$.

On définit ϕ_1, ϕ_2 pour $t \in [0, T], u, v \in V$, comme suit :

$$\phi_1(u, v) = \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu - l)v_\nu da, \quad \phi_2(t, u, v) = \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_\nu - l)\|v_\tau\|_{L^2(\Gamma_3)^d} da,$$

et on écrit

$$j_{cnf}(t, u, v) = \phi_1(u, v) + \phi_2(t, u, v).$$

Pour toute suite faiblement convergente $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $u_k \rightharpoonup u$ dans $\mathcal{U}_0$, soit $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans V , il s'en suit des résultats de compacité de V dans $L^2(\Gamma_3)^d$ que

$$u_n \rightarrow u \text{ dans } L^2(\Gamma_3)^d, \quad \dot{u}_n \rightarrow \dot{u} \text{ dans } L^2(\Gamma_3)^d.$$

En utilisant (5.1.15)(a) on déduit

$$\phi_1(u_n, v) \rightarrow \phi_1(u, v), \quad \forall v \in V.$$

D'autre part, on utilise (5.1.15)(a) et la continuité de la norme, il résulte que

$$\phi_2(t, u_n, \dot{u}_n) \rightarrow \phi_2(t, u, \dot{u}).$$

Nous concluons que pour tout $v \in V$,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} j_{cnf}(t, u_n, \dot{u}_n) = j_{cnf}(t, u, \dot{u}),$$

donc l'inégalité (5.3.9) est vérifiée.

Pour tout $u \in V$, il est clair que $\phi_1(u, \cdot)$ est linéaire.

D'après les hypothèses (5.1.15) on résulte que p_ν est continue et borné alors elle est intégrable et on a

$$\exists P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } \frac{dP}{dt}(v) = p_\nu(v).$$

Alors

$$\exists \vartheta : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \vartheta(v) = \int_{\Gamma_3} P(v_\nu - l) da,$$

et nous avons

$$\frac{d\vartheta}{dt}(v(t)) = \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_3} P(v_\nu(t) - l) da = \int_{\Gamma_3} p_\nu(v_\nu(t) - l) \dot{v}_\nu(t) da = \phi_1(v(t), \dot{v}(t))$$

Vérifions maintenant les conditions sur ϕ_2 . En utilisant les propriétés de la norme on peut montrer que ϕ_2 est convexe, positivement homogène et vérifie

$$\phi_2(t, u, -v) = \phi_2(t, u, v), \forall v \in V$$

Puisque $u_{0\nu} \leq l$ alors $p_\tau(u_{\nu 0} - l) = 0$ il arrive que

$$\phi_2(0, u_0, v) = \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_{\nu 0} - l) \|v_\tau\|_{L^2(\Gamma_3)^d} da = 0,$$

donc ϕ_2 satisfait (5.3.10).

Posons :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= |j_{cnf}(t_1, v_1, w_1) - j_{cnf}(t_1, v_1, w_2) + j_{cnf}(t_2, v_2, w_2) - j_{cnf}(t_2, v_2, w_1)| \\ \mathcal{L} &= \int_{\Gamma_3} p_\nu(v_{1\nu} - l)(w_{1\nu} - w_{2\nu}) da + \int_{\Gamma_3} p_\tau(v_{1\nu} - l)(\|w_{1\tau}\|_{L^2(\Gamma_3)^d} - \|w_{2\tau}\|_{L^2(\Gamma_3)^d}) da \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} p_\nu(v_{2\nu} - l)(w_{2\nu} - w_{1\nu}) da + \int_{\Gamma_3} p_\tau(v_{2\nu} - l)(\|w_{2\tau}\|_{L^2(\Gamma_3)^d} - \|w_{1\tau}\|_{L^2(\Gamma_3)^d}) da \\ \mathcal{L} &\leq \|p_\nu(v_{1\nu} - l) - p_\nu(v_{2\nu} - l)\|_{L^2(\Gamma_3)} \|w_{1\nu} - w_{2\nu}\|_{L^2(\Gamma_3)} \\ &\quad + \|p_\tau(v_{1\nu} - l) - p_\tau(v_{2\nu} - l)\|_{L^2(\Gamma_3)} \|w_{1\tau} - w_{2\tau}\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \end{aligned}$$

En utilisant (5.1.15) on trouve

$$\mathcal{L} \leq L_\nu \|v_{1\nu} - v_{2\nu}\|_{L^2(\Gamma_3)} \|w_{1\nu} - w_{2\nu}\|_{L^2(\Gamma_3)} + L_\tau \|v_{1\nu} - v_{2\nu}\|_{L^2(\Gamma_3)} \|w_{1\tau} - w_{2\tau}\|_{L^2(\Gamma_3)^d}$$

Moyennant (2.1.9), nous obtenons

$$\mathcal{L} \leq C_0 L_\nu \|v_1 - v_2\|_V \|w_1 - w_2\|_V + C_0 L_\tau \|v_1 - v_2\|_V \|w_1 - w_2\|_V.$$

Donc

$$\exists \kappa(r) = C_0 L_\nu + C_0 L_\tau = C, \kappa_0 = 0, \text{ tels que } \mathcal{L} \leq \kappa(r) \|v_1 - v_2\|_V \|w_1 - w_2\|_V,$$

et par conséquent la condition (5.3.11) est vérifiée.

La condition (5.3.12) est déduite par l'hypothèse (5.1.25).

Finalement toutes les conditions (5.3.4)-(5.3.12) de Théorème 5.3.2 sont satisfaites, on peut dire que le problème $\mathcal{P}_{2,u_\eta}^3$ possède une solution unique $u_\eta \in \mathcal{U}_0$.

Maintenant on va démontrer l'inégalité (5.3.15). En prenant la substitution $\eta = \eta_1, \eta = \eta_2$ dans (5.3.14) on trouve

$$\begin{aligned} & ((\ddot{u}_{\eta_1} - \ddot{u}_{\eta_2}, \dot{u}_{\eta_1} - \dot{u}_{\eta_2}))_H + \mathbf{a}(\dot{u}_{\eta_1} - \dot{u}_{\eta_2}, \dot{u}_{\eta_1} - \dot{u}_{\alpha, \eta_2}) \\ & + \mathbf{b}(u_{\eta_1} - u_{\eta_2}, \dot{u}_{\eta_2} - \dot{u}_{\eta_1}) - j_{cnf}(t, u_{\eta_1}, \dot{u}_{\eta_2}) + j_{cnf}(t, u_{\eta_1}, \dot{u}_{\eta_1}) \\ & - j_{cnf}(t, u_{\eta_2}, \dot{u}_{\eta_1}) + j_{cnf}(t, u_{\eta_2}, \dot{u}_{\eta_2}) \leq (\eta_1 - \eta_2, \dot{u}_{\eta_1} - \dot{u}_{\eta_2})_V. \end{aligned} \quad (5.3.16)$$

On pose

$$\begin{aligned} I &= j_{cnf}(t, u_{\eta_1}, \dot{u}_{\alpha, \eta_2}) - j_{cnf}(t, u_{\eta_1}, \dot{u}_{\eta_1}) + j_{cnf}(t, u_{\eta_2}, \dot{u}_{\eta_1}) - j_{cnf}(t, u_{\eta_2}, \dot{u}_{\eta_2}) \\ &= \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_{\eta_1} - l) \dot{u}_{\nu, \eta_2} da + \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_{\alpha, \eta_1} - l) \|\dot{u}_{\tau, \eta_2}\|_{L^2(\Gamma_3)^d} ds - \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_{\eta_1} - l) \dot{u}_{\nu, \eta_1} da \\ &\quad - \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_{\eta_1} - l) \|\dot{u}_{\tau, \eta_1}\| da + \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_{\eta_2} - l) \dot{u}_{\nu, \eta_1} da + \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_{\eta_2} - l) \|\dot{u}_{\tau, \eta_1}\|_{L^2(\Gamma_3)^d} da \\ &\quad - \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_{\alpha, \eta_2} - l) \dot{u}_{\nu, \eta_2} da - \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_{\eta_2} - l) \|\dot{u}_{\tau, \eta_2}\|_{L^2(\Gamma_3)^d} da \\ &= \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_{\eta_1} - l) (\dot{u}_{\nu, \eta_2} - \dot{u}_{\nu, \eta_1}) da + \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_{\eta_1} - l) (\|\dot{u}_{\tau, \eta_2}\|_{L^2(\Gamma_3)^d} - \|\dot{u}_{\tau, \eta_1}\|_{L^2(\Gamma_3)^d}) da \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_{\eta_2} - l) (\dot{u}_{\nu, \eta_1} - \dot{u}_{\nu, \eta_2}) da + \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_{\eta_2} - l) (\|\dot{u}_{\tau, \eta_1}\|_{L^2(\Gamma_3)^d} - \|\dot{u}_{\tau, \eta_2}\|_{L^2(\Gamma_3)^d}) da \\ &= \int_{\Gamma_3} (p_\nu(u_{\eta_1} - l) - p_\nu(u_{\eta_2} - l)) (\dot{u}_{\nu, \eta_2} - \dot{u}_{\nu, \eta_1}) da \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} (p_\tau(u_{\eta_1} - l) - p_\tau(u_{\eta_2} - l)) (\|\dot{u}_{\tau, \eta_2}\|_{L^2(\Gamma_3)^d} - \|\dot{u}_{\tau, \eta_1}\|_{L^2(\Gamma_3)^d}) da \end{aligned}$$

On utilise l'inégalité de Hölder, l'hypothèse (5.1.15) et l'inégalité (2.1.9), on obtient

$$I \leq (L_\nu + L_\tau) C_0 \|u_{\eta_1} - u_{\eta_2}\|_V \|\dot{u}_{\eta_1} - \dot{u}_{\eta_2}\|_V \quad (5.3.17)$$

En combinant l'inéquation (5.3.16) avec (5.3.17), gardant à l'esprit (5.1.17) et on intègre entre

0 et t , nous obtenons

$$\begin{aligned} & \frac{C}{2} \|\dot{u}_{\eta_1} - \dot{u}_{\eta_2}\|_V^2 + \int_0^t \mathbf{a}(\dot{u}_{\eta_1} - \dot{u}_{\eta_2}, \dot{u}_{\eta_1} - \dot{u}_{\eta_2}) ds \\ & + \int_0^t \mathbf{b}(u_{\eta_1} - u_{\eta_2}, \dot{u}_{\eta_1} - \dot{u}_{\eta_2}) dt \leq \int_0^t I ds + \int_0^t (\eta_1 - \eta_2, \dot{u}_{\eta_1} - \dot{u}_{\eta_2}) ds. \end{aligned}$$

En tenant compte de (5.1.12), (5.3.17) on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{C}{2} \|\dot{u}_{\eta_1} - \dot{u}_{\eta_2}\|_V^2 + m_{\mathcal{A}} \int_0^t \|\dot{u}_{\eta_1} - \dot{u}_{\eta_2}\|_V^2 ds + \frac{m_{\mathcal{B}}}{2} \|u_{\eta_1} - u_{\eta_2}\|_V^2 \\ & \leq (L_{\nu} + L_{\tau}) C_0 \int_0^t \|u_{\eta_1}(s) - u_{\eta_2}(s)\|_V \|\dot{u}_{\eta_1}(s) - \dot{u}_{\eta_2}(s)\|_V ds \\ & + \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{V'} \|\dot{u}_{\eta_1}(s) - \dot{u}_{\eta_2}(s)\|_V ds. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Young et l'inégalité $(ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2)$ pour l'inéquation précédente, nous obtenons que

$$\begin{aligned} & \frac{C}{2} \|\dot{u}_{\eta_1} - \dot{u}_{\eta_2}\|_V^2 + m_{\mathcal{A}} \int_0^t \|\dot{u}_{\eta_1} - \dot{u}_{\eta_2}\|_V^2 ds + \frac{m_{\mathcal{B}}}{2} \|u_{\eta_1} - u_{\eta_2}\|_V^2 \\ & \leq \frac{1}{2} (L_{\nu} + L_{\tau}) C_0 \int_0^t (\|u_{\eta_1} - u_{\eta_2}\|_V^2 + \|\dot{u}_{\eta_1} - \dot{u}_{\eta_2}\|_V^2) ds + \frac{1}{2} \int_0^t (\|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{V'}^2 + \|\dot{u}_{\eta_1}(s) - \dot{u}_{\eta_2}(s)\|_V^2) ds. \end{aligned}$$

Puisque $m_{\mathcal{A}} > 0$ il vient

$$\begin{aligned} & \frac{C}{2} \|\dot{u}_{\eta_1} - \dot{u}_{\eta_2}\|_V^2 + \frac{m_{\mathcal{B}}}{2} \|u_{\eta_1} - u_{\eta_2}\|_V^2 \\ & \leq \frac{C_0}{2} (L_{\nu} + L_{\tau}) \int_0^t (\|u_{\eta_1}(s) - u_{\eta_2}(s)\|_V^2 + \|\dot{u}_{\eta_1}(s) - \dot{u}_{\eta_2}(s)\|_V^2) ds \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t (\|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{V'}^2 + \|\dot{u}_{\eta_1}(s) - \dot{u}_{\eta_2}(s)\|_V^2) ds. \end{aligned}$$

Alors $\exists C = \min(C, m_{\mathcal{B}})$

$$\begin{aligned} & \frac{C}{2} (\|\dot{u}_{\eta_1} - \dot{u}_{\eta_2}\|_V^2 + \|u_{\eta_1} - u_{\eta_2}\|_V^2) \\ & \leq \left(\frac{C_0}{2} (L_{\nu} + L_{\tau}) + \frac{1}{2} \right) \int_0^t (\|u_{\eta_1}(s) - u_{\eta_2}(s)\|_V^2 + \|\dot{u}_{\eta_1}(s) - \dot{u}_{\eta_2}(s)\|_V^2) ds \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{V'}^2 ds. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \|\dot{u}_{\eta_1} - \dot{u}_{\eta_2}\|_V^2 + \|u_{\eta_1} - u_{\eta_2}\|_V^2 & \leq \frac{1}{C} \left(C_0 (L_{\nu} + L_{\tau}) + \frac{1}{2} \right) \int_0^t (\|u_{\eta_1}(s) - u_{\eta_2}(s)\|_V^2 \\ & + \|\dot{u}_{\eta_1}(s) - \dot{u}_{\eta_2}(s)\|_V^2) ds + \frac{1}{C} \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{V'}^2 ds, \end{aligned}$$

on applique le Lemme de Gronwell, on trouve

$$\|\dot{u}_{1\eta}(t) - \dot{u}_{2\eta}(t)\|_V^2 + \|u_{1\eta}(t) - u_{2\eta}(t)\|_V^2 \leq C \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{V'}^2 ds \quad (5.3.18)$$

ce qui termine la preuve du Lemme 5.3.1. $\square$

Dans la deuxième étape, nous utilisons le champ de déplacement u_η obtenu dans le Lemme 5.3.1 et nous considérons le problème d'évolution suivant.

Problème $\mathcal{P}_{\theta_\eta}^3$. Trouver le champ de température $\theta_\eta : [0, T] \rightarrow Y_1$ tel que

$$\dot{\theta}_\eta(t) + \mathcal{R}\theta_\eta(t) = \Theta\dot{u}_\eta + Q(t) \text{ dans } Y_1' \quad (5.3.19)$$

Lemme 5.3.2 . *Il existe une solution unique du problème $\mathcal{P}_{\theta_\eta}^3$ ayant la régularité (5.2.5). De plus, si θ_{η_1} et θ_{η_2} sont deux solutions du problème $\mathcal{P}_{\theta_{\eta_i}}^3$ correspondantes aux données $\eta_1, \eta_2 \in W^{1,2}([0, T; V'])$ alors il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\|\theta_{\eta_1}(t) - \theta_{\eta_2}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{V'}^2 ds. \quad (5.3.20)$$

Démonstration. On applique Théorème 2.4.1, on sait que l'inclusion de la trace de $(Y_1, \|\cdot\|_{Y_1})$ dans $(L^2(\Omega), \|\cdot\|_{L^2(\Omega)})$ est continue et dense, nous pouvons écrire le Triplet de Gelfand

$$Y_1 \subset L^2(\Omega) \subset Y_1'.$$

L'opérateur $\mathcal{R}$ est linéaire et coercitive. En utilisant l'inégalité de Korn, nous avons

$$\langle \mathcal{R}\tau, \tau \rangle_{Y_1 \times Y_1'} \geq C \|\tau\|_{Y_1}^2. \quad (5.3.21)$$

Moyennant (5.1.23), (5.1.24) et (5.1.30) pour tout $\tau, \omega \in Y_1$ on a

$$\langle \mathcal{R}\tau, \omega \rangle_{Y_1' \times Y_1} \leq \sum_{i,j=1}^d \|k_{i,j}\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\tau_{,i}\|_{L^2(\Omega)} \|\omega_{,i}\|_{L^2(\Omega)} + \|k_e\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\omega\|_{L^2(\Omega)},$$

en utilisant (2.1.1) et théorème de trace de Sobolev on trouve

$$\langle \mathcal{R}\tau, \omega \rangle_{Y'_1 \times Y_1} \leq C \|\tau\|_{Y_1} \|\omega\|_{Y_1}. \quad (5.3.22)$$

D'autre part, d'après la définition de Θ et Q on déduit que

$$\Theta + Q \in L^2(0, T; Y'_1). \quad (5.3.23)$$

Comme $\theta_0 \in L^2(\Omega)$, d'après les inégalités (5.3.21), (5.3.22) et la régularité (5.3.23), on résulte que l'opérateur $\mathcal{R}$ est hemicontinu et monotone et satisfait les conditions du Théorème 2.4.1, donc nous concluons qu'il existe une unique fonction θ_η ayant la régularité (5.3.2).

