الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université Sétif 1- Ferhat Abbas
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

جامعـة سطيف 1 فرحـات عباس
كليـة العلـوم
قسـم الرياضيـات

Mémoire de Master

En Mathématiques

Spécialité: Analyse non-linéaire et **EDP.**

Thème:

Modèle de Simulation des Grandes Échelles (LES) Stationnaire Faisant Intervenir Un Opérateur de Type LERAY - LIONS

Présenté par

Melle Fatima Zohra BELATAR

Encadrant: **Pr.E.H. Boubakeur Merouani**

Mémoire Soutenu le 18 Jun 2026 devant le Jury Composé devant:

Président	Pr.	Hamid BENSERIDI	Université Ferhat Abbas Sétif1.
Encadrant	Pr.E.H	Boubakeur MEROUANI	Université Ferhat Abbas Sétif 1.
Examinateur	Dr.	Fouzia BOUZEGHAYA	Université Ferhat Abbas Sétif 1.

2025/2026

Table des matières

0.1 Notations 3

0.2 Introduction 5

1 Préliminaires d'analyse fonctionnelle **7**

1.1 Définitions et quelques notions de base 7

1.1.1 Espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$ 7

1.1.2 L'inégalité de Hölder 8

1.1.3 Théorème de la convergence dominée de Lebesgue 8

1.1.4 Convergence faible 9

1.1.5 Espace réflexif 9

1.1.6 Espace séparable 10

1.2 Espaces de Sobolev 11

1.2.1 Espaces de Sobolev $W^{m,p}$ 11

1.2.2 Formule de Green 11

1.3 Résultats de compacité 12

1.3.1 Opérateurs compacts 12

1.3.2 Théorèmes de compacité 12

1.3.3 Théorème de Rellich-Kondrachov 12

1.3.4 Compacité faible des bornés d'un espace réflexif 13

1.3.5 Compacité faible-* des bornés du dual d'un espace séparable 13

1.3.6 Produit tensoriel 13

1.4 Opérateurs monotones et propriétés essentielles 14

1.4.1 Définition d'un opérateur monotone 15

1.4.2 Opérateur strictement monotone 15

1.4.3 Forte monotonie 15

1.4.4 Hémicontinuité 15

1.4.5 Coercivité 15

1.4.6 Opérateur maximal monotone 15

1.4.7 Théorème de Browder-Minty 16

1.4.8 Lemme de Minty 16

2 Position du problème et Opérateurs de Leray–Lions **17**

2.1 Opérateurs de Leray–Lions 17

2.1.1 Modèles de fluides non newtoniens 18
2.1.2 Modèles LES (Large Eddy Simulation) 18
2.1.3 Difficultés mathématiques du problème 19
2.2 Position du problème et Interprétation physique 19
2.2.1 Positiou du problème 20
2.2.2 Interprétation physique du problème (2.2) 20
2.3 Formulation variationnelle 21
3 Théorème d'existence et d'unicité **23**
3.0.1 Formulation faible du problème (2.3) 23
3.1 Étape 1 : Démonstration du théorème d'existence 25
3.1.1 Existence de la solution à un problème en dimension finie 25
3.1.2 Existence de la solution en dimension infinie 27
3.2 Étape 2 : Démonstration de l'unicité locale 33
3.2.1 Cas $p > n$ (Dimension spatiale) 34
3.2.2 Cas $p = 2$ et hypothèse structurelle (H) 36
3.3 Conclusion générale et perspectives 37
3.3.1 Perspectives 37
Bibliography **38**

Résumé : *Modèle de simulation des grandes échelle (LES) stationnaire faisant intervenir un opérateur de type Leray-Lions*

Ce mémoire est consacré à l'étude d'un modèle LES (Large Eddy Simulation) stationnaire faisant intervenir un opérateur non linéaire de type Leray-Lions. Après avoir établi la formulation faible du problème, nous démontrons l'existence d'au moins une solution faible ainsi que l'unicité locale de cette solution en utilisant des outils d'analyse fonctionnelle, notamment les théorèmes de point fixe, les résultats de compacité et la théorie des opérateurs monotones. Les résultats obtenus constituent une généralisation des modèles classiques de la mécanique des fluides et fournissent un cadre théorique pour l'étude des écoulements turbulents.

Mots-clés : Simulation des grandes échelles (LES), opérateur de Leray-Lions, solution faible, existence, unicité locale, opérateurs monotones, turbulence.

الملخص:

نموذج المحاكاة واسعة النطاق (LES) في الحالة المستقرة مع مؤثر غير خطي من نوع ليراي- ليونز

يخصص هذا البحث لدراسة نموذج المحاكاة واسعة النطاق(**LES**) في الحالة المستقرة، و الذي يتضمن مؤثرا خطيا من نوع ليراي- ليونز(***Leray-Lions***) و بعد صياغة المسالة في إطارها الضعيف . نثبت وجود حل ضعيف واحد على الأقل،بالإضافة الى الوحدانية المحلية لهذا الحل و ذلك بالاعتماد على أدوات التحليل الدالي ولا سيما مبرهنات النقطية الثابتة و نتائج التراص و نظرية المؤثرات الرتيبة و تمثل النتائج المتحصل عليها تعميما للنماذج الكلاسيكية في ميكانيكا الموائع كما توفر إطارا نظريا متينا لدراسة الجريان المضطرب و تحليله.

الكلمات المفتاحية: المحاكاة واسعة النطاق(**LES**) مؤثر ليراي-ليونز الحل الضعيف الوجود الوحدانية المحلية المؤثرات الرتيبة الاضطراب وتحليله.

Abstract: Stationary Large Eddy Simulation (LES) model involving a Leray-Lions type operator

This thesis is devoted to the study of a stationary Large Eddy Simulation (LES) model involving a nonlinear Leray–Lions type operator. After establishing the weak formulation of the problem, we prove the existence of at least one weak solution as well as the local uniqueness of this solution by using tools from functional analysis, particularly fixed-point theorems, compactness results, and the theory of monotone operators. The obtained results constitute a generalization of classical fluid mechanics models and provide a theoretical framework for the study of turbulent flows.

Keywords: Large Eddy Simulation (LES), Leray–Lions operator, weak solution, existence, local uniqueness, monotone operators, turbulence.