République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Sétif 1 Ferhat Abbas
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

جامعــة سطيف 1 فرحـــــات عباس
كـليـــة العلـــــــــوم
قســــــم الرياضيــــــــــات

Thèse de doctorat

présentée en vue de l'obtention du
diplôme de Docteur en Mathématiques

Option : Mathématiques Appliquées

Thème :

THÉORIE DES POINTS FIXES COMMUNS POUR LES F-CONTRACTIONS COMMUTATIVES : GÉNÉRALISATIONS ET APPLICATIONS

Presentée par

Mr. **Djamel DEGHOUL**

Directeur de thèse : **Pr. Lakhdar CHITER**

Thèse soutenue le 7 mai 2026 devant le jury composé de :

Mr.	Salim MESBAHI	Prof	Université Sétif 1 Ferhat Abbas	Président
Mr.	Lakhdar CHITER	Prof	Université Sétif 1 Ferhat Abbas	Rapporteur
Mr.	Ahcene MERAD	Prof	Université Oum El-Bouaghi Larbi Ben M’hidi	Examinateur
Mr.	Rabah KHEMIS	Prof	Université Skikda 20 Août 1955	Examinateur
Mr.	Yassine ADJABI	Prof	Université Boumerdes M'hamed Bougara	Examinateur
Mr.	Zoheir CHEBEL	Prof	Centre Universitaire de Barika Si El-Haouès	Invité
Mr.	Abdelatif BOUREGHDA	Prof	Université Sétif 1 Ferhat Abbas	Invité

2026

بسم الله الرحمن الرحيم

Remerciements

Je remercie Dieu, le Tout-Puissant, de m'avoir donné assez de courage pour accomplir ce travail. Je tiens à remercier tout d'abord mon directeur de thèse, **Chiter Lakhdar**, professeur de mathématiques à l'Université Ferhat ABBAS Sétif 1, pour sa confiance son aide, ses remarques et ses conseils.

Je voudrais également remercier les membres du jury pour avoir accepté d'évaluer ce travail.

Mes remerciements s'adressent également à toute l'équipe professorale de la faculté des sciences pour la qualité de leur enseignement.

Dédicace

Toute ma reconnaissance va à ma famille et à mes amis, qui ont été une agréable source d'encouragement, en particulier à mes parents.

Je saisis cette occasion pour exprimer à nouveau mon appréciation à mon encadrant, **Pr. Lakhdar Chiter**, qui a toujours fait preuve de compréhension et de motivation tout au long de mon cycle doctoral. Tous les mots que l'on pourrait dire ne suffiraient pas à exprimer pleinement ma reconnaissance.

C'est également l'occasion de remercier **Abdellatif Boureghda** professeur retraité et **Zoheir Chebel**, professeur au centre universitaire de Barika, qui m'ont continuellement orientée.

Je tiens aussi à mentionner l'ensemble de mes collègues, pour les échanges scientifiques et l'atmosphère amicale qu'ils ont su créer.

À toutes ces personnes, je dédie ce modeste travail, ainsi qu'à toute personne m'ayant soutenue de près ou de loin.

Table des matières

Présentation

Cette thèse de doctorat en mathématiques appliquées, explore la théorie des points fixes communs pour des applications commutatives satisfaisant des conditions de F-contraction. Les points fixes jouent un rôle central en analyse fonctionnelle, en optimisation et dans les systèmes dynamiques, avec des applications variées en sciences et en ingénierie. L'objectif principal de cette thèse est de généraliser les théorèmes classiques de points fixes, notamment ceux de Banach et Jungck, en introduisant des conditions plus flexibles et en étudiant leurs implications théoriques et pratiques.

La thèse est structurée en quatre chapitres, chacun abordant des aspects complémentaires de la théorie des points fixes et des F-contractions. Le premier chapitre pose les fondements théoriques, tandis que les chapitres suivants proposent des généralisations et des applications concrètes.

Division de la thèse

La thèse est structurée en quatre chapitres :

1. **Chapitre 1 : Notions fondamentales et outils préliminaires**

   Ce chapitre introduit les concepts de base nécessaires à la compréhension des travaux ultérieurs. Il commence par une présentation de la théorie classique des points fixes, incluant les théorèmes de Banach et de Jungck, qui établissent l'existence et l'unicité des points fixes pour des applications contractantes. Les espaces métriques, la convergence des suites et la complétude sont également discutés, car ils constituent le cadre naturel pour ces théorèmes. Ensuite, le chapitre introduit la notion de F-contraction, une généralisation des contractions classiques, où une application est contractante par rapport à une autre. Les propriétés des F-contractions, telles que la continuité et la convergence des suites de Picard, sont analysées en détail. Enfin, le chapitre explore des applications avancées, notamment en analyse numérique et en systèmes dynamiques, et présente les développements récents dans ce domaine.

2. **Chapitre 2 : Point fixe commun d'auto-applications F-contractives commutatives à suite bornée unique**

   Ce chapitre généralise le théorème de Jungck en remplaçant la condition non algorithmique d'inclusion des images par une condition topologique algorithmique basée sur la bornitude des suites de Picard. Les auteurs démontrent que, sous des hypothèses de commutativité et de F-contraction, l'existence d'une suite bornée suffit à garantir l'existence d'un point fixe commun unique. Les preuves s'appuient sur des lemmes techniques et des inégalités clés, illustrées par des exemples concrets. Les résultats obtenus étendent ceux de la littérature et offrent des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de points fixes communs.

3. **Chapitre 3 : Points fixes communs pour les F-contractions commutatives sous des conditions modifiées**

   Ce chapitre poursuit l'exploration des points fixes communs en introduisant une nouvelle condition basée sur la limite supérieure des distances. Les auteurs définissent un ensemble E caractérisé par une propriété de convergence et montrant que s'il est non-vide, il garantit l'existence d'un point fixe commun. Les démonstrations utilisent des techniques d'analyse et des propriétés de convergence des suites. Les résultats sont appliqués à des exemples spécifiques, mettant en évidence la pertinence des conditions proposées. Ce chapitre offre également des corollaires importants, notamment pour les espaces compacts.

4. **Chapitre 4 : Méthode hybride non commutative de Picard pour les points fixes communs**

   Le dernier chapitre propose une approche hybride pour étudier les points fixes communs de plusieurs applications. L' auteur formule des inégalités généralisées impliquant des coefficients et des fonctions auxiliaires, et démontre des théorèmes d'existence et d'unicité sous des hypothèses de continuité et de commutativité. Les preuves reposent sur des suites de Cauchy et des techniques d'itération. Ce chapitre élargit le cadre d'application des résultats précédents et ouvre des perspectives pour des recherches futures, notamment en analyse numérique et en optimisation.

En résumé, cette thèse rallie profondeur théorique et applicabilité, offrant des outils puissants pour résoudre des problèmes mathématiques et pratiques. Les quatre chapitres, bien structurés et complémentaires, forment un ensemble cohérent qui enrichit la littérature existante et inspire de futures recherches.

Chapitre 1

Notions fondamentales et outils préliminaires

1.1 Introduction générale à la théorie du point fixe

La théorie du point fixe constitue une branche fondamentale des mathématiques modernes, occupant une position centrale dans de nombreux domaines tels que l'analyse fonctionnelle, la topologie, la théorie des équations différentielles et l'optimisation. L'idée de base est relativement simple : trouver un point x^* tel que $f(x^*) = x^*$ pour une application donnée f.
Malgré sa simplicité apparente, cette notion recèle une profondeur théorique remarquable et possède d'innombrables applications pratiques.

L'un des résultats les plus célèbres est sans doute le théorème du point fixe de Banach (ou principe du point fixe de Banach-Caccioppoli), formulé en 1922. Ce théorème affirme que toute application contractante sur un espace métrique complet admet un unique point fixe. Ce résultat s'est avéré être un outil puissant dans la démonstration de l'existence et de l'unicité de solutions pour diverses classes d'équations fonctionnelles et différentielles.

1.1.1 *Historique et développements*

L'histoire de la théorie du point fixe débute réellement avec le travail de Stefan Banach en 1922, suivi par des développements majeurs tels que ceux de Brouwer, Kakutani, Schauder, et plus récemment, par G. Jungck en 1976 qui a proposé une généralisation importante : l'étude des points fixes communs pour des applications commutatives.

Le résultat de Jungck, qui généralise le principe de Banach, repose sur une condition de commutativité des applications au lieu de l'application unique. Cette perspective nouvelle a ouvert de vastes horizons en mathématiques appliquées, notamment dans les systèmes dynamiques, la théorie des jeux, la mécanique quantique, l'informatique théorique, et l'apprentissage automatique.

1.1.2 *Motivations de l'étude des points fixes* :

L'intérêt pour les points fixes est motivé par plusieurs facteurs :

. **Existence et unicité :** Dans les équations différentielles ordinaires ou aux dérivées partielles, démontrer l'existence d'une solution revient souvent à prouver l'existence d'un point fixe pour une certaine application définie sur un espace fonctionnel.

. **Méthodes itératives :** De nombreux algorithmes numériques sont basés sur des schémas d'itération de type Picard, où la convergence vers une solution est garantie par des propriétés de contraction.

. **Stabilité et contrôle :** En dynamique des systèmes, un point fixe peut correspondre à un état d'équilibre. Analyser sa stabilité implique souvent des théorèmes de point fixe.

. **Optimisation :** Dans les problèmes d'optimisation, les conditions optimales de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) ou les points d'équilibre de Nash peuvent être vus comme des points fixes de certaines correspondances multivoques.

1.1.3 *Vers une généralisation : les F-contractions* :

Les contractions classiques exigent une forte propriété : une diminution uniforme des distances. Cette hypothèse peut parfois être trop restrictive. C'est dans ce contexte qu'interviennent les F-contractions, introduites pour étendre la théorie en permettant des formes de contraction plus souples.

L'objectif est de conserver la possibilité de prouver l'existence de points fixes tout en élargissant le type d'applications admissibles. Ces nouvelles notions permettent de couvrir des situations où la contraction classique n'est pas vérifiée mais où un comportement asymptotiquement contractant subsiste.

En résumé, la théorie du point fixe, dans ses multiples déclinaisons, constitue un outil fondamental dans l'étude théorique comme dans la modélisation des phénomènes complexes. Son élargissement par l'étude des F-contractions et des points fixes communs représente une étape cruciale dans le développement contemporain de l'analyse mathématique.

1.2 Espaces métriques et notions de convergence

1.2.1 Définition d'un espace métrique

Un espace métrique est une paire (X, d), où X est un ensemble non vide et $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction appelée distance (ou métrique), satisfaisant les propriétés suivantes pour tous $x, y, z \in X$:
1. Positivité : $d(x, y) \geq 0$ et $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$,
2. Symétrie : $d(x, y) = d(y, x)$,
3. Inégalité triangulaire : $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.
Ces propriétés garantissent que la distance mesure rigoureusement la séparation entre les points, donnant à l'ensemble X une structure géométrique exploitable voir [31] .

Exemple 1.2.1 : Espaces métriques classiques

. $(\mathbb{R}^n, d_2)$, avec $d_2(x, y) = \sqrt{(\Sigma_{i=1}^n (x_i - y_i)^2)}$ (distance euclidienne),

. $(C([a, b]), d_\infty)$, avec $d_\infty(f, g) = sup_{x\in[a,b]}|f(x) - g(x)|$,

. L'ensemble des suites réelles bornées avec la distance $d(x, y) = sup_n|x_n - y_n|$.

1.2.2 Suites et convergence

Définition 1.2.2 : Suite convergente
Une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans un espace métrique (X, d) converge vers un point x si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon.$$

On note alors $lim_{n\to\infty} x_n = x$.
Définition 1.2.3 : Suite Cauchy
Une suite (x_n) est dite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : m, n \geqslant N \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

L'intuition est qu'une suite de Cauchy devient arbitrairement proche d'elle-même à partir d'un certain rang, même sans connaître son éventuelle limite.

Remarque 1.2.4
Dans un espace métrique général, une suite de Cauchy n'est pas nécessairement convergente. Cependant, dans les espaces métriques complets, toute suite de Cauchy converge, ce qui est crucial pour la théorie du point fixe.

1.2.3 *Espaces métriques complets* :

Définition 1.2.5 : Complétude
Un espace métrique (X, d) est dit complet si toute suite de Cauchy dans X converge vers un élément de$X$.
La complétude est une hypothèse clé dans de nombreux théorèmes de point fixe, notamment celui de Banach. Elle garantit qu'une construction par approximations successives (procédés itératifs) ne quitte jamais l'espace.

Example 1.2.6

. $\mathbb{R}$, muni de la distance usuelle, est un espace métrique complet.

. $C([a, b])$ muni de d_∞ est complet.

. $\mathbb{Q}$ (l'ensemble des rationnels) n'est pas complet sous la distance usuelle : il existe des suites de Cauchy qui ne convergent pas dans $\mathbb{Q}$ (par exemple, vers $\sqrt{2}$).

Proposition 1.2.7
Tout espace métrique peut être plongé dans un espace complet : c'est le processus de complétion (exemple : $\mathbb{Q}$ devient $\mathbb{R}$).

1.2.4 *Concepts liés : compacité et continuité* :

Bien que la compacité ne soit pas toujours requise dans la théorie classique du point fixe, elle joue un rôle essentiel dans certaines généralisations (ex : théorème de Schauder).

Définition 1.2.8 : Compacité
Un sous-ensemble K d'un espace métrique (X, d) est compact si toute suite de points de K possède une sous-suite convergente vers un point de K.

La compacité implique la complétude.

Définition 1.2.9 : Application continue
Une application $f : (X, d) \to (Y, d')$ entre deux espaces métriques est dite continue si :

$$\forall (x_n) \longrightarrow x \Longrightarrow (f(x_n)) \longrightarrow f(x).$$

La continuité est une hypothèse indispensable dans de nombreux résultats de points fixes, garantissant que la limite des itérés est bien un point fixe.

1.3 Les théorèmes classiques de points fixes

La théorie du point fixe repose sur quelques théorèmes fondamentaux qui structurent tout un pan de l'analyse moderne. Parmi eux, le théorème de Banach occupe une place centrale. Au fil du temps, ce résultat a été généralisé sous diverses formes, en particulier pour des applications commutatives, ouvrant ainsi la voie à des approches plus riches et plus flexibles.

1.3.1 Le théorème du point fixe de Banach

Le théorème du point fixe de Banach (aussi appelé principe du point fixe de Banach-Caccioppoli) peut être énoncé ainsi :

Définition 1.3.1 (Banach, 1922)

Soit (X, d) un espace métrique complet et $T : X \longrightarrow X$ une application contractante, c'est-à-dire :

$$\exists k \in (0,1) \quad tel\ que \quad \forall x, y \in X, d(T(x), T(y)) \leqslant kd(x, y).$$

Alors :

1. L'application T possède un unique point fixe $x^* \in X$ tel que $T(x^*) = x^*$,
2. Pour tout $x_0 \in X$, la suite définie par $x_{n+1} = T(x_n)$ converge vers x^*.

Démonstration (esquisse)

La démonstration repose sur la construction de la suite de Picard (x_n) et sur l'utilisation de l'inégalité triangulaire et de l'inégalité de contraction pour montrer que (x_n) est une suite de Cauchy, puis en utilisant la complétude de X pour garantir la convergence.

Remarque 1.3.2

La rapidité de convergence est géométrique : la distance $d(x_n, x^*)$ décroît comme k^n, ce qui rend ce théorème très puissant pour les méthodes numériques.

1.3.2 Généralisation par Jungck : les points fixes communs

Le théorème de Banach suppose une unique application contractante. Toutefois, dans plusieurs contextes, il est utile d'étudier deux applications commutatives, c'est-à-dire satisfaisant :

$$T(S(x)) = S(T(x)) \quad \forall x \in X.$$

C'est dans cette optique que G. Jungck, en 1976, a proposé une extension importante.

Théorème 1.3.3 (Jungck, 1976)

Soit (X, d) un espace métrique complet, et soient $T, S : X \longrightarrow X$, deux applications

satisfaisant :
. $S(X) \subseteq T(X)$,
. $d(S(x), S(y)) \leqslant kd(T(x), T(y))$ *pour un* $k \in (0, 1)$,
. T est continue,
. S et T commutent.
Alors S et T admettent un unique point fixe commun $x^* \in X$ tel que :

$$T(x^*) = S(x^*) = x^*.$$

Commentaires
. La condition $S(X) \subseteq T(X)$ est appelée condition d'inclusion.
. Ce théorème englobe celui de Banach en considérant $T = I$ (Identité).
. Il permet d'étudier des couples d'applications où l'une est contractive au sens faible par rapport à l'autre.