Maintenant on démontre l'inégalité (5.3.20). Soit $\theta_{\eta_1}, \theta_{\eta_2}$ deux solutions des problèmes $\mathcal{P}_{\theta_{\eta_1}}^3$ et $\mathcal{P}_{\theta_{\eta_2}}^3$ respectivement, alors

$$\dot{\theta}_{\eta_1} - \dot{\theta}_{\eta_2} + \mathcal{R}\theta_{\eta_1} - \mathcal{R}\theta_{\eta_2} = \Theta \dot{u}_{\eta_1} - \Theta \dot{u}_{\eta_2}, \quad \text{sur } Y'_1.$$

On peut écrire pour p.p. $t \in (0; T)$:

$$\begin{aligned} & \langle \dot{\theta}_{\eta_1}(t) - \dot{\theta}_{\eta_2}(t), \theta_{\eta_1}(t) - \theta_{\eta_2}(t) \rangle_{Y'_1 \times Y_1} + \langle \mathcal{R}(\theta_{\eta_1}(t) - \theta_{\eta_2}(t)), \theta_{\eta_1}(t) - \theta_{\eta_2}(t) \rangle_{Y'_1 \times Y_1} \\ &= \langle \Theta \dot{u}_{\eta_1} - \Theta \dot{u}_{\eta_2}, \theta_{\eta_1}(t) - \theta_{\eta_2}(t) \rangle_{Y'_1 \times Y_1}. \end{aligned} \quad (5.3.24)$$

De la définition (5.1.31), nous déduisons

$$\begin{aligned} & \langle \Theta \dot{u}_{\eta_1} - \Theta \dot{u}_{\eta_2}, \theta_{\eta_1}(t) - \theta_{\eta_2}(t) \rangle_{Y'_1 \times Y_1} \leq \|\mathcal{M} \cdot \nabla \dot{u}_{\eta_1}(t) - \mathcal{M} \cdot \nabla \dot{u}_{\eta_2}(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\theta_{\eta_1}(t) - \theta_{\eta_2}(t)\|_{L^2(\Omega)} \\ &+ \|h_\tau(\|\dot{u}_{\tau\eta_1}(t)\|_{L^2(\Gamma_3)^d}) - h_\tau(\|\dot{u}_{\tau\eta_2}(t)\|_{L^2(\Gamma_3)^d})\|_{L^2(\Gamma_3)} \|\theta_{\eta_1}(t) - \theta_{\eta_2}(t)\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (5.3.25)$$

En utilisant (5.1.22), (5.1.16) et (2.1.9)

$$\langle \Theta \dot{u}_{\eta_1} - \Theta \dot{u}_{\eta_2}, \theta_{\eta_1}(t) - \theta_{\eta_2}(t) \rangle_{Y'_1 \times Y_1} \leq C \|\dot{u}_{\eta_1}(t) - \dot{u}_{\eta_2}(t)\|_V \|\theta_{\eta_1}(t) - \theta_{\eta_2}(t)\|_{L^2(\Omega)}. \quad (5.3.26)$$

Moyennant (5.3.24) et on utilise (4.1.30), (5.1.23) et (5.3.26) nous obtenons

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta_{\eta_1}(t) - \theta_{\eta_2}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_K \|\theta_{\eta_1}(t) - \theta_{\eta_2}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq \|\dot{u}_{\eta_1}(t) - \dot{u}_{\eta_2}(t)\|_V \|\theta_{\eta_1}(t) - \theta_{\eta_2}(t)\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (5.3.27)$$

En utilisant l'inégalité de Young, l'inéquation précédente devient

$$\frac{d}{dt} \|\theta_{\eta_1}(t) - \theta_{\eta_2}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C(\|\dot{u}_{\eta_1}(t) - \dot{u}_{\eta_2}(t)\|_V^2 + \|\theta_{\eta_1}(t) - \theta_{\eta_2}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2), \quad (5.3.28)$$

en utilisant l'estimation (5.3.15), les conditions initiales $\theta_{\eta_1}(0) = \theta_{\eta_2}(0) = \theta_0$ et le lemme de Gronwall, on trouve (5.3.20), ce qui achève la preuve du Lemme 5.3.2. $\square$

Dans la troisième étape. Pour chaque $\eta \in W^{1,2}(0, T; V')$, nous notons par u_η la solution du problème $\mathcal{P}_{1, u_\eta}^3$ fournie dans le Lemme 5.3.1, par θ_η la solution du problème $\mathcal{P}_{\theta_\eta}^3$ fournie dans le Lemme 5.3.2. En outre, nous appliquons le théorème de représentation de Riesz-Fréchet pour définir l'application $\Lambda_\eta : W^{1,2}(0, T; V') \rightarrow W^{1,2}(0, T; V')$ définie par

$$\langle \Lambda_\eta(\eta(t)), v \rangle_{V' \times V} = (\mathcal{M}\theta_\eta(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}, \quad (5.3.29)$$

Nous avons le résultat suivant.

Lemme 5.3.3 . *L'opérateur Λ_η admet un point fixe unique $\eta^* \in W^{1,2}(0, T; V')$.*

Démonstration.

Soient $\eta_1, \eta_2 \in W^{1,2}(0, T; V')$. D'après la définition (5.3.29), nous avons

$$\begin{aligned} \|\Lambda_\eta(\eta_1(t)) - \Lambda_\eta(\eta_2(t))\|_{V'}^2 &\leq \|\theta_{\eta_1}(t)\mathcal{M} - \theta_{\eta_2}(t)\mathcal{M}\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\leq \|\mathcal{M}\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \|\theta_{\eta_1}(t) - \theta_{\eta_2}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

De (5.3.20), l'inéquation précédente devient

$$\int_0^T \|\Lambda_\eta(\eta_1(t)) - \Lambda_\eta(\eta_2(t))\|_{V'}^2 dt \leq C \int_0^T \|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_{V'}^2 dt. \quad (5.3.30)$$

De plus

$$\left\langle \frac{d}{dt} (\Lambda_\eta \eta(t)), v \right\rangle_{V' \times V} = (\dot{\theta}_\eta(t)\mathcal{M}, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}. \quad (5.3.31)$$

D'après (5.3.31) on déduit

$$\left\| \frac{d}{dt} \Lambda_\eta(\eta_1(t)) - \frac{d}{dt} \Lambda_\eta(\eta_2(t)) \right\|_{V'}^2 \leq \|\mathcal{M}\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \|\dot{\theta}_{\eta_1}(t) - \dot{\theta}_{\eta_2}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (5.3.32)$$

D'autre part, on utilise (5.3.24), (5.1.16) et (5.1.22)-(5.1.24) il résulte que

$$\begin{aligned} \|\dot{\theta}_{\eta_1}(t) - \dot{\theta}_{\eta_2}(t)\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|\Theta \dot{u}_{\eta_1}(t) - \Theta \dot{u}_{\eta_2}(t)\|_{Y'_1} \\ &\leq C \|\dot{u}_{\eta_1}(t) - \dot{u}_{\eta_2}(t)\|_V. \end{aligned} \quad (5.3.33)$$

En utilisant (5.3.15) nous obtenons

$$\|\dot{\theta}_{\eta_1}(t) - \dot{\theta}_{\eta_2}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^T \|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_{V'}^2 dt. \quad (5.3.34)$$

Nous combinons maintenant les inégalités (5.3.32) avec (5.3.34) pour déduire que

$$\int_0^T \left\| \frac{d}{dt} \Lambda_\eta(\eta_1(t)) - \frac{d}{dt} \Lambda_\eta(\eta_2(t)) \right\|_{V'}^2 dt \leq C \int_0^T \|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_{V'}^2 dt. \quad (5.3.35)$$

Les inégalités (5.3.30) et (5.3.35) implique que

$$\|\Lambda_\eta(\eta_1) - \Lambda_\eta(\eta_2)\|_{W^{1,2}(0,T;V')} \leq C \|\eta_1 - \eta_2\|_{W^{1,2}(0,T;V')} \quad (5.3.36)$$

Réitérons cette dernière inégalité n fois pour trouver que

$$\|\Lambda_\eta^n(\eta_1) - \Lambda_\eta^n(\eta_2)\|_{W^{1,2}(0,T;V')} \leq \frac{C^n}{n!} \|\eta_1 - \eta_2\|_{W^{1,2}(0,T;V')}, \quad (5.3.37)$$

ce qui implique que pour n grand l'opérateur Λ_η^n est une contraction dans l'espace de Banach $W^{1,2}(0, T; V')$, donc il possède un point fixe unique $\eta^* \in W^{1,2}(0, T; V')$, et par conséquent η^* est l'unique point fixe de l'opérateur Λ_η . $\square$

Nous avons maintenant tout ce qui est nécessaire pour prouver le Théorème 5.3.1.

Existence. Soit $\eta^* \in W^{1,2}(0, T; V')$ un point fixe de Λ_η et soit u la solution du problème $\mathcal{P}_{2,u_\eta}^3$ et $\mathcal{P}_{\theta_\eta}^3$ pour $\eta = \eta^*$, i.e, $u = u_{\eta^*}$ et $\theta = \theta_{\eta^*}$. Clairement, les égalités (5.2.4), (5.2.5) viennent des problèmes $\mathcal{P}_{2,u_\eta}^3$ et $\mathcal{P}_{\theta_\eta}^3$. Enfin, les régularités (5.3.1), (5.3.2) proviennent des Lemmes 5.3.1 et 5.3.2 ce qui conclut la partie existence de la preuve.

Unicité. C'est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ_η donné par (5.3.29) et de l'unique solvabilité des problèmes $\mathcal{P}_{2,u_\eta}^3$ et $\mathcal{P}_{\theta_\eta}^3$. $\square$

Remarque 5.3.1 . *Le cas de même problème pour un matériau thermo-viscoélastique linéaire avec endommagement dont la loi de comportement définie par (1.2.7) et la température θ définie par une équation de la conservation de l'énergie (1.2.8) fait parté d'un problème ouvert.*

Troisième partie

Problèmes de contact des matériaux piézoélectriques avec endommagement

Partie III

Problèmes de contact des matériaux piézoélectriques avec endommagement

Dans cette partie de la thèse, composée de deux chapitres, nous procédons à l'étude de deux problèmes de contact dynamiques avec endommagement entre un corps électo-élasto-viscoplastique ou électo-viscoélastique et une fondation.

Le premier chapitre propose l'analyse d'un problème électo-élasto-viscoplastique non linéaire avec variable interne d'état qui décrit l'endommagement du matériau causé par les déformation viscoplastique. Le contact est sans frottement, en modélisant à l'aide d'une condition de compliance normale dans laquelle on tient compte de l'adhésion des surfaces en contact.

Le dernier chapitre concerne l'étude d'un problème électo-viscoélastique non linéaire avec endommagement causé par des déformations élastiques. Le contact est bilatéral avec frottement ; il décrit à l'aide de la loi de Tresca.

Dans l'étude de ces problèmes, on propose des formulations variationnelles et on obtient des résultats d'existence et d'unicité de la solution faible. Les démonstrations sont basées sur l'étude des problèmes intermédiaires, ensuite nous considérons une contraction dont l'unique point fixe nous permet d'obtenir l'existence et l'unicité de la solution du problème original.

Chapitre 6

Problème électro-élasto-viscoplastique de contact avec compliance normale et adhésion

Nous considérons un problème de contact dans le cas dynamique entre un corps piézoélectrique et un obstacle qui est électriquement conducteur. Le contact est modélisé avec une condition de compliance normale et adhésion sans frottement. Ce chapitre est dévisé en trois sections. Dans la première, nous présentons le problème électro-mécanique, puis nous indiquons les hypothèses sur les données. Dans la deuxième section nous décrivons une formulation variationnelle. Enfin, dans la troisième section, nous énonçons le Théorème 6.3.1 et nous fournissons l'existence et l'unicité d'une solution faible du problème, et nous le prouvons. Les résultats présentés dans ce chapitre font l'objet d'un article [8].

6.1 Position du problème électro-mécanique et hypothèses

Nous nous plaçons dans le cadre physique n°2 (page 5). Nous considérons que le corps est électro-élasto-viscoplastique, plus exactement on utilise une loi de comportement de la forme (1.2.10). En ce qui concerne le contact, nous le modélisons par une condition de compliance

normale couplée avec l'adhésion. Avec ces considerations, le modèle mathématique n°2 (page 9) nous conduit au problème électro-mecanique suivant

Problème $\mathcal{P}^4$. Trouver un champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, un champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, un champ de potentiel électrique $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, un champ des déplacements électriques $D : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, un champ d'endommagement $\alpha : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, ainsi qu'un champ d'adhésion $\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned} \sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{B}\varepsilon(u(t)) - \mathcal{E}^*E(\varphi(t)) \\ + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(s)) + \mathcal{E}^*E(\varphi(s)), \varepsilon(u(s)), \alpha(s)) ds \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \end{aligned} \quad (6.1.1)$$

$$D = \mathcal{E}\varepsilon(u) + \mathcal{C}E(\varphi) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (6.1.2)$$

$$\dot{\alpha} - k_1 \Delta \alpha + \partial_K \chi(\alpha) \ni S(\sigma(t) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{E}^*E(\varphi(t)), \varepsilon(u), \alpha) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (6.1.3)$$

$$\text{Div } \sigma + f_0 = \rho \ddot{u} \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (6.1.4)$$

$$\text{div } D - q_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (6.1.5)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (6.1.6)$$

$$\sigma \nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (6.1.7)$$

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - l) - \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (6.1.8)$$

$$-\sigma_\tau = p_\tau(\beta) R_\tau(u_\tau) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (6.1.9)$$

$$\dot{\beta} = -[\beta(\gamma_\nu R_\nu(u_\nu)^2 + \gamma_\tau \|R_\tau(u_\tau)\|^2) - \varepsilon_a]_+ \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (6.1.10)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T), \quad (6.1.11)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a \times (0, T), \quad (6.1.12)$$

$$D \cdot \nu = q_2 \quad \text{sur } \Gamma_b \times (0, T), \quad (6.1.13)$$

$$D \cdot \nu = \psi(u_\nu - l) \delta(\varphi - \varphi_0) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (6.1.14)$$

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = w_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (6.1.15)$$

$$\beta(0) = \beta_0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (6.1.16)$$

Nous fournissons maintenant quelques commentaires sur les équations et les conditions (6.1.1)-(6.1.16) et renvoyons à [63, 68] pour plus de détails sur les conditions (6.1.8)-(6.1.10) qui décrivent le contact sans frottement avec adhésion.

D'abord, les équations (6.1.1) et (6.1.2) représentent la loi de comportement électro-élasto-viscoplastique avec endommagement que nous avons déjà introduite dans (1.2.10), où $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{G}$ et sont les opérateurs de viscosité, d'élasticité et de viscoplasticité à champs électriques nuls, $\mathcal{E} = (e_{ijk})$ le tenseur piézoélectrique à champ constant ou nul, $\mathcal{C} = (c_{ij})$ le tenseur de la primitive électrique à déformation nulle et $E(\varphi) = -\nabla\varphi$ représente le champ électrique, l'évolution du champ d'endommagement est régi par inclusion du type parabolique donnée par la relation (6.1.3). les équations (6.1.4) et (6.1.5) sont les équations du mouvement écrite pour le champ de contrainte et d'équilibre écrite pour le champ de déplacement électrique, que nous avons déjà vu dans (1.1.5) et (1.1.8), les conditions (6.1.6) et (6.1.7) sont les conditions aux limites classiques de déplacement et traction tandis que l'équation (6.1.8) représente la condition de compliance normale avec adhésion sur la surface de contact Γ_3 que nous avons défini dans (1.3.1), (6.1.9) est la condition de contact avec adhésion sur le plan tangentiel. Ensuite, l'équation différentielle ordinaire (6.1.10) décrit l'évolution du champ d'adhésion, avec la condition initiale (6.1.16) où α_0 est un champ d'adhésion donnée, la relation (6.1.11) représente un état de frontière homogène de neumann, où $\frac{\partial\alpha}{\partial\nu}$ représente la dérivée normale de α . (6.1.12) et (6.1.13) sont les conditions aux limites électriques. Finalement (6.1.15) représente les champs de déplacement et d'endommagement initiales.

Pour obtenir une formulation variationnelle du problème $\mathcal{P}^4$ nous avons besoin d'introduire quelques hypothèses sur les données.

Nous supposons que l'opérateur piézoélectrique $\mathcal{E} : \Omega \times S^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ satisfait les hypothèses.

$$\begin{cases} \text{(a)} \ \mathcal{E}(x, \tau) = (e_{ijk}(x)\tau_{jk}), \ \forall \tau = (\tau_{ij}) \in \mathbb{S}^d, \ \text{p.p. } x \in \Omega, \\ \text{(b)} \ (e_{ijk}) = (e_{ikj}) \in L^\infty(\Omega), \ 1 \leq i, j, k \leq d. \end{cases} \quad (6.1.17)$$

L'opérateur de permittivité $\mathcal{C} = (c_{ij}) : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ satisfait les hypothèses.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{C}(x, E) = (c_{ij}(x)E_j) \quad \forall E = (E_i) \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega, \\ \text{(b) } c_{ij} = c_{ji} \in L^\infty(\Omega), \quad 1 \leq i, j \leq d, \\ \text{(c) il existe } m_{\mathcal{C}} > 0 \text{ telle que } c_{ij}(x)E_i \cdot E_j \geq m_{\mathcal{C}}\|E\|^2 \\ \quad \forall E = (E_i) \in \mathbb{R}^d \text{ p.p. } x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (6.1.18)$$

Ces hypothèses indiquent que l'opérateur piézoélectrique $\mathcal{E}$ et l'opérateur de permittivité électrique $\mathcal{C}$ sont supposés être linéaires, avoir les composantes bornées et mesurables des éléments notés e_{ijk} et c_{ij} , respectivement et de plus $\mathcal{C}$ est symétrique et défini positif. Rappelons aussi que le tenseur transposé $\mathcal{E}^*$ est donné par $\mathcal{E}^* = (e_{ijk}^*)$ où $e_{ijk}^* = e_{kij}$ et l'égalité suivante est satisfaite :

$$\mathcal{E}\sigma \cdot v = \sigma \cdot \mathcal{E}^*v, \quad \forall \sigma \in \mathbb{S}^d, \quad v \in \mathbb{R}^d. \quad (6.1.19)$$

La fonction source d'endommagement $S : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_S > 0 \text{ tels que } |S(x, \sigma_1, \varepsilon_1, \alpha_1) - S(x, \sigma_2, \varepsilon_2, \alpha_2)| \\ \quad \leq L_S(\|\sigma_1 - \sigma_2\| + \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| + |\alpha_1 - \alpha_2|) \\ \quad \text{pour tout } \sigma_1, \sigma_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ pour tout } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ \text{(b) L'application } x \mapsto S(x, \sigma, \varepsilon, \alpha) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega \\ \quad \text{pour tout } \sigma, \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{R}. \\ \text{(c) L'application } x \mapsto S(x, 0, 0, 0) \in L^2(\Omega). \end{array} \right. \quad (6.1.20)$$

La fonction de conductivité électrique $\psi : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfait les hypothèses.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_\psi > 0 \text{ telle que} \\ \quad |\psi(x, r_1) - \psi(x, r_2)| \leq L_\psi |r_1 - r_2|, \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3, \\ \text{(b) Il existe } M_\psi > 0 \text{ telle que } |\psi(x, r)| \leq M_\psi \quad \forall r \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ \text{(c) L'application } x \mapsto \psi(x, r) \text{ est lebesgue mesurable sur } \Gamma_3, \quad \forall r \in \mathbb{R}. \\ \text{(d) L'application } x \mapsto \psi(x, r) = 0 \text{ pour tout } r \leq 0. \end{array} \right. \quad (6.1.21)$$

De même, nous supposons que les opérateurs $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{G}$ satisfont les hypothèses (3.1.14), (3.1.15) et (4.1.13) respectivement, en plus des hypothèses (6.1.20), (3.1.19) et (3.1.20) sur la fonction d'endommagement S , la fonction de compliance normale p_ν et la fonction de contact tangentiel p_τ , nous supposons encore que la masse volumique ρ satisfait la condition (3.1.21), les coefficients d'adhésion γ_ν, γ_τ et ε_a vérifient l'hypothèse (3.1.22) que nous venons de voir dans le chapitre précédent.

