REPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ FERHAT ABBAS-SÉTIF
FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE DES PROCEDES

MEMOIRE

Présenté Pour l'obtention du Diplôme de

MAGISTER

Option : GÉNIE CHIMIQUE

Par

M^{elle} GHEBRID NASSIMA

THÈME :

Etude numérique des transferts thermiques couplés dans une cavité fermée

Soutenu le : /2011

Devant un jury composé de :

- Mr B.DJELLOULI	**Professeur**	**Université de Sétif**	**Président**
- Mr M.GUELLAL	**M.C**	**Université de Sétif**	**Rapporteur**
- Mr S.NACEF	**Professeur**	**Université de Sétif**	**Examinateur**
- Mr M.CHAGAAR	**Professeur**	**Université de Sétif**	**Examinateur**

Introduction générale

L'étude des transferts thermiques couplés dans une cavité fermée a suscité un intérêt grandissant durant ces dernières décennies. Cet intérêt est dicté par le rôle joué par telles configurations dans nombreuses applications industrielles dans plusieurs domaines : le refroidissement des composants électroniques, la climatisation, les échangeurs de chaleur, les centrales nucléaires…etc.

De nombreuses études ont été réalisées en utilisant : l'expérimentation numérique (simulation numérique) et pratique (expérience de laboratoire).

Il est vraisemblable que l'expérimentation de laboratoire est d'une importance cruciale pour valider la première approche, néanmoins elle reste handicapée par le coût élevée du matériel et la difficulté de réalisation.

La simulation numérique reste la méthode la moins coûteuse, et la plus utilisable. L'évolution rapide des capacités des calculateurs au cours de ces vingt dernières années a permis un progrès notable dans la compréhension du phénomène de la convection naturelle, le rayonnement thermique et le couplage entre ces deux phénomènes.

L'étude de la convection naturelle en milieux confinés fait, de nos jours encore, l'objet de nombreuses recherches, tant sur le plan numérique qu'expérimentale. Dans ce type de problème, les différents modes de transfert thermique (convection, conduction, rayonnement) peuvent intervenir de façon couplée, notamment par le biais des parois.

Toute fois, quand le transfert radiatif est considéré, un problème particulier se pose lorsque le fluide lui-même se comporte comme un milieu semi-transparent, c'est-à-dire qu'il absorbe et émet le rayonnement.

Lorsque les cavités sont remplies par un gaz, l'influence des échanges radiatifs entre surfaces à travers un milieu qui émet du rayonnement à sa propre température locale, absorbe et diffuse le rayonnement incident en tout point (milieu semi-transparent).

L'objectif du présent travail est le développement d'un code de calcul permettant de résoudre les équations de transfert dans un système constitué d'une enceinte carrée, contenant de l'air sous l'approximation de Boussinesq. Les deux parois verticales, sont différentièllement et uniformément chauffées. Par contre, les deux parois horizontales sont soit adiabatiques, soit soumises à des conditions radiatives, d'où le phénomène de couplage. La formulation fonction de courant-vorticité est utilisée pour simplifier ces équations aux dérivées partielles, avant qu'elles soient discrétisées numériquement en utilisant la méthode des différences finies. Les équations de la chaleur et de la vorticité

sont intégrées par la technique des directions alternées (ADI) en schéma UPWIND, et la fonction de courant est déterminée à chaque nœud du domaine par la méthode de sur-relaxation successive.

Pour traiter les échanges radiatifs entre les surfaces dans une cavité, une méthode de radiosité est proposée pour calculer le flux radiatif.

Pour atteindre ces objectifs le travail présenté dans ce mémoire est organisé en quatre chapitres :

Le premier chapitre, présente des généralités et des définitions sur la convection naturelle, et le rayonnement thermique, ainsi qu'une recherche bibliographique des différents travaux qui ont traité ce type de phénomènes.

Le deuxième chapitre traite le problème de rayonnement et la méthode de résolution de l'équation de radiosité.

Le troisième chapitre concerne la résolution numérique de la convection naturelle dans une cavité carrée. Cette simulation est basée sur la discrétisation numérique des équations de quantité de mouvement, de masse et d'énergie. On y présente également une description détaillée de la méthode numérique adoptée pour la discrétisation de ces équations. La fin du chapitre est consacrée aux différents résultats obtenus ainsi que leurs interprétations en dans le cas de la convection naturelle pure.

Le chapitre quatre est consacré à l'étude du couplage de la convection naturelle avec le rayonnement des parois. Des essais numériques permettent de valider la méthode, en mettant en évidence l'effet du rayonnement sur le comportement thermique et dynamique de l'air dans la cavité.

REMERCIEMENTS

*d'abord, louanges Tout à **Dieu** pour nous avoir permis d'avoir les capacités physiques et mentales, me permettant de réaliser ce modeste mémoire, et nous l'implorons afin que notre travail soit couronné de succès.*

*J'adresse mes vifs remerciements à mon directeur de recherche **Dr. Messaoud GUELLAL** pour m'avoir encadré et qui m'a apporté ses connaissances et son aide tout au long de la période de ce mémoire, je le remercie pour avoir été présent chaque fois que j'avais besoin de lui, qu'il reçoit ma sincère gratitude. Merci Monsieur **Messaoud GUELLAL** pour votre gentillesse permanente.*

*Je remercie également l'honorable Monsieur **Pr. Brahim DJELLOULI** pour avoir accepté de présider mon jury de thèse. Merci Monsieur **Brahim DJELLOULI** pour vos conseils.*

*Tous mes remerciements et sincères gratitudes à Messieurs **Pr. Saci NACEF** et **Pr. Mohammed CHAGAAR** en tant que membres du jury d'avoir bien voulus nous faire l'honneur de juger ce travail.*

*Mes remerciements et gratitude à Monsieur **Dr.Y.BENGUERBA** pour ses documents.*

Je remercie toute personne m'ayant aidé de prés ou de loin pour l'achèvement de ce travail.

Mes remerciements à tous mes collègues du laboratoire de Génie des procédés chimiques (LGPC) de l'université de SETIF.

Enfin un très grand merci à toute ma famille et à mes amies pour leur soutien moral !

Merci à tous !

DEDICACE

Je dédie ce modeste travail aux deux êtres qui me sont très chers dans cette vie, à savoir mon père et ma mère. Je te dis merci et mille fois merci ***maman*** *pour ton éducation ta patience, ton courage et ton sacrifice pour moi.*

Je leur dis merci ***papa*** *du fond de mon cœur pour ton éducation, ton sacrifice, ton assistance et pour ce tu m'as fait et qui m'a permis d'avoir cette réussite et ce bonheur.*

Avec toute ma fidélité et tout mon amour pour vous, mes parents, je ne pourrai jamais égaler votre mérite.

A Mes chers frères : ***Hichem (Oussama), Kheireddine*** *et* ***Aymen***
A Ma chère sœur : ***Asma***

A ma chère sœur ***Sara*** *et son mari* ***Mourad*** *et la petite fille la cajoleuse* ***Maria*** *qui je l'aime beaucoup.*

A Toute ma famille
A Toutes mes amies

NASSIMA(OUAFA)

© Ladie Lynn
http://ladielynn.com

TABLE DES MATIERES

Liste des figures..... iv
Liste des tableaux..... vi
Nomenclatures..... vii
INTRODUCTION GENERALE 1

CHAPITRE I : Généralités et Revue Bibliographique

1. Généralités et définitions..... 3
1.1.Transfert de chaleur par convection 3
1.1.1. Les différents types de la convection 3
1.1.2. La convection naturelle..... 3
1.1.3. L'approximation de Boussinesq..... 4
1.1.4. L'approximation de faible Mach..... 5
1.2. Transfert de chaleur par rayonnement..... 6
1.2.1. Nature du rayonnement..... 6
1.2.2. Classification..... 7
1.2.3. Définitions relatives aux sources..... 7
1.2.4. Définitions relatives au récepteur..... 9
1.2.5. Lois du rayonnement..... 10
1.2.6. Rayonnement des corps non noirs..... 11
1.2.7. Rayonnement réciproque de plusieurs surfaces..... 12
2. Revue bibliographique..... 13
3. Conclusion 16

CHAPITRE II : Rayonnement thermique et calcul de radiosité

1. Introduction..... 17
2. Méthode des radiosités..... 17
3. Facteurs de forme..... 19
3.1 Géométrie des facteurs de forme..... 20
3.2 Propriétés du facteur de forme..... 22
3.3 Calcul des facteurs de forme dans une cavité carrée..... 23
3.3.1 Facteurs de forme dans une cavité carrée tridimensionnelle (3D)..... 23
3.3.2 Facteurs de forme dans une cavité carrée bidimensionnelle (2 D) 28
4. Equation de radiosité..... 33
5. Résolution de l'équation de radiosité..... 35
5.1 Techniques itératives..... 36
5.1.1 Méthode de Jacobi..... 38
5.1.2 Méthode de Gauss-Seidel..... 39
5.2 Application de la méthode itérative de Jacobi à l'équation de radiosité..... 39
5.3 Calcul des flux radiatifs..... 40
5.3.1 Le concept de radiosité..... 40
5.3.2 Echange radiatif dans une cavité..... 41

5.3.3. Adimensionnement du vecteur de radiosité et du flux radiatif ……..... 42
6. Les résultats……..... 44
6.1 Algorithme de calcul ……..... 44
6.2 Exemples de résultats……..... 45
6.2.1. Estimation des facteurs de forme ……..... 45
6.2.2 Calcul du vecteur de radiosité et du flux radiatif ……. 51
7. conclusion……..... 53

CHAPITRE III : Simulation numérique de la convection naturelle

1. Introduction……..... 54
2. Formulation mathématique……..... 54
2.1 Hypothèses de calcul……..... 54
2.2 Equations générales de transport……..... 55
2.2.1 Equation de continuité……..... 55
2.2.2 Equation de conservation de la quantité de mouvement…..... 55
2.2.3 Equation de conservation de l'énergie……..... 55
3. Etude d'une cavité carrée……..... 56
3.1 Formulation du problème ……..... 57
3.1.1 Equation de continuité ……..... 57
3.1.2 Equation de conservation de la quantité de mouvement…..... 57
3.1.3 Equation de conservation de l'énergie ……..... 57
3.2 Choix des conditions initiales et aux limites ……..... 58
3.3 Simplification des équations……..... 58
3.3.1 Adimensionnement des équations……..... 58
3.3.2 Formalisme Vorticité-Fonction de courant ……..... 60
3.4 Adimensionnement des conditions aux limites……..... 61
3.5 Résolution numérique des équations……..... 61
3.5.1 Représentation de la méthode des différences finies……..... 62
3.5.2 Le maillage……..... 63
3.5.3 Approximation des dérivées par des différences finies…..... 63
3.5.4 Quelques schémas aux différences finies……..... 64
3.5.5 Méthode des directions alternées (ADI)……..... 68
3.5.6 Choix de la méthode ADI……..... 70
3.5.7 Conclusion……..... 72
3.6 Discrétisation des équations……..... 73
3.6.1 Discrétisation de l'équation de vorticité……..... 73
3.6.2 Discrétisation de l'équation de l'énergie……..... 77
3.6.3 Discrétisation de l'équation de fonction de courant……..... 80
3.6.4 Discrétisation des composantes de vitesse..... 80
3.7 Discrétisation des conditions initiales et aux limites……..... 81
3.8 Organigramme des calculs ……..... 82
4. Résultats et discussions……..... 83
4.1 Choix de maillage..... 83
4.2 Etude de la convergence..... 84

4.3 Régime stationnaire..... 85
4.4 Régime variable..... 90
5. Conclusion 93

CHAPITRE IV : COUPLAGE CONVECTION NATURELLE-RAYONNEMENT

1. Introduction……..... 94
2 .Description du modèle physique et hypothèses……..... 94
3. Formulation en variables dimensionnées……..... 95
3.1 Système d'équations……..... 95
3.2 Conditions aux limites……..... 95
4. Formulation en variables adimensionnées……..... 96
5. Discrétisation des équations……..... 97
5.1 Equation de vorticité……..... 97
5.2 Equation de l'énergie……..... 98
5.3 Equation de fonction de courant……..... 99
6. Discrétisation des conditions initiales et aux limites……..... 100
7. Algorithme de calcul ……..... 100
8. Résultats et discussions……..... 102
9. Conclusion……..... 109
CONCLUSION GENERALE……..... 110
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES 112
ANNEXES ……..…..……..... A1
A.1 La méthode de relaxation..... A1
A.2 L'algorithme de Thomas..... A3

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 : *Principe de l'expérience de William Herchel*..... 6
Figure 1.2 : S*pectre des ondes électromagnétiques*..... 7
Figure 1.3 : *Schéma de l'angle solide*..... 8
Figure 1.4 : *Schématisation de la luminance et de l'intensité énergétique d'une source isotrope* 10
Figure 1.5 : *Schématisation des flux de rayonnement sur une surface*..... 13

Figure 2.1 : *Cavité rectangulaire divisée en éléments*..... 18
Figure 2.2 : *Surface S_j recevant un flux Φ_{ij} de la surface S_i*..... 20
Figure 2.3 : *Géométrie du facteur de forme entre deux surfaces différentielles*..... 21
Figure 2.4 : *Deux plaques rectangulaires perpendiculaires*..... 23
Figure 2.5 : *Deux plaques rectangulaires parallèles*..... 24
Figure 2.6 : *Cavité rectangulaire*..... 24
Figure 2.7 : *Cavité carrée en 2D. Ses surfaces sont divisées en segments*……..... 28
Figure 2.8 : *Facteur de forme entre deux surfaces perpendiculaires*..... 30
Figure 2.9 : *Facteur de forme entre deux surfaces parallèles*..... 32
Figure 2.10 *: Deux surfaces parallèles en cavité carrée divisées en segments*..... 32
Figure 2.11 *: Illustration du concept de radiosité*..... 40
Figure 2.12 : *Bilan énergétique sur la surface k*..... 41

Figure 3.1 : *Schéma du modèle physique utilisé*..... 56
Figure 3.2: *Maillage utilisé en différences finies*..... 63
Figure 3.3: *Discrétisation du domaine et implantation de la maille*..... 63
Figure 3.4 : *Discrétisation du domaine et implantation des mailles dans la direction X (étape 1) et dans la direction Y (étape 2)* 69
Figure 3.5: *Evolution de la température à différentes positions; pour Ra=1.E03*.. 84
Figure 3.6*: Evolution de la vorticité à différentes positions; pour* Ra=1.E03..... 84
Figure 3.7: *Les isothermes en régime stationnaire à différents Ra: (a) Ra=1.E03; (b) Ra=1.E04; (c) Ra=1.E05; (d) Ra=1.E06;(e) Ra=1.E07; (f) Ra=1.E08*..... 86
Figure 3.8: *Evolution de la fonction de courant maximale en fonction de Ra*..... 87
Figure 3.9 : *Evolution de la vitesse verticale maximale en fonction de Ra*..... 87
Figure 3.10 : Evolution de la température en fonction de *x* à *y=0.5* : (a) 1.E03 (b) 1.E04 ; (c) 1.E05 ; (d) 1.E06 ; (e) 1.E07 ; (f) 1.E08 88
Figure 3.11 : *Evolution de la vitesse horizontale en fonction de y à x=0.5 : (a) 1.E03 ; (b) 1.E04 ;(c) 1.E05 ; (d) 1.E06 ; (e) 1.E07 ; (f)1.E08*..... 89
Figure 3.12: *Les isothermes en régime variable pour Ra=1.E05*..... 91
Figure 3.13: *Les isotherme en régime variable pour Ra=1.E07*..... 92

Figure 4.1 : *Schéma du modèle physique*..... 94
Figure 4.2 *: profils de température en x=0.5 ; à $Ra=10^4$* ***:(a)*** *obtenu par notre code* ***(b)*** *donnée par Hong et al [32]*..... 103
Figure 4.3 *: Influence de l'émissivité sur les isothermes à $Ra=10^5$ (a)$\mathcal{E}$=0 (b) $\mathcal{E}$=0.1 ; (c)$\mathcal{E}$=0.2 ; (d) $\mathcal{E}$=0.4 ; (e)$\mathcal{E}$=0.8*..... 104
Figure 4.4 : *Influence de l'émissivité sur l'écoulement à $Ra=10^5$ (a)$\mathcal{E}$=0 ; (b) $\mathcal{E}$=0.1 ; (c)$\mathcal{E}$=0.2 ; (d) $\mathcal{E}$=0.4 ; (e)$\mathcal{E}$=0.8*..... 105

Figure 4.5 : *Influence de l'émissivité sur les isothermes à Ra=10^5 (a)$\mathcal{E}$=0, (b)$\mathcal{E}$=0.2(c)$\mathcal{E}$=0.4, (d) $\mathcal{E}$=0.8*..... 106
Figure 4.6 : *Influence de l'émissivité sur l'écoulement à Ra=10^5 (a)$\mathcal{E}$=0, (b) $\mathcal{E}$=0.2(c)$\mathcal{E}$=0.4, (d) $\mathcal{E}$=0.8*..... 107
Figure 4.7 : *profils de la vitesse horizontale en Ra=10^5à x=0.5*..... 107
Figure 4.8 : *profils de température en Ra=10^5à la paroi basse*..... 108
Figure 4.9 : *influence de l'émissivité sur les profils de température à Ra=10^4*..... 108

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1 : Facteurs de forme du nœud N°01 Pour une surface (paroi) discrétisée à 5 nœuds..... 45

Tableau 2.2: Facteurs de forme du nœud N°03 Pour une surface (paroi) discrétisée à 5 nœuds..... 46

Tableau 2 .3: les facteurs de forme du nœud N°04 Pour une surface (paroi) discrétisée à 5 nœuds..... 47

Tableau2 .4 : les facteurs de forme du nœud N°05 Pour une surface (parois) discrétisée à 5 nœuds..... 48

Tableau 2.5: Facteurs de forme du nœud N°02 Pour une surface (paroi) discrétisée à 10 nœuds..... 49

Tableau 2.6 : Facteurs de forme du nœud N°09 Pour une surface (paroi) discrétisée à 10 nœuds..... 50

Tableau 2.7 : Radiosité des parois (Nombre d'itération égal à 7)..... 51

Tableau 2.8 : le flux radiatif émet par les parois..... 52

Nomenclature

Symbole	Définition	Unité
a	diffusivité thermique	$[m^2/s]$
B	Poussée d'Archimède	$[N.m^{-3}]$
$\vec{b}$	Vecteur d'émission propre	[-]
C_p	capacité calorifique massique du fluide	$[J.Kg^{-1}.K^{-1}]$
E	Eclairement	$[W/m^2]$
F_{i-j}	Facteur de forme entre les parois *i* et *j*	[-]
g	Accélération de la pesanteur	$[m.s^{-2}]$
h	Enthalpie massique du fluide	$[J.Kg^{-1}]$
H	Hauteur de la cavité	[m]
I	Luminance totale dans une direction ox	$[W.m^{-2}.Sr^{-1}]$
I_λ	Luminance monochromatique	$[W.m^{-3}.Sr^{-1}]$
J_i	Radiosité adimensionnelle	[-]
L	Largeur de la cavité	[m]
$M_{\lambda T}$	Emittance monochromatique	$[W.m^{-3}]$
M	Emittance ou Radiosité	$[W.m^{-2}]$
N_r	Nombre de rayonnement	[-]
Nu	Nombre de Nusselt	[-]
P	Pression	[Pa]
P'	Pression adimensionnelle : $\frac{P}{P_0}$	[-]
Pr	Nombre de Prandtl : $\frac{\nu}{a}$	[-]
Q_r	Densité de flux radiatif adimensionnelle	[-]
M_{0i}	Radiosité ou Emittance initiale de la paroi	$[W.m^{-2}]$
R	Radiosité dimensionnelle	$[W.m^{-2}]$
Ra	Nombre de Rayleigh : $\frac{g\beta\Delta T H^3}{a\nu}$	[-]
S	Section de la paroi	$[m^2]$
t	Temps	[s]
T	Température	[K]
T_0	Température moyenne de référence : $\frac{T_c+T_f}{2}$	[K]
T_f	Température de la paroi froide	[K]
T_c	Température de la paroi chaude	[K]
ΔT	Différence de température $T_c - T_f$	[K]
U, V	Composantes horizontale et verticale de la vitesse	$[m.s^{-1}]$
u, v	Composantes horizontale et verticale adimensionnée de la vitesse	[-]
X, x	Coordonnées cartésiennes horizontales	[m] ou [-]
Y, y	Coordonnées cartésiennes verticales	[m] ou [-]
	Coordonnées cartésiennes transversales	[m] ou [-]

Z, *z*		
Δx	Pas dans la direction x	[m]
Δy	Pas dans la direction y	[m]
∇	Opérateur gradient	[-]
∇^2	Opérateur Laplacien	[-]

Caractères Grecs

B	Coefficient de dilatation thermique	[1/K]
δ_{ij}	Symbole de Kronecker	[-]
$\mathcal{E}$	Emissivité de la paroi	[-]
λ	Longueur d'onde	[µm]
λ	Conductivité thermique	[$W.m^{-1}.K^{-1}$]
μ	Viscosité dynamique	[Kg/m.s]
ν	Viscosité cinématique	[$m^2.s^{-1}$]
θ	Température adimensionnée : $\frac{T-T_0}{T_C-T_f}$	[-]
γ	Coefficient de relaxation	[-]
ρ	Réflectivité	[-]
ρ	Masse volumique	[$Kg.m^{-3}$]
σ	Constante de Stefan-Boltzmann	[$W.m^{-2}.K^{-4}$]
σ_{ij}	Visibilité entre la surface dS_i et dS_j	[-]
τ	Temps adimensionnel	[-]
τ	Transmitivité	[-]
ω	Angle solide	[Sr]
Ω	Vorticité	[-]
φ	Flux radiatif	[w]
Ψ	Fonction de courant	[-]

Indices

c	Relatif à la paroi chaude
f	Relatif à la paroi froide
i, j	relatifs à la paroi i, j ou bien à la direction x, y
r	radiatif

1. GENERALITES ET DEFINITIONS

1.1. Transfert de chaleur par convection

La convection est un mode de transport d'énergie par l'action combinée de la conduction, l'accumulation de l'énergie et le mouvement du milieu. La convection est le mécanisme le plus important de transfert d'énergie entre une surface solide et un liquide ou un gaz. Le transfert d'énergie par convection d'une surface dont la température est supérieure à celle du fluide qui l'entoure s'effectue en plusieurs étapes. D'abord la chaleur s'écoule par conduction de la surface aux particules fluides adjacentes. L'énergie ainsi transmise sert à augmenter la température et l'énergie interne de ces particules. Ensuite ces dernières vont se mélanger avec d'autres particules situées dans une région à basse température et transférer une partie de leur énergie, celle-ci est à présent emmagasinée dans les particules fluides et elle est transportée sous l'effet de leur mouvement.

1.1.1. Les différents types de Convection

La transmission de chaleur par convection est désignée, selon le mode d'écoulement du fluide, par ***convection libre*** et ***convection forcée.*** Lorsqu'il se produit au sein du fluide des courants dus simplement aux différences de densité résultant des gradients de température, on dit que la convection est *naturelle ou libre*. Par contre si le mouvement du fluide est provoqué par une action externe, telle qu'une pompe ou un ventilateur, le processus est appelé *convection forcée*. Si les deux causes existent simultanément, sans que l'une soit négligeable par rapport à l'autre, la convection est dite *mixte.*

1.1.2. La Convection Naturelle

En convection naturelle, les mouvements du fluide sont provoqués par des gradients de densité dus à la non–uniformité de la température. Les couches chaudes, donc de poids spécifique plus faible, sont soumises à des forces dirigées vers le haut, suivant un mécanisme analogue à celui de la poussée d'Archimède. Dans les régions à température élevée, le fluide prend donc un mouvement ascendant.

Le phénomène inverse de courants descendants se produits pour les parties du fluide dont la température est inférieure à celle du fluide chaud. Les courants de convection naturelle sont alors dus à des différences de poids spécifique et par conséquent le phénomène se produit-en raison de l'existence du champ de pesanteur terrestre.

L'intervention du poids a pour effet de donner à la verticale un rôle privilégié. La définition de la géométrie d'un système convectif doit donc faire intervenir la forme et les dimensions ainsi que la disposition par rapport à la verticale.

Les effets de convection naturelle sont familiers. On peut les observer quotidiennement dans l'eau que l'on chauffe dans un récipient, dans les panaches de certaines cheminées d'usines, la circulation atmosphérique, les vents et les tempêtes sont aussi des effets de la convection naturelle.

Pour formaliser la convection naturelle, il faut décrire le couplage des champs de température, de pression et de vitesse à partir des équations de conservation de quantité de mouvement, de la masse et de l'énergie.

La convection 'libre' ou 'naturelle' est la forme d'échange convectif la plus couramment observée**.** Elle apparait dans le champ des forces de masse extérieures dont la nature peut être différente**.** Donc la convection naturelle est le régime d'écoulement obtenu lorsque l'on chauffe un fluide sans qu'il n y ait d'écoulement 'extérieur' imposé**.**

La convection naturelle est en fait un mouvement de fluide (à savoir gaz ou liquide) induit par des forces pesantes ou forces de poussée d'Archimède. Ces dernières sont dues à des différences de masse volumique

$$\vec{\boldsymbol{B}} = -\Delta\boldsymbol{\rho}\,\vec{\boldsymbol{g}} \qquad (1.1)$$

$\vec{\boldsymbol{B}}$ **:** Poussée d'Archimède [N.m^{-3}]

$\Delta\boldsymbol{\rho}$ **:** Gradient de la masse volumique [Kg.m^{-3}]

$\vec{\boldsymbol{g}}$ **:** Accélération de la pesanteur [m.s^{-2}]

Ces différences de masse volumique peuvent être causées, par exemple, par des différences de température ou par des différences de la concentration des espèces chimiques.

En général, ce qui est le cas ici, c'est un gradient thermique qui est la cause de cet écoulement de convection naturelle. En effet, du fait de l'agitation thermique, la masse volumique du fluide diminue quand la température augmente**.** [1-6]

Grace à cet écart de température en distingue deux approximations des équations de la convection : l'approximation de Boussinesq et l'approximation de faible Mach

1.1.3. L'approximation de Boussinesq

En 1903, à l'époque même où *Rayleigh* s'intéresse à la convection, *Boussinesq* propose une simplification de ces équations de façon à ne conserver que les ingrédients nécessaires et suffisants à la convection thermique. ***Les hypothèses de Boussinesq*** consistent à supposer que les différentes propriétés thermodynamiques et de transport du fluide sont indépendantes de la pression. Elles supposent aussi que le fluide est incompressible mais il

conserve bien entendu le terme de poussée d'Archimède «le moteur de la convection » directement lié à la dilatation ou à la contraction thermique du fluide. [7]

Cette approximation est valable lorsque l'écart de la température entre les parois chaudes et les parois froides est inferieure à 30° ($\Delta T<30^{\circ}$). L'hypothèse essentielle de Boussinesq est : « ρ » est constant sauf dans le terme de poussée d'Archimède.

Les propriétés thermophysiques du fluide sont supposées constantes et calculées à la température de référence T_0, à l'exception de la masse volumique « ρ » dans ce terme, la masse volumique varie linéairement avec la température :

$$\rho = \rho 0[1 - \beta(T - T0)] \qquad (1.2)$$

Avec $\beta = -\frac{1}{\rho 0}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)P$

Où $\mathbf{T}_0$: représente la température de référence.

β : le coefficient d'expansion thermique.

L'approximation repose alors sur l'incompressibilité ($\frac{\partial p}{\partial T}$ = 0) où les premiers points énoncés permettent de simplifier les équations afin de ne s'intéresser qu'aux effets de la poussée d'Archimède. Pour un écoulement incompressible, l'équation de continuité est remplacée par une contrainte de divergence nulle $div\ V = 0$. [3, 4, 9].

1.1.4. L'approximation de faible Mach

Lorsque l'écart de température devient important l'approximation de Boussinesq pour les écoulements de convection naturelle devient inadéquate.

La modélisation faible nombre de Mach est introduite pour traiter les écoulements compressibles à faible vitesse, ce régime est décrit par une vitesse caractéristique **v** de l'écoulement très faible devant la célérité du son **c** [8]**.** Le nombre de Mach, définit par le rapport $\boldsymbol{Ma = {}^{\mathbf{v}}/_{\mathbf{c}}}$, sera par conséquent, très petit devant un. Ainsi, les effets des ondes acoustiques sont filtrés du champ de l'écoulement [10]**.**

c : est la vitesse de propagation de l'onde de pression infinitésimale dans le fluide.

La résolution des équations de Navier-Stokes en compressible se heurte à des problèmes numériques importants.

Cette approximation, en filtrant les ondes sonores, permet d'utiliser des méthodes numériques couramment utilisées pour les écoulements incompressibles.

1.2. Transfert de chaleur par rayonnement

1.2.1. Nature du rayonnement

Tous les corps, quelque soit leur état : solide, liquide ou gazeux, émettent un rayonnement de nature électromagnétique. Cette émission d'énergie s'effectue au détriment de l'énergie interne du corps émetteur. Le rayonnement se propage de manière rectiligne à la vitesse de la lumière, il est constitué de radiations de différentes longueurs d'onde comme l'a démontré l'expérience de William Herschel **[5]** :

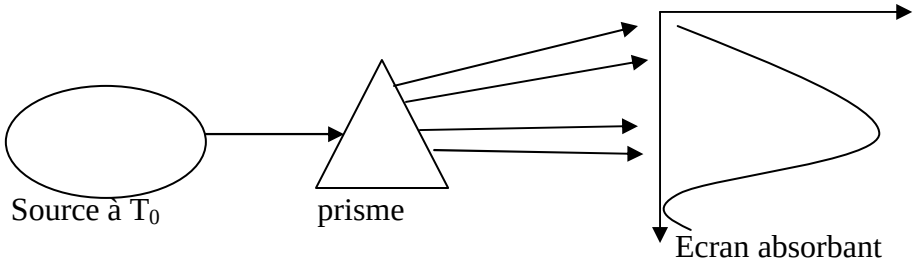


Figure 1.1 : *Principe de l'expérience de William Herchel*

En passant à travers un prisme, les radiations sont plus ou moins déviées selon leur longueur d'onde. On envoie donc les radiations émises par une source à la température T_0 sur un prisme et on projette le faisceau dévié sur un écran absorbant (noirci), on obtient ainsi la décomposition du rayonnement total incident en un spectre de radiations monochromatiques.

Si l'on déplace le long de l'écran un thermomètre, on mesure la température T_e caractérisant l'énergie reçue par l'écran dans chaque longueur d'onde, et en construisant la courbe $T_e = f(\lambda)$, on obtient la répartition spectrale de l'énergie rayonnée pour la température T_0 de la source. On constate alors que:

- l'énergie émise est maximale pour une certaine longueur d'onde λ_m variable avec T_0.
- l'énergie n'est émise que sur un intervalle $[\lambda_1, \lambda_2]$ de longueur d'onde caractérisant le rayonnement thermique.

On trouvera représentés sur la figure **1.2** les différents types d'ondes électromagnétiques et leurs longueurs d'ondes correspondantes. On ne retiendra que le rayonnement thermique émis par les corps situant entre 0,1 et 100 μm. On notera par ailleurs que le rayonnement est perçu par l'homme **[3]** :

- par l'œil : pour $0{,}38\ \mu m < \lambda < 0{,}78\ \mu m$ rayonnement visible.
- par la peau : pour $0{,}78\ \mu m < \lambda < 314\ \mu m$ rayonnement IR

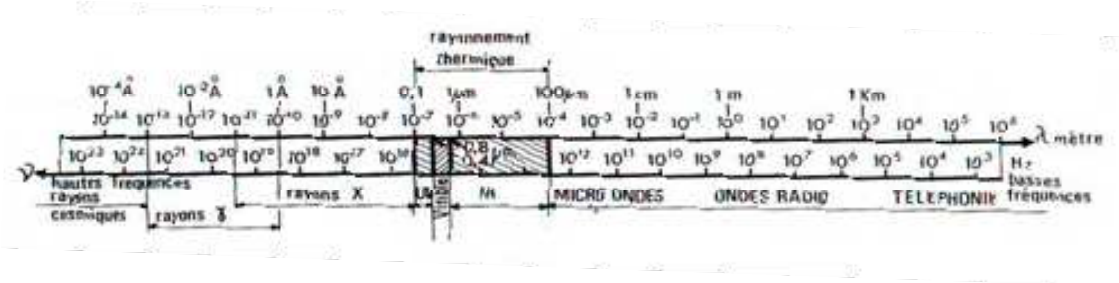


Figure 1.2 : S*pectre des ondes électromagnétiques*

1.2.2. Classification

Les grandeurs physiques sont distinguées selon :

- La composition spectrale du rayonnement

  - si la grandeur est relative à l'ensemble du spectre, elle est dite totale.

  - si elle concerne un intervalle spectral étroit dλ autour d'une longueur d'onde λ, elle est dite monochromatique.

- La distribution spatiale du rayonnement

  - si la grandeur est relative à l'ensemble des directions de l'espace, elle est dite Hémisphérique.

  - si elle caractérise une direction donnée de propagation, elle est dite directionnelle.

1.2.3. Définitions relatives aux sources

- **Le flux**

On appelle flux d'une source S la puissance rayonnée notée ϕ par S dans tout l'espace qui l'entoure, sur toutes les longueurs d'onde. Le flux ϕ s'exprime en ***W***.

Le flux envoyé par un élément de surface dS dans un angle solide élémentaire dΩ est noté $d^2\Phi$

Le flux envoyé dans tout l'espace par une surface élémentaire dS est noté dϕ.

Le flux envoyé par une surface S dans l'angle solide dω entourant la direction Ox est noté $d\Phi_x$

Nous avons donc les relations suivantes : $d\Phi = \int_\omega d^2\,\Phi$ et

$$\Phi = \int_s d\Phi = \int_\omega d\Phi_x$$

- **Angles solides**

L'angle solide est une généralisation dans l'espace à trois dimensions de la notion d'angle plan, il caractérise l'ensemble des directions issues d'un point de l'espace. Donc l'angle

solide sous lequel depuis un point O on voit une surface S est par définition l'aire de la surface d'intersection de la sphère de rayon unité et du cône de sommet O s'appuyant sur le contour de la surface S. L'angle solide sous lequel on voit, d'un point O le contour d'une petite surface dS (assimilée à une surface plane) peut être calculé par (1.3). [3, 5] :

$$d\omega = \frac{dS\ COS\alpha}{r^2} \tag{1.3}$$

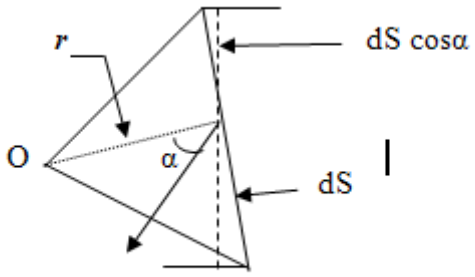


Figure 1.3: *Schéma de l'angle solide*

Quelques propriétés de l'angle solide

- La valeur d'un angle solide ω est comprise entre 0 et 4π
- Pour un cône de demi-angle au sommet α : ω =2π (1− cos α)

- **Emittance énergétique**

- Emittance énergétique monochromatique :

Un élément de surface dS émet un certain flux d'énergie par rayonnement dans toutes les directions du ½ espace. Ce flux est réparti sur un intervalle de longueurs d'ondes. Si l'on considère le flux d'énergie $d\Phi_\lambda^{\lambda+d\lambda}$ émis entre les deux longueurs d'ondes λ et λ+dλ, on définit l'emittance monochromatique d'une source à la température T par :

$$M_{\lambda T} = \frac{d\Phi_\lambda^{\lambda+d\lambda}}{dSd\lambda} \tag{1.4}$$

- Emittance énergétique totale

C'est la densité de flux de chaleur émis par rayonnement par dS sur tout le spectre des longueurs d'ondes. Elle n'est fonction que de la température T et de la nature de la source :

$$M_T = \int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} M_{\lambda T} d\lambda = \frac{d\Phi}{dS} \quad (1.5)$$

- **Intensité énergétique dans une direction (Luminance)**

On appelle intensité énergétique I_x le flux par unité d'angle solide émis par une surface dS dans un angle solide dω entourant la direction Ox :

$$I_x = \frac{d\Phi_x}{d\omega} \quad (1.6)$$

- **Luminance énergétique dans une direction**

Soit α l'angle fait par la normale $\vec{n}$ à la surface émettrice S avec la direction Ox. La projection de dS sur le plan perpendiculaire à Ox définit la surface émettrice apparente $dS_x = dS \cos \alpha$. L'intensité énergétique élémentaire dI_X dans la direction Ox par unité de surface émettrice apparente dS_X appelle la luminance énergétique L_X. En partant de la relation précédente :

$$L_X = \frac{I_X}{dS\cos\alpha} = \frac{d^2\Phi_x}{d\omega\, dS\, \cos\alpha} \quad (1.7)$$

1.2.4. Définitions relatives au récepteur

- **Eclairement**

C'est l'homologue de l'emittance pour une source. L'éclairement est le flux reçu par unité de surface réceptrice, en provenance de l'ensemble des directions. Si dS est l'aire de la surface recevant un flux dΦ, on a :

$$E = \frac{d\Phi}{dS} \quad (1.8)$$

Remarque

On définit ainsi les pouvoirs monochromatiques réfléchissant $\boldsymbol{r_{\lambda T}}$, absorbant $\boldsymbol{\alpha_{\lambda T}}$ et filtrant $\boldsymbol{\tau_{\lambda T}}$ qui sont fonction de la nature du corps, de son épaisseur, de sa température T, de la longueur d'onde λ du rayonnement incident et de l'angle d'incidence. Si l'on considère l'énergie incidente sur tout le spectre des longueurs d'onde, on obtient les pouvoirs réfléchissants $\boldsymbol{r_T}$, absorbant $\boldsymbol{\alpha_T}$ et filtrant $\boldsymbol{\tau_T}$ totaux.

