People's Democratic Republic of Algeria
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
Ministry of Higher Education and Scientific Research
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ferhat Abbas University
Setif 1
Faculty of Sciences
Department of Computer Science



جامعة فرحات عباس سطيف 1
كلية العلوم
قسم الإعلام الآلي

Master's Thesis

For the obtainment of the Master's Degree in

Computer Science

Speciality: **Quantum Computing**

Optimizing QAOA: Parameter Strategies and Performance Analysis for Combinatorial Problems

Author :
Tegguiche Ishak

Supervised by :
Dr. Hichem Talbi

Defended before the jury composed of :

Dr. Imene Zenbout *(University of Sétif 1 Ferhat Abbas)*	:	President
Dr. Safia Djemame Zazoua *(University of Sétif 1 Ferhat Abbas)*	:	Examiner
Dr. Hichem Talbi *(University of Constantine 2 Abdelhamid Mehri)*	:	Supervisor

Academic Year : 2025/2026

Abstract

The Quantum Approximate Optimization Algorithm (QAOA) has emerged as one of the most promising variational algorithms for solving combinatorial optimization problems on near-term Noisy Intermediate-Scale Quantum (NISQ) devices. However, QAOA's performance is highly sensitive to its variational parameters $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta})$, and finding optimal parameters remains computationally expensive, often requiring hundreds of quantum circuit evaluations. This thesis presents a systematic empirical study of QAOA parameter optimization strategies for the Maximum Cut problem (Max-Cut), with the goal of providing practical guidelines for QAOA implementation on NISQ devices.

We begin by investigating the impact of circuit depth $p \in \{1, 2, 3, 4\}$ on solution quality and computational cost across three graph families (3-Regular, Erdős-Rényi, and Barabási-Alber) of varying sizes ($n \in \{8, 10, 12\}$). Results show that increasing p consistently improves the approximation ratio when using gradient-free optimization, while gradient-based methods exhibit degradation at larger depths due to the barren plateau phenomenon.

We then conduct a comparative evaluation of six classical optimizers (L-BFGS-B,COBYLA, AdaGrad, SPSA, Differential Evolution, and a Hybrid DE+L-BFGS-B) approach demonstrating that deterministic optimizers achieve equivalent solution quality at $p = 2$, with L-BFGS-B being the most computationally efficient. We further evaluate four parameter initialization strategies (Random, Fixed, TQA, and Warm-Start) showing that Fixed and Warm-Start consistently outperform Random and TQA, with Warm-Start offering the best balance between solution quality and computational efficiency.

Finally, we characterize the QAOA optimization landscape through a complete visualization of the $p = 1$ landscape, revealing 10 local minima organized in three quality tiers, strong gradient magnitudes throughout the parameter space, and a dramatic growth in landscape complexity with circuit depth. These findings provide rigorous theoretical explanations for all empirical results and offer concrete practical guidelines for QAOA implementation.

Keywords:

Quantum Approximate Optimization Algorithm (QAOA), Variational Quantum Algorithms, Combinatorial Optimization, Maximum Cut (Max-Cut), Parameter Optimization, Classical Optimizers, Parameter Initialization, NISQ Devices, Optimization Landscape Analysis, Quantum-Classical Hybrid Algorithms.

Résumé

L'algorithme d'optimisation approximative quantique (QAOA) est un algorithme variationnel prometteur pour résoudre des problèmes d'optimisation combinatoire sur les dispositifs quantiques bruités (NISQ). Cependant, ses performances dépendent fortement de ses paramètres $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta})$, dont l'optimisation reste coûteuse. Cette thèse présente une étude empirique systématique des stratégies d'optimisation des paramètres du QAOA pour le problème de la coupe maximale (Max-Cut), afin de fournir des lignes directrices pratiques pour son implémentation. D'abord, l'impact de la profondeur du circuit $p \in \{1, 2, 3, 4\}$ est analysé sur trois familles de graphes (3-régulier, Erdős-Rényi, Barabási-Albert) de tailles $n \in \{8, 10, 12\}$. Les résultats montrent que l'augmentation de p améliore le taux d'approximation avec les méthodes sans gradient, tandis que les approches basées sur le gradient se dégradent aux fortes profondeurs à cause des plateaux stériles.