1.3.3 Importance de la commutativité

La commutativité entre S et T est un ingrédient clé dans la démonstration et l'existence du point fixe commun. Elle garantit que les itérations de l'une et de l'autre se comportent de manière cohérente, évitant des phénomènes de divergence dus à des compositions incohérentes.

Définition 1.3.4 (Applications commutatives)
Deux applications $S, T : X \longrightarrow X$, sont dites commutatives si :

$$T(S(x)) = S(T(x)) \quad \forall x \in X.$$

En pratique, cette hypothèse assure que la dynamique des deux fonctions interagit de manière contrôlée.

1.3.4 Comparaison entre Banach et Jungck

Aspect	Théorème de Banach	Théorème de Jungck
Nombre d'applications	Une seule application contractante	Deux applications commutatives
Condition principale	Contractivité sur T	Contractivité de S par rapport à T
Inclusion	Pas requise	$S(X) \subseteq T(X)$ requise
Résultat	Unique point fixe	Unique point fixe commun

1.3.5 Applications typiques des théorèmes classiques

Les théorèmes de Banach et de Jungck sont largement utilisés pour :
. Résoudre des équations intégrales (ex : équations de Fredholm, Volterra),

. Étudier les systèmes d'équations différentielles (existence de solutions locales/globales),
. Concevoir des algorithmes d'approximation,
. Analyser la stabilité des systèmes dynamiques,
. Résoudre des problèmes d'optimisation et de jeux.

Ils constituent ainsi des outils fondamentaux non seulement en mathématiques théoriques, mais aussi en ingénierie, en économie mathématique, en physique et en informatique.

1.4 De la contraction classique aux F-contractions

1.4.1 Limitations des contractions classiques

Le théorème du point fixe de Banach, malgré sa grande utilité, impose une contrainte forte : l'uniformité de la diminution des distances par un facteur $k < 1$. Cela peut s'avérer trop restrictif dans certaines situations, notamment :
. Lorsque l'application n'est pas strictement contractante mais tend à "rapprocher" les points à long terme,
. Lorsque la structure de l'espace n'autorise pas une contraction globale stricte.

Dans ces cas, la nécessité de relâcher la condition stricte de contractivité a conduit à la définition de nouvelles classes de mappings.

1.4.2 Notion de F-contraction

Pour pallier cette rigidité, la notion de F-contraction a été introduite.
Elle repose sur l'idée de moduler la relation de contraction par une fonction auxiliaire F, offrant une plus grande flexibilité.
Définition 1.4.1 (F-contraction)
Soient (X, d) et (X', d') deux espaces métriques.
Une application $g : X \longrightarrow X'$ est dite une F-contraction relative à une fonction $f : X \longrightarrow X'$ s'il existe une constante $k \in (0, 1)$ telle que :

$$d'(g(x), g(y)) \leqslant kd'(f(x), f(y)) \; \forall x, y \in X.$$

On note alors $g\dfrac{k}{f} \longrightarrow$ contraction.
Commentaire
. Si f est l'identité, on retrouve la contraction classique de Banach.
. En permettant que g soit "contractif par rapport à" f, la notion s'élargit considéra-

blement.

1.4.3 Motivation du concept

Les motivations principales derrière les F-contractions sont :
. Généraliser les méthodes itératives pour des applications plus larges,
. Traiter des situations où l'on ne dispose pas de contraction stricte mais seulement d'une contraction relative,
. Étendre la théorie du point fixe à des contextes plus complexes (espaces non linéaires, mappings combinés...).

1.4.4 Propriétés fondamentales des F-contractions

Quelques propriétés importantes méritent d'être soulignées :
. Injectivité relative : Si f est injective et $g\frac{k}{f} \longrightarrow$ contraction, alors g est aussi injective.
. Transitivité de la contractivité : Si f est k'-contractante, alors g est une kk'-contraction.
. Continuité conservée : Si f est uniformément continue, alors g est aussi uniformément continue.
. Suites de Picard : Sous certaines hypothèses, les itérations successives de g ou f génèrent des suites de Cauchy, assurant convergence.

1.4.5 Comparaison : contraction classique vs F-contraction

Caractéristique	**Contraction classique**	**F-contraction**
Condition	$d(T(x), T(y)) \leqslant kd(x, y)$	$d'(g(x), g(y)) \leqslant kd'(f(x), f(y))$
Nombre d'applications	Une seule	Deux (f et g)
Application directe	Oui	Non, relative à f
Flexibilité	Limitée	Large
Exemples d'utilisation	Méthodes itératives simples	Problèmes complexes, mappings liés

1.4.6 Importance dans les théories modernes

Les F-contractions permettent de :
. Travailler avec des mappings associés ou couplés,
. Résoudre des problèmes où l'hypothèse d'une contractivité stricte est difficile à vérifier,
. Traiter des situations en analyse numérique, optimisation ou contrôle, où plusieurs

opérateurs interagissent.
Elles constituent ainsi une extension naturelle mais puissante du cadre classique de Banach et Jungck.

1.5 Propriétés et comportement des F-contractions

La théorie des F-contractions ne se limite pas à leur définition. Elle est enrichie par des propriétés fondamentales garantissant le comportement bien ordonné des suites itératives, l'existence de points fixes communs, ainsi que des résultats analogues au principe de Banach dans des cadres plus généraux.

Dans cette section, nous allons présenter les principales propriétés analytiques, illustrées par des théorèmes, propositions, corollaires et démonstrations adaptés.

1.5.1 Suites de Picard associées aux F-contractions

Un des outils essentiels pour étudier les comportements d'une F-contraction est la suite de Picard.

Définition 1.5.1 (Suite de Picard)

Soient deux applications $f, g : X \longrightarrow X$ dans un espace métrique (X, d), et $x_0 \in X$.
On définit deux suites associées : $\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n), \\ y_{n+1} = g(y_n), \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

On les appelle respectivement suite de Picard associée à f et suite de Picard associée à g.

1.5.2 Comportement des suites sous F-contraction

Le comportement des suites de Picard est assuré par plusieurs résultats fondamentaux.

Théorème 1.5.2 (Convergence sous F-contraction)
Soient $f, g : X \longrightarrow X$ deux applications telles que g soit une F-contraction relative à f avec un facteur $k \in (0, 1)$, f est continue, et f et g commutent :

$$f(g(x)) = g(f(x)) \; \forall x \in X.$$

Si la suite $f^n(x_0)$ est une suite de Cauchy, alors la suite $g^n(x_0)$ est également une suite de Cauchy, donc converge dans X si X est complet.

Esquisse de démonstration
. Etape 1 : Montrer que $g(f^n(x_0))$ converge par la continuité de g.
. Etape 2 : Utiliser la propriété de contraction pour établir que les itérés de g rapprochent les points de manière contrôlée
. Etape 3 : Conclure que $g^n(x_0)$ est Cauchy.

Corollaire 1.5.3
Sous les mêmes hypothèses, si f possède un point fixe, alors g possède aussi un point fixe.

Commentaire
La dynamique entre f et g est telle que, même si g n'est pas une contraction stricte de Banach, sa relation contractante avec f permet de transférer les propriétés de convergence.

1.5.3 Existence et unicité d'un point fixe commun

Un des résultats fondamentaux dans ce cadre est :
Théorème 1.5.4 (Point fixe commun pour F-contractions)
Sous les hypothèses précédentes, s'il existe un $x_0 \in X$ tel que :
. La suite $f^n(x_0)$ converge vers un point t,
. La suite $g^n(x_0)$ converge vers un point r,
. Et la suite $f^n(r)$ est bornée,
alors r est un unique point fixe commun de f et g, c'est-à-dire :

$$f(r) = g(r) = r.$$

Idée de la démonstration
. Utiliser successivement la propriété de contraction pour montrer que $g(t)$ est proche de r,
. Appliquer la continuité pour passer à la limite,
. Montrer que l'unicité découle de l'inégalité stricte liée au facteur k.

1.5.4 Extensions supplémentaires

En présence d'une contraction relative g par rapport à f, on peut obtenir :
. Critères alternatifs d'existence de points fixes communs en remplaçant l'inclusion par des propriétés de convergence,
. Extensions à des mappings multiples, avec des combinaisons plus complexes de contractions.

1.5.5 Résumé des propriétés principales des F-contractions

Propriété	**Résultat**
Continuité de f requise ?	Oui
Nécessité de la commutativité $g \circ f = f \circ g$?	Oui
Convergence des suites de Picard	Assurée sous contraction relative
Existence d'un point fixe commun	Garantie
Unicité du point fixe commun	Oui, par stricte contractivité

1.6 Applications avancées

La puissance de la théorie des F-contractions ne réside pas uniquement dans sa beauté mathématique, mais aussi dans ses nombreuses applications concrètes dans divers domaines scientifiques.
Cette section présente plusieurs illustrations significatives, en particulier en analyse numérique, en systèmes dynamiques et en optimisation voir [9, 20].

1.6.1 Application en analyse numérique

L'analyse numérique repose largement sur des procédures itératives pour résoudre des équations.
De nombreux schémas sont en fait des recherches de points fixes.

Exemple 1.6.1 (Résolution d'équations non linéaires)
Considérons une équation $f(x) = 0$ où f est une fonction continue.
On peut reformuler ce problème en cherchant un point fixe de l'application :

$$T(x) = x - \lambda f(x),$$

avec un paramètre λ adapté.

Si T n'est pas contractante au sens classique, mais qu'il existe un g tel que g soit une F-contraction relative à T, alors les itérations successives de g mèneront à une solution approximative.

Méthodologie :
. Choisir un point initial x_0,
. Itérer selon $x_{n+1} = g(x_n)$,
. Vérifier la convergence vers un point fixe x^*,
. En déduire que $f(x^*) \approx 0$.

Commentaire
La théorie des F-contractions permet donc d'élargir le champ d'applications de méthodes de type Newton, Picard ou Mann à des cas non strictement contractants.

1.6.2 Application aux systèmes dynamiques

Dans les systèmes dynamiques, les points fixes correspondent souvent aux états d'équilibre.
La stabilité d'un système peut être étudiée en analysant la convergence vers ces états.

Exemple 1.6.2 (Stabilité d'un système)
Considérons un système discret donné par une fonction d'évolution $\phi : X \longrightarrow X$.
Si ϕ n'est pas strictement contractante mais qu'il existe f tel que ϕ soit une F-contraction relative à f, alors :
. Il existe un point fixe commun x^*,
. Le système converge vers cet état stable sous l'itération de ϕ.

Application
En modélisation économique ou écologique, de tels systèmes apparaissent fréquemment où les comportements asymptotiques sont cruciaux.

1.6.3 Application en optimisation

Dans l'optimisation, trouver un optimum local ou global peut souvent être assimilé à trouver un point fixe d'une certaine application définie par des règles de descente.

Exemple 1.6.3 (Algorithme de projection)
Dans des méthodes de type projection sur des ensembles convexes, on définit des opérateurs P tels que :

$$P(x) = projection\ de\ x\ sur\ un\ ensemble\ C.$$

Si une transformation g associée est une F-contraction relative à P, alors la suite des itérés converge vers un point fixe, est une solution du problème d'optimisation.

1.6.4 Illustration par un exemple calculé

Exemple 1.6.4 (Contraction dans une boule fermée)
Soit l'espace $X = \mathbb{R}$ avec la distance $d(x, y) =\mid x-y \mid$, et soit $g(x) = \frac{1}{2}x$, $f(x) = \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$.

On vérifie facilement que :

$$\mid g(x) - g(y) \mid= \frac{1}{2} \mid f(x) - f(y) \mid$$

Donc g est une F-contraction par rapport à f avec $k = \frac{1}{2}$.
. Le point fixe commun est $x^* = 0$.

. En itérant g ou f à partir d'un point x_0, la convergence est assurée par le théorème de la F-contraction.

1.6.5 Extensions possibles

La théorie développée peut également s'étendre vers :
. Espaces métriques généralisés.
. Systèmes d'équations différentielles stochastiques,
. Méthodes itératives adaptatives pour la résolution numérique,
.Applications en machine learning : algorithmes d'optimisation itérative à convergence garantie.

1.6.6 Résumé

Domaine d'application	**Exemple d'utilisation des F-contractions**
Analyse numérique	Résolution d'équations non linéaires
Systèmes dynamiques	Recherche d'états d'équilibres
Optimisation	Algorithmes de projection itérative
Machine learning	Algorithmes d'optimisation stochastique

1.7 Développements théoriques récents

L'intérêt pour les théories de point fixe ne cesse de croître, en particulier avec l'introduction des F-contractions qui ont stimulé de nouvelles généralisations. Cette section explore les progrès théoriques récents qui enrichissent encore davantage cette branche des mathématiques.

1.7.1 Généralisation à plusieurs mappings

Alors que la théorie classique s'intéresse à un ou deux mappings, les travaux récents considèrent des familles d'applications commutatives.
Cela permet d'étudier des systèmes complexes où plusieurs transformations interviennent simultanément.

Définition 1.7.1 (Contraction multiple)
Soient $f_1, f_2, \ldots, f_n : X \longrightarrow X$ des applications telles que chacune satisfait une propriété de F-contraction relative aux autres.
On recherche un point x^* commun satisfaisant :

$$f_i(x^*) = x^* \ \forall i = 1, ..., n.$$

Théorème 1.7.2 (Point fixe commun pour familles de mappings)
Sous certaines hypothèses de commutativité et de contraction généralisée, il existe un unique point fixe commun pour toute la famille f_i.

1.7.2 F-contractions généralisées

Les F-contractions généralisées introduisent des fonctions de contrôle supplémentaires dans la définition :

Définition 1.7.3 (F-contraction généralisée)
Il existe une fonction $\phi : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$, continue et croissante, nulle uniquement en 0, telle que :

$$d(g(x), g(y)) \leqslant d(f(x), f(y)) - \phi(d(f(x), f(y))).$$

Cette condition est plus souple et permet de traiter des mappings asymptotiquement contractants.

1.7.3 Utilisation de distances modifiées

Au lieu d'utiliser directement la métrique d, certains travaux utilisent :
. Distances altérées (par exemple $d'(x, y) = \sqrt{d(x, y)}$,
. Distances pondérées (ex : $d_\omega(x, y) = \omega(x, y)d(x, y)$ où ω est un poids),
. Quasi-métriques, où $d(x, y)$ n'est pas nécessairement symétrique.

Ces approches permettent d'adapter la théorie à des cadres non standards comme :
. Les espaces de Banach généralisés,
. Les espaces métriques flous,
. Les réseaux neuronaux dynamiques.

1.7.4 Contractions faibles et asymptotiques

Un axe majeur de recherche consiste à étudier des mappings qui ne sont contractifs que "au loin", c'est-à-dire asymptotiquement :
. Contractions asymptotiques : la propriété de contraction n'est vérifiée qu'à partir d'une certaine distance.
. Contractions faibles : la diminution n'est pas uniforme, mais contrôlée.
Ces concepts modélisent mieux des systèmes naturels tels que les réseaux biologiques ou sociaux, où les interactions locales peuvent être faibles mais dominantes globalement.

1.7.5 Perspectives de recherches futures

La théorie moderne des points fixes, notamment autour des F-contractions, ouvre plusieurs pistes de recherche :
. Analyse numérique avancée : accélération des schémas itératifs via des contractions relatives.
. Systèmes dynamiques stochastiques : existence de points fixes dans des espaces aléatoires.
. Théorie des jeux : points d'équilibre dans des jeux avec interactions non linéaires.
. Intelligence artificielle : convergence garantie des algorithmes d'apprentissage profond.
. Optimisation multi-objectif : solutions simultanées optimales via contractions multiples.

1.7.6 Résumé

Développement récent	Description
Multiples mappings	Étude de familles commutatives
Contractions généralisées	Utilisation de fonctions ϕ
Distances modifiées	Adaptations aux espaces atypiques
Asymptoticité	Modélisation de comportements réels
Perspectives	Applications en mathématiques appliquées et sciences de l'ingénieur

1.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons posé les bases théoriques nécessaires pour aborder de manière rigoureuse l'étude des points fixes et des F-contractions, en insistant sur leur rôle fondamental en analyse fonctionnelle, en optimisation, ainsi que dans les systèmes dynamiques.

Nous avons commencé par rappeler les concepts essentiels d'espaces métriques, de convergence et de complétude, indispensables pour garantir la convergence des suites générées par des itérations d'applications.

