الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Setif 1 University Ferhat Abbas
Faculty of Sciences
Department of Mathematics

جامعة سطيف 1 فرحات عباس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

Master's Thesis

in Mathematics

Option : Algebra and Geometry

Theme :

APPLICATION OF TWO-NILPOTENT LIE ALGEBRA IN CONTROL THEORY

Presented by

Mr. **Messipsa Otmani**

Supervisor: **Dr. Aib Aziza**

Thesis defended on June 24, 2026, in front of the jury composed of:

Mr.	Belaib Mohamed Tahar	Dr.	Setif 1 University Ferhat Abbas	President
Ms.	Aib Aziza	Dr.	Setif 1 University Ferhat Abbas	Supervisor
Ms.	Guettal Djaouida	Dr.	Setif 1 University Ferhat Abbas	Examiner

2025/2026

Contents

General Introduction 3

1 Mathematical Foundations of Lie Algebras and Control Theory 5

1.1 Introduction to Lie algebras 5

1.1.1 Definition and examples 5

1.1.2 Classical Lie algebras 7

1.1.3 Subalgebras and ideals 7

1.1.4 Nilpotent Lie algebras 8

1.2 Bilinear control systems 10

1.2.1 General formulation 10

1.2.2 Definition of a bilinear system 10

1.2.3 From systems to Lie algebras 11

1.3 Optimal control theory 12

1.3.1 Control theory formulation 12

1.3.2 Optimal control 13

1.3.3 Pontryagin's Maximum Principle (PMP) 13

1.3.4 Optimal control in feedback form 15

2 Optimal Control of 2-Nilpotent Bilinear Systems and Explicit Matrices Constructions 17

2.1 Optimal control of 2-Nilpotent bilinear systems 17

2.2 Jordan normal form 19

2.3 Explicit construction of 2-Nilpotent Lie algebra in finite dimension 22

2.3.1 2-Nilpotent Lie algebra in finite dimensional 22

3 Two-Nilpotent Lie Algebra Generated by a Compact Operators 28

3.1 Preliminaries on compact operators 28

3.2 Spectral decomposition of a compact operator 29

3.2.1 Riesz projections 29

3.2.2 Decomposition of the space 30

3.3 Construction of 2-Nilpotent Lie algebra generated by a compact operators 30

3.3.1 Spectral decomposition of compact operators 30

3.3.2 Verification of the stabilization of system (Σ) at infinity 32

4 Optimal Control of Error Associated to an Observer **35**

4.1 Optimal control of error associated to an observer 35

4.1.1 Error observer problem 36

4.1.2 Application 37

Conclusion **40**

ملخص

تنقسم هذه الأطروحة إلى أربعة أجزاء. في الجزء الأول، نقدم بعض المفاهيم المتعلقة بجبر لي عديم القوى والجمل ثنائية الخطية ذات التحكم. في الجزء الثاني، نبني مؤثراً صريحاً B بحيث أنه لمؤثر معطى A (مكتوب بالشكل الطبيعي لجوردان) تشكل المجموعة {A, B} جبر لي عديم القوى من الرتبة الثانية،أي [A,B]=C≠0 و [A,C]=[B,C]=0 ، ونطبق ذلك على مسألة التحكم الأمثل. الجزء الثالث يوسع البناء إلى المؤثرات المتراصة على فضاءات باناخ. الجزء الرابع يختتم بأمثلة وتطبيق للتحكم الأمثل للخطأ المرتبط بمراقب.

الكلمات المفتاحية: نظام تحكم ثنائي الخطي - تحكم أمثل - جبر لي عديم القوى من الرتبة الثانية .

Résumé

Ce Mémoire est divisée en quatre parties. Dans la première partie, nous introduisons quelques notions concernant les algèbres de Lie nilpotentes et les systèmes de contrôle bilinéaires. Dans la deuxième partie, nous construisons un opérateur explicite B tel que pour un opérateur A donné (écrit sous forme normale de Jordan) l'ensemble {A, B} engendre une algèbre de Lie nilpotente de rang deux c'est-à-dire [A,B]=C≠0 et [A,C]=[B,C]=0, et nous appliquons ce résultat à un problème de contrôle optimal. Dans la troisième partie, on prolonge l'étude à un opérateur compact dans un espace complexe de Banach. La quatrième partie se termine par des exemples et une application du contrôle optimal de l'erreur associé à un observateur.

Mots clés : Système de contrôle bilinéaire - Contrôle optimal - Algèbre de Lie nilpotente de rang deux .

ABSTRACT

This dissertation. is divided into four parts. In the first part, we introduce some notions concerning nilpotent Lie algebras and bilinear control systems. In the second part, we construct an explicit operator B that for a given operator A (written in Jordan normal form) the set {A, B} generates a two-nilpotent Lie algebra i.e. [A,B]=C≠0 and [A,C]=[B,C]=0, and apply this to an optimal control problem. In the third part, we extend the study to a compact operator in a complex Banach space. The fourth part concludes with examples and an application of the optimal error control associated with an observer.

Keywords: Bilinear control system - Optimal control - Two-nilpotent Lie algebra .