1.2.5. Lois du rayonnement

- **Loi de Lambert**

Une source est isotrope si la luminance est indépendante de la direction : $L_x = L$

$$L_X = \frac{I_X}{dS_X} = \frac{I_X}{dS\ cos\alpha} \tag{1.9}$$

De l'égalité $L_x = L$ on déduit la loi de Lambert pour une source isotrope :

$$\boldsymbol{\frac{dI_X}{dS} = L\ cos\ \alpha} \tag{1.10}$$

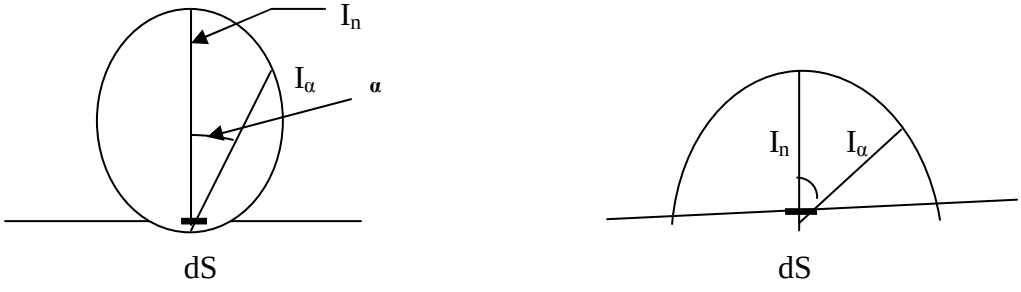
Donc : $L_{ox} = \frac{I_{ox}}{dS\ cos\alpha} = \frac{I_{on}}{dS}$ (dans la direction normale à dS)

On en déduit que :

$$\boldsymbol{I_{ox} = I_{on}\ cos\ \alpha} \tag{1.11}$$

Raison pour laquelle la loi de Lambert est également appelée la « loi du cosinus ».

Ainsi l'indicatrice d'émission est une sphère tangente en O à la surface émettrice lorsque celle-ci suit la loi de Lambert :



Intensité énergique ***Luminance***

Figure 1.4: *Schématisation de la luminance et de l'intensité énergétique d'une source isotrope*

Comme pour un cône demi-angle au sommet α :

$\omega = 2\pi\ (1 - cos\alpha\ )$

et $d\omega = 2\pi\ sin\alpha\ d\alpha$

Lorsqu'un corps suit la loi de Lambert :

$$M = \frac{d\Phi}{dS} = L\int_{\alpha=0}^{\alpha=\pi/2} cos\alpha\ d\omega = 2\pi L\int_{\alpha=0}^{\alpha=\pi/2} cos\alpha\ sin\alpha\ d\alpha \tag{1.12}$$

Soit :

$$\boldsymbol{M = \pi L} \tag{1.13}$$

- **Loi de Kirchoff**

A une température T donnée et pour une longueur d'onde λ donnée, le rapport $\frac{M_{\lambda T}}{\alpha_{\lambda T}}$ est le même pour tous les corps.

Pour le corps noir : $\alpha_{\lambda T} = 1$, le rapport $\frac{M_{\lambda T}}{\alpha_{\lambda T}}$ est donc égal à $M_{0\lambda T}$ en appelant $M_{0\lambda T}$ l'emittance monochromatique du corps noir, donc :

$$M_{\lambda T} = \alpha_{\lambda T} M_{0\lambda T} \tag{1.14}$$

L'emittance monochromatique de tout corps est égale au produit de son pouvoir absorbant monochromatique par l'emittance monochromatique du corps noir à la même température, d'où l'intérêt de connaître le rayonnement émis par le corps noir.

- **Loi de Kirchoff généralisée : Cas des corps gris**

Dans le cas du corps gris, on peut généraliser cette loi ce qui facilite les applications. En effet pour un corps gris $\alpha_{\lambda T} = \alpha_T$, donc :

$$M_T = \int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} M_{\lambda T}\, d\lambda = \int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \alpha_{\lambda T}\, M_{0\lambda T} d\lambda = \alpha T \int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} M_{0\lambda T}\, d\lambda \tag{1.15}$$

En appelant M_{0T} l'emittance totale du corps noir à la température T, nous obtenons pour un corps gris :

$$M_T = \alpha_T M_{0T} \tag{1.16}$$

L'emittance totale M_T d'un corps gris à la température T est égale au produit de son pouvoir absorbant α_T par l'emittance totale M_{0T} du corps noir à la même température.

1.2.6. Rayonnement des corps non noirs

- **Facteur d'émission ou émissivité**

On définit les propriétés émissives des corps réels par rapport aux propriétés émissives du corps noir dans les mêmes conditions de température et de longueur d'onde et on les caractérise à l'aide de coefficients appelés facteurs d'émission ou émissivités. Ces coefficients monochromatiques ou totaux sont définis par :

$$\varepsilon_{\lambda T} = \frac{M_{\lambda T}}{M_{0\lambda T}}$$

Et

$$\varepsilon_{\lambda T} = \frac{M_T}{M_{0T}} \tag{1.17}$$

D'après la loi de Kirchoff, on montre que :

$$\alpha_{\lambda T} = \varepsilon_{\lambda T} \tag{1.18}$$

- **Cas des corps gris**

Ils sont caractérisés par $\alpha_{\lambda T} = \alpha_T$ soit d'après ce qui précède : $\varepsilon_{\lambda T} = \varepsilon_T$

Or : $M_T = \varepsilon_T M_{0T}$, nous en déduisons l'emittance du corps gris à la température T :

$$M_T = \varepsilon_T \sigma T^4 \tag{1.19}$$

Ou $M_{0T} = \sigma T^4$ c'est la loi de STEFAN-BOLTZMANN qui fournit l'emittance totale du rayonnement du corps noir dans le vide en fonction de sa température absolue.

$\sigma = 5.67.10^{-8}$ W/ (m^2.K^4) est la constante de STEFAN-BOLTZMANN

1.2.7. Rayonnement réciproque de plusieurs surfaces

On considère les hypothèses suivantes:

- Les surfaces considérées sont supposées homogènes, opaques, isothermes et grises.
- Les éclairements sont supposés homogènes et les réflexions diffuses

- **Radiosité et flux net perdu**

Le rayonnement qui quitte une surface S_i est la somme de son émission propre et de la réflexion d'une partie du rayonnement incident sur cette surface. On appelle radiosité, que l'on note J_i, l'emittance apparente de la surface S_i donc :

$$J_i = \varepsilon_i \sigma T_i^4 + (1 - \varepsilon_i) E_i \tag{1.20}$$

Avec E_i: Eclairement de la surface S_i *($W.m^{-2}$)*

Considérons maintenant la surface $\boldsymbol{S_i}$ choisie parmi $\boldsymbol{n}$ surfaces isothermes et homogènes qui délimitent un volume

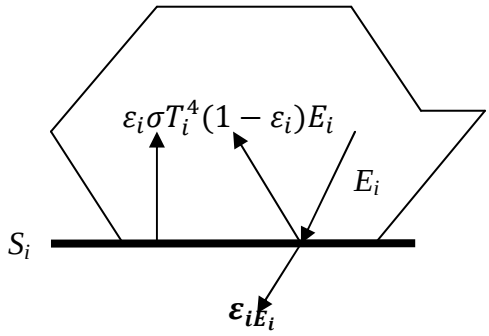


Figure 1.5 : *Schématisation des flux de rayonnement sur une surface*

La densité de flux net perdu par rayonnement par la surface S_i égal à la différence entre les flux émis et absorbé par cette surface soit :

$$\Phi_{i_{net}} = \varepsilon_i \sigma T_i^4 - \varepsilon_i E_i \tag{1.21}$$

En introduisant, d'après (1.18), la radiosité J_i par $E_i = \frac{1}{1-\varepsilon_i}(J_i - \varepsilon_i \sigma T_i^4)$, nous obtenons :

$$\boldsymbol{\Phi_{i_{net}} = \frac{\varepsilon_i}{1-\varepsilon_i}\left(\sigma T_i^4 - J_i\right) = \varepsilon_i\left(\sigma T_i^4 - E_i\right) = J_i - E_i} \tag{1.22}$$

2. REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

Dans différentes situations physiques et applications technologiques, la convection naturelle dans une cavité fermée joue un rôle important. L'étude d'un tel phénomène, dont l'importance est dictée par le rôle qu'il joue dans divers secteurs industriels, a une masse importante de publications spécialisées qui s'est accumulée au fur des années.

Il existe plusieurs méthodes utilisées pour étudier le problème de la convection naturelle dans les cavités :

Ben Cheikh et al [14] ont examiné l'écoulement de convection naturelle dans une cavité carrée à l'aide d'une méthode multigrille, la méthode numérique est basée sur un schéma de type volumes finis du second ordre et une méthode de projection. Une approche multigrille est utilisée pour accélérer la convergence de l'équation de poisson.

Guellal et Hamlaoui [21] ont étudié la convection naturelle dans un réservoir cylindrique, les équations qui gouvernent la convection sont résolues à l'aide de la méthode ADI (Alternating Direction Implicite Method), l'équation de la fonction de courant est résolue par la méthode des différences finies utilisant le schéma de Cronck Nicholson.

Hua et Lauriat [22] ont considéré l'analogie transfert de chaleur et de matière pour la convection naturelle d'un mélange binaire non-dilué de gaz parfait ; les équations de

conservation qui représentent le modèle sont discrétisées à l'aide d'une méthode de volumes finis du second ordre.

Rayen et al [23] ont adopté la convection naturelle qui s'effectue dans une enceinte rectangulaire, les équations sont discrétisées avec la méthode des volumes finis.

Arol et al [24] ont étudié l'effet de l'angle d'inclination de la cavité carrée remplie de différents fluides ; la cavité est divisée par un solide imperméable, les équations qui représentent la convection naturelle sont discrétisées par la méthode des différences finies.

Riduane et al [25] ont adopté numériquement la convection de flux chaotique dans un cercle, le système des équations gouvernantes est résolu à l'aide de la méthode des volumes finis.

X. Xu et al [26] étudient numériquement la convection naturelle laminaire autour d'un cylindre horizontal centré dans une enclosure triangulaire, les équations de conservation sont résolues par la méthode des approches de volume de contrôle.

Mobdi et al [27] ont réalisé une étude de convection naturelle dans une cavité carrée, les équations de l'énergie et de la vorticité sont résolues par la méthode ADI (Alterning Direction Implicite méthode) et l'équation de fonction de courant est résolue par la méthode des différences finies.

Lamsaadi et al [61] ont adopté numériquement la convection naturelle dans une cavité rectangulaire horizontale remplie d'un fluide non-Newtonien et soumise à un flux de chaleur uniforme ascendant, les équations gouvernantes sont résolues numériquement en utilisant la méthode des différences finies avec un maillage régulié.

Ghassemi et al [60] propose une étude sur l'effet de l'angle d'inclination sur l'écoulement et le transfert thermique d'un fluide dans une cavité carrée différentiellement chauffée où les parois verticales sont soumises à différentes températures tandis que les parois formant un angle avec l'horizontale sont adiabatiques, les équations gouvernant la convection naturelle sont résolues à l'aide de la méthode des volumes finis.

D.C.LO et al [59] ont adopté une méthode quadrature différentielle DQ (Differential Quadratic method) pour résoudre les équations de la convection naturelle dans une cavité carrée en 2D différentiellement chauffée où les parois verticales sont soumises à différentes températures alors que ses parois horizontales sont adiabatiques.

Les problèmes liés au transfert de chaleur par convection naturelle et par rayonnement dans les cavités fermées sont rencontrés dans plusieurs applications industrielles, telles que l'étude du confort thermique dans les bâtiments, les refroidissements des composants électroniques…etc. toutefois le rayonnement apporte une contribution significative aux

transferts thermiques dans de tels systèmes. L'interdépendance des phénomènes de convection naturelle dans les fluides et des échanges radiatifs entraine des difficultés de modélisation physique des équations. Depuis de nombreuses années, la convection naturelle couplée avec le rayonnement fait l'objet de nombreuses recherches à la fois expérimentales et numériques :

DELAROCHLEMBERT (2000) [29] a réalisé une étude de bilans thermique et une recherche complète sur l'écoulement d'air le long d'une plaque d'acier noir épaisse verticale chauffée avec un flux de chaleur uniforme. Les résultats sont obtenus par méthode thermo-anémométrique et pyrométrie IR. Divers modèles physiques sont résolus au moyen d'un code de calcul commercial (FLUENT), et sont ensuite comparés aux valeurs expérimentales.

LAAROUSSI et al (2005) [30] ont étudié la résistance thermique d'un mur constitué de blocs de matériaux alvéolaires de forme simple, séparant deux ambiances à températures différentes. L'étude est réalisée numériquement en tenant compte de la périodicité permettant de limiter les simulations à un élément représentatif constitué par une cavité parallélépipédique fermée. En se basant sur l'approximation de Boussinesq, les équations de Navier Stokes et d'énergie ont été résolues à laide du code de calcul commercialisé (FLUENT) par la méthode des volumes finies avec un décentrement du second ordre des termes de transport (Schéma QUICK) utilisant l'algorithme itératif de SIMPLE pour traiter le couplage vitesse-pression.

MEZRHAB et al (2007) [31] ont étudié numériquement l'influence des partitions sur le transfert de chaleur par convection naturelle et rayonnement thermique dans une cavité inclinée d'un angle $\varphi=45^{\circ}$ par rapport au plan horizontal. Les équations gouvernant le système, sont résolues par la méthode des volumes finis. La cavité contient un nombre N_P de partitions variant de 0 à 3. Les résultats obtenus montrent que:

- le rayonnement thermique augmente le transfert de chaleur au sein de la cavité.
- plus le nombre de partition est grand, plus le transfert de chaleur est réduit.

WANG et al (2006) [32] ont développé un code numérique pour le couplage de convection naturelle en cavité avec le rayonnement de surfaces et des études sont menées pour une cavité carré remplie d'air dont les quatre parois ayant la même émissivité, les résultats montrent que, par rapport au cas sans rayonnement, la paroi haute est refroidie, la paroi basse est réchauffée, l'écoulement horizontal est renforcé, et la stratification est diminuée.

JAMI et al (2007) [33] ont étudié numériquement le phénomène de la convection naturelle couplée au rayonnement dans une cavité carrée contenant un cylindre. Seul le rayonnement surfacique est pris en compte et les surfaces radiatives sont supposées grises et isotrope en émission/réflexion. Un schéma hybride, basé sur la méthode de Boltzmann sur réseau combinée à la méthode des différences finies est utilisé pour l'analyse du comportement thermique et dynamique de l'air. Les effets du nombre de Rayleigh et la dimension du cylindre sur le transfert de chaleur et l'écoulement d'air ont été analysés et discutés.

MEZRHAB et NAJI (2007) [34] ont étudié un schéma numérique hybride pour simuler l'interaction entre la convection naturelle et le rayonnement surfacique dans une cavité rectangulaire différentiellement chauffée. Les vitesses sont déterminées par la méthode de Boltzman sur réseau et l'équation de l'énergie est discrétisée à l'aide de la méthode des volumes finis. Les systèmes algébriques obtenus sont résolus par la méthode des gradients conjugués. L'équation de transfert par rayonnement est résolue par la méthode de la radiosité.

SCRELLA et al (2008) [35] ont proposé une étude de l'interaction entre la convection naturelle et le rayonnement pour l'approximation à faible Mach pour les milieux transparents et semi transparents. Les résolutions des équations de Navier-Stokes et d'énergie écrites pour un gaz parfait utilisent la méthode des volumes finis. L'équation de transfert par rayonnement est résolue par la méthode des ordonnées discrètes.

3 .CONCLUSION

Dans cette étude nous avons décrit les principes fondamentaux des deux modes de transfert de chaleur par convection naturelle et par rayonnement ; les différentes lois du rayonnement, ainsi qu'une revue bibliographique concernant les travaux traitant du phénomène de transfert de chaleur par convection naturelle et le couplage rayonnement - convection naturelle y sont également présentés.

1. INTRODUCTION

Le rayonnement thermique est un processus complexe associé au fait que l'énergie se transforme au moins deux fois : d'abord elle se transforme en émission des ondes électromagnétiques suivie du mouvement des ondes (photons), puis les oscillations électromagnétiques sont absorbées par le milieu ou le corps, ce qui est encore une transformation de l'énergie.

Le rayonnement thermique est envisagé comme un processus de propagation des ondes électromagnétiques transversales émises par le corps rayonnant. Ces ondes se propagent rectilignement et lorsqu'elles sont absorbées par le corps ou le milieu, elles se transforment de nouveau en chaleur [3, 4].

Les échanges radiatifs entre les surfaces peuvent être calculés par *la méthode de radiosité* ou par *la méthode des ordonnées discrètes (DOM)*, en supposant que le fluide est un milieu transparent non-diffusant et de très faible coefficient d'absorption. En géométries tridimensionnelles la modélisation exacte des échanges radiatifs dans une cavité est basée sur le concept de « radiosité » qui conduit à des systèmes d'équations intégrales.

Si les parois anisothermes sont discrétisées en petites surfaces isothermes ou isoflux, on montre que ces systèmes d'équations intégrales peuvent être remplacés par des systèmes linéaires (avec un ordre d'approximation qui dépend de la qualité de la discrétisation).

La seconde technique (DOM) est requise lorsque la structure comporte plusieurs cellules et sa précision dépend du nombre d'ordonnées sélectionnées. Il s'agit d'une méthode numérique introduite dans les années 60, qui permet d'intégrer l'équation de transfert radiatif et qui a connu un essor considérable ces dernières années, notamment parce qu'elle permet de s'affranchir de l'hypothèse de surfaces diffuses. Dans la pratique, les deux méthodes peuvent être utilisées ; la première (méthode de radiosité) consiste à réduire le nombre de surface en regard en introduisant des clusters constitués de petites surfaces (à condition que leur propriétés radiatives soient suffisamment uniformes). La seconde (DOM) consiste à conserver, comme surface élémentaire, les surfaces définies par le maillage de résolution des autres équations de conservation et à diminuer le nombre de directions [8]. Dans notre travail on à choisi la méthode de radiosité parce qu'on a travaillé avec une géométrie bidimensionnelle (cavité carrée).

2. METHODE DES RADIOSITES

Les principes fondamentaux de radiosité sont plus simples à expliquer avec un exemple. On considère une cavité rectangulaire comme montrée par la figure 2.1. Le calcul

de radiosité permet de simuler le flux de lumière dans ce milieu. En réalité ; ce flux de lumière est constitué par des photons qui voyagent à travers le milieu et les corps en lignes droites. On peut déterminer la distribution de flux de radiosité dans cette cavité par l'utilisation de la technique du ray-tracing. Chaque surface est divisée en un maillage d'éléments (figure 2.1).

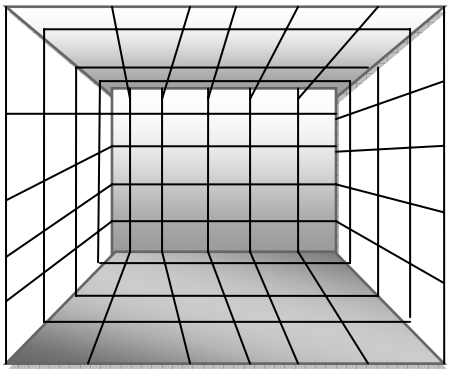


Figure 2.1 : *Cavité rectangulaire divisée en éléments*

Si on assimile l'air dans une cavité à un milieu parfaitement transparent au rayonnement, ces hypothèses seraient entièrement respectées si l'air ne contenait que des gaz monoatomiques (par exemple air exempt de vapeur d'eau et de gaz carbonique). Les hypothèses simplificatrices suivantes appliquées sur toutes les surfaces : surfaces opaques, grises et diffuses en émission et en réflexion, les relations suivantes entre les propriétés radiatives (hémisphériques) des surfaces sont vérifiées :

$$\boldsymbol{\rho = 1 - \alpha = 1 - \varepsilon \quad et \quad \tau = 0 \; surface \; opaque} \tag{2.1}$$

Où $\boldsymbol{\rho}$ représente la réflectivité, $\boldsymbol{\alpha}$ l'absorptivité, $\boldsymbol{\varepsilon}$ l'émissivité et $\boldsymbol{\tau}$ la transmitivité.

Le couplage de la convection naturelle avec le rayonnement de surface se fait à travers les conditions aux limites thermiques. La densité surfacique du flux radiatif net dimensionnelle Q_{rj} échangé par un élément de surface dS_j situé en un point d'abscisse r_j sur la surface j peut s'exprimer par :

$$Q_{rj} = J_j(r_j) - E_j(r_j) \tag{2.2}$$

Où $J_j(r_j)$ est la radiosité de l'élément de surface dS_j et $E_j(r_j)$ l'éclairement de cet élément donnés respectivement par **[5]** :

$$E_j(r_j) = \sum_{i=1}^{n} \int_{S_i} J_i\,(r_i) dF_{dS_j - dS_i}(r_j, r_i) \tag{2.3}$$

$$J_j(r_j) = \varepsilon_j \sigma (T_j(r_j))^4 + (1 - \varepsilon_j) E_j(r_j) \tag{3.4}$$

Où *n* est le nombre total des éléments de surface qui peuvent être considérés comme isoflux ou isotherme et éclairés uniformément.

$dF_{dSi\text{-}dSj}$ est le facteur de forme entre les éléments *i* et *j*. Il représente la fraction d'énergie qui part de la surface dS_j et arrive sur la surface dS_i. Etant donnée une distribution de température sur les surfaces intérieures de la cavité, le problème du rayonnement de surface est décrit par le système linéaire d'équations intégrales régissant la radiosité J_j (W/m^2) :

$$J_j(r_j) = \varepsilon_j \sigma (T_j(r_j))^4 + (1 - \varepsilon_j) \int_{S_i} J_i(r_i) dF_{d_{Sj}-dS_i}(r_j, r_i) \quad (2.5)$$

$$Q_{rj} = \frac{\varepsilon_j}{(1-\varepsilon_j)} ((\sigma \left(T_j(r_j))^4 - J_j(r_j)\right), (j = 1,2,3, \dots n) \quad (2.6)$$

$dF_{dSi\text{-}dSj}$ est défini au paragraphe suivant **(3)**

σ c'est le constante de Stefan Boltzmann.

Après avoir décomposé S_i en surfaces isothermes éclairées uniformément, le système (2.5) peut s'écrire sous forme matricielle :

$$A\vec{J} = \vec{b} \quad (2.7)$$

Où $\vec{J}$ représente le vecteur de radiosité, et *A* une matrice de coefficients :

$$A_{ij} = \delta_{ij} - (1 - \varepsilon) F_{ij} \quad (2.8)$$

δ_{ij} : Symbole de Kronecker

F_{ij} : Facteur de forme.

$\vec{b}$: Vecteur émission propre.

$$\vec{b} (b_i = \varepsilon \sigma_i T_i^4) \quad (2.9)$$

σ : Constante de Stefan Boltzmann

La résolution du problème radiatif se fait par la construction de la matrice *A* (calcul des facteurs de forme) et par l'utilisation d'une méthode itérative pour résoudre le système matriciel.

Le terme Q_{rj} apparait dans les conditions aux limites thermiques sur les parois.

3. FACTEURS DE FORME

Les facteurs de forme de surfaces quelconques, utilisés dans les études de transfert d'énergie par rayonnement, sont en général fournis par des abaques. En effet, leur

détermination, mis à part quelques rares systèmes à géométrie simple, est généralement très pénible, et les chercheurs préfèrent utiliser des abaques quand ils existent, plutôt que de chercher des solutions analytiques.

Or, il est possible, dans plusieurs cas pratiques importants d'obtenir ces solutions analytiques par intégration sur les surfaces étudiées. De plus, les solutions obtenues peuvent être mises sous une forme telle qu'elles deviennent très simples à programmer sur les petites calculatrices modernes [44,45]**.**

Les solutions analytiques présentent de nombreux avantages : précision, domaine d'application non limité, …etc. Elles permettent surtout de résoudre les cas limites ce qui n'est pas possible avec les abaques.

La figure 2.2 montre une Surface S_j recevant un flux Φ_{ij} de la surface S_i. La surface émettrice S_i est une surface Lambertienne qui émet un flux Φ_i alors que S_j reçoit une portion de ce flux Φ_{ij}.

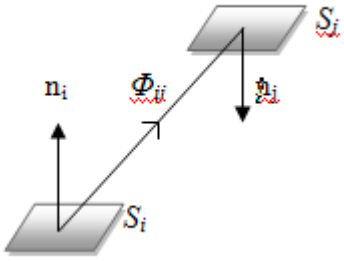


Figure 2. 2 : *Surface S_j recevant un flux Φ_{ij} de la surface S_i*

La fraction adimensionnelle $\boldsymbol{\Phi_{ij}/\Phi_i}$ est appelée facteur de forme de S_i vers S_j et notée $F_{Si\text{-}Sj}$ ou bien $F_{ij.}$

Le flux total émis par la surface S_i est $\boldsymbol{\Phi_i = M_i A_i}$

Avec $\boldsymbol{M_i}$: l'emittance de la surface S_i et A_i est l'aire de cette surface.

Le flux reçu par S_j est $\Phi_{ij}=F_{ij}\ \Phi_i$. Malheureusement le calcul de F_{ij} peut être un problème difficile.

3.1 Géométrie des facteurs de forme

Considérons deux éléments de surface dS_i et dS_j pris respectivement sur S_i et S_j et écrivons l'expression du flux émis par dS_i en direction de dS_j. Ce flux est contenu dans l'angle solide élémentaire $d\omega$, sous lequel dS_j est vu à partir de dS_i (**Figure 2.3)**

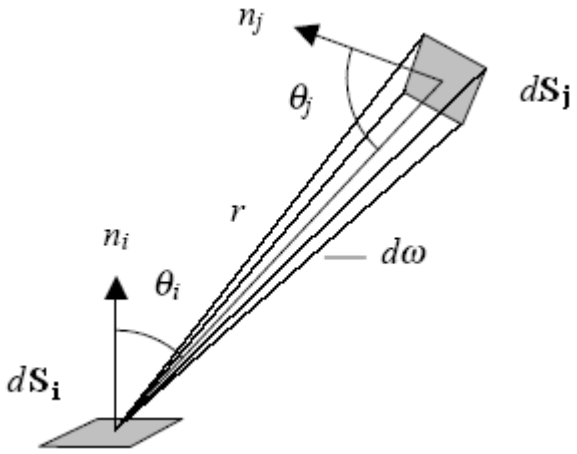


Figure 2.3 : *Géométrie du facteur de forme entre deux surfaces différentielles*

$$d^2\Phi_{ij} = L_i \, dS_i \, cos\theta_i \, d\omega \tag{2.10}$$

Avec:

$$d\omega = \frac{dS_j \, cos\theta_j}{r^2} \tag{2.11}$$

Et à partir de l'équation (1.13) du chapitre 1 :

$$L_i = \frac{M_i}{\pi} \quad \text{(Loi de Lambert)} \tag{2.12}$$

Où L_i : est la radiance de dS_i dans la direction de θ_i

Et Selon l'équation (1.7) du chapitre 1 :

$$d^2\Phi_{ij} = M_i \frac{\boldsymbol{dS_j dS_i \, cos\theta_i cos\theta_j}}{\boldsymbol{\pi r^2}} \tag{2.13}$$

Par intégration de $d^2\Phi_{ij}$ sur S_j, on obtient le flux Φ_{ij} émis par S_i vers S_j :

$$\Phi_{ij} = \int_{S_i}\int_{S_j} d^2\Phi_{ij} = M_i \int_{S_i}\int_{S_j} \frac{\boldsymbol{dS_j dS_i \, cos\theta_i cos\theta_j}}{\boldsymbol{\pi r^2}} \tag{2.14}$$

Expression que l'on peut encore écrire :

$$\Phi_{ij} = M_i \, S_i \, \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{S_i}} \int_{S_i}\int_{S_j} \frac{\boldsymbol{dS_j dS_i \, cos\theta_i cos\theta_j}}{\boldsymbol{\pi r^2}} \tag{2.15}$$

Faisant ainsi apparaitre le facteur de forme F_{ij} :

$$F_{ij} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{S_i}} \int_{S_i}\int_{S_j} \frac{\boldsymbol{dS_j dS_i \, cos\theta_i cos\theta_j}}{\boldsymbol{\pi r^2}} \tag{2.16}$$

On a finalement :

$$\Phi_{ij} = M_i S_i F_{ij} = \Phi_i F_{ij} \tag{2.17}$$

On remarque que F_{ij} est une quantité purement géométrique.

Le flux émis simultanément par S_j et atteignant S_i s'écrit, de manière similaire:

$$\Phi_{ji} = M_j S_j F_{ji} = \Phi_j F_{ji} \tag{2.18}$$

En introduisant le facteur de forme :

$$F_{ji} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{S_j}} \int_{S_i} \int_{S_j} \frac{\boldsymbol{dS_j dS_i\, cos\theta_i cos\theta_j}}{\boldsymbol{\pi r^2}} \tag{2.19}$$

$\boldsymbol{F_{ji}}$ est la fraction du flux hémisphérique de S_j qui atteint S_i .

Le rapprochement des expressions (2.16) et (2.19) montre que :

$$S_i F_{ij} = S_j F_{ji} = \int_{S_i} \int_{S_j} \frac{\boldsymbol{dS_j dS_i\, cos\theta_i cos\theta_j}}{\boldsymbol{\pi r^2}} \tag{2.20}$$

Ainsi : $\Phi_{ij} = M_i S_i F_{ij} \quad ou \quad M_i S_j F_{ji}$

Et $\Phi_{ji} = M_j S_j F_{ji} \quad ou \quad M_j S_i F_{ij}$

On a donc le choix, pour calculer des flux Φ_{ij} et Φ_{ji} , entre évaluer F_{ij} ou F_{ji} . On choisit bien entendu celle de ces deux grandeurs qui est la plus simple à calculer.

3.2 Propriétés du facteur de forme

Le facteur de forme est en fait une quantité purement géométrique : il dépend uniquement de la forme et de la position relative des surfaces.

i. Réciprocité : $\forall (i, j)$ $Ai\ Fij = Aj\ Fji$ (2.21)

ii. La somme de tous les facteurs de forme pour une surface donnée est égale à l'unité.

Soit un environnement clos constitué de *n* surfaces A1, A2, ..., An. On a donc pour toute surface A_i de cet environnement (i allant de 1 à *n)* :

$$\sum_{k=1}^{N} F_{ik} = 1 \tag{2.22}$$

iii. Dans le cas d'une surface A_i plane ou convexe, aucun rayon lumineux réfléchi par cette surface ne va frapper directement cette même surface. Donc :$F_{ii} = 0$

Dans le cas d'une surface A_i concave, on a bien entendu : $F_{ii} \neq 0$

iv. Additivité : Soient trois surfaces disjointes A_i, A_j et A_k . La fraction d'énergie issue de A_i et reçue par l'union des deux surfaces A_j et A_k est égale à la somme des fractions d'énergie issues de A_i et reçues par chacune de ces deux surfaces.

Le facteur de forme entre A_i et l'union de A_j et A_k est donc égal à la somme du facteur de forme entre A_i et A_j et du facteur de forme entre A_i et A_k:

$$F_{i(j \cup k)} = F_{ij} + F_{ik} \tag{2.23}$$

L'inverse n'est pas valable :

$$F_{(j\cup k)i} = \frac{A_j F_{ji} + A_k F_{ki}}{A_j + A_k} \neq F_{ji} + F_{ki} \tag{2.24}$$

Si les deux surfaces A_j et A_k ont une partie commune, on a alors :

$$F_{i(j\cup k)} = F_{ij} + F_{ik} - F_{i(j\cap k)} \tag{2.25}$$

3.3 Calcul du facteur de forme dans une cavité carrée

Dans ce paragraphe on donne les expressions analytiques des facteurs de forme dans deux cas 3D et 2D :

3.3.1. Facteur de forme dans une cavité carrée tridimensionnelle (3D)

Les formules numériques des facteurs de forme entre deux plaques rectangulaires en parallèle, et /ou en perpendiculaire sont données par [48] :

a. Facteur de forme pour deux surfaces perpendiculaires

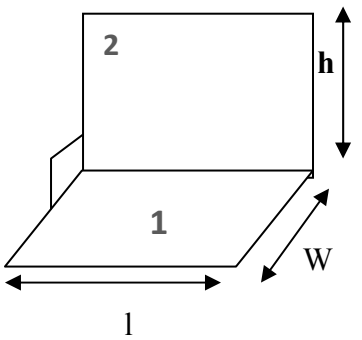


Figure 2.4 : *Deux plaques rectangulaires perpendiculaires*

H=h/l ; W=w/l

$$\boldsymbol{F_{12}} =$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\pi W}}\left[\boldsymbol{W\ arctang}\left[\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{W}}\right] + \boldsymbol{H\ \ arctang}\left[\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{H}}\right] - \sqrt{\boldsymbol{H^2+W^2}}\ \boldsymbol{arctang}\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{H^2+W^2}}}\right.$$

$$\left. + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{ln}\left\{\frac{(\mathbf{1}+\boldsymbol{W^2})(\mathbf{1}+\boldsymbol{W^2})}{\mathbf{1}+\boldsymbol{W^2}+\boldsymbol{H^2}}\left[\frac{\boldsymbol{W^2}(\mathbf{1}+\boldsymbol{W^2}+\boldsymbol{H^2})}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{W^2})(\boldsymbol{W^2}+\boldsymbol{H^2})}\right]^{\boldsymbol{W^2}}\left[\frac{\boldsymbol{H^2}(\mathbf{1}+\boldsymbol{W^2}+\boldsymbol{H^2})}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{H^2})(\boldsymbol{W^2}+\boldsymbol{H^2})}\right]^{\boldsymbol{H^2}}\right\}\right] \tag{2.26}$$

b. Facteur de forme pour deux surfaces rectangulaires en parallèle

Dans ce cas, ces formules sont complexes mais facile à programmer.

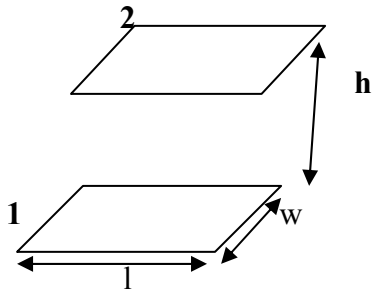


Figure 2.5 : *Deux plaques rectangulaires parallèles*

X=w/l ; Y=l/h

$$F_{12} = \frac{2}{\pi XY}\left[ln\sqrt{\frac{(1+X^2)(1+Y)}{1+W^2+Y^2}} + X\sqrt{1+Y^2}\arctan\left(\frac{X}{\sqrt{1+Y^2}}\right) + Y\sqrt{1+X^2}\arctan\left(\frac{Y}{\sqrt{1+X^2}}\right) - X\arctan X - Y\arctan Y \right] \quad (2.27)$$

c. Exemple numérique

On considère une cavité rectangulaire illustrée sur la figure (2.6) avec les paramètres suivants :

Longueur : l=5.00m.

Largeur : w=3.00m.

Hauteur : h=2.50m.