Ensuite, une évaluation comparative de six optimiseurs classiques (L-BFGS-B, COBYLA, AdaGrad, SPSA, Évolution Différentielle et un hybride DE+L-BFGS-B) montre qu'à $p = 2$, les méthodes déterministes offrent une qualité équivalente, L-BFGS-B étant la plus efficace. De plus, parmi quatre stratégies d'initialisation (Aléatoire, Fixe, TQA, Warm-Start), les approches Fixe et Warm-Start surpassent les autres, Warm-Start offrant le meilleur compromis performance/coût.

Enfin, la cartographie complète du paysage d'optimisation pour $p = 1$ révèle 10 minima locaux structurés en trois niveaux de qualité, de forts gradients, et une complexité exponentielle avec p. Ces observations explicitent les résultats empiriques et fournissent des règles concrètes pour optimiser l'usage du QAOA.

Mots-clés :

QAOA, Algorithmes quantiques variationnels, Optimisation combinatoire, Max-Cut, Optimisation des paramètres, Optimiseurs classiques, Initialisation, Dispositifs NISQ, Paysage d'optimisation, Algorithmes hybrides.

ملخص

برزت خوارزمية التحسين التقريبي الكمي (QAOA) بوصفها من أكثر الخوارزميات التغايرية واعدة لحل مسائل التحسين التوافقي على الأجهزة الكمية قريبة المدى من نوع NISQ. غير أن أداء هذه الخوارزمية يتأثر بشكل كبير بمعاملاتها التغايرية، إذ يظل إيجاد المعاملات المثلى مكلفاً حسابياً ويستلزم في الغالب مئات من تقييمات الدوائر الكمية. تقدم هذه الأطروحة دراسة تجريبية منهجية لاستراتيجيات تحسين معاملات QAOA لمسألة القطع الأقصى (Max-Cut)، بهدف تقديم إرشادات عملية لتطبيق QAOA على أجهزة NISQ.

نبدأ بدراسة تأثير عمق الدائرة الكمية على جودة الحل والتكلفة الحسابية عبر ثلاث عائلات من الرسوم البيانية (المنتظمة ذات الدرجة 3، وإردوس-ريني، وباراباسي-ألبرت) بأحجام مختلفة. تُظهر النتائج أن زيادة عمق الدائرة تُحسِّن نسبة التقريب باستمرار عند استخدام التحسين غير المعتمد على التدرج، في حين تُظهر الطرق المعتمدة على التدرج تدهوراً عند الأعماق الكبيرة بسبب ظاهرة الأسطح العقيمة.

نُجري بعد ذلك تقييماً مقارناً لستة محسِّنات كلاسيكية، وهي L-BFGS-B وCOBYLA وAdaGrad وSPSA والتطور التفاضلي ونهج هجين (DE+L-BFGS-B) مُوضِّحين أن المحسِّنات الحتمية تحقق جودة حل متكافئة عند العمق 2، مع تميز L-BFGS-B بكفاءته الحسابية العالية. كما نُقيِّم أربع استراتيجيات لتهيئة المعاملات (العشوائية والثابتة وTQA والإطلاق الدافئ) مُبيِّنين أن استراتيجيتي التهيئة الثابتة والإطلاق الدافئ تتفوقان باستمرار على التهيئة العشوائية وTQA.

أخيراً، نُميِّز بنية مشهد تحسين QAOA من خلال تصوير كامل للمشهد عند العمق 1، كاشفين عن 10 حدود دنيا محلية منظمة في ثلاث مستويات جودة، وقيم تدرج قوية في الفضاء البارامتري، ونمو كبير في تعقيد المشهد مع زيادة عمق الدائرة. تقدم هذه النتائج تفسيرات نظرية صارمة لجميع النتائج التجريبية وتوفر إرشادات عملية ملموسة لتطبيق QAOA.

الكلمات المفتاحية : خوارزمية التحسين الكمي التقريبي (QAOA)، الخوارزميات الكمومية التغايرية، التحسين التوافقي، MaxCut، Max-SAT، تحسين المعاملات، أجهزة NISQ، عمق الدائرة الكمومية، تحليل مشهد التحسين، الخوارزميات الهجينة الكمو- كلاسيكية.