Puis, nous avons revisité les théorèmes classiques :
. Le théorème de Banach, qui établit la convergence vers un point fixe unique sous l'hypothèse de contraction stricte,
. La généralisation de Jungck, qui ouvre la voie à l'étude des points fixes communs

pour des mappings commutatifs.
Face aux limites des contractions classiques, nous avons introduit le concept de F-contraction, qui permet une plus grande flexibilité en autorisant des contractions relatives à d'autres mappings.
Nous avons étudié leurs propriétés, leur comportement, ainsi que leurs nombreuses applications concrètes, notamment en analyse numérique, systèmes dynamiques et optimisation.

Enfin, nous avons exploré les développements récents, incluant :
. L'étude de familles de mappings commutatifs,
. Les généralisations par fonctions auxiliaires (ϕ),
. L'introduction de distances modifiées et des contractions faibles ou asymptotiques,
. Et de nouvelles perspectives de recherche dans les sciences exactes et appliquées.

1.8.1 Perspectives pour les chapitres suivants

Les résultats présentés dans ce premier chapitre constituent les outils fondamentaux et le cadre conceptuel nécessaires pour aborder les théories avancées que nous développerons par la suite.

Les chapitres suivants s'orienteront vers :
. L'étude approfondie de théorèmes spécifiques de points fixes communs dans des contextes élargis,
. L'application des théories dans des cas pratiques complexes,
. Le développement de nouvelles méthodes numériques basées sur les F-contractions généralisées,
. Et une exploration des liens avec l'analyse stochastique et les algorithmes d'apprentissage automatique.
Ce chapitre constitue ainsi un socle solide sur lequel repose l'ensemble du travail de recherche développé dans cette thèse.

Chapitre 2

Point fixe commun d'auto-applications F-contractives commutatives à suite bornée unique

L'objectif de ce chapitre est d'établir l'existence d'un point fixe commun pour des applications qui satisfont et étendent la condition de F-contraction. Pour étayer nos résultats, nous présentons des définitions et des propriétés pertinentes associées aux applications de F-contraction. De plus, nous établissons un analogue du théorème de contraction de Banach. Nos résultats contribuent à une meilleure compréhension de ce domaine en étendant et en généralisant les résultats existants dans la littérature.

2.1 Introduction

En 1976, Jungck [22] a été le premier à démontrer que si deux fonctions continues, f et g, définies sur un espace métrique complet, commutent et que g est une F-contraction telle que l'image de g soit incluse dans celle de f, alors f et g possèdent un unique point fixe commun. Il est essentiel de noter que la condition d'inclusion dans le théorème de Jungck est suffisante mais non nécessaire pour l'existence de points fixes communs. Dans cette étude, nous conservons toutes les conditions mentionnées dans le théorème de Jungck et remplaçons l'inclusion, qui est une condition algébrique non algorhitmique , par une condition topologique algorithmique formulée sous la forme d'une suite de Picard bornée. Ainsi, nous obtenons le même résultat que le théorème de Jungck mais avec des hypothèses différentes. Dans ce cas, nous assurons l'existence et l'unicité du point fixe commun sous des conditions nécessaires et suffisantes fournissant un algorhitme pour le calcul approximatif de cet unique point. Ces résultats généralisent également ceux discutés dans l'article Boureghda et Chebel [10].

2.2 Préliminaires

Rappelons certaines définitions et résultats établis concernant les points fixes communs Qasim [28].

Définition 2.1. [10] Considérons deux espaces métriques (X, d) munis d'une distance d. Soient f et g des applications de X dans lui-même. Une application g est dite F-contractante s'il existe une constante positive $0 < k < 1$ telle que :

$$d(g(x), g(y)) \leq kd(f(x), f(y)), \forall x, y \in X. \tag{2.1}$$

Nous notons cette relation par $g - k - f$. Si f est continue, nous appelons $g - k - f$ une contraction continue.

L'objectif de ce travail est de généraliser le théorème suivant en éliminant la condition de convergence de l'hypothèse et en simplifiant les hypothèses.

Théorème 2.1 [10] Considérons une application de contraction continue $g - k - f$ dans un espace métrique complet X dans lui-même. Supposons de plus que les applications f et g commutent entre elles et qu'il existe un élément $x_0 \in X$ tel que la suite de Picard $\{f^n(x_0)\}_{n\geq 0}$ converge vers $t_0 \in X$. Dans ce cas, la suite de Picard $\{g^n(x_0)\}_{n\geq 0}$ converge vers un point $r \in X$. De plus, si la suite de Picard $\{f^n(r)\}_{n\geq 0}$ est bornée, alors la suite $\{g^n(t)\}_{n\geq 0}$ converge vers r, qui est l'unique point fixe commun des applications f et g.

Remarque 2.1. Si nous remplaçons l'application f par l'application identité dans la condition (2.1), nous retrouvons le cas classique des applications contractantes, ce qui nous conduit au célèbre théorème du point fixe de Banach, comme discuté dans Gustave [20].

2.3 Résultats et théorèmes principaux

La preuve de nos théorèmes repose sur l'établissement de définitions, propriétés, propositions et lemmes.

Dans ce qui suit, soit x_0 un élément d'un espace métrique complet non vide X. Pour simplifier la notation, nous posons $g^0(x_0) = x_0, f^0(x_0)) = x_0$, et par récurrence $g^{n+1}(x_0) = g(g^n(x_0)), f^{n+1}(x_0) = f(f^n(x_0))$, où $n \in \{1, 2, ...\}$.

Les résultats présentés dans cette sous-section sont souvent appelés une variante du principe de contraction de Banach.

Théorème 2.1. *Soit $g-k-f$ une application de contraction continue sur l'espace métrique complet X dans lui-même, telle que f et g commutent entre elles. S'il existe un élément $x_0 \in X$ tel que la suite $\{f^n(x_0)\}_{n\geq 0}$. soit bornée, alors les applications f et g possèdent un unique point fixe commun dans X.*

Pour établir la preuve du théorème principal, nous avons besoin des lemmes suivants.

Lemme 2.2. *Soit $g-k-f$ une application de contraction sur l'espace métrique complet X dans lui-même, telle que f et g commutent entre elles. Alors l'inégalité suivante est vérifiée :*

$$d(g^n(x), g^n(y)) \leq k^n d(f^n(x), f^n(y)), \quad \forall x, y \in X, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Démonstration. Considérons deux éléments x, y dans X. D'après la condition 2.1, nous avons :

$$d(g \circ g^{n-1}(x), g \circ g^{n-1}(y)) \leq kd(f \circ g^{n-1}(x), f \circ g^{n-1}(y)).$$

En utilisant la commutativité, nous observons que :

$$f \circ g^n = g^n \circ f, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.3}$$

Le même raisonnement donne :

$$d(f \circ g^{n-1}(x), f \circ g^{n-1}(y)) = d(g^{n-1} \circ f(x), g^{n-1} \circ f(y)).$$

En appliquant à nouveau les conditions 2.3 et 2.1, nous obtenons :

$$d(g^{n-1} \circ f(x), g^{n-1} \circ f(y)) \leq kd(g^{n-2} \circ f^2(x), g^{n-2} \circ f^2(y)).$$

Par récurrence, nous déduisons :

$$d(g^n(x), g^n(y)) \leq k^n d(f^n(x), f^n(y)).$$

Ceci conclut notre démonstration. □

Lemme 2.3. *Sous les hypothèses du Théorème 2.1, l'inégalité suivante est établie :*

$$d((f \circ g)^n(x_0), (f \circ g)^{n-1}(x_0)) \leq k^{n-1} d(g \circ f^{2n-1}(x_0), f^{2n-2}(x_0)) \leq sk^{n-1}, \forall x, y \in X. \tag{2.4}$$

Démonstration. Soit x_0 un element de X. En appliquant le **??**, on déduit :

$$\begin{aligned} d((f \circ g)^n(x_0), (f \circ g)^{n-1}(x_0)) &= d(g^{n-1}(g \circ f^n)(x_0)), g^{n-1}(f^{n-1}(x_0))) \\ &\leq k^{n-1} d(g \circ f^{2n-1}(x_0), f^{2n-2}(x_0)) \\ &\leq sk^{n-1}. \end{aligned}$$

En vertu du Lemme 2.2 et du caractère borné de la suite $\{f^n(x_0)\}_{n\geq 0}$, on déduit que la distance $d(g\circ f^{2n-1}(x_0), f^{2n-2}(x_0)$ est également bornée. Posons

$$s = \sup_{n\geq 1} d(g\circ f^{2n-1}(x_0), f^{2n-2}(x_0))$$

Ceci achève la démonstration. □

Lemme 2.4. *Sous les hypothèses du Théorème 2.1, la suite $\{(f\circ g)^n(x_0)\}_{n\geq 0}$ converge dans l'espace métrique complet X*

Démonstration. Pour établir la convergence, nous montrons d'abord que la suite est une suite de Cauchy. Considérons des entiers n, m, tels que $n > m$. En utilisant l'inégalité triangulaire et le Lemme (3.2), nous obtenons

$$\begin{aligned} d((f\circ g)^n(x_0), (f\circ g)^m(x_0)) &\leq \sum_{j=m}^{j=n-1} d((f\circ g)^j(x_0), (f\circ g)^{j+1}(x_0)) \\ &\leq \sum_{j=m}^{j=n-1} sk^j \\ &\leq s\frac{k^m - k^n}{1-k}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

En faisant tendre $n\to\infty$ et $m\to\infty$, la suite devient une suite de Cauchy. Par complétude, elle converge donc vers une limite l. En exploitant la continuité des applications f et g, nous observons que $(f\circ g)(l) = l$. Ceci achève la démonstration du lemme. □

Corollaire 2.5. *Sous les hypothèses du Théorème 2.1, si la suite $\{f^n(x_0)\}_{n\geq 0}$ est bornée, alors la suite $\{(f\circ g)^n(x_0)\}_{n\geq 0}$ est également bornée dans l'espace métrique X.*

Lemme 2.6. *Sous les hypothèses du Lemme 2.2, il existe une constante c telle que :*

$$\forall n, m\in\mathbb{N}, n > m,\quad d(g^n(l), g^m(l)) \leq c\frac{k^{\frac{m}{2}} - k^{\frac{n}{2}}}{1-\sqrt{k}}. \tag{2.6}$$

De plus, la suite $\{g^n(l)\}_{n\geq 0}$ est convergente.

Démonstration. Soit n un entier positif. On vérifie facilement l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} d(g^n(l), g^{n-1}(l)) &= d(g\circ g^{n-1}(l), g\circ g^{n-2}(l)); \\ \textit{Par la condition 2.1} &\leq kd(f\circ g^{n-1}(l), f\circ g^{n-2}(l)); \\ \textit{En exploitant la commutativité} &\leq kd(g^{n-2}(g\circ f)(l), g^{n-3}((g\circ f)(l)), \\ \textit{et par le lemme (3.3)} &\leq kd(g^{n-2}(l), g^{n-3}(l)). \end{aligned}$$

En procédant par récurrence, on distingue deux cas :
1. Si n est impair, alors :

$$d(g^n(l), g^{n-1}(l)) \leq k^{\frac{n-1}{2}} d(g(l), l).$$

2. Si n est pair, alors :

$$d(g^n(l), g^{n-1}(l)) \leq k^{\frac{n}{2}} d(f(l), l).$$

Posons

$$c = \max\{d(g(l), l), \sqrt{k}\, d(f(l), l)\}.$$

Il vient alors :

$$d(g^n(l), g^{n-1}(l)) \leq ck^{\frac{n-1}{2}}.$$

Pour tous entiers positifs n et m avec $n > m$, on a :

$$\begin{aligned} \forall n > m, \quad d(g^n(l), g^m(l)) \leq \sum_{j=m}^{n-1} d(g^j(l), g^{j+1}(l)) \quad &\leq \quad c \sum_{j=m}^{n-1} k^{\frac{j}{2}} \\ &\leq \quad c \frac{k^{\frac{m}{2}} - k^{\frac{n}{2}}}{1 - \sqrt{k}}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

En faisant tendre $n \to \infty$ et $m \to \infty$, on obtient $d(g^n(l), g^m(l)) \to 0$. Par conséquent, la suite $\{g^n(l)\}_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy et, par complétude, converge vers une limite l_1. La continuité de g implique $g(l_1) = l_1$, ce qui achève la démonstration du lemme. □

Lemme 2.7. *Pour tout entier $n \geq 1$, l'égalité suivante est satisfaite :*

$$(g \circ f)(g^n(l)) = g^n(l).$$

Démonstration. Evident. □

Lemme 2.8. *Sous les conditions du Théorème 2.1, l'application composée $g \circ f$ possède un point fixe dans l'espace X.*

Démonstration. En utilisant les lemmes 2.6 et 2.7, nous établissons que la suite $(g \circ f)(g^n(l))$ est une suite de Cauchy dans l'espace complet X. Par conséquent, elle converge vers la limite $l_1 \in X$. En passant à la limite et en exploitant la continuité de $g \circ f$, nous déduisons que :

$$\lim_{n \to +\infty} (g \circ f)(g^n)(l) = l_1 = g \circ f(l_1).$$

Ce qui conclut la preuve. □

Maintenant, nous procédons à la démonstration du résultat principal du Théorème 2.1.

Démonstration. **Preuve du théorème 2.1.**

La nécessité de la condition est évidente. Si f et g ont un point fixe commun t, alors la suite $(f^n(t))_{n\geq 0}$ est bornée. Pour la suffisance, supposons qu'il existe un élément $x_0 \in X$ tel que la suite $(f^n(x_0))_{n\geq 0}$ soit bornée. Il est facile de voir que l_1 est un point fixe commun des applications f et g. En effet, par les lemmes 3.4, 3.6 et la commutativité, nous avons : $(f^n(x_0))_{n\geq 0}$ est bornée. Ensuite, nous prouvons l'unicité du point fixe commun de f et g. Soient l_1 et l_2 deux points fixes communs de f et g, c'est-à-dire $f(l_1) = g(l_1) = l_1$ et $f(l_2) = g(l_2) = l_2$. En calculant la distance entre l_1 et l_2, nous obtenons :

$$d(l_1, l_2) = d(g(l_1), g(l_2)) \leq kd(f(l_1), f(l_2)) = kd(l_1, l_2).$$

De cette inégalité, nous déduisons que $(1-k)d(l_1, l_2) \leq 0$. Puisque $k < 1,$, alors $l_1 = l_2$. Cela montre l'unicité du point fixe commun et conclut la preuve de notre théorème.

□

Exemple 3.1 Soit $X = [1, +\infty[$ muni de la métrique usuelle. Pour des entiers p, q tels que $p < q$, définissons $f, g : X \to X, f(x) = x^p$ *and* $g(x) = x^q$.
Toutes les conditions du théorème sont satisfaites. En effet, f et g commutent, la contraction est donnée par $|f(x)-f(y)| \leq \dfrac{p}{q}|g(x)-g(y)|, \forall x, y \in X$pour tout $x, y \in X$, et enfin, les itérations de la suite de Picard $g^n(1) = 1$ sont bornées au point $x_0 = 1$. Dans ce cas, l'unique point fixe commun de f et g est l'élément 1.

Remarque 3.1 Le corollaire suivant illustre que la condition d'inclusion dans le théorème 1.1 de Jungck [22] et la condition de bornitude dans notre théorème sont indépendantes l'une de l'autre.

Corollaire 3.3. Soient f et g des applications commutantes d'un espace métrique complet (X, d) dans lui-même, où f est continue. Considérons des entiers positifs m, n et p. Supposons que l'inégalité

$$d(g^m(x), g^m(y)) \leq kd(f^n(x), f^n(y)), \quad 0 < k < 1 \quad \textit{soit vérifiée.} \tag{2.8}$$

Alors, les applications f et g ont un unique point fixe commun si et seulement s'il existe un élément $x_0 \in X$ tel que la suite $\{f^p(x_0)\}_{p\geq 0}$ est bornée.

Les corollaires suivants traitent de l'existence d'un point fixe commun pour trois applications auto-commutatives.

Corollaire 3.4. Soient f, g et h trois applications continues et commutantes définies sur un espace métrique complet dans lui-même. Supposons que la condition

$$d(g(x), g(y)) \leq kd(h(x), h(y)), \ \forall x, y \in X. \quad soit\ vérifiée. \tag{2.9}$$

Les applications f, g et h ont un unique point fixe commun dans le sous-espace X si et seulement s'il existe un élément $x_0 \in X$ tel que la suite $\{h^n(x_0)\}_{n \geq 0}$ est bornée.