Les forces volumiques f_0 , les tractions surfaciques f_2 et les densités des charges électriques volumiques q_0 et surfaciques q_2 vérifient

$$f_0 \in L^2(0, T; H), \quad f_2 \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2)^d), \quad (6.1.22)$$

$$q_0 \in W^{1,p}(0, T; L^2(\Omega)), \quad q_2 \in W^{1,p}(0, T; L^2(\Gamma_b)), \quad (6.1.23)$$

Nous supposons qu'il y a un interstice l entre le corps et la base qui vérifie

$$l \in L^2(\Gamma_3), \quad l(x) \geq 0, \quad \text{p.p. } x \in \Gamma_3, \quad (6.1.24)$$

Les champs initiales des déplacements, de vitesse, de potentiel et d'endommagement satisfont

$$u_0 \in V, \quad w_0 \in H, \quad \varphi_0 \in L^2(\Gamma_3), \quad \alpha_0 \in K. \quad (6.1.25)$$

Enfin le champ initial d'adhésion satisfait

$$\beta_0 \in L^2(\Gamma_3), \quad 0 \leq \beta_0 \leq 1, \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3, \quad (6.1.26)$$

Nous définissons la forme bilinéaire $a : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$a(\xi, \varphi) = k_1 \int_{\Omega} \nabla \xi \cdot \nabla \varphi \, dx. \quad (6.1.27)$$

Le théorème de représentation de Riesz-Fréchet entraîne l'existence d'une fonction $F(t) \in V'$ définie par

$$\langle F(t), v \rangle_{V' \times V} = (f_0(t), v)_H + (f_2(t), \gamma v)_{L^2(\Gamma_2)^d} \quad \forall v \in V, \quad t \in (0, T). \quad (6.1.28)$$

De même, le théorème de représentation de Riesz-Fréchet entraîne l'existence d'un élément $q(t) \in W$ défini par

$$(q(t), \phi)_W = \int_{\Omega} q_0(t) \phi dx - \int_{\Gamma_b} q_2(t) \phi da \quad \forall \phi \in W, t \in [0, T], \quad (6.1.29)$$

On remarque que les conditions (6.1.22) et (6.1.23) impliquent que

$$f \in L^2(0, T; V'), \quad q \in W^{1,p}(0, T; W) \quad (6.1.30)$$

Pour étudier le problème variationnelle du $\mathcal{P}_3$, nous posons une hypothèse de petitesse

$$M_\psi < \frac{m_C}{\tilde{C}_0^2}, \quad (6.1.31)$$

où les constantes positives M_ψ , m_C et $\tilde{C}_0$ sont définies dans (6.1.21), (6.1.18) et (2.1.17) respectivement.

Par la suite, on considère les applications $j_{acn} : L^\infty(\Gamma_3) \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ et $h : V \times W \rightarrow W$ définies par

$$j_{acn}(\beta, u, v) = \int_{\Gamma_3} [p_\nu(u_\nu - l) - \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu)] v_\nu da + \int_{\Gamma_3} p_\tau(\beta) R_\tau(u_\tau) \cdot v_\tau da, \quad (6.1.32)$$

$$h((u, \varphi), \phi) = \int_{\Gamma_3} \psi(u_\nu - l) \delta(\varphi - \varphi_0) \phi da. \quad (6.1.33)$$

6.2 Formulation variationnelle

A l'aide des formules de Green (2.1.4), (2.1.18), les hypothèse (3.1.34) et en utilisant des calculs similaires à ceux utilisés dans la preuve à chacune de (3.2.2) et (3.2.5), on voit directement que si u , σ , φ , D , α et β sont des fonctions régulières satisfaisantes (6.1.1)-(6.1.16), alors pour tout $t \in [0, T]$, on obtient les équations et l'inéquations suivantes :

$$\langle \ddot{u}(t), v \rangle_{V' \times V} + (\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j_{acn}(\beta(t), u(t), v) = \langle F(t), v \rangle_{V' \times V} \quad \forall v \in V, \quad (6.2.1)$$

$$(D(t) \cdot \nabla \phi)_H + (q(t), \phi)_W = h((u(t), \varphi(t)), \phi) \quad \forall \phi \in W, \quad (6.2.2)$$

$$\begin{aligned} & \langle \dot{\alpha}(t), \xi - \alpha(t) \rangle_{Y' \times Y} + a(\alpha(t), \xi - \alpha(t)) \\ & \geq \langle S(\sigma(t) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{E}^*(E(\varphi(t))), \varepsilon(u(t)), \alpha(t)), \xi - \alpha(t) \rangle_{Y' \times Y} \quad \forall \xi \in K. \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

Nous introduisons (6.1.2) dans (6.2.2), nous utilisons la notation $E(\varphi) = -\nabla\varphi$ sans oublier l'équation (6.1.10) et les conditions initiales (6.1.15) et (6.1.16) pour obtenir la formulation variationnelle $\mathcal{P}_V^3$ en termes de déplacement, de champ des contraintes, de champ du potentiel électrique, de champ d'endommagement et de champ d'adhésion.

Problème $\mathcal{P}_V^4$. Trouver le champ des déplacements $u : [0, T] \rightarrow V$, le champ des contraintes $\sigma : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$, le champ de potentiel électrique $\varphi : [0, T] \rightarrow W$, le champ d'endommagement $\alpha : [0, T] \rightarrow Y$ et le champ d'adhésion $\beta : [0, T] \rightarrow L^\infty(\Gamma_3)$ tels que

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{B}\varepsilon(u(t)) + \mathcal{E}^*\nabla\varphi(t) \\ &+ \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(s)) - \mathcal{E}^*\nabla\varphi(s), \varepsilon(u(s)), \alpha(s))ds \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

$$\begin{aligned} \langle \ddot{u}(t), v \rangle_{V' \times V} + (\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j_{acn}(\beta(t), u(t), v) &= \langle F(t), v \rangle_{V' \times V} \\ \forall v \in V, \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \end{aligned} \quad (6.2.5)$$

$$\begin{aligned} \langle \dot{\alpha}(t), \xi - \alpha(t) \rangle_{Y' \times Y} + a(\alpha(t), \xi - \alpha(t)) \\ \geq \langle S(\sigma(t) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) - \mathcal{E}^*\nabla\varphi(t), \varepsilon(u(t)), \alpha(t)), \xi - \alpha(t) \rangle_{Y' \times Y} \\ \alpha(t) \in K, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall \xi \in K, \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}\nabla\varphi(t), \nabla\phi)_H - (\mathcal{E}\varepsilon(u(t)), \nabla\phi)_H + h((u(t), \varphi(t)), \phi) &= (q(t), \phi)_W \\ \forall \phi \in W, \quad t \in (0, T), \end{aligned} \quad (6.2.7)$$

$$\dot{\beta} = -[\beta(\gamma_\nu R_\nu(u_\nu(t))^2 + \gamma_\tau \|R_\tau(u_\tau(t))\|^2) - \varepsilon_a]_+ \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \quad (6.2.8)$$

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = w_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0, \quad \beta(0) = \beta_0. \quad (6.2.9)$$

6.3 Existence et unicité de la solution

Dans ce paragraphe nous obtenons un résultat d'existence et d'unicité de la solution $(u, \varphi, \sigma, D, \beta, \alpha)$ du problème $\mathcal{P}_V^4$ c'est-à-dire l'existence d'une solution faible unique du problème électro-mécanique $\mathcal{P}^4$. Notre résultat est le suivant.

Théorème 6.3.1 . *Sous les hypothèses (3.1.14), (3.1.15), (4.1.13), (3.1.18)-(3.1.22) et (6.1.17)-*

(6.1.26), le problème variationnel $\mathcal{P}_V^3$ admet une solution unique $\{u, \sigma, \varphi, \alpha, \beta\}$ ayant la régularité

$$u \in W^{1,2}(0, T; V) \cap C^1(0, T; H), \quad \ddot{u} \in L^2(0, T; V'), \quad (6.3.1)$$

$$\varphi \in W^{1,p}(0, T; W), \quad (6.3.2)$$

$$\sigma \in L^2(0, T; \mathcal{H}), \quad \text{Div } \sigma \in L^2(0, T; V'), \quad (6.3.3)$$

$$\alpha \in L^2(0, T; Y) \cap C(0, T; L^2(\Omega)), \quad \dot{\alpha} \in L^2(0, T; Y'), \quad (6.3.4)$$

$$\beta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Z}. \quad (6.3.5)$$

Un jeu de fonctions $(u, \varphi, \sigma, D, \beta\alpha)$ satisfaisant (6.1.2), (6.1.3) et (6.2.5)-(6.2.7) s'appelle solution faible du problème de contact électro-élasto-viscoplastique $\mathcal{P}^3$. Nous concluons que sous les hypothèses ci-dessus, le problème (6.1.1)-(6.1.16) a une unique solution faible. Pour préciser la régularité de la solution faible nous notons que la relation constitutive (6.1.2), les conditions (6.1.17), (6.1.18) et la régularité (6.3.1), (6.3.2) montrent que $D \in W^{1,p}(0, T; L^2(\Omega)^d)$; d'ailleurs, il s'ensuit de (6.2.7) que (6.2.2) est vérifié et en utilisant la définition de q par un procédé standard, nous obtenons

$$\text{div } D(t) = q_0(t) \quad \forall t \in [0, T].$$

Il découle maintenant de la régularité (6.1.23) que $\text{div } D \in W^{1,p}([0, T]; L^2(\Omega))$, ce qui montre que

$$D \in W^{1,p}([0, T]; \mathcal{W}). \quad (6.3.6)$$

Nous concluons que la solution faible $(u, \varphi, \sigma, D, \beta, \alpha)$ du problème piézoélectrique de contact $\mathcal{P}^3$ possède la régularité (6.3.1)-(6.3.6).

La démonstration du Théorème 6.3.1 sera effectuée dans plusieurs étapes. A cet effet, nous assumons dans la suite que les hypothèses du Théorème 6.3.1 sont satisfaites; ci-après, C est une constante positive générique qui peut dépendre des données du problème mais elle est indépendante du temps, dont la valeur peut changer d'un endroit à l'autre. Pour la simplicité, nous supprimons dans ce qui suit la dépendance explicite des diverses fonctions sur $x \in \Omega \cup \Gamma$.

Dans la première étape nous considérons le problème auxiliaire suivant pour le champ de déplacement, dans lequel $\eta \in L^2(0, T; V')$ est donné.

Problème $\mathcal{P}_{u_\eta}^4$. Trouver le champ des déplacements $u_\eta : [0, T] \rightarrow V$ tels que

$$\langle \ddot{u}_\eta(t), v \rangle_{V' \times V} + (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_\eta(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + \langle \eta(t), v \rangle_{V' \times V} = \langle F(t), v \rangle_{V' \times V}, \quad \forall v \in V. \quad (6.3.7)$$

$$u_\eta(0) = u_0, \quad \dot{u}_\eta(0) = w_0. \quad (6.3.8)$$

Lemme 6.3.1 . *Il existe une solution unique du problème $\mathcal{P}_{u_\eta}^4$ et cela satisfait (6.3.1). En outre, si u_i représente la solution du problème $\mathcal{P}_{u_\eta}^4$ pour $\eta_i \in L^2(0, T; V')$, $i = 1, 2$, alors il existe $C > 0$ tel que*

$$\int_0^t \|\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)\|_V^2 ds \leq C \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{V'}^2 ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (6.3.9)$$

Démonstration. Voir la démonstration du Lemme 3.3.1. Pour démontrer (6.3.9) nous pouvons suivre une démarche semblable à celle de la preuve (3.3.46). $\square$

Nous utilisons maintenant la solution u_η obtenue dans le Lemme 6.3.1 pour construire le problème auxiliaire suivant pour le champ de potentiel électrique.

Problème $\mathcal{P}_{\varphi_\eta}^4$. Trouver un champ de potentiel électrique $\varphi_\eta : [0, T] \rightarrow W$ tel que

$$(\mathcal{C}\nabla\varphi_\eta(t), \nabla\phi)_H - (\mathcal{E}\varepsilon(u_\eta(t)), \nabla\phi)_H + h((u(t), \varphi(t)), \phi) = (q(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W, t \in [0, T]. \quad (6.3.10)$$

Nous avons le résultat suivant d'existence et d'unicité.

Lemme 6.3.2 *Il existe une solution unique du problème $\mathcal{P}_{\varphi_\eta}^4$ et cela satisfait la régularité (6.3.2). De plus si φ_{η_1} et φ_{η_2} sont deux solutions de (6.3.10) correspondantes à $\eta_1, \eta_2 \in L^2(0, T; V')$ alors il existe $C > 0$ tel que*

$$\|\varphi_{\eta_1}(t) - \varphi_{\eta_2}(t)\|_W \leq C \|u_{\eta_1}(t) - u_{\eta_2}(t)\|_V, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (6.3.11)$$

Démonstration. Soit $t \in [0, T]$. Nous utilisons le théorème de représentation de Riesz-réchet pour définir l'opérateur $A_\eta(t) : W \rightarrow W$ par

$$(A_\eta(t)\varphi, \phi)_W = (\mathcal{C}\nabla\varphi, \nabla\phi)_W - (\mathcal{E}\varepsilon(u_\eta(t)), \nabla\phi)_W + (h(u_\eta(t), \varphi), \phi)_W, \quad (6.3.12)$$

pour tout $\varphi, \phi \in W$. Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in W$, nous utilisons les hypothèses (6.1.18) et (6.1.33) pour trouver

$$\begin{aligned} & (A_\eta(t)\varphi_1 - A_\eta(t)\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2)_W \\ & \geq m_C \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W^2 + \int_{\Gamma_C} \psi(u_{\eta\nu}(t) - l)[\delta(\varphi_1 - \varphi_0) - \delta(\varphi_2 - \varphi_0)](\varphi_1 - \varphi_2) da, \end{aligned}$$

et, par l'hypothèse (6.1.21)(a) combinée avec la monotonie de la fonction δ définie par (1.4.5), nous obtenons

$$(A_\eta(t)\varphi_1 - A_\eta(t)\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2)_W \geq m_C \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W^2. \quad (6.3.13)$$

D'un autre côté, en utilisant de nouveau (6.1.17), (6.1.18), (6.1.21) et (6.1.33) nous avons

$$\begin{aligned} & (A_\eta(t)\varphi_1 - A_\eta(t)\varphi_2, \phi)_W \\ & \leq C_\mathcal{E} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \|\phi\|_W + \int_{\Gamma_C} M_\psi \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \|\phi\|_W da, \quad \forall \phi \in W, \end{aligned} \quad (6.3.14)$$

où $C_\mathcal{E}$ représente une constante positive qui dépend du tenseur piézoélectrique $\mathcal{E}$. Il s'ensuit de (6.3.14) et (2.1.17) que

$$(A_\eta(t)\varphi_1 - A_\eta(t), \phi)_W \leq (C_\mathcal{E} + M_\psi C_0^2) \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \|\phi\|_W,$$

ce qui implique que

$$\|A_\eta(t)\varphi_1 - A_\eta(t)\|_W \leq (C_\mathcal{E} + M_\psi C_0^2) \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W. \quad (6.3.15)$$

Les inégalités (6.3.13) et (6.3.15) montrent que l'opérateur $A_\eta(t)$ est fortement monotone et de Lipschitz sur W ; donc, en utilisant un résultat standard sur les égalités variationnelles, il s'ensuit qu'il existe un unique élément $\varphi_\eta(t) \in W$ tel que

$$A_\eta(t)\varphi_\eta(t) = q(t). \quad (6.3.16)$$

Nous combinons maintenant (6.3.12) et (6.3.16) pour deduire que $\varphi_\eta(t) \in W$ est l'unique solution de l'équation variationnelle (6.3.10).