Contents

Introduction **1**

1 Combinatorial Optimization **5**
1.1 Introduction . . . 5
1.2 Decision vs Optimization Problems . . . 6
1.3 Complexity Classes . . . 6
1.4 Classical Methods for Combinatorial Optimization . . . 8
1.4.1 Exact Methods . . . 8
1.4.2 Approximation Methods . . . 9
1.4.3 Limitations of Classical Methods . . . 10
1.5 Benchmark Problems in Combinatorial Optimization . . . 10
1.6 Conclusion . . . 14

2 Quantum-Based Optimization **16**
2.1 Introduction . . . 16
2.2 Basics of Quantum Computing . . . 17
2.2.1 Quantum States and Qubits . . . 17
2.2.2 Quantum Gates and Circuits . . . 18
2.3 Classical vs. Quantum Computing . . . 21
2.4 Quantum Optimization Algorithms . . . 23
2.4.1 Overview . . . 23
2.4.2 Quantum Adiabatic Algorithm (QAA) . . . 24
2.4.3 Quantum Annealing . . . 25
2.4.4 Variational Quantum Eigensolver (VQE) . . . 26
2.4.5 Other Quantum Approaches . . . 27
2.4.6 Quantum Approximate Optimization Algorithm (QAOA) - Brief Overview . . . 28
2.4.7 Comparative Summary . . . 29
2.5 Why QAOA for NISQ Devices? . . . 29
2.5.1 NISQ Devices and Their Limitations . . . 30
2.5.2 Shallow Circuit Requirements . . . 31

2.5.3 Flexibility for Different Problems . . . 31
2.5.4 Hybrid Quantum-Classical Nature . . . 32
2.6 Conclusion . . . 33

3 Quantum Approximate Optimization Algorithm (QAOA) 34
3.1 Introduction . . . 34
3.2 QAOA Formulation . . . 35
3.2.1 Quantum Adiabatic Computation . . . 35
3.2.2 From Adiabatic to Digital: Discretization . . . 36
3.2.3 Problem Encoding . . . 37
3.2.4 Cost Hamiltonian . . . 38
3.2.5 Mixer Hamiltonian . . . 38
3.2.6 QAOA Circuit Structure . . . 39
3.2.7 Expectation Value and Approximation Ratio . . . 40
3.2.8 Theoretical Guarantees and Convergence . . . 41
3.3 QAOA for Max-Cut . . . 41
3.3.1 Max-Cut Problem Formulation . . . 42
3.3.2 Ising Model Formulation . . . 42
3.3.3 QUBO Formulation . . . 43
3.3.4 Cost Hamiltonian for Max-Cut . . . 43
3.3.5 QAOA Circuit for Max-Cut . . . 44
3.3.6 Approximation Ratio for Max-Cut . . . 45
3.4 QAOA Parameter Optimization . . . 46
3.4.1 Role of Circuit Depth p . . . 46
3.4.2 Variational Parameters and Their Sensitivity . . . 47
3.4.3 Parameter Initialization . . . 47
3.4.4 Choice of Classical Optimizer . . . 47
3.4.5 Optimization Landscape . . . 48
3.5 Conclusion . . . 50

4 Experiments and Results 51
4.1 Introduction . . . 51
4.2 Experimental Setup . . . 51
4.2.1 Implementation Tools . . . 52
4.2.2 Graph Instances . . . 52
4.2.3 Evaluation Metrics . . . 54
4.3 Impact of Circuit Depth p . . . 55
4.3.1 Experimental Protocol . . . 55
4.3.2 Results . . . 55
4.3.3 Computational Cost Analysis . . . 58

4.3.4 Analysis and Discussion 59
4.4 Comparison of Classical Optimizers 62
4.4.1 Experimental Protocol 62
4.4.2 Results 63
4.4.3 Computational Cost Comparison 66
4.4.4 Analysis and Discussion 67
4.5 Parameter Initialization Strategies 69
4.5.1 Experimental Protocol 69
4.5.2 Results 70
4.5.3 Analysis and Discussion 73
4.6 QAOA Optimization Landscape Analysis 75
4.6.1 Part 1: p=1 Landscape Analysis 75
4.6.2 Part 2: p=2 Landscape Analysis 81
4.6.3 Part 3: Landscape Complexity vs Circuit Depth 83
4.6.4 Summary: Landscape Analysis Explains Previous Results . . . 84
4.7 General Discussion 85
4.8 Conclusion 87

Conclusion **89**