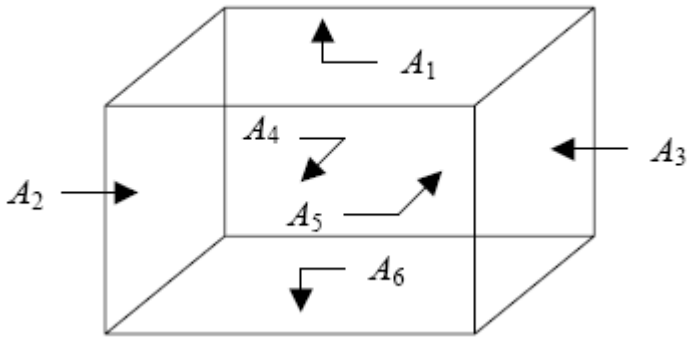


Figure 2.6 : Cavité rectangulaire

PROGRAMME INFORMATIQUE

```
! PROGRAM  TOTAL POUR RESOUDRE L'EQUATION DE RADIOSITE
! Programme de calcul des facteurs de formes  pour une cavité parallélépipédique
 Paramètre (dim=100)
 real, dimension (dim, dim)::FF,MM,EE
real, dimension(1:dim)   ::C,R,M0
         real    :: F,l,w,h
INTEGER    ::k
 M=6
 N=6
  l=5
 w=3
h=2.5

     do i=1,N
     do j=1,M
     if (i==j) then
          FF(i,j)=0
     end if
     enddo
     enddo

call calcperp(F,l,w,h)
     FF(1,2)=F
     FF(1,3)=FF(1,2)
     FF(6,2)=FF(1,2)
     FF(6,3)=FF(1,2)

     call calcperp(F,w,l,h)
     FF(1,4)=F
     FF(1,5)=FF(1,4)
     FF(6,4)=FF(1,4)
     FF(6,5)=FF(1,4)

     call calcpara(F,w,l,h)
     FF(1,6)=F
     FF(6,1)=FF(1,6)

     call calcperp(F,h,w,l)
     FF(2,1)=F
     FF(2,6)=FF(2,1)
     FF(3,1)=FF(2,1)
     FF(3,6)=FF(2,1)

     call calcpara(F,h,w,l)
     FF(2,3)=F
     FF(3,2)=FF(2,3)

     call calcperp(F,w,h,l)
     FF(2,4)=F
```

```
        FF(2,5)=FF(2,4)
        FF(3,4)=FF(2,4)
        FF(3,5)=FF(2,4)

        call calcperp(F,h,l,w)
        FF(4,1)=F
        FF(4,6)=FF(4,1)
        FF(5,1)=FF(4,1)
        FF(5,6)=FF(4,1)

        call calcperp(F,l,h,w)
        FF(4,2)=F
        FF(4,3)=FF(4,2)
        FF(5,2)=FF(4,2)
        FF(5,3)=FF(4,2)

        call calcpara(F,h,l,w)
        FF(4,5)=F
        FF(5,4)=FF(4,5)

        print*,"la matrice FACTEUR DE FORME est:"
    do i=1,N
        do j=1,M
              print'(f8.3,$)',FF(i,j)
        end do
          print*
     end do
        print*

!*************************sous programme calc_perp()************************
         subroutine calcperp(F,largeur,longueur,hauteur)
            real    :: F,largeur,longueur,hauteur
       pi=3.14
      H=hauteur/longueur
      W=largeur/longueur
       SH=H*H
       SW=W*W
      A=1/(pi*W)
      B=W*atan(1/W)+H*atan(1/H)
      C=sqrt(SH+SW)*atan(1/sqrt(SH+SW))
      D=(1+SW)*(1+SH)/(1+SH+SW)
      E=SW*(1+SW+SH)/((1+SW)*(SW+SH))
      G=SH*(1+SW+SH)/((1+SH)*(SW+SH))

       F=A*(B-C+0.25*Log(D*(E**SW)*(G**SH)))

     end subroutine calcperp
!********************sous programme calc_para()*****************************
     subroutine calcpara(F,largeur,hauteur,separation)
       reaL  :: F,largeur,hauteur,separation
       pi=3.14
```

```
X=largeur/separation
Y=hauteur/separation
   SX=X*X
   SY=Y*Y
 A=2/(X*Y*pi)
 B=log(sqrt((1+SX)*(1+SY)/(1+SX+SY)))
 C=X*sqrt(1+SY)*atan(X/sqrt(1+SY))
 D=Y*sqrt(1+SX)*atan(Y/sqrt(1+SX))
 E=X*atan(X)+Y*atan(Y)
F=A*(B+C+D-E)
END subroutine calcpara
```

EXEMPLES DE RESULTATS

Par l'utilisation des formules précédentes programmées en FORTRAN on obtient :

La matrice FACTEUR DE FORME est:

0.000	0.125	0.125	0.215	0.215	0.321
0.250	0.000	0.080	0.210	0.210	0.250
0.250	0.080	0.000	0.210	0.210	0.250
0.257	0.126	0.126	0.000	0.233	0.257
0.257	0.126	0.126	0.233	0.000	0.257
0.321	0.125	0.125	0.215	0.215	0.000

- Dans le cas d'une cavité carrée l = h = w

$F_{11}=F_{22}=F_{33}=F_{44}=F_{55}=F_{66}=0.000$

Et les autres termes sont égaux à 0.200.

La matrice FACTEUR DE FORME est:

0.000	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.200	0.000	0.200	0.200	0.200	0.200
0.200	0.200	0.000	0.200	0.200	0.200
0.200	0.200	0.200	0.000	0.200	0.200
0.200	0.200	0.200	0.200	0.000	0.200
0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.000

3.3.2 *Facteur de forme dans une cavité carrée bidimensionnelle (2D)*

1- Calcul du facteur de forme entre surfaces perpendiculaires

Soient les surfaces A_1 et A_3 situées sur la face horizontale et les surfaces A_2 et A_4 sur la face verticale (Figure 2.7)

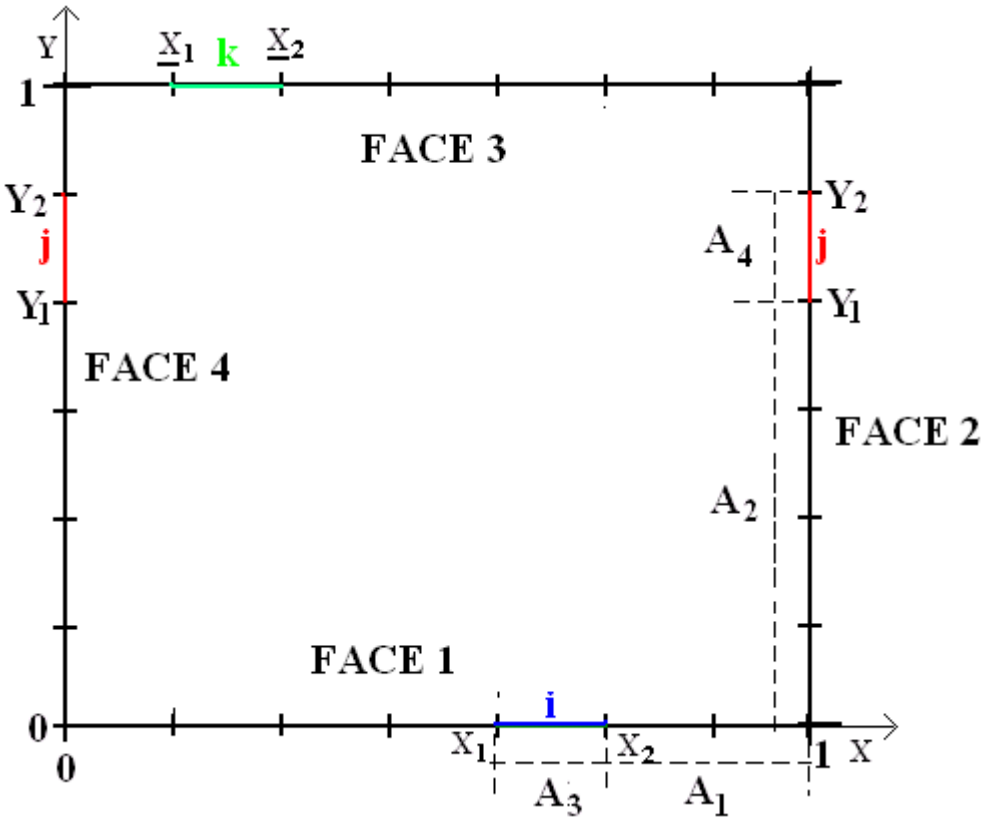


Figure 2.7 : *Cavité carrée en 2D. Ses surfaces sont divisées en segments*

Le but est de calculer le facteur de forme perpendiculaire $F_{ij} = F_{3-4}$ entre la surface A_3 et la surface A_4.

On applique la propriété **4 (équation (2.23))** entre les surfaces A3 et (A2+A4) on obtient :

$$F_{3-(2+4)} = F_{3-2} + F_{3-4}$$

$$\Rightarrow F_{3-4} = F_{3-(2+4)} - F_{3-2} \qquad (2.28)$$

On applique la même propriété sur les surfaces (A2+A4) et (A1+A3)

$$F_{(2+4)-(1+3)} = F_{(2+4)-1} + F_{(2+4)-3}$$

$$\Rightarrow F_{(2+4)-3} = F_{(2+4)-(1+3)} - F_{(2+4)-1} \qquad (2.29)$$

On applique la propriété **1 (équation (2.21))** sur les surfaces (A2+A4) et A3 **:**

$$(A_2 + A_4)F_{(2+4)-3} = A_3F_{3-(2+4)}$$

$$\Rightarrow F_{3-(2+4)} = \frac{(A_2+A_4)}{A_3}F_{(2+4)-3}$$

$$\Rightarrow F_{3-(2+4)} = \frac{(A_2+A_4)}{A_3}\left[F_{(2+4)-(1+3)} - F_{(2+4)-1}\right] \quad (2.30)$$

On applique la propriété **4 (Equation (2.23))** entre les surfaces A2 et (A1+A3) on obtient :

$$F_{2-(1+3)} = F_{2-1} - F_{2-3}$$

$$F_{2-3} = F_{2-(1+3)} - F_{2-1} \quad (2.31)$$

On applique la propriété **1 (équation (2.21))** sur les surfaces A2 et A3

$$A_2F_{2-3} = A_3F_{3-2}$$

$$F_{3-2} = \frac{A_2}{A_3}F_{2-3} = \frac{A_2}{A_3}\left[F_{2-(1+3)} - F_{2-1}\right] \quad (2.32)$$

La combinaison des équations (2.26) (2.28) et (2.30) donne:

$$F_{ij} = F_{3-4} = \frac{(A_2+A_4)}{A_3}\left[F_{(2+4)-(1+3)} - F_{(2+4)-1}\right] - \frac{A_2}{A_3}\left[F_{2-(1+3)} - F_{2-1}\right] \quad (2.33)$$

On applique la propriété 1 sur les surfaces (A_2+A_4) et (A_1+A_3)

$$F_{(2+4)-(1+3)} = \frac{(A_1 + A_3)}{(A_2 + A_4)}F_{(1+3)-(2+4)} \quad (2.34)$$

On applique la propriété 1 sur les surfaces (A_2+A_4) et A_1:

$$F_{(2+4)-1} = \frac{A_1}{(A_2+A_4)}F_{1-(2+4)} \quad (2.35)$$

On applique la propriété 1 sur les surfaces A_2 et (A_1+A_3) :

$$F_{2-(1+3)} = \frac{(A_1+A_3)}{A_2}F_{(1+3)-2} \quad (2.36)$$

On applique la propriété 1 sur les surfaces A_1 et A_2 :

$$F_{2-1} = \frac{A_1}{A_2}F_{1-2} \quad (2.37)$$

L'équation (2.33) devient donc:

$$F_{ij} = F_{3-4} = \frac{(A_2 + A_4)}{A_3}\left[\frac{(A_1 + A_3)}{(A_2 + A_4)}F_{(1+3)-(2+4)} - \frac{A_1}{(A_2 + A_4)}F_{1-(2+4)}\right]$$
$$- \frac{A_2}{A_3}\left[\frac{(A_1 + A_3)}{A_2}F_{(1+3)-2} - \frac{A_1}{A_2}F_{1-2}\right] \quad (2.38)$$

$$F_{ij} = F_{3-4} = \frac{1}{A_3}\left[(A_1 + A_3)F_{(1+3)-(2+4)} - A_1F_{1-(2+4)}\right] - \frac{1}{A_3}\left[(A_1 + A_3)F_{(1+3)-2} - A_1F_{1-2}\right] \quad (2.39)$$

$$F_{ij} = F_{3-4} = \frac{(A_1 + A_3)}{A_3}\left[F_{(1+3)-(2+4)} - F_{(1+3)-2}\right] + \frac{A_1}{A_3}\left[F_{1-2} - \frac{A_1}{A_3}F_{1-(2+4)}\right] \quad (2.40)$$

$$F_{ij} = F_{3-4} = \frac{(A_1 + A_3)}{A_3}\left[F_{(A1+A3)-(A2+A4)} - F_{(A1+A3)-A2}\right] + \frac{A_1}{A_3}\left[F_{A1-A2} - F_{A1-(A2+A4)}\right] \quad (2.41)$$

On applique la formule donnant le facteur de forme entre les deux surfaces perpendiculaires S_1 et S_2 aux surfaces (A1+A3)-(A2+A4), (A1+A3)-A2, A1-A2, A1-(A2+A4) [52]:

$F_{S1-S2} = \frac{1}{2}\left(1 + H - \sqrt{1 + H^2}\right)$ Avec $H = \frac{h}{w}$

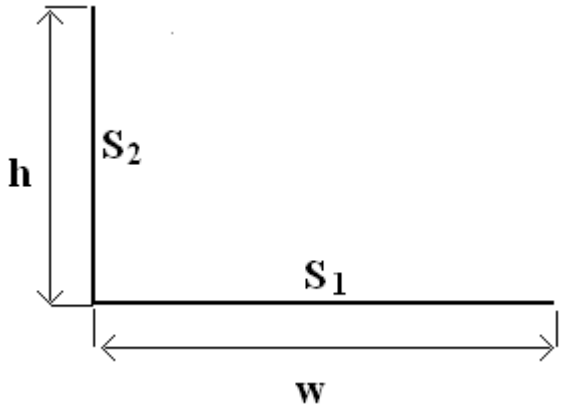


Figure 2.8 : *Facteur de forme entre deux surfaces perpendiculaires*

$$F_{S1-S2} = \frac{1}{2w}\left(w + h - \sqrt{w^2 + h^2}\right) \quad (2.42)$$

On a d'après la figure (2.7):

$A_1=1-x_2$, $A_3=x_2-x_1$, $A_2=y_1$, $A_2+A_4=y_2$, $A_1+A_3=1-x_1$

On applique la formule (2.42) entre les surfaces (A1+A3) et (A2+A4)

$$F_{(A1+A3)-(A2+A4)} = \frac{1}{2(1-x_1)}\left((1-x_1)+y_2-\sqrt{(1-x_1)^2+{y_2}^2}\right) \qquad (2.43)$$

Puis entre les surfaces (A1+A3) et A2 :

$$F_{(A1+A3)-A2} = \frac{1}{2(1-x_1)}\left((1-x_1)+y_1-\sqrt{(1-x_1)^2+{y_1}^2}\right) \qquad (2.44)$$

Entre les surfaces A1-A2:

$$F_{A1-A2} = \frac{1}{2(1-x_2)}\left((1-x_2)+y_1-\sqrt{(1-x_2)^2+{y_1}^2}\right) \qquad (2.45)$$

Entre les surfaces A1-(A2+A4) :

$$F_{A1-(A2+A4)} = \frac{1}{2(1-x_2)}\left((1-x_2)+y_2-\sqrt{(1-x_2)^2+{y_2}^2}\right) \qquad (2.46)$$

On aura donc:

$$\begin{aligned} F_{ij} = \frac{(1-x_1)}{x_2-x_1}\Bigg[&\frac{1}{2(1-x_1)}\left((1-x_1)+y_2-\sqrt{(1-x_1)^2+{y_2}^2}\right) \\ &-\frac{1}{2(1-x_1)}\left((1-x_1)+y_1-\sqrt{(1-x_1)^2+{y_1}^2}\right)\Bigg] \\ &+\frac{(1-x_2)}{x_2-x_1}\Bigg[\frac{1}{2(1-x_2)}\left((1-x_2)+y_1-\sqrt{(1-x_2)^2+{y_1}^2}\right) \\ &-\frac{1}{2(1-x_2)}\left((1-x_2)+y_2-\sqrt{(1-x_2)^2+{y_2}^2}\right)\Bigg] \end{aligned} \qquad (2.47)$$

$$\begin{aligned} F_{ij} = \frac{-1}{2(x_1-x_2)}\Big[&\sqrt{(1-x_1)^2+{y_1}^2}-\sqrt{(1-x_1)^2+{y_2}^2}+\sqrt{(1-x_2)^2+{y_2}^2} \\ &-\sqrt{(1-x_2)^2+{y_1}^2}\Big] \end{aligned} \qquad (2.48)$$

$$\begin{aligned} F_{ij} = \frac{-1}{2(x_1-x_2)}\Big[&\sqrt{(1-x_2)^2+{y_2}^2}-\sqrt{(1-x_2)^2+{y_1}^2}+\sqrt{(1-x_1)^2+{y_1}^2} \\ &-\sqrt{(1-x_1)^2+{y_2}^2}\Big] \end{aligned} \qquad (2.49)$$

2- Calcul du facteur de forme entre surfaces parallèles

Considérons les surfaces L_1, L_2, L_3 et L_4 comme l'indique la figure (2.9)

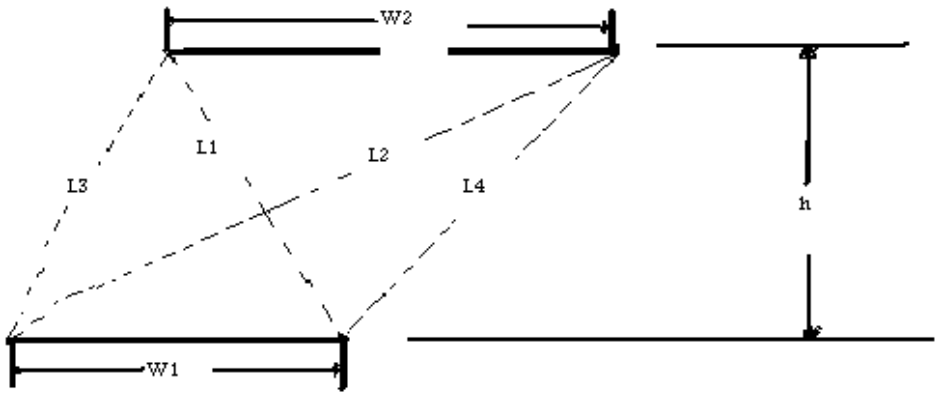


Figure 2.9 : *Facteur de forme entre deux surfaces parallèles*

Le facteur de forme entre deux surfaces parallèles est donné par la relation suivante [52] :

$$F_{1-2} = \frac{L_1+L_2-L_3-L_4}{2W_1} \qquad (2.50)$$

En Comparant la figure 2.9 avec la figure 2.10, et en calculant les expressions de L1, L2, L3, L4, W1 et W2, on obtient l'expression analytique des facteurs de formes correspondants :

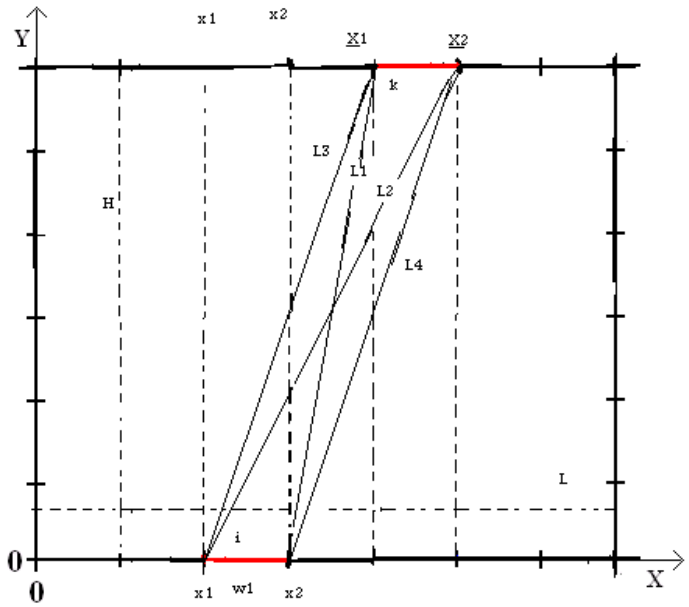


Figure 2.10 *: Deux surfaces parallèles en cavité carrée divisées en segments*

On a d'après la figure 2.10 :

$$L_1^2 = H^2 + \left(\underline{x}_1 - x_2\right)^2 \Rightarrow L_1 = \sqrt{\left(\underline{x}_1 - x_2\right)^2 + H^2} \tag{2.51}$$

$$L_2^2 = H^2 + \left(\underline{x}_2 - x_1\right)^2 \Rightarrow L_2 = \sqrt{\left(\underline{x}_2 - x_1\right)^2 + H^2} \tag{2.52}$$

$$L_3^2 = H^2 + \left(\underline{x}_1 - x_1\right)^2 \Rightarrow L_3 = \sqrt{\left(\underline{x}_1 - x_1\right)^2 + H^2} \tag{2.53}$$

$$L_4^2 = H^2 + \left(\underline{x}_2 - x_2\right)^2 \Rightarrow L_4 = \sqrt{\left(\underline{x}_2 - x_2\right)^2 + H^2} \tag{2.54}$$

$$w_1 = x_2 - x_1 \tag{2.55}$$

On a

$$\mathrm{F_{1-2}} = \mathrm{F_{i-k}} = \frac{\mathrm{L_1 + L_2 - L_3 - L_4}}{2\mathrm{w_1}} \tag{2.56}$$

En remplaçant L_1, L_2, L_3, L_4 et w_1 par leurs expressions, on obtient :

$$F_{i-k} = \frac{\sqrt{\left(\underline{x}_1 - x_2\right)^2 + H^2} + \sqrt{\left(\underline{x}_2 - x_1\right)^2 + H^2} - \sqrt{\left(\underline{x}_1 - x_1\right)^2 + H^2} - \sqrt{\left(\underline{x}_2 - x_2\right)^2 + H^2}}{2(x_2 - x_1)} \tag{2.57}$$

On arrive à :

$$F_{i-k} = -\frac{1}{2(x_2 - x_1)}\left[\sqrt{\left(\underline{x}_2 - x\right)^2 + H^2}\Big|_{x=x_1}^{x=x_2} - \sqrt{\left(\underline{x}_1 - x\right)^2 + H^2}\Big|_{x=x_1}^{x=x_2}\right] \tag{2.58}$$

4. EQUATION DE RADIOSITE

Si les faces S_i et S_j sont deux surfaces Lambertiennes (émission et réflexion avec une luminance isotrope), le facteur de forme F_{ij} représente la fraction de flux émis par S_i et reçu par S_j. Réciproquement le facteur de forme F_{ji} représente la fraction de flux émis par S_j et reçu par S_i.

Nous allons déterminer l'emittance de chaque surface S_i dans un milieu de $\boldsymbol{n}$ surfaces. Cette emittance est due au flux initial émis par cette surface plus celui qui est réfléchi par celle-ci. Le flux réfléchi arrive de toutes les autres surfaces S_j visible à S_i dans le milieu.

Si on considère une surface S_j qui est totalement visible à S_i, le flux émis par S_j est :

$$\Phi_{\boldsymbol{j}} = \boldsymbol{M_j A_j} \tag{2.59}$$

La fraction de ce flux reçue par la plaque S_i est :

$$\boldsymbol{\Phi_{ij} = M_j\, A_j\, F_{ij}} \tag{2.60}$$

Le flux réfléchi par S_i est : $\boldsymbol{\rho_i M_j A_j F_{ji}}$

Où $\boldsymbol{\rho_i}$ est la réflectivité de S_i

M_{ij} est définie comme étant l'emittance de S_i due au flux reçu en provenance de S_j, donnée par :

$$\boldsymbol{M_{ij} = \frac{\rho_i M_j A_j F_{ji}}{A_i}} \tag{2.61}$$

Par l'utilisation de la relation de réciprocité, on peut écrire

$$\boldsymbol{M_{ij} = \rho_i M_i F_{ij}} \tag{2.62}$$

L'emittance finale M_i de la surface S_i due aux flux reçu en provenance de toutes les sources S_j est donnée comme suit:

$$\boldsymbol{M_i = M_{0i} + \rho_i \sum_{j=1}^{n} M_j\, F_{ij}} \tag{2.63}$$

Où $\boldsymbol{n}$ est le nombre de surfaces.

$\boldsymbol{M_{0i}}$ est l'emittance initiale de S_i due au flux émis par la source S_i uniquement.

Donc :

$$\boldsymbol{M_{0i} = M_i - \rho_i \sum_{j=1}^{n} M_j\, F_{ij}} \tag{2.64}$$

On peut exprimer cette équation pour toutes les surfaces de S_1 à S_n comme un système de n équations linéaires :

$$\begin{aligned} M_{01} &= M_1 - (\rho_1 M_1 F_{11} + \rho_1 M_2 F_{12} + \cdots + \rho_1 M_n F_{1n}) \\ M_{02} &= M_2 - (\rho_2 M_1 F_{21} + \rho_2 M_2 F_{22} + \cdots + \rho_2 M_n F_{2n}) \\ &\ldots. \\ M_{0n} &= M_n - (\rho_n M_1 F_{n1} + \rho_n M_2 F_{n2} + \cdots + \rho_n M_n F_{nn}) \end{aligned} \tag{2.65}$$

Alors en peut écrire sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} M_{01} \\ M_{02} \\ \vdots \\ M_{0n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\rho_1 F_{11} & -\rho_1 F_{12} & \ldots & -\rho_1 F_{1n} \\ -\rho_2 F_{21} & 1-\rho_2 F_{22} & \ldots & -\rho_2 F_{2n} \\ & & & \vdots \\ -\rho_n F_{n1} & -\rho_n F_{n1} & \ldots & 1-\rho_n F_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_n \end{bmatrix} \tag{2.66}$$

A partir des notions de matrices on peut exprimer (2.66) sous une forme réduite :

$$\boldsymbol{M_0 = (I - T)M} \tag{2.67}$$

Où ***I*** est la matrice unité de dimension $n \times n$

M est le vecteur de l'emittance finale de dimension $n \times 1$

M_0 est le vecteur de l'emittance initiale de dimension $n \times 1$

T est la matrice des éléments $\rho_i F_{ij}$ de dimension $n \times n$

(1- T) est dit **Matrice de radiosité.**

C'est l'équation simple de radiosité : un système d'équations linéaires composé uniquement des coefficients de réflexion, des facteurs de forme et des émittances des surfaces.

Par identification entre (2.67) et (2.7) on obtient :

$\boldsymbol{M = \vec{J}}$: Vecteur de radiosité c'est le vecteur de l'emittance

(I-T)=A : Matrice de radiosité c'est la matrice des coefficients

$\boldsymbol{M_0 = \vec{b}}$ **:** Vectrice émission propre c'est le vecteur de l'emittance initiale.

Pour déterminer l'emittance finale M_i on a besoin de connaitre l'emittance initiale M_{0i} qui est la vectrice émission propre et est égale à $\boldsymbol{\varepsilon \sigma_i T_i^4}$.

La matrice de radiosité est typiquement d'ordre trop grand pour les méthodes directes comme l'élimination Gaussienne. Pour cela, l'équation de radiosité est idéalement appropriée pour les techniques itératives comme les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel. Ces méthodes possèdent une convergence garantie, parce que la matrice est toujours diagonalement dominante pour les surfaces planes et convexes ($F_{ii}=0$), et $\rho_i F_{ij}$ est toujours inferieure à un.

5. RESOLUTION DE L'EQUATION DE RADIOSITE

Il a été démontré au paragraphe précédent que l'équation de radiosité est un système de *n* équations linéaires de la forme :

$$\begin{bmatrix} M_{01} \\ M_{02} \\ \vdots \\ M_{0n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\rho_1 F_{11} & -\rho_1 F_{12} & \dots & -\rho_1 F_{1n} \\ -\rho_2 F_{21} & 1-\rho_2 F_{22} & \dots & -\rho_2 F_{2n} \\ & & & \vdots \\ -\rho_n F_{n1} & -\rho_n F_{n1} & \dots & 1-\rho_n F_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_n \end{bmatrix} \tag{2.68}$$

Où ***n*** est le nombre de surfaces du milieu.

Les éléments du vecteur de l'emittance initiale $\boldsymbol{M_{0i}}$ sont donnés par $\boldsymbol{M_{0i} = \varepsilon \sigma_i T_i^4}$. On connait aussi les valeurs des réflectivités $\boldsymbol{\rho_i}$ de ces surfaces, et on peut estimer le facteur de

forme $\boldsymbol{F_{ij}}$ entre deux surfaces *i* et *j*. Tous ce qu'on a à faire pour obtenir l'emittance $\boldsymbol{M_i}$ est la résolution de cette équation.

La plus part des milieux nécessitent un système d'équations linéaires trop grand à résoudre par l'utilisation des méthodes directes comme l'élimination de Gauss. L'alternative classique utilise les techniques itératives comme la méthode de Gauss Seidel, c'est une approche originale prise par **Goral et al [49].** Malheureusement cette approche donne un algorithme de radiosité très complexe en temps et espace. Pour un milieu de 50.000 surfaces on peut simplement consommer de 1 à 10 gigabits de mémoire pour les facteurs de forme et prendre un jour en temps de calcul CPU.

On recherche un algorithme qui réduit le temps de calcul et l'espace mémoire de stockage. Autrement dit, notre algorithme doit générer une première approximation raisonnable, ensuite progressivement et gracieusement raffiner la solution jusqu'à atteindre la forme finale. C'est le critère essentiel de travail des techniques itératives, pour cela on a besoin d'un algorithme beaucoup plus effectif que la méthode de Gauss Seidel. C'est la méthode de Jacobi prise par **Ian Ashdown [47]**.

Avant d'examiner cette méthode, il faut rappeler les principes de base des techniques itératives.

5.1 Techniques itératives

A partir de l'équation (2.67), on peut exprimer l'équation (2.68):

$$\boldsymbol{M_0} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{T})\boldsymbol{M} \tag{2.69}$$

Où $\boldsymbol{I}$ est la matrice identité ; et $\boldsymbol{T}$ exprime la matrice suivante :

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \rho_1 F_{11} & \rho_1 F_{12} & \dots & \rho_1 F_{1n} \\ \rho_2 F_{21} & \rho_2 F_{22} & \dots & \rho_2 F_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho_n F_{n1} & \rho_n F_{n1} & \dots & \rho_n F_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \rho_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \rho_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_{n1} & F_{n1} & \dots & F_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \boldsymbol{R}\,\boldsymbol{F} \tag{2.70}$$

Où $\boldsymbol{R}$ est la matrice diagonale de réflectivité; et $\boldsymbol{F}$ est la matrice des facteurs de forme. Si on considère que la matrice de radiosité est égale à une matrice notée $\boldsymbol{K}$, on obtient un système linéaire de la forme :

$$\boldsymbol{M_0} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{M} \tag{2.71}$$

qui peut être résolu par l'utilisation d'une des plusieurs techniques itératives.

Il y a deux questions d'intérêt :

Premièrement, il ya des systèmes linéaires où le vecteur solution diverge plutôt qu'il converge à la solution. L'équation de radiosité est garantie à converger vers la solution par l'utilisation de l'une ou d'autre des méthodes itératives de Jacobi ou de Gauss Seidel. (La somme des facteurs de forme de n'importe quelle ligne de la matrice est égale ou inférieure à l'unité par l'utilisation de la relation d'addition (l'équation 2.22), et chaque facteur de forme est multiplié par les coefficients de réflexion **ρ** qui sont inferieurs à l'unité. En outre, le terme diagonal principal de la matrice *K* de l'équation (2.71) est toujours égal à l'unité, puisque $F_{ii} = 0$ pour toutes les surfaces planes et convexes.

Ainsi, *K* est strictement de diagonale dominante, ce qui garantie la convergence pour n'importe quel choix de $M^{(0)}$.

Deuxièmement, on a besoin d'examiner le choix de $M^{(0)}$ qu'il faut prendre. Plus ce choix est proche du vecteur inconnu de l'emittance finale M, plus la méthode itérative converge rapidement. Bien sûr la seule information à priori qu'on possède concerne les émittances initiales des surfaces qui représentent les sources Lambertiennes. Autrement dit, notre meilleur choix est de confier le vecteur de l'emittance initiale M_0 à $M^{(0)}$.

Revenant à l'équation (2.67), On obtient après réarrangement:

$$\boldsymbol{M = (I - T)^{-1} M_0} \tag{2.72}$$

On ne peut pas résoudre cette équation directement, puisque le calcul de l'inverse de la matrice $(\boldsymbol{I - T})$ est un travail difficile (complexe). Par contre on peut l'approximer par un développement en séries de puissance de **Maclaurin :**

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{(1 - x)}} = \sum_{\boldsymbol{n=0}}^{\infty} \boldsymbol{x^n} = \mathbf{1} + \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x^2} + \boldsymbol{x^3} + \cdots \tag{2.73}$$

Qui converge pour $-1 < x < 1$, il ya un développement en séries pour les matrices **[33] :**

$$\boldsymbol{(I - T)^{-1} = I + T + T^2 + T^3 + \cdots} \tag{2.74}$$

Qui donne :

$$\boldsymbol{M = M_0 + TM_0 + T^2 M_0 + T^3 M_0 + \cdots} \tag{2.75}$$

Il ya une signification physique importante de l'équation **(2.75)** démontré par (Kaji **[50]**). Chaque terme $\boldsymbol{T^K M}$ représente successivement le K^{eme} rebondissement de la lumière qui est émise initialement. Le terme M_0 représente le flux initial, TM_0 représente le premier rebondissement $T^2 M_0$ le deuxième rebondissement et ainsi de suite.

On peut exprimer l'équation (2.67) sous forme itérative:

$$\boldsymbol{M^{(k)} = TM^{(k-1)} + M_0} \quad \mathbf{, k > 0} \tag{2.76}$$

Autrement dit, le comportement de flux traversant le milieu est lui-même une méthode itérative. De plus le vecteur de l'emittance initiale M_0 sert comme une estimation initiale du vecteur de l'emittance finale *M*.

Par comparaison de l'équation (2.67) avec les techniques itératives pour résoudre un système linéaire, il est clair que l'équation de radiosité converge toujours à la solution lorsqu'on applique ces techniques.

Il ya en fait une seule technique itérative qui modélise fidèlement la réalité physique du comportement de la lumière tel qu'il est exprimé par l'équation (2.76). C'est la méthode itérative de Jacobi (Technique itérative simple pour résoudre les systèmes d'équations linéaires).

5.1.1. Méthode de Jacobi

La méthode de Jacobi décompose une matrice A (n x n) en une somme de trois matrices

$$A=D-L-U \tag{2.77}$$

D : Matrice diagonale de A.

U : Matrice triangulaire supérieure de A.

L : Matrice triangulaire inférieure de A.

On a alors :

$$Ax = (D - L - U)x = b \tag{2.78}$$

Ce qui donne :

$$Dx = (L + U)x + b \tag{2.79}$$

On a donc :

$$x = \frac{(L+U)}{D}x + \frac{b}{D} \tag{2.80}$$

L'itération de Jacobi est :

$$x^k = \frac{(L+U)}{D}x^{k-1} + \frac{b}{D} \tag{2.81}$$

Ou bien :

$$\boldsymbol{x_i^{(k)} = \sum_{j=1, i=1}^{n} \frac{(-a_{ij}x_j^{(k-1)}) + b_i}{a_{ii}}}, \; i=1, 2 \ldots n \tag{2.82}$$

On arrête les calculs lorsque les valeurs successives de $\boldsymbol{x_i}$ sont suffisamment voisines. Pour cela, on peut utiliser le critère de convergence absolue $\left|\boldsymbol{x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}}\right| \leq \boldsymbol{\varepsilon}$

5.1.2 Méthode de Gauss-Seidel

On procède de la même manière que pour la méthode de Jacobi en décomposant la matrice A comme en (2.77), puis on transforme le système :

$$Ax = b \leftrightarrow (D - L)x - Ux = b \leftrightarrow x = (D - L)^{-1}b + U(D - L)^{-1}x \qquad (2.83)$$

On définit ensuite une suite de vecteur$(x)^k$ par la formule :

$$(\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{k}} = \frac{\boldsymbol{U}}{(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})}\boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1})} + \frac{\boldsymbol{b}}{(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})} \quad ,\boldsymbol{k} > 0 \qquad (2.84)$$

Et la relation d'itération fournit l'algorithme de Gauss-Seidel :

$$\boldsymbol{x_i}^{(\boldsymbol{k})} = \frac{\sum_{\boldsymbol{j}=\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{i}-\boldsymbol{1}} -\boldsymbol{a_{ij}}\boldsymbol{x_j}^{(\boldsymbol{k})} + \sum_{\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{a_{ij}}\boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1})} + \boldsymbol{b_i}}{\boldsymbol{a_{ii}}} \qquad (2.85)$$

(i=1 … n)

Le principe de l'algorithme de Gauss-Seidel est de partir d'un vecteur x^0 dont les composantes $x_i^{(0)}$ sont choisies de façon arbitraire et de chercher à affiner, au fur et à mesure des itérations du vecteur de départ.

5.2 Application de la méthode itérative de Jacobi à l'équation de radiosité

On peut appliquer l'itération de Jacobi sur l'équation (2.76). On démarre de l'équation (2.67), et on décompose la matrice T en une matrice diagonale T_D, une matrice triangulaire supérieure $-T_L$, et une matrice triangulaire inferieure $-T_U$, on obtient :

$$(I - T) = I - T_D + T_L + T_U \qquad (2.86)$$

Donc

$$M_0 = (I - T_D + T_L + T_U)M \qquad (2.87)$$

Qui devient :

$$(I - T_D)\, M = -(T_L + T_U)M + M_0 \qquad (2.88)$$

Alors :

$$M = \frac{-(T_L + T_U)}{(I - T_D)}M + \frac{M_0}{(I - T_D)} \qquad (2.89)$$

Ceci est équivalent à l'itération de Jacobi représentée à l'équation (2.81). Cependant le facteur de forme F_{ii} pour les plaques planes et convexes est toujours égale à zéro, alors que chaque élément de la diagonale de T est égal à zéro et donc : $(I-T_D)=I$.

On a aussi $T = -(T_L + T_U)$

Donc :

$$M = -(T_L + T_U)M + M_0 = TM + M_0 \qquad (2.90)$$

Qui donne par la méthode itérative de Jacobi :

$$M^{(k)} = TM^{(k-1)} + M_0 \quad , k > 0 \tag{2.91}$$

Cette équation est identique à l'équation (2.77). En se reportant à l'équation (2.72) ; on obtient :

$$M^{(k)} = M_0 + RFM^{(k-1)} \tag{2.92}$$

Qui correspondant à la forme de l'équation (2.78) :

$$\boldsymbol{M_i^{(k)} = M_{0i} + \rho_i \sum_{j=1}^{n} F_{ij} M_j^{(k-1)}} \tag{2.93}$$

C'est l'équation de radiosité qu'on a obtenu au paragraphe **4** (Equation (2.64**)**), exprimée par la méthode itérative.

