FARHAT ABBAS UNIVERSITY
SETIF 1

PEOPLES DEMOCRATIC REPUBLIC OF ALGERIA

Ministry of Higher Education and Scientific Research

University of Ferhat Abbas - Setif 1

Faculty of Sciences

Department of Mathematics

MASTERS THESIS

STUDY OF THE ASYMPTOTIC ANALYSIS OF NON-NEWTONIAN FLOW MODELS UNDER BOUNDARY CONDITIONS FORMULATED IN VARIABLE-EXPONENT SOBOLEV FRAMEWORKS

Presented by

Mebarki Rayenne

For obtaining the degree of Master in Mathematics

Jury Members

President	Prof.	Abdelbaki MAROUANI
Supervisor	Prof.	Hamid BENSERIDI
Examiner	MCA	Mustafa DERGUINE

Academic Year: 2025–2026

ABSTRACT

In this Masters thesis, we investigate the asymptotic behavior of a Herschel-Bulkley fluid , assumed to be stationary, incompressible, and isothermal, within a bounded three-dimensional domain. The model incorporates a perturbation term of the form $u\nabla u$ and is subject to various boundary conditions, all studied in the framework of variable-exponent Sobolev spaces.

After introducing the variational formulation, we apply a scaling transformation of the type

$$z = \frac{x_3}{\varepsilon},$$

which converts the original ε-dependent domain into a fixed geometric configuration. This transformation enables us to derive a priori estimates for the velocity and pressure, and to establish an appropriate convergence result.

The work concludes with the analysis of the associated limit problem obtained as $\varepsilon \to 0$, for which the uniqueness of the solution is demonstrated.

Key Words: Convergence analysis, Elastic system, Source term, Thin domain, Tresca friction, Variable exponents, Weak solution.

Résumé

Dans ce mémoire de Master, nous étudions le comportement asymptotique dun fluide de Bingham supposé stationnaire, incompressible et isotherme, dans un domaine tridimensionnel borné. Le modèle intègre un terme de perturbation de la forme $u\nabla u$ et est soumis à diverses conditions aux limites, le tout étudié dans le cadre des espaces de Sobolev à exposant variable.

Après lintroduction de la formulation variationnelle, nous appliquons une transformation déchelle du type

$$z = \frac{x_3}{\varepsilon}$$

qui permet de transformer le domaine initial dépendant de ε en une configuration géométrique fixe. Cette transformation nous permet dobtenir des estimations a priori pour la vitesse et la pression, ainsi que détablir un résultat de convergence approprié.

Le travail se termine par lanalyse du problème limite associé lorsque $\varepsilon \to 0$, pour lequel lunicité de la solution est démontrée.

Mots-clés : Analyse de convergence, Système élastique, Terme source, Domaine mince, Frottement de Tresca, Exposants variables, Solution faible.

ملخص

في هذه المذكرة الخاصة بالماستر، ندرس السلوك التقاربي لسائل بينغهام المفترض أنه ساكن، غير قابل للانضغاط، ومتساويِ الحرارة، داخل مجال ثلاثي الأبعاد محدود. يتضمن النموذج حد اضطراب من الشكل $u\nabla u\varepsilon$ ويخضع لعدة شروط حدية، وذلك ضمن إطار فضاءات سوبوليف ذات الأس المتغير.

بعد تقديم الصياغة التغايرية للمسألة، نقوم بتطبيق تحويل مقياسي من النوع

$$z = \frac{x_3}{\varepsilon}$$

والذي يسمح بتحويل المجال الأصلي المعتمد على ε إلى مجال هندسي ثابت. يتيح هذا التحويل استخراج تقديرات قبلية للسرعة والضغط، وإثبات نتيجة تقارب مناسبة.

يُختتم العمل بدراسة المسألة الحدية المرتبطة عندما $\varepsilon \to 0$، حيث يتم إثبات وحيدية الحل.

الكلمات المفتاحية: تحليل التقارب، النظام المرُن، الحد المصدري، المجال الرقيق، احتكاك تريسكا، الأسس المتغيرة، الحل الضعيف.

Abstract i

General Introduction iii

Objectives v

1 Mathematical Preliminaries and Functional Framework 4
1.1 Functional Framework . . . 4
1.1.1 Lebesgue Spaces Theory . . . 4
1.1.2 Sobolev Spaces . . . 5
1.1.2.1 Sobolev Space with Zero Boundary . . . 7
1.1.2.2 Weak Convergence in Sobolev Spaces . . . 8
1.1.3 Variable Exponent Spaces . . . 8
1.1.3.1 Variable Exponent Functions . . . 9
1.1.3.2 Properties of $L^{p(x)}(\Omega)$ . . . 11
1.1.3.3 Variable Exponent Sobolev Spaces . . . 12
1.1.3.4 Variable Exponent Sobolev Space with Zero Boundary . 13
1.1.4 Convergence in Function Spaces . . . 13
1.1.4.1 Strong Convergence . . . 13
1.1.4.2 Weak Convergence . . . 13
1.1.4.3 Weak Convergence in Sobolev Spaces . . . 14
1.1.4.4 Modular Convergence . . . 14
1.1.4.5 Relations Between Convergences . . . 14
1.1.5 Important Analytical Tools . . . 15
1.1.5.1 Monotone Operators . . . 15
1.1.5.2 Minty–Browder Theorem . . . 17

2 Mathematical Model and Variational Analysis 18
2.1 Position of the Problem and Notations . . . 18
2.1.1 Formulation of the Model . . . 19
2.2 Variational formulation . . . 22

3 Asymptotic Analysis and Limit Problem 29
3.1 Asymptotic Framework for Problem $(\mathcal{P}^\epsilon)$ . . . 29
3.1.1 Reformulation via Scale Transformation . . . 29
3.1.2 A priori bounds . . . 31
3.2 Convergence results and limit problem . . . 38

General conclusion 50