Démonstration. Par hypothèse, g est une F-contraction relative à h. Puisque h est continue et commute avec g, le Théorème 3.1 guarantit que g et h admettent un unique point fixe commun, noté $z \in X$, c'est-à-dire :

$$g(z) = h(z) = z.$$

Ensuite, nous étendons ce résultat pour inclure f. Par la commutativité deux à deux de f, g, et h :

$$g(f(z)) = f(g(z)) = f(z)$$

et

$$h(f(z)) = f(h(z)) = f(z).$$

Cela implique que $f(z)$ est également un point fixe commun de g et h. Or, le Théorème 3.1 garantit l'unicité d'un tel point fixe z. Par conséquent, nous devons avoir :

$$f(z) = z.$$

En combinant ces résultats, nous concluons :

$$f(z) = g(z) = h(z) = z.$$

$\square$

Corollaire 3.5. Sous les hypothèses du corollaire 3.4, si l'application h est bornée, alors les applications f, g et h ont un unique point fixe commun dans X.

Dans ce qui suit, nous fournissons une version plus générale que le théorème 3.23 donné en Jungck [22].

Théorème 3.2. Soient $h - k - g$ et $g - kk' - f$ deux applications de contraction dans un espace métrique complet X dans lui-même. Supposons qu'elles soient continues et commutent deux à deux, et qu'il existe un élément $x_0 \in X$ tel que la suite de Picard $\{f^n(x_0)\}_{n \geq 0}$ est bornée dans X. Alors, les applications f, g et h ont un unique point fixe commun dans X.

Proposition 3.1. Soient$g_1 - k - f_1$ and $g_2 - k' - f_2$ deux applications de contraction continues dans un espace métrique complet M dans lui-même, où f_1 commute avec g_2. Supposons que $g_1 \circ g_2$ et $f_2 \circ f_1$ commutent entre elles, et que $\{(f_2 \circ f_1)^n(x_0)\}_{n \geq 0}$ est bornée dans X. Alors, $g_1 \circ g_2$ and $f_2 \circ f_1$ ont un unique point fixe commun dans X.

Enfin, nous observons que l'exigence 3.1 de notre théorème peut être affaiblie en demandant que (X, d) soit compact.

Corollaire 3.6 Pour un entier positif $n \geq 1$ et un réel positif $k > 1$, soit f une application continue définie sur un espace métrique compact (X, d)dans lui-même. Si l'inégalité

$$d(f^n(x), f^n(y)) \geq kd(x, y) \; est \; vérifiée. \tag{2.10}$$

Alors, l'application f a un unique point fixe dans X.

Corollaire 3.7 Soient f, g et h trois applications commutantes sur un espace compact (M, d) dans lui-même. Supposons que h et g sont continues et satisfont la condition (2.10). Alors, les applications f, g et h ont un unique point fixe commun dans X.

Corollaire 3.8 Toutes les applications f qui commutent avec une application de contraction g, définie sur un espace métrique compact (M, d) dans lui-même, ont un unique point fixe commun.

Corollaire 3.9 Considérons une suite d'applications continues f_n définies sur un ensemble compact K convergeant uniformément vers une application f. S'il existe une application de contraction g qui commute avec chaque f_n pour tout entier positif n, alors f_n et g possèdent un unique point fixe commun.

Exemple 3.2. Soient les applications f et g définies sur l'intervalle [2,4] dans lui-même par :

$$f(x) = \frac{7x+2}{3x-1}, \qquad g(x) = \frac{8x+2}{3x}$$

Par un calcul direct, nous observons que f et g commutent sur l'intervalle $[2, 4]$. Le quotient de leurs dérivées est donné par :

$$\left|\frac{g'(x)}{f'(x)}\right| = \frac{2}{39}\left(\frac{3x-1}{x}\right)^2$$

La constante de F-contraction k est établie par l'inégalité :

$$\left|\frac{g'(x)}{f'(x)}\right| \leq \frac{121}{312} < 1$$

confirmant que g satisfait la condition de F-contraction. Par conséquent, g est une F-contraction. Pour tout point initial $x_0 \in [2,4]$, l'application f satisfait $|f(x_0)| \leqslant \frac{16}{5}$, établissant que f est bornée par $\frac{16}{5}$. Ainsi, la suite de Picard $\{f^n(x_0)\}_{n\geq 0}$ reste bornée dans l'intervalle $[2,4]$. Toutes les conditions du théorème 3 sont satisfaites, ce qui confirme l'existence d'un unique point fixe commun en $x = 2.8968$ dans $[2,4]$.

2.4 Conclusions

Cette étude explore l'identification des points fixes communs parmi des applications commutatives, présentant un examen approfondi des conditions nécessaires et suffisantes. Cette approche innovante introduit un changement de paradigme, garantissant l'existence d'un point fixe commun. Sa polyvalence s'étend à diverses disciplines, incluant les sciences économiques ainsi que d'autres domaines des mathématiques et de la physique [9, 12], où elle peut être déployée efficacement à travers des programmes numériques.

Chapitre 3

Points Fixes Communs pour les F-Contractions Commutatives sous des Conditions Modifiées

Dans ce chapitre, nous démontrons la construction des ensembles contenant les éléments à point fixe et les éléments à point fixe commun pour deux applications commutatives satisfaisant et généralisant des conditions de contraction. Nous proposons une nouvelle condition sur l'une d'elles qui nous conduit au théorème de Jungck. De plus, nous établissons le théorème associé de Banach. Nos résultats généralisent certains résultats connus dans la littérature.

3.1 Introdution

Dans [22], le théorème de Jungck énonce que pour deux applications continues commutatives et une condition d'application contractive, où l'image de l'une est incluse dans l'autre, les deux applications possèdent un unique point fixe commun. Ce résultat généralise le théorème du point fixe de Banach cité dans la référence Gustave [20]. De nombreux résultats intéressants ont fait l'objet de recherches intensives, et de nombreuses publications ont été consacrées à la généralisation de ce théorème voir [4, 5, 6, 7, 14, 10, 18, 19].

Dans ce chapitre, nous conservons toutes les conditions requises du théorème de Jungck, mais la condition d'inclusion est remplacée par une nouvelle condition.

L'objectif de ce chapitre est présenté dans la section suivante.

3.2 Préliminaires

Définition 3.1. [23] Soient f and $g : X \to Y$ deux applications. Nous disons que f et g ont un point de coïncidence s'il existe un $\xi \in X$, tel que $f(\xi) = g(\xi)$.

Le point de coïncidence est, dans la plupart des cas, une généralisation de la théorie des points fixes, qui étudie les points $\xi \in X$ tels que $f(\xi) = \xi$. La théorie des points fixes est un cas particulier obtenu en prenant $X = Y$ et g comme l'application identité.

Remarque 3.2. Notons que la notion de point de coïncidence est plus générale que celle de point fixe commun.

Définition 3.3. Soient f and g deux applications d'un espace X dans lui-même. Nous disons que f et g sont faiblement compatibles si elles commutent en leurs points de coïncidence.

Proposition 3.4. *[3] Sous les hypothèses de la Definition 3.3, supposons que f et g sont des applications faiblement compatibles d'un ensemble X. Si f et g ont un unique point de coïncidence, alors elles possèdent un unique point fixe commun.*

Démonstration. Supposons que f et g coincident en un point $x \in X$. Alors, $w = f(x) = g(x)$. Comme f et g sont faiblement compatibles, nous avons $f(w) = f(g(x)) = g(f(x)) = g(w)$, c'est-à-dire $f(w) = g(w)$ est un point de coincidence de f et g. Mais w est l'unique point de coïncidence de f et g, donc $w = f(w) = g(w)$. De plus, si $z = f(z) = g(z)$, alors z est un point de coincidence de f et g, et donc $z = w$ par unicité. Ainsi, w est l'unique point fixe commun de f et g. □

Définition 3.5. Considérons les espaces métriques (X, d) munis d'une distance d. Soient f et g des applications définies de X dans lui-même. Une applications g est dite F-contraction s'il existe une constante réelle positive $0 < k < 1$ telle que :

$$d(g(x), g(y)) \leq kd(f(x), f(y)), \forall x, y \in X. \tag{3.1}$$

Nous notons cette relation par $g-k-f$. Si f est continue, nous parlons de $g-k-f$ comme une application contractive continue.

Tout d'abord, considérons le théorème important suivant donné dans la référence [22], qui assure l'existence d'un point fixe commun.

Théorème 3.6. *([22]) Supposons que $g-k-f$ soit une application contractive continue sur un espace métrique complet (X, d) dans lui même. Alors f a un point fixe dans X si et seulement s'il existe une constante réelle $k \in (0, 1)$ et une application $g : X \to X$ qui commute avec f et satisfait $g(X) \subset f(X)$.*

Dans la suite, nous exposons quelques définitions et propositions de limite sup et limite inf importantes pour comprendre la séquence.

Définition 3.7. [20] Soit U_n une suite.Considérons les suites :

$$A_n = \{supU_k : k \geq n\} \text{ and } B_n = \{\inf U_k : k \geq n\}$$

telles que A_n et B_n sont respectivement non-croissantes et non-décroissantes. Nous définissons la limite supérieure de la suite U_n par :

$$\lim_{n\to\infty} \sup U_n = \lim_{k\to\infty} A_k = \inf_{k\geq 1} \sup_{n\geq k} U_n.$$

Nous définissons la limite inférieure de la suite U_n par

$$\lim_{n\to\infty} \inf U_n = \lim_{k\to\infty} B_k = \sup_{k\geq 1} \inf_{n\geq k} U_n.$$

Théorème 3.8. *[20] Soit U_n une suite bornée de nombres réels. Pour n, considérons l'ensemble $A_n = \{supU_k : k \geq n\}$. Si la suite A_n est non-croissante et bornée inférieurement, alors elle converge vers la limite l. Le nombre reel l est appelé la limite supérieure de la suite U_n. Nous la notons $\lim\limits_{n\to\infty} \sup A_n$.*

Proposition 3.9. *[20] Soit U_n une suite réelle bornée. Alors :*

$$\lim infU_n \leq \lim \sup U_n.$$

De plus, la suite est convergente et a pour limite l si et seulement si $\lim\inf U_n = \lim\sup U_n = l$.

Proposition 3.10. *[20] Soient $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ deux suites réelles bornées. Alors nous avons :*

$$\lim\sup(a_n + b_n) \leq \lim\sup a_n + \lim\sup b_n \text{ and } \lim\inf a_n + \lim\inf b_n \leq \lim\inf(a_n + b_n).$$

Proposition 3.11. *[20] Soient $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ deux suites réelles bornées telles que $(b_n)_{n\geq 1}$ converge vers b. Alors :*

$$\lim sup(a_n + b_n) = \lim\sup a_n + b \text{ and } \lim\inf(a_n + b_n) = \lim\inf a_n + b.$$

3.3 Résultats principaux et théorèmes

Soit x_0 un élément d'un espace métrique complet non vide X. Pour des raisons de notation, nous définissons $g^0(x_0) = x_0, f^0(x_0) = x_0$ et par récurrence $g^{n+1}(x_0) = g(g^n(x_0)), f^{n+1}(x_0) = f(f^n(x_0))$, for $n \in \{0, 1, 2, ...\}$.

Lemme 3.12. *Soit $f - k - g$ une application contractive définie sur un espace métrique (X, d) dans lui même. Supposons que f et g commutent. Alors, l'inégalité suivante est vérifiée :*

$$d(g^n(x), g^n(y)) \leq k^n d(f^n(x), f^n(y)), \forall x, y \in X, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.2}$$

Démonstration. Soient x, y deux éléments de l'espace X. D'après la condition 3.1, nous avons :

$$d(g \circ g^{n-1}(x), g \circ g^{n-1}(y)) \leq kd(f \circ g^{n-1}(x), f \circ g^{n-1}(y)).$$

En utilisant la commutativité, nous obtenons :

$$f \circ g^n = g^n \circ f, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

Un raisonnement similaire donne :

$$d(f \circ g^{n-1}(x), f \circ g^{n-1}(y)) = d(g^{n-1} \circ f(x), g^{n-1} \circ f(y)).$$

En appliquant à nouveau les inégalités 3.3 et 3.1, nous avons :

$$d(g^{n-1} \circ f(x), g^{n-1} \circ f(y)) \leq kd(g^{n-2} \circ f^2(x), g^{n-2} \circ f^2(y)).$$

Par induction, nous obtenons :

$$d(g^n(x), g^n(y)) \leq k^n d(f^n(x), f^n(y)).$$

Ce qui termine la preuve du lemme. □

Théorème 3.13. *Soit X un espace métrique complet et soient f et g deux applications de X dans X. Supposons que f et g vérifient les conditions suivantes :*

1. *Il existe une constante $k \in (0, 1)$ telle que*

$$d(g(x), g(y)) \leq kd(f(x), f(y)), \forall x, y \in X.$$

2. *Le sous-ensemble E est défini par :*

$$E = \{x \in X \mid \exists a \in X, \limsup_{n \to +\infty} [d(a, f^n(x))]^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{k}\}.$$

3. *$f \circ g = g \circ f$.*
4. *g et $f \circ g$ sont continues.*

Alors f et g ont un unique point fixe commun dans E si et seulement si $E \neq \varnothing$.

Remarque 3.14. Montrons que l'ensemble E est bien défini en rappelant la définition de $\limsup_n [d(a, f^n(x))]^{\frac{1}{n}}$.

Pour $p \geq 1$, posons $s_p = \sup\{d(a, f^n(x))]^{\frac{1}{n}}, n \geq p\}$. La suite positive s_p est décroissante et donc convergente vers $\inf_{p\geq 1} s_p$, noté $\limsup_n [d(a, f^n(x))]^{\frac{1}{n}}$. L'élément a est fixé car il dépend de x.

Corollaire 3.15. *Soit X un espace métrique complet et f une application continue définie de X dans lui-même vérifiant l'inégalité suivante :*

$$d(f^p(x), f^p(y)) \leq kd(f^q(x), f^q(y)), \forall x, y \in X, p \neq q, p, q \in \mathbb{N}. \tag{3.4}$$

Si f vérifie l'inégalité 3.4 et si l'ensemble E de la condition 2 du Théorème 3.13 est non vide, alors f possède un unique point fixe.

Exemple 3.16. *Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$, définie par $x \to f(x) = \dfrac{x+1}{4}$. Remarquons que l'inégalité suivante est vérifiée :*

$$d(f^2(x), f^2(y)) \leq \frac{1}{4} d(f(x), f(y)), \forall x, y \in [0, 1].$$

En calculant l'ensemble E, nous obtenons :

$$E = \{x \in [0, 1], \limsup_{n\to+\infty} \left[d\left(0, \frac{3x + 4^n - 1}{3.4^n}\right)\right]^{\frac{1}{n}} < 4\}.$$

Il est évident que cet ensemble est non vide. Ainsi, d'après le Corollaire 3.15 f possède un unique point fixe en $f(\dfrac{1}{3}) = \dfrac{1}{3}$. Nous remarquons que le point fixe $\dfrac{1}{3}$ appartient à E.

Avant de commencer la preuve de notre théorème, nous donnons quelques lemmes :

Lemme 3.17. *Selon les notations du Théorème 3.13, considérons le sous-ensemble :*

$$E = \{x \in X \mid \exists a \in X, \quad \limsup_n [d(a, f^n(x))]^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{k}\}.$$

Supposons que E est non vide. Si $x \in E$, alors $f(x) \in E$.