5.3 Calcul des flux radiatifs

Pour calculer le flux radiatif, les hypothèses généralement retenues pour la méthode des radiosités sont telles que:

- Les surfaces sont supposées opaques, grises et Lambertiennes (émission et réflexion avec une luminance isotrope)
- Les densités de flux et températures des surfaces élémentaires sont uniformes.
- Si les différentes surfaces délimitent un volume contenant un fluide quelconque, ce fluide est supposé transparent.

5.3.1 Le concept de radiosité

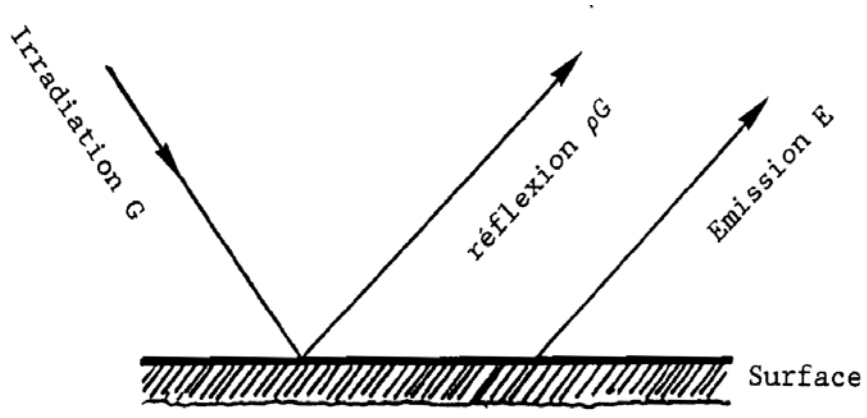


Figure 2.11 : *Illustration du concept de radiosité*

Soit E(E=M), l'emittance propre de la surface *i*, si ρG est la fraction réfléchie du rayonnement, G est la fraction de flux reçu par la surface, alors sa radiosité R est telle que :

$$R = M + \rho G \tag{2.94}$$

R est la radiosité qui est la somme de l'emittance de la surface et du flux réfléchi par unité de surface [3].

Si $\mathcal{E}$ est l'émissivité de la paroi alors :

$$R = \mathcal{E} M_i + \rho G \tag{2.95}$$

5.3.2 Echange radiatifs dans une cavité

Soit une enceinte constituée de *n* parois opaques, grises et diffuses

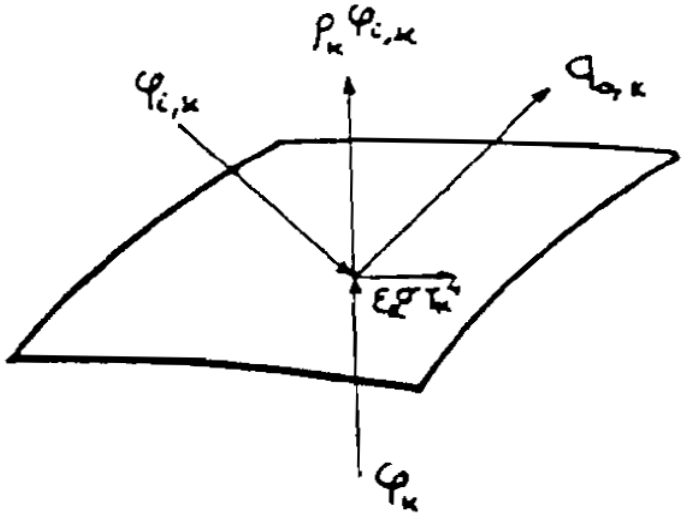


Figure 2.12 *: Bilan énergétique sur la surface k*

D'après la figure 2.12, la radiosité $R_k = q_{0,k}$ de la $\boldsymbol{k^{ième}}$ surface est définie par :

$$R_k = \mathcal{E}_k \sigma T_k^4 + (1 - \mathcal{E}) Q_{i,k} \tag{2.96}$$

Où $Q_{i,k}$ est la densité de flux incident provenant des autres surfaces et $R = \mathcal{E}_k \sigma T_k^4$, la densité de flux émis par la surface *k*.

Le flux net échangé est la différence entre le flux quittant la surface k (la radiosité$R_{0,k}$) et le flux incident$Q_{i,k}$.

$$\varphi_k = R_k - Q_{i,k} \tag{2.97}$$

Avec :

$$Q_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} F_{ij} R_j \tag{2.98}$$

Donc :

$$\varphi_k = \left(\frac{\mathcal{E}_k}{1-\mathcal{E}_k}\right)(\sigma T_k^4 - R_k) \tag{2.99}$$

Ou bien :

$$\varphi_k = R_k - \sum_{j=1}^{n} F_{kj}\, R_k \tag{2.100}$$

En identifiant les équations (2.99) et (2.100) on trouve :

$$R_k = \mathcal{E}_k \sigma T_k^4 + (1-\mathcal{E}) \sum_{j=1}^{n} F(k,j)\, R_j \tag{2.101}$$

Quand on introduit le symbole de Kronecker, l'équation (2.101) devient :

$$\mathcal{E}_k \sigma T_k^4 = \sum_{j=1}^{n} (\delta_{kj} - (1-\mathcal{E}) F_{kj}) R_j \tag{2.102}$$

Cette équation est généralement utilisée quand on connait la température T_k de toutes les surfaces.

Si par contre, on impose aux surfaces A_i des densités de flux de chaleur, alors les flux nets sont évalués sous la formulation :

$$\varphi_k = \sum_{j=1}^{n} \left(\delta_{kj} - F_{kj}\right) R_j \tag{2.103}$$

R_j : est la radiosité dimensionnelle de la surface $A_{i,}$ définie par :

$$\sum_{j=1}^{n} \left[\delta_{ij} - (1-\varepsilon_i) F_{ij}\right] R_j = \varepsilon_i \sigma T_i^4 \tag{2.104}$$

5.3.3 Adimensionnement du vecteur de radiosité et du flux radiatif

- *Adimensionnement de vecteur de radiosité*

  D'après l'équation (2.101) on a :

$$R_{\boldsymbol{i}} = \boldsymbol{\mathcal{E}} \sigma T_i^4 + (1-\mathcal{E}) \sum_{j} F_{ij} R_j \tag{2.105}$$

En dimensionnant la radiosité R_i par σT_0^4, on obtient :

$$\frac{R_{\boldsymbol{i}}}{\sigma T_0^4} = \boldsymbol{\mathcal{E}} \frac{T_i^4}{T_0^4} + (1-\mathcal{E}) \sum_{j} F_{ij} \frac{R_j}{\sigma T_0^4} \tag{2.106}$$

$$J_i = \boldsymbol{\varepsilon}\left[\frac{T_i}{T_0}\right]^4 + (1-\varepsilon)\sum_j F_{ij}J_j \tag{2.107}$$

Ou $J = \frac{R}{\sigma T_0^4}$ radiosité adimensionnelle

$$\frac{T_i}{T_0} = \frac{\mathrm{T_i} - T_0}{T_0} + \frac{T_0}{T_0} = \left[\frac{\mathrm{T_i} - T_0}{\Delta \mathrm{T}}.\frac{\Delta \mathrm{T}}{T_0} + 1\right] = [\theta_i.\theta_0 + 1] \tag{2.108}$$

$$J_i = \boldsymbol{\varepsilon}[\theta_i.\theta_0 + 1]^4 + (1-\varepsilon)\sum_{j=1} F_{ij}J_j \tag{2.109}$$

- *Adimensionnement du flux par* σT_0^4
  On a d'après (2.100) :

$$\varphi_r = \mathrm{R_i} - \sum F_{ij}R_j \tag{2.110}$$

L'adimensionnement du flux par σT_0^4 donne :

$$\frac{\varphi_r}{\sigma T_0^4} = \frac{R_i}{\sigma T_0^4} - \frac{\sum F_{ij}R_j}{\sigma T_0^4} \tag{2.111}$$

Donc

$$Q_r = \mathrm{J_i} - \sum F_{ij}J_i \tag{2.112}$$

Q_r: Flux adimensionnel.

La résolution du système (2.109) fournit le vecteur des radiosités $\mathrm{J_j}$, contenant les valeurs des radiosités des différentes surfaces élémentaires des parois de l'enceinte.

On utilise une des méthodes linéaires pour résoudre ce système (méthode directe ou itérative), et puisque la diagonale de la matrice A est différente de zéro, on peut utiliser une méthode directe, soit la méthode de **JACOBIE.**

Après la détermination de la radiosité, on peut facilement calculer le flux radiatif à chaque surface par l'expression :

$$Q_{r,i} = J_i - \sum_{j=1}^{n} F_{i-j}J_j \tag{2.113}$$

Ou bien :

$$Q_{r,i} = \sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij} - F_{i-j})J_j \tag{2.114}$$

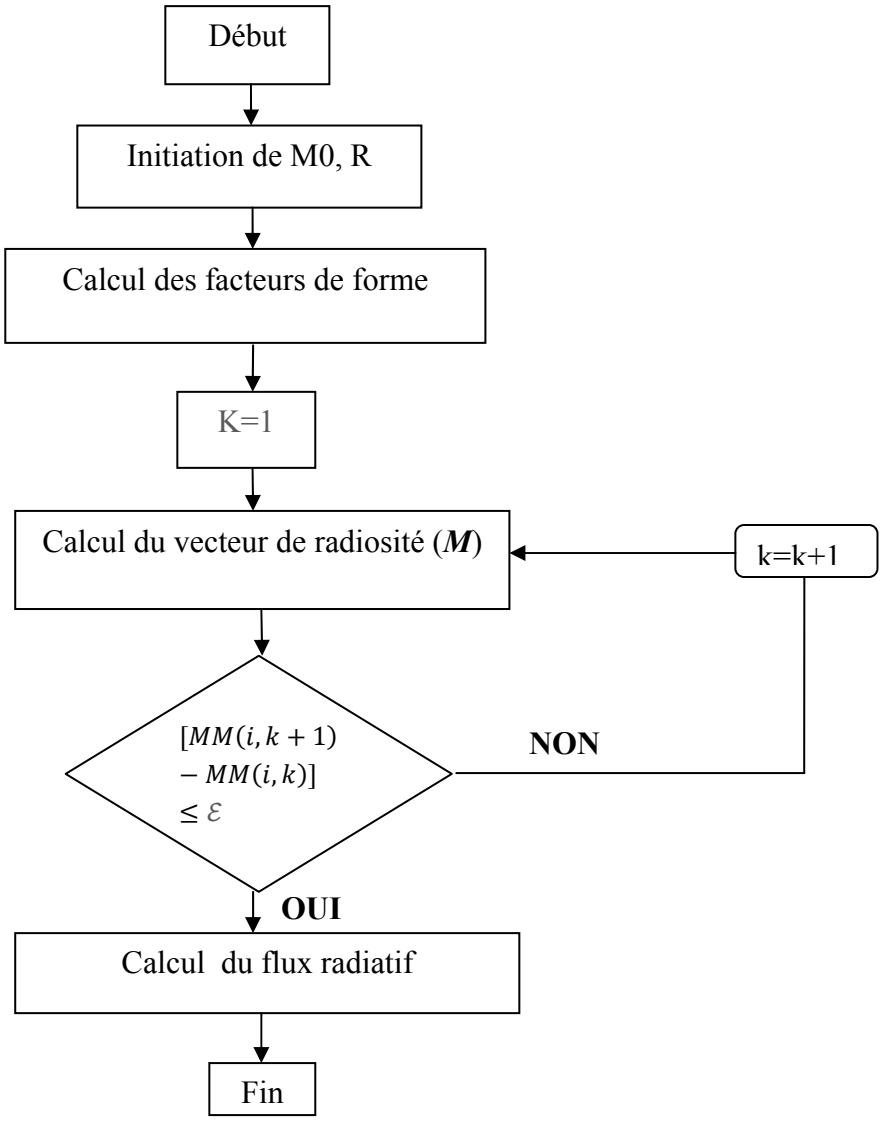
Cependant, on remarque qu'elles font également intervenir les températures de surface intérieures des différentes parois de l'enceinte, et ce à la puissance quatre.

L'ensemble des flux nets et des radiosités des parois est donc fortement couplé aux températures de surface. La détermination de ces grandeurs est donc conditionnée par la connaissance des températures de surface intérieures des parois de l'enceinte.

6. RESULTATS

On a développé un algorithme permettant de calculer les facteurs de forme dans une cavité carrée à 2 dimensions ou ces quatre surfaces sont discrétisées à un nombre N de nœuds. L'application de la technique itérative de Jacobi permet de résoudre l'équation de radiosité (2.93), et en fin l'équation (2.116) est utilisée pour déterminer le flux radiatif à chaque nœud de chaque surface.

6.1. Algorithme de calcul



6.2 Exemples de résultats

6.2.1. Estimation des facteurs de forme

Pour une surface (paroi) discrétisée à 5 nœuds.
Les valeurs de facteurs de forme des nœuds 1, 3, 4 et 5 avec tous les autres nœuds des quatre parois sont présentées aux tableaux suivants :

Tableau 2.1 : Facteurs de forme du nœud N°01 Pour une surface (paroi) discrétisée à 5 nœuds

La surface i	Les surfaces j	Le facteur de forme F (i , j)
1	1	F= 0.000000000000000E+000
1	2	F= 0.000000000000000E+000
1	3	F= 0.000000000000000E+000
1	4	F= 0.000000000000000E+000
1	5	F= 0.000000000000000E+000
1	6	F= 1.204305601243794E-002
1	7	F= 3.144251792009944E-002
1	8	F= 4.103847864481203E-002
1	9	F= 4.234095345241662E-002
1	10	F= 3.916320675392049E-002
1	11	F= 4.788561592253937E-002
1	12	F= 6.319262743837595E-002
1	13	F= 7.982089708453877E-002
1	14	F= 9.356288997446671E-002
1	15	F= 9.901951359278516E-002
1	16	F= 1.204305601243794E-002
1	17	F= 1.958601727535925E-002
1	18	F= 3.689515866570514E-002
1	19	F= 8.907279243665273E-002
1	20	F= 0.292893218813452
SOMME Fij= 1.00000000000000		

Tableau 2.2: Facteurs de forme du nœud N°03 Pour une surface (paroi) discrétisée à 5 nœuds

La surface i	La surface j	Le facteur de forme F (i , j)
3	1	F= 0.000000000000000E+000
3	2	F= 0.000000000000000E+000
3	3	F= 0.000000000000000E+000
3	4	F= 0.000000000000000E+000
3	5	F= 0.000000000000000E+000
3	6	F= 3.689515866570514E-002
3	7	F= 7.454276597539528E-002
3	8	F= 7.001736953125171E-002
3	9	F= 5.461268332743768E-002
3	10	F= 4.103847864481230E-002
3	11	F= 7.982089708453821E-002
3	12	F= 9.356288997446727E-002
3	13	F= 9.901951359278516E-002
3	14	F= 9.356288997446727E-002
3	15	F= 7.982089708453821E-002
3	16	F= 4.103847864481203E-002
3	17	F= 5.461268332743796E-002
3	18	F=7.001736953125171E-002
3	19	F=7.454276597539514E-002
3	20	F=3.689515866570528E-002
SOMME Fij= 1.00000000000000		

Tableau 2 .3: Facteurs de forme du nœud N°04 Pour une surface (paroi) discrétisée à 5 nœuds

La surface i	La surface j	Le facteur de forme F (i , j)
4	1	F= 0.000000000000000E+000
4	2	F= 0.000000000000000E+000
4	3	F= 0.000000000000000E+000
4	4	F= 0.000000000000000E+000
4	5	F= 0.000000000000000E+000
4	6	F= 8.907279243665273E-002
4	7	F= 0.114747633940147
4	8	F= 7.454276597539514E-002
4	9	F= 4.712164295684607E-002
4	10	F= 3.144251792009972E-002
4	11	F= 9.356288997446671E-002
4	12	F= 9.901951359278516E-002
4	13	F= 9.356288997446727E-002
4	14	F= 7.982089708453821E-002
4	15	F= 6.319262743837595E-002
4	16	F= 4.234095345241662E-002
4	17	F= 5.025253169416655E-002
4	18	F= 5.461268332743768E-002
4	19	F= 4.712164295684607E-002
4	20	F= 1.958601727535897E-002
SOMME Fij= 1.00000000000000		

Tableau 2 .4 : Facteurs de forme du nœud N°05 Pour une surface (parois) discrétisée à 5 nœuds

La surface i	La surface j	Le facteur de forme F (i , j)
5	1	F= 0.000000000000000E+000
5	2	F= 0.000000000000000E+000
5	3	F= 0.000000000000000E+000
5	4	F= 0.000000000000000E+000
5	5	F= 0.000000000000000E+000
5	6	F= 0.292893218813452
5	7	F= 8.907279243665273E-002
5	8	F= 3.689515866570528E-002
5	9	F= 1.958601727535897E-002
5	10	F= 1.204305601243794E-002
5	11	F= 9.901951359278516E-002
5	12	F= 9.356288997446727E-002
5	13	F= 7.982089708453821E-002
5	14	F= 6.319262743837595E-002
5	15	F= 4.788561592253937E-002
5	16	F= 3.916320675392049E-002
5	17	F= 4.234095345241606E-002
5	18	F= 4.103847864481230E-002
5	19	F= 3.144251792009972E-002
5	20	F= 1.204305601243794E-002
SOMME Fij= 1.00000000000000		

La somme des facteurs de forme est égale a l'unité, ce qui confirme la propriété 2 (La somme de tous les facteurs de forme pour une surface donnée est égale à l'unité.

Soit un environnement clos constitué de *n* surfaces A1, A2, ..., An. On a donc pour toute surface A_i de cet environnement (i allant de 1 à *n)*): $\sum_{k=1}^{N} F_{ik} = 1$

Tableau 2.5: Facteurs de forme du nœud N°02 Pour une surface (paroi) discrétisée à 10 nœuds

La surface i	La surface j	Le facteur de forme F (i , j)
2	1	F= 0.000000000000000E+000
2	2	F= 0.000000000000000E+000
2	3	F= 0.000000000000000E+000
2	4	F= 0.000000000000000E+000
2	5	F= 0.000000000000000E+000
2	6	F= 0.000000000000000E+000
2	7	F= 0.000000000000000E+000
2	8	F= 0.000000000000000E+000
2	9	F= 0.000000000000000E+000
2	10	F= 0.000000000000000E+000
2	11	F= 3.436305080566360E-003
2	12	F= 9.897091890651022E-003
2	13	F= 1.525198543497919E-002
2	14	F= 1.912167169533074E-002
2	15	F= 2.146844143327498E-002
2	16	F= 2.249759126921436E-002
2	17	F= 2.252269406761820E-002
2	18	F= 2.186117922459707E-002
2	19	F= 2.077929862098871E-002
2	20	F= 1.947595517877376E-002
2	21	F= 2.384135653800912E-002
2	22	F= 2.752051654444698E-002
2	23	F= 3.154396192572517E-002
2	24	F= 3.577681448085457E-002
2	25	F= 3.999358393574126E-002
2	26	F= 4.387781181673933E-002
2	27	F= 4.705203783014977E-002
2	28	F= 4.914389247189566E-002
2	29	F= 4.987562112088950E-002
2	30	F= 4.914389247189566E-002
2	31	F= 7.997956545394702E-003
2	32	F= 9.897091890651022E-003
2	33	F= 1.254428723913514E-002
2	34	F= 1.637535631174858E-002
2	35	F= 2.217625175158999E-002
2	36	F= 3.144251792009944E-002
2	37	F= 4.712164295684551E-002
2	38	F= 7.454276597539528E-002
2	39	F= 0.114747633940147
2	40	F= 8.907279243665273E-002
SOMME Fij= 1.00000000000000		

Tableau 2. 6 : Facteurs de forme du nœud N°09 Pour une surface (paroi) discrétisée à 10 nœuds

La surface i	La surface j	Le facteur de forme F (i , j)
9	1	F= 0.000000000000000E+000
9	2	F= 0.000000000000000E+000
9	3	F= 0.000000000000000E+000
9	4	F= 0.000000000000000E+000
9	5	F= 0.000000000000000E+000
9	6	F= 0.000000000000000E+000
9	7	F= 0.000000000000000E+000
9	8	F= 0.000000000000000E+000
9	9	F= 0.000000000000000E+000
9	10	F=0.000000000000000E+000
9	11	F= 8.907279243665245E-002
9	12	F= 0.114747633940147
9	13	F= 7.454276597539514E-002
9	14	F= 4.712164295684551E-002
9	15	F= 3.144251792009972E-002
9	16	F= 2.217625175158999E-002
9	17	F= 1.637535631174858E-002
9	18	F= 1.254428723913570E-002
9	19	F= 9.897091890650467E-003
9	20	F= 7.997956545395812E-003
9	21	F= 4.914389247189566E-002
9	22	F= 4.987562112088950E-002
9	23	F= 4.914389247189566E-002
9	24	F= 4.705203783014866E-002
9	25	F= 4.387781181674044E-002
9	26	F= 3.999358393574126E-002
9	27	F= 3.577681448085457E-002
9	28	F= 3.154396192572628E-002
9	29	F= 2.752051654444476E-002
9	30	F= 2.384135653801023E-002
9	31	F= 1.947595517877376E-002
9	32	F= 2.077929862098871E-002
9	33	F= 2.186117922459707E-002
9	34	F= 2.252269406761875E-002
9	35	F= 2.249759126921436E-002
9	36	F= 2.146844143327442E-002
9	37	F= 1.912167169533074E-002
9	38	F= 1.525198543497974E-002
9	39	F= 9.897091890650467E-003
9	40	F= 3.436305080566360E-003
SOMME Fij= 1.00000000000000		

Le programme a été validé pour des nombres de nœuds plus élevés.

6.2.2. Calcul du vecteur de radiosité et du flux radiatif

Cet exemple est utilisée pour calculer le vecteur de radiosité (M) et le flux radiatif Q_r dans une cavité carrée différentièllement chauffée où les quatre parois internes sont supposées grises, diffuses et opaques et ont la même valeur d'émissivité, ε :

en considérant la température de référence $T_0 = 293.5K$

- La différence de température : $\Delta T = T_C - T_f = 10$
- On a donc : $T_C + T_f = 587$ K et $T_C - T_f = 10$
- Ce qui donne la température de la paroi chaude : $T_C = 298.5$ K
- La température de la paroi froide : $Tf = 288.5$ K
- Et par la suite les températures réduites (adimensionnelles) des parois chaude et froide :

$$\theta_c = \frac{T_C - T_0}{\Delta T} = \frac{298.5 - 293.5}{10} = 0.5$$

$$\theta_f = \frac{T_f - T_0}{\Delta T} = \frac{288.5 - 293.5}{10} = -0.5$$

Dans ces conditions on prend une valeur de réflectivité (ρ) des parois constante et égale à 0.4 et on discrétise chaque paroi à 4 nœuds, les valeurs des vecteurs de radiosité et du flux radiatif de chaque nœud des quatre parois sont illustrées dans les tableaux ci- dessous :

Tableau 2.7 : Radiosité des parois (Nombre d'itération égal à 7)

le nœud (i)	la radiosité J
1	1.002665
2	1.000035
3	0.9974262
4	0.9948322
5	0.9639111
6	0.9649513
7	0.9649513
8	0.9639111
9	0.9948322
10	0.9974262
11	1.000035
12	1.002665
13	1.035506
14	1.034502
15	1.034502
16	1.035506

Tableau 2.8 : le flux radiatif émis par les parois

Le nœud (i)	Le flux radiatif Qr
1	-6.4583370E-03
2	-2.5149276E-03
3	1.3972336E-03
4	5.2863131E-03
5	-4.7956534E-02
6	-4.9517449E-02
7	-4.9517490E-02
8	-4.7956567E-02
9	5.2863234E-03
10	1.3972644E-03
11	-2.5150639E-03
12	-6.4584487E-03
13	4.9128532E-02
14	5.0635338E-02
15	5.0635278E-02
16	4.9128473E-02

Le programme a été validé pour des nombres de nœuds plus élevés.

7. CONCLUSION

Nous avons développé un algorithme utilisant une solution analytique pour le calcul des facteurs de forme dans une cavité bidimensionnelle dont les surfaces sont divisées en segments. La méthode de radiosité est utilisée pour résoudre l'équation représentant le transfert de chaleur par rayonnement surfacique et pour calculer les flux radiatifs nets ainsi que les radiosités des parois. Ces dernières (radiosités) sont fortement couplées aux températures intérieures des parois de l'enceinte.

Cet algorithme nous permet de traiter le couplage rayonnement-convection qui est l'objet du chapitre 4.

1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous présentons dans un premier temps les équations, modélisant la convection naturelle, qui expriment les lois de conservation de masse (de continuité), de la quantité de mouvement (Navier-Stokes) et d'énergie. Beaucoup d'ouvrages de la mécanique des fluides et de transfert thermique [1, 3, 4, 15] ont bien décrit les développements mathématiques nécessaires à l'obtention de ces équations**.** Dans un deuxième temps, on applique ces équations au cas d'une cavité plane, avec la discussion de la méthode numérique utilisée pour la résolution de ces équations.

2. FORMULATION MATHEMATIQUE

Pour résoudre un problème de convection, il faut déterminer en tous point et à tout instant les grandeurs caractéristiques du fluide qui est les suivantes :

- La vitesse $\overrightarrow{V}$ définie par les trois composantes (U, V, W)
- La masse volumique ρ.
- La pression P.
- La température T.

Pour calculer ces fonctions, il faut disposer de six équations. Nous allons donc établir des relations traduisant les principes de conservation dans la mécanique et de la thermodynamique et nous obtiendrons les équations de conservation.

2.1. Hypothèses de calcul

- le transfert de masse est négligeable.
- l'écoulement est laminaire bidimensionnel.
- la dissipation visqueuse est négligeable.
-pas des sources de chaleur interne.
- le fluide est Newtonien, incompressible et obéissant à l'approximation de Boussinesq, cette approximation consiste à considérer que la masse volumique du fluide ne varie que dans le terme des forces de volume (dilatation), ce qui donne naissance au phénomène de la convection thermique.
- la chaleur dégagée par frottements visqueux est négligeable devant tout autre phénomène en raison des faibles vitesses rencontrées en convection naturelle.
- le milieu est supposé transparent au rayonnement thermique ; et pas de production volumique de chaleur.

2.2. Equations générales de transport

2.2.1. Equation de continuité

L'équation de continuité traduit le principe de la conservation de la masse : l'augmentation de la masse de fluide, contenue dans un volume donné pendant un certain temps, doit être égal à la somme des masses du fluide qui y entrent diminuée de celle qui sort. Le plus souvent il n'y a ni diminution, ni augmentation de masse de fluide au cours du mouvement. L'équation de continuité s'écrit donc :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho div\,\vec{V} = \rho q_V \tag{3.1}$$

q_V : Le débit des sources ou des puits par unité de volume.

Pour un fluide incompressible sans sources ni puits on a : $div\,\vec{V} = 0$

2.2.2. Equations de conservation de la quantité de mouvement

L'application de la deuxième loi fondamentale de la mécanique à une particule fluide en mouvement mène aux équations de conservation de la quantité de mouvement. Pour un écoulement incompressible (ρ=const) à viscosité constante (μ=const), les équations de Navier-Stokes s'écrivent comme suit :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho'\vec{F} - \overrightarrow{grad}\,P + \mu\Delta\vec{V} \tag{3.2}$$

Avec :

$\vec{F}$: Les forces massiques

ρ' : Variation de masse volumique due à la convection naturelle

$\mu\Delta\vec{V}$: Forces de viscosité (contraintes)

$\overrightarrow{grad}\,P$: Force de pression.

2.2.3. Equation de conservation de l'énergie

Le problème consiste à appliquer le 1er principe de la thermodynamique à un fluide en mouvement. L'équation générale de conservation de l'énergie s'écrit pour un fluide Newtonien sans sources ni puits :

$$\rho C_P \frac{dT}{dt} = div\left(\lambda\overrightarrow{grad}\,T\right) + T\beta_t \frac{dP}{dt} + q + \varphi \tag{3.3}$$

Avec φ : fonction de dissipation regroupant tous les termes contenant la viscosité μ, définie par :

$$\varphi = -\frac{2}{3}\mu(div\overrightarrow{U})^2 + 2\mu\varepsilon_{ij}\frac{\partial U_i}{\partial X_j} \qquad (3.4)$$

q : est la source interne (réaction chimique, …etc.)

3. ETUDE D'UNE CAVITE CARREE

Dans ce travail nous étudions la convection naturelle dans une enceinte fermée parallélépipédique de section droite carrée et suffisamment allongée suivant l'axe horizontale z, qui est perpendiculaire au plan de la figure (3.1). De plus, numériquement, les autres parois dites « passives » sont en général considérées adiabatiques, ou plus rarement parfaitement conductrices.

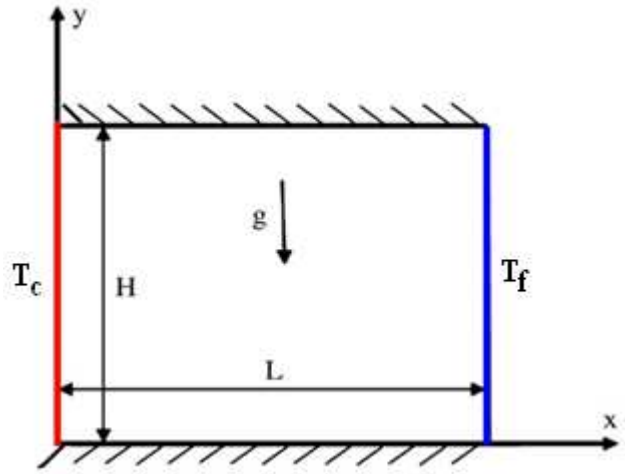


Figure 3.1 : Schéma du modèle physique utilisé

On suppose par conséquent, que le problème peut être comme bidimensionnel, l'enceinte est de largeur suivant l'axe *x* égale à la hauteur suivant l'axe *y*.

Avant l'instant initial nous supposons l'air au repos dans l'enceinte, à une température moyenne $T_0 = (Tc + Tf) / 2$.

Avec Tc : Température de la paroi chaude; et T_f : Température de la paroi froide

A l'instant initial, pris arbitrairement, l'enceinte considérée est différentièllement et uniformément chauffée, de sorte que la paroi gauche est maintenue chaude, alors que la paroi droite est maintenue froide.

La température de référence choisie est $T_0 = 0$.

3.1 Formulation du problème

En se plaçant dans le cadre des hypothèses précédentes (§2.1), les équations en coordonnées cartésiennes sont données comme suit :

3.1.1. Equation de continuité

$$\frac{\partial U}{\partial X}+\frac{\partial V}{\partial Y}=0 \tag{3.5}$$

3.1.2. Equations de conservation de la quantité de mouvement

Selon l'axe ***x*** :

Les forces massiques sont nulles, on a donc :

$$\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial X}+V\frac{\partial U}{\partial Y}=\nu\left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}\right)-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial X} \tag{3.6}$$

Selon l'axe ***y*** :

A cause de la poussé d'Archimède (en convection naturelle) : $\rho' = \rho_0 - \rho$

Les forces massiques ne sont dues qu'à l'accélération de la pesanteur.

$$\rho\frac{dV}{dt}=(\rho_0-\rho)g+\mu\Delta V-\frac{\partial P}{\partial Y} \tag{3.7}$$

ρ_0 : est la masse volumique loin des parois.

En convection naturelle la masse volumique du fluide est variable, si on utilise l'approximation de Boussinesq :

$$\rho=\rho_0\left(1-\beta(T-T_0)\right) \tag{3.8}$$

Et en supposant que ρ reste constante dans les autres termes ($\rho = \rho_0$), on obtient :

$$\frac{\partial V}{\partial t}+U\frac{\partial V}{\partial X}+V\frac{\partial V}{\partial Y}=g\beta(T-T_0)+\nu\left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}\right)-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial Y} \tag{3.9}$$

Avec β : coefficient de dilatation volumique thermique.

3.1.3 Equation de conservation de l'énergie

Pour un système bidimensionnel (o, x, y) :

$$div\left(\overrightarrow{grad}\,T\right)=\frac{\partial^2 T}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} \tag{3.10}$$

Et $a=\frac{\lambda}{\rho C_P}$: diffusivité thermique.

L'équation devient donc

$$\frac{\partial T}{\partial t}+U\frac{\partial T}{\partial X}+V\frac{\partial T}{\partial Y}=a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial Y^2}\right) \tag{3.11}$$

3.2. Choix des conditions initiales et aux limites

A chaque problème donné, on adjoint les conditions initiales et les conditions aux limites. Concernant le cas d'un système plan ces conditions sont données par :

- Condition initiale **:** t = 0

$$U = 0 \qquad V = 0 \qquad T(0, X, Y) = T_0 \tag{3.12}$$

- Nous imposons une condition de non-glissement des particules fluides sur les parois de l'enceinte rigide et imperméable, de sort que :

  U = V = 0 sur ces frontières :

$$\begin{cases} U(X=0,Y) = V(X=0,Y) = 0 \\ U(X=L,Y) = V(X=L,Y) = 0 \\ U(X,Y=0) = V(X,Y=0) = 0 \\ U(X,Y=H) = V(X,Y=H) = 0 \end{cases} \tag{3.13}$$

- Concernant la condition de stationnarité des températures chaude et froide sur les parois verticales, on pose :

$$\begin{cases} T = T_c & pour\ X = 0, 0 \le Y \le H \\ T = T_f & pour\ X = L, 0 \le Y \le H \end{cases} \tag{3.14}$$

- Pour les parois adiabatiques horizontales on pose :

$$\left.\frac{\partial T}{\partial Y}\right|_{Y=0,H} = 0 \tag{3.15}$$

3.3. Simplification des équations

3.3.1. Adimensionnement des équations

L'emploi des variables réduites dans les équations permet de s'approcher de plus prés de la réalité des phénomènes physiques, car leur existence et leur évolution sont indépendantes du système d'unités de mesure utilisé pour les étudier.

On peut dire aussi, que ces variables permettent d'obtenir des informations générales qui jouent un rôle prépondérant dans les similitudes. En effet, pour ramener les équations phénoménologiques sous forme adimensionnelle, il est nécessaire de définir des grandeurs caractéristiques.

Désignons par H une dimension linéaire caractéristique de l'écoulement, et par V_0 la vitesse de référence, et par t_0 un temps de référence, ΔT_0 étant l'écart de température de référence, et P_0 une pression de référence :

$$V_0 = \sqrt{g\beta H \Delta T_0} \;\; ; \; t_0 = \frac{H}{V_0} ; \quad P_0 = \rho_0 V_0^2 \tag{3.16}$$

Les variables réduites sont données par :

$$x = \frac{X}{H} \quad ; \; y = \frac{Y}{H} \quad ; \quad u = \frac{U}{V_0} \quad ; \quad v = \frac{V}{V_0} \quad ; \; \tau = \frac{t}{t_0} \; ; \theta = \frac{T - T_0}{T_c - T_f} \quad ; \quad P' = \frac{P}{P_0} \tag{3.17}$$

Les échelles caractéristiques utilisées pour adimensionné les équations sont analogues à celles des références [14-8-54].

