

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي



Setif 1 University Ferhat Abbas
Faculty of Sciences
Department of Mathematics



جامعة سطيف 1 فرحات عباس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

Master's Thesis in Mathematics

Option : Optimization and Control

Theme :

APPLICATION OF LISSAJOUS CURVES TO BOX OPTIMIZATION PROBLEMS

Presented by

Miss. Lyna Goussas & Miss. Bouchra Benkara

Supervisor: **Dr. Djaouida Guettal**

Thesis defended on June 24, 2026, in front of the jury composed of:

Mr. Mohamed Achache
Ms. Djaouida Guettal
Mr. Mohamed Rahal

Prof. Setif1UniversityFerhatAbbas
Dr. Setif1UniversityFerhatAbbas
Prof. Setif1UniversityFerhatAbbas

President
Supervisor
Examiner

2025/2026

Contents

General introduction	iii
1 General principles of global optimization	1
1.1 Introduction.	1
1.2 Fundamental concepts in optimization.	2
1.2.1 Local minimizer and global minimizer.	2
1.3 Theoretical foundations: existence and uniqueness.	4
1.3.1 Existence of a solution.	4
1.3.2 The uniqueness of the solution.	4
1.4 Covering global optimization methods.	4
1.5 General principle of covering methods.	5
1.5.1 Piyavskii-Shubert's method.	7
1.5.2 Evtushenko's method.	9
1.6 Advantages and disadvantages of the Piyavskii's and Evtushenko's approaches.	12
1.6.1 Advantages.	12
1.6.2 Disadvantages.	13
1.7 Conclusion.	13
2 The reducing transformation method	14
2.1 Introduction.	14
2.2 Alpha-dense curves.	14
2.2.1 Examples of alpha-dense curves.	18
2.3 Lissajous curves.	21
2.3.1 First type of Lissajous curves.	22
2.3.2 Second type of Lissajous curves.	30
2.4 Conclusion.	33
3 Global optimization methods using Lissajous curves	34
3.1 Introduction.	34
3.2 Global one-dimensional optimization programs in Matlab.	36
3.2.1 Piyavskii-Shubert's program.	36
3.2.2 Evtushenko's program.	37
3.3 Applications of covering methods for one-dimensional global optimization of Lipschitz functions.	37
3.3.1 Test functions.	37
3.3.2 Graphical representation of test functions.	38
3.3.3 The numerical results.	40
3.3.4 Commentary.	41
3.4 Global optimization using Lissajous curves coupled with Piyavskii's and Evtushenko's methods.	42
3.4.1 Test Functions.	42

3.4.2 The numerical results.	42
3.4.3 Commentary.	44
3.4.4 Commentary.	45
3.5 Conclusion.	45
General conclusion	47
Bibliography	47

الملخص:

تناول هذا العمل الطرق التحديدية للأمثلة الشاملة للدوال الليبشيتزية متعددة المتغيرات. ركزنا على طرق التغطية أحادية البعد (بيافسكي-شوبيرت وإفتوشينكو). لتوسيع هذه الطرق إلى الحالة متعددة الأبعاد، استخدمنا طريقة التحويل التقلبي بمنحنيات α -كثيفة من نوع ليزاجو. مزوجة هذه المنحنيات مع الخوارزميات الكلاسيكية مكنت من حل مسائل ثنائية الأبعاد. تظهر النتائج تفوق الطريقة الهجينة إفتوشينكو-ليزاجو.

الكلمات المفتاح: الأمثلة الشاملة، طرق التغطية، طريقة بيافسكي-شوبيرت، طريقة إفتوشينكو، منحنيات α -كثيفة، منحنيات ليزاجو.

Résumé :

Ce travail aborde les méthodes déterministes d'optimisation globale pour des fonctions lipschitziennes multivariées. Nous nous sommes concentrés sur les méthodes de recouvrement unidimensionnelles (Piyavskii-Shubert et Evtushenko). Pour étendre ces méthodes au cas multidimensionnel, nous avons utilisé la transformation réductrice par des courbes α -denses de type Lissajous. Le couplage de ces courbes avec les algorithmes classiques a permis de résoudre des problèmes bidimensionnels. Les résultats montrent la supériorité de la méthode hybride Evtushenko-Lissajous.

Mots-clés : Optimisation globale, méthodes de recouvrement, méthode de Piyavskii-Shubert, méthode d'Evtushenko, courbes α -denses, courbes de Lissajous.

Abstract :

This work addresses deterministic global optimization methods for multivariate Lipschitz functions. We focused on one-dimensional covering methods (Piyavskii-Shubert and Evtushenko). To extend these methods to the multidimensional case, we used the reducing transformation with α -dense curves of the Lissajous type. Coupling these curves with classical algorithms enabled solving two-dimensional problems. The results show the superiority of the hybrid Evtushenko-Lissajous method.

Key-words: Global optimization, covering methods, Piyavskii-Shubert's method, Evtushenko's method, α -dense curves, Lissajous curves.