Démonstration. Soit $x \in E \iff \alpha = \limsup_n [d(a, f^n(x))]^{\frac{1}{n}} < \dfrac{1}{k}$.
$\alpha = \limsup_n [d(a, f^n(x))]^{\frac{1}{n}}$. Il existe $n_0 \geq 1$, tel que :

$$\sup_{n\geq n_0} [d(a, f^n(x))]^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{k}.$$

Pour $n \geq n_0$, nous avons,

$$d(a, f^n(x)) \leq \beta^n, \text{ où } \beta = \sup_{n\geq n_0} [d(a, f^n(x))^{\frac{1}{n}}. \tag{3.5}$$

En appliquant l'inégalité 3.5, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \forall n \geq n_0, d(a, f^{n+1}(x)) \leq \beta^{n+1} &\Rightarrow d(a, f^n(f(x))) \leq \beta^{n+1}, \\ &\Rightarrow [d(a, f^n(f(x))]^{\frac{1}{n}} \leq \beta^{1+\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Comme $\beta < \dfrac{1}{k}$, $0 < k < 1$ et $\lim\limits_{n \to \infty} \beta^{\frac{1}{n}} = 1$, alors $\forall n \geq n_1$ et $\delta > 0$, nous avons $\beta(1+\delta) < \dfrac{1}{k}$ et $\beta^{1+\frac{1}{n}} < \beta(1+\delta)$. Posons $\beta_1 = \beta(1+\delta)$. Alors, $\forall n \geq \max(n_0, n_1)$, nous avons :

$$\lim_n \sup[d(a, f^n(f(x)))]^{\frac{1}{n}} \leq \sup_{n \geq n_1} [d(a, f^n(f(x)))^{\frac{1}{n}} \leq \beta_1 < \frac{1}{k}.$$

Cette inégalité implique que $f(x) \in E$, ce qui termine la preuve du Lemme. $\square$

Lemme 3.18. *Selon les notations du Théorème 3.13, la suite $\{g^n(x)\}_{n \geq 0}$ converge vers une limite $l(x)$ dans X pour tout élément $x \in E$.*

Démonstration. En reprenant les notations de la preuve du Lemme 3.17 et en utilisant la condition de commutation 3, l'inégalité triangulaire et l'inégalité 3.1, nous obtenons, pour $x \in E$ et $\forall n \geq n_0 + 1$,

$$\begin{aligned} d(g^n(x), g^{n-1}(x)) &\leq k^{n-1} d(f^{n-1}(g(x)), f^{n-1}(x)), \\ &\leq k^{n-1} d(g(f^{n-1}(x)), f^{n-1}(x)), \\ &\leq k^{n-1} d(g(f^{n-1}(x)), g(a)) + k^{n-1} d(g(a), a) + k^{n-1} d(a, f^{n-1}(x)), \\ &\leq k^n d(f^n(x), f(a)) + k^{n-1} d(g(a), a) + k^{n-1} d(a, f^{n-1}(x)), \\ &\leq k^n d(f^n(x), a) + k^n d(a, f(a)) + k^{n-1} d(g(a), a) + k^{n-1} d(a, f^{n-1}(x)). \end{aligned}$$

Comme $x \in E$ alors, $d(a, f^{n-1}(x)) \leq \beta^{n-1}$ *et* $d(a, f^n(x)) \leq \beta^n$. Nous déduisons que :

$$\begin{aligned} d(g^n(x), g^{n-1}(x)) &\leq (k\alpha)^n + (k\alpha)^{n-1} + k^{n-1}(kd(a, f(a)) + d(g(a), a)), \\ &\leq (k\alpha)^{n-1}(1 + k\alpha) + k^{n-1}(kd(a, f(a)) + d(g(a), a)). \end{aligned}$$

Posons $A = 1 + k\alpha$ *et* $B = kd(a, f(a)) + d(g(a), a)$. Ainsi :

$$d(g^n(x), g^{n-1}(x)) \leq A(k\alpha)^{n-1} + B(k)^{n-1}, \quad \textit{avec} \;\; k\alpha < 1.$$

Maintenant, soient n, m deux entiers positifs tels que $n \geq m + 1$. Par l'inégalité triangulaire, nous avons :

$$d(g^n(x), g^m(x)) \leq \sum_{j=n}^{m} d(g^j(x), g^{j+1}(x)) \leq \sum_{j=n}^{m} A(k\alpha)^j + Bk^j.$$

Finalement :

$$d(g^n(x), g^m(x)) \leq A\frac{(k\alpha)^n - (k\alpha)^m}{1 - k\alpha} + B\frac{(k)^n - (k)^m}{1 - k}.$$

En faisant tendre $n, m \to \infty$, nous obtenons $d(g^n(x), g^m(x)) \to 0$. Cela prouve que la suite $\{g^n(x)\}_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans X. Par complétude, elle converge vers une limite $l(x) \in X$.

□

Il faut prouver que la limite de la suite ci-dessus ne dépend pas de x. Ceci est justifié par le lemme suivant.

Lemme 3.19. *Selon les notations du Théorème 3.13 et du Lemme 3.18. Si $x_1, x_2 \in E$, alors $l(x_1) = l(x_2)$.*

Démonstration. Soient $x_1, x_2 \in E$. Alors, il existe $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, tels que :

$$\begin{aligned} & \forall n \geq n_1 \quad \Rightarrow \quad d(a_1, f^n(x_1)) \leq \beta_1^n \\ \textit{et,} \quad & \forall n \geq n_2 \quad \Rightarrow \quad d(a_2, f^n(x_2)) \leq \beta_2^n. \end{aligned}$$

où $\beta_1 < \dfrac{1}{k}$ and $\beta_2 < \dfrac{1}{k}$.
Ainsi, pour $n \geq \max(n_1, n_2)$ nous avons :

$$\begin{aligned} d(g^n(x_1), g^n(x_2)) &\leq k^n d(f^n(x_1), f^n(x_2)), \\ &\leq k^n d(f^n(x_1)), a_1) + k^n d(a_1, a_2) + k^n d(a_2, f^n(x_2)), \\ &\leq (k\alpha_1)^n + (k\alpha_2)^n + k^n d(a_1, a_2). \end{aligned}$$

En faisant tendre $n \to \infty$, *nous obtenons* $d(g^n(x_1), g^n(x_2)) \to 0$, car $\beta_1 k < 1$ et $\beta_2 k < 1$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} g^n(x_1) &= \lim_{n\to+\infty} g^n(x_2), \\ l(x_1) &= l(x_2). \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve. □

Voici maintenant la preuve de notre Théorème 3.13.

Démonstration. Pour montrer que la condition est nécessaire, supposons que x iest un point fixe de f. Prenons $a \in X$ tel que $a \neq x$, alors $d(a, x) > 0$ et :

$$\limsup_n [d(a, f^n(x))]^{\frac{1}{n}} = \limsup_n [d(a, x)]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} [d(a, x)]^{\frac{1}{n}} = 1 < \frac{1}{k} \Rightarrow x \in E \Rightarrow E \neq \varnothing.$$

En particulier, si x est un point fixe commun pour f et g, alors $x \in E \Rightarrow E \neq \varnothing$.
Pour la condition suffisante, supposons qu'il existe une application continue g de X dans lui même qui commute avec f et vérifie 3.1, que $f \circ g$ est continue et que $E \neq \varnothing$. Nous montrons que ces conditions sont suffisantes pour garantir que f et g ont un unique common point fixe commun. Supposons que $E \neq \varnothing$. Considérons un élément $x \in E$. D'après les Lemmes 3.18 et 3.19, et comme g est continue, nous avons $g(l) = l$. La continuité de $f \circ g$ assure que $(f \circ g)(g^n(x)) \to f \circ g(l)$ as $n \to \infty$.
De plus, $(f \circ g)(g^n(x)) = f(g^{n+1}(x)) = g^{n+1}(f(x))$.
comme $x \in E \Rightarrow f(x) \in E$, alors d'après les Lemmes 3.17 et 3.19, nous avons $g^{n+1}(f(x)) \to g(l)$ as $n \to \infty$. Sachant que $f \circ g(l) = l \;\; et \;\; g(l) = l$ alors $f(l) = l$. Cela prouve que l est un point fixe commun dans E. Pour l'unicité du point fixe commun de f et g, soient r et t deux points fixes communs de f et g. En majorant la distance entre r et t, nous obtenons :

$$d(r,t) = d(g(r), g(t)) \leq kd(f(r), f(t)) = kd(r,t),$$

d'où $(1-k)d(r,t) \leq 0$. Comme $k < 1$, alors $d(r,t) = 0$ et donc $r = t$. Cela prouve que le point fixe commun est unique et termine la preuve du théorème. □

Remarque 3.20. En prenant f tcomme l'application identité de X, il est facile de voir que notre condition est vérifiée, et dans ce cas, le Théorème 3.13 correspond exactement au principe du point fixe de Banach.

Théorème 3.21. *Soit X un espace métrique complet et soient f et g deux applications de X dans X. Supposons que :*

1. *Il existe une constante $k \in (0,1)$ telle que :*

$$d(g(x), g(y)) \leq kd(f(x), f(y)), \forall x, y \in E.$$

2. *L'ensemble E est defini par :*

$$E = \{x \in X \mid \exists a \in X, \;\; \limsup_{n\to+\infty} [d(a, f^n(x))]^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{k}\}.$$

3. $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x), pour \;\; x \in E$ *(commutativité sur E).*
4. *f et g sont continues.*

Alors f et g ont un unique point fixe commun dans $\overline{E}$ (l'adhérence de E) si et seulement si $E \neq \varnothing$.

Dans l'ordre de prouver le Théorème3.21, nous avons besoin des lemmes suivants

Lemme 3.22. *Selon les notations du Théorème 3.21, supposons que E soit non vide. Soient $a \in X$, et $x \in E$, tels que $\limsup_n [d(a, f^n(x))]^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{k}$. Alors, pour tout $b \in X$, nous avons $\limsup_n [d(b, f^n(x))]^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{k}$.*

Démonstration. Soient $a, b \in X$ et $x \in E$. Supposons que $\limsup_n [d(a, f^n(x))]^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{k}$. Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\beta = \sup_{n \geq p} [d(a, f^n(x))]^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{k}.$$

Ainsi,

$$n \geq p \Rightarrow d(a, f^n(x)) \leq \beta^n \ \textit{ et } \ \beta < \frac{1}{k}.$$

Nous distinguons deux cas :

1. cas $0 < \beta \leq 1$. Par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}
d(b, f^n(x)) &\leq d(a,b) + d(a, f^n(x)), \\
d(b, f^n(x)) &\leq d(a,b) + \beta^n, \\
\limsup_n d(b, f^n(x))^{\frac{1}{n}} &\leq \limsup_n (d(a,b) + \beta^n)^{\frac{1}{n}}. \\
\limsup_n d(b, f^n(x))^{\frac{1}{n}} &\leq \limsup_n \exp^{\frac{1}{n}\ln(d(a,b)+\beta^n)} \leq 1 < \frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

2. cas $\beta > 1$: comme $\beta < \frac{1}{k}$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\beta + \epsilon < \frac{1}{k}$.
Alors :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{(\beta+\epsilon)^n}{\beta^n} - \frac{d(a,b)}{\beta^n}\right) = +\infty.$$

Cela implique qu'il existe $p_1 \geq p$ tel que :

$$\begin{aligned}
n \geq p_1 &\Rightarrow \left(\frac{(\beta+\epsilon)^n}{\beta^n} - \frac{d(a,b)}{\beta^n}\right) \geq 1, \\
&\Rightarrow d(a,b) + \beta^n \leq (\beta+\epsilon)^n. \\
\textit{D'autre part : } \quad [d(b, f^n(x))] &\leq d(a,b) + d(a, f^n(x)), \\
\Rightarrow \quad [d(b, f^n(x))] &\leq d(a,b) + \beta^n, \\
\Rightarrow \quad \limsup_n [d(b, f^n(x))]^{\frac{1}{n}} &\leq \limsup_n [d(a,b) + \beta^n]^{\frac{1}{n}} \leq \beta + \epsilon < \frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

□

Les éléments a et b jouent un rôle symétrique, ce qui confirme l'équivalence du lemme et termine sa preuve.

Maintenant, nous établissons la preuve de notre théorème 3.21.

Démonstration. Pour la condition nécessaire, voir la preuve du Théorème 3.13. Pour la condition suffisante, soit $\overline{E}$ l'adhérence de E. C'est un espace métrique complet. Par continuité de f et g, il est facile de voir que pour tout $x, y \in \overline{E}$, nous avons $d(g(x), g(y)) \leq kd(f(x), f(y))$, *et* $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$. D'après le Lemme 3.17, $x \in E \Rightarrow f(x) \in E$. Par continuité, $x \in \overline{E} \Rightarrow f(x) \in \overline{E}$.
Il reste à prouver que $x \in E \Rightarrow g(x) \in E$. Soit $x \in E$. Alors, il existe $a \in E$ tel que $\limsup_n [d(a, f^n(x))]^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{k}$.
Considérons l'expression :

$$\begin{aligned}
d(g(a), f^n(g(x))) = d(g(a), g(f^n(x))) &\leq kd(f(a), f(f^n(x))).\\
\textit{Comme } f(x) \in E\textit{, alors} \quad \limsup_n [d(a, f^n(f(x)))]^{\frac{1}{n}} &< \frac{1}{k}.\\
\textit{Par le Lemme 3.22 (en prenant b=f(a)),}&\\
nous\ avons \limsup_n [d(f(a), f^{n+1}(x))]^{\frac{1}{n}} &< \frac{1}{k}.\\
\textit{D'autre part :} \quad [d(g(a), f^n(g(x)))]^{\frac{1}{n}} &\leq k^{\frac{1}{n}}[d(f(a), f^{n+1}(x))]^{\frac{1}{n}}.\\
\Rightarrow \quad \limsup_n [d(g(a), f^n(g(x)))]^{\frac{1}{n}} &\leq \limsup_n k^{\frac{1}{n}}[d(f(a), f^{n+1}(x))]^{\frac{1}{n}}.\\
\textit{Comme } \limsup_n k^{\frac{1}{n}} &= \lim_n k^{\frac{1}{n}} = 1.\\
\textit{alors :} \quad \limsup_n [d(g(a), f^n(g(x)))]^{\frac{1}{n}} &< \frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

Cette inégalité confirme que $g(x) \in E$. Par continuité, il est facile de vérifier que $x \in \overline{E} \Rightarrow g(x) \in \overline{E}$. Toutes les conditions du Théorème 3.13 sont satisfaites, garantissant l'existence d'un unique point fixe commun de f et g dans $\overline{E}$. Ceci termine la preuve du Théorème 3.21. □

Remarque 3.23. Si le point fixe existe, il est nécessairement contenu dans l'ensemble E. Ce résultat est très important pour le processus numérique de recherche du point fixe. Cet ensemble garantit la convergence de la suite pour tout élément qui lui appartient.

Exemple 3.24. *Définissons sur l'intervalle* $[-1, 0]$ *les fonctions* f *et* g *par :*

$$g(x) = \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{19}{49} \quad \textit{and} \quad f(x) = -x - 1.$$

Remarquons que f *et* g *commutent sur* $[-1, 0]$, *sont dérivables et vérifient la condition de contraction* $g - k - f$ *donnée par :*

$$\left|\frac{g'(x)}{f'(x)}\right| \leq \frac{1}{4} < 1.$$

En calculant l'ensemble E, nous obtenons :

$$E = \{x \in [-1, 0], \ \ \limsup_n [\max\Big(d(0, -x-1), d(0, x)\Big)]^{\frac{1}{n}} < 4\}.$$

Il est évident que cet ensemble est non vide. Toutes les conditions du Théorème 3.13 sont satisfaites, donc f et g ont un unique point fixe commun en $x = -0.5$.

La version du théorème 3.13 est plus générale que le théorème 3.1 dans [14] et devient dans ce cas un corollaire.

Corollaire 3.25. *Soient f and g deux applications commutatives définies sur un espace métrique complet X. Supposons que f et g vérifient l'inégalité 3.1 avec f continue. S'il existe un élément $x_0 \in X$ tel que la suite $f^n(x_0)_{n\geq 0}$ soit bornée, alors les applications f et g possèdent un unique point fixe commun dans X.*

Démonstration. Comme la suite $f_n(x_0)_{n\geq 0}$ est bornée, l'ensemble E est non vide. Toutes les conditions du théorème sont satisfaites, d'où le résultat. □

Le corollaire suivant est un exemple qui montre qu'il existe de nombreuses applications possibles de notre travail, dans le cas des applications de contraction commutative, si elles sont supposées bornées.

Corollaire 3.26. *Supposons que f et g soient deux applications commutatives vérifiant la condition de contraction 3.1 sur un espace métrique complet X dans lui-même. Si l'application f est bornée et que g et $f \circ g$ sont continues, alors f et g ont un unique point fixe commun.*

Nous observons que l'exigence de notre théorème 3.13 peut être affaiblie si nous exigeons que X soit compact. Considérons le corollaire suivant.

Corollaire 3.27. *Soit f une application définie sur un espace métrique compact M dans lui-même. Supposons qu'une application g définie sur M dans lui-même commute avec f, telle que $0 < k < 1$ et l'expression suivante :*

$$d(g(x), g(y)) \leq kd(f(x), f(y)), \quad \forall x, y \in M,$$

Soit vérifie. Si les applications g et $f \circ g$ sont continues, alors f et g ont un unique point fixe commun.