Ce changement de variables effectué sur les équations de conservation de la masse, de quantité de mouvement et d'énergie, nous conduit aux équations réduites suivantes

a- L'équation de continuité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{3.18}$$

b- Les équations de quantité de mouvement

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \sqrt{\frac{Pr}{Ra}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial P'}{\partial x} \tag{3.19}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = \theta + \sqrt{\frac{Pr}{Ra}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial P'}{\partial y} \tag{3.20}$$

c- L'équation de l'énergie

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + u\frac{\partial \theta}{\partial x} + v\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{RaPr}}\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}\right) \tag{3.21}$$

Avec :

Ra : *le nombre de Rayleigh*

C'est le rapport entre le phénomène moteur du mouvement (la poussée d'Archimède) et les phénomènes résistants (diffusion de chaleur et frottement visqueux) dans le cas où l'élément moteur du mouvement est un écart de température, ce qui est tout le temps le cas dans des cavités différentièllement chauffées, ce nombre s'exprime de la façon suivante :

$$Ra = \frac{g\beta\Delta T_0 H^3}{av} \tag{3.22}$$

Pr : *le nombre de Prandtl*

C'est le de rapport entre la diffusivité de quantité de mouvement (viscosité cinématique) et la diffusivité thermique.

$$Pr = \frac{\nu}{a} \tag{3.23}$$

3.3.2. Formalisme Vorticité-Fonction de courant

L'intérêt d'utiliser ce formalisme est de réduire le nombre d'équations et de faire sortir des variables dominantes [36]. Dans le cas d'un système cartésien bidimensionnel on définit :

La vorticité :

$$\Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \tag{3.24}$$

La fonction de courant ψ, définie par

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial y} = u \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial x} = -v \end{cases} \tag{3.25}$$

On a donc :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\Omega \tag{3.26}$$

$$\Omega + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \tag{3.27}$$

Si on dérive l'équation (3.19) par rapport à ***y*** et l'équation (3.20) par rapport à ***x***, et en se servant de l'équation de continuité, la soustraction des 2 équations obtenues nous donne :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + u\frac{\partial \Omega}{\partial x} + v\frac{\partial \Omega}{\partial y} = -\frac{\partial \theta}{\partial x} + \sqrt{\frac{Pr}{Ra}}\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2}\right) \tag{3.28}$$

L'équation de l'énergie est donnée par l'expression (2.12) :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + u\frac{\partial \theta}{\partial x} + v\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{RaPr}}\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}\right) \tag{3.29}$$

Récapitulation des équations à résoudre en coordonné cartésienne :

$\dfrac{\partial \psi}{\partial \tau} = \Omega + \boldsymbol{\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}}$ **Fonction de courant**

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + u\frac{\partial \Omega}{\partial x} + v\frac{\partial \Omega}{\partial y} = -\frac{\partial \theta}{\partial x} + \sqrt{\frac{Pr}{Ra}}\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2}\right) \quad \textbf{Equation de vorticité}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + u\frac{\partial \theta}{\partial x} + v\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{RaPr}}\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}\right) \quad \textbf{Equation d'énergie}$$

3.4. Adimensionnement des conditions aux limites

- **A l'instant initial : $\tau = 0$**

$$\psi(x,y) = 0\ ;\ \Omega(x,y,0) = 0 \quad ; \quad \Theta(x,y,0) = 0 \tag{3.30}$$

- Pour la température sur les frontières du domaine physique :

$$\begin{cases} \theta = 1 \ \ pour\ x = 0, 0 \le y \le H \\ \theta = -1 \ \ pour\ x = L, 0 \le y \le H \end{cases} \tag{3.31}$$

- Alors que pour les parois adiabatiques :

$$\left.\frac{\partial \Theta}{\partial y}\right|_{y=0,1} = 0 \tag{3.32}$$

Pour procéder au développement analytique concernant le phénomène de la convection naturelle, nous avons été conduits à établir les quatre équations de conservation sous forme simplifiée en se basant sur des hypothèses simplificatrices, et sur le formalisme vorticité-fonction de courant. L'analyse théorique entreprise a permis de réduire le nombre de variable à trois (la température θ, la fonction de courant ψ, et la vorticité Ω), et de montrer que le système à résoudre est fonction de deux grandeurs principales : le nombre de Prandtl Pr, le nombre de Rayleigh Ra.

3.5. Résolution numérique des équations

Depuis quelques années, le développement des ordinateurs a encouragé les scientifiques à résoudre des problèmes de plus en plus complexes pour lesquels des solutions analytiques ne peuvent être trouvées. Ces types de problèmes sont généralement modélisés par des équations aux dérivées partielles non linéaires. Pour obtenir une solution numérique, ces problèmes doivent être discrétisés en transformant les équations différentielles en systèmes d'équations algébriques linéarisés par une méthode de discrétisation avant de les résoudre par des méthodes directes ou itératives. Nous nous intéressons dans ce paragraphe à la résolution numérique des équations aux dérivées partielles de la fonction de courant, de vorticité, et d'énergie.

L'intégration numérique des équations gouvernantes consiste en la détermination d'un certain nombre de variable (θ, ψ, Ω) à des points précis appelés « nœuds ». La méthode numérique conduit à un système d'équations algébriques ou les inconnus sont justement les valeurs des variables physiques aux différents nœuds. L'intérêt de l'intégration numérique consiste à remplacer une information continue par une information discrétisée qui est très facile à manipuler. Les trois grandes méthodes de discrétisation utilisées dans les codes de calcul sont : les volumes finis, les différences finies et les éléments finis. Pour résoudre le système d'équations présenté précédent, nous avons choisi la méthode des différences finies.

3.5.1. Représentation de la méthode des différences finies

La méthode des différences finies consiste à approximer les dérivées des équations décrivant les phénomènes physiques au moyen des développements de Taylor et se déduit directement de la définition de la dérivée. Elle est due aux travaux de plusieurs mathématiciens du 18ème siècle (Euler, Taylor, Leibniz...). [11-13, 18-20]

Soit $u(x, y, z, t)$ une fonction de l'espace et du temps. Par définition de la dérivée, on a :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x,y,z,t)-u(x,y,z,t)}{\Delta x} \tag{3.33}$$

Si Δx est petit, un développement de Taylor de $u(x + \Delta x, y, z, t)$ au voisinage de x donne :

$$u(x+\Delta x,y,z,t) = u(x,y,z,t) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} u(x,y,z,t) + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y,z,t) + \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x,y,z,t) + \cdots \tag{3.34}$$

En tronquant la série au premier ordre en Δx, on obtient :

$$\frac{u(x+\Delta x,y,z,t)-u(x,y,z,t)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z,t) + O(\Delta x) \tag{3.35}$$

L'approximation de la dérivée $\frac{\partial u}{\partial x}(x)$ est alors d'ordre 1 indiquant que l'erreur de troncature $O(\Delta x)$ tend vers zéro comme la puissance première de Δx.

Définition : la puissance de Δx avec laquelle l'erreur de troncature tend vers zéro est appelée l'ordre de la méthode.

3.5.2. Le maillage

Nous restreindrons notre étude au cas d'un problème plan, et d'un domaine rectangulaire Γ. Nous choisissons évidemment les directions $\vec{x}$ et $\vec{y}$ parallèles aux cotés du rectangle. Nous traçons alors un réseau de droites parallèles à l'axe *x*, équidistantes de pas *k (Δx)*, ainsi qu'un réseau de droites parallèles a l'axe *y*, équidistantes de pas *h (Δy)*. Les intersections des deux réseaux sont les points ou les nœuds $m_{i,j}$ de coordonnées *(ih, jk)* tels que $i \in Z$ et $j \in Z$.

Les points $m_{i,j}$ constituent l'ensemble $hZ \times kZ$, qu'on appelle « maillage ».

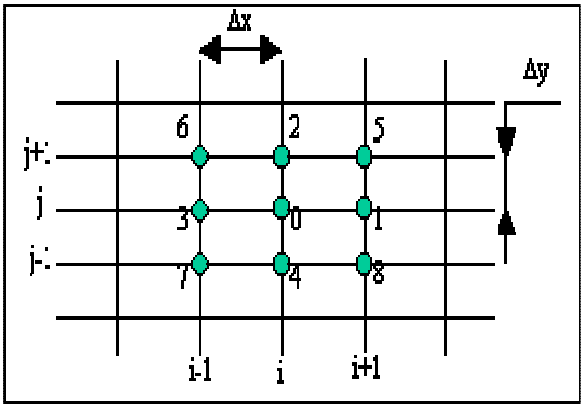


Figure 3.2 : *Maillage utilisé en différences finies*

3.5.3. Approximation des dérivées par des différences finies

Considérons un point $\boldsymbol{m_{i,j}}$ intérieur au domaine Γ, ainsi que les points voisins du maillage.

Les pas *h et k* sont supposés petits par rapport aux dimensions de Γ, c'est-à-dire par rapport à l'échelle de variation d'une grandeur « *u* ». On peut estimer que *u* varie peu lorsqu'on passe de $\boldsymbol{m_{i,j}}$ aux points voisins et que cette variation doit s'écrire en première approximation à l'aide des dérivées partielles de *u* au point $\boldsymbol{m_{i,j}}$ grâce au théorème des accroissements finis :

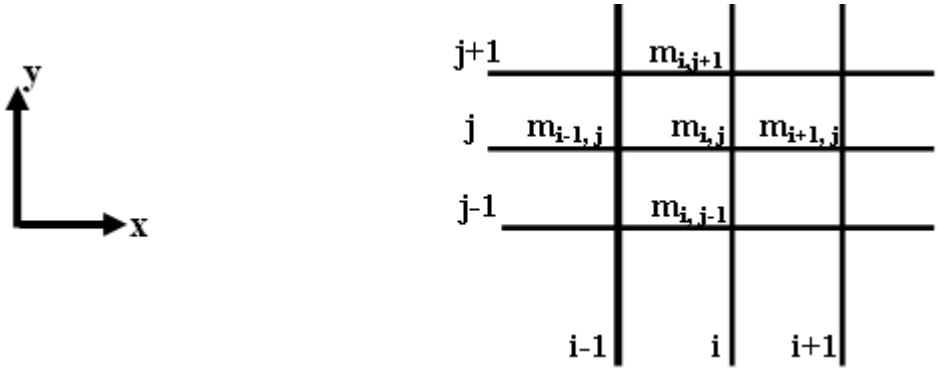


Figure 3.3 : *Discrétisation du domaine et implantation de la maille*

Soit f une fonction d'une variable *x*, de classe C^4. Alors, si *h* tend vers 0, on a :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + O(h^4) \quad (3.36)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + O(h^4) \quad (3.37)$$

D'où

- $f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + o(h)$ (3.38)
- $f'(x) = \frac{-f(x-h)+f(x)}{h} + o(h)$ (3.39)
- $f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} + o(h^2)$ (3.40)
- $f''(x) = \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} + o(h^2)$ (3.41)

Si la grandeur *u* est de classe C^4 dans Γ, en appliquant (3.37), (3.38) et (3.39), (3.40) dans chacune des directions $\vec{x}$ et $\vec{y}$ on peut déduire :

- l'approximation d'une dérivée première par des différences finies décentrées à droite :

$$u_x(m_{i,j}) = \frac{u(m_{i+1,j}) - u(m_{i,j})}{h} + o(h) \quad (3.42)$$

- l'approximation d'une dérivée première par des différences finies décentrées à gauche :

$$u_x(m_{i,j}) = \frac{u(m_{i-1,j}) - u(m_{i,j})}{h} + o(h) \quad (3.43)$$

- l'approximation d'une dérivée première par des différences finies centrées :

$$u_x(m_{i,j}) = \frac{u(m_{i+1,j}) - u(m_{i-1,j})}{2h} + o(h^2) \quad (3.44)$$

- l'approximation d'une dérivée seconde par des différences finies centrées :

$$\Delta u(m_{i,j}) = \frac{u(m_{i+1,j})-2u(m_{i,j})+(m_{i-1,j})}{h^2} + \frac{u(m_{i,j+1})-2u(m_{i,j})+(m_{i,j-1})}{k^2} + o(h^2, k^2) \quad (3.45)$$

Au lieu de chercher *u* dans Γ vérifiant l'équation différentielle et les conditions aux limites considérées, nous cherchons $\hat{u}$ dans la partie (hZ× kZ) du maillage situé dans Γ vérifiant une équation « proche » de l'équation considérée et des conditions aux limites « proches » des conditions considérées. On peut définir ainsi un problème discret $\hat{P}$ « proche » du problème continu P.

3.5.4. Quelques schémas aux différences finies

Considérons par exemple le problème monodimensionnel de transfert de chaleur dans une barre de 1m de longueur [19]. L'équation de la diffusion de chaleur est définit par :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.46}$$

Désignons par *h et k* successivement les pas d'espace et de temps. On utilise une grille constituée des points m_j^n de coordonnées *(jh, nk)* dans le plan *(x, t).*

On peut utiliser deux approches pour discrétiser cette équation de la chaleur. La première dite explicite utilise une discrétisation au nœud x_i et à l'itération courante *n* :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^n = \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^n \tag{3.47}$$

Et la seconde dite implicite utilise une discrétisation au nœud x_i et à l'itération $n + 1$:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{n+1} = \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^{n+1} \tag{3.48}$$

a- Schéma explicite

Pour discrétiser l'équation de la chaleur (3.47) en une grille des points m_j^n, on utilise la différence décentrée pour la dérivée en temps $\frac{\partial u}{\partial t}$ *:*

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} + o(k) \tag{3.49}$$

Pour la dérivée en espace, on utilise la différence finie centrée :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^n = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} + o(h^2) \tag{3.50}$$

D'où le schéma appelé explicite :

$$\hat{u}_j^{n+1} = \hat{u}_j^n + \frac{\alpha k}{h^2}\left[\hat{u}_{j+1}^n - 2\hat{u}_j^n + \hat{u}_{j-1}^n\right] \tag{3.51}$$

Le schéma (3.51) est explicite en sens que, pour calculer $\hat{u}_j^{n+1}$ en un point j, il suffit de remplacer explicitement les quantités figurant au second membre de (3.51) par les valeurs (connues et stockées en mémoire). Le schéma explicite n'est pas stable, mais facile pour l'exécution.

b- Le schéma implicite

La discrétisation de la dérivée en temps et de la dérivée en espace peut être appliquée au niveau *(n+1)* plutôt qu'au niveau *(n).* On a alors :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^{n+1} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} + o(k) \tag{3.52}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^{n+1} = \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} + o(h^2) \tag{3.53}$$

D'où le schéma appelé totalement implicite :

$$\hat{u}_j^{n+1} = \hat{u}_j^n + \frac{\alpha k}{h^2}\left[\hat{u}_{j+1}^{n+1} - 2\hat{u}_j^{n+1} + \hat{u}_{j-1}^{n+1}\right] \tag{3.54}$$

Avec le schéma implicite, il n'est pas possible de calculer $\hat{u}^{n+1}$ pour une seule valeur de *j* : les inconnues $\hat{u}_j^{n+1}$ sont liées entre elles par autant d'équations de type (3.54), en un système linéaire qu'il s'agit de résoudre. Et cela coûte cher. Mais on remplace le schéma explicite par le schéma implicite pour une raison de stabilité. Le schéma implicite est inconditionnellement stable.

c- le schéma de Crank-Nicolson

On peut faire une moyenne entre les deux schémas précédents : le schéma implicite et le schéma explicite, ce qui donne le schéma de Crank-Nicolson :

$$\hat{u}_i^{n+1} = \hat{u}_j^n + \frac{\alpha k}{2h^2}\left(\hat{u}_{j+1}^n - 2\hat{u}_j^n + \hat{u}_{j-1}^n + \hat{u}_{j+1}^{n+1} - 2\hat{u}_j^{n+1} + \hat{u}_{j-1}^{n+1}\right) \tag{3.55}$$

Ce schéma est également implicite, donc aussi couteux que le schéma implicite. Mais il a l'avantage d'être précis au second ordre.

d- Schéma UPWIND

Pour illustrer cette méthode, on considère l'équation d'onde linéaire unidimensionnelle suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{3.56}$$

Cette équation décrit une vague propageant dans la direction x, avec une vitesse *a*.

Considérant un point de grille typique *i*, dans un domaine unidimensionnel, il y a deux directions liées au point *i*, à gauche (*i-1)* et à droite ((i+1).

Si *a* est positif, le côté gauche s'appelle le côté *UPWIND*, et le côté droit est le côté vent arrière.

De même, si *a* est négatif, le côté gauche s'appelle le côté vent arrière et le côté droit est le côté *UPWIND*.

- *Schéma UPWIND de premier ordre*

L'arrangement UPWIND le plus simple possible est l'arrangement de premier ordre, l'équation précédente (3.56) s'écrit :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0 \qquad pour\ \ a > 0 \tag{3.57}$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = 0 \qquad \text{pour} \quad a < 0 \tag{3.58}$$

On définit

$$\begin{cases} a^+ = \max(a, 0) \\ a^- = \min(a, 0) \end{cases} \tag{3.59}$$

Et

$$\begin{cases} u_x^- = \dfrac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} \\ u_x^+ = \dfrac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} \end{cases} \tag{3.60}$$

Les deux équations (3.57) et (3.58) peuvent être combinées et écrites sous la forme compacte suivante :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -[a^+ u_x^- + a^- u_x^+] \tag{3.61}$$

L'équation (3.61) est une manière générale d'écrire de n'importe quel arrangement de type *UPWIND.*

Le schéma *UPWIND* est stable si la condition suivante de l'état de Courant–Friedrich–Lewy *(CFL)* est satisfaite :

$\mathrm{C} = \left|\frac{a\,\Delta t}{\Delta \mathrm{x}}\right| \leq 1.$

Posons :

$$\begin{cases} a^+ = \dfrac{1}{2}(a + |a|) \\ a^- = \dfrac{1}{2}(a - |a|) \end{cases} \tag{3.62}$$

L'équation (3.61) devient :

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}=-\frac{1}{2\Delta x}[(a+|a|)(u_i^n-u_{i-1}^n)+(a-|a|)(u_{i+1}^n-u_i^n)] \qquad (3.63)$$

On a donc :

$$u_i^{n+1}-u_i^n=-\frac{\Delta t}{2\Delta x}[(a+|a|)(u_i^n-u_{i-1}^n)+(a-|a|)(u_{i+1}^n-u_i^n)] \qquad (3.64)$$

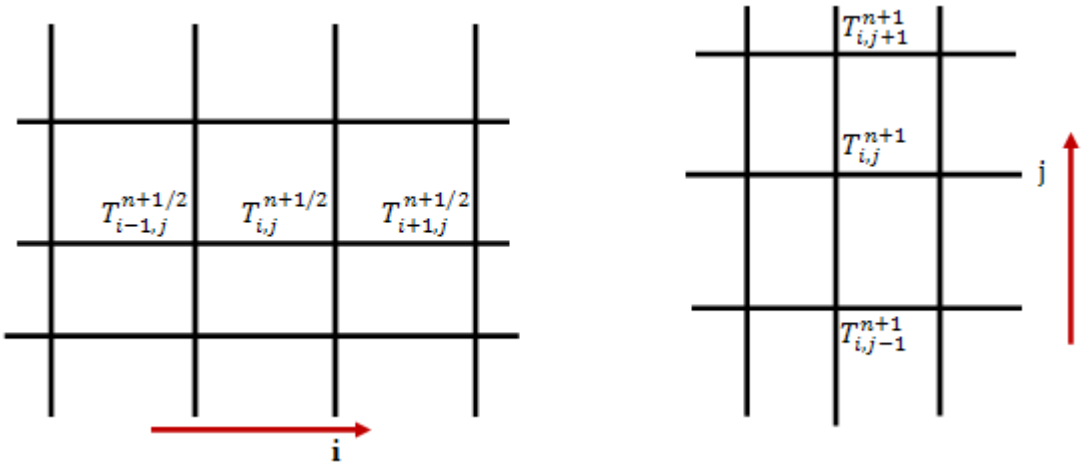
$$u_i^{n+1}-u_i^n=-\frac{\Delta t}{2\Delta x}[-(a+|a|)u_{i-1}^n)+2|a|u_i^n+(a-|a|)(u_{i+1}^n] \qquad (3.65)$$

3.5.5 Méthode des directions alternées (ADI)

Il s'agit d'une méthode implicite du type prédicteur-correcteur [15, 16,19, 20]. La méthode ADI (Alterning Direction Implicite) est applicable en deux étapes : pour la première étape (prédicteur), elle est implicite dans la direction *x* et explicite dans la direction *y*. Pour la seconde étape (correcteur), la méthode ADI est explicite dans la direction *x*, et implicite dans la direction *y*. (Figure 3.4)

Pendant la première étape les valeurs aux nœuds *(i, j)* sont connues à l'instant *(n)* mais inconnues à l'instant $(n+\frac{1}{2})$. Les valeurs inconnues sont associées à la direction *x* seulement (c'est à dire *j* fixe). Les valeurs à l'instant inconnu $(n+\frac{1}{2})$ dans tous les nœuds de maillage sont données par la résolution des systèmes d'équation pour $i=2,\ldots, i_{max-1}$ et pour chaque *j* tel que $j=2,\ldots, j_{max-1}$.

Dans la second étape les valeurs aux nœuds *(i, j)* sont inconnues à l'instant *(n+1)*, mais connues à l'instant $(n+\frac{1}{2})$. On obtient les valeurs de tous les nœuds à l'instant inconnu *(n+1)* par la résolution des systèmes d'équations pour $j=2,\ldots, j_{max-1}$ et pour chaque *i* tel que $i=2,\ldots, i_{max-1}$. Les valeurs des nœuds à l'instant *(n+1)* sont associées à la direction *y* seulement (c'est-à-dire *i* fixe).



x Direction implicite *y Direction implicite*

Étape 1 *Étape 2*

Figure 3.4 : *Discrétisation du domaine et implantation des mailles dans la direction x (étapes 1) et dans la direction y (étape 2)*

Pour illustrer le principe le la méthode ADI on traite l'exemple de l'équation de la diffusion de la chaleur (3.46) dans un système bidimensionnel :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{3.66}$$

On discrétise l'équation précédente par la méthode ADI, on obtient :

Première étape – Prédicteur

$$\frac{u_{i,j}^{n+1/2} - u_{i,j}^{n}}{\Delta t/2} = \alpha \frac{u_{i+1,j}^{n+1/2} - 2u_{i,j}^{n+1/2} + u_{i-1,j}^{n+1/2}}{h^2} + \alpha \frac{u_{i,j+1}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i,j-1}^{n}}{k^2} \tag{3.67}$$

Seconde étape - Correcteur

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta t/2} = \alpha \frac{u_{i+1,j}^{n+1/2} - 2u_{i,j}^{n+1/2} + u_{i-1,j}^{n+1/2}}{h^2} + \alpha \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{k^2} \tag{3.68}$$

En posant $s = \frac{\alpha \Delta t}{2h^2}$ et $s' = \frac{\alpha \Delta t}{2k^2}$, les équations deviennent :

Première étape – Prédicteur

$$-s u_{i-1,j}^{n+1/2} + (1+2s) u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - s u_{i+1,j}^{n+1/2} = s' u_{i,j-1}^{n} + (1-2s') u_{i,j}^{n} + s' u_{i,j+1}^{n} \tag{3.69}$$

Seconde étape - Correcteur

$$-s'u_{i,j-1}^{n+1} + (1+2s')u_{i,j}^{n+1} - s'u_{i,j+1}^{n+1} = su_{i-1,j}^{n+1/2} + (1-2s)u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + su_{i+1,j}^{n+1/2} \qquad (3.70)$$

3.5.6. Choix de la méthode ADI

a. La consistance

- ***Définition***

  On considère l'équation de la variable *w : A(w)=0*

  Soit $\hat{A}(w)$ le schéma approché de *A(w).* On dit que $\hat{A}(w)$ est consistant avec l'équation *A(w)=0* si :

  $\max\left|A\left(w_{i,j}^{n}\right) - \hat{A}(w_{i,j}^{n})\right| \to 0$ Quand $(h, \Delta t) \to 0$

- ***Consistance de la méthode ADI***

  Soit l'équation de Navier Stocks

$$A(w) = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} - \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0 \qquad (3.71)$$

L'équation approchée $\hat{A}(w) = 0$ qui correspond à l'équation précédente est obtenue en appliquant la première étape de la méthode ADI (prédicteur), on obtient :

$$\hat{A}(w) = \frac{w_{i,j}^{n+1/2} - w_{i,j}^{n}}{\Delta t/2} + u\frac{w_{i+1,j}^{n+1/2} - w_{i-1,j}^{n+1/2}}{2\Delta x} + v\frac{w_{i,j+1}^{n} - w_{i,j-1}^{n}}{2\Delta y}$$
$$-\nu\left(\frac{w_{i+1,j}^{n+1/2} - 2w_{i,j}^{n+1/2} + w_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2} + \frac{w_{i,j+1}^{n} - 2w_{i,j}^{n} + w_{i,j-1}^{n}}{\Delta y^2}\right) = 0 \quad (3.72)$$

Avec

Δt : le pas dans le temps

Δx *:* le pas dans l'espace selon la direction x.

Δy : le pas dans l'espace selon la direction y.

u : la vitesse selon la direction x.

v : la vitesse selon la direction y.

w : représente soit *u* ou *v.*

Or on a:

$$w_{i,j}^{n+1/2} = w_{i,j}^{n} + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial w}{\partial t} + o\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 \qquad (3.73)$$

$$w_{i\pm1,j}^{n+\frac{1}{2}} = w_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \pm \Delta x\frac{\partial w}{\partial x} + o(\Delta x) \qquad (3.74)$$

$$w_{\mathrm{i}\pm1,\mathrm{j}}^{\mathrm{n}+\frac{1}{2}} = w_{\mathrm{i,j}}^{\mathrm{n}+\frac{1}{2}} \pm \Delta x \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + o(\Delta x^2) \tag{3.75}$$

$$w_{\mathrm{i,j}\pm1}^{\mathrm{n}} = w_{\mathrm{i,j}}^{\mathrm{n}} \pm \Delta y \frac{\partial w}{\partial y} + \mathrm{o}(\Delta y) \tag{3.76}$$

$$w_{\mathrm{i,j}\pm1}^{\mathrm{n}} = w_{\mathrm{i,j}}^{\mathrm{n}} \pm \Delta y \frac{\partial w}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\Delta y^2}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + o(\Delta y^2) \tag{3.77}$$

En introduisant ces équations dans (3.71), la soustraction de (3.71) et (3.72) donne :

$$A(w) - \hat{A}(w) = \frac{\Delta t}{2} + \mathrm{o}(\Delta x) + \mathrm{o}(\Delta y) + o(\Delta x^2) + o(\Delta y^2) \tag{3.78}$$

Si on pose $\Delta x = \Delta y = h$, alors :

$$A(w) - \hat{A}(w) = \frac{\Delta t}{2} + \mathrm{o}(h) + o(h^2) \tag{3.79}$$

Si $\Delta t \to 0$, $h \to 0$ alors : $A(w) - \hat{A}(w) \to 0$.

Donc la méthode ADI est consistante.

Pour la seconde étape (Correcteur), le même résultat est obtenu en suivant la même méthode que celle appliquée à l'étape prédicteur.

b. La stabilité

On choisit la méthode de Von Neumann pour analyser et vérifier la stabilité de la méthode ADI.

On choisit une perturbation de la forme $\left(\varepsilon\, e^{z(px+qy)}\right)$, avec $z = \sqrt{-1}$ s'appliquant à tous les points d'une ligne du réseau pour un temps $t = nk$ donné ($k=\Delta t$), et tous les points $x = ih$, $y = jh$.

Avec :

Δt : pas dans le temps

h : pas dans l'espace

On pose

$$w_{i,j} = \varphi(nk)e^{z(pih+qjh)} \tag{3.80}$$

$$w_{i\pm1,j} = \varphi(nk)e^{z[p(i\pm1)h+q(j\pm1)h]} \tag{3.81}$$

p et q sont arbitraires.

On reporte ces formules dans l'équation aux différences finies, puis on calcule :

$$G(n,i,j,p,q) = \frac{\varphi\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)k\right)}{\varphi(nk)} \tag{3.82}$$

Une condition suffisante de stabilité est : $|G| \leq 1$, $\forall\ (n,i,j,p,q)$

Soit par exemple l'équation de Navier Stockes simplifiée $\frac{dw}{dt} = \nu . \Delta w$

On discrétise cette équation par la méthode ADI ;

On pose $c = \frac{ku}{4h}$ $d = \frac{k\nu}{4h}$ $e = \frac{\nu k}{2h^2}$

Etape prédicteur :

$$-(c+e)w_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + (1+2e)w_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + (c-e)w_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} = (d+e)w_{i,j-1}^{n} + (1-2e)w_{i,j}^{n} - (e-d)w_{i,j+1}^{n} \quad (3.83)$$

Etape correcteur :

$$-(d+e)w_{i,j-1}^{n+1} + (1-2e)w_{i,j}^{n+1} + (d-e)w_{i,j+1}^{n+1} = (c+e)w_{i-1,j}^{n+1/2} + (1-2e)w_{i,j}^{n+1/2} + (e-c)w_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} \quad (3.84)$$

En reportant les formules (3.73) et (3.74) dans les équations précédentes, on trouve un facteur d'amplification G' correspondant à l'étape prédicteur et un facteur d'amplification G'' correspondant à l'étape correcteur. Le facteur d'amplification de la méthode ADI est le produit des deux facteurs ($G = G' G''$) avec :

$$G' = \frac{1 - \left(\frac{k\nu}{2h}\right) z\sin(qh) - \left(\frac{\nu k}{h^2}\right)[1-\cos(qh)]}{1 + \left(\frac{k\nu}{2h}\right) z\sin(ph) + \left(\frac{\nu k}{h^2}\right)[1-\cos(ph)]} = \frac{L}{H} \quad (3.85)$$

$$G'' = \frac{-1 - \left(\frac{ku}{2h}\right) z\sin(ph) - \left(\frac{\nu k}{h^2}\right)[1-\cos(ph)]}{1 - \left(\frac{k\nu}{2h}\right) z\sin(qh) + \left(\frac{\nu k}{h^2}\right)[1-\cos(qh)]} = \frac{M}{Y} \quad (3.86)$$

D'où $G = \frac{L}{H}\frac{M}{Y} = \frac{L}{Y}\frac{M}{H}$

Chacun des deux facteurs $\frac{L}{Y}$ et $\frac{M}{H}$ sont du type $\frac{N}{D}$ avec Re(N) $\leq$ Re(D) et Im(N)=−Im(D)

d'où $\left|\frac{L}{Y}\right| \leq 1$ et $\left|\frac{M}{H}\right| \leq 1$

On déduit alors que $|G| \leq 1, \forall\ (q, p, k, h)$

D'après l'analyse de stabilité par la méthode de Von Neumann la méthode ADI est inconditionnellement stable.

3.5.7 Conclusion

Pour éviter les contraintes imposées par les conditions de stabilité des schémas explicites, on a intérêt, la plupart du temps, à utiliser des schémas implicites. Toutefois, ceux-ci coûtent cher. C'est ce qui explique le succès remporté par la méthode des directions

alternées (Alterning Direction Implicite ou ADI) dans laquelle on limite habilement le coût des résolutions. La méthode ADI est inconditionnellement stable et convergente. Elle a une erreur de troncature de l'ordre de o $(\frac{\Delta t}{2}, \Delta h^2)$ .Vu ces propriétés, elle est la méthode la plus adaptée à notre cas.

3.6. Discrétisation des équations

On utilise le schéma UPWIND pour discrétiser les termes convectifs :

- $u\frac{\partial \Omega}{\partial x} + v\frac{\partial \Omega}{\partial y}$ dans l'équation de vorticité
- $u\frac{\partial \theta}{\partial x} + v\frac{\partial \theta}{\partial y}$ dans l'équation de l'énergie

La méthode ADI est utilisée pour discrétiser le terme instationnaire :

- $\frac{\partial \Omega}{\partial \tau}$ dans l'équation de vorticité
- $\frac{\partial \theta}{\partial \tau}$ dans l'équation de l'énergie

Ainsi que le terme diffusif :

- $\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2}\right)$ dans l'équation de vorticité
- $\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}\right)$ dans l'équation de l'énergie

Et le terme de BOUYANCY $\frac{\partial \theta}{\partial x}$

3.6.1 Discrétisation de l'équation de vorticité

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + u\frac{\partial \Omega}{\partial x} + v\frac{\partial \Omega}{\partial y} = \frac{\partial \theta}{\partial x} + \sqrt{\frac{Pr}{Ra}}\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2}\right) \tag{3.87}$$

Etape 1 - Prédicteur

- Terme instationnaire :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} = \frac{\Omega_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \Omega_{i,j}^{n}}{\Delta \tau / 2} \tag{3.88}$$

- Les termes convectifs :

$$u\frac{\partial \Omega}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x}\left[-\frac{1}{2}(u + |u|)\Omega_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + |u|\Omega_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(u - |u|)\Omega_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}\right] \tag{3.89}$$

$$u\frac{\partial \Omega}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x}\left[cuw.\Omega_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + cui.\Omega_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + cue.\Omega_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}\right] \quad (3.90)$$

Avec : $cuw = -\frac{1}{2}(u + |u|) \qquad cui = |u| \qquad cue = \frac{1}{2}(u - |u|)$

$$v\frac{\partial \Omega}{\partial y} = \frac{1}{\Delta y}\left[-\frac{1}{2}(v + |v|)\Omega_{i,j-1}^{n} + |v|\Omega_{i,j}^{n} + \frac{1}{2}(v - |v|)\Omega_{i,j+1}^{n}\right] \quad (3.91)$$

$$v\frac{\partial \Omega}{\partial y} = \frac{1}{\Delta y}\left[cvs.\Omega_{i,j-1}^{n} + cvi.\Omega_{i,j}^{n} + cvn.\Omega_{i,j+1}^{n}\right] \quad (3.92)$$

Avec : $cvs = -\frac{1}{2}(v + |v|) \qquad cvi = |v| \qquad cvn = \frac{1}{2}(v - |v|)$

- Terme diffusif

$$\sqrt{\frac{Pr}{Ra}}\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{Pr}{Ra}}\left\{\left[\frac{\Omega_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2\Omega_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \Omega_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2}\right] + \left[\frac{\Omega_{i,j+1}^{n} - 2\Omega_{i,j}^{n} + \Omega_{i,j-1}^{n}}{\Delta y^2}\right]\right\} \quad (3.93)$$

- Terme de BOUANCY

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\theta_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - \theta_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \quad (3.94)$$

L'équation devient donc

$$\frac{\frac{\Omega_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \Omega_{i,j}^{n}}{\frac{\Delta \tau}{2}} + \frac{1}{\Delta x}\left[cuw.\Omega_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + cui.\Omega_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + cue.\Omega_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}\right]$$

$$+ \frac{1}{\Delta y}\left[cvs.\Omega_{i,j-1}^{n} + cvi.\Omega_{i,j}^{n} + cvn.\Omega_{i,j+1}^{n}\right]$$

$$- \frac{1}{\Delta x^2}\sqrt{\frac{Pr}{Ra}}\left[\Omega_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2\Omega_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \Omega_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}\right]$$

$$- \frac{1}{\Delta y^2}\sqrt{\frac{Pr}{Ra}}\left[\Omega_{i,j+1}^{n} - 2\Omega_{i,j}^{n} + \Omega_{i,j-1}^{n}\right]$$

$$- \frac{1}{2\Delta x}\left[\theta_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - \theta_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}\right] = 0 \quad (3.95)$$

Avec :

$\Delta\tau$ *:* pas dans le temps

Δx *:* pas dans l'espace selon l'axe $\overrightarrow{ox}$

Δy *:* pas dans l'espace selon l'axe $\overrightarrow{oy}$

Posons :

$$A = \frac{\Delta\tau.cuw}{2\Delta x} \quad ; \quad B = \frac{\Delta\tau.cui}{2\Delta x} \quad ; \quad C = \frac{\Delta\tau.cue}{2\Delta x}$$

$$D = \frac{\Delta\tau}{2.\Delta x^2}\sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \quad ; \quad E = \frac{\Delta\tau.cvi}{2\Delta y}; \quad F = \frac{\Delta\tau.cvi}{2\Delta y}; \quad G = \frac{\Delta\tau.cvn}{2\Delta y}$$

$$H = \frac{\Delta\tau}{2.\Delta y^2}\sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \quad ; \quad AK = \frac{\Delta\tau}{4\Delta x}\left[\theta_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - \theta_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}\right]$$

On obtient :

$$\begin{aligned}\Omega_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}(A-D) + \Omega_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}(1+B+2D) + \Omega_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}(C-D) \\ = \Omega_{i,j-1}^{n}(H-E) + \Omega_{i,j}^{n}(1-2H-F) \\ +\Omega_{i,j+1}^{n}(H-G) + AK\end{aligned} \tag{3.96}$$

Etape 2 - Correcteur

- Terme instationnaire

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} = \frac{\Omega_{i,j}^{n+1} - \Omega_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta\tau/2} \tag{3.97}$$

- Les termes convectifs :

$$u\frac{\partial\Omega}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x}\left[cuw.\Omega_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + cui.\Omega_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + cue.\Omega_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}\right] \tag{3.98}$$

$$v\frac{\partial\Omega}{\partial y} = \frac{1}{\Delta y}\left[cvs.\Omega_{i,j-1}^{n+1} + cvi.\Omega_{i,j}^{n+1} + cvn.\Omega_{i,j+1}^{n+1}\right] \tag{3.99}$$

- Terme diffusif

$$\sqrt{\frac{Pr}{Ra}}\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Omega}{\partial y^2}\right)$$

$$=\sqrt{\frac{Pr}{Ra}}\left\{\left[\frac{\Omega_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}-2\Omega_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}+\Omega_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2}\right]\right.$$

$$\left.+\left[\frac{\Omega_{i,j+1}^{n+1}-2\Omega_{i,j}^{n+1}+\Omega_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2}\right]\right\} \qquad (3.100)$$

- Terme de BOUANCY :

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{\theta_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}-\theta_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \qquad (3.101)$$

L'équation devient donc :

$$\frac{\Omega_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}-\Omega_{i,j}^{n}}{\frac{\Delta\tau}{2}}+\frac{1}{\Delta x}\left[cuw.\Omega_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}+cui.\Omega_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}+cue.\Omega_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}\right]$$

$$+\frac{1}{\Delta y}\left[cvs.\Omega_{i,j-1}^{n+1}+cvi.\Omega_{i,j}^{n+1}+cvn.\Omega_{i,j+1}^{n+1}\right]$$

$$-\frac{1}{\Delta x^2}\sqrt{\frac{Pr}{Ra}}\left[\Omega_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}-2\Omega_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}+\Omega_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}\right]$$

$$-\frac{1}{\Delta y^2}\sqrt{\frac{Pr}{Ra}}\left[\Omega_{i,j+1}^{n+1}-2\Omega_{i,j}^{n+1}+\Omega_{i,j-1}^{n+1}\right]$$

$$-\frac{1}{2\Delta x}\left[\theta_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}-\theta_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}\right]=0 \qquad (3.102)$$

Posons :