Nous prouvons maintenant dire que $\varphi_\eta \in W^{1,p}(0, T; W)$. A cette fin, considérons $t_1, t_2 \in [0, T]$ et, pour raison de simplicité, nous écrivons $\varphi_\eta(t_i) = \varphi_i$, $u_{\eta\nu}(t_i) = u_i$, $q(t_i) = q_i$, pour $i = 1, 2$. Moyennant (6.3.10), (6.1.17), (6.1.18) et (6.1.33) nous dérivons l'inégalité

$$\begin{aligned} m_C \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W^2 &\leq C_\varepsilon \|u_1 - u_2\|_V \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W + \|q_1 - q_2\|_W \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \\ &+ \int_{\Gamma_C} |\psi(u_1 - g)\delta(\varphi_1 - \varphi_0) - \psi(u_2 - g)\delta(\varphi_2 - \varphi_0)| |\varphi_1 - \varphi_2| da. \end{aligned} \quad (6.3.17)$$

Nous utilisons les bornes $|\psi(u_i - l)| \leq M_\psi$, $|\delta(\varphi_i - \varphi_0)| \leq L_\delta$, les propriétés des fonctions ψ , δ et l'inégalité (2.1.17), on obtient

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma_C} |\psi(u_1 - l)\delta(\varphi_1 - \varphi_0) - \psi(u_2 - l)\delta(\varphi_2 - \varphi_0)| |\varphi_1 - \varphi_2| da \\ &\leq M_\psi \int_{\Gamma_C} |\varphi_1 - \varphi_2|^2 da + L_\psi L_\delta \int_{\Gamma_C} |u_1 - u_2| |\varphi_1 - \varphi_2| da \\ &\leq M_\psi C_0^2 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W^2 + L_\psi L_\delta C_0 \tilde{C}_0 \|u_1 - u_2\|_V \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W. \end{aligned}$$

Nous remplaçons cette dernière inégalité dans (6.3.17) et trouver que

$$m_C \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \leq (C_\varepsilon + L_\psi L_\delta C_0 \tilde{C}_0) \|u_1 - u_2\|_V + \|q_1 - q_2\|_W + M_\psi C_0^2 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W. \quad (6.3.18)$$

Il s'ensuit maintenant de l'inégalité (6.3.18) et l'hypothèse de petitesse (6.1.31) que

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \leq C(\|u_1 - u_2\|_V + \|q_1 - q_2\|_W). \quad (6.3.19)$$

où C est une constante positive. Comme $q \in W^{1,p}(0, T; W)$ et $u_\eta \in C^1([0, T]; H)$, l'inégalité (6.3.19) implique que $\varphi_\eta \in W^{1,p}(0, T; W)$.

Soit maintenant $\eta_1, \eta_2 \in L^2(0, T; V')$ et pour simplicité, notons $\varphi_{\eta_i} = \varphi_i$, $u_{\eta_i} = u_i$, $i = 1, 2$. Nous utilisons (6.3.10) et moyennant des arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve de (6.3.18) pour obtenir que

$$\begin{aligned} m_C \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W &\leq (C_\varepsilon + L_\psi L_\delta C_0 \tilde{C}_0) \|u_1(t) - u_2(t)\|_V \\ &+ M_\psi C_0^2 \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W, \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité combinée avec l'hypothèse de petitesse sur la fonction ψ (6.1.31) mènent à (6.3.11), ce qui achève la preuve. $\square$

Dans la troisième étape, nous utilisons encore la solution u_η obtenue dans le Lemme 6.3.1 ; notons par $u_{\eta\nu}$ et $u_{\eta\tau}$ ses composantes normales et tangentielles, respectivement, et construisons le problème de Cauchy suivant pour le champ d'adhésion.

Problème $\mathcal{P}_{\beta_\eta}^4$. Trouver le champ d'adhésion $\beta_\eta : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ tels que

$$\dot{\beta}_\eta(t) = -[\beta_\eta(t)(\gamma_\nu R_\nu(u_{\eta\nu}(t))^2 + \gamma_\tau \|R_\tau(u_{\eta\tau}(t))\|^2) - \varepsilon_a]_+, \quad (6.3.20)$$

$$\beta_\eta(0) = \beta_0. \quad (6.3.21)$$

Lemme 6.3.3 . *Le problème $\mathcal{P}_{\beta_\eta}^4$ possède une solution unique qui satisfait la régularité $\beta_\eta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Z}$*

La démonstration du Lemme 6.3.3 est similaire à celle du Lemme 3.3.2. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à voir la preuve (page 54).

Dans la quatrième étape, nous considérons le problème auxiliaire suivant pour le champ d'endommagement dans lequel $\mu \in L^2(0, T; Y')$ est donné.

Problème $\mathcal{P}_{\alpha_\mu}^4$. Trouver le champ d'endommagement $\alpha_\mu : [0, T] \rightarrow Y$ tels que

$$\alpha_\mu(t) \in K, \langle \dot{\alpha}_\mu(t), \xi - \alpha_\mu \rangle_{Y' \times Y} + a(\alpha_\mu(t), \xi - \alpha_\mu(t)) \quad (6.3.22)$$

$$\geq \langle \mu(t), \xi - \alpha_\mu(t) \rangle_{Y' \times Y}, \quad \forall \xi \in K \text{ p.p. } t \in [0, T],$$

$$\alpha_\mu(0) = \alpha_0. \quad (6.3.23)$$

Lemme 6.3.4 . *Pour tout $\mu \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, il existe une unique solution α_μ du problème auxiliaire $\mathcal{P}_{\alpha_\mu}^4$ satisfait (6.3.4).*

Démonstration. D'après la définition (6.1.27), on peut démontrer que l'opérateur $A_\mu : Y \rightarrow Y'$ défini comme suit $\langle A_\mu \zeta, \xi \rangle_{Y' \times Y} = a(\zeta, \xi)$ est linéaire, symétrique, continu et satisfait la condition (2.4.3) et comme $\alpha_0 \in K$; donc, en appliquant le Théorème 2.4.2 on démontre que $\alpha_\mu \in L^2(0, T; Y) \cap C(0, T; L^2(\Omega))$ et $\dot{\alpha}_\mu \in L^2(0, T; Y')$.

Dans cette étape, nous utilisons les solutions u_η et α_μ obtenues dans les Lemmes 6.3.1 et 6.3.4 et construisons le problème suivant pour le champ des contraintes.

Problème $\mathcal{P}_{\sigma_{\eta,\mu}}^4$. Trouver le champ des contraintes $\sigma_{\eta,\mu} : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$ tel que

$$\sigma_{\eta,\mu}(t) = \mathcal{B}\varepsilon(u_\eta(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma_{\eta,\mu}(s), \varepsilon(u_\eta(s)), \alpha_\mu(s)) ds \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \quad (6.3.24)$$

Lemme 6.3.5 *Il existe une unique solution du problème $\mathcal{P}_{\eta,\mu}^4$ et elle satisfait $\sigma \in L^2(0, T; \mathcal{H})$.*

De plus, si $u_{\eta_i}, \alpha_{\mu_i}$ et σ_{η_i,μ_i} représentent les solutions des problèmes $\mathcal{P}_{u_{\eta_i}}^4$, $\mathcal{P}_{\alpha_{\mu_i}}^4$ et $\mathcal{P}_{\sigma_{\eta_i,\mu_i}}^4$, respectivement, pour $(\eta_i, \mu_i) \in L^2(0, T; V' \times Y')$, $i = 1, 2$, alors il existe $C > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \|\sigma_{\eta_1,\mu_1}(t) - \sigma_{\eta_2,\mu_2}(t)\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq C \left(\int_0^t (\|\dot{u}_{\eta_1}(s) - \dot{u}_{\eta_2}(s)\|_V^2 + \|u_{\eta_1}(s) - u_{\eta_2}(s)\|_V^2 \right. \\ &\quad \left. + \|\alpha_{\mu_1}(s) - \alpha_{\mu_2}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2) ds \right), \quad \forall t \in [0, T] \end{aligned} \quad (6.3.25)$$

Démonstration. Soit $\Lambda_{\eta,\mu} : L^2(0, T; \mathcal{H}) \rightarrow L^2(0, T; \mathcal{H})$ être l'opérateur donné par

$$\Lambda_{\eta,\mu}\sigma(t) = \mathcal{B}\varepsilon(u_\eta(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s), \varepsilon(u_\eta(s)), \alpha_\mu(s)) ds. \quad (6.3.26)$$

pour tout $\sigma \in L^2(0, T; \mathcal{H})$ et $t \in [0, T]$. Pour $\sigma_1, \sigma_2 \in L^2(0, T; \mathcal{H})$, nous utilisons (6.3.26) et (4.1.13), on obtient pour tout $t \in [0, T]$

$$\|\Lambda_{\eta,\mu}\sigma_1(t) - \Lambda_{\eta,\mu}\sigma_2(t)\|_{\mathcal{H}} \leq L_G \int_0^t \|\sigma_1(s) - \sigma_2(s)\|_{\mathcal{H}} ds. \quad (6.3.27)$$

Ce qui implique, pour n suffisamment grand, que l'opérateur $\Lambda_{\eta,\mu}^n$ est une contraction dans l'espace de Banach $L^2(0, T; \mathcal{H})$. Ainsi, il existe un élément unique $\sigma_{\eta,\mu} \in L^2(0, T; \mathcal{H})$ telle que $\Lambda_{\eta,\mu}\sigma_{\eta,\mu} = \sigma_{\eta,\mu}$, qui représente l'unique solution du problème $\mathcal{P}_{\eta,\mu}^4$.

En outre, si $u_{\eta_i}, \alpha_{\mu_i}$ et σ_{η_i,μ_i} représentent les solutions de problèmes $\mathcal{P}_{u_{\eta_i}}^4$, $\mathcal{P}_{\alpha_{\mu_i}}^4$ et $\mathcal{P}_{\sigma_{\eta_i,\mu_i}}^4$, respectivement, pour $i = 1, 2$; en utilisant (2.1.8), (3.1.15), (4.1.13), l'inégalité de Young et le lemme de Gronwall, on obtient l'inégalité (6.3.25). $\square$

Considérons maintenant, pour $t \in [0, T]$, l'opérateur $\Lambda : L^2(0, T; V' \times Y') \rightarrow L^2(0, T; V' \times Y')$, défini par

$$\Lambda(\eta(t), \mu(t)) = (\Lambda_0(\eta(t), \mu(t)), \Lambda_1(\eta(t), \mu(t))) \in V' \times Y' \quad (6.3.28)$$

où les opérateurs Λ_0 et Λ_1 sont donnés par

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_0(\eta(t), \mu(t)), v \rangle_{V' \times V} &= (\mathcal{B}\varepsilon(u_\eta(t)) + \mathcal{E}^* \nabla \varphi_\eta(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j_{acn}(\beta_\eta(t), u_\eta(t), v) \\ &+ \left(\int_0^t \mathcal{G}(\sigma_{\eta, \mu}(s), \varepsilon(u_\eta(s)), \alpha_\mu(s)) ds, \varepsilon(v) \right)_{\mathcal{H}}, \quad \forall v \in V, \end{aligned} \quad (6.3.29)$$

$$\Lambda_1(\eta(t), \mu(t)) = S(\sigma_{\eta, \mu}(t), \varepsilon(u_\eta(t)), \alpha_\mu(t)) \quad (6.3.30)$$

Dans la dernière étape, nous montrons que l'opérateur Λ possède un point fixe unique.

Lemme 6.3.6 *Il existe un élément unique $(\eta^*, \mu^*) \in L^2(0, T; V' \times Y')$ telle que*

$$\Lambda(\eta^*, \mu^*) = (\eta^*, \mu^*).$$

Démonstration. Soient $(\eta_1, \mu_1), (\eta_2, \mu_2) \in L^2(0, T; V' \times Y')$, nous utilisons les notations u_i, β_i, α_i et σ_i pour les fonctions $u_{\eta_i}, \varphi_{\eta_i}, \beta_{\eta_i}, \alpha_{\mu_i}$ et σ_{η_i, μ_i} obtenues dans les Lemmes 6.3.1, 6.3.2, 6.3.3, 6.3.4 et 6.3.5, respectivement et notons encore $\dot{u}_{\eta_i} = \dot{u}_i, \ddot{u}_{\eta_i} = \ddot{u}_i$ pour $i = 1, 2$, nous avons

$$\begin{aligned} \|\Lambda_0(\eta_1(t), \mu_1(t)) - \Lambda_0(\eta_2(t), \mu_2(t))\|_{V'}^2 &\leq \|\mathcal{B}\varepsilon(u_1(t)) - \mathcal{B}\varepsilon(u_2(t))\|_{\mathcal{H}}^2 + \|\mathcal{E}^* \nabla \varphi_1(t) - \mathcal{E}^* \nabla \varphi_2(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &+ \int_0^t \|\mathcal{G}(\sigma_1(s), \varepsilon(u_1(s)), \alpha_1(s)) - \mathcal{G}(\sigma_2(s), \varepsilon(u_2(s)), \alpha_2(s))\|_{\mathcal{H}}^2 ds \\ &+ C(\|p_\nu(u_{1\nu}(t)) - p_\nu(u_{2\nu}(t))\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 + \|\beta_1^2(t)R_\nu(u_{1\nu}(t)) - \beta_2^2(t)R_\nu(u_{2\nu}(t))\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \\ &+ \|p_\tau(\beta_1(t))\|R_\tau(u_{1\tau}(t))\| - p_\tau(\beta_2(t))\|R_\tau(u_{2\tau}(t))\|_{L^2(\Gamma_3)}^2), \end{aligned}$$

En utilisant les hypothèses (3.1.14), (3.1.16), (4.1.13), (3.1.19), (3.1.20) et (2.1.8) avec la définition de R_η et R_τ et la Remarque 1.3.1, et gardant en tête (6.3.11) et (6.3.25), on obtient

$$\begin{aligned} &\|\Lambda_0(\eta_1(t), \mu_1(t)) - \Lambda_0(\eta_2(t), \mu_2(t))\|_{V'}^2 \\ &\leq C \left(\int_0^t (\|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 + \|\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)\|_{V'}^2 + \|\alpha_1(s) - \alpha_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2) ds \right. \\ &\quad \left. + \|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 + \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \right). \end{aligned} \quad (6.3.31)$$

On utilise des arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve de (3.3.50), l'estimation (6.3.31) dévient

$$\|\Lambda_0(\eta_1(t), \mu_1(t)) - \Lambda_0(\eta_2(t), \mu_2(t))\|_{V'}^2 \leq C(\|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_{V'}^2 + \|\mu_1(t) - \mu_2(t)\|_{Y'}^2). \quad (6.3.32)$$

Nous pouvons encore suivre des démarches semblables à celles utilisées dans la preuve de (3.3.52) pour obtenir

$$\|\Lambda_1(\eta_1(t), \mu_1(t)) - \Lambda_1(\eta_2(t), \mu_2(t))\|_{Y'}^2 \leq C(\|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_{V'}^2 + \|\mu_1(t) - \mu_2(t)\|_{Y'}^2). \quad (6.3.33)$$

D'après (6.3.32) et (6.3.33), nous concluons qu'il existe une constante positive $C > 0$ vérifiant

$$\|\Lambda(\eta_1, \mu_1) - \Lambda(\eta_2, \mu_2)\|_{L^2(0,T;V' \times Y')} \leq C\|(\eta_1 - \eta_2, \mu_1 - \mu_2)\|_{L^2(0,T;V' \times Y')}, \quad (6.3.34)$$

On fait une itération sur cette dernière inégalité n fois pour trouver

$$\|\Lambda^n(\eta_1, \mu_1) - \Lambda^n(\eta_2, \mu_2)\|_{L^2(0,T;V' \times Y')} \leq \frac{C^n}{n!} \|(\eta_1 - \eta_2, \mu_1 - \mu_2)\|_{L^2(0,T;V' \times Y')}. \quad (6.3.35)$$

Nous savons que la suite $(C^n/n!)_n$ converge vers 0, pour n assez grand $\frac{C^n}{n!} < 1$. Il signifie que Λ^n est une contraction de $L^2(0,T;V' \times Y')$. Par conséquent, le théorème de point fixe de Banach montre que Λ admet un point fixe unique $(\eta^*, \mu^*) \in L^2(0,T;V' \times Y')$. $\square$

Maintenant, nous avons tous les ingrédients pour fournir la preuve du Théorème 2.4.1.

Démonstration du Théorème 6.3.1.