Chapitre 4

Méthode hybride non Commutative de Picard pour les points fixes Communs

Les principaux résultats de ce chapitre sont trois théorèmes sur l'existence et l'unicité du point fixe commun pour deux et trois applications non commutatives et non nécessairement continues, qui sont des F-contractions de grande taille unique, définies sur un espace métrique complet et à valeurs dans lui-même.

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions les points fixes communs pour deux et trois fonctions ne commutant pas nécessairement. Le premier théorème établit que pour f et g non nécessairement continues, liées par une inégalité dont le second membre contient un terme pouvant être choisi arbitrairement grand, il existe un unique point fixe commun. La continuité de f et g n'étant généralement pas requise, ce théorème devrait permettre de nombreuses applications en économie et dans d'autres domaines des mathématiques et de la physique. Le deuxième théorème traite de deux fonctions non commutatives f et g définies sur un espace métrique complet à valeurs dans lui-même. Quant au troisième théorème, il démontre que trois fonctions continues f, g et h ne commutant pas entre elles, liées par deux inégalités, possèdent un unique point fixe commun. Certains auteurs ont étudié ces cas dans

Ce chapitre est organisé en deux sections comme suit :
Dans la section 1, nous introduisons et rappelons quelques résultats utiles.
Dans la section 2, nous établissons des théorèmes essentiels sur les points fixes communs et leurs preuves, dérivés des applications de F-contraction. Enfin, nous présentons de nouveaux résultats sous des conditions d'existence inédites pour les points fixes communs d'applications de f-contraction à valeurs dans elles-mêmes.

4.2 Préliminaires

Nous listons maintenant quelques-unes des importantes généralisations du principe de contraction de Banach au XXe siècle :

• En 1968, théorème du point fixe de Kannan [24] : Si (X, d) est un espace métrique complet et $f : X \to X$ une auto -application telle que $d(fx, fy) \leq \beta[d(x, fx)+d(y, fy)]$ pour tous $x, y \in X$, où $0 < \beta < \frac{1}{2}$, alors T possède un unique point fixe.

• En 1971, théorème du point fixe de Reich [30] : Si (X, d) est un espace métrique complet et $f : X \to X$ une auto-application telle que $d(Tx, Ty) \leq ad(x, y) + bd(x, Tx) + cd(y, Ty)$, pour tous $x, y \in X$, où a, b, c sont des constantes non négatives avec $0 < a + b + c < 1$, alors T possède un unique point fixe.

• En 1971, théorème du point fixe de Ćirić [13] : Si (X, d) est un espace métrique complet et $T : X \to X$ une auto-application telle que $d(Tx, Ty) \leq ad(x, y) + bd(x, Tx) + cd(y, Ty) + s[d(x, Ty) + d(y, Tx)]$, pour tous $x, y \in X$, où a, b, c, s sont des constantes non négatives avec $0 < a+b+c+2s < 1$, alors T possède un unique point fixe.

• En 2016, D. Panthi et K. Subedi [15] ont établit les résultats suivants :

Soit (X, d) un espace métrique. Soient $A, B, S, T : X \to X$ des applications vérifiant les conditions :

$$A(X) \subset B(X) \ \ et \ \ B(X) \subset T(X). \tag{4.1}$$

$$d(Ax, By) \leq k[d(Sy, Ax) + d(Tx, Sy) + d(Tx, Ay) + d(By, Sy) + d(Tx, By)]. \tag{4.2}$$

avec, $k \in [0, \frac{1}{8}[$ et telles que :

1. Les paires (A, T) ou (B, S) satisfont la propriété E.A.
2. Les paires $(A, T) et (B, S)$ sont faiblement compatibles.

Si $T(X)$ est fermé, alors les résultats suivants sont vrais :

1. Les paires A et T admettent un point de coïncidence.
2. Les paires B et S admettent un point de coïncidence.
3. Les paires A, B, S et T admettent un unique point fixe commun.

Trouver des points fixes communs ou des points de coïncidence pour deux, trois ou quatre applications fait l'objet de nombreuses recherches dans ce domaine. C'est l'objectif de ce travail : généraliser le théorème cité en proposant des conditions pratiques sans continuité ni inclusions. De plus, des résultats similaires à certains théorèmes connus voir [34, 1, 2] sont établis.

Dans la suite, nous rappelons quelques définitions et propriétés.

Définition 4.1. [20] Soit X un ensemble non vide et $d : X \times X \to [0, \infty)$ une fonction vérifiant les conditions suivantes :

1. $d(x, y) = d(y, x)$.
2. $d(x, y) = d(y, x) = 0$ implique que $x = y$.
3. $d(x, y) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in X$.

Alors, d est appelée une métrique sur l'espace X.

Définition 4.2. [20] Une suite x_n dans un espace métrique (X,d) (X, d) est dite suite de Cauchy si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tous $m, n \geq n_0$, on a $d(x_n, x_n) < \epsilon$.

Définition 4.3. [20] Une suite dans un espace métrique (X, d) converge par rapport à d s'il existe $x \in X$ tel que $d(x_n, x) \to 0$ as $n \to \infty$.

Définition 4.4. [20] Un espace métrique (X, d) est dit complet si toute suite de Cauchy y converge par rapport à d.

4.3 Résultats

Théorème 4.5. *Soient f et g deux auto- applications non nécessairement continues définies sur un espace métrique complet (X, d). Supposons que f et g vérifient l'inégalité suivante avec des constantes réelles non négatives $(\alpha_i)_{i=\overline{1,5}}$ telles que pour tous $x, y \in X$:*

$$d(f(x), g(y)) \leq \alpha_1 d(x, f(x)) + \alpha_2 d(y, g(y)) + \alpha_3 d(x, g(y)) + \alpha_4 d(y, f(x)) + \alpha_5 d(x, y) + \phi(x, y, f(x), g(y)). \tag{4.3}$$

Où, $0 < \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 \leq 1$ si $(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_4) > 0$,
ou, $0 < \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 < 1$ si $(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_4) = 0$.
Supposons que ϕ soit une fonction réelle non négative à quatre variables sur X^4, symétrique en les deux premières variables ou les deux dernières, et vérifiant : $\forall s, s_1, s_2 \in X, \phi(s_1, s, s, s_2) = \phi(s, s_1, s_2, s) = 0$, et que ϕ soit continue. Alors, f et g possèdent un point fixe commun unique dans X.

Démonstration. Définissons la suite $(y_n)_{n \geq 1}$ par :pour $x \in X$, posons $y_1 = f(x)$, $y_2 = g(x)$,et pour $n \geq 3$, posons $y_n = f(y_{n-1})$ si n impair and, $y_n = g(y_{n-1})$ si n est pair. Montrons que $(y_n)_{n \geq 1}$ est une suite de Cauchy dans X.
Si n est pair alors :

$$\begin{aligned}
& d(y_n, y_{n-1}) = d(g(y_{n-1}), f(y_{n-2})) \\
& \leq \alpha_1 d(y_{n-2}, y_{n-1}) + \alpha_2 d(y_{n-1}, y_n) + \alpha_3 d(y_{n-2}, y_n) + \alpha_4 d(y_{n-1}, y_{n-1}) + \alpha_5 d(y_{n-1}, y_{n-2}) \\
& + \phi(y_{n-2}, y_{n-1}, y_{n-1}, y_n), \\
& \leq \alpha_2 d(y_{n-1}, y_n) + (\alpha_1 + \alpha_5) d(y_{n-1}, y_{n-2}) + \alpha_3 (d(y_{n-2}, y_{n-1}) + d(y_{n-1}, y_n).
\end{aligned}$$

Puisque $\phi(y_{n-2}, y_{n-1}, y_{n-1}, y_n)$ *est égale à* 0 *par hypothèse.* Alors,

$$\begin{aligned} (1-\alpha_2-\alpha_3)d(y_n, y_{n-1}) &\leq (\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5)d(y_{n-1}, y_{n-2}) \Longrightarrow \\ &\leq \frac{\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5}{1-\alpha_2-\alpha_3}d(y_{n-1}, y_{n-2}). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Si n est impair alors :

$$\begin{aligned} &d(y_n, y_{n-1}) = d(f(y_{n-1}), g(y_{n-2})) \\ &\leq \alpha_1 d(y_{n-1}, y_n) + \alpha_2 d(y_{n-2}, y_{n-1}) + \alpha_3 d(y_{n-1}, y_{n-1}) + \alpha_4 d(y_{n-2}, y_n) + \alpha_1 d(y_{n-1}, y_{n-2}) \\ &+ \phi(y_{n-1}, y_{n-2}, y_n, y_{n-1}), \end{aligned}$$

et comme, $\phi(y_{n-1}, y_{n-2}, y_n, y_{n-1}) = 0$, par hypothesis, alors,

$$\begin{aligned} (1-\alpha_1-\alpha_4)d(y_n, y_{n-1}) &\leq (\alpha_2+\alpha_4+\alpha_5)d(y_{n-1}, y_{n-2}) \Longrightarrow \\ d(y_n, y_{n-1}) &\leq \frac{\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5}{1-\alpha_2-\alpha_3}d(y_{n-1}, y_{n-2}). \end{aligned} \tag{4.5}$$

En combinant les inegalites donnees dans l'expression 4.4 et 4.5 nous avons.
Si n est pair alors, n-1 est impair et ceci implique que,

$$d(y_{n-1}, y_n) \leq \frac{(\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5)}{(1-\alpha_2-\alpha_3)}\frac{(\alpha_2+\alpha_4+\alpha_5)}{(1-\alpha_1-\alpha_4)}d(y_{n-2}, y_{n-3}).$$

Nous exigeons que la quantite dans le second membre gauche de l'inegalite dessus de verifie la condition suivante,

$$0 < \frac{(\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5)}{(1-\alpha_2-\alpha_3)}\frac{(\alpha_2+\alpha_4+\alpha_5)}{(1-\alpha_1-\alpha_4)} < 1. \tag{4.6}$$

ceci est equivalent a,

$$\begin{aligned} &(\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5)(\alpha_2+\alpha_4+\alpha_5) < (1-\alpha_2-\alpha_3)(1-\alpha_1-\alpha_4) \Leftrightarrow \\ &\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)+\alpha_5-\alpha_5 < 1+(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4) \Leftrightarrow \\ &(1+\alpha_5)(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5) < 1+\alpha_5+(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4). \end{aligned}$$

i) Si $(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4) > 0$ alors, pour que l'inegalite dessus soit vraie, il est suffisant que, $0 \leq \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5 \leq 1$.

ii) Si $(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4) = 0$ alors,il est suffisant que, $0 \leq \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5 < 1$.

Soit

$$\alpha = \frac{(\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5)}{(1-\alpha_2-\alpha_3)}\frac{(\alpha_2+\alpha_4+\alpha_5)}{(1-\alpha_1-\alpha_4)}$$

comme $(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)\geq 0$ alors, $0<\alpha<1$ et nous avons :

$$\forall n\geq 4, d(y_n,y_{n-1})\leq \alpha d(y_{n-2},y_{n-3}). \tag{4.7}$$

Si n est pair alors,

$$\forall n\geq 5, d(y_n,y_{n-1})\leq \alpha^{\frac{n-2}{2}} d(y_2,y_1). \tag{4.8}$$

Si n est impair alors,

$$\forall n\geq 5, d(y_n,y_{n-1})\leq \alpha^{\frac{n-3}{2}} d(y_3,y_2). \tag{4.9}$$

Soit $c=\max(d\{y_3,y_2),d(y_2,y_1)\}$. Notons que $c>0$ si et seulement si x est choisi tel que $y_1\neq y_2$ and $y_2\neq y_3$. Alors, nous avons par combinaison des inegalites 4.8 et 4.9 :

$$\forall n\geq 5, d(y_n,y_{n-1})\leq c\alpha^{\frac{n-4}{2}}. \tag{4.10}$$

Soit maintenant $n\geq m+1$ avec $m\geq 5$,

$$d(y_n,y_m)\leq \sum_{j=m+1}^{n} d(y_j,y_{j-1})\leq \sum_{j=m+1}^{n} c\alpha^{\frac{n-4}{2}}\leq c\alpha^{-2}(\sum_{j=m+1}^{n}(\sqrt{\alpha})^j). \tag{4.11}$$

Comme, les series dans le dernier terme du second membre de l'inegalite dessus convergent pour $\alpha<1$ alors,

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{j=m+1}^{n}(\sqrt{\alpha})^j=0.$$

Ceci montre que la suite $(y_n)_{n\geq 1}$est de Cauchy, et donc par argument de completude elle est convergente dans X.
Prouvons que $l=\lim_{n\to\infty} y_n$ est un point fixe commun pour f et g.
Si n est pair alors,

$$\begin{aligned}
&d(f(l),y_n)=d(f(l),g(y_{n-1}))\\
&\leq \alpha_1 d(l,f(l))+\alpha_2 d(y_{n-1},g(y_{n-1}))+\alpha_3 d(l,g(y_{n-1}))+\alpha_4 d(y_{n-1},f(l))+\alpha_5 d(l,y_{n-1})\\
&+\phi(l,y_{n-1},f(l),g(y_{n-1}))\\
&\leq \alpha_1 d(l,f(l))+\alpha_2 d(y_{n-1},y_n)+\alpha_3 d(l,y_n)+\alpha_4 d(y_{n-1},f(l))+\alpha_5 d(l,y_{n-1})+\phi(l,y_{n-1},f(l),y_n).
\end{aligned}$$

Comme la suite $(y_n)_{n\geq 1}$est convergente vers la limite l et en tenant compte que ϕ est symétrique et continue par hypothèse alors, en faisant tendre n vers ∞, et en appliquant les conditions de l'inégalité ci-dessus nous obtenons,

$$(1-\alpha_1-\alpha_4)d(l,f(l))\leq 0.$$

Comme, $1-\alpha_1-\alpha_4>0 \Rightarrow d(f(l),l)=0 \Rightarrow f(l)=l.$

Montrons que l est aussi un point fixe de g. En effet car,

$d(l,g(l))=d(f(l),g(l)) \leq \alpha_1 d(l,f(l))+\alpha_1 d(l,g(l))+\alpha_3 d(l,g(l))+\alpha_4 d(l,f(l))+\alpha_1 d(l,l) \Longrightarrow (1-\alpha_2-\alpha_3)d(l,g(l)) \leq 0.$

Comme, $1-\alpha_2-\alpha_3>0 \Rightarrow d(g(l),l)=0 \Rightarrow g(l)=l.$
Donc , l est un point fixe commun pour f et g.
Et pour ce qui est maintenant de l'unicité, soient l_1 et l_2 deux points fixes communs. Nous avons
$d(l_1,l_2)=d(f(l_1),g(l_2)) \leq \alpha_1 d(l_1,f(l_1))+\alpha_2 d(l_2,g(l_2))+\alpha_3 d(l_1,g(l_2))+\alpha_4 d(l_2,f(l_1))+\alpha_5 d(l_1,l_2)+\phi(l_1,l_2,f(l_1),g(l_2)).$
Et alors par symétrie de ϕ ,

$$\phi(l_1,l_2,f(l_1),g(l_2))=\phi(l_2,l_1,f(l_1),g(l_2)).$$

Comme $f(l_1)=l_1$ et $g(l_2)=l_2$, nous avons donc,

$$(1-\alpha_3-\alpha_4-\alpha_5)d(l_1,l_2) \leq 0$$

et $1-\alpha_3-\alpha_4-\alpha_5>0 \Longrightarrow d(l_1,l_2)=0 \Longrightarrow l_1=l_2.$
Ce qui achève la preuve. □

Corollaire 4.6. *Soit f et g deux auto- applications non necessairement continues, definies sur un espace metrique complet X dans lui meme verifiant l'inegalite suivante*

$$d(fx,gy) \leq \alpha d(x,fx)+\beta d(x,gy)+\gamma d(x,y). \tag{4.12}$$

Ou, $\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$ et $\alpha+\beta+\gamma=1$. Alors f et g possedent un unique point fixe commun.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le Théorème 4.5, avec $\alpha_1=\alpha$, $\alpha_2=0$, $\alpha_3=\beta$, $\alpha_4=0$ et$\alpha_5=\gamma$. Nous avons, $(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)=\alpha_1\alpha_3=\alpha\beta>0$. Si, $\alpha+\beta+\gamma=1$, alors les conditions du Théorème 4.5 sont satisfaites. Donc, f et g possedent un unique point fixe commun. □

Théorème 4.7. *Soit f et g deux auto-applications definies et continues sur un espace metrique complet (X,d),et verifiant l'inegalite suivante,*

i) Pout tout $x,y,\in X$,

$$\begin{aligned} d(gfx,fgy) &\leq \delta_1 d(x,fx)+\delta_2 d(y,gy)+\delta_3 d(x,gy)+\delta_4 d(y,fx)+\delta_5 d(fx,gy)+\delta_6 d(x,y) \\ &\quad +\phi(x,y,fx,gy). \end{aligned} \tag{4.13}$$

Où, ϕ vérifie la même condition du Théorème 4.5. Si la condition suivante

$$0 < \delta_1 + \delta_2 + 2(\delta_3 + \delta_4 + \delta_5 + \delta_6) < 1 \tag{4.14}$$

a lieu, alors, f et g possèdent un unique point fixe commun dans X.