$A=\frac{\Delta\tau.cuw}{2\Delta x}$; $B=\frac{\Delta\tau.cui}{2\Delta x}$; $C=\frac{\Delta\tau.cue}{2\Delta x}$

$D=\frac{\Delta\tau}{2.\Delta x^2}\sqrt{\frac{Pr}{Ra}}$; $E=\frac{\Delta\tau.cvi}{2\Delta y}$; $F=\frac{\Delta\tau.cvi}{2\Delta y}$; $G=\frac{\Delta\tau.cvn}{2\Delta y}$

$H=\frac{\Delta\tau}{2.\Delta y^2}\sqrt{\frac{Pr}{Ra}}$; $AK=\frac{\Delta\tau}{4\Delta x}\left[\theta_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}-\theta_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}\right]$

On obtient :

$$\Omega_{i,j-1}^{n+1}(E-H)+\Omega_{i,j}^{n+1}(1+F+2H)+\Omega_{i,j+1}^{n+1}(G-H)$$
$$=\Omega_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}(D-A)+\Omega_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}(1-B-2D)$$
$$+\Omega_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}(D-C)+A \qquad (3.103)$$

3.6.2 Discrétisation de l'équation de l'énergie

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau}+u\frac{\partial\theta}{\partial x}+v\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{RaPr}}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}\right) \qquad (3.104)$$

Etape 1- Prédicteur

- Terme instationnaire :

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau}=\frac{\Theta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}-\Theta_{i,j}^{n}}{\Delta\tau/2} \qquad (3.105)$$

- Les termes convectifs :

$$u\frac{\partial\Theta}{\partial x}=\frac{1}{\Delta x}\left[cuw.\Theta_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}+cui.\Theta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}+cue.\Theta_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}\right] \qquad (3.106)$$

Avec : $cuw=-\frac{1}{2}(u+|u|)$ $cui=|u|$ $cue=\frac{1}{2}(u-|u|)$

$$v\frac{\partial\Theta}{\partial y}=\frac{1}{\Delta y}\left[cvs.\Theta_{i,j-1}^{n}+cvi.\Theta_{i,j}^{n}+cvn.\Theta_{i,j+1}^{n}\right] \qquad (3.107)$$

Avec : $cvs=-\frac{1}{2}(v+|v|)$ $cvi=|v|$ $cvn=\frac{1}{2}(v-|v|)$

- Terme diffusif

$$\frac{1}{\sqrt{RaPr}}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{RaPr}}\left\{\left[\frac{\theta_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}-2\theta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}+\theta_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2}\right]\right.$$
$$\left.+\left[\frac{\theta_{i,j+1}^{n}-2\theta_{i,j}^{n}+\theta_{i,j-1}^{n}}{\Delta y^2}\right]\right\} \qquad (3.108)$$

Donc l'équation devient :

$$\frac{\theta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}-\theta_{i,j}^{n}}{\Delta\tau/2}+\frac{1}{\Delta x}\left[cuw.\theta_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}+cui.\theta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}+cue.\theta_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}\right]$$
$$+\frac{1}{\Delta y}\left[cvs.\theta_{i,j-1}^{n}+cvi.\theta_{i,j}^{n}+cvn.\theta_{i,j+1}^{n}\right]-\frac{1}{\sqrt{RaPr}}\left\{\left[\frac{\theta_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}-2\theta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}+\theta_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2}\right]\right.$$
$$\left.+\left[\frac{\theta_{i,j+1}^{n}-2\theta_{i,j}^{n}+\theta_{i,j-1}^{n}}{\Delta y^2}\right]\right\}$$
$$=0 \qquad (3.109)$$

Posons :

$A=\frac{\Delta\tau.cuw}{2\Delta x}$; $B=\frac{\Delta\tau.cui}{2\Delta x}$; $C=\frac{\Delta\tau.cue}{2\Delta x}$

$D=\frac{\Delta\tau}{2.\Delta x^2\sqrt{RaPr}}$; $E=\frac{\Delta\tau.cvi}{2\Delta y}$; $F=\frac{\Delta\tau.cvi}{2\Delta y}$; $G=\frac{\Delta\tau.cvn}{2\Delta y}$

$H=\frac{\Delta\tau}{2.\Delta y^2\sqrt{RaPr}}$

On obtient :

$$\theta_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}(A-D)+\theta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}(1+B+2D)+\theta_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}(C-D)$$
$$=\theta_{i,j-1}^{n}(H-E)+\theta_{i,j}^{n}(1-F-2H)$$
$$+\theta_{i,j+1}^{n}(H-G) \qquad (3.110)$$

Etape2 - Correcteur :

- Terme instationnaire :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\Theta_{i,j}^{n+1} - \Theta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta\tau/2} \tag{3.111}$$

- Les termes convectifs :

$$u\frac{\partial \Theta}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x}\left[cuw.\Theta_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + cui.\Theta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + cue.\Theta_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}\right] \tag{3.112}$$

Avec : $cuw = -\frac{1}{2}(u + |u|)$ $cui = |u|$ $cue = \frac{1}{2}(u - |u|)$

$$v\frac{\partial \Theta}{\partial y} = \frac{1}{\Delta y}\left[cvs.\Theta_{i,j-1}^{n+1} + cvi.\Theta_{i,j}^{n+1} + cvn.\Theta_{i,j+1}^{n+1}\right] \tag{3.113}$$

Avec : $cvs = -\frac{1}{2}(v + |v|)$ $cvi = |v|$ $cvn = \frac{1}{2}(v - |v|)$

- Terme diffusif

$$\frac{1}{\sqrt{RaPr}}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{RaPr}}\left\{\left[\frac{\Theta_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2\Theta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \Theta_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2}\right]\right.$$

$$\left. + \left[\frac{\Theta_{i,j+1}^{n+1} - 2\Theta_{i,j}^{n+1} + \Theta_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2}\right]\right\} \tag{3.114}$$

Posons :

$A = \frac{\Delta\tau.cuw}{2\Delta x}$; $B = \frac{\Delta\tau.cui}{2\Delta x}$; $C = \frac{\Delta\tau.cue}{2\Delta x}$

$D = \frac{\Delta\tau}{2.\Delta x^2\sqrt{RaPr}}$; $E = \frac{\Delta\tau.cvi}{2\Delta y}$; $F = \frac{\Delta\tau.cvi}{2\Delta y}$; $G = \frac{\Delta\tau.cvn}{2\Delta y}$

$H = \frac{\Delta\tau}{2.\Delta y^2\sqrt{RaPr}}$

On obtient :

$$\Theta_{i,j-1}^{n+1}(E - H) + \Theta_{i,j}^{n+1}(1 + F + 2H) + \Theta_{i,j+1}^{n+1}(G - H)$$

$$= \Theta_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}(D - A) + \Theta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}(1 - B - 2D) + \Theta_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}(D - C) \tag{3.115}$$

Les équations linéaires (3.96) et (3.103), (3.110) et (3.115) sont obtenues après discrétisation des équations non linéaires (3.28) et (3.29) en utilisant le schéma UPWIND et la méthode ADI. Les coefficients de ces équations sont considérés comme connus à chaque instant. Chaque équation constitue un système d'équations constituant une matrice tridiagonale. Le système ainsi obtenu est résolu par l'algorithme de Thomas T.D.M.A (Tri Diagonal Matrix Algorithm) (Annexe A).

En faisant varier j de 2 jusqu'à (m-1), nous avons pour chaque j, un système de (n-1) équations à (n-2) inconnues, nous comptons donc un système tridiagonale. Pendant le premier demi pas de temps, nous obtenons les solutions pour la température et la vorticité ligne par ligne, alors que durant le second demi pas de temps les solutions sont retrouvées colonne par colonne.

3.6.3 Discrétisation de l'équation de fonction de courant

L'équation de fonction de courant est donnée par (3.27) :

$$\Omega + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

En utilisant les différences finies centrées pour discrétiser cette équation, on obtient :

$$\Omega_{i,j}^{n-1} + \frac{\Psi_{i+1,j}^{n-1} - 2\Psi_{i,j}^{n-1} + \Psi_{i-1,j}^{n-1}}{\Delta x^2} + \frac{\Psi_{i,j+1}^{n-1} - 2\Psi_{i,j}^{n-1} + \Psi_{i,j-1}^{n-1}}{\Delta y^2} = 0 \quad (3.116)$$

Posons :

$$aa = \frac{1}{\Delta x^2} \qquad bb = \frac{1}{\Delta y^2}$$

On obtient :

$$\Psi_{i,j}^{n-1} = \frac{1}{2 * aa + 2 * bb}\Omega_{i,j}^{n-1} + \frac{aa}{2 * aa + 2 * bb}(\Psi_{i+1,j}^{n-1} + \Psi_{i-1,j}^{n-1}) + \frac{bb}{2.aa + 2.bb}\left(\Psi_{i,j+1}^{n-1} + \Psi_{i,j-1}^{n-1}\right) \quad (3.117)$$

La résolution du système d'équations ainsi obtenu est effectuée en utilisant la méthode de SOR (méthode de sur relaxation successive) (voir Annexe A)**.**

3.6.4 Discrétisation des composantes de vitesse

Les composantes de vitesse définie en (3.25) deviennent :

$$u_{i,j}^{n} = -\left(\frac{\Psi_{i,j+1}^{n} - \Psi_{i,j-1}^{n}}{2\Delta y}\right) \tag{3.118}$$

$$v_{i,j}^{n} = \left(\frac{\Psi_{i+1,j}^{n} - \Psi_{i-1,j}^{n}}{2\Delta x}\right) \tag{3.119}$$

3.7 Discrétisation des conditions initiales et aux limites

- Le champ des vitesses

- *Condition de non glissement*

$$\begin{cases} u_{1,j}^{n} = u_{im,j}^{n} = u_{i,1}^{n} = u_{i,jm}^{n} = 0 \quad \forall i,j,n \\ v_{1,j}^{n} = v_{im,j}^{n} = v_{i,1}^{n} = v_{i,jm}^{n} = 0 \quad \forall i,j,n \end{cases} \tag{3.120}$$

- *Condition initiale*

$$\begin{cases} u_{i,j}^{0} = 0 & \forall i,j \\ v_{i,j}^{0} = 0 & \forall i\ ,j \end{cases} \tag{3.121}$$

- Le champ de températures

- *aux parois verticales*

$$\begin{cases} \theta_{1,j}^{n} = 1 & \forall\ j \\ \theta_{im,j}^{n} = -1 & \forall\ j \end{cases} \tag{3.122}$$

- *conditions initiale*

$$\theta_{i,j}^{0} = 0 \ \ pour\ (i = 2, im-1;\ j = 1, jm) \tag{3.123}$$

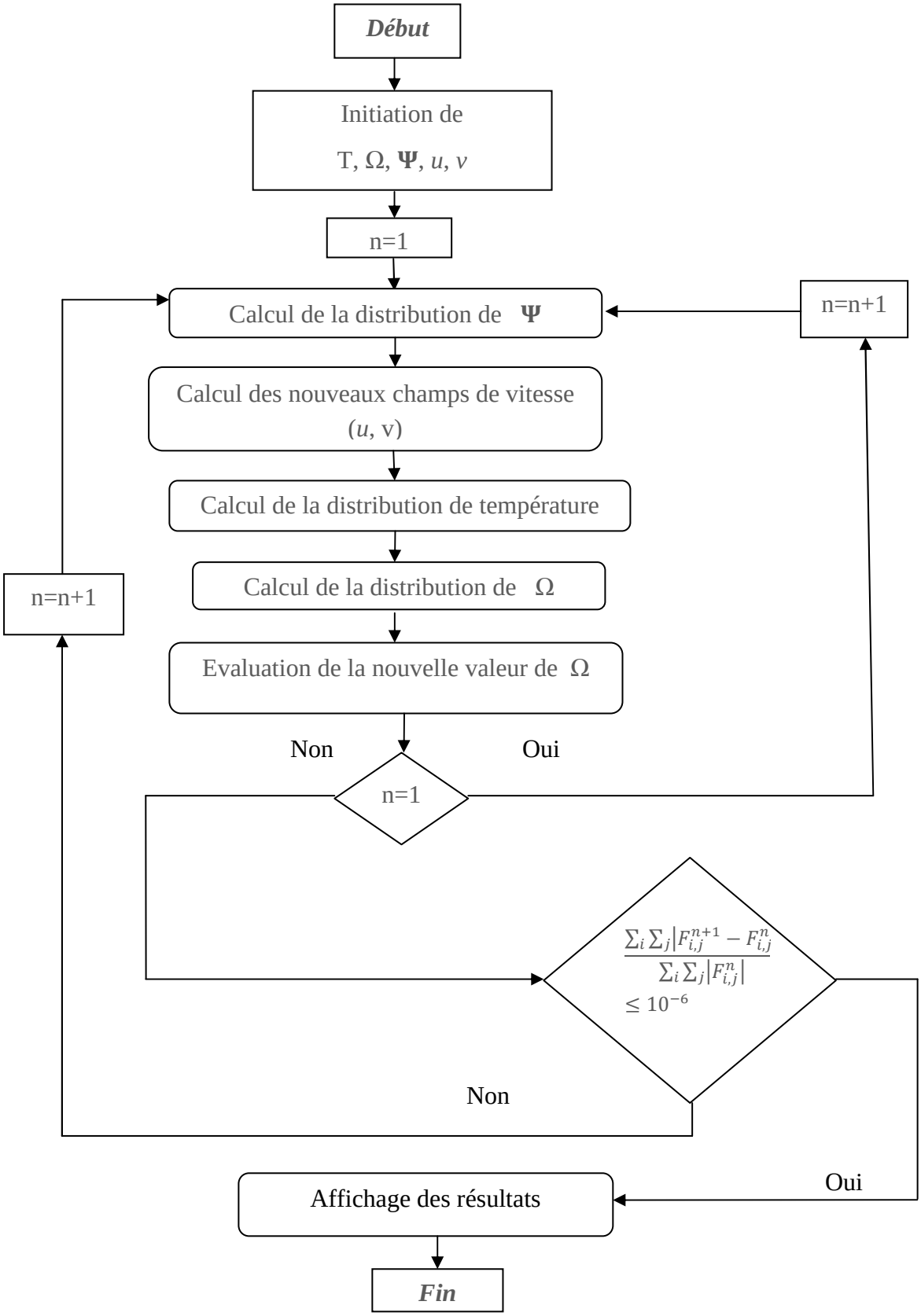
- Les parois adiabatiques

$$\begin{cases} \theta_{i,1}^{n} = \dfrac{4\theta_{i,2}^{n} - \theta_{i,3}^{n}}{3} \\ \theta_{i,jm}^{n} = \dfrac{4\theta_{i,jm-1}^{n} - \theta_{i,jm-2}^{n}}{3} \end{cases} \tag{3.124}$$

- Concernant la fonction de courant

$$\begin{cases} \Psi_{i,j}^{n} = \Psi_{im,j}^{n} = \Psi_{i,1}^{n} = \Psi_{i,jm}^{n} = 0 & \forall i,j,n \\ \Psi_{i,j}^{0} = 0 & \forall i,j \end{cases} \tag{3.125}$$

3.8 Organigramme de calcul



4. RESULTATS ET DISCUSSIONS

Le but de ce paragraphe est d'appliquer les formules préalablement établies dans une cavité carrée de longueur H, différentièllement chauffée aux deux parois verticales en vis-à-vis (la paroi gauche est chauffée et la paroi droite est refroidie). Cette cavité contenant de l'air; en conséquence nous abordons ici les 2 points suivants :

- Etude du régime variable
- Etude de l'état stationnaire, et analyse de l'influence des principaux paramètres intervenant agissant sur le phénomène.

Le critère de convergence adopté à chaque pas de temps est $\frac{\sum_i \sum_j \left|F_{i,j}^{n+1} - F_{i,j}^{n}\right|}{\sum_i \sum_j \left|F_{i,j}^{n}\right|} \leq 10^{-6}$, ou F représente la température ou la vorticité.

L'étude du problème de la convection naturelle dans une cavité carrée est liée à deux principaux paramètres : le nombre de Rayleigh **Ra** et le nombre de Prandtl **Pr.**

4.1 Choix du maillage

Dans notre étude nous avons choisi un maillage rectangulaire uniforme de n×m nœuds dans tout l'espace physique. Le nœud (1,1) se trouve à l'origine des cordonnées, alors que le nœud (n, m) est de coordonnées (1,1).

Nous avons choisi la hauteur de l'enceinte comme grandeur de référence, pour l'adimensionnalisation des équations de transfert.

L'enceinte est donc un carré de coté unité. Les pas d'espaces suivant les axes x et y sont donnée par : $\Delta x = \frac{1}{n-1}$ et $\Delta y = \frac{1}{m-1}$

La position *x* est repérée par l'équation : $x = (i-1)\Delta x$

et la position *y* par l'équation : $y = (j-1)\Delta y$

Des essais numériques ont été nécessaires pour optimiser le temps et la précision des calculs. Ainsi, un maillage uniforme de 51×51 a été trouvé suffisant pour simuler les distributions d'écoulement et de la température dans une cavité carrée uniforme pour un pas du temps égal à 0.1. On utilise dans les calculs le nombre de Prandtl de l'air : Pr=0.71

Lors de nos simulations tests, on a constaté que les valeurs de Ra varie entre 10^3 et 10^8 .

Les principaux résultats sont présentés, sous forme de figures, pour chaque valeur du nombre de Rayleigh Ra.

4.2 Etude de la convergence

Les figures 3.5 et 3.6 représente respectivement les variations de température et de vorticité en fonction du temps à Ra=1.E03, à des positions différentes dans la cavité. On remarque que les parties des fluides que se situent près de la paroi chaude de la cavité subissent des variations très importantes (x=0.04, y=0.04) de leur température, puis ces variation deviennent plus faibles au fur et à mesure qu'on se rapproche au milieu de la cavité (x=0.4, y=0.4). Un comportement dynamique variable en fonction du temps est observé avant d'atteindre une limite asymptotique stationnaire.

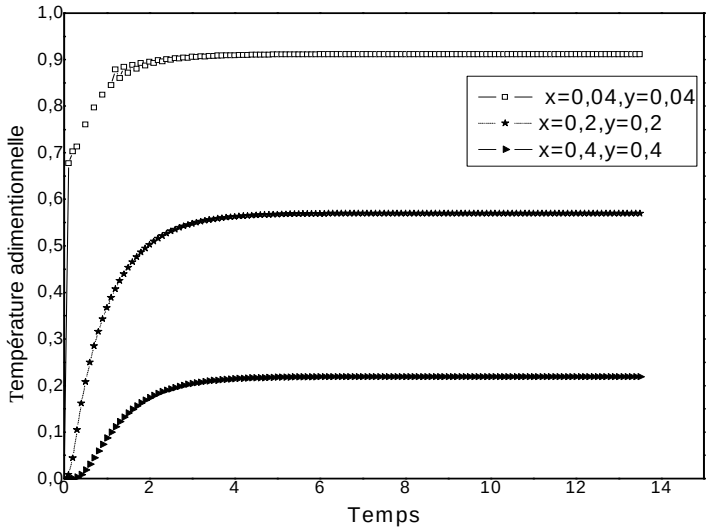


Figure 3.5: *Evolution de la température à différentes positions; pour* ***Ra****=10*^{3}

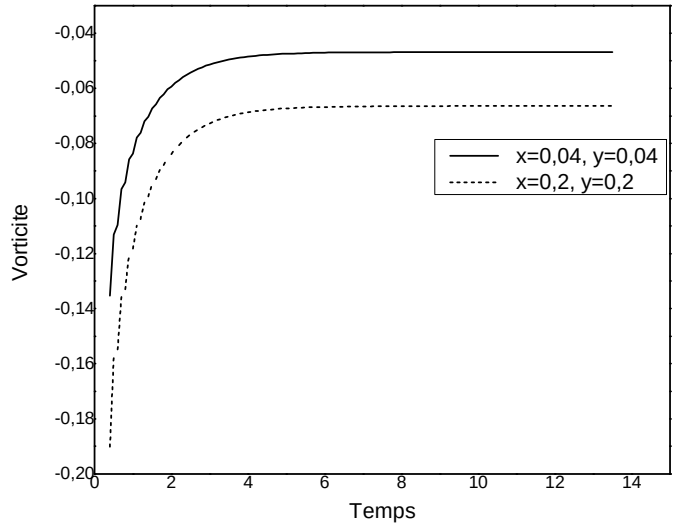


Figure 3.6: *Evolution de la vorticité à différentes positions; pour* ***Ra****=10*^{3}

4.3 Régime stationnaire

La figure 3.7 représentent les isothermes en régime stationnaire. À partir des figures des isothermes on constate que pour une faible valeur du nombre de Rayleigh ($Ra=10^3$), le fluide (Air) présente une stratification thermique verticale due à un transfert de chaleur uniquement par conduction qui ne génère aucun écoulement convectif (Figure 3.7.a).

Lorsque Ra $=10^4$, un écoulement convectif apparait dans le sens ascendant proche de la paroi chaude et descendant proche de la paroi froide (Figure 3.7.b).

Quand le nombre Rayleigh augmente ($10^4 < Ra \leq 10^8$), le fluide chaud situé proche de la paroi chaude étant le plus léger, monte au niveau de la paroi horizontale haute, il rejoint ensuite la paroi froide en longeant le plafond, puis redescend au niveau de la paroi froide, avant de rejoindre la paroi chaude par le plancher (Figures 3.7.c, d, e et f).

Les figures 3.8 et 3.9 montrent respectivement l'influence du nombre de Rayleigh sur l'écoulement. En effet, la fonction de courant maximale et la vitesse maximale augmentent asymptotiquement en fonction du nombre de Rayleigh.

La figure 3.10 représente les profils de température en fonction de $\boldsymbol{x}$ **à** $\boldsymbol{y}$ **= 0.5** pour différentes valeurs du Ra. La distribution de la température est linéaire pour Ra faible (10^3), et un fort gradient de température au voisinage des faces isothermes est observé lorsque Ra augmente ($>10^5$) (figures 3.10.c, d, e, f).

La figure (3.11) représente les vitesses horizontales en fonction de y à x=0.5 ; les profils de vitesses indique une forte accélération près des parois adiabatiques, les vitesses négatives sur toute la moitié de la cavité ($y< 0.5$) sont caractéristiques de la zone de recirculation.

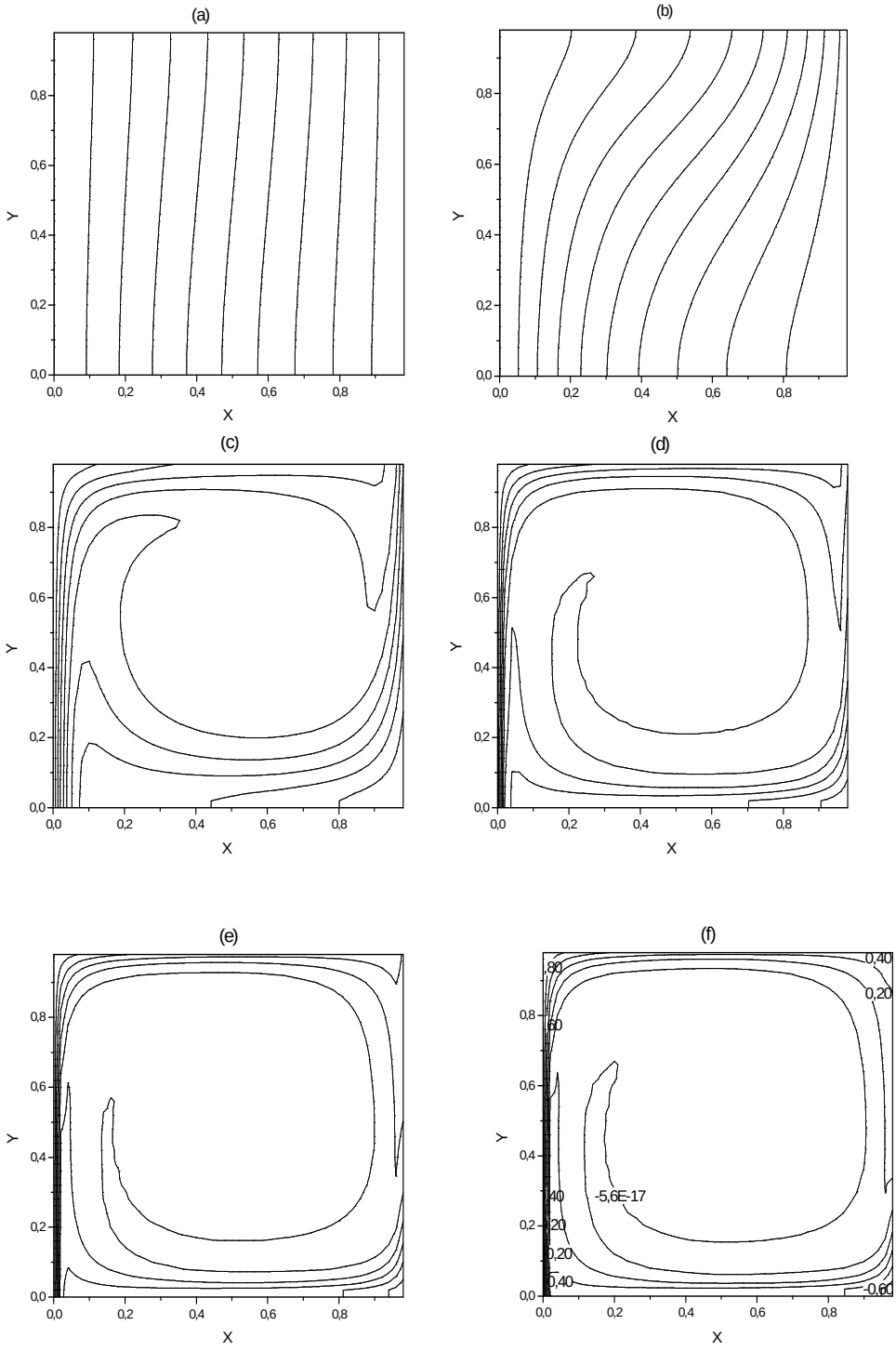


Figure 3.7: *Les isothermes en régime stationnaire à différents Ra: (a) Ra=1.E03 T_{max}=1 ; (b) Ra=1.E04 T_{max}=1 ; (c) Ra=1.E05 T_{max}=1 ; (d) Ra=1.E06 T_{max}=1 ; (e) Ra=1.E07 T_{max}=1 ; (f) Ra=1.E08 T_{max}=1*

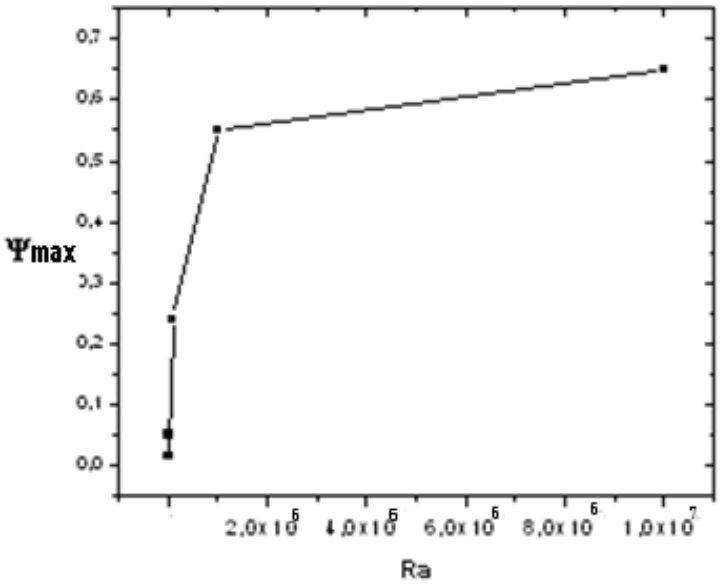


Figure 3.8: *Evolution de la fonction de courant maximale en fonction de Ra*

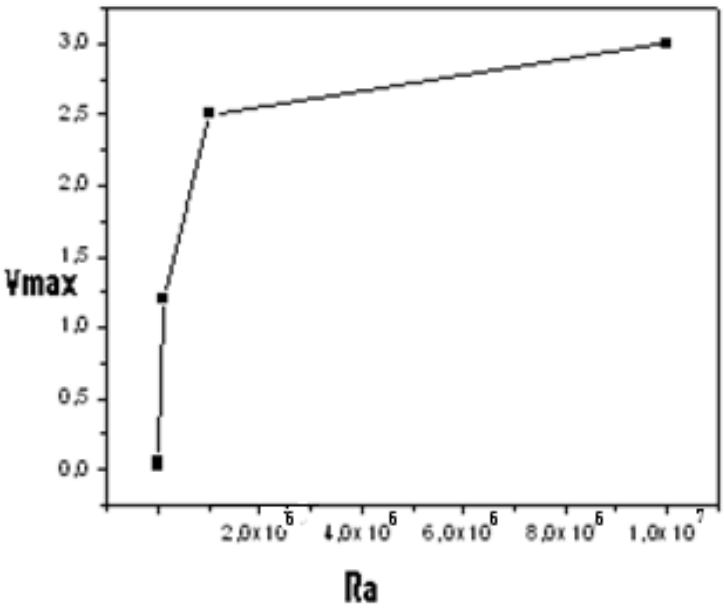


Figure 3.9: *Evolution de la vitesse verticale maximale en fonction de Ra*

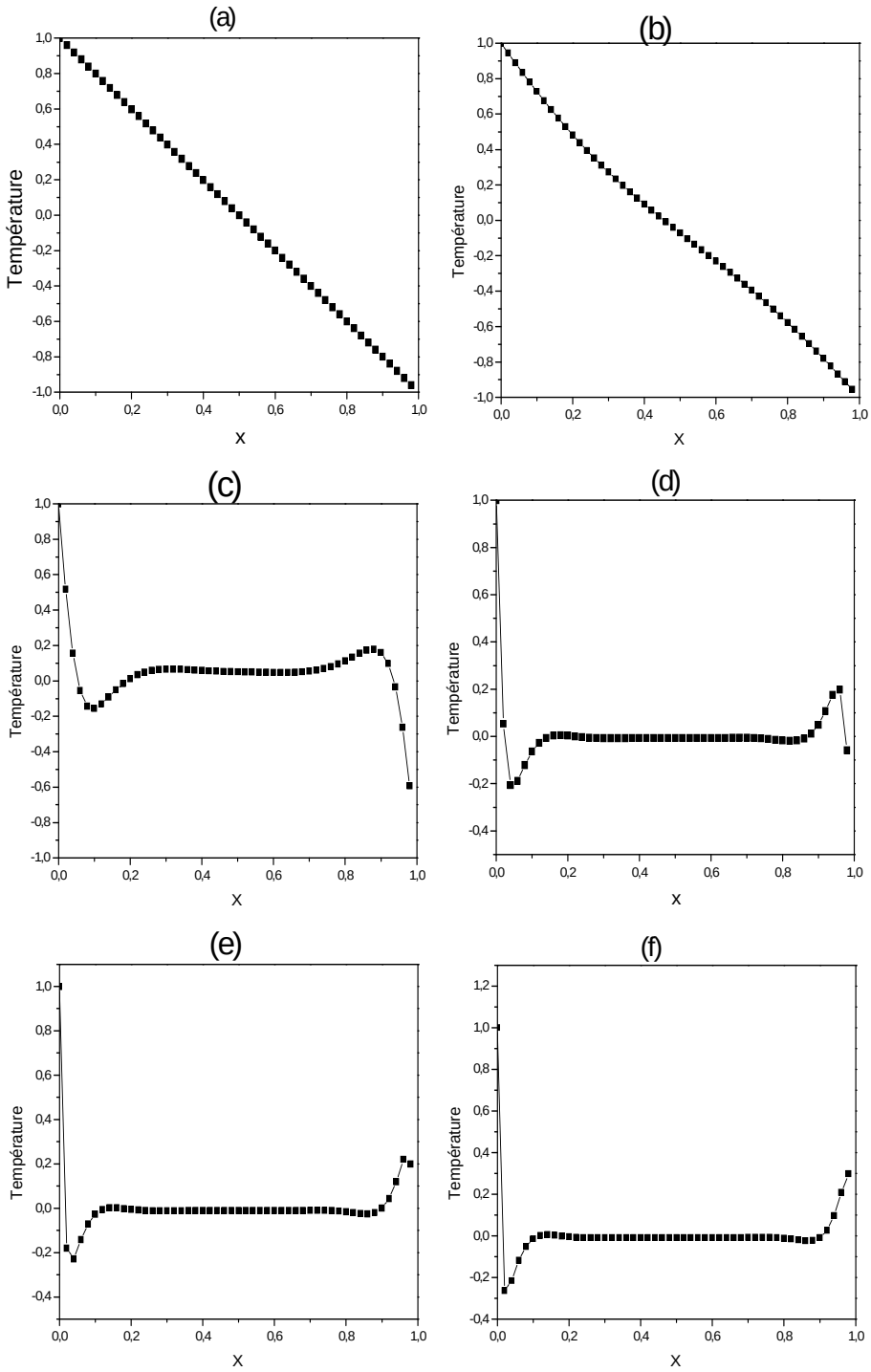


Figure 3.10 : *Evolution de la température en fonction de x à y=0.5 : (a) 1.E03 ; (b) 1.E04 ;(c) 1.E05 ; (d) 1.E06 ; (e) 1.E07 ; (f) 1.E08.*

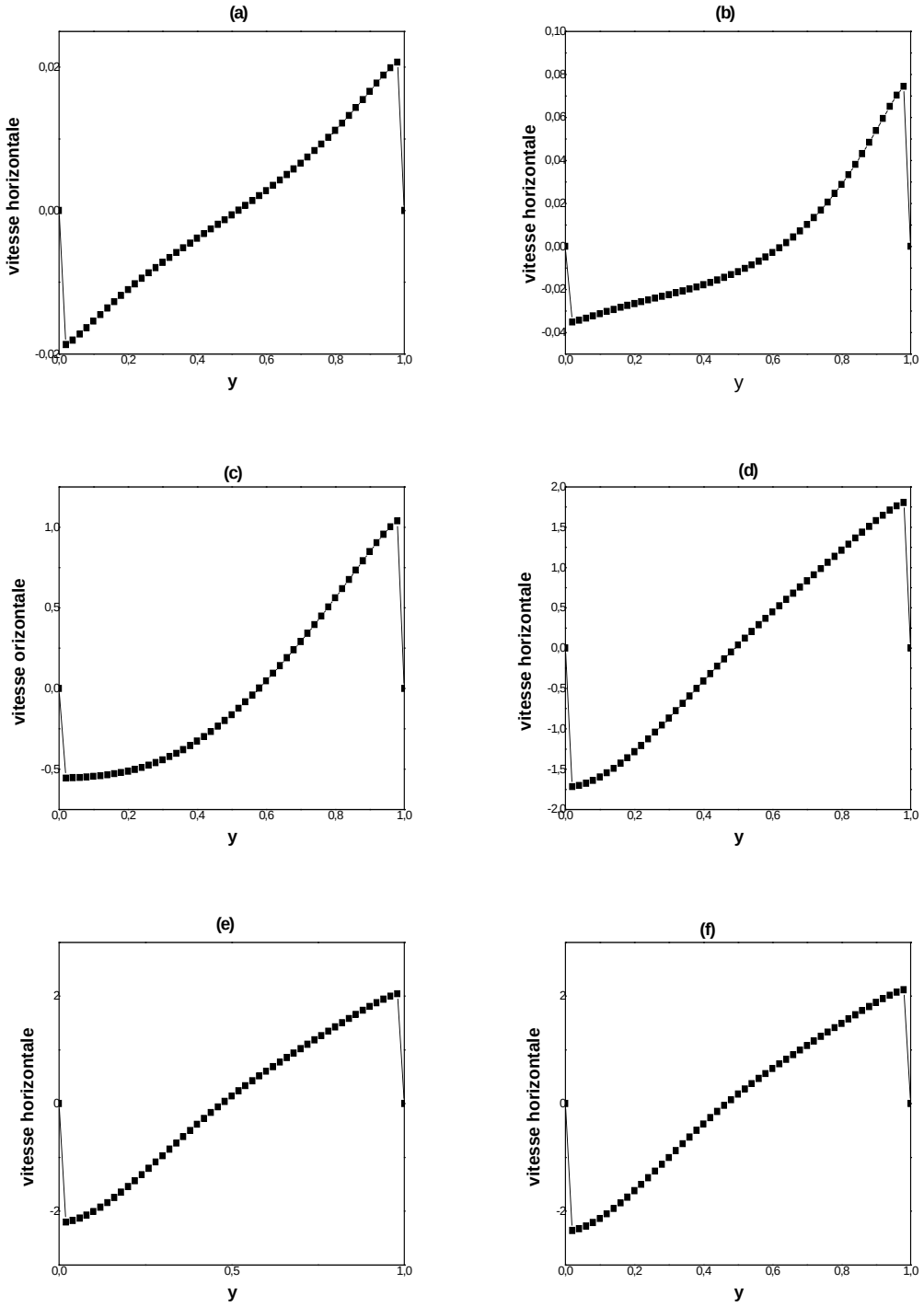
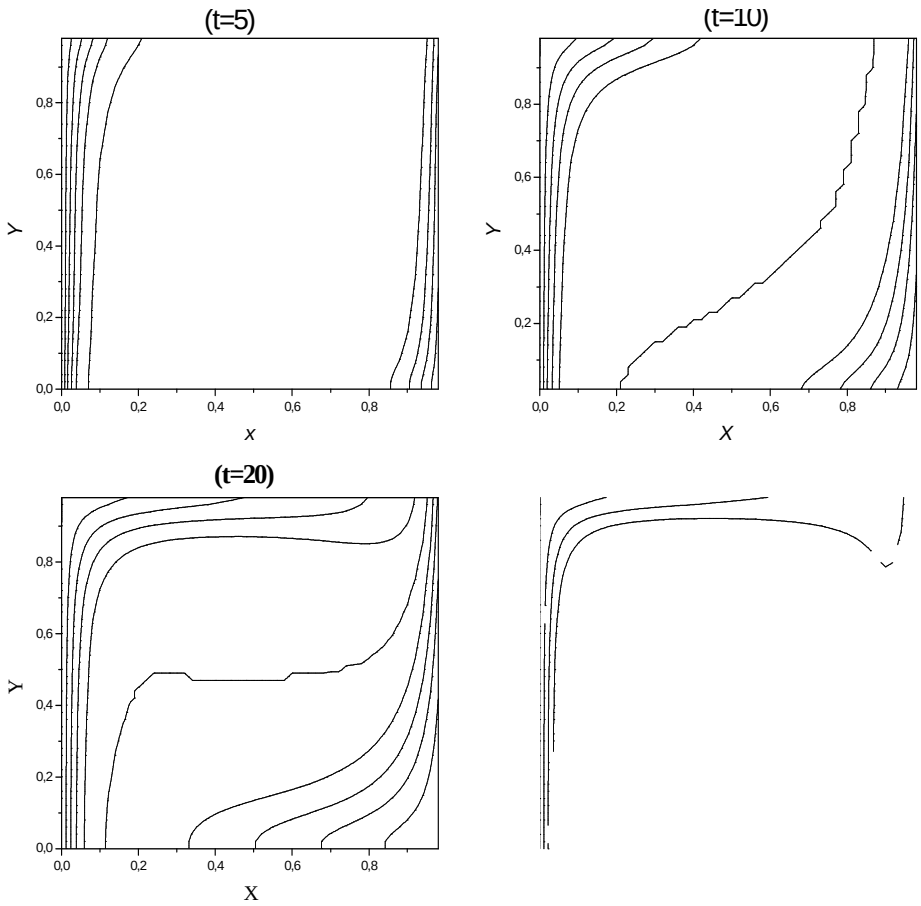


Figure 3.11 : *Evolution de la vitesse en fonction de y à x=0.5 : (a) 1.E03 ; (b) 1.E04 ;(c) 1.E05 ; (d) 1.E06 ; (e) 1.E07 ; (f) 1.E08.*

4.4. Régime variable

A partir des figures 3.12 et 3.13 qui représentent les isothermes en régime variable pour Ra=10^5 et Ra=10^7 respectivement, on observe que pour ***t=5*** le fluide est réchauffé au voisinage de la paroi gauche et refroidie au voisinage de la paroi droite, ce qui est logique puisque ce sont des parois actives (réchauffée, et refroidie respectivement), et quand le temps augmente et pour $t > 10$ on remarque que le fluide au voisinage de la paroi chaude (température plus élevée) devient léger, donc il monte vers la paroi adiabatique haute; alors que le fluide au voisinage de la paroi froide qui est plus lourd (la température est plus basse) descend vers la paroi adiabatique basse. Cette stratification est continue au fur et à mesure que le temps augmente jusqu'à ce que le fluide atteint l'équilibre thermique (t=500).