Soit $(\eta^*, \mu^*) \in L^2(0,T;V' \times Y')$ le point fixe de Λ qui est défini par (6.3.28)-(6.3.30) nous adoptons les notations

$$(a) \ u_* = u_{\eta^*} \quad (b) \ \beta_* = \beta_{\eta^*} \quad (c) \ \varphi_* = \varphi_{\eta^*} \quad (6.3.36)$$

$$(a) \ \sigma_* = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_*) + \mathcal{E}^* \nabla \varphi_* + \sigma_{\eta^* \mu^*}, \quad (b) \ \alpha_* = \alpha_{\mu^*}. \quad (6.3.37)$$

Nous montrons que $(u_*, \sigma_*, \varphi_*, \beta_*, \alpha_*)$ est une solution unique du problème variationnelle $\mathcal{P}_V^4$ et satisfait la régularité (6.3.1)-(6.3.5). En effet, nous écrivons (6.3.24) pour $\eta = \eta^*, \mu = \mu^*$, en

utilisant (6.3.36) et (6.3.37) on obtient

$$\begin{aligned} \sigma_*(t) &= \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_*(t)) + \mathcal{B}\varepsilon(u_*(t)) + \mathcal{E}^*\nabla\varphi_*(t) \\ &+ \int_0^t \mathcal{G}(\sigma_*(s) - \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}_*(s))) - \mathcal{E}^*\nabla\varphi_*(s), \varepsilon(u_*(s)), \alpha_*(s))ds \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \end{aligned} \quad (6.3.38)$$

et nous considérons (6.3.7) avec $\eta = \eta^*$ et en utilisant (6.3.36)(a) pour trouver que

$$\begin{aligned} \langle \ddot{u}_*, v \rangle_{V' \times V} + (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_*(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + \langle \eta^*(t), v \rangle_{V' \times V} &= \langle F(t), v \rangle_{V' \times V} \\ \forall v \in V, \text{ p.p. } t \in (0, T), \end{aligned} \quad (6.3.39)$$

et nous écrivons (6.3.22) avec $\mu = \mu^*$ et en utilisant (6.3.37)(b) pour trouver que

$$\alpha_*(t) \in K, \quad \langle \dot{\alpha}_*(t), \xi - \alpha_* \rangle_{Y' \times Y} + a(\alpha_*(t), \xi - \alpha_*(t)) \geq \langle \mu^*(t), \xi - \alpha_*(t) \rangle_{Y' \times Y}, \quad (6.3.40)$$

aussi nous écrivons (6.3.10) pour $\eta = \eta^*$ et en employant (6.3.36)(a) et (6.3.36)(c) de voir que

$$\begin{aligned} (B\nabla\varphi_*(t), \nabla\phi)_H - (\mathcal{E}\varepsilon(u_*(t)), \nabla\phi)_H \\ + h((u_*(t), \varphi_*(t)), \phi) = (q(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W, t \in (0, T), \end{aligned} \quad (6.3.41)$$

maintenant, nous considérons (6.3.20) où $\eta = \eta^*$ et nous utilisons (6.3.36)(a) et (6.3.36)(b) pour obtenir que

$$\dot{\beta}_* = -[\beta_*(\gamma_\nu R_\nu(u_{*\nu})^2 + \gamma_\tau \|R_\tau(u_{*\tau})\|^2) - \varepsilon_a]_+. \quad (6.3.42)$$

Les égalités $\Lambda_0(\eta^*, \mu^*) = \eta^*$ et $\Lambda_1(\eta^*, \mu^*) = \mu^*$ combinés avec (6.3.29), (6.3.30), (6.3.36) et (6.3.37) montrent que

$$\begin{aligned} \langle \eta^*(t), v \rangle_{V' \times V} &= (\mathcal{B}\varepsilon(u_*(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_*(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j_{acn}(\beta_*(t), u_*(t), v) \\ &+ \left(\int_0^t \mathcal{G}(\sigma_*(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_*(s)) - \mathcal{E}^*\nabla\varphi_*(s), \varepsilon(u_*(s)), \alpha_*(s))ds, \varepsilon(v) \right)_{\mathcal{H}} \quad \forall v \in V, \end{aligned} \quad (6.3.43)$$

$$\mu^*(t) = S(\sigma_*(t) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_*(t)) - \mathcal{E}^*\nabla\varphi_*(t), \varepsilon(u_*(t)), \alpha_*(t)). \quad (6.3.44)$$

Puisque (u_*, φ_*) satisfait (6.3.1)-(6.3.2) et de (6.3.38) trouvons que

$$\sigma_* \in L^2(0, T; \mathcal{H}). \quad (6.3.45)$$

Nous choisissons $v \in D(\Omega)$ dans (6.3.39), en utilisant (6.3.38) et (6.1.28) pour obtenir que

$$\rho \ddot{u}_*(t) = \text{Div } \sigma_*(t) + f_0(t) \quad \text{dans } V' \quad \forall t \in (0, T). \quad (6.3.46)$$

D'après l'égalité (6.3.46) avec (3.1.21), (6.1.22), (6.3.1) et (6.3.45) on obtient

$$\text{Div } \sigma_* \in L^2(0, T; V').$$

Enfin, nous concluons que la solution faible $(u_*, \sigma_*, \varphi_*, \beta_*, \alpha_*)$ du problème de contact piezoelectrique $\mathcal{P}^4$ ayant la régularité (6.3.1)-(6.3.5), en ce qui termine la preuve de la partie d'existence du Théorème 6.3.1. L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité de point fixe de l'opérateur Λ qui est défini par (6.3.28)-(6.3.30).

Chapitre 7

Problème électro-viscoélastique de contact bilatéral avec frottement de Tresca

Nous considérons un problème dynamique entre un corps piézoélectrique et un obstacle isolateur. Les conditions de contact sont de type bilatérale et avec frottement de Tresca. Le comportement du matériau est modélisé avec une loi constitutive électro-viscoélastique avec endommagement. On obtient des résultats d'existence et d'unicité en se basant sur des techniques similaires à celle utilisées dans le chapitre précédent.

7.1 Position du problème électro-mécanique et hypothèses

Nous nous plaçons dans le cadre physique n°2 de la figure 1.1 (page 6). On considère que le corps est électro-viscoélastique, plus exactement on utilise une loi de comportement de la forme (1.2.12). En ce qui concerne le contact, on le modélise par une condition de contact bilatéral avec frottement de Tresca. Sous ces considérations, le problème électro-mécanique qu'on étudie peut être formulée de la manière suivante

Problème $\mathcal{P}^5$. Trouver un champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, un champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, un champ de potentiel électrique $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, un champ des

déplacements électriques $D : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, ainsi qu'un champ d'endommagement $\alpha : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{B}(\varepsilon(u(t)), \alpha(t)) - \mathcal{E}^*E(\varphi(t)) \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (7.1.1)$$

$$D = \mathcal{E}\varepsilon(u) + \mathcal{C}E(\varphi) \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (7.1.2)$$

$$\dot{\alpha} - \Delta\alpha + k_1\partial\chi_K(\alpha) \ni S(\varepsilon(u), \alpha) \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (7.1.3)$$

$$\text{Div } \sigma + f_0 = \rho\ddot{u} \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (7.1.4)$$

$$\text{div } D - q_0 = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (7.1.5)$$

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (7.1.6)$$

$$\sigma\nu = f_2 \text{ sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (7.1.7)$$

$$\begin{cases} u_\nu = 0, & \|\sigma_\tau\| \leq g \\ \|\sigma_\tau\| < g \Rightarrow \dot{u}_\tau = 0 \\ \|\sigma_\tau\| = g \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \text{ telle que } \sigma_\tau = -\lambda\dot{u}_\tau \end{cases} \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (7.1.8)$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\nu} = 0 \text{ sur } \Gamma \times (0, T), \quad (7.1.9)$$

$$\varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_a \times (0, T), \quad (7.1.10)$$

$$D \cdot \nu = q_2 \text{ sur } \Gamma_b \times (0, T), \quad (7.1.11)$$

$$u(0) = u_0, \dot{u}(0) = w_0, \alpha(0) = \alpha_0 \text{ dans } \Omega. \quad (7.1.12)$$

Rappelons que les équations (7.1.1) et (7.1.2) représentent la loi de comportement électro-viscoélastique avec endommagement que nous avons déjà introduite dans (1.2.12), où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont les opérateurs de viscosité et d'élasticité à champs électriques nuls, $\mathcal{E} = (e_{ijk})$ le tenseur piézo-électrique à champ constant ou nul, $\mathcal{C} = (c_{ij})$ le tenseur de la primitivité électrique à déformation nulle et $E(\varphi) = -\nabla\varphi$ représente le champ électrique, l'évolution du champ d'endommagement est régi par inclusion du type parabolique donnée par la relation (7.1.3). Les équations (7.1.4) et (7.1.5) sont les équations du mouvement écrite pour le champ de contrainte et d'équilibre et pour le champ de déplacement électrique, que nous avons déjà vu dans (1.1.5) et (1.1.8), les

conditions (7.1.6) et (7.1.7) sont les conditions aux limites classiques de déplacement et traction. Nous passons maintenant à la condition (7.1.8). Nous supposons que le contact est bilatérale avec frottement de Tresca, où g désigne la limite de seuil de frottement, qui est supposée dépendre uniquement de chaque point de Γ_3 . $\dot{u}_\tau$ désigne la vitesse tangentielle et σ_τ représente la contrainte tangentielle. L'inégalité forte est vérifiée dans la zone de blocage, et l'égalité dans la zone de glissement. La relation (7.1.9) représente un état de frontière homogène de Neumann, où $\frac{\partial \alpha}{\partial \nu}$ représente la dérivée normale de α . (7.1.10) et (7.1.11) sont les conditions aux limites électriques. Finalement (7.1.12) représente les champs de déplacement, de vitesse et d'endomagement initiales.

Pour obtenir une formulation variationnelle du problème $\mathcal{P}^4$ nous nous plaçons dans le cadre fonctionnel (page 5). Nous avons besoin des notations supplémentaires. Pour les conditions de frottement, nous définissons l'espace des déplacements admissibles V_1 comme un sous-espace fermé de H_1

$$V_1 = \{v \in H_1 \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \text{ et } v_\nu = 0 \text{ sur } \Gamma_3\}. \quad (7.1.13)$$

Ensuite, l'inégalité de Korn sur V_1 est vérifiée, alors, il existe une constante $C_K > 0$ dépendant uniquement de Ω et Γ_1 telle que

$$\|\varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}} \geq C_K \|v\|_{H_1}, \quad \forall v \in V_1 \quad (7.1.14)$$

Sur l'espace V_1 , nous considérons le produit scalaire donné par

$$(u, v)_{V_1} = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in V_1, \quad (7.1.15)$$

et soit $\|\cdot\|_{V_1}$ la norme associée, i.e.

$$\|v\|_{V_1} = \|\varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}}, \quad v \in V_1. \quad (7.1.16)$$

Par l'inégalité de Korn, il vient que $\|\cdot\|_{H_1}$ et $\|\cdot\|_{V_1}$ sont des normes équivalentes sur V_1 et ainsi $(V_1, \|\cdot\|_{V_1})$ est un espace de Hilbert. En outre, par le Théorème de trace de Sobolev il existe une

constante C_0 dépend uniquement de Ω , Γ_1 et Γ_3 telle que

$$\|v\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq C_0 \|v\|_{V_1}, \quad \forall v \in V_1. \quad (7.1.17)$$

Et d'autre part, nous avons encore besoin d'introduire quelques hypothèses sur les données.

L'opérateur d'élasticité $\mathcal{B} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_{\mathcal{B}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad \|\mathcal{B}(x, \varepsilon_1, \alpha_1) - \mathcal{B}(x, \varepsilon_2, \alpha_2)\| \leq L_{\mathcal{B}} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| + |\alpha_1 - \alpha_2| \\ \quad \text{pour tout } \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ pour tout } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ \text{(b) L'application } x \mapsto \mathcal{B}(x, \varepsilon, \alpha) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega \\ \quad \text{pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{R}. \\ \text{(c) L'application } x \mapsto \mathcal{B}(x, 0, 0) \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (7.1.18)$$

La fonction source d'endommagement $S : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_S > 0 \text{ tels que} \\ \quad |S(x, \varepsilon_1, \alpha_1) - S(x, \varepsilon_2, \alpha_2)| \leq L_S (\|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| + |\alpha_1 - \alpha_2|) \\ \quad \text{pour tout } \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ pour tout } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ \text{(b) L'application } x \mapsto S(x, \varepsilon, \alpha) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega \\ \quad \text{pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{R}. \\ \text{(c) L'application } x \mapsto S(x, 0, 0) \in L^2(\Omega). \end{array} \right. \quad (7.1.19)$$

En plus les hypothèses (3.1.14), (6.1.17) et (6.1.18) sur les opérateurs $\mathcal{A}$, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{C}$, respectivement, que nous venons de voir dans les chapitres précédents .

La masse volumique satisfait

$$\rho \in L^\infty(\Omega), \text{ Il existe } \rho^* > 0 \text{ telle que } \rho(x) \geq \rho^*, \text{ p.p. } x \in \Omega. \quad (7.1.20)$$

La seuil de frottement g satisfait

$$g \in L^\infty(\Gamma_3), \quad g \geq 0 \text{ sur } \Gamma_3. \quad (7.1.21)$$

Les forces volumiques f_0 , les tractions surfaciques f_2 et les densités des charges électriques volumiques q_0 et surfaciques q_2 vérifient

$$f_0 \in L^2(0, T; H), \quad f_2 \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2)^d), \quad (7.1.22)$$

$$q_0 \in C(0, T; L^2(\Omega)), \quad q_2 \in C(0, T; L^2(\Gamma_b)), \quad (7.1.23)$$

$$q_2(t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (7.1.24)$$

Rappelons que l'hypothèse (7.1.24) est de nature physique et elle est considérée ici pour modéliser le fait que la base est supposée être isolatrice.

Les champs initiales des déplacements, de vitesse, et d'endommagement satisfont

$$u_0 \in V_1, \quad w_0 \in V_1, \quad \alpha_0 \in K. \quad (7.1.25)$$

Enonçons maintenant quelques définitions qui vont être utilisées dans la suite de ce chapitre, d'abord nous définissons la forme bilinéaire $a : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$a(\xi, \varphi) = k_1 \int_{\Omega} \nabla \xi \cdot \nabla \varphi \, dx. \quad (7.1.26)$$

Nous utiliserons le produit scalaire modifié sur $H = L^2(\Omega)^d$, donné par

$$((u, v))_H = (\rho u, v)_H, \quad \forall u, v \in H. \quad (7.1.27)$$

Soit $\|\cdot\|_H$ une norme associée, i.e

$$|||v|||_H = (\rho v, v)_H^{\frac{1}{2}}, \quad \forall v \in H. \quad (7.1.28)$$

En utilisant l'hypothèse (7.1.20), il vient que $|||\cdot|||_H$ et $\|\cdot\|_H$ sont des normes équivalentes sur H . De plus l'inclusion de la trace de $(V_1, \|\cdot\|_{V_1})$ dans $(H, |||\cdot|||_H)$ est continue et dense.

Nous utilisons la notation $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V'_1 \times V_1}$ pour représenter le produit de dualité entre V'_1 et V_1 , où V'_1 le dual de V_1 . Identifiant le dual de H avec lui même, donc nous pouvons écrire le Triple de Gelfand $V_1 \subset H \subset V'_1$, donc nous avons

$$\langle u, v \rangle_{V'_1 \times V_1} = ((u, v))_H \quad \forall u \in H, \forall v \in V_1. \quad (7.1.29)$$

Le théorème de représentation de Riesz-Fréchet entraîne l'existence d'une fonction $F(t) \in V_1'$ définie par

$$\langle F(t), v \rangle_{V_1' \times V_1} = (f_0(t), v)_H + (f_2(t), \gamma v)_{L^2(\Gamma_2)^d} \quad \forall v \in V_1, \quad t \in (0, T). \quad (7.1.30)$$

De même, le théorème de représentation de Riesz-Fréchet entraîne l'existence d'un élément $q(t) \in W$ définie par

$$(q(t), \phi)_W = \int_{\Omega} q_0(t) \phi dx - \int_{\Gamma_b} q_2(t) \phi da \quad \forall \phi \in W, t \in [0, T], \quad (7.1.31)$$

On remarque que les conditions (7.1.22) et (7.1.23) impliquent que

$$F \in L^2(0, T; V_1'), \quad q \in C(0, T; W) \quad (7.1.32)$$

Ensuite, on définit la fonctionnelle $j : V_1 \rightarrow \mathbb{R}$ comme suit

$$j(v) = \int_{\Gamma_3} g \|v_\tau\|_{L^2(\Gamma_3)^d} da. \quad (7.1.33)$$

7.2 Formulation variationnelle

A l'aide des formules de Green (2.1.4), (2.1.18), on obtient la formulation variationnelle du problème $\mathcal{P}^5$ en termes de déplacement, de champ du potentiel électrique et de champ d'endommagement.

Problème $\mathcal{P}_V^5$. Trouver le champ des déplacements $u : [0, T] \rightarrow V_1$, le champ de potentiel électrique $\varphi : [0, T] \rightarrow W$ et le champ d'endommagement $\alpha : [0, T] \rightarrow Y$ tels que

$$\begin{aligned} & \langle \ddot{u}(t), v - \dot{u}(t) \rangle_{V_1' \times V_1} + (\mathcal{A} \varepsilon \dot{u}(t), \varepsilon(v - \dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{B}(\varepsilon(u(t)), \alpha(t)), \varepsilon(v - \dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} \\ & + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi(t), \varepsilon(v - \dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} + j(v) - j(\dot{u}(t)) \geq \langle F(t), v - \dot{u}(t) \rangle_{V_1' \times V_1} \\ & \quad \forall v \in V_1, \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \end{aligned} \quad (7.2.1)$$

$$(\mathcal{C} \nabla \varphi(t), \nabla \phi)_H - (\mathcal{E} \varepsilon(u(t)), \nabla \phi)_H = (q(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W, \quad t \in (0, T), \quad (7.2.2)$$

$$\begin{aligned} & (\dot{\alpha}(t), \xi - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} + a(\alpha(t), \xi - \alpha(t)) \\ & \geq (S(\varepsilon(u(t)), \alpha(t)), \xi - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} \quad \alpha(t) \in K, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall \xi \in K, \end{aligned} \quad (7.2.3)$$

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = w_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0. \quad (7.2.4)$$

7.3 Existence et unicité de la solution

L'existence d'une solution unique du problème variationnel $\mathcal{P}_V^5$ est donnée par le Théorème suivant :

Théorème 7.3.1 . *Supposons que les hypothèses (3.1.14), (6.1.17), (6.1.18) et (7.1.20)-(7.1.25) sont vérifiées. Alors, il existe une solution unique $\{u, \varphi, \alpha\}$ au problème $\mathcal{P}_V^5$ ayant la régularité*

$$u \in W^{1,2}(0, T; V_1) \cap C^1(0, T; H) \cap W^{2,2}(0, T; V_1'), \quad (7.3.1)$$

$$\varphi \in C(0, T; W), \quad (7.3.2)$$

$$\alpha \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; Y). \quad (7.3.3)$$

Un quintuple de fonctions $(u, \varphi, \sigma, D, \alpha)$ qui satisfont (7.1.1), (7.1.2) et (7.3.1)-(7.3.3) s'appelle solution faible du problème de contact électro-viscoélastique $\mathcal{P}^5$. Nous concluons par le Théorème 7.3.1 qu'il existe une unique solution faible du problème $\mathcal{P}^5$. Pour préciser la régularité de la solution faible nous notons que les relations constitutives (7.1.1) et (7.1.2), les hypothèses (6.1.17), (6.1.18) et (7.1.20), et la régularité (7.3.1)-(7.3.3) montrent que $\sigma \in L^2(0, T; \mathcal{H})$ et $D \in C([0, T]; L^2(\Omega)^d)$. Nous prenons $v = \dot{u}(t) \pm z$, où $z \in D(\Omega)^d$ dans (7.2.1) et $\phi \in D(\Omega)$ dans (7.2.2) et utilisant les notations (7.1.30) et (7.1.31) pour obtenir

$$\text{Div } \sigma(t) + f_0 = 0, \quad \text{div } D(t) = q_0(t) \quad \forall t \in [0, T].$$

Il s'ensuit maintenant de la régularité (7.1.22), (7.1.23) que $\text{Div } \sigma \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^d)$ et $\text{div } D \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ ce qui montre

$$\sigma \in L^2(0, T; \mathcal{H}_1). \quad (7.3.4)$$

$$D \in C([0, T]; \mathcal{W}) \quad (7.3.5)$$

Nous concluons que la solution faible $(u, \varphi, \sigma, D, \alpha)$ du problème piézoélectrique de contact $\mathcal{P}^5$ possède la régularité (7.3.1)-(7.3.5).