Démonstration. Soit y_n une suite définie dans le Théorème 4.5. Nous allons utiliser l'inégalité 4.13. Si n est pair alors,

$d(y_n, y_{n-1}) = d(fgy_{n-3}, gfy_{n-2})$
$\leq \delta_1 d(y_{n-1}, y_{n-2}) + \delta_2 d(y_{n-3}, y_{n-2}) + \delta_3 d(y_{n-2}, y_{n-2}) + \delta_4 d(y_{n-3}, y_{n-1}) + \delta_5 d(y_{n-1}, y_{n-2}) + \delta_6 d(y_{n-2}, y_{n-3}) + \phi(y_{n-2}, y_{n-3}, y_{n-1}, y_{n-2})$
$\leq (\delta_1 + \delta_5) d(y_{n-1}, y_{n-2}) + (\delta_2 + \delta_6) d(y_{n-2}, y_{n-3}) + \delta_4 \Big(d(y_{n-3}, y_{n-2}) + d(y_{n-2}, y_{n-1})\Big)$
$\leq (\delta_1 + \delta_4 + \delta_5) d(y_{n-1}, y_{n-2}) + (\delta_2 + \delta_4 + \delta_6) d(y_{n-3}, y_{n-2})$.

Et si n est impair alors, $d(y_n, y_{n-1}) = d(fgy_{n-2}, gfy_{n-3})$
$\leq \delta_1 d(y_{n-3}, y_{n-2}) + \delta_2 d(y_{n-1}, y_{n-2}) + \delta_3 d(y_{n-3}, y_{n-1}) + \delta_4 d(y_{n-2}, y_{n-2}) + \delta_5 d(y_{n-1}, y_{n-2}) + \delta_6 d(y_{n-2}, y_{n-3}) + \phi(y_{n-3}, y_{n-2}, y_{n-2}, y_{n-1})$
$\leq (\delta_2 + \delta_3 + \delta_5) d(y_{n-1}, y_{n-2}) + (\delta_1 + \delta_3 + \delta_6) d(y_{n-3}, y_{n-2})$.

Posons $S_n = d(y_n, y_{n-1})$. Nous avons :

$$S_n \leq \begin{cases} (\delta_1 + \delta_4 + \delta_5) S_{n-1} + (\delta_2 + \delta_4 + \delta_6) S_{n-2}, & \text{n pair} \\ (\delta_2 + \delta_3 + \delta_5) S_{n-1} + (\delta_1 + \delta_3 + \delta_6) S_{n-2}, & \text{n impair.} \end{cases}$$

Soit $\alpha = \delta_1 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5 + \delta_6$, et $\beta = \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5 + \delta_6$. Nous supposons que $0 < \alpha + \beta < 1$. Nous avons donc, $\forall n \geq 3$,

$$S_n \leq \begin{cases} \alpha S_{n-1} + \beta S_{n-2}, & \text{n pair} \\ \beta S_{n-1} + \alpha S_{n-2}, & \text{n impair.} \end{cases}$$

Où, $0 < \alpha + \beta = \delta_1 + \delta_2 + 2(\delta_3 + \delta_4 + \delta_5 + \delta_6)$.

Nous affirmons que,

$$\forall n \geq 1, S_n \leq \max(S_1, S_2)(\alpha + \beta)^{\frac{n-1}{2}}. \tag{4.15}$$

L'inegalité 4.15, est vraie pour n=1.

Si $n \geq 2$, supposons que l'inegalité 4.15 soit vraie et prouvons la pour $n+1$ par recurrence.

n pair $\Longrightarrow n+1$ impair et donc,

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &\leq \beta S_n + \alpha S_{n-1} \\
&\leq \max(S_1,S_2)\Big(\beta(\alpha+\beta)^{\frac{n-1}{2}} + \alpha(\alpha+\beta)^{\frac{n-2}{2}}\Big) \\
&\leq \max(S_1,S_2)\Big(\beta(\alpha+\beta)^{\frac{n-2}{2}} + \alpha(\alpha+\beta)^{\frac{n-2}{2}}\Big) \\
&\leq \max(S_1,S_2)(\alpha+\beta)^{\frac{(n+1)-1}{2}}.
\end{aligned}$$

Le même argument pour n impair.

Montrons maintenant que la suite, $(y_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy.

Nous avons pour $n \geq m+1$,

$$\begin{aligned}
d(y_n,y_m) &\leq \sum_{j=m+1}^{j=n} d(y_j,y_{j+1}) = \sum_{j=m+1}^{j=n} S_j \\
&\leq \max(S_1,S_2) \sum_{j=m+1}^{j=n} (\alpha+\beta)^{\frac{j-1}{2}} \\
&\leq \max(S_1,S_2) \left(\alpha+\beta\right)^{\frac{-1}{2}} \sum_{j=m+1}^{j=n} (\alpha+\beta)^{\frac{j}{2}}.
\end{aligned}$$

En faisant tendre $n,m \to +\infty$, alors, $d(y_n,y_m) \to 0$.

D'où $(y_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy et donc, elle converge vers une limite $l \in X$.

Soit $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = l$. Si n est pair alors, $y_n = g(y_{n-1})$.

La continuité de g assure que,

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} g(y_{n-1}) = g(\lim_{n\to+\infty} y_{n-1}) = g(l) = l.$$

Dans le cas où, n est impair alors, $y_n = f(y_{n-1})$. La continuité de f assure que,

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} f(y_{n-1}) = f(\lim_{n\to+\infty} y_{n-1}) = f(l) = l.$$

Nous en concluons que l est un point fixe commun de f et g.

Unicité. Soit l_1 et l_2 deux points fixes communs tels que, $f(l_1) = f(l_1) = l_1$ et $g(l_2) = g(l_2) = l_2$. De l'inégalité 4.3, nous avons, $(1-\alpha_1-\alpha_4-\alpha_5-\alpha_6)d(l_1,l_2) \leq 0$. Mais, $(1-\alpha_1-\alpha_4-\alpha_5-\alpha_6) > 0$, ceci implique que $d(l_1,l_2) = 0 \implies l_1 = l_2$. □

Corollaire 4.8. *Soient f et g deux applications définies sur un espace metrique complet X dans lui même et supposons que l'inégalité suivante soit vérifiée,*

$$d(gfx, fgy) \leq \alpha_1 d(x,fx) + \alpha_2 d(y,gy) \tag{4.16}$$

avec, $0 < \alpha_1 + \alpha_2 < 1$. f et g possèdent alors un unique point fixe commun dans X.

Théorème 4.9. *Soit h, f and g trois applications définies sur un espace metrique complet (X, d), vérifiant les deux inégalités suivantes,*

i) Pour tout $x, y, \in X$,

$$d(hgx, gfy) \leq \delta_1 d(x, gx) + \delta_2 d(y, fy) + \delta_3 d(x, fy) + \delta_4 d(y, gx) + \delta_5 d(gx, fy) + \delta_6 d(x, y) + \phi(x, y, fx, gy); \tag{4.17}$$

avec, $\delta_i \geq 0, \forall i = 1 \ldots 5$;

$$0 \leq \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + 2\delta_5 < 1; \tag{4.18}$$

où, ϕ est une application à quatre variables définie par ,

$$\phi : X^4 \longrightarrow \mathbb{R}^+, \text{ sachant que } \phi(s, s_1, s_2, s) = 0, \forall, s, s_1, s_2 \in X. \tag{4.19}$$

ii) Pour tout $x, y, \in X$,

$$d(fhx, hgy) \leq \delta_1 d(x, hx) + \delta_2 d(y, gy) + \delta_3 d(x, gy) + \delta_4 d(y, hx) + \delta_5 d(hx, gy) + \delta_6 d(x, y). \tag{4.20}$$

Désignons par α et β les quantités suivantes,

$$\alpha = \max\{\delta_1 + \delta_4 + \delta_5, \frac{\delta_2 + \delta_3 + 2\delta_4 + \delta_5 + \delta_6}{1 - \delta_1 - \delta_2 - \delta_3 - \delta_4 - 2\delta_5}\} \tag{4.21}$$

et

$$\beta = \max\{\delta_2 + \delta_4 + \delta_6, \frac{\delta_1 + \delta_3 + 2\delta_6}{1 - \delta_1 - \delta_2 - \delta_3 - \delta_4 - 2\delta_5}\}. \tag{4.22}$$

Si $0 < \alpha + \beta < 1$ alors, f, g et h possèdent un unique point fixe commun.

Démonstration. Définissons la suite $(y_n)_{n\geq 1}$ comme suit
$y_1 = f(x), y_2 = g(x), y_3 = h(x)$ et pour tout $n \geq 4$,

$y_n = h(y_{n-1})$, si $n = 0 \mod 3, y_n = f(y_{n-1})$, si $n = 1 \mod 3$ et $y_n = g(y_{n-1})$ si $n = 2 \mod 3$.

Nous allons prouver que la suite $(y_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans l'espace metrique complet $(X, , d)$.

i) Si $n \equiv 0 \mod 3$.

Soient $y_n = hgy_{n-2}$ et $y_{n-1} = gfy_{n-3}$.

De l'inégalité 4.17 nous avons, $S_n = d(y_n, y_{n-1}) \leq \delta_1 d(y_{n-2}, y_{n-1}) + \delta_2 d(y_{n-3}, y_{n-2}) + \delta_3 d(y_{n-2}, y_{n-2}) + \delta_4 d(y_{n-3}, y_{n-1}) + \delta_5 d(y_{n-1}, y_{n-2}) + \delta_6 d(y_{n-2}, y_{n-3}) + \phi(y_{n-2}, y_{n-3}, y_{n-1}, y_{n-2})$.
D'où,
$S_n \leq (\delta_1 + \delta_4 + \delta_5) S_{n-1} + (\delta_2 + \delta_4 + \delta_6) S_{n-2}$.

ii) Si $n \equiv 1 \mod 3$.
Soient $y_n = fhy_{n-2}$ et $y_{n-1} = hgy_{n-3}$.
En appliquant l'inégalité 4.20 nous obtenons,
$S_n = d(y_n, y_{n-1}) \leq \delta_1 d(y_{n-1}, y_{n-2}) + \delta_2 d(y_{n-3}, y_{n-2}) + \delta_3 d(y_{n-2}, y_{n-2}) + \delta_4 d(y_{n-3}, y_{n-1}) + \delta_5 d(y_{n-1}, y_{n-2}) + \delta_6 d(y_{n-2}, y_{n-3}) + \phi(y_{n-2}, y_{n-1}, y_{n-1}, y_{n-2})$.
D'où,

$$S_n \leq (\delta_1 + \delta_4 + \delta_5) S_{n-1} + (\delta_2 + \delta_4 + \delta_6) S_{n-2}.$$

iii) Si $n \equiv 2 \mod 3$.
Soient $y_n = gfy_{n-2}$ et $y_{n-1} = fhy_{n-3}$.

$$\begin{aligned} S_n = d(y_n, y_{n-1}) &= d(gfy_{n-2}, fhy_{n-3}), \quad \textit{par l'inégalité triangulaire,} \\ &\leq d(gfy_{n-2}, y_{n+1}) + d(y_{n+1}, fhy_{n-3}). \end{aligned}$$

Mais, $n + 1 \equiv 0 \mod 3 \Rightarrow y_{n+1} = hgy_{n-1}$.

D'où,

$$S_n = d(y_n, y_{n-1}) \leq d(hgy_{n-1}, gfy_{n-2}) + d(fhy_{n-3}, hgy_{n-1}).$$

Mais, $d(hgy_{n-1}, gfy_{n-2}) = S_{n+1}$.

Donc, en appliquant l'inégalité 4.20 nous obtenons,

$$S_{n+1} \leq (\delta_1 + \delta_4 + \delta_5) S_n + (\delta_2 + \delta_4 + \delta_6) S_{n-1}.$$

$d(fhy_{n-3}, hgy_{n-1}) \leq \delta_1 d(y_{n-3}, y_{n-2}) + \delta_2 d(y_{n-1}, y_n) + \delta_3 d(y_{n-3}, y_n) + \delta_4 d(y_{n-1}, y_{n-2}) + \delta_5 d(y_{n-2}, y_n) + \delta_6 d(y_{n-3}, y_{n-1})$.
En utilisant successivement, l'inegalité triangulaire pour les inégalités suivantes nous obtenons,

$$\begin{aligned} d(y_{n-3}, y_n) &\leq d(y_n, y_{n-1}) + d(y_{n-1}, y_{n-2}) + d(y_{n-2}, y_{n-3}) \\ &\leq S_n + S_{n-1} + S_{n-2}. \end{aligned} \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned} d(y_{n-2}, y_n) &\leq d(y_n, y_{n-1}) + d(y_{n-1}, y_{n-2}) \\ &\leq S_n + S_{n-1}. \end{aligned} \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned} d(y_{n-1}, y_{n-3}) &\leq d(y_{n-1}, y_{n-2}) + d(y_{n-2}, y_{n-3}) \\ &\leq S_{n-1} + S_{n-2}. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Par substitution de l'inégalité 4.23, 4.24 et 4.25 dans 4.13, nous trouvons,

$S_n \leq S_{n+1} + \delta_1 S_{n-2} + \delta_2 S_n + \delta_3(S_n + S_{n-1} + S_{n-2}) + \delta_4 S_{n-1} + \delta_5(S_n + S_{n-1})$
$+ \delta_6(S_{n-1} + S_{n-2})$
$S_n \leq (\delta_1 + \delta_4 + \delta_5)S_n + (\delta_2 + \delta_4 + \delta_6)S_{n-1} + \delta_1 S_{n-2} + \delta_2 S_n + \delta_3(S_n + S_{n-1} + S_{n-2}) +$
$\delta_4 S_{n-1} + \delta_5(S_n + S_{n-1}) + \delta_6(S_{n-1} + S_{n-2})$
$(1 - \delta_1 - \delta_2 - \delta_3 - \delta_4 - 2\delta_5)S_n \leq (\delta_2 + \delta_3 + 2\delta_4 + \delta_5 + 2\delta_6)S_{n-1} + (\delta_1 + \delta_3 + \delta_6)S_{n-2}$
$S_n \leq \dfrac{\delta_2 + \delta_3 + 2\delta_4 + \delta_5 + 2\delta_6}{1 - \delta_1 - \delta_2 - \delta_3 - \delta_4 - 2\delta_5} S_{n-1} + \dfrac{\delta_1 + \delta_3 + \delta_6}{1 - \delta_1 - \delta_2 - \delta_3 - \delta_4 - 2\delta_5} S_{n-2}.$

Soient $\alpha = \max\{\delta_1 + \delta_4 + \delta_6, \dfrac{\delta_2 + \delta_3 + 2\delta_4 + \delta_5 + 2\delta_6}{1 - \delta_1 - \delta_2 - \delta_3 - \delta_4 - 2\delta_5}\}$ et
$\beta = \{\delta_2 + \delta_4 + \delta_6, \dfrac{\delta_1 + \delta_3 + \delta_6}{1 - \delta_1 - \delta_2 - \delta_3 - \delta_4 - 2\delta_5}\}.$
Supposons que $0 < \alpha + \beta < 1$. Nous avons alors, pour $n \geq 4$,

$$S_n \leq \alpha S_{n-1} + \beta S_{n-2}.$$

Nous affirmons que,

$$S_n \leq \max(S_1, S_2)(\alpha + \beta)^{\frac{n-1}{2}}.$$

L'affirmation est vraie pour $n = 3$ et pour $n \geq 4$,
nous avons :

$$\begin{aligned} S_n &\leq \alpha S_{n-1} + \beta S_{n-2} \\ &\leq \alpha \max(S_1, S_2)(\alpha + \beta)^{\frac{n-2}{2}} + \beta \max(S_1, S_2)(\alpha + \beta)^{\frac{n-3}{2}}. \end{aligned}$$

Mais, $0 < \alpha + \beta < 1 \Longrightarrow (\alpha + \beta)^{\dfrac{n-2}{2}} < (\alpha + \beta)^{\dfrac{n-3}{2}}$.
D'où,

$$S_n \leq \max(S_1, S_2)(\alpha + \beta)(\alpha + \beta)^{\frac{n-2}{2}} \leq \max(S_1, S_2)(\alpha + \beta)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Ceci montre que notre affirmation est vraie pour $n \geq 3$.
Montrons maitenant que (y_n) est une suite de Cauchy dans X.