(t=5)
(t=10)
(t=20)
Y
X
x
0,0
0,2
0,4
0,6
0,8

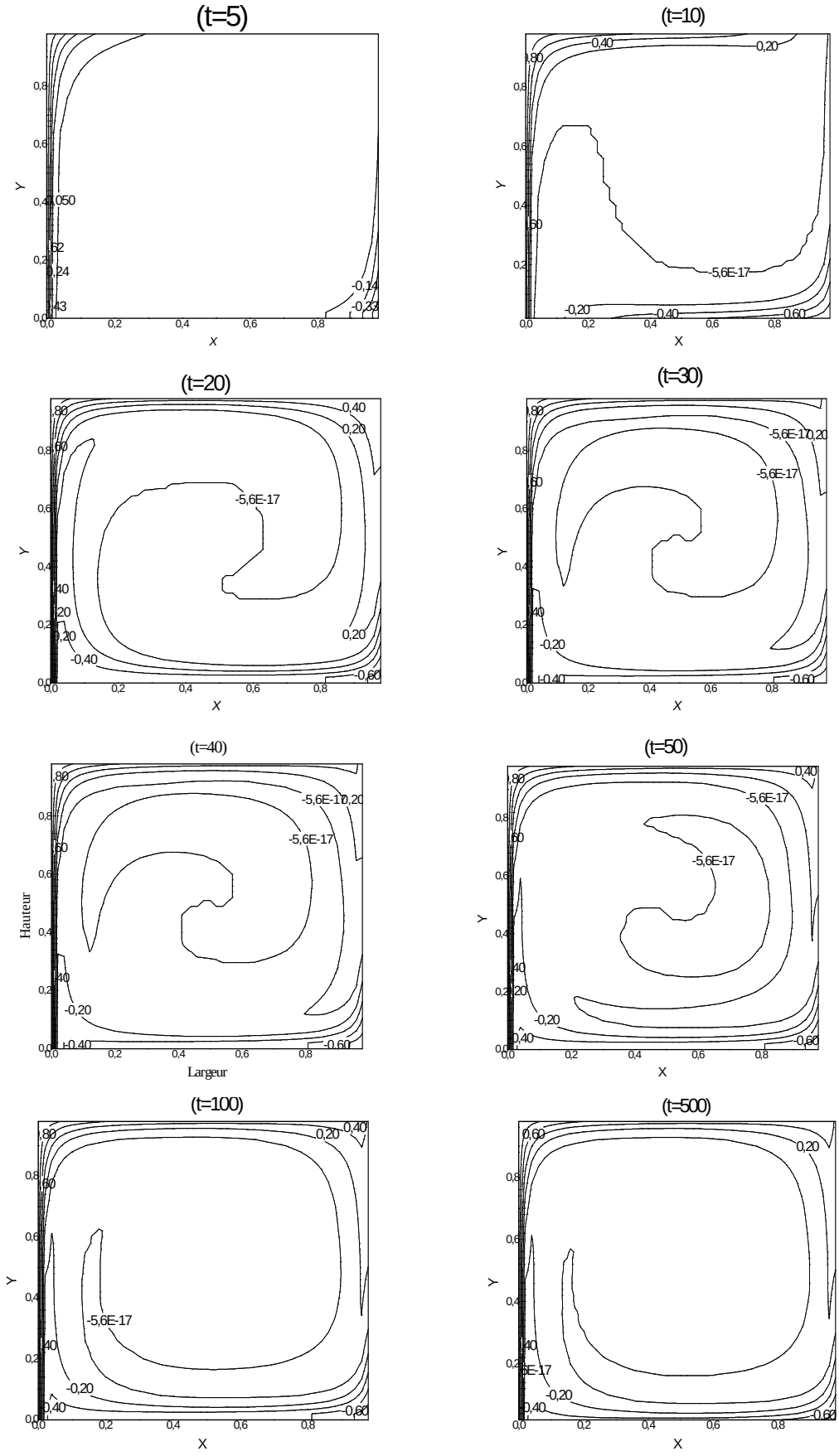


Figure 3.13: *Les isothermes en régime variable pour Ra=1.E07*

5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé un algorithme de résolution des équations différentielles gouvernant l'écoulement d'un fluide incompressible dans une cavité fermée différentièllement chauffée. L'effet du nombre de Rayleigh a été étudié, il s'avère que la convection devient de plus en plus importante lorsque le nombre de Rayleigh augmente, et un processus de circulation est mis en jeu pour $10^4 < Ra \leq 10^8$; en effet, le fluide chaud situé proche de la paroi chaude monte au niveau de la paroi horizontale haute, il rejoint ensuite la paroi froide en longeant le plafond, puis redescend au niveau de la paroi froide, avant de rejoindre la paroi chaude par le plancher. Par ailleurs, Il a été remarqué que la distribution de la température est linéaire pour Ra faible, et un fort gradient de température au voisinage des faces isothermes est observé lorsque Ra augmente.

1. INTRODUCTION

Le but de ce chapitre est d'évaluer l'impact du rayonnement des parois sur la dynamique et la thermique d'un écoulement laminaire dans une cavité différentièllement chauffée remplie d'air. Le milieu est considéré comme transparent, et les parois adiabatiques sont considérées grises.

2. DESCRIPTION DU MODELE PHYSIQUE ET HYPOTHESES

On considère une cavité carrée (2D) à parois imperméables, dont les deux faces Est et Ouest sont soumises à un écart de température et les deux autres à un flux radiatif (figure 4.1).

La cavité est remplie d'un fluide transparent (l'air de Pr = 0.71), homogène et isotrope dont l'indice de réfraction est égal à l'unité. Les parois internes sont considérées grises, diffuses et opaques et ont la même valeur d'émissivité $\mathcal{E}$. Le mouvement de l'air est gouverné par les équations de Navier-Stokes sous l'hypothèse de Boussinesq. Pour la résolution, on utilise le formalisme vorticité-fonction de courant.

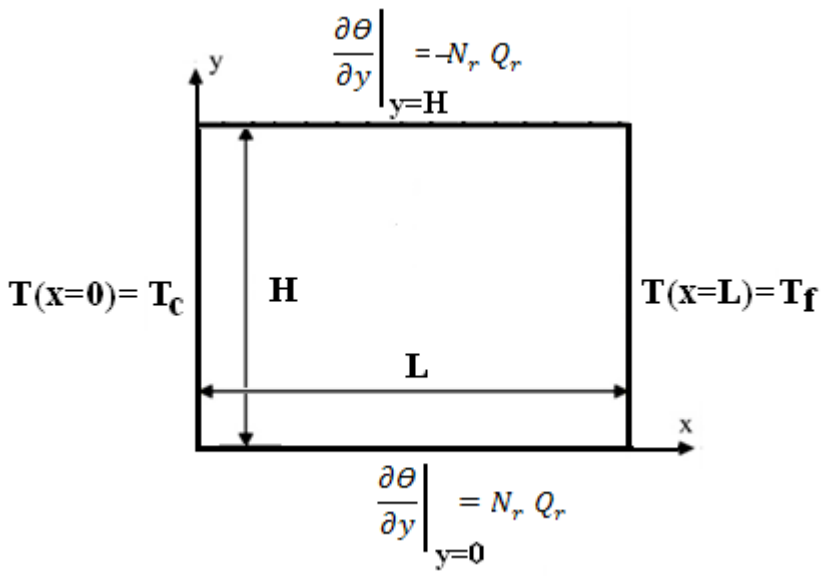


Figure 4.1 : *Schéma du modèle physique*

On considère les hypothèses suivantes :

- Le fluide est newtonien et incompressible
- Les propriétés thermophysiques sont constantes et indépendantes de la température
- Les conditions de l'application de l'approximation de Boussinesq sont remplies

- La dissipation visqueuse est négligeable
- Les surfaces sont supposées opaques, grises et Lambertiennes (émission et réflexion avec une luminance isotrope)
- Les densités de flux et les températures des surfaces élémentaires sont uniformes.
- Le fluide contenu dans la cavité (l'air) est supposé transparent.

3. FORMULATION EN VARIABLES DIMENSIONNEES

3.1. Système d'équations

De manière classique, sans rayonnement de surfaces, la condition adiabatique implique que le gradient de température normal à ces parois est nul. En présence du rayonnement, elle est traduite par l'équilibre entre les flux convectif et radiatif. Dans ce cas le rayonnement de surfaces ne modifie pas les équations gouvernant le mouvement du fluide mais altère seulement les conditions aux limites thermiques. Le couplage de la convection naturelle avec le rayonnement de surfaces se fait uniquement à travers les conditions aux limites thermiques **[32]**. Dans ce cadre des hypothèses, les équations modélisant la convection avec le rayonnement sont les suivantes :

$$\frac{\partial U}{\partial X}+\frac{\partial V}{\partial Y}=0 \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial X}+V\frac{\partial U}{\partial Y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial X}+\nu\left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}\right) \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}+U\frac{\partial V}{\partial X}+V\frac{\partial V}{\partial Y}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial Y}+\nu\left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}\right)+g\beta(T-T_0) \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+U\frac{\partial T}{\partial X}+V\frac{\partial T}{\partial Y}=a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial Y^2}\right) \tag{4.4}$$

3.2 Conditions aux limites

- U=V=0 sur toutes les frontières :

$$\begin{cases} U(X=0,Y)=V(X=0,Y)=0 \\ U(X=L,Y)=V(X=L,Y)=0 \\ U(X,Y=0)=V(X,Y=0)=0 \\ U(X,Y=H)=V(X,Y=H)=0 \end{cases} \tag{4.5}$$

- Les températures chaude et froide sur les parois verticales :

$$\begin{cases} T=T_c \quad pour\ X=0, 0\le Y\le H \\ T=T_f \quad pour\ X=L, 0\le Y\le H \end{cases} \tag{4.6}$$

T_c et T_f sont respectivement les températures des parois chaude et froide.

- En présence d'un rayonnement et pour un milieu semi-transparent, la condition adiabatique est traduite par l'équilibre entre les flux convectif et radiatif. Le couplage de la convection naturelle avec le rayonnement de surfaces se fait uniquement à travers les conditions aux limites thermiques. On a donc, pour les deux parois horizontales de la cavité:

$$-\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial Y}\right|_{Y=0} + \varphi_r|_{Y=0} = 0 \qquad (4.7)$$

$$\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial Y}\right|_{Y=H} + \varphi_r|_{Y=H} = 0 \qquad (4.8)$$

φ_r : Est le flux radiatif, égal au flux radiatif calculé à partir de l'équation (2.108)

λ est la conductivité thermique de l'air.

4. FORMULATION EN VARIABLES ADIMENSIONNEES

On utilise les mêmes grandeurs de références utilisées dans le chapitre 2 pour adimensionner les équations de conservation.

- Les grandeurs de référence sont :

$V_0 = \sqrt{g\beta H \Delta T_0}$; $t_0 = \frac{H}{V_0}$; $P_0 = \rho_0 V_0^2$

- Les variables réduites sont données par :

$x = \frac{X}{H}$; $y = \frac{Y}{H}$; $u = \frac{U}{V_0}$; $v = \frac{V}{V_0}$; $\tau = \frac{t}{t_0}$

$\theta = \frac{T-T_0}{T_c-T_f}$; $P' = \frac{P}{P_0}$; $Q_r = \frac{\varphi_r}{\sigma T_0^4}$

En appliquant le formalisme vorticité-fonction de courant (chapitre2) le système d'équations devient :

Équation de courant

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \Omega + \boldsymbol{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}} \qquad (4.9)$$

Équation de quantité de mouvement

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + u\frac{\partial \Omega}{\partial x} + v\frac{\partial \Omega}{\partial y} = -\frac{\partial \theta}{\partial x} + \sqrt{\frac{Pr}{Ra}}\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2}\right) \qquad (4.10)$$

Équation d'énergie

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + u\frac{\partial \theta}{\partial x} + v\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{RaPr}}\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}\right) \qquad (4.11)$$

Adimensionnement des conditions aux limites

$\theta = \frac{T-T_0}{\Delta T}$; $Q_r = \frac{\varphi_r}{\sigma T_0^4}$; $y = \frac{Y}{H}$; $\Delta T = T_C - T_f$; $T_0 = \frac{T_C + T_f}{2}$

Pour y=0 on a :

$$-\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial Y}\right|_{Y=0} + \varphi_r|_{Y=0} = 0 \Rightarrow \lambda \frac{\partial T}{\partial Y} = \varphi_r \quad (4.12)$$

Donc

$$\lambda \Delta T \frac{\partial \theta}{H \partial y} = Q_r \sigma T_0^4 \Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{H}{\lambda \Delta T} \sigma T_0^4 Q_r \quad (4.13)$$

$\frac{\partial \theta}{\partial y} = N_r Q_r$ Ou $N_r = \frac{H \sigma T_0^4}{\lambda \Delta T}$

Et la condition radiative:

$$\left.\frac{\partial \theta}{\partial y}\right|_{y=0} = N_r \, Q_r|_{y=0} \quad (4.14)$$

$$\left.\frac{\partial \theta}{\partial y}\right|_{y=1} = -N_r \, Q_r|_{y=1} \quad (4.15)$$

N_r : est le nombre de rayonnement ($N_r = \frac{\sigma T_0^4 H}{\lambda \Delta T}$)

Q_r : est le flux radiatif adimensionnel

5. DISCRETISATION DES EQUATIONS

On utilise comme dans le chapitre 2 le schéma UPWIND pour discrétiser le terme convectif ($u\frac{\partial \Omega}{\partial x} + v\frac{\partial \Omega}{\partial y}$) , et la méthode ADI pour discrétiser le terme instationnaire, le terme diffusif et le terme de BOUYANCY, les équations obtenues sont comme suit :

5.1 Equation de vorticité

Etape1-prédicteur

$$\Omega_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}(A-D) + \Omega_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}(1+B+2D) + \Omega_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}(C-D)$$
$$= \Omega_{i,j-1}^{n}(H-E) + \Omega_{i,j}^{n}(1-2H-F) + \Omega_{i,j+1}^{n}(H-G)$$
$$+ AK \quad (4.16)$$

Avec :

$\Delta\tau$: pas dans le temps

Δx : pas dans l'espace selon l'axe $\overrightarrow{ox}$

Δy *:* pas dans l'espace selon l'axe $\overrightarrow{oy}$

Avec:

$$A = \frac{\Delta\tau.cuw}{2\Delta x} \quad ; \quad B = \frac{\Delta\tau.cui}{2\Delta x} \quad ; \quad c = \frac{\Delta\tau.cue}{2\Delta x}$$

$$D = \frac{\Delta\tau}{2.\Delta x^2}\sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \quad ; \quad E = \frac{\Delta\tau.cvi}{2\Delta y}; \quad F = \frac{\Delta\tau.cvi}{2\Delta y}; \quad G = \frac{\Delta\tau.cvn}{2\Delta y}$$

$$H = \frac{\Delta\tau}{2.\Delta y^2}\sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \quad ; \quad AK = \frac{\Delta\tau}{4\Delta x}\left[\Theta_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - \Theta_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}\right]$$

Etape2-correcteur

$$\Omega_{i,j-1}^{n+1}(E-H) + \Omega_{i,j}^{n+1}(1+F+2H) + \Omega_{i,j+1}^{n+1}(G-H)$$
$$= \Omega_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}(D-A) + \Omega_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}(1-B-2D) + \Omega_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}(D-C)$$
$$+ AK \qquad (4.17)$$

Avec:

$$A = \frac{\Delta\tau.cuw}{2\Delta x} \quad ; \quad B = \frac{\Delta\tau.cui}{2\Delta x} \quad ; \quad c = \frac{\Delta\tau.cue}{2\Delta x}$$

$$D = \frac{\Delta\tau}{2.\Delta x^2}\sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \quad ; \quad E = \frac{\Delta\tau.cvi}{2\Delta y}; \quad F = \frac{\Delta\tau.cvi}{2\Delta y}; \quad G = \frac{\Delta\tau.cvn}{2\Delta y}$$

$$H = \frac{\Delta\tau}{2.\Delta y^2}\sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \quad ; \quad AK = \frac{\Delta\tau}{4\Delta x}\left[\Theta_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - \Theta_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}\right]$$

5.2. Equation de l'énergie

Etape1- prédicteur

$$\Theta_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}(A-D) + \Theta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}(1+B+2D) + \Theta_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}(C-D)$$
$$= \Theta_{i,j-1}^{n}(H-E) + \Theta_{i,j}^{n}(1-F-2H)$$
$$+ \Theta_{i,j+1}^{n}(H-G) \qquad (4.18)$$

Avec :

$$A = \frac{\Delta\tau.cuw}{2\Delta x} \quad ; \quad B = \frac{\Delta\tau.cui}{2\Delta x} \quad ; \quad c = \frac{\Delta\tau.cue}{2\Delta x}$$

$$D = \frac{\Delta\tau}{2.\Delta x^2\sqrt{RaPr}} \quad ; \quad E = \frac{\Delta\tau.cvi}{2\Delta y}; \quad F = \frac{\Delta\tau.cvi}{2\Delta y}; \quad G = \frac{\Delta\tau.cvn}{2\Delta y}$$

$$H = \frac{\Delta\tau}{2.\Delta y^2\sqrt{RaPr}}$$

Etape2-correcteur

$$\Theta_{i,j-1}^{n+1}(E-H)+\Theta_{i,j}^{n+1}(1+F+2H)+\Theta_{i,j+1}^{n+1}(G-H)$$
$$=\Theta_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}(D-A)+\Theta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}(1-B-2D)$$
$$+\Theta_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}(D-C) \quad (4.19)$$

Avec :

$A=\frac{\Delta\tau.cuw}{2\Delta x}$; $B=\frac{\Delta\tau.cui}{2\Delta x}$; $c=\frac{\Delta\tau.cue}{2\Delta x}$

$D=\frac{\Delta\tau}{2.\Delta x^2\sqrt{RaPr}}$; $E=\frac{\Delta\tau.cvi}{2\Delta y}$; $F=\frac{\Delta\tau.cvi}{2\Delta y}$; $G=\frac{\Delta\tau.cvn}{2\Delta y}$

$H=\frac{\Delta\tau}{2.\Delta y^2\sqrt{RaPr}}$

Les coefficients de ces équations sont considérés comme connus à chaque instant. Chaque équation constitue un système d'équations constituant une matrice tridiagonale. Le système ainsi obtenu est résolu par l'algorithme de Thomas T.D.M.A (Tri Diagonal Matrix Algorithm).

5.3. Equation de fonction de courant

On utilisant les différences finies centrées pour discrétiser l'équation (4.8) :

$$\Omega_{i,j}^{n-1}+\frac{\Psi_{i+1,j}^{n-1}-2\Psi_{i,j}^{n-1}+\Psi_{i-1,j}^{n-1}}{\Delta x^2}+\frac{\Psi_{i,j+1}^{n-1}-2\Psi_{i,j}^{n-1}+\Psi_{i,j-1}^{n-1}}{\Delta y^2}=0 \quad (4.20)$$

On pose :

$$aa=\frac{1}{\Delta x^2} \qquad bb=\frac{1}{\Delta y^2}$$

On obtient :

$$\Psi_{i,j}^{n-1}=\frac{1}{2*aa+2*bb}\Omega_{i,j}^{n-1}+\frac{aa}{2*aa+2*bb}(\Psi_{i+1,j}^{n-1}+\Psi_{i-1,j}^{n-1})$$
$$+\frac{bb}{2*aa+2*bb}\left(\Psi_{i,j+1}^{n-1}+\Psi_{i,j-1}^{n-1}\right) \quad (4.21)$$

La résolution du système d'équation ainsi obtenu est effectuée en utilisant la méthode de SOR (méthode de sur relaxation successive)**.**

6. DISCRETISATION DES CONDITIONS INITIALES ET AUX LIMITES

- **Le champ des vitesses**

$$\begin{cases} u_{1,j}^n = u_{im,j}^n = u_{i,1}^n = u_{i,jm}^n = 0 \quad \forall n \\ v_{1,j}^n = v_{im,j}^n = v_{i,1}^n = v_{i,jm}^n = 0 \quad \forall n \\ u_{i,j}^0 \qquad \forall i,j \\ v_{i,j}^0 \qquad \forall i,j \end{cases} \tag{4.22}$$

- Le champ de température

$$\begin{cases} \theta_{1,j}^n = \theta_c & \forall j,n \\ \theta_{im,j}^n = \theta_f & \forall j,n \\ \theta_{i,j}^0 = 0 \;\; pour \; (i = 2, im-1; \; j = 1, jm) \end{cases} \tag{4.23}$$

- Les parois adiabatiques

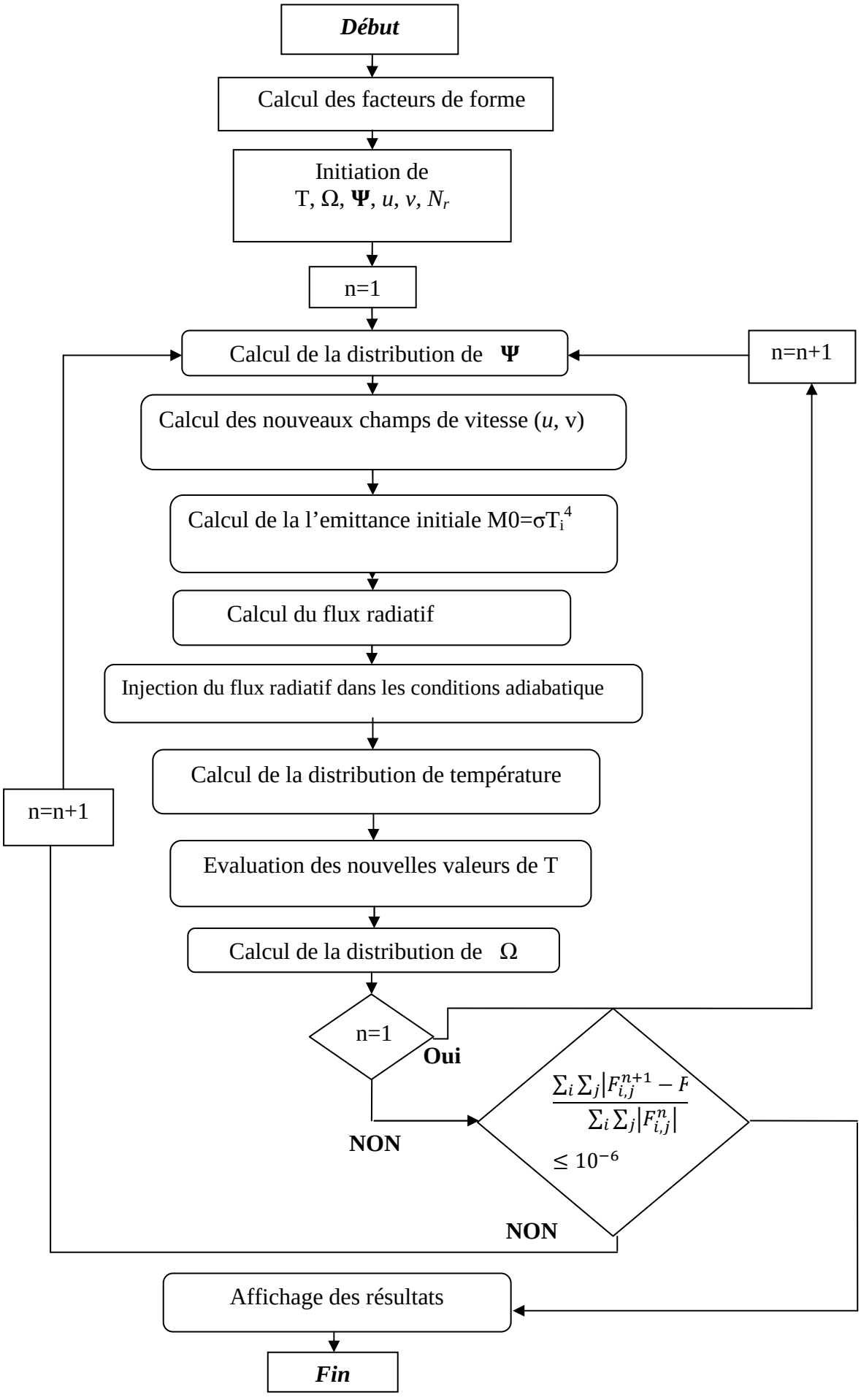
$$\begin{cases} \dfrac{\theta_{i,2}^n - \theta_{i,1}^n}{2\Delta y} = N_r \, Q_r \\ \dfrac{\theta_{i,jm+1}^n - \theta_{i,jm-1}^n}{2\Delta y} = -N_r \, Q_r \end{cases} \tag{4.24}$$

- Concernant la fonction de courant

$$\begin{cases} \Psi_{i,j}^n = \Psi_{im,j}^n = \Psi_{i,1}^n = \Psi_{i,jm}^n = 0 & \forall n \\ \Psi_{i,j}^0 = 0 & \forall i,j \end{cases} \tag{4.25}$$

7. ALGORITHME DE CALCUL

L'algorithme de la méthode numérique est montré ci-dessous


Début
Calcul des facteurs de forme
Initiation de
T, Ω, Ψ, u, v, N_r
n=1
Calcul de la distribution de Ψ
n=n+1
Calcul des nouveaux champs de vitesse (u, v)
Calcul de la l'emittance initiale M0=σT_i^4
Calcul du flux radiatif
Injection du flux radiatif dans les conditions adiabatique
Calcul de la distribution de température
n=n+1
Evaluation des nouvelles valeurs de T
Calcul de la distribution de Ω
n=1
Oui
NON
$\frac{\sum_i \sum_j |F_{i,j}^{n+1} - F}{\sum_i \sum_j |F_{i,j}^{n}|} \leq 10^{-6}$
NON
Affichage des résultats
Fin

8. RESULTATS ET DISCUSSION

Le code a été t exercé sur des problèmes de référence pour vérifier sa validité. Notre code a été validé avec les résultats numériques publiés antérieurement, et l'accord entre le présent et les résultats précédents étaient très bons dans la référence [32]. Pour cela dans la présente étude, nous avons concerné la même température de référence T_0 utilisée dans [32] et la même longueur de référence H utilisée dans les travaux de Hong et al [32]. Ou T_0=293.5K, et $\Delta T = 10K$: on a

La température réduite (ou adimensionnelle) : $\theta = \frac{T-T_0}{\Delta T}$

Température de référence : $T_0 = \frac{T_c+T_f}{2} = 293.5K$

Différence de température :$\Delta T = T_c - T_f = 10K$

On a donc : $T_c + T_f = 587K$ et $T_c - T_f = 10K$

Ce qui donne : $T_c = 298.5K$ et $T_f = 288.5K$

Et par la suite :

$$\theta_c = \frac{T_c - T_0}{\Delta T} = \frac{298.5 - 293.5}{10} = 0.5$$

$$\theta_f = \frac{T_f - T_0}{\Delta T} = \frac{288.5 - 293.5}{10} = -0.5$$

Concernant la longueur de référence H utilisée dans les travaux de Wang et al [32]

$$Ra = \frac{g.\beta.\Delta T.H^3}{\nu.a}$$

g : Accélération de la pesanteur [9.81 $m.s^{-2}$]

β : Coefficient de dilatation thermique [pour l'air1/T=1/T_0=1/293.5 K^{-1}]

ΔT: Différence de température $T_C - T_f = 10K$

ν : Viscosité cinématique [pour l'air à 20°C ~1.5× $10^{-5} m^2 s^{-1}$]

a : Diffusivité thermique [pour l'air à 20°C ~2.02× $10^{-5} m^2 s^{-1}$]

$Ra = 1.103 \times 10^9 . H^3$

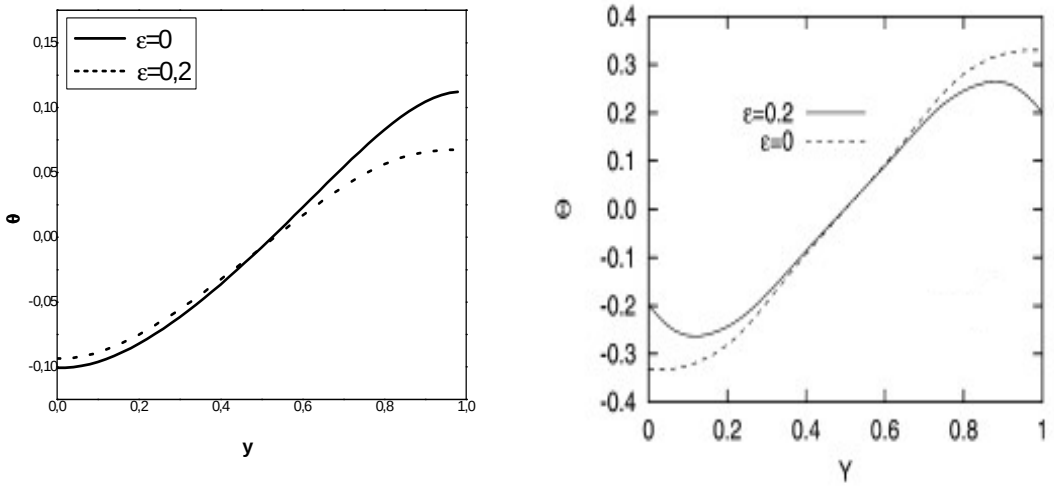
Et le nombre de rayonnement N_r ($N_r = \frac{\sigma T_0^4 H}{\lambda \Delta T}$)

σ: le constante de Stefan- Boltzmann (σ=5.67× 10^{-8} $w.m^{-2}.K^{-4}$)

Le tableau si dessous contient les valeurs de H pour différentes valeurs de Ra ; et le nombre de rayonnement en fonction de $\mathcal{E}$:

Ra	10^4	10^5	10^6
H(m)	0.0209	0.045	0.097
Nr	31.018	66.78	143.948

Nous présentons dans la figure (4.2) le profil de température en x=0.5 dans le cas sans rayonnement ($\mathcal{E}$=0) et en présence du rayonnement pour une valeur de l'émissivité $\mathcal{E}$ égale à 0.2 ; nos résultats sont très similaires à celles trouvées par Hong et al [32], pour cela on peut dire que le code pourrait être correctement appliqué au problème considéré.



(a) **(b)**

Figure 4.2 : *profils de température en x=0.5 ; à Ra=10^4* ***:(a)*** *obtenus par notre code* ***(b)*** *donnés par Hong et al [32]*

Les figures (4.3), (4.5), (4.5), (4.6) présentent les isothermes et lignes de courant en absence et en présence du rayonnement pour deux nombres de Rayleigh 10^4 et 10^5.

Les nombres de Rayleigh considérés dans cette étude produisent des écoulements monocellulaires.

En mode de convection naturelle combinée au rayonnement thermique ($\mathcal{E}\neq$ 0), l'inclinaison des isothermes dans les régions se trouvant prés des parois horizontales est due à l'importance des flux radiatifs. Les lignes de courant montrent que le rayonnement thermique réduit considérablement l'écoulement dans la cavité.

En fait, le rayonnement réduit l'écart de température entre les parois horizontales et donc, diminue la vitesse de l'air au voisinage des ces parois figure (4.7).