La preuve du Théorème 7.3.1 sera réalisée en plusieurs étapes. Il est basé sur des arguments des équations et des inéquations de l'évolution non linéaires de premier ordre, et les arguments de point fixe.

Dans la première étape nous considérons le problème auxiliaire suivant pour le champ de déplacement, dans lequel $\eta \in L^2(0, T; V')$ est donné.

Problème $\mathcal{P}_{u_\eta}^5$. Trouver le champ des déplacements $u_\eta : [0, T] \rightarrow V_1$ tel que

$$\begin{aligned} & \langle \ddot{u}_\eta(t), v - \dot{u}(t) \rangle_{V_1' \times V_1} + (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_\eta(t)), \varepsilon(v - \dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} + j(v) - j(\dot{u}(t)) \\ & + \langle \eta(t), v - \dot{u}(t) \rangle_{V_1' \times V_1} \geq \langle F(t), v - \dot{u}(t) \rangle_{V_1' \times V_1}, \quad \forall v \in V_1. \end{aligned} \quad (7.3.6)$$

$$u_\eta(0) = u_0, \quad \dot{u}_\eta(0) = w_0. \quad (7.3.7)$$

Nous définissons $h(t) \in V_1'$ pour p.p. $t \in (0, T)$, par

$$\langle h(t), v \rangle_{V_1' \times V_1} = \langle F_\eta(t), v \rangle_{V_1' \times V_1} = \langle F(t) - \eta(t), v \rangle_{V_1' \times V_1}, \quad \forall v \in V_1. \quad (7.3.8)$$

En utilisant le théorème de représentation de Riesz-Fréchet, nous définissons l'opérateur $A : V_1 \rightarrow V_1'$

$$\langle Au, v \rangle_{V_1' \times V_1} = (\mathcal{A}\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}, \quad u, v \in V, \quad (7.3.9)$$

En utilisant la variable de vitesse $w_\eta = \dot{u}_\eta$, le problème $\mathcal{P}_{u_\eta}^5$ est écrit pour p.p. $t \in (0, T)$:

Problème $\mathcal{P}_{w_\eta}^5$. Trouver le champ des vitesses $w_\eta : [0, T] \rightarrow V_1$ tel que

$$\begin{aligned} & \langle \dot{w}_\eta(t), v - w_\eta(t) \rangle_{V_1' \times V_1} + \langle Aw_\eta(t), v - w_\eta(t) \rangle_{V_1' \times V_1} + j(v) - j(w_\eta(t)) \\ & \geq \langle F_\eta(t), v - w_\eta(t) \rangle_{V_1' \times V_1}, \quad \forall v \in V_1. \end{aligned} \quad (7.3.10)$$

$$w_\eta(0) = w_0. \quad (7.3.11)$$

Pour résoudre le problème $\mathcal{P}_{w_\eta}^5$, nous démontrons le résultat suivant.

Lemme 7.3.1 . *Supposons que les hypothèses (3.1.14) et (7.1.21) sont vérifiées. Alors l'opéra-*

teur A et la fonctionnelle j définis respectivement par (7.3.9) et (7.1.33) satisfont

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \ A : V \rightarrow V' \text{ est un opérateur hemicontinu et fortement monotone,} \\ (b) \ \exists C_1 \geq 0, \ \exists C_2 \geq 0, \ \forall v \in V \ \|Av\|_{V'} \leq C_1 \|v\|_V + C_2, \\ (c) \ \text{pour toute suite } (u_n) \text{ et } u \text{ dans } L^2(0, T; V) \text{ telle que} \\ \quad u_n \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } L^2(0, T; V) \text{ alors} \\ \quad Au_n \rightharpoonup Au \text{ faiblement étoile dans } L^2(0, T; V') \\ \quad \text{et } \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T \langle Au_n(t), u_n(t) \rangle_{V' \times V} dt \geq \int_0^T \langle Au(t), u(t) \rangle_{V' \times V} dt \end{array} \right. \quad (7.3.12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \ j : V \rightarrow \mathbb{R} \text{ est une fonctionnelle convexe et semi-continue,} \\ \quad \text{Il existe une suite des fonctions de } C^1 \text{ et convexe } (j_n) : V \rightarrow \mathbb{R} \text{ tels que} \\ (b) \ \exists d_1 \geq 0, \ \exists d_2 \geq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \|j'_n(v)\|_{V'} \leq d_1 \|v\|_V + d_2, \\ (c) \ \forall v \in L^2(0, T; V), \ \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T j_n(v(t)) dt = \int_0^T j(v(t)) dt, \\ (d) \ \text{pour toute suite } (v_n) \text{ et } v \text{ dans } L^2(0, T; V) \text{ telle que} \\ \quad v_n \rightharpoonup v \text{ faiblement dans } L^2(0, T; V) \text{ alors} \\ \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T j_n(v_n(t)) dt \geq \int_0^T j(v(t)) dt. \end{array} \right. \quad (7.3.13)$$

$j'_n(v)$ désigne la dérivée au sens de Fréchet de j_n en v .

Démonstration. D'après la définition (7.3.9) de l'opérateur A , les hypothèses (3.1.14) et (2.1.8) nous pouvons vérifier que A satisfait les conditions (7.3.12)(a)-(b), et en appliquant le théorème de Lebesgue on déduit la condition (7.3.12)(c).

D'autre part, en utilisant l'injection continue de V_1 dans $L^2(\Gamma_3)^d$ nous trouvons alors que la fonctionnelle j est continue et convexe. Pour approcher la fonction j , nous utilisons la suite des fonctionnelles $(j_n) : V_1 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$j_n(v) = \int_{\Gamma_3} g \sqrt{\|v_\tau\|_{L^2(\Gamma_3)^d}^2 + \exp(-n)} \, da, \quad \forall v \in V_1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Nous vérifions que la dérivée au sens de Fréchet de j_n en v est donnée par

$$\langle j'_n(v), h \rangle_{V'_1 \times V_1} = \int_{\Gamma_3} g \frac{(v_\tau, h_\tau)}{\sqrt{\|v_\tau\|_{L^2(\Gamma_3)^d}^2 + e^{-n}}} da, \quad \forall h \in V_1. \quad (7.3.14)$$

Nous constatons que j_n est continûment différentiable. On peut vérifier que pour tout $a \geq 0$, $b \geq 0$, tels que $a + b = 1$, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$

$$\sqrt{(ax + by)^2 + e^{-n}} \leq a\sqrt{x^2 + e^{-n}} + b\sqrt{y^2 + e^{-n}}. \quad (7.3.15)$$

Alors j_n est convexe pour tout $n \in \mathbb{N}$. En utilisant (7.3.14) il s'ensuit que

$$\exists C \geq 0, \forall v \in V_1, \|j'_n(v)\|_{V'} \leq C\|g\|_{L^\infty(\Gamma_3)},$$

donc (7.3.13)(b) est satisfaite. D'après la définition de j_n on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} j_n(v) = j(v)$ et comme j_n est continue sur V_1 , en appliquant le théorème de Lebesgue, on déduit la propriété (7.3.13)(c). Enfin (7.3.13)(d) est une conséquence du fait que

$$\forall v \in V_1, \forall n \in \mathbb{N}, j_n(v) \geq j(v).$$

Nous concluons que l'opérateur A , les fonctionnelles j et j_n vérifient les conditions (7.3.12) et (7.3.13). $\square$

Lemme 7.3.2 . *Sous les hypothèses (7.3.12) et (7.3.13) et pour tout $\eta \in L^2(0, T; V'_1)$, le problème $\mathcal{P}_{w_\eta}^5$ a une solution unique ayant la régularité*

$$w_\eta \in C(0, T; H) \cap L^2(0, T; V_1) \cap W^{1,2}(0, T; V'_1)$$

Démonstration. En utilisant (7.3.12)(a)-(b) et (7.3.13)(b), on déduit que l'opérateur $A + j'_n$ est hemicontinu et fortement monotone et vérifie les conditions (2.4.1) et (2.4.2) du Théorème 2.4.1. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists! w_\eta^n \in L^2(0, T; V_1) \cap C([0, T]; H) \cap W^{1,2}(0, T; V'_1)$ tels que

$$\begin{cases} \dot{w}_\eta^n(t) + Aw_\eta^n(t) + j'_n(w_\eta^n(t)) = h(t) \text{ dans } V'_1, \text{ p.p. } t \in (0, T), \\ w_\eta^n(0) = w_0. \end{cases} \quad (7.3.16)$$

Alors, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \langle \dot{w}_\eta^n(t), v - w_\eta^n(t) \rangle_{V'_1 \times V_1} + \langle Aw_\eta^n(t), v - w_\eta^n(t) \rangle_{V'_1 \times V_1} + j(v) - j(w_\eta^n(t)) \\ & \geq \langle h(t), v - w_\eta^n(t) \rangle_{V'_1 \times V_1}, \forall v \in V_1, \text{ p.p. } t \in (0, T). \end{aligned} \quad (7.3.17)$$

D'après (7.3.16), nous avons

$$\begin{aligned} & \langle \dot{w}_\eta^n(t), w_\eta^n(t) \rangle_{V_1' \times V_1} + \langle Aw_\eta^n(t), w_\eta^n(t) \rangle_{V_1' \times V_1} + \langle j_n'(w_\eta^n(t)), (w_\eta^n(t)) \rangle_{V_1' \times V_1} \\ &= \langle h(t), w_\eta^n(t) \rangle_{V_1' \times V_1}, \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \end{aligned} \quad (7.3.18)$$

On intègre la dernière égalité sur $[0, t]$, $t \in [0, T]$, et en utilisant (3.1.14) et la monotonie de j_n' , pour déduire que

$$\exists C > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0, T], \quad \|w_\eta^n(t)\|_H \leq C, \quad \int_0^T \|w_\eta^n(t)\|_{V_1}^2 dt \leq C.$$

D'après (7.3.16), (7.3.12)(b) et (7.3.13)(b) nous avons

$$\exists C > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^T \|\dot{w}_\eta^n(t)\|_{V_1}^2 dt \leq C.$$

Nous pouvons donc extraire une sous-suite notée encore (w_η^n) pour trouver que

$$\begin{cases} w_\eta^n \rightharpoonup w_\eta \text{ faiblement dans } L^2(0, T; V_1) \text{ et faiblement étoile dans } L^\infty(0, T; H), \\ \dot{w}_\eta^n \rightharpoonup \dot{w}_\eta \text{ faiblement étoile dans } L^2(0, T; V_1'). \end{cases} \quad (7.3.19)$$

Il s'ensuit que

$$w_\eta \in C([0, T]; H) \text{ et } w_\eta^n(t) \rightharpoonup w_\eta(t) \text{ faiblement étoile dans } H, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (7.3.20)$$

On intègre (7.3.17), nous avons $\forall v \in L^2(0, T; V_1)$

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle \dot{w}_\eta^n(t), v \rangle_{V_1' \times V_1} dt + \int_0^T \langle Aw_\eta^n(t), v \rangle_{V_1' \times V_1} dt + \int_0^T j_n(v) dt \\ & \geq \int_0^T \langle \dot{w}_\eta^n(t), w_\eta^n(t) \rangle_{V_1' \times V_1} dt + \int_0^T \langle Aw_\eta^n(t), w_\eta^n(t) \rangle_{V_1' \times V_1} dt \\ & + \int_0^T j_n(w_\eta^n(t)) dt + \int_0^T \langle h(t), v - w_\eta^n(t) \rangle_{V_1' \times V_1} dt, \end{aligned}$$

et nous trouvons

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle \dot{w}_\eta^n(t), v \rangle_{V_1' \times V_1} dt + \int_0^T \langle Aw_\eta^n(t), v \rangle_{V_1' \times V_1} dt + \int_0^T j_n(v) dt \\ & \geq \frac{1}{2} \|w_\eta^n(T)\|_H^2 - \frac{1}{2} \|w_\eta^n(0)\|_H^2 + \int_0^T \langle Aw_\eta^n(t), w_\eta^n(t) \rangle_{V_1' \times V_1} dt \\ & + \int_0^T j_n(w_\eta^n(t)) dt + \int_0^T \langle h(t), v - w_\eta^n(t) \rangle_{V_1' \times V_1} dt, \end{aligned} \quad (7.3.21)$$

Nous utilisons (7.3.13)(c)-(d), (7.3.19), (7.3.20) et la semi-continuité inférieurement faiblement, on obtient que $\forall v \in L^2(0, T; V_1)$

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle \dot{w}_\eta, v - w_\eta \rangle_{V_1' \times V_1} dt + \int_0^T \langle Aw_\eta, v - w_\eta \rangle_{V_1' \times V_1} dt + \int_0^T (j(v) - j(w_\eta)) dt \\ & \geq \int_0^T \langle F_\eta, v - w_\eta \rangle_{V_1' \times V_1} dt. \end{aligned} \quad (7.3.22)$$

L'inégalité précédente implique que

$$\begin{aligned} & \langle \dot{w}_\eta(t), v - w_\eta(t) \rangle_{V_1' \times V_1} + \langle Aw_\eta(t), v - w_\eta(t) \rangle_{V_1' \times V_1} + j(v) - j(w_\eta(t)) \\ & \geq \langle F_\eta(t), v - w_\eta(t) \rangle_{V_1' \times V_1} \quad \forall v \in V_1, \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \end{aligned}$$

Nous concluons que $\mathcal{P}_{w_\eta}^5$ a au moins une solution $w_\eta \in C(0, T; H) \cap L^2(0, T; V_1) \cap W^{1,2}(0, T; V_1')$. Pour l'unicité, soient $w_{1\eta}, w_{2\eta}$ deux solutions de $\mathcal{P}_{w_\eta}^5$. Nous utilisons (7.3.10) à obtenir pour p.p $t \in (0, T)$

$$\langle \dot{w}_{2\eta}(t) - \dot{w}_{1\eta}(t), w_{2\eta}(t) - w_{1\eta}(t) \rangle_{V_1' \times V_1} + \langle Aw_{2\eta}(t) - Aw_{1\eta}(t), w_{2\eta}(t) - w_{1\eta}(t) \rangle_{V_1' \times V_1} \geq 0.$$

Intégrons l'inégalité précédente, en utilisant (7.3.9) et (3.1.14), nous trouvons

$$\frac{1}{2} \|w_{2\eta}(t) - w_{1\eta}(t)\|_H^2 + \int_0^t \|w_{2\eta}(s) - w_{1\eta}(s)\|_{V_1}^2 ds \leq 0, \quad \forall t \in [0, T],$$

ce qui implique

$$w_{1\eta} = w_{2\eta}$$

□

On considère maintenant $u_\eta : [0, T] \rightarrow V_1$ la fonction définie par

$$u_\eta = \int_0^t w_\eta(s) ds + u_0, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (7.3.23)$$

Dans l'étude du problème $\mathcal{P}_{u_\eta}^5$, nous avons le résultat suivant.

Lemme 7.3.3 . $\mathcal{P}_{u_\eta}^4$ a une solution unique ayant la régularité exprimé dans (7.3.1).

Démonstration. La preuve du Lemme 7.3.3 est une conséquence du Lemme 7.3.2 et la relation (7.3.23). $\square$

Dans la prochaine étape, nous utilisons la solution u_η obtenue dans le Lemme 7.3.3.

Problème $\mathcal{P}_{\varphi_\eta}^5$. Trouver un champ de potentiel électrique $\varphi_\eta : [0, T] \rightarrow W$ tel que

$$(\mathcal{C}\nabla\varphi_\eta(t), \nabla\phi)_H - (\mathcal{E}\varepsilon(u_\eta(t)), \nabla\phi)_H = (q(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W, t \in [0, T]. \quad (7.3.24)$$

Nous avons le résultat suivant d'existence et d'unicité.

Lemme 7.3.4 *Il existe une solution unique du problème $\mathcal{P}_{\varphi_\eta}^5$ et cela satisfait la régularité (7.3.2).*

Démonstration. Nous définissons la forme bilinéaire $b : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$b(\varphi, \phi) = (\mathcal{C}\nabla\varphi, \nabla\phi)_{L^2(\Omega)^d} \quad \forall \varphi, \phi \in W. \quad (7.3.25)$$

D'après (7.3.25), (6.1.18), (2.1.15) et (2.1.16) avec l'inégalité de Holder, nous pouvons démontrer que la forme bilinéaire b est continue, symétrique et coercive sur W . Ainsi, gardant à l'esprit l'hypothèse (6.1.17) sur le tenseur piézoélectrique $\mathcal{E}$, la régularité $u_\eta \in C^1(0, T; H)$ et $q \in C([0, T]; W)$ dans (6.1.30), nous obtenons que la forme linéaire $L_\eta : [0, T] \rightarrow W$ définie par

$$(L_\eta(t), \phi)_W = (q(t), \phi)_W + (\mathcal{E}\varepsilon(u_\eta(t)), \nabla\phi)_H \quad \forall \phi \in W, t \in [0, T].$$

est continue. En appliquant le théorème de Lax-Milgram, nous démontrons qu'il existe un élément unique $\varphi_\eta(t) \in W$ tel que

$$b(\varphi_\eta(t), \phi) = (L_\eta(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W. \quad (7.3.26)$$

Nous concluons que $\varphi_\eta(t)$ est une solution de $\mathcal{P}_{\varphi_\eta}^5$, soient $t_1, t_2 \in [0, T]$, il résulte de (2.1.15), (2.1.16), (6.1.17), (6.1.18) et (7.3.24) que

$$\|\varphi_\eta(t_1) - \varphi_\eta(t_2)\|_W \leq C(\|u_\eta(t_1) - u_\eta(t_2)\|_V + \|q(t_1) - q(t_2)\|_W). \quad (7.3.27)$$

L'inégalité (7.3.27) et les régularités de u_η et q impliquent que $\varphi_\eta \in C([0, T]; W)$. $\square$

Problème $\mathcal{P}_{\alpha_\mu}^5$. Trouver le champ d'endommagement $\alpha_\mu : [0, T] \rightarrow Y$ tels que

$$\alpha_\mu(t) \in K, (\dot{\alpha}_\mu(t), \xi - \alpha_\mu(t))_{L^2(\Omega)} + a(\alpha_\mu(t), \xi - \alpha_\mu(t)) \geq (\mu(t), \xi - \alpha_\mu(t))_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \xi \in K \text{ p.p. } t \in [0, T], \quad (7.3.28)$$

$$\alpha_\mu(0) = \alpha_0. \quad (7.3.29)$$

Lemme 7.3.5 . Pour tout $\mu \in L^2(0, T; Y')$, il existe une unique solution α_μ du problème auxiliaire $\mathcal{P}_{\alpha_\mu}^5$ satisfait (7.3.3).

