الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة سطيف 1 فرحات عباس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

Setif 1 University Ferhat Abbas
Faculty of Sciences
Department of Mathematics

Master's Thesis

in Mathematics

Option : Applied Mathematics

Theme :

Zeta Function And It Applications In Complex Analysis

Presented by

Miss **Katia Khannous**

Supervisor: **Prof. El-Bachir Yallaoui**

Thesis defended on september 27, 2026, in front of the jury composed of:

Mr.	**Hamid Benserdi**	Prof.	Setif 1 University Ferhat Abbas	President
Mr.	**El-Bachir Yallaoui**	Prof.	Setif 1 University Ferhat Abbas	Supervisor
Mr.	**Issa Benseghir**	Prof.	Setif 1 University Ferhat Abbas	Examinator

2025/2026

Contents

1 Introduction ..... **Erreur ! Signet non défini.**

1.1 Introduction ..... **Erreur ! Signet non défini.**

1.2 Historical Background ..... **Erreur ! Signet non défini.**

1.3 Definition of the Zeta function ..... **Erreur ! Signet non défini.**

1.4 Analytic Continuation ..... **Erreur ! Signet non défini.**

1.5 Extending the Riemann Zeta Function ..... **Erreur ! Signet non défini.**

1.6 Connection to Prime Numbers: Euler Product Formula ..... **Erreur ! Signet non défini.**

2 Special values of the Zeta Function ..... **Erreur ! Signet non défini.**

2.1 The Critical Strip and the Riemann Hypothesis ..... **Erreur ! Signet non défini.**

2.2 Applications in Complex Analysis ..... **Erreur ! Signet non défini.**

2.3 Additional Applications: Basel Problem and Bernoulli Numbers .. **Erreur ! Signet non défini.**

3 Further Generalization ..... **Erreur ! Signet non défini.**

3.1 The Dilogarithm Function $\mathrm{Li}_2(t)$ ..... **Erreur ! Signet non défini.**

3.2 Dirichlet L-function ..... **Erreur ! Signet non défini.**

3.3 Hurwitz zeta function ..... **Erreur ! Signet non défini.**

3.4 Multiple zeta values ..... **Erreur ! Signet non défini.**

4 Conclusion ..... **Erreur ! Signet non défini.**

The Riemann Zeta Function and Its Applications in Complex Analysis

Presented by: KHANNOUS Katia

- ملخص

تتناول هذه المذكرة دراسة دالة ز يتا لر يمان من منظور التحليل العقدي ونظر ية الأعداد التحليلية. تبدأ بتعر يفهاكمتسلسلة دير يشليه في نصف المستوى $Re(s) > 1$، ثم تدرس استمرارها التحليلي إلى المستوى العقدي باستثناء $s = 1$حيث لها قطب بسيط. كما توضح العلاقة بين الدالة والأعداد الأولية من خلال صيغة أو يلر الضر بية، والمعادلة الداليةوتناظرها حول الخط الحرج. وتركز على الشر يط الحرج وتوز يع الأصفار وفرضية ر يمان، إضافة إلى تطبيقات كلاسيكيةمثل مسألة بازل وأعداد برنولي، وتقدم بعض التعميمات كدوال دير يشليه وهورفيتز.

الكلمات المفتاحية: دالة ز يتا لر يمان، الاستمرار التحليلي، المعادلة الدالية، فرضية ر يمان، الأعداد الأولية، أعدادبرنولي، دوال دير يشليه.

- Résumé

Ce mémoire étudie la fonction zêta de Riemann du point de vue de l'analyse complexe et de la théorie analytique des nombres. Elle est d'abord définie par une série de Dirichlet dans le demiplan $Re(s) > 1$, puis prolongée analytiquement au plan complexe sauf en $s = 1$, où elle possède un pôle simple. Le mémoire met en évidence son lien avec les nombres premiers à travers le produit d'Euler et étudie l'équation fonctionnelle, la bande critique, la distribution des zéros et l'hypothèse de Riemann. Il présente également des applications classiques telles que le problème de Bâle et les nombres de Bernoulli, ainsi que des généralisations comme les fonctions L de Dirichlet et la fonction zêta de Hurwitz.

Mots-clés : Fonction zêta de Riemann, prolongement analytique, équation fonctionnelle, hypothèse de Riemann, nombres premiers, nombres de Bernoulli, fonctions L de Dirichlet.

- Summary This thesis studies the Riemann zeta function from the perspectives of complex analysis and analytic number theory. It is first defined as a Dirichlet series in the half-plane $Re(s) > 1$, then analytically continued to the complex plane except at $s = 1$, where it has a simple pole. The thesis highlights its connection with prime numbers through Euler's product formula and examines the functional equation, the critical strip, the distribution of zeros, and the Riemann Hypothesis. It also presents classical applications such as the Basel problem and Bernoulli numbers, together with generalizations including Dirichlet L-functions and the Hurwitz zeta function.

Keywords: Riemann zeta function, analytic continuation, functional equation, Riemann Hypothesis, prime numbers, Bernoulli numbers, Dirichlet L-functions.