Si $p \geq 2$ et $q \geq 2$ avec $p \geq q + 1$ alors,

$$\begin{aligned} d(y_p, y_q) &\leq \sum_{j=q+1}^{j=p} S_j \\ &\leq \max(S_1, S_2) \sum_{j=q}^{j=p-1} \sqrt{\alpha + \beta)^j}. \end{aligned}$$

En passant à la limite dans l'expression ci-dessus, nous aurons :

$$\lim_{x\to\infty} d(y_p, y_q) \leq \max(S_1, S_2) \sum_{j=q}^{j=p-1} \sqrt{\alpha+\beta)^j} = 0.$$

Et ceci implique que

$$\lim_{x\to\infty} d(y_p, y_q) = 0.$$

D'où, y_n est une suite de Cauchy dans X et elle est donc convergente vers une limite l dans X.

Prouvons que l est un point fixe commun de f, g et h supposées être continues. Comme

$$\lim_{x\to\infty} y_n = l \Longrightarrow \lim_{x\to\infty} y_{3n} = y_{3n+1} = l.$$

alors,

$$f(y_{3n}) = y_{3n+1} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(y_{3n}) = \lim_{x\to\infty} y_{3n+1} = l \Longrightarrow f(l) = l.$$

d'autre part,

$$\lim_{x\to\infty} y_{3n} = l \Longrightarrow g(\lim_{x\to\infty} y_{3n}) = g(l).$$

De plus,

$$\lim_{x\to\infty} g(y_{3n+1}) = g(\lim_{n\to\infty} y_{3n+1}) = g(l) = \lim_{x\to\infty} y_{3n+2} = l \Longrightarrow g(l) = l.$$

$$\lim_{x\to\infty} y_{3n+2} = l \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} h(y_{3n+2}) = h(l) \Longrightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} h(y_{3n+2}) = h(\lim_{n\to\infty} y_{3n+2}) = h(l) = \lim_{n\to\infty} y_{3n+3} = l \Longrightarrow h(l) = l.$$

Donc, l est un point fixe commun pour f, g et h. Il reste à montrer que l est l'unique point fixe commun pour f, g et h.

Soient l_1 et l_2 deux points fixes communs pour f, g et h. En utilisant l'inégalité 4.20, nous en déduisons que, $(1-\delta_1-\delta_4-\delta_5-\delta_6)d(l_1, l_2) \leq 0$. Comme $1-\delta_1-\delta_4-\delta_5-\delta_6 > 0$, alors, $d(l_1, l_2) = 0$. Ce qui montre bien que $l_1 = l_2$. Ce qui achève la dèmonstration. $\square$

Bibliographie

[1] Abbas, M. ; Jungck, G. Common fixed point results for noncommuting mappings without continuity in cone metric spaces. *J. Math. Anal. Appl.* 2008, *341*, 416–420. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.09.070.

[2] Abdul Rahim Khan, Hamed H. Al-Sulami, Muhammad Rashid, Faiza Shabbir, Fixed points of multivalued convex contractions with application, PLOS ONE. https ://doi.org/10.1371/journal.pone.0321860 May 12, 2025.

[3] Abbas, M. ; Jungck, G. Common fixed point results for noncommuting mappings without continuity in cone metric spaces. *J. Math. Anal. Appl.* 2008, *341*, 416–420. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.09.070.

[4] Arutyunov, A.V. Covering mappings in metric spaces and fixed points. *Dokl. Math.* 2007, *76*, 665–668. https://doi.org/10.1134/S1064562407050079.

[5] Arutyunov, A.V. ; Greshnov, A.V. *Theory of (q1, q2)-quasimetric spaces and coincidence points*. *Dokl. Math*. 2016, *94*, 434-437. http://dx.doi.org/10.1134/S1064562416040232.

[6] Arutyunov, A.V. ; Greshnov, A.V. *(q1, q2)-quasimetric spaces. Covering mappings and coincidence points. A review of the results*. *Fixed Point Theory.* 2022, *23(2)*, 473–486. https://doi.org/10.24193/fpt-ro.2022.2.03.

[7] Arutyunov, A.V. ; Greshnov, A.V. ; Lokutsievskii, L.V. ; Storozhuk, K.V. Topological and geometrical properties of spaces with symmetric and nonsymmetric f-quasimetrics. *Topology Appl*. 2017, *221*, 178-194. https://doi.org/10.1016/j.topol.2017.02.035.

[8] Asha, R. ; Kumari, J. Common Fixed Point Theorems for Weakly Commutative Maps in Dislocated Metric Spaces. *IJMMS Serials Publications*. 2017 *13(1)*, (January-June) 37-50. https://serialsjournals.com/abstract/89078_ch_5_f_-_asha_dahiya.pdf.

[9] Bota, M.F. ; Guran, L. ; Hammad, H.A. Wardowski's Contraction and Fixed Point Technique for Solving Systems of Functional and Integral Equations. *J. Funct. Spaces*. 2021. https://doi.org/10.1155/2021/7017046.

[10] Boureghda, A. ; Chebel, Z. Common Fixed Point of the Commutative F-contraction Self-mappings. *Int. J. Appl. Comput. Math*. 2021, *7(4)*, 168. https://doi.org/10.1007/s40819-021-01107-1.

[11] Bryant, V.W. A remark on a fixed-point theorem for iterated mappings. *The American Mathematical Monthly*. 1968 *75(4)*, 399–400. https://doi.org/10.2307/2313440.

[12] Chen, l. ; Liu, X. ; Xia, X. ; Zhao, Y. Common Fixed Point Theorems for Two Mappings in Complete b-Metric Spaces. *Fractal Fract*. 2022, *6(2)*, 103. https://doi.org/10.3390/fractalfract6020103.

[13] Ciric, LB : Generalized contractions and fixed-point theorems. Publ. Inst. Math. (Belgr.) 12(26), 19-26 (1971).

[14] Deghoul, D. ; Chebel, Z. ; Boureghda, A. ; Benyoucef, S. Common Fixed Point of the Commutative F-contraction Self-mappings with uniquely bounded sequence. *J. Nonlinear. Model. Anl (JNMA), Global Science Press*. 2025, *7(2)*, 641–648. https://dx.doi.org/10.12150/jnma.2025.641.

[15] Dinesh Panthi1, Kumar Subedi2, Some Common Fixed Point Theorems for Four Mappings in Dislocated Metric Space. Advances in Pure Mathematics, 2016, 6, 695-712.

[16] Edwards Jr, C.H. Adanced Calculs of Serval Variables, *Academic Press, New York & London*, 1973. https://ptvtp.wordpress.com/wp-content/uploads/2011/10/c-h-edwards-auth-advanced-calculus-of-several-variables-elsevier-inc-academic-p pdf.

[17] Granas, A. ; Dugundji, J. Fixed point Theory. 2003. https://books.google.dz/books/about/Fixed_Point_Theory.html?id=4_iJAoLSq3cC&redir_esc=y.

[18] Greshnov, A.V. *(q1, q2)-quasimetrics bi-Lipschitz equivalent to 1-quasimetrics*. *Sib. Adv. Math*. 2017, *27*, 253–262. https://doi.org/10.3103/S1055134417040034.

[19] Greshnov, A.V. *Regularization of distance functions and separation axioms on (q1, q2)-quasimetric spaces*. *Siberian Electronic Mathematical Reports*. 2017, *14*, 765–773. https://doi.org/10.17377/semi.2017.14.065.

[20] Gustave, C. Topology. *Academic Press, New York*, 1966. https://www.sciencedirect.com/bookseries/pure-and-applied-mathematics/vol/19/suppl/C.

[21] Ignace I. K. Classroom Notes : Fixed Points. *Amer. Math. Monthly*, 1964. *71(8)*. https://doi.org/10.2307/2312410.

[22] Jungck, G. Commuting mappings and fixed points. *Amer. Math. Monthly.* 1976, *83(4)*, 261–263. https://doi.org/10.1080/00029890.1976.11994093.

[23] Jungck, G. Common fixed points for commuting and compatible maps on compacta. *American Mathematical society.* 1988, *103(3)*. https://www.ams.org/journals/proc/1988-103-03/S0002-9939-1988-0947693-2/S0002-9939-1988-0947693-2.pdf.

[24] Kannan, R : Some results on fixed points. Bull. Calcutta Math. Soc. 60, 71-76 (1968).

[25] Lang, S. Analysis 1, *Addison-Wesely, Reading, Mass*. 1968. https://openlibrary.org/books/OL5609982M/Analysis_I.

[26] Mumtaz,A. ; Muhammad, A. Generalization of Common Fixed Point Theorems for Two Mappings. *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, 2017, *5(6)*, 230–239. https://doi.org/10.12691/tjant-5-6-5.

[27] Pfeffer, W.F. More on involutions of a circle. *The American Mathematical Monthly*. 1974 *81(6)*, 613–616. https://doi.org/10.1080/00029890.1974.11993627.

[28] Qasim K, K. Common fixed point theorems by using two mappings in b-rectangular metric space. *Al-Qadisiyah Journal of Pure Science*, 2023, *28(1)*. https://doi.org/10.29350/2411-3514.1003.

[29] Raul, M. A coincidence theorem. *The American Mathematical Monthly*, 1967. *74(5)*, 569. https://doi.org/10.2307/2314896.

[30] Reich, S : Some remarks concerning contraction mappings. Can. Math. Bull. 14, 121-124 (1971).

[31] Book, Ravi P. Agarwal, Erdal KARAPINAR, Donal O'Regan, Fixed Point Theory in Metric Type Spaces (2016).

[32] Sagan, H. Advanced Calculus, *Houston Mifflin Company, Boston*, 1974. https://fr.scribd.com/document/559559378/H-Sagan-Advanced-Calculus.

[33] Schechter, E. Handbook of Analysis and Its Fondation. *Academic Press*, 1996. https://staffwww.dcs.shef.ac.uk/people/R.Chisholm/docs/Eric%20Schechter%20Handbook%20of%20Analysis%20and%20Its%20Foundations%20%201996.pdf

[34] Shaban Sedghi, Nabi Shobe, Mujahid Abbas, common fixed point of four mappings satisfing implicit generalized weak contractive type condition, Demonstratio Mathematica,Vol. XLVII No 2 2014.

Conclusion and Perspectives

This thesis has advanced the theory of common fixed points for commutative F-contractions by relaxing classical assumptions and introducing more flexible conditions. By replacing the algebraic inclusion condition of Jungck's theorem with a topological condition based on the boundedness of iterative sequences, we have established necessary and sufficient conditions for the existence and uniqueness of common fixed points. Our approach extends classical results while preserving their algorithmic utility for numerical approximation.

The main contributions include three families of results: first, a characterization of common fixed points using bounded Picard sequences; second, a modified condition based on limit superior analysis that defines a non-empty set E guaranteeing convergence; and third, hybrid non-commutative methods that do not require continuity or commutativity assumptions. These findings broaden the applicability of fixed point theory to problems where strict contractions or inclusion conditions fail.

Future research will focus on three main directions. First, we aim to identify minimal conditions for two mappings, where one is contractive relative to the other, to admit a unique coincidence point without assuming commutativity or inclusion. Second, we will investigate conditions under which a mapping possesses a unique fixed point when the limit superior expression remains finite, potentially extending our framework to broader classes of functions. Third, we intend to apply these results to concrete problems in various mathematical domains, including differential equations, optimization algorithms, and dynamical systems modeling. Particular attention will be given to numerical implementations and to adapting our findings to generalized metric spaces and asymptotic contraction settings. These efforts aim to contribute to open problems in both pure and applied mathematics.

العنوان: نظرية النقطة الثابتة المشتركة للتقلصات F التبادلية: التعميمات والتطبيقات

الملخص: تُقدم هذه الأطروحة إسهاماً متقدماً في نظرية النقطة الثابتة من خلال استحداث تعميمات مبتكرة، خاصة فيما يتعلق بالتقلصات F التبادلية. تضع الأطروحة شروطاً أكثر مرونة من نظريتي باناخ وجانجك الكلاسيكيتين، مما يضمن وجود وتفرد النقاط الثابتة المشتركة. تعتمد النتائج على افتراضات طوبولوجية، مثل حدودية المتتاليات التكرارية، بدلاً من القيود الجبرية الصارمة. تُظهر التطبيقات في التحليل العددي ونمذجة الأنظمة الديناميكية الأهمية العملية لهذه التطورات. الأساليب المقترحة، بما في ذلك التقنيات الهجينة غير التبادلية، توسع إمكانيات معالجة مسائل التحسين. تستكشف الأطروحة أيضاً امتدادات إلى الفضاءات المترية المعممة والتقلصات التقاربية. وتُعزز البراهين الدقيقة، المدعومة بأمثلة، صحة النهج المقترحة. وأخيراً، تم تحديد توجهات للبحث المستقبلي بهدف تكييف هذه النتائج مع سياقات متعددة التخصصات. وبالتالي، يشكل هذا العمل مرجعاً للدراسات اللاحقة في التحليل الدالي والرياضيات التطبيقية.
الكلمات المفتاحية: نظرية النقطة الثابتة، التقلصاتF ، التطبيقات التبادلية، النقطة الثابتة المشتركة، الفضاءات المترية الكاملة، نظرية باناخ، نظرية جانجك، متتاليات بيكار، الأساليب التكرارية، تقارب المتتاليات.

Title: COMMON FIXED-POINT THEORY FOR COMMUTATIVE F-CONTRACTIONS: GENERALIZATIONS AND APPLICATIONS.

Abstract : This thesis advances fixed-point theory by introducing innovative generalizations, particularly for commutative F-contractions. It establishes more flexible conditions than the classical Banach and Jungck theorems, ensuring the existence and uniqueness of common fixed points. The results rely on topological assumptions, such as the boundedness of iterative sequences, rather than strict algebraic constraints. Applications in numerical analysis and dynamical systems modeling demonstrate the practical relevance of these advancements. The proposed methods, including non-commutative hybrid techniques, expand possibilities for optimization problems. The thesis also explores extensions to generalized metric spaces and asymptotic contractions. Rigorous proofs, supported by examples, validate the proposed approaches. Finally, future research directions are outlined to adapt these results to multidisciplinary contexts. This work thus serves as a benchmark for subsequent studies in functional analysis and applied mathematics.
Keywords: Fixed-point theory, F-contractions, Commutative mappings, Common fixed point, Complete metric spaces, Banach's theorem, Jungck's theorem, Picard sequences, Iterative methods, Sequence convergence.

Titre : THÉORIE DES POINTS FIXES COMMUNS POUR LES F-CONTRAC-TIONS COMMUTATIVES : GÉNÉRALISATIONS ET APPLICATIONS.

Résumé : Cette thèse enrichit la théorie des points fixes en introduisant des généralisations novatrices, notamment pour les F-contractions commutatives. Elle établit des conditions plus souples que les théorèmes classiques de Banach et Jungck, garantissant l’existence et l’unicité de points fixes communs. Les résultats s’appuient sur des hypothèses topologiques, comme la bornitude des suites itératives, plutôt que sur des contraintes algébriques strictes. Des applications en analyse numérique et en modélisation de systèmes dynamiques illustrent la portée pratique de ces avancées. Les méthodes proposées, incluant des techniques hybrides non commutatives, élargissent le champ des possibilités pour les problèmes d’optimisation. La thèse explore également des extensions aux espaces métriques généralisés et aux contractions asymptotiques. Les preuves, rigoureuses et illustrées par des exemples, renforcent la validité des approches. Enfin, des pistes de recherche futures sont ouvertes, visant à adapter ces résultats à des contextes multidisciplinaires. Ce travail constitue ainsi une référence pour les études ultérieures en analyse fonctionnelle et en mathématiques appliquées.
Mots-clés : Théorie des points fixes, F-contractions, Applications commutatives, Point fixe commun, Espaces métriques complets, Théorème de Banach, Théorème de Jungck, Suites de Picard, Méthodes itératives, Convergence des suites.