Démonstration. Nous utilisons la définition (7.1.26) et le fait que $\alpha_0 \in K$ dans (7.2.4) et un résultat classique d'existence et d'unicité sur les inéquations paraboliques données dans le Théorème 2.4.2. $\square$

Pour chaque $(\eta, \mu) \in L^2([0, T]; V_1' \times L^2(\Omega))$ nous notons par u_η la solution du problème $\mathcal{P}_{u_\eta}^5$ fournie dans le Lemme 7.3.3, par φ_η la solution du problème $\mathcal{P}_{\varphi_\eta}^5$ fournie dans le Lemme 7.3.4 et par α_μ la solution du problème $\mathcal{P}_{\alpha_\mu}^5$ fournie dans le Lemme 7.3.5. En outre, nous appliquons le théorème de représentation de Riesz-Fréchet pour définir la fonction $\Lambda(\eta, \mu) : [0, T] \rightarrow V_1' \times L^2(\Omega)$ par

$$\Lambda(\eta(t), \mu(t)) = (\Lambda_0(\eta(t), \mu(t)), \Lambda_1(\eta(t), \mu(t))) \quad (7.3.30)$$

où Λ_0 et Λ_1 donnés par

$$\langle \Lambda_0(\eta(t), \mu(t)), v \rangle_{V_1' \times V_1} = (\mathcal{B}(\varepsilon(u_\eta(t)), \alpha_\mu(t)) + \mathcal{E}^* \nabla \varphi_\eta(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad (7.3.31)$$

$$\Lambda_1(\eta(t), \mu(t)) = S(\varepsilon(u_\eta(t)), \alpha_\mu(t)) \quad (7.3.32)$$

Lemme 7.3.6 . Pour chaque $(\eta, \mu) \in L^2(0, T; V_1' \times L^2(\Omega))$, la fonction $\Lambda(\eta, \mu)$ appartient à l'espace $L^2(0, T; V_1' \times L^2(\Omega))$. Par ailleurs, l'opérateur $\Lambda : L^2(0, T; V_1' \times L^2(\Omega)) \rightarrow L^2(0, T; V_1' \times L^2(\Omega))$ possède un point fixe (η^*, μ^*) unique.

Démonstration. Soient $(\eta_1, \theta_1), (\eta_2, \theta_2) \in L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$. Pour simplicité, nous utilisons les notations $u_{\eta_i} = u_i$, $\dot{u}_{\eta_i} = \dot{u}_i$, $\varphi_{\eta_i} = \varphi_i$ et $\alpha_{\mu_i} = \alpha_i$, pour $i = 1, 2$, nous avons

$$\|\Lambda_0(\eta_1, \mu_1) - \Lambda_0(\eta_2, \mu_2)\|_{V'} \leq \|\mathcal{B}(\varepsilon(u_1), \alpha_1) - \mathcal{B}(\varepsilon(u_2), \alpha_1)\|_{\mathcal{H}} + \|\mathcal{E}^* \nabla \varphi_1 - \mathcal{E}^* \nabla \varphi_2\|_{\mathcal{H}}$$

D'après la définition (7.3.30) combinée avec les hypothèses (2.1.8), (7.1.18) sur $\mathcal{B}$ et (6.1.17) sur $\mathcal{E}$, on en déduit qu'il existe $C > 0$ telle que

$$\|\Lambda_0(\eta_1, \mu_1) - \Lambda_0(\eta_2, \mu_2)\|_{V'}^2 \leq C(\|u_1 - u_2\|_{V_1}^2 + \|\alpha_1 - \alpha_2\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W^2). \quad (7.3.33)$$

Comme u_1 et u_2 ont la même valeur initiale, il s'ensuit que

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_{V_1} \leq \int_0^t \|\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)\|_{V_1'} ds, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (7.3.34)$$

Mettons $\eta = \eta_1, v = \dot{u}_2$ et $\eta = \eta_2, v = \dot{u}_1$ dans (7.3.6), gardant à l'esprit (7.3.9) et en combinant les inégalités résultantes, nous en trouvons

$$\langle \ddot{u}_1 - \ddot{u}_2, \dot{u}_1 - \dot{u}_2 \rangle_{V_1' \times V_1} + \langle A\dot{u}_1 - A\dot{u}_2, \dot{u}_1 - \dot{u}_2 \rangle_{V_1' \times V_1} \leq -\langle \eta_1 - \eta_2, \dot{u}_1 - \dot{u}_2 \rangle_{V_1' \times V_1},$$

en utilisant des arguments semblables à celui qui fait pour (3.3.46), nous trouvons

$$\int_0^t \|\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)\|_{V_1'}^2 ds \leq C \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{V_1'}^2 ds \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \quad (7.3.35)$$

De (7.3.34) et (7.3.35), on déduit

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_{V_1}^2 \leq C \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{V_1'}^2 ds \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \quad (7.3.36)$$

Nous employons les hypothèses (6.1.17) et (6.1.18) sur les tenseurs piézoélectriques et la permittivité respectivement avec l'inégalité de Friedrichs-Poincaré (2.1.16), il s'ensuit de (7.3.24) que

$$\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W^2 \leq C \|u_1(t) - u_2(t)\|_{V_1}^2, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (7.3.37)$$

En outre, en substituant $\mu = \mu_1, \xi = \alpha_{\mu_1}$, $\mu = \mu_2, \xi = \alpha_{\mu_2}$ dans (7.3.28) et en soustrayant les deux inégalités obtenues, on trouve

$$\begin{aligned} & (\dot{\alpha}_{\mu_1}(t) - \dot{\alpha}_{\mu_2}(t), \alpha_{\mu_1}(t) - \alpha_{\mu_2}(t))_{L^2(\Omega)} + a(\alpha_{\mu_1}(t) - \alpha_{\mu_2}(t), \alpha_{\mu_1}(t) - \alpha_{\mu_2}(t)) \\ & \leq (\lambda_1(t) - \lambda_2(t), \alpha_{\mu_1}(t) - \alpha_{\mu_2}(t))_{L^2(\Omega)}, \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \end{aligned}$$

On intègre l'égalité précédente et en appliquant les inégalité de Hölder et Young, et lemme de Gronwall on déduit que

$$\|\alpha_{\mu_1}(t) - \alpha_{\mu_2}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^t \|\mu_1(s) - \mu_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds. \quad (7.3.38)$$

Nous substituons (7.3.36)-(7.3.38) dans (7.3.33) nous obtenons

$$\begin{aligned} & \int_0^T \|\Lambda_0(\eta_1(s), \mu_1(s)) - \Lambda_0(\eta_2(s), \mu_2(s))\|_{V'_1 \times L^2(\Omega)}^2 ds \\ & \leq C \int_0^T (\|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{V'_1}^2 + \|\mu_1(s) - \mu_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2) ds. \end{aligned} \quad (7.3.39)$$

En utilisant l'hypothèse (7.1.19), l'égalité (2.1.8) avec les estimations (7.3.36) et (7.3.38) on obtient l'estimation de Λ_1

$$\begin{aligned} & \int_0^T \|\Lambda_1(\eta_1(s), \mu_1(s)) - \Lambda_1(\eta_2(s), \mu_2(s))\|_{V'_1 \times L^2(\Omega)}^2 ds \\ & = \int_0^T \|S(\varepsilon(u_1(s)), \alpha_1(s)) - S(\varepsilon(u_2(s)), \alpha_2(s))\|_{V'_1 \times L^2(\Omega)}^2 ds \\ & \leq C \int_0^T (\|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{V'_1}^2 + \|\mu_1(s) - \mu_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2) ds. \end{aligned} \quad (7.3.40)$$

Nous combinons les inégalités (7.3.39) et (7.3.40) pour obtenir

$$\|\Lambda(\eta_1, \mu_1) - \Lambda(\eta_2, \mu_2)\|_{L^2(0, T; V'_1 \times L^2(\Omega))}^2 \leq C \|\eta_1 - \mu_1, \eta_2 - \mu_2\|_{L^2(0, T; V'_1 \times L^2(\Omega))}^2. \quad (7.3.41)$$

En réitérant n fois l'inégalité (7.3.41) on obtient :

$$\|\Lambda^n(\eta_1, \mu_1) - \Lambda^n(\eta_2, \mu_2)\|_{L^2(0, T; V'_1 \times L^2(\Omega))}^2 \leq \frac{C^n}{n!} \|\eta_1 - \mu_1, \eta_2 - \mu_2\|_{L^2(0, T; V'_1 \times L^2(\Omega))}^2, \quad (7.3.42)$$

ce qui implique que pour n suffisamment grand une puissance Λ^n de Λ est une contraction dans l'espace de Banach $L^2(0, T; V'_1 \times L^2(\Omega))$, ce qui conclut la preuve. $\square$

Maintenant, nous avons tous les ingrédients pour fournir la preuve du Théorème 7.3.1.

Démonstration du Théorème 7.3.1.

Existence. Soit $(\eta^*, \mu^*) \in L^2(0, T; V_1' \times L^2(\Omega))$ le point fixe de Λ et soit u , φ et α la solution du problème $\mathcal{P}_{u_\eta}^5$, $\mathcal{P}_{\varphi_\eta}^5$ et $\mathcal{P}_{\alpha_\mu}^5$ pour $\eta = \eta^*$ et $\mu = \mu^*$ c'est-à-dire $u = u_{\eta^*}$, $\varphi = \varphi_{\eta^*}$ et $\alpha = \alpha_{\mu^*}$. Les égalités $\Lambda_0(\eta^*, \mu^*) = \eta^*$ et $\Lambda_1(\eta^*, \mu^*) = \mu^*$ combinées avec (7.3.31) et (7.3.32) montrent que (7.2.1)-(7.2.3) sont satisfaites. Ensuite, (7.2.4) et la régularité (7.3.1)-(7.3.3) résulte de Lemmes 7.3.3, 7.3.4 et 7.3.5. Comme $u \in W^{1,2}(0, T; V_1)$, il s'ensuit de (7.1.1), (6.1.17), (3.1.14) et (7.1.18) que $\sigma \in L^2(0, T; \mathcal{H})$. Maintenant les hypothèses (7.1.20), (7.1.22) et la régularité $\ddot{u} \in L^2(0, T; V_1')$ impliquent que $\text{Div} \sigma \in L^2(0, T; V_1')$.

Unicité. L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ défini par (7.3.30)-(7.3.32) et la solvabilité unique de problème $\mathcal{P}_{u_\eta}^5$, $\mathcal{P}_{\varphi_\eta}^5$ et $\mathcal{P}_{\alpha_\mu}^5$. $\square$

7.4 Dépendance continue de la solution par rapport au seuil de frottement

Nous étudions les comportement de la solution du problème (7.2.1)-(7.2.4) donnée par le Théorème 7.3.1 par rapport au seuil de frottement g . Les principaux résultats de cette section sont les suivants.

Théorème 7.4.1 . *Supposons que les hypothèses (3.1.14), (6.1.17), (6.1.18) et (7.1.20)-(7.1.25) sont vérifiées. Soit $(u_i, \varphi_i, \alpha_i)$ la solution du problème variationnel $\mathcal{P}_V^5$, avec g_i qui satisfont (7.1.21), pour $i = 1, 2$. Alors, il existe $C > 0$, qui dépend de $\Omega, \Gamma, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{E}, \mathcal{C}$ et T , telle que*

$$\|u_1 - u_2\|_{L^2(0, T; V_1)} \leq C \|g_1 - g_2\|_{L^\infty(\Gamma_3)}, \quad (7.4.1)$$

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{C([0, T]; W)} \leq C \|g_1 - g_2\|_{L^\infty(\Gamma_3)}, \quad (7.4.2)$$

$$\|\alpha_1 - \alpha_2\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \leq C \|g_1 - g_2\|_{L^\infty(\Gamma_3)}. \quad (7.4.3)$$

En plus de l'intérêt mathématique dans ce résultat, le théorème 7.4.1 est important dans les applications mécaniques, car il montre que les petites inexactitudes ou des variations du seuil de frottement conduisent à de petits changements dans la solution

Démonstration. Nous utilisons la notation j_i , $i = 1, 2$, pour la fonction définie par (7.1.33) avec $g = g_i$. Par conséquent,

$$j_i(v) = \int_{\Gamma_3} g_i \|v_\tau\|_{L^2(\Gamma_3)^d} da, \quad \forall v \in V_1. \quad (7.4.4)$$

En utilisant (7.1.1) et (7.2.1)-(7.2.4), pour $j = j_i$, $i = 1, 2$, on en déduit que

$$\sigma_i(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_i(t)) + \mathcal{B}(\varepsilon(u_i(t)), \alpha_i(t)) + \mathcal{E}^* \nabla \varphi_i(t) \quad (7.4.5)$$

$$\begin{aligned} & \langle \ddot{u}_i(t), v - \dot{u}_i(t) \rangle_{V_1' \times V_1} + (\sigma_i(t), \varepsilon(v - \dot{u}_i(t)))_{\mathcal{H}} + j_i(v) - j_i(u_i(t)) \\ & \geq \langle F(t), v - \dot{u}_i(t) \rangle_{V_1' \times V_1}, \quad \forall v \in V_1, \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \end{aligned} \quad (7.4.6)$$

$$(\mathcal{C} \nabla \varphi_i(t), \nabla \phi)_H - (\mathcal{E} \varepsilon(u_i(t)), \nabla \phi)_H = (q(t), \phi)_W, \quad \forall \phi \in W, \quad t \in (0, T), \quad (7.4.7)$$

$$\begin{aligned} & (\dot{\alpha}_i(t), \xi - \alpha_i(t))_{L^2(\Omega)} + a(\alpha_i(t), \xi - \alpha_i(t)) \\ & \geq (S(\varepsilon(u_i(t)), \alpha_i(t)), \xi - \alpha_i(t))_{L^2(\Omega)}, \quad \alpha_i(t) \in K, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall \xi \in K, \end{aligned} \quad (7.4.8)$$

$$u_i(0) = u_0, \quad \dot{u}_i(0) = w_0, \quad \alpha_i(0) = \alpha_0. \quad (7.4.9)$$

On prend $v = \dot{u}_2$ pour $i = 1$, et $v = \dot{u}_1$ pour $i = 2$ dans l'inégalité (7.4.6), pour obtenir

$$\langle \ddot{u}_1(t) - \ddot{u}_2(t), \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t) \rangle_{V_1' \times V_1} + (\sigma_1(t) - \sigma_2(t), \varepsilon(\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)))_{\mathcal{H}} \quad (7.4.10)$$

$$\leq j_1(\dot{u}_2(t)) - j_1(\dot{u}_1(t)) + j_2(\dot{u}_2(t)) - j_2(\dot{u}_1(t)), \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \quad (7.4.11)$$

Nous définissons

$$\sigma_1^{ep}(t) = \sigma_1(t) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)), \quad \sigma_2^{ep}(t) = \sigma_2(t) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)). \quad (7.4.12)$$

Notant que (7.4.5) pour $i = 1, 2$, nous obtenons

$$\sigma_1^{ep}(t) = \mathcal{B}(\varepsilon(u_1(t)), \alpha_1(t)) + \mathcal{E}^* \nabla \varphi_1(t) \quad (7.4.13)$$

$$\sigma_2^{ep}(t) = \mathcal{B}(\varepsilon(u_2(t)), \alpha_2(t)) + \mathcal{E}^* \nabla \varphi_2(t) \quad (7.4.14)$$

Nous combinons (7.4.10) et (7.4.12) pour obtenir

$$\begin{aligned} & \langle \ddot{u}_1(t) - \ddot{u}_2(t), \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t) \rangle_{V_1' \times V_1} + (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_1(t)) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_2(t)), \varepsilon(\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)))_{\mathcal{H}} \\ & \leq -(\sigma_1^{ep}(t) - \sigma_2^{ep}(t), \varepsilon(\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)))_{\mathcal{H}} + j_1(\dot{u}_2(t)) - j_1(\dot{u}_1(t)) \\ & + j_2(\dot{u}_2(t)) - j_2(\dot{u}_1(t)), \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \end{aligned} \quad (7.4.15)$$

Il résulte de (3.1.14) que pour p.p. $t \in (0, T)$,

$$(\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_1(t)) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_2(t)), \varepsilon(\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)))_{\mathcal{H}} \geq m_{\mathcal{A}} \|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|_{V_1} \quad (7.4.16)$$

Nous utilisons maintenant (7.1.18) et (7.1.16) pour obtenir

$$\|\sigma_1^{ep}(t) - \sigma_2^{ep}(t)\|_{\mathcal{H}} \leq C(\|u_1(t) - u_2(t)\|_{V_1} + \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W) \quad (7.4.17)$$

En substituant maintenant $i = 1, \xi = \alpha_2$, $i = 2, \xi = \alpha_1$ dans (7.4.8) on trouve

$$\begin{aligned} & (\dot{\alpha}_1(t) - \dot{\alpha}_2(t), \alpha_1(t) - \alpha_2(t))_{L^2(\Omega)} + a(\alpha_1(t) - \alpha_2(t), \alpha_1(t) - \alpha_2(t)) \\ & = (S(\varepsilon(u_1(t)), \alpha_1(t)) - S(\varepsilon(u_2(t)), \alpha_2(t)), \alpha_1(t) - \alpha_2(t))_{L^2(\Omega)}, \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \end{aligned}$$