En fin la paroi haute est refroidie (figure 4.2) et la paroi basse es réchauffée (figure 4.8) e. Ce comportement de la température sur les parois horizontales s'explique par le fait que la paroi haute perd la chaleur (flux net radiatif essentiellement positif) et que la paroi basse reçoit de la chaleur (flux net radiatif essentiellement négatif)

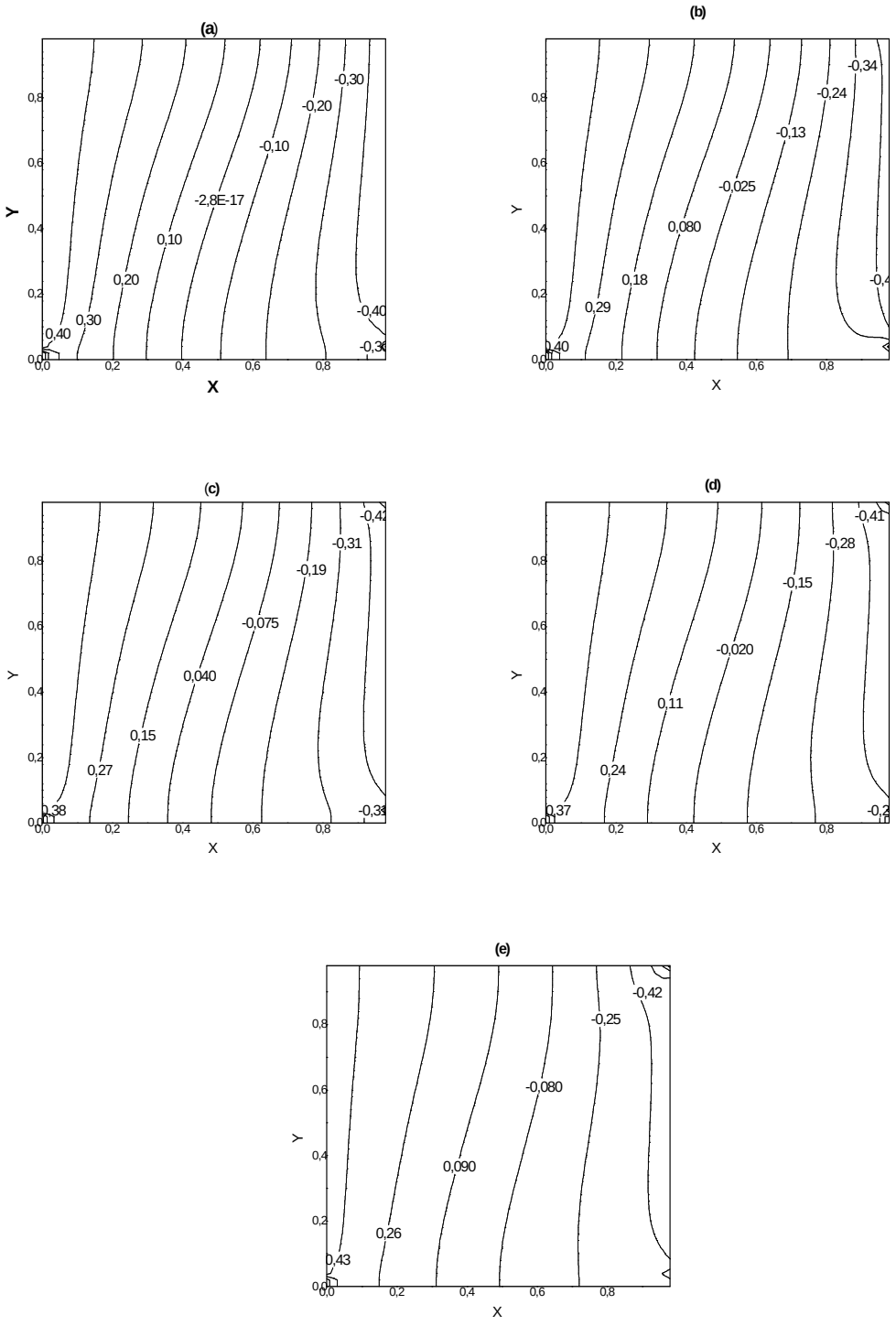


Figure 4.3 : *Influence de l'émissivité sur les isothermes à* $Ra=10^5$ *(a)*$\mathcal{E}$*=0 (b)* $\mathcal{E}$*=0.1 ; (c)*$\mathcal{E}$*=0.2 ; (d)* $\mathcal{E}$*=0.4 ; (e)*$\mathcal{E}$*=0.8*

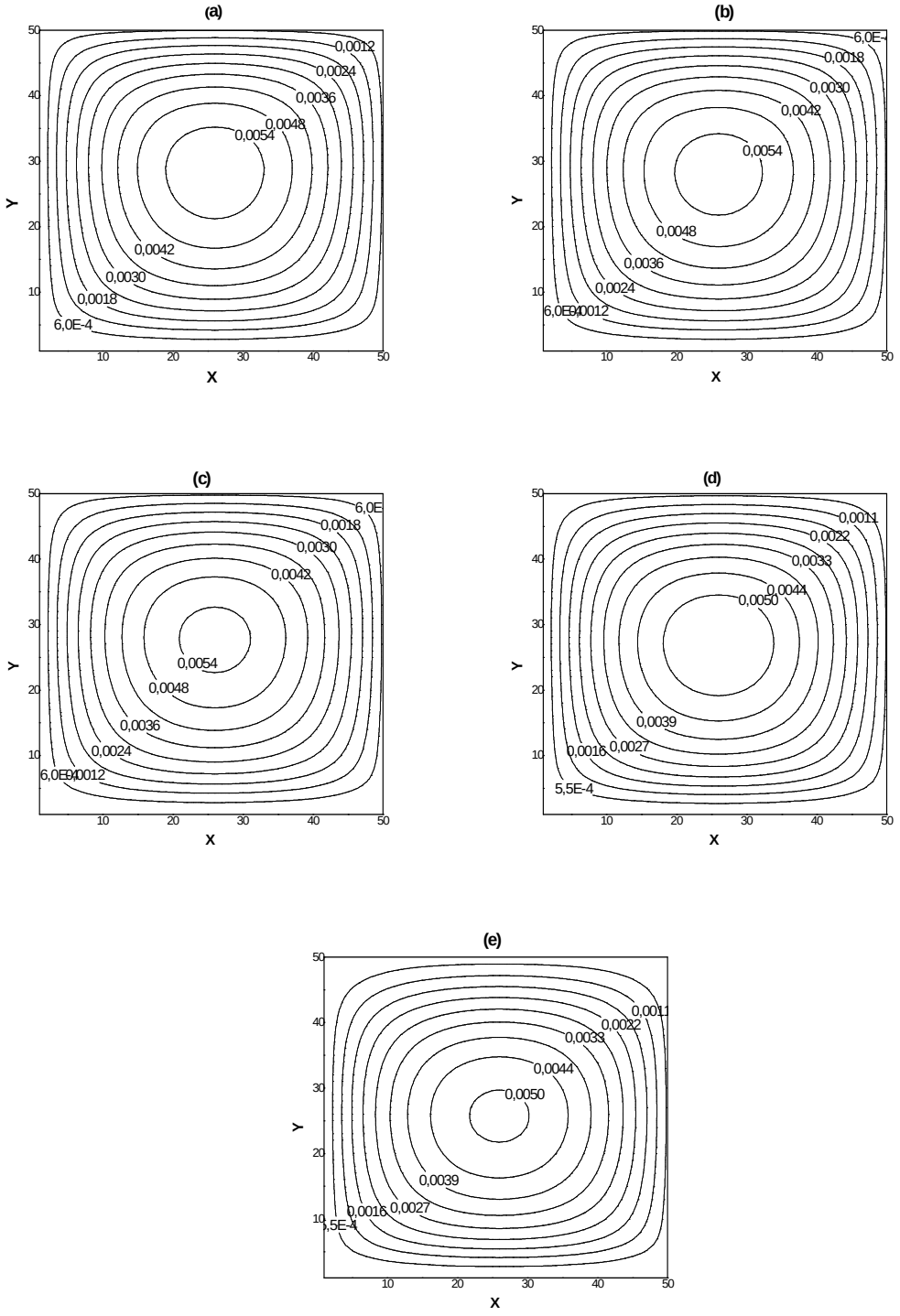


Figure 4.4 : *Influence de l'émissivité sur l'écoulement à* $Ra=10^5$ *(a)*$\mathcal{E}$*=0 ; (b)* $\mathcal{E}$*=0.1 ; (c)*$\mathcal{E}$*=0.2 ; (d)* $\mathcal{E}$*=0.4 ; (e)*$\mathcal{E}$*=0.8*

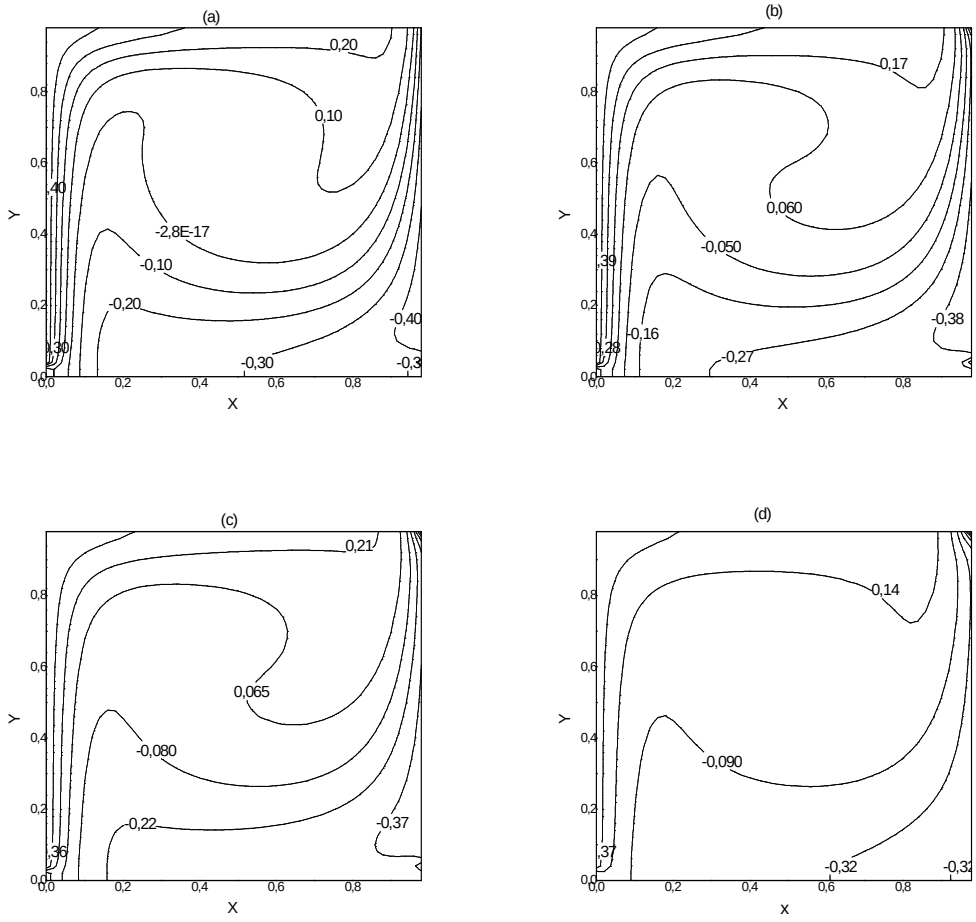


Figure 4.5 : *Influence de l'émissivité sur les isothermes à Ra=10^5 (a)$\mathcal{E}$=0, (b) $\mathcal{E}$=0.2 (c)$\mathcal{E}$=0.4, (d) $\mathcal{E}$=0.8*

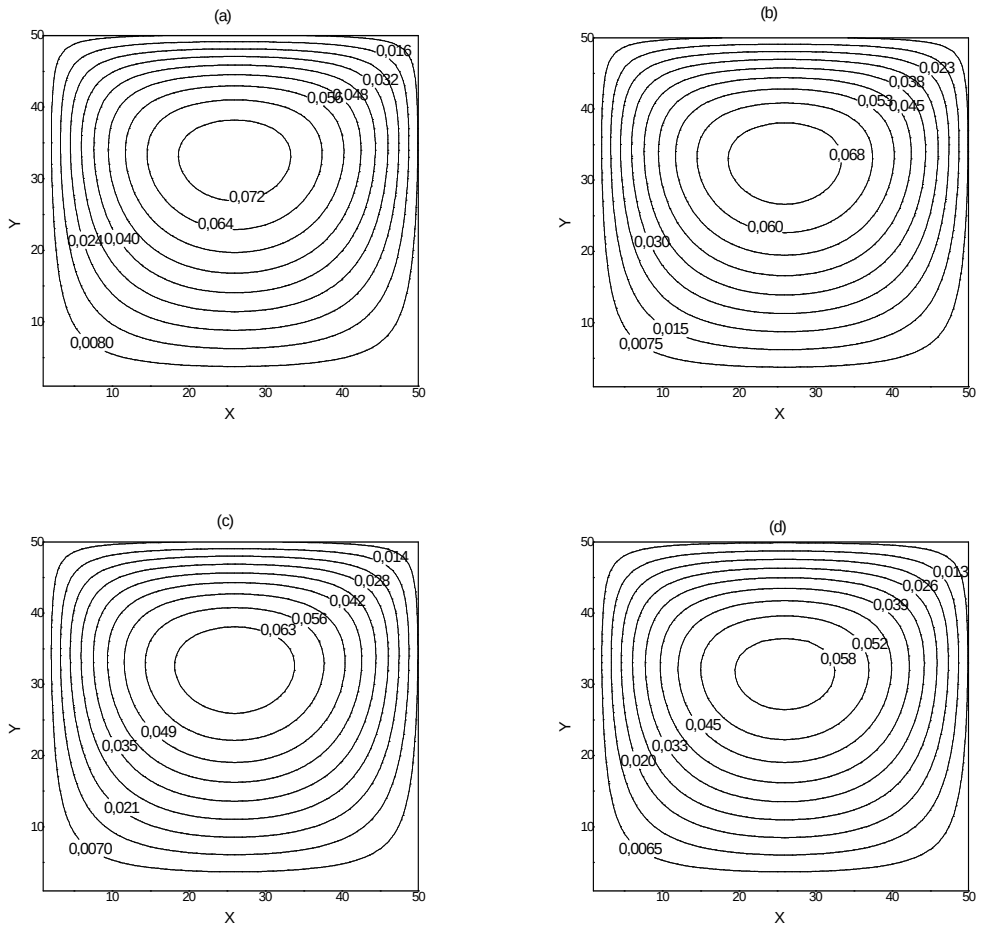


Figure 4.6 : *Influence de l'émissivité sur l'écoulement à Ra=10^5 (a)$\mathcal{E}$=0, (b) $\mathcal{E}$=0.2 (c)$\mathcal{E}$=0.4, (d) $\mathcal{E}$=0.8*

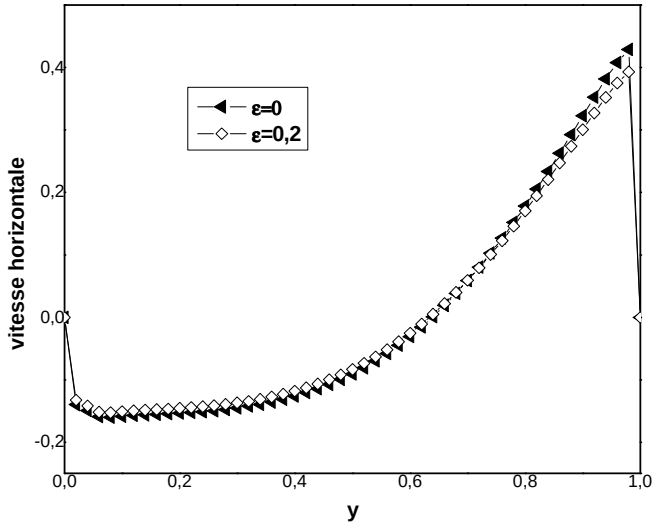


Figure 4.7 : *profils de la vitesse horizontale en Ra=10^5à x=0.5*

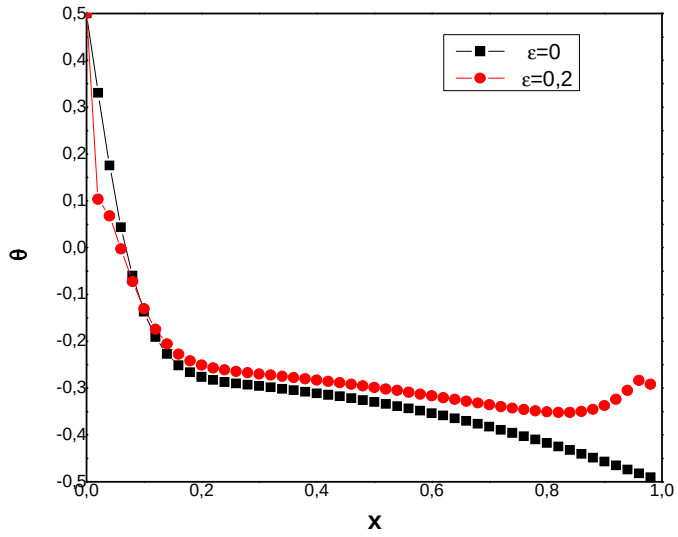


Figure 4.8 : *profils de température en Ra=10^{5}à la paroi basse*

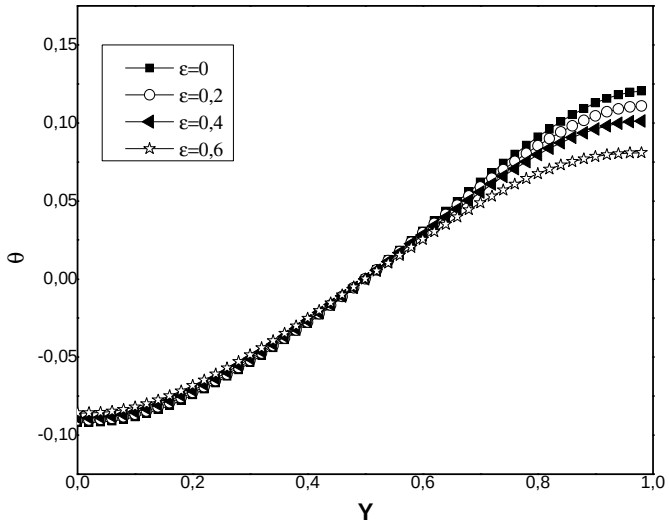


Figure 4.9 : *influence de l'émissivité sur les profils de température à Ra=10^4*

La figure 4.9 illustre à *Ra* = 10^4 l'influence du rayonnement de surfaces sur la stratification thermique qui diminue en fonction de l'émissivité.

9. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié numériquement le couplage de la convection naturelle avec le rayonnement des surfaces dans une cavité carrée différentièllement chauffée, dont les parois horizontales sont à un flux radiatif. La méthodologie numérique utilisée est une méthode de radiosité combinée à la méthode des différences finies.

La validation du code développé est réalisée par comparaison avec les données de littérature.

A la lumière de cette étude on peut dit que :

- le couplage de la méthode de radiosité à la méthode des différences finies donne de bons résultats.
- le rayonnement thermique réduit considérablement l'écoulement dans la cavité.
- le rayonnement thermique réduit l'écart de température entre les parois adiabatique et donc, diminue la vitesse de l'air au voisinage de ces parois.

Conclusion générale

Le travail réalisé dans le cadre de ce mémoire est destiné à mieux comprendre les processus de la convection naturelle, du rayonnement thermique, et de leur couplage dans une cavité différentièllement chauffée sur ses parois verticales. Des conditions radiatives sont appliquées aux deux parois horizontales.

Le sujet traité nous a permis de connaitre et de mettre en œuvre plusieurs méthodes analytiques et numériques :

- méthode des différences finies où le système d'équations est discrétisé selon la méthode implicite des directions alternées (ADI).
- méthode de sur-relaxation successive avec un facteur optimal de convergence rapide, pour la résolution de l'équation de la fonction de courant
- Ainsi que d'autres méthodes de résolution comme TDMA, Radiosité, etc...

Dans la première partie de ce travail nous avons présenté une étude dynamique et thermique de la convection naturelle pure pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh.

L'analyse théorique entreprise a permis de réduire le nombre de variables à trois (la température θ, le fonction de courant ψ , et la vorticité Ω). Dans les équations de conservation figurent un certain nombre de grandeurs physiques telles que le nombre de Prandtl Pr et le nombre de Rayleigh Ra.

La simulation numérique a été réalisée pour des nombres de Rayleigh allant de 10^3 jusqu'à 10^8 pour un nombre d'aspect égal à 1.

Nous avons constaté que la convection devient de plus en plus importante lorsque le nombre de Rayleigh augmente, et un processus de circulation est mis en jeu pour $10^4 < Ra \leq 10^8$; en effet, le fluide chaud situé proche de la paroi chaude monte au niveau de la paroi horizontale haute, il rejoint ensuite la paroi froide en longeant le plafond, puis redescend au niveau de la paroi froide, avant de rejoindre la paroi chaude par le plancher.

Par ailleurs, Il a été remarqué que la distribution de la température devient linéaire pour des faibles valeurs du nombre de Rayleigh, et un fort gradient de température au voisinage des faces isothermes est observé lorsque Rayleigh augmente.

La deuxième partie du travail a été consacrée à l'étude de l'effet du rayonnement de surface sur le comportement thermique et dynamique du fluide dans une cavité carrée

bidimensionnelle. La méthode de radiosité associée aux différentes méthodes numériques de résolution des équations de la convection naturelle, a permis de traiter le problème de couplage en mettant en œuvre un code numérique qui est validé à travers les différents tests réalisés. Dans ce cas, nous avons remarqué que le rayonnement thermique réduit considérablement l'écoulement dans la cavité, ainsi que l'écart de température entre les parois horizontales, ce qui diminue la vitesse de l'air au voisinage de ces parois.

La simulation numérique présentée pourrait être poursuivie dans des cas plus complexes tels que : géométrie cylindrique, présence d'un champ magnétique, etc….

Références bibliographiques

1. F.KREITH, Traduction de B.KHODJA, « Transmission de la chaleur thermodynamique ». Edition Masson 1967.

2. C.BODY, « Les échanges de chaleur par convection » (1ère partie). Edition bordas/Mouton, Paris, 1968.

3. J-F. SCADURA, « Initiation aux transferts thermiques ». Technique et documentation Paris (France) 1993 p185 à 266.

4. A. LEONTIEV, « Théorie des échanges de chaleur et de masse ». Edition MIR Moscou 1979.

5. Y.JANNOT, « Transfert thermique ». École des Mines Nancy, 2eme année, 2009.

6. N. ROUGER, « Sensibilité de la convection naturelle en cavité différentièllement chauffée à des variations des paramètres géométrique, thermique et massique ». Thèse de doctorat, Université de Poitiers France 2009.

7. P.E.ROCHE, « Convection thermique turbulente en cellule de Rayleigh-Bénard ». Thèse de Doctorat, Université de Grenoble, France, 2001.

8. N. LAAROUSSI, «Contribution à la simulation numérique des transferts de chaleur par conduction, rayonnement et convection thermo-solutales dans les cavités ». Thèse de doctorat, PARIS-EST, 2008.

9. F.ATTOUI ; O.DOUBE, « Convection naturelle à grand écart de température dans une cavité fermé avec obstacles ». Congrès français de thermique, SFT2000, Lyon 15-17 Mai 2000

10. S. PAOULUCCI, « On the filtering of sound from the Navier-Stokes equations », Sandia National Laboratory Report SAND, 1982

11. S.V. PATANKAR, «Numerical Heat Transfer and Fluid Flow» Ed. Hemisphere, New York, 1980

12. J.D.HOFFMAN, «Numerical methods for engineers and scientists». Second edition; Ed. Marcel Dekker, U.S.A. 2001

13. I. DANIALA, et AL, «Introduction au calcul scientifique par la pratique». Ed. Dunod, Paris 2005. P 262.

14. N.BEN CHEIKH et al, « Natural convection flow in a tall enclosure using a multigrid method ». C. R. Mecanique 335(2007) 113-118.

15. J.H.FERZIGER ET M.PERIC, « Computational methods for fluid dynamics».3rd Edition, Springer 2002.p105, 181.

16. C.A.J. FLETCHER, « Computational techniques for fluid dynamics». Ed. Springer 1987.

17. J-P DEMAILLY, « Analyse numérique et équations différentielles»**.** Ed. Presse universitaire de Grenoble 1996.

18. E.GONCALVES, « Résolution numérique, discrétisation des EDP et EDO ». Institut National Polytechnique de Grenoble 2005.

19. W.J.MINKOWYCZ et al. , « Handbook of numerical heat transfer ». Ed. John Wily Sons. United States of America. 1988.

20. S.C.CHAPRA, R.P.canal, « Numerical methods for engineers with programming and software applications ». McGAW-HILL INTERNATIONAL EDITIONS 1998 Singapore.

21. M.GUELLAL, A. HAMLAOUI, «Alternating Direction Implicit Method for Free Convection Simulation in a Cylindrical Enclosure ». Contemporary Engineering Sciences, Vol. 1, 2008, no. 2, 51 - 62

22. H.SUN, G.LAURIAT, «On the heat and mass transfer analogy for natural convection of non-dilute binary mixtures of ideal gases in cavities». C. R. Mécanique 337(2009) 141-149.

23. T.RAYENE et al, « Transferts thermiques et solutaux en convection naturelle instationnaire dans une enceinte rectangulaire contenant un volume d'eau surmonté par de l'air». 31eme journées Internationales de Thermique. Alibi, France du 28-30 Aout 2007.

24. Y.VAROL et al, «Effects of inclination angle on conduction-natural convection in divided enclosures filled with different fluids». International Communication in Heat and Mass Transfer 37 (2010)182-191.

25. E.H.RIDUOANE et al, « A 2-D numerical study of chaotic flow in a natural convection loop». International Journal of Heat and Mass Transfer 53(2010) 76-84.

26. X.XU et al, «Numerical study of laminar natural convective heat transfer around a horizontal cylinder inside a concentric air-filled triangular enclosure». International Journal of Heat and Mass Transfer 53(2010) 345-355.

27. M.MOBEDI et al, « Visualization of diffusion and convection heat transport in a square cavity with natural convection». International Journal of Heat and Mass Transfer 53(2010) 99-109.

28. M.JAHANSHAHI et al, « Numerical simulation of free convection based on experimental measured conductivity in a square cavity using water/SiO_2 nanofluide». International Communication in Heat and Mass Transfer 37(2010) 687-694.

29. T. DELAROCHELAMBERT, «Etude expérimentale et numérique des transferts de chaleur en convection naturelle le long de parois verticales épaisses rayonnement fortement chauffées». Congrès Français De Thermique, SFT2000, Lyon 15-17 mai 2000.

30. N.LAAROUSSI, G.LAURIAT, X.NICOLAS, «Etude numérique des transferts de chaleur couplés dans une paroi alvéolaire». 12èmes journées internationales de thermique Tanger Maroc du 15-17 Novembre 2005.

31. A.MEZERAB, M.RABHI, H.NAJI et C.ABID, «Etude numérique du couplage convection rayonnement dans une enceinte cloisonnée». Revue des énergies renouvelables Vol 10 N°2 (2007) 293-298.

32. H.WANG, S.XIN, P.LE QUERE, «Etude numérique du couplage de la convection naturelle avec rayonnement de surfaces en cavité carrée remplie d'air ». C.R.Mécanique 334 (2006) 48-57.

33. M.JAMI, M.A.MOUSSAOUI, A.MEZRHAB, D.LEMONNIER,

« Modélisation du couplage convection naturelle rayonnement dans une cavité contenant un cylindre». 13èmes journées internationales de thermique. Albi, France du 28 au 30 Aout 2007.

34. A.MEZRHAB, H .NAJI, «Modélisation des transferts thermiques couplés à l'aide de la méthode de Boltzmann sur réseau ». 18ème congrès Français de mécanique .Grenoble 27-31 Aout 2007.

35. G.SCARELLA, G.ACCARY, D.MORVAN and O.BESSONO, «Three-dimensional numerical simulation of the interaction between natural convection and radiation in a differentially heated cavity in the low Mach number approximation». ICHMT international symposium on advances in computational heat transfer May 11-16, 2008 Marrakech Morocco.

36. G. LAURIAT, G.DESRAYAUD, « Effect of surface radiation on conjugate natural convection in partially open enclosures», International Journal of Thermal sciences 45(2006) 335-346.

37. H.C. CHIN, W.M YAN, «Mixed convection heat transfer in inclined rectangular ducts with radiation effects», International Journal of Heat and Mass transfer 51(2008) 1085-1094.

38. G.COLOMER, et al., «Coupled radiation and natural convection: different approaches of the SLW model for a non-gray gas mixture», Journal of Quantitative Spectroscopy § Radiative Transfer 107(2007) 30-46.

39. J.LANGEBACH et al., «Experimental study of convection and radiation interaction in a headlight model pressure variation», Experimental Thermal and Fluid Science 32(2007) 521-528.

40. I.U.MBELEDOGU et al., «Unsteady MHD free convective flow of a compressible fluid past a moving vertical plate in the presence of radiative heat transfer », International Journal of Heat and Mass transfer 50(2007) 1668-1674.

41. H.NOUANEGUE et al., «Conjugate heat transfer by natural convection, conduction and radiation in open cavities», International Journal of Heat and Mass transfer 51(2008) 6054-6062.

42. M. Abed El AZIZ, «Radiation effect on the flow and heat transfer over an unsteady stretching sheet», International Communication in heat and mass transfer 36(2009) 521-524.

43. M. MIRAJ et al, «Effect of radiation on natural convection flow on a sphere in presence of heat generation», International Communication in heat and mass transfer 37(2010) 660-665.

44. M.A SEDEEK, MS.ADBELAMEGUIDE, «Effect of radiation and thermal diffusivity on heat transfer over a stretching surface with variable heat flux», Physics Letters A 348 (2006) 172-179.

45. A.M.FIC et al, «Heat and mass transfer under an infant radiant warmer – development of a numerical model», Medical Engineering § Physics 32(2010) 497-504.

46. A. HADDAD, «Transferts Thermiques». Dar-El-Djazairia, Alger 2001 .p87-98.

47. I. ASHDOWN, «Eigenvector Radiosity». Thèse de Master of Science, university of British Columbia, April 2001.

48. G. Ritoux, « Evaluation numérique des facteurs de forme ». Revue phys. App. 17(1982) 503-515, Classification physics Abstracts 44.40.

49. G.H.GOLUB and C.F.VAN LOAN «Matrix computation». Third Edition. John Hopkins University press, Bellmore, MD.1996

50. J.T.KAJIYA, «The rendering equation». Computer graphics 1986 20(4):143-150.

51. B.DEMIDOVITCH et I.MARON traduit de russe par V.POLONSKI, « Elément de calcul numérique ». Traduction Française, Editions Mir, 1979.p262-263.

52. J.R.HOWELL, «A catalog of radiation configuration factors». McGraw-Hill, New York,1982.

53. S.R. OTTO, J.P. DENIER, «An introduction to programming and numerical methods in matlab ». Springer-Verlage London Limited 2005.

54. A. EL KASMI, « Application de la méthode des ordonnées discrètes au transfert radiatif dans des géométries bidimensionnelles complexes - Couplage rayonnement-convection ». Mémoire de maitrise en ingénierie; Université du Québec à Chicoutimi 1999.

55. S. LAOUAR, «Convection naturelle instationnaire dans une enceinte bidimensionnelle carrée – bifurcation vers le chaos». 13ème Journées International de Thermique « JITH 2007 : France 2007 ».

56. **S. LAOUAR,** «Etude de la convection naturelle transitoire et bidimensionnelle dans une enceinte parallélépipédique allongée de section droite carrée – bifurcation vers le chaos- ». Thèse de doctorat ; Université Mentouri Constantine…

57. N.G.KOTCHI Rémi, « Contribution a l'étude en convection naturelle du comportement aérothermique d'une cellule type pièce d'habitation: (configuration simple) ». Thèse de doctorat de l'université de PAUL- SABATIER DE TOULOUSE 1989.

58. A.IBRHIM, « Couplage de la convection naturelle et du rayonnement dans des mélanges gazeux absorbant-émettant »**.** Thèse de doctorat de l'université de POITIERS 2010.

59. D.C. Lo, D.L. Young, C.C. Tsai, « High resolution of 2D natural convection in a cavity by the DQ method». Journal of Computational and Applied Mathematics 203 (2007) 219 – 236.

60. M. GHASSEMI, et al., «A Numerical Study of Natural Convection in a Tilted Cavity with Two Baffles Attached to its Isothermal Walls». WSEAS TRANSACTIONS on FLUID MECHANICS. Issue 3, Volume 2, July 2007. ISSN: 1790-5087

61. M. LAMSAADI, et al. « Etude analytique et numérique de la convection naturelle dans une cavité rectangulaire horizontale uniformément chauffée par le bas ». Tétouan-Maroc FIER 2002.

A1. La méthode de relaxation

Les équations relatives à l'ensemble des nœuds forment un système linéaire de *n* équations à *n* inconnues. On se donne une matrice inversible A et un système linéaire

$$Ax = b \qquad (A.1)$$

On introduit la partition $A = D - E - F$ où :

$$\begin{cases} D_{ij} = a_{ij}\delta_{ij} \\ E_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} & i > j \\ 0 & i \leq j \end{cases} \\ F_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} & i < j \\ 0 & i \geq j \end{cases} \end{cases} \qquad (A.2)$$

Donc A devient :

$$A = \begin{pmatrix} & D & -F \\ -E & & \end{pmatrix} \qquad (A.3)$$

On fait l'hypothèse que D est inversible, $a_{ii} \neq 0, \forall i$

Ceci implique que D-E est aussi inversible. On écrit maintenant $Ax = b$ sous la forme

$(D - E)x = Fx + b$

On introduit un paramètre réel ω non nul. Ceci implique que $\frac{D}{\gamma} - E$ est aussi inversible on écrit donc (1) sous la forme générale :

$$\left(\frac{D}{\gamma} - E\right)x = \left(F + \frac{1-\gamma}{\gamma}D\right)x + b$$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} D \\ \gamma \end{pmatrix} \quad E \Big)^{-1} \left(F \mid \frac{1-\gamma}{\gamma} D\right) x \mid \begin{pmatrix} D \\ \gamma \end{pmatrix} \quad E \Big)^{-1} b \qquad (A.4)$$

Qu'est de la forme $x = Bx + c$ si on choisit :

$$\begin{cases} B = \left(\frac{D}{\gamma} - E\right)^{-1}\left(F + \frac{1-\gamma}{\gamma}D\right) \\ C = \left(\frac{D}{\gamma} - E\right)^{-1} b \end{cases} \qquad (A.5)$$

L'algorithme de relaxation

$$\begin{cases} x^{(0)} \overset{donnée}{=} \\ x_i^{(k+1)} = (1-\gamma)x_i^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j<i} a_{ij}\, x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{ij}\, x_j^{(k)}\right] \forall i = 1, .., n \end{cases} \qquad (A.6)$$

La méthode de relaxation ne peut converger que sous la condition nécessaire pour le coefficient de relaxation qui est donnée par $\gamma \in]0,2[$

Pour :

$\gamma > 1 \Rightarrow$ On parle de sur-relaxation

$\gamma < 1 \Rightarrow$ On parle de sous-relaxation

$\gamma = 1 \Rightarrow$ Correspond à la méthode de Gauss-Seidel

On note bien que:

La méthode de relaxation est un processus itératif exigeant le contrôle du taux de variation des inconnues au cours de chaque itération. Ceci est réalisé par des méthodes de relaxation

$$\Phi = \Phi_a + \gamma \Delta \Phi \qquad (A.7)$$

Ainsi, la nouvelle valeur de la grandeur Φ dépend de la valeur précédente Φ_a et de sa correction $\Delta\Phi$ en utilisant le coefficient de relaxation γ dont la valeur est comprise entre 0 et 2.

En pratique, les valeurs de ces coefficients de relaxation sont imposées pour les différentes grandeurs du problème. Malheureusement, il n'existe pas de règle générale concernant les meilleures valeurs de γ. Les valeurs optimales pour un cas étudié dépendent des particularités du problème.

En général, les valeurs appropriées pour certain problème sont basées sur l'expérience **[3-11-12-50-56]**

D'après **[56]** dans le cas d'un domaine rectangulaire de taille *(n-1) Δx × (m-1) y*, le calcul converge très rapidement, la valeur optimale du coefficient de relaxation est donnée par :

$$\gamma_{opt} = \frac{2\left[1-(1-\lambda)^{\frac{1}{2}}\right]}{\lambda} \qquad (A.8)$$

Où

$$\lambda = \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{n-1}\right) + \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi}{m-1}\right)}{1+\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2}\right]^2 \qquad (A.9)$$

A2. Algorithme de Thomas

La résolution d'un système linéaire à matrice tridiagonale est exploitée pour programmer des fonctions efficaces de résolution des systèmes linéaires correspondants. Les programmes sont basés sur l'algorithme de Thomas, présenté pour les matrices tridiagonales **[30] [31]** :

Le système

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ X_{n-1} \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix} \qquad \text{(A.10)}$$

Est résolut en introduisant la récurrence :

$$\begin{cases} X_k = v_k - \frac{c_k}{\beta_k} X_{k+1} & ,k = 1 \ldots\ldots (n-1) \\ X_n = v_n \end{cases} \qquad \text{(A.11)}$$

En utilisant ces relations dans le système initial, on peut déterminer les coefficients v_k , β_k

$$\begin{cases} \beta_1 = b_1 \\ \beta_k = b_k - \frac{c_{k-1}}{\beta_{k-1}} a_k & ,k = 2 \ldots\ldots n \end{cases} \qquad (A.12)$$

$$\begin{cases} v_1 = \frac{f_1}{\beta_1} = \frac{f_1}{b_1} \\ v_k = \frac{f_k - a_k v_{k-1}}{\beta_k} & ,k = 2 \ldots\ldots n \end{cases} \qquad (A.13)$$

Une fois les coefficients v_k et β_k sont calculés, les inconnues X_k seront calculées par substitution inverse en (A.10), à partir de valeur de X_n.

Résumé

Dans ce travail, on propose d'étudier l'évolution de la stratification thermique et le comportement dynamique d'un fluide dans une cavité fermée, par le moyen de simulation numérique basée sur les techniques des différences finies. Pour traiter les échanges radiatifs entre les surfaces dans l'enceinte, une méthode de radiosité est proposée pour calculer les facteurs de forme, le vecteur radiosité et le flux radiatif. Le modèle mathématique utilisé associe les deux algorithmes liés aux deux phénomènes précédemment cités. L'objectif principal de l'étude est la mise en œuvre d'un code numérique simulant la convection naturelle couplée au rayonnement dans une cavité 2D latéralement chauffée.

Mots clés : Convection naturelle, Rayonnement thermique, Différences finies, Radiosité, Couplage

Abstract

In the present work, a numerical simulation based on finite differences is proposed, to study the thermal stratification evolution and the dynamic behavior of a fluid in a closed cavity. To process the radiative exchanges between surfaces in the enclosure, a radiosity method is proposed for calculating view factors, vector radiosity, and the radiative flux. The mathematical model combines the two algorithms related to the two phenomena mentioned above. The main objective of this study is the implementation of a numerical code simulating a coupled natural convection and radiation in a laterally heated 2D cavity.

Key words : Natural convection, Thermal radiation, Finite differences, Radiosity, Coupling

ملخص

في هذا العمل ، نقترح دراسة تغيرات التصنيف الحراري والسلوك الديناميكي لمائع موجود داخل تجويف مغلق ، وذلك عن طريق تقنيات المحاكاة العددية القائمة على الفروق المحدودة. لحساب التبادلات الحرارية الإشعاعية بين سطوح التجويف ، نقترح استعمال طريقة الإشعاعية لحساب التدفق الحراري الإشعاعي .النموذج الرياضي الناتج يجمع بين خوارزميتين تابعتين للظاهرتين المذكورتين سابقا. والهدف الرئيسي من هذه الدراسة هو تنفيذ الرمز العددي لمحاكاة الحمل الطبيعي إلى جانب الإشعاع في تجويف ذو بعدين مسخن جانبيا.

مفاتيح الكلمات: الحمل الحراري. الإشعاع الحراري. الفروق المحدودة، الإشعاعية، الارتباط الحراري.