On intègre l'inégalité précédente, en utilisant les conditions initiales $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = \alpha_0$ et comme a est Y -elliptique nous obtenons,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \int_0^t \|\alpha_1(s) - \alpha_2(s)\|_Y^2 ds \\ & \leq \int_0^t (S(\varepsilon(u_1(s)), \alpha_1(s)) - S(\varepsilon(u_2(s)), \alpha_2(s)), \alpha_1(s) - \alpha_2(s))_{L^2(\Omega)} ds \end{aligned}$$

Employant (7.1.19)(a), (7.1.16), les inégalités de Hölder et Young et lemme de Gronwall on déduit que

$$\|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_{V_1}^2 ds. \quad (7.4.18)$$

Nous employons les hypothèses (6.1.17) et (6.1.18) et avec l'inégalité (2.1.16), il s'ensuit de (7.4.7) que

$$\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W \leq C \|u_1(t) - u_2(t)\|_{V_1}, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (7.4.19)$$

Depuis $u_1(0) = u_2(0) = u_0$, nous voyons que

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V \leq \int_0^t \|\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)\|_{V_1} ds, \quad \forall s \in [0, T]. \quad (7.4.20)$$

En tenant compte de (7.4.19) et (7.4.20) nous obtenons

$$\|\sigma_1^{ep}(t) - \sigma_2^{ep}(t)\|_{\mathcal{H}} \leq C(\|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)\|_{V_1} ds). \quad (7.4.21)$$

L'inégalité (7.4.21) montre que

$$\begin{aligned} & -(\sigma_1^{ep}(t) - \sigma_2^{ep}(t), \varepsilon(\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)))_{\mathcal{H}} \\ & \leq C(\|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)\|_{V_1} ds) \|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|_{V_1}. \end{aligned} \quad (7.4.22)$$

D'après la définition (7.1.33) de la fonction j_i pour $i = 1, 2$ et (7.1.17), on obtient

$$j_1(\dot{u}_2(t)) - j_1(\dot{u}_1(t)) + j_2(\dot{u}_2(t)) - j_2(\dot{u}_1(t)) \leq C\|g_1 - g_2\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|_{V_1} \quad (7.4.23)$$

Nous substituons (7.4.22) et (7.4.23) dans (7.4.15) pour obtenir pour p.p. $t \in (0, T)$

$$\begin{aligned} & \langle \ddot{u}_1(t) - \ddot{u}_2(t), \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t) \rangle_{V_1' \times V_1} + m_{\mathcal{A}} \|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|_{V_1} \\ & \leq C(\|g_1 - g_2\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Omega)} \\ & \quad + \int_0^t \|\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)\|_{V_1} ds) \|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|_{V_1}. \end{aligned} \quad (7.4.24)$$

En utilisant (7.4.24), l'inégalité $(ab \leq \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}}a^2 + \frac{m_{\mathcal{A}}}{2}b^2)$, l'inégalité de Hölder, (7.4.18) et (7.4.20), nous trouvons

$$\begin{aligned} & \langle \ddot{u}_1(t) - \ddot{u}_2(t), \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t) \rangle_{V_1' \times V_1} + \frac{m_{\mathcal{A}}}{2} \|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|_{V_1}^2 \\ & \leq C(\|g_1 - g_2\|_{L^\infty(\Gamma_3)}^2 + \int_0^t \|\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)\|_{V_1}^2 ds), \quad \text{p.p. } t \in (0, T) \end{aligned} \quad (7.4.25)$$

On intègre l'inégalité précédente sur $[0, s]$ et utilisons la condition initiale $\dot{u}_1(0) = \dot{u}_2(0) = w_0$ pour avoir

$$\begin{aligned} & \frac{m_{\mathcal{A}}}{2} \int_0^s \|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|_{V_1}^2 dt \\ & \leq C(\int_0^s \|g_1 - g_2\|_{L^\infty(\Gamma_3)}^2 dt + \int_0^s \int_0^t \|\dot{u}_1(r) - \dot{u}_2(r)\|_{V_1}^2 dr dt), \quad \forall s \in [0, T] \end{aligned} \quad (7.4.26)$$

Nous appliquons l'inégalité de Gronwall pour obtenir

$$\int_0^s \|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|_{V_1}^2 dt \leq C \int_0^s \|g_1 - g_2\|_{L^\infty(\Gamma_3)}^2 dt \leq C \|g_1 - g_2\|_{L^\infty(\Gamma_3)}^2, \quad \forall s \in [0, T], \quad (7.4.27)$$

Des inégalités (7.4.20) et (7.4.27) on résulte l'estimation (7.4.1). Les estimations (7.4.2) et (7.4.3) respectivement sont des conséquences de (7.4.19) et (7.4.18). $\square$

Bibliographie

- [1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.
- [2] A. Amassad, C. Fabre, M. Sofonea, *A Quasistatic Viscoplastic Contact Problem with Normal Compliance and Friction*, IMA Journal of Applied Mathematics 69 (2004), 463-482.
- [3] A. Amassad and C. Fabre, *Existence for Viscoplastic Contact with Coulomb Friction Problems*, Int. J. Math. Math. Sci. 32 (2002), 411-437.
- [4] A. Amassad, K. Kuttler, M. Rochdi, M. Shillor, *Quasistatic thermoviscoelastic contact problem with slip dependent friction coefficient*, Math. Comput. Model, 36(7-8), 839-854 (2002)
- [5] K. T. Andrews, A. Klarbring, M. Shillor and S. Wright, *A Dynamic Thermoviscoelastic Contact Problem with Friction and Wear*, Int. J. Eng. Sci, Vol 35, No 14, 1291-1309. (1997).
- [6] B. Awbi, El. H. Essoufi, M. Sofonea, *A viscoelastic Contact Problem with normal damped response and friction*, Annales Polonici Mathematici LXXV, pp.233-246 (2000).
- [7] Y. Ayyad , M. Sofonea, *Analysis of Tow Dynamic Frictionless Contact Problems for Elastic-Visco-Plastic Materials*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2007(2007), No. 55, pp.1-17.
- [8] A. Azeb Ahmed, S. Boutechebak, *Analysis of a dynamic electro-elastic-viscoplastic contact problem*, Wulfenia Journal Klagenfurt Austria, Vol 20, No. 3 ; pp. 43-63 ; Mars 2013.

- [9] A. Azeb Ahmed, S. Boutechebak, *Analysis of a dynamic thermo-elsto-viscoplastic contact problem* Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 2013, No. 71, 1-17; December 2013.
- [10] C. Baiocchi, A. Capelo, *Variational and Quasivariational Inequalities : Application to Free Boundary Problems*, Wiley-Interscience, Chichester-New York ; 1984.
- [11] V. Barbu, *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces*, Noordhoff (1976).
- [12] V. Barbu, *Optimal Control of Variational Inequalities*, Pitman, Boston (1984)
- [13] M. Barboteu, J.R. Fernandez, Y. Ouafik, *Numerical analysis of a frictionless viscoelastic piezoelectric contact problem*, M2AN Math. Model. Numer. Anal. (in press).
- [14] R.C. Batra , J.S. Yang, *Saint Venant's principle in linear piezoelectricity*, *Journal of Elasticity*, 38(1995), 209-218.
- [15] E. Bonetti , G. Bonfanti, *Existence and Uniqueness of the Solution to 3D Thermoviscoelastic System*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2003, No. 50, pp. 1-15.
- [16] S. Boutechebak, A. Azeb Ahmed, *Analysis of a dynamic frictional contact Problem for thermo-elasto-Viscoplastic materials with damage*, Gen. Math. Notes, Vol. 19, No. 1, November 2013, pp.60-77.
- [17] S. Boutechebak, *Etude analytique de quelques problèmes en élasticité avec contrainte*, Thèse de doctorat, Université Sétif, 2007.
- [18] H. Brézis, *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Application*, Masson, Paris (1987)
- [19] H. Brézis, *Equations et Inéquations Non Linéaires dans les Espaces en Dualité*, Annale de l'Institut Fourier, Tome 18, n°1, (1968), p. 115-175.
- [20] O. Chau, W. Han, M. Sofonea, *A dynamic frictional contact problem with normal damped response*, Acta Applicandae Mathematicae, 71, pp. 159-178 2002.

- [21] O. Chau, J.R. Fernandez, W. Han, M. Sofonea, *A frictionless contact problem for elastic-visco-plastic materials with normal compliance and damage*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 191, pp. 5007-5026, 2002
- [22] O. Chau, J.R. Fernandez, M. Shillor, M. Sofonea, *Variational and numerical analysis of a quasistatic viscoelastic contact problem with adhesion*, J. Comput. Appl. Math, 159, pp. 431-465, 2003.
- [23] O. Chau, M. Shillor, M. Sofonea, *Dynamic frictionless contact with adhesion*, Z. Angew. Math. Phys., 55, pp. 32-47, 2004.
- [24] O. Chau, *Analyse variationnelle et numérique de quelques problèmes aux limites en mécanique de contact*, Thèse de doctorat, Université de Perpignan, (2000).
- [25] L. Chouchane, *Etude variationnelle de quelques problèmes en elasto-visco-plasticité*, Thèse de doctorat, Université de Sétif, (2008).
- [26] N. Cristescu and I. Suliciu, *Viscoplasticity*, Martinus Nijhoff Publishers, Editura Tehnica, Bucharest, (1982).
- [27] W. Han, M. Sofonea, *On a dynamic contact problem for elastic-visco-plastic materials*, appl.Numer. math. 57(2007)498-509.
- [28] W. Han, M. Sofonea, *Analysis and numerical approximation of an elastic frictional contact problem with normal compliance*, Applications Mathematicae 26 (4), 415-435, (1999).
- [29] W. Han, M. Sofonea, *Time-dependent variational inequalities for viscoelastic contact problem*, Jornal of Computational and applied Mathematics Volume 136. Issues 1-2, pp. 369-387,(2001).
- [30] W. Han, M. Sofonea, K. Kazmi, *Analysis and numerical solution of a frictionless contact problem for electro-elastic-visco-plastic materials*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 196 (2007) 3915-3926.

- [31] W. Han, *On the numerical approximation of a frictional contact problem with normal compliance*, Numer. Funct. Anal. et Optimiz. 17, pp 307-321. (1996).
- [32] J. Jaresek, M. Sofonea, *On the solvability of dynamicelastic-visco-plastic contact problems*, Z Angew Mate Mech(ZAMM) 88 (2008)3-22.
- [33] G. Duvaut , J. L. Lions, *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunod (1976).
- [34] J. R. Fernández-García, M. Sofonea, J. M. Viaño; *A Frictionless Contact Problem for Elastic-Viscoplastic Materials with Normal Compliance*, Numerische Mathematik 90 (2002), 689-719.
- [35] M. Frémond, *Adhérence des solides*, J. Mécanique Théorique et Appliquée, 6, pp. 383-407, 1987.
- [36] M. Frémond, *Equilibre des structures qui adhèrent à leur support* C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. II, 295, pp. 913-916, 1982.
- [37] M. Frémond, *Non-Smooth Thermomechanics*, Springer, Berlin, 2002.
- [38] M. Frémond, B. Nedjar, *Damage in concrete : The unilateral phenomenon*, Nucl. Eng. Des. 156, pp. 323-335, 1995.
- [39] M. Frémond , B. Nedjar, *Damage, Gradient of Damage and Principle of Virtual Work*, Int. J. Solids Structures, 33 (8),1083-1103. (1996).
- [40] M. Frémond, K.L. Kuttler, B. Nedjar, M. Shillor ; *One-dimensional models of damage*, Adv. Math. Sci. Appl., 8(2), pp. 541-570, 1998.
- [41] P. Germain, *Cours de Mécanique des Milieux Continus*, Masson et Cie, Paris, (1973).
- [42] I. R. Ionescu and M. Sofonea, *Functional and Numerical Methods in Viscoplasticity*, Oxford University Press, Oxford, (1994).
- [43] S. Kobayashi, N. Robelo, *A Coupled Analysis of Viscoplastic Deformation and Heat Transfer : I Theoretical Consideration, II Applications*, Int, J. of Mech. Sci, 22, 699-705, 707-718, (1980).

- [44] K. L. Kuttler, *Dynamic Frictional Contact for Elastic Viscoplastic Material*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2007(2007), No. 75, pp. 1-20.
- [45] Z. Lerguet, *Analyse de quelques problèmes de contact avec frottement et adhésion*, Thèse de doctorat, Université de Sétif, (2008).
- [46] J. L. Lions, *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes Aux Limites Non Linéaires*, Dunod (1969).
- [47] J. L. Lions , E. Magénes, *Problèmes aux Limites Non Homogènes et Applications*, Volume I, Dunod (1968).
- [48] A. B Merouani, F. Messelmi, *Dynamic Evolution of Damage in Elastic-Thermo-Viscoplastic Materials*. Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2010(2010), No. 129, pp. 1-15.
- [49] F. Messelmi, B. Merouani, *Quasi-Static Evolution of Damage in Thermo-Viscoplastic Materials*, Analele Universității Oradea, Fasc. Mathematica, Tome XVII (2010), Issue No. 2, 133-148.
- [50] F. Messelmi, B. Merouani , M. Mefflah, *Nonlinear Thermoelasticity Problem*, Analele Universității Oradea, Fasc. Mathematica, Tome XV (2008), 207-217.
- [51] R.D Mindlin, *Polarisation gradient in elastic dielectrics* , Int. J. Solids Structures 4 (1968), 637-663.
- [52] R.D Mindlin, *Continuum and lattice theories of influence of electromechanical coupling on capacitance of thin dielectric films*, Int. J. Solids 4 (1969), 1197-1213.
- [53] R.D Mindlin, *Elasticity, Piezoelectricity and Cristal lattice dynamics*, J. of Elasticity 4 (1972), 217-280.
- [54] J Nečas, I Hlavaček, *Mathematical Theory of Elastic and Elastoplastic Bodies : An Introduction*, Elsevier, Amsterdam, 1981.
- [55] J. Nečas , J. Kratochvil, *On Existence of the Solution Boundary Value Problems for Elastic-Inelastic Solids*, Comment. Math. Univ. Carolina, 14, (1973), 755-760,.

- [56] M. Raous, L. Cangémi, M. Cocu, *A consistent model coupling adhesion, friction, and unilateral contact*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 177, 1999, pp. 383-399, .
- [57] J. M. Ricaud, *Etude d'une classe d'inéquations d'évolution implicites et application à des problèmes dynamiques de contact avec frottement*, Thèse de doctorat. Université d.Aix-Marseille I, (1999).
- [58] M. Rochdi, M. Shillor, M. Sofonea, *Analysis of Quasistatic Viscoelastic Problem with Friction and Damage*, Adv. Math. Sci. App. 10, 2002, 173-189.
- [59] M. Rochdi, M. Shillor, M. Sofonea, *A quasistatic contact Problem with sdirectional friction and damped response*, Applicable Analysis 68, pp, 409-422, (1998)
- [60] M. Rochdi, M. Shillor, M. Sofonea, *Quasistatic nonlinear Viscoelastic contact with normal compliance and friction*, Journal of Elasticity 51, pp. 105-126 (1998)
- [61] J. Rojek, J.J. Telega, *Contact problems with friction, adhesion and wear in orthopaedic biomechanics I : General developments*, J. Theor. Appl. Mech., 39, 2001, pp. 655-677,.
- [62] J. Rojek, J.J. Telega, S. Stupkiewicz, *Contact problems with friction, adhesion and wear in orthopaedic biomechanics II : Numerical implementation and application to implanted knee joints*, J. Theor. Appl. Mech. 39 (2001), 679-706.
- [63] M. Shillor, M. Sofonea, J. J. Telega, *Models and Analysis of Quasistatic Contact*, Lecture Notes in Physics 655, Springer, Berlin, (2004).
- [64] L. Selmani, N. Bensebaa, *An Electro-viscoelastic Contact Problem with Adhesion and Damage*, Rend.Sem. Mat. Univ.Pol.Torino- Vol.66, 2 (2008)
- [65] M. Selmani, L. Selmani, *Analysis of a frictionless contact problem for elastic-viscoplastic material*. Nonlinear Analysis : Modelling and Control, 2012, Vol. 17, No. 1, 99-117
- [66] M. Sofonea, *Quasistatic Processes for Elastic-Viscoplastic Materials with Internal State Variables*, Annales Scientifiques de l'Université Clermont-Ferrand 2, Tome 94, Série Mathématiques, n° 25. (1989), p. 47-60,.

- [67] M. Sofonea, *Functional Methods in Thermo-Elasto-Visco-Plasticity*, Ph. D. Thesis, Univ of Bucharest, (1988) (in Romanian).
- [68] M. Sofonea, El. H. Essoufi, *A piezoelectric contact problem with slip dependent coefficient of friction*, Mathematical Modelling and Analysis 9, 2004, 229-242.
- [69] M. Sofonea, E.H. Essoufi, *Quasistatic frictional contact of a viscoelastic piezoelectric body*, Adv. Math. Sci. Appl. 14 (1)(2004) 25–40.
- [70] M. Sofonea, W. Han, M. Shillor, *Analysis and Approximation of Contact Problems with Adhesion or Damage*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 276, Chapman, Hall/CRC Press, New York, 2006.
- [71] M. Sofonea, M. Shillor *Variational analysis of quasistatic viscoplastic contact problems with friction*, Commun. Appl. Anal., 5 (2001), 135-151.
- [72] P. Suquet, *Plasticité et homogénéisation*, Ph.D. thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, 1982.
- [73] B. Tengiz, G. Tengiz, *Some Dynamic of the Theory of Electroelasticity*, Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics 10, 1997, 1-53.
- [74] R. A. Toupin, *The elastic dielectrics*, J. Rat. Mech. Analysis 5 (1956), 849-915.
- [75] R. A. Toupin, *A dynamical theory of elastic dielectrics*. Int. J. Engrg. Sci. 